

# Über jene Gebilde, welche geschlossen, aus drei tordirten Streifen hergestellten Flächen durch gewisse Schnitte entspringen

von

Johann L. Schuster in Wien.

(Mit 5 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. Jänner 1888.)

Vereinigt man bei einer aus drei biegsamen Streifen zusammengesetzten Fläche (Taf. I, Fig. 6) deren freie Enden:  $(A_1)$ ,  $(A_2)$ ,  $(A_3)$  nach Drehungen um irgend welche ganze Vielfache von  $180^\circ$ :

$$t_1 \times 180^\circ, \quad t_2 \times 180^\circ, \quad t_3 \times 180^\circ$$

und führt durch die auf solche Art construirte geschlossene Fläche einen längs den Mittellinien:  $o\alpha_1$ ,  $o\alpha_2$ ,  $o\alpha_3$  sämtlicher Streifen in sich selbst zurückkehrenden Schnitt, so gewinnt man stets neue geschlossene Flächen, welche, je nachdem sie aus einem oder aus zwei oder allen drei Flächensectoren:  $\alpha_1 o \alpha_2$ ,  $\alpha_1 o \alpha_3$ ,  $\alpha_2 o \alpha_3$  durch Vereinigung ihrer freien Enden herstellbar sind (Taf. I, Fig. 7, 8, 9), mit  $F_1$  oder  $F_2$  oder  $F_3$  bezeichnet werden mögen. Hiebei können die von Fall zu Fall um gewisse Vielfache von  $180^\circ$ :

$$x_1 \times 180^\circ, \quad x_2 \times 180^\circ, \quad x_3 \times 180^\circ$$

verdrehten Flächen:  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  bald als isolirte Gebilde auftreten, bald nach bestimmten Gesetzen ineinander hängen, bald eigenthümliche Combinationen von Knoten und Verbindungen aufweisen, deren vollständige schematische Beschreibung die Hauptaufgabe der vorliegenden Abhandlung bildet.

Als oberste Classification ihrer Resultate ergibt sich im Anschlusse an den natürlichen Entwicklungsgang meiner diesbezüglichen zahlreichen Experimente<sup>1</sup> eine Gruppierung nach vier verschiedenen Kategorien von Specialfällen.

Die erste Kategorie umfasst sämtliche Fälle, in welchen die durch den Schnitt erzeugten Gebilde ohne Zuhilfenahme irgend welcher topologischer Gattungsbegriffe vollständig beschrieben werden können. In die zweite Kategorie sind jene Fälle einzu beziehen, in welchen durch Ausführung des Schnittes Gebilde in einfachen Verbindungen, beziehungsweise mit einfachen Knoten erhalten werden, während die Fälle der dritten Kategorie sämtliche Gebilde in Doppelverbindungen, sowie jene mit Verknüpfungen, respective Verschlingungen in sich begreifen.<sup>2</sup> — Alle Fälle endlich, deren vollständige Charakteristik die Einführung höherer topologischer Gattungsbegriffe erheischt, zählen zur vierten Kategorie und sind mit den früher behandelten Fällen insoferne topologisch verknüpft, als eine entsprechende Specialisirung ihrer Gattungsbegriffe die niederen Gattungsbegriffe der dritten, beziehungsweise zweiten Kategorie von Fällen liefert.

Jede der vier Kategorien gliedert sich ihrerseits in verschiedene Unterabtheilungen, bei deren Feststellung neben der Anzahl der durch den Schnitt erzeugten Gebilde auch noch die specifischen topologischen Merkmale der letzteren in Betracht kommen. Da nun jene Anzahl unmittelbar durch die Anzahl der geschlossenen Curven bestimmt wird, welche die ursprünglich gegebene Fläche von Fall zu Fall begrenzen, und bekanntlich jeder ringförmig geschlossene Streifen eine oder zwei Randcurven besitzt, je nachdem seine Torsion ein ungerades oder ein gerades Vielfaches von  $180^\circ$  beträgt, entsprechen die eingeführten Unterabtheilungen — abgesehen von den singulären Fällen — durchgängig je einer bestimmten Combination

<sup>1</sup> Die Anzahl meiner protokollirten Experimente beträgt 360.

<sup>2</sup> Diese Gattungsbegriffe sind zuerst in der 1881 im LXXXIV. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie publicirten Abhandlung meines Lehrers Prof. Dr. O. Simony: „Über jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse, in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen“ — aufgestellt und discutirt worden.

ungerader respective gerader Werthe der Torsionszahlen:  $t_1, t_2, t_3$  und lassen sich arithmetisch durch gewisse, dem Zahlenschema:

$$t_1 = \pm \begin{cases} 2h, \\ 2h+1, \end{cases} \quad t_2 = \pm \begin{cases} 2k, \\ 2k+1, \end{cases} \quad t_3 = \pm \begin{cases} 2l, \\ 2l+1 \end{cases}$$

entnommene Gruppen von Substitutionen für  $t_1, t_2, t_3$  characterisiren, welche erst in den allgemeinen Fällen der vierten Kategorie sämtliche unbestimmte ganze Zahlen:  $h, k, l$  enthalten.

In diesem Sinne erscheinen die Fälle der ersten drei Kategorien jenen der vierten Kategorie nicht nur topologisch, sondern auch arithmetisch untergeordnet, so dass man bei der jeweiligen Entscheidung der Frage, welche Gebilde beliebig gewählten Specialisirungen von  $t_1, t_2, t_3$  zugehören, stets von dem Schema der Fälle vierter Kategorie auszugehen hat. Um mithin der Beschreibung der in Frage stehenden Gebilde die nöthige Übersichtlichkeit zu verleihen, müssen in allen Unterabtheilungen jene Specialisirungen von  $h, k, l$  angegeben werden, welche von Fällen höherer Kategorie auf solche niederer Kategorie führen.

Was ferner die Bestimmung der Zeichen anlangt, welche die jeweiligen numerischen Werthe von  $t_1, t_2, t_3$ ;  $x_1, x_2, x_3$  zu erhalten haben, so mag dieselbe hier in gleicher Weise wie bei ringförmig geschlossenen, knotenfreien Streifen erfolgen.<sup>1</sup> Es werden also z. B. für eine nach dem Muster der schematischen Fig. 5 (Taf. I) construirte geschlossene Fläche — entsprechend den Überkreuzungen ihrer als Doppellinien gezeichneten Randcurven — die Torsionszahlen der beiden äusseren Streifen als positiv, jene des Mittelstreifens als negativ in Rechnung zu ziehen sein. — In demselben Sinne mag auch bei jeder verknoteten Fläche  $F_3$ , deren Verknotung je nach der Art ihrer Auflösung verschiedene Werthe für  $x_3$  liefert und insoferne keine

---

<sup>1</sup> S. h. die dritte Auflage der Brochure von Prof. Simony: „Gemeinfaßliche, leicht controlirbare Lösung der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes Band einen Knoten zu machen — und verwandter merkwürdiger Probleme“. (Wien, Gerold & Comp. 1881).

eindeutige empirische Bestimmung von  $x_3$  gestattet,<sup>1</sup> das Zeichen jener äusseren Torsionszahl:  $\xi$  von  $F_3$  präcisirt werden, welche angibt, wie viele positive, respective negative Torsionen um je  $180^\circ$  in dem unverknoteten Theile der Fläche  $F_3$  enthalten sind.

Endlich kommt bei der Systemisirung der im Folgenden unterschiedenen Fälle noch die allgemeine Überlegung zur Geltung, dass sich, da sämtliche Enden nach ihrer Torsion mit einander vereinigt werden, jede der drei Torsionszahlen:  $t_1, t_2, t_3$  auf jedes der drei Enden beziehen lässt. Sobald demnach die Beschreibung der durch den erwähnten Schnitt erzeugbaren Gebilde für irgend ein specielles Werthsystem:  $p, q, r$  von  $t_1, t_2, t_3$  gegeben ist, erscheinen zugleich auch die Fälle:

$$\begin{aligned} t_1 = p, t_2 = r, t_3 = q; & \quad t_1 = q, t_2 = p, t_3 = r; \\ t_1 = q, t_2 = r, t_3 = p; & \quad t_1 = r, t_2 = p, t_3 = q; \\ & \quad t_1 = r, t_2 = q, t_3 = p \end{aligned}$$

erledigt. — Dies vorausgeschickt, können vorläufig die Fälle der ersten drei Kategorien ohne Hinzuziehung neuer topologischer Gattungsbegriffe schematisch dargestellt werden.

### (I.) Die Fälle erster Kategorie.

$$(\alpha) \dots t_1 = t_2 = t_3 = 0.$$

Es entstehen drei isolirte knotenfreie und torsionslose Flächen  $F_1$ .

$$(\beta) \dots t_1 = \pm 1, t_2 = t_3 = 0.$$

Man erhält zwei isolirte, knotenfreie Flächen:  $F_1, F_2$ , von welchen  $F_1$  torsionslos ist,  $F_2$  dagegen die mit  $t_1$  gleichbezeichnete Torsionszahl:  $x_2 = \pm 4$  besitzt. Ausserdem ergeben sich

<sup>1</sup> Von den hier benützten Gattungsbegriffen gehören in diese Classe von Verknotungen ausser den Verknüpfungen und Verschlingungen (s. die zuerst citirte Abhandlung, S. 250) noch das verkettete Knotenpaar, die Verflechtung und der verkettete Doppelknoten.

zwei isolirte, knotenfreie Flächen:  $F_1, F_2$  noch in den beiden eingulären Fällen:

$$t_1 = t_2 = +2, t_3 = -1; \quad t_1 = t_2 = -2, t_3 = +1,$$

wobei nunmehr die Fläche  $F_2$  unverdreht bleibt, während  $F_1$  die mit  $t_1$  gleichbezeichnete Torsionszahl:  $x_1 = \pm 4$  aufweist.

$$(\gamma) \dots t_1 = \pm \begin{cases} 2h, \\ 2h+1 \end{cases}, \quad t_2 = \pm 1, \quad t_3 = \mp 1.$$

Es entsteht eine einzige knotenfreie und torsionslose Fläche  $F_3$ . Ausserdem gewinnt man eine einzige knotenfreie Fläche  $F_3$  noch in den vier singulären Fällen:

$$t_1 = t_2 = +1, t_3 = 0; \quad t_1 = +3, t_2 = +2, t_3 = -1;$$

$$t_1 = t_2 = -1, t_3 = 0; \quad t_1 = -3, t_2 = -2, t_3 = +1,$$

wobei  $F_3$  im ersten und zweiten Falle die Torsionszahl:  $x_3 = +8$ , im dritten und vierten Falle hingegen die Torsionszahl:  $x = -8$  besitzt.<sup>1</sup>

## (II.) Die Fälle zweiter Kategorie.

$$(\alpha) \dots t_1 = \pm 2h, \quad t_2 = \pm 2k, \quad t_3 = 0.$$

Es entstehen drei Flächen  $F_1$  mit den Torsionszahlen:  $t_1, t_2$  und  $t_1 + t_2$ . Hierbei sind die Flächen mit den Torsionszahlen  $t_1, t_2$  von einander isolirt und zeigen nur mit der dritten Fläche je eine einfache Verbindung, welche mit der Torsionszahl  $t_1$  respective  $t_2$  gleichsinnig ist und sich aus halb so viel Aufhängungen zusammensetzt, als  $t_1$  respective  $t_2$  Einheiten enthält. Für  $h = 0$ , beziehungsweise  $k = 0$  bleibt eine der drei Flächen

<sup>1</sup> Hienach besitzen die hier untersuchten Gebilde vor jenen, welche aus ringförmig geschlossenen Bündern durch in sich selbst zurückkehrende Längsschnitte erzeugbar sind, schon insoferne ein unterscheidendes Merkmal, als sich überhaupt kein ringförmig geschlossenes Band construiren lässt, dessen Zerschneidung längs seiner Mittellinie eine einzige untordirte geschlossene Fläche liefert, während derartige Flächen aus den hier in Betracht gezogenen Gebilden für unendlich viele Specialisirungen von  $t_1, t_2, t_3$  erhalten werden können.

torsionslos und von beiden übrigen Flächen isolirt, deren gegenseitige Verbindung lediglich für  $h = k = 0$ , d. h. in dem Ausnahmefalle (I) ( $\alpha$ ) aufgehoben wird.

$$(\beta) \dots t_1 = \pm(2h+1), t_2 = \pm 2k, t_3 = 0.$$

Man erhält zwei Flächen:  $F_1, F_2$ , welche für  $k = 0$  isolirt sind, für  $k > 0$  in einer mit  $t_2$  gleichsinnigen einfachen Verbindung  $k$ ter Art stehen. Die Fläche  $F_1$  ist knotenfrei und mit der Torsionszahl  $t_2$  versehen, während  $F_2$  einen mit  $t_1$  gleichsinnigen einfachen Knoten  $h$ ter Art und die Torsionszahl:  $x_3 = 2(t_1 \pm 1) + t_2$  aufweist, in welcher das Zeichen der Einheit jenem von  $t_1$  correspondirt. Da die Bestimmungen: „Knoten nullter Art“ und „knotenfrei“ gleichbedeutend sind, resultiren hieraus einerseits für  $h = k = 0$  wieder die in der Unterabtheilung (I) ( $\beta$ ) den Torsionszahlen:  $t_1 = \pm 1, t_2 = t_3 = 0$  zugeordneten Gebilde, andererseits für  $h = 0, k > 0$  regelmässig zwei knotenfreie Flächen  $F_1, F_2$  in einer einfachen Verbindung vom Typus  $(\pm)_k$ . Es müssen daher in die vorstehende Unterabtheilung auch noch die Substitutionen:

$$t_1 = +2h, t_2 = +2, t_3 = -1; t_1 = +2h, t_2 = -2, t_3 = +1; \\ t_1 = -2h, t_2 = +2, t_3 = -1; t_1 = -2h, t_2 = -2, t_3 = +1$$

einbezogen werden, indem denselben gleichfalls je zwei knotenfreie, in einfachen Verbindungen von den Typen:

$$(+)_h, (+)_{h+1}, (-)_{h+1}, (-)_h$$

stehende Flächen:  $F_1, F_2$  entsprechen,<sup>1</sup> deren Torsionszahlen:

---

<sup>1</sup> Bekanntlich liefert ein längs seiner Mittellinie zerschnittener, ringförmig geschlossener Streifen im Ganzen für zwei Torsionszahlen:  $t = +2, t = -2$  zwei knotenfreie geschlossene Flächen in einer positiven Verbindung erster Art, während jede positive Verbindung höherer Art zweier derartiger Flächen nur für je eine Specialisirung von  $t$  erzeugt werden kann. Dagegen lässt sich bei den hier untersuchten Gebilden zunächst eine positive Verbindung erster Art zweier knotenfreier geschlossener Flächen für sechs specielle Werthsysteme von  $t_1, t_2, t_3$ :

$$+2, +1, 0; \quad +2, -1, 0; \quad +4, +2, -1; \\ -2, -1, 0; \quad -2, +1, 0; \quad -4, -2, +1$$

$x_1, x_2$  der Reihe nach die Werthe:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2h+2, \quad 2h-2, \quad -2h+2, \quad -2h-2; \\ x_2 &= 2h-2, \quad 2h+2, \quad -2h-2, \quad -2h+2 \end{aligned}$$

besitzen. Für  $h = 1$  liefert die erste und vierte Gruppe von Substitutionen schliesslich die beiden singulären Fälle der Unterabtheilung (I) ( $\beta$ ):

$$t_1 = t_2 = +2, \quad t_3 = -1; \quad t_1 = t_2 = -2, \quad t_3 = +1.$$

$$(\gamma) \dots t_1 = \pm(2h+1), \quad t_2 = \pm(2k+1), \quad t_3 = 0.$$

Man gewinnt eine einzige Fläche  $F_3$  mit zwei getrennten einfachen Knoten  $h$ ter und  $k$ ter Art, von welchen der erste mit  $t_1$ , der zweite mit  $t_2$  gleichsinnig ist. Die Torsionszahl von  $F_3$  besitzt den Werth:

$$x_3 = 2(t_1 \pm 1) + 2(t_2 \pm 1),$$

in welcher Summe das Zeichen der Einheit im ersten Summanden jenem von  $t_1$ , im zweiten jenem von  $t_2$  correspondirt. Hieraus ergeben sich einerseits für  $h = k = 0$  der erste und dritte singuläre Fall der Unterabtheilung (I) ( $\gamma$ ):

$$t_1 = t_2 = +1, \quad t_3 = 0; \quad t_1 = t_2 = -1, \quad t_3 = 0,$$

andererseits für  $h > 0, k = 0$ , beziehungsweise für  $h = 0, k > 0$  lauter Fälle, in welchen die Fläche  $F_3$  einen einzigen einfachen Knoten vom Typus:  $(\pm)_h$  respective  $(\pm)_k$  aufweist. Derartige Flächen entstehen ausserdem noch für zwei Reihen von Substitutionen. Die erste Reihe umfasst die Fälle:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2h+1, \quad t_2 = +2, \quad t_3 = -1; \\ t_1 &= 2h+1, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = +1; \\ t_1 &= -(2h+1), \quad t_2 = +2, \quad t_3 = -1; \\ t_1 &= -(2h+1), \quad t_2 = -2, \quad t_3 = +1, \end{aligned}$$

herstellen, und jede positive Verbindung höherer Art zweier solcher Flächen z. B. jene vom Typus  $(+)_a$  für je vier Werthsysteme von  $t_1, t_2, t_3$ :

$$2a, +1, 0; \quad 2a, -1, 0; \quad 2(a+1), +2, -1; \quad 2(a-1), -2, +1$$

erzeugen. Dasselbe gilt natürlich auch von den negativen Verbindungen erster und höherer Art.

in welchen die mit den Torsionszahlen:

$$4(h+1), \quad 4(h+1), \quad -4(h+1), \quad -4(h+1)$$

versehenen Flächen  $F_3$  allgemein die einfachen Knoten von den Typen:

$$(+)^{h-1}, \quad (+)^{h+1}, \quad (-)^{h+1}, \quad (-)^{h-1}$$

besitzen und demgemäss nur unter der Annahme:  $h = 1$  für:

$$t_1 = +3, \quad t_2 = +2, \quad t_3 = -1; \quad t_1 = -3, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = +1,$$

d. h. im zweiten und vierten singulären Falle der Unterabtheilung (I) ( $\gamma$ ) knotenfrei werden. Die zweite Reihe von Substitutionen wird durch die singulären Fälle:

$$t_1 = t_2 = t_3 = +1; \quad t_1 = t_2 = +3, \quad t_3 = -1;$$

$$t_1 = t_2 = t_3 = -1; \quad t_1 = t_2 = -3, \quad t_3 = +1$$

gebildet, in welchen  $F_3$  einen mit  $t_1$  ungleichsinnigen Knoten erster Art und die mit  $t_1$  gleichsinnige Torsionszahl:  $x_3 = \pm 4$  erhält.<sup>1</sup>

### (III.) Die Fälle dritter Kategorie.

$$(\alpha) \dots t_1 = \pm 2h, \quad t_2 = \pm 2h, \quad t_3 = \pm 1.$$

Man erhält zwei Flächen:  $F_1, F_2$  mit den Torsionszahlen:

$$x_1 = t_1 + t_2, \quad x_2 = t_1 + t_2 + 4t_3,$$

<sup>1</sup> Bei den hier untersuchten Gebilden bestehen also für die Erzeugung einer einzigen geschlossenen Fläche mit einem positiven Knoten erster Art im Ganzen sechs specielle Werthsysteme von  $t_1, t_2, t_3$ :

$$\begin{array}{lll} +3, +1, 0; & +3, -1, 0; & +5, +2, -1; \\ -2, +1, +1; & -1, -1, -1; & -3, -3, +1, \end{array}$$

und für die Herstellung einer geschlossenen Fläche mit einem positiven Knoten höherer Art, z. B. mit einem solchen vom Typus  $(+)^a$  je vier specielle Werthsysteme von  $t_1, t_2, t_3$ :

$$2a+1, +1, 0; \quad 2a+1, -1, 0; \quad 2a+3, +2, -1; \quad 2a-1, -2, +1,$$

während ein längs seiner Mittellinie zerschnittener, ringförmig geschlossener Streifen bekanntlich nur für je eine Specialisirung seiner jeweiligen Torsionszahl eine einzige geschlossene Fläche mit einem positiven Knoten erster, beziehungsweise höherer Art liefert. Dasselbe gilt natürlich auch von den negativen Knoten erster und höherer Art.



welche im Allgemeinen in einer Doppelverbindung mit einander stehen, und zwar entsprechen, da bekanntlich<sup>1</sup> die Doppelverbindungen von den Typen:

$$[(+)_a(+)_b], [(+)_a(-)_b], [(-)_a(+)_b], [(-)_a(-)_b]$$

stets in solche von den Typen:

$$[(+)_b(+)_a], [(-)_{b-1}(+)_{a+1}], [(+)_b(-)_{a+1}], [(-)_b(-)_a]$$

transformirbar sind, den acht möglichen Zeichencombinationen von  $t_1, t_2, t_3$ :

$$\begin{array}{l} + + +; + + -; + - +; - + +; \\ + - -; - + -; - - +; - - - \end{array}$$

zwei achtgliederige Typengruppen, deren erste:

$$\begin{array}{l} [(+)_k(+)_k], [(+)_k(-)_{k-1}], [(-)_{k-1}(+)_{k+1}], \\ [(+)_k(-)_{k+1}], [(-)_{k+1}(+)_{k-1}], [(-)_{k+1}(-)_k] \end{array}$$

auf Grundlage jener Typenrelationen unmittelbar die Typen der zweiten Gruppe liefert. Gemäss dem weiteren Satze, dass sich speciell die Doppelverbindungen von den Typen:

$$[(+)_a(+)_0], [(+)_a(-)_1], [(-)_a(+)_1], [(-)_a(-)_0]$$

in einfache Verbindungen von den Typen:

$$(+)_a, (+)_{a+1}, (-)_{a+1}, (-)_a$$

verwandeln lassen, können schliesslich die der zweiten, dritten, sechsten und siebenten Zeichencombination correspondirenden Doppelverbindungen für  $k = 1$  auf einfache Verbindungen von den Typen:  $(+)_{h-1}, (+)_{h+1}, (-)_{h+1}, (-)_{h-1}$  reducirt werden, wonach die der Unterabtheilung (II) ( $\beta$ ) zugeordneten Fälle:

$$\begin{array}{l} t_1 = +2h, t_2 = +2, t_3 = -1; t_1 = +2h, t_2 = -2, t_3 = +1; \\ t_1 = -2h, t_2 = +2, t_3 = -1; t_1 = -2h, t_2 = -2, t_3 = +1 \end{array}$$

<sup>1</sup> Alle im Folgenden verwertheten Sätze über Doppelverbindungen, Verknüpfungen und Verschlingungen finden sich in der zuerst citirten Abhandlung, S. 248, 249.

auch in topologischer Hinsicht als Specialisirungen von Fällen der vorstehenden Unterabtheilung zu betrachten sind.

$$(\beta) \dots t_1 = \pm(2h+1), t_2 = \pm 2k, t_3 = \pm 1.$$

Es entsteht eine einzige, mit einer Verknüpfung erster Ordnung versehene Fläche  $F_3$ , deren äussere Torsionszahl den Werth:

$$\xi = (t_1 \pm 1) + (t_2 \pm 2) + 2t_3$$

besitzt, wobei das Zeichen der Einheit im ersten Summanden mit jenem von  $t_1$  und analog das Zeichen von 2 im zweiten Summanden mit jenem von  $t_2$  übereinstimmt. Gleich dem jeweiligen Typus der Doppelverbindung hängt auch jener der Verknüpfung von sämtlichen Torsionszahlen:  $t_1, t_2, t_3$  ab, und zwar entsprechen der bereits festgestellten Folge von Zeichencombinationen der Reihe nach die Typen:

$$\begin{aligned} & [(+)\_{h+1} (+)\_k], [(+)\_h (+)\_{k-1}], [(+)\_{h+1} (-)\_{k-1}], [(-)\_h (+)\_k], \\ & [(+)\_h (-)\_k], [(-)\_{h+1} (+)\_{k-1}], [(-)\_h (-)\_{k-1}], [(-)\_{h+1} (-)\_k]. \end{aligned}$$

Da gemäss der allgemeinen Definition der Verknüpfung jeder mit einer Verknüpfung vom Typus:  $[(\pm)\_0 (\pm)\_a]$  versehene Flächentheil knotenfrei ist, resultiren speciell bei der zweiten, vierten, fünften und siebenten Zeichencombination für  $h=0$  lauter knotenfreie Flächen  $F_3$ , so dass den in Betracht gezogenen Fällen dritter Kategorie zunächst alle Fälle erster Kategorie topologisch untergeordnet sind, in welchen zwei ungleichsinnig um  $1 \times 180^\circ$  verdrehte Enden mit dem untordirten oder um ein beliebiges gerades Vielfaches von  $180^\circ$  tordirten dritten Ende vereinigt werden.

Da sich ferner die Verknüpfungen von den Typen:

$$[(+)\_a (+)\_0], [(+)\_a (-)\_0], [(-)\_a (+)\_0], [(-)\_a (-)\_0]$$

immer auf einfache Knoten von den Typen:

$$(+)\_{a-1}, (+)\_a, (-)\_a, (-)\_{a-1}$$

reduciren, liefern die der zweiten, dritten, sechsten und siebenten Zeichencombination correspondirenden Fälle für  $k=1$  durchgängig einfache Knoten von den Typen:  $(+)\_{h-1}, (+)\_{h+1},$

$(-)_h$ ,  $(-)_h$ , wonach auch die der Unterabtheilung (II), ( $\gamma$ ) zugeordneten Fälle:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2h+1, t_2 = +2, t_3 = -1; \\ t_1 &= 2h+1, t_2 = -2, t_3 = +1; \\ t_1 &= -(2h+1), t_2 = +2, t_3 = -1; \\ t_1 &= -(2h+1), t_2 = -2, t_3 = +1 \end{aligned}$$

aus solchen der vorstehenden Unterabtheilung topologisch ableitbar sind.

Ausserdem gehören hierher noch zwei weitere Gruppen von Fällen mit den Torsionszahlen:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2h+1, t_2 = t_3 = 1; t_1 = -(2h+1), t_2 = t_3 = 1; \\ t_1 &= 2h+1, t_2 = t_3 = -1; t_1 = -(2h+1), t_2 = t_3 = -1 \end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2h+1, t_2 = +3, t_3 = -1; \\ t_1 &= 2h+1, t_2 = -3, t_3 = +1; \\ t_1 &= -(2h+1), t_2 = +3, t_3 = -1; \\ t_1 &= -(2h+1), t_2 = -3, t_3 = +1, \end{aligned}$$

indem der ersten Gruppe lauter Flächen  $F_3$  mit Verknüpfungen von den Typen:

$$[(-)_1 (+)_h], [(-)_1 (-)_h], [(+)_1 (+)_h], [(+)_1 (-)_h]$$

und der zweiten Gruppe von Fällen ebensolche Flächen mit Verknüpfungen von den Typen:

$$[(-)_1 (+)_{h-1}], [(+)_1 (+)_{h+1}], [(-)_1 (-)_{h+1}], [(+)_1 (-)_{h-1}]$$

entsprechen. Auch diese Verknüpfungen gehen kraft der zuletzt angegebenen Typenrelationen für bestimmte Specialwerthe von  $h$  ausnahmsweise in einfache Knoten über, und zwar in der ersten Gruppe von Fällen für  $h = 0$  bei den nachstehenden Torsionszahlen:

$$t_1 = t_2 = t_3 = +1; t_1 = t_2 = t_3 = -1,$$

desgleichen in der zweiten Gruppe für  $h = 1$  bei den Torsionszahlen:

$$t_1 = t_2 = +3, t_3 = -1; t_1 = t_2 = -3, t_3 = +1,$$

welche Substitutionen augenscheinlich die vier singulären Fälle der Unterabtheilung (II) ( $\gamma$ ) präcisiren.

$$(\gamma) \dots t_1 = \pm(2h+1), t_2 = \pm(2k+1), t_3 = \pm 1.$$

Es ergibt sich eine einzige mit einer Verschlingung erster Ordnung versehene Fläche  $F_3$ , deren äussere Torsionszahl den Werth:

$$\xi = (t_1 \pm 2) + (t_2 \pm 2) + 2t_3$$

besitzt, wobei das Zeichen von 2 im ersten Summanden mit jenem von  $t_1$ , im zweiten mit jenem von  $t_2$  übereinstimmt. Da bekanntlich jeder Verschlingung erster Ordnung zwei Typen zukommen, welche sich durch Vertauschung ihrer beiden symbolischen Factoren ineinander überführen lassen, entsprechen den acht Zeichencombinationen von  $t_1, t_2, t_3$  hier wieder zwei achtgliedrige Typengruppen, von welchen die zweite durch den eben erwähnten Process unmittelbar aus der ersten:

$$[(+)_h (+)_{h+1}], [(+)_h (+)_k], [(+)_h (-)_k], [(-)_h (+)_{h+1}], \\ [(+)_h (-)_{h+1}], [(-)_{h+1} (+)_k], [(-)_h (-)_k], [(-)_{h+1} (-)_{h+1}]$$

ableitbar ist. Wird  $k$  speciell gleich Null, so gehen die der zweiten, dritten, sechsten und siebenten Zeichencombination zugeordneten Typen in solche von der Form:  $[(\pm)_a (\pm)_a]$  über, woraus gemäss der Definition der Verschlingung folgt, dass alle jene Fälle, in welchen zwei ungleichsinnig um  $1 \times 180^\circ$  verdrehte Enden mit dem um ein beliebiges ungerades Vielfaches von  $180^\circ$  tordirten dritten Ende vereinigt werden, knotenfreie Flächen  $F_3$  liefern. Es erscheint demnach auch den vorstehenden Fällen dritter Kategorie eine Gruppe von Fällen der Rubrik (I) ( $\gamma$ ) topologisch untergeordnet.

Da sich ferner die Verschlingungen von den Typen:

$$[(+)_a (+)_1], [(+)_a (-)_1], [(-)_a (+)_1], [(-)_a (-)_1]$$

stets in Verknüpfungen von den Typen:

$$[(-)_1 (+)_{a-1}], [(+)_1 (+)_a], [(-)_1 (-)_a], [(+)_1 (-)_{a-1}]$$

verwandeln lassen, resultiren einerseits für  $h = 0$  bei der ersten, vierten, fünften und achten Zeichencombination aus den diesbezüglichen Typen der Verschlingungen jene der Verknüpfungen für die Fälle:

$$t_1 = 2h+1, t_2 = t_3 = 1; t_1 = -(2h+1), t_2 = t_3 = 1; \\ t_1 = 2h+1, t_2 = t_3 = -1; t_1 = -(2h+1), t_2 = t_3 = -1$$

andererseits für  $k = 1$  bei der zweiten, dritten, sechsten und siebenten Zeichencombination aus den zugehörigen Typen der Verschlingungen jene der Verknüpfungen für die Fälle:

$$\begin{aligned} t_1 &= 2h+1, t_2 = +3, t_3 = -1; \\ t_1 &= 2h+1, t_2 = -3, t_3 = +1; \\ t_1 &= -(2h+1), t_2 = +3, t_3 = -1; \\ t_1 &= -(2h+1), t_2 = -3, t_3 = +1, \end{aligned}$$

so dass der vorstehenden Unterabtheilung in topologischer Hinsicht auch die zweite und dritte Gruppe von Fällen der Rubrik (III) ( $\beta$ ) untergeordnet sind.

Es erübrigt jetzt noch die Darstellung der Fälle vierter Kategorie, zu welchem Zwecke wir gemäss unseren einleitenden Bemerkungen neue topologische Gattungsbegriffe benöthigen, deren Nomenclatur und allgemeine Definitionen in den nachstehenden Sätzen gegeben sind:

1) Umwinden die Mittellinien:  $M, M', M''$  dreier geschlossener Flächen  $F, F', F''$  einander im positiven oder negativen Sinne nach dem Muster der schematischen Fig. 10 (Taf. II), so stehen jene Flächen in einer wechselseitigen Verkettung vom Typus:  $[(\pm)_a (\pm)_b (\pm)_c]$ , mithin beispielsweise in dem durch Fig. 11 (Taf. II) versinnlichten Falle in einer wechselseitigen Verkettung vom Typus:  $[(+)_a (+)_b (-)_c]$ .

2) Verläuft die Mittellinie:  $M'$  von  $F'$  in Bezug auf jene von  $F$  nach dem Muster der schematischen Fig. 14 (Taf. III), so steht  $F'$  mit  $F$  in einer nach dem Typus  $(\pm)_a$  geknoteten Doppelverbindung vom Typus  $[(\pm)_b (\pm)_c]$ , z. B. also in dem durch Fig. 15 (Taf. III) dargestellten Falle in einer nach dem Typus  $(+)_a$  geknoteten Doppelverbindung vom Typus:  $[(+)_b (-)_c]$ .

3) Verläuft die Mittellinie  $M'$  von  $F'$  in Bezug auf jene von  $F$  derart, dass ihre Windungen durch jene eines einfachen, in  $F$  enthaltenen Knotens irgend welcher Art nach dem Muster der schematischen Fig. 16 (Taf. III) in zwei separate Gruppen getrennt werden, so steht  $F'$  mit  $F$  in einer irregulären Doppelverbindung vom Typus  $[(\pm)_a (\pm)_b]$ , falls die Überkreuzung:  $u$  für die Typen  $[(+)_a (+)_b]$ ,  $[(+)_a (-)_b]$  im Sinne von Fig. 17 und für die Typen  $[(+)_a (-)_b]$ ,  $[(+)_a (-)_b]$  im Sinne von Fig. 18 (Taf. III) erfolgt.

4) Verläuft die Mittellinie  $M$  von  $F$  nach dem Muster der schematischen Fig. 21 (Taf. IV), so besitzt diese geschlossene Fläche ein nach dem Typus  $(\pm)_a$  verkettetes Knotenpaar vom Typus:  $[(\pm)_b (\pm)_c]$ , folglich beispielsweise in dem durch Fig. 22 veranschaulichten Falle ein nach dem Typus  $(-)_h$  verkettetes Knotenpaar vom Typus  $[(+)_k (-)_l]$ .

5) Ist die Mittellinie einer gegebenen geschlossenen Fläche  $F$  nach dem Muster der schematischen Fig. 12 (Taf. II) mit sich selbst verkettet, so besitzt  $F$  eine Verflechtung vom Typus:  $[(\pm)_a (\pm)_b (\pm)_c]$ , z. B. also in dem durch Fig. 13 (Taf. II) dargestellten Falle eine Verflechtung vom Typus:  $[(+)_h (+)_k (+)_l]$ .

6) Verläuft die Mittellinie von  $F$  nach dem Muster der schematischen Fig. 23 (Taf. IV), so besitzt  $F$  einen nach dem Typus  $(\pm)_a$  verketteten Doppelknoten vom Typus:  $[(\pm)_b (\pm)_c]$ , mithin beispielsweise in dem durch Fig. 24 (Taf. IV) wiedergegebenen Falle einen nach dem Typus  $(+)_h$  verketteten Doppelknoten vom Typus  $[(+)_k (-)_l]$ .

Nachdem hiemit alle für die Fälle vierter Kategorie in Betracht kommenden neuen Gattungsbegriffe als solche definiert sind, müssen behufs ihrer praktischen Verwerthung noch folgende nähere Bestimmungen hinzugefügt werden, welche einerseits die symbolische Beschreibung der durch diese Gattungsbegriffe präcisirten topologischen Gebilde, andererseits die möglichen Transformationen der letzteren betreffen:

(A) Jede zwischen drei geschlossenen Flächen  $F, F', F''$  bestehende wechselseitige Verkettung von dem Typus:  $[(\pm)_a (\pm)_b (\pm)_c]$  lässt sich zufolge ihres Bildungsgesetzes ausserdem in allen Typen darstellen, welche aus dem angeführten Typus durch Permutation seiner drei Glieder:  $(\pm)_a, (\pm)_b, (\pm)_c$  hervorgehen.

(A)<sub>a</sub> Wird speciell einer der drei Indices  $a, b, c$  gleich Null, so zerfällt die betreffende Verkettung in zwei einfache Verbindungen zweier getrennter Flächen mit einer und derselben dritten Fläche, wobei die Typen dieser einfachen Verbindungen durch die beiden Typenglieder mit nicht verschwindendem Index gegeben werden.

(B) Jede nach dem Typus  $(\pm)_a$  geknotete Doppelverbindung einer geschlossenen Fläche  $F'$  mit einer zweiten:

$F$  ist in eine identisch geknotete Doppelverbindung von  $F'$  mit  $F$  transformierbar, deren Typus aus dem Typus:  $[(\pm)_b (\pm)_c]$  der gegebenen Doppelverbindung durch Vertauschung seiner beiden Glieder erhalten wird.

$(B)_\alpha$  Für  $a = 0$  geht jede geknotete Doppelverbindung in eine ungeknotete Doppelverbindung von gleichem Typus über, welche ursprünglich entweder als reguläre oder als irreguläre Doppelverbindung auftreten kann, im letzteren Falle sich jedoch stets in eine reguläre Doppelverbindung verwandeln lässt, und zwar entsprechen den vier möglichen Typen irregulärer Doppelverbindungen:

$$[(+)_b (+)_c], [(+)_b (-)_c], [(-)_b (+)_c], [(-)_b (-)_c]$$

der Reihe nach folgende Typen regulärer Doppelverbindungen

$$[(+)_b (-)_c], [(+)_b (-)_c], [(-)_b (+)_c], [(-)_b (-)_c],$$

auf welche natürlich auch die früher mitgetheilten Typenrelationen für reguläre Doppelverbindungen anwendbar sind.

$(B)_\beta$  Für  $b = 0$ , beziehungsweise  $c = 0$  zerfällt jede geknotete Doppelverbindung von  $F'$  mit  $F$  in einen einfachen, der Fläche  $F'$  angehörigen Knoten und in eine von dem letzteren getrennte einfache Verbindung der Fläche  $F'$  mit  $F$ , wobei der Typus, nach welchem die Doppelverbindung geknotet war, jenen des einfachen Knotens und ihr nicht verschwindendes Typenglied den Typus der einfachen Verbindung liefert.

$(C)$  Jedes nach dem Typus  $(\pm)_a$  verkettete Knotenpaar einer geschlossenen Fläche  $F$  ist in ein identisch verkettetes Knotenpaar transformierbar, dessen Typus aus dem Typus  $[(\pm)_b (\pm)_c]$  des gegebenen Knotenpaares durch Vertauschung seiner beiden Glieder hervorgeht.

$(C)_\alpha$  Für  $a = 0$  zerfällt jedes verkettete Knotenpaar in zwei getrennte einfache Knoten (Taf. III, Fig. 19), welche sich längs der Fläche  $F$  beliebig verschieben und daher stets in die durch Fig. 20 (Taf. III) schematisch characterisirte Stellung bringen lassen, so dass der eine Knoten in allen der-

artigen Fällen nicht nur der Basis, sondern auch dem Schluss-  
theile des anderen Knotens angehören kann.

$(C)_\beta$  Verschwindet einer der beiden Indices:  $b, c$ , so reducirt  
sich das verkettete Knotenpaar stets auf eine Verknüpfung  
erster Ordnung, für deren vollständige Charakteristik in  
Folge der Vertauschbarkeit beider Knoten die, den Typen:

$$[(+)_b (+)_0], [(+)_b (-)_0], [(-)_b (+)_0], [(-)_b (-)_0]$$

des Knotenpaares zugeordneten Typen der Verknüpfung aus-  
reichen. Die letzteren hängen gleichzeitig von dem Typus der  
jeweiligen Verkettung beider Knoten ab, und zwar entsprechen  
den angeführten Typen des Knotenpaares bei einer Verkettung  
vom Typus:  $(+)_a$  Verknüpfungen von den Typen:

$$[(+)_b (+)_a], [(+)_b (+)_{a-1}], [(-)_b (+)_a], [(-)_b (+)_{a-1}],$$

hingegen bei einer Verkettung vom Typus:  $(-)_a$  Verknüpfungen  
von den Typen:

$$[(+)_b (-)_{a-1}], [(+)_b (-)_a], [(-)_b (-)_{a-1}], [(-)_b (-)_a].$$

$(D)$  Jede in einer geschlossenen Fläche  $B'$  vorhandene Ver-  
flechtung vom Typus:  $[(\pm)_a (\pm)_b (\pm)_c]$  besitzt zufolge ihres  
Bildungsgesetzes gleichzeitig alle Typen, welche aus dem an-  
geführten Typus durch Permutation seiner drei Glieder ent-  
springen.

$(D)_a$  Wird speciell einer der drei Indices:  $a, b, c$  gleich Null,  
so lässt sich die betreffende Verflechtung regelmässig in eine  
Verschlingung erster Ordnung umformen, für deren voll-  
ständige Charakteristik gemäss der Vertauschbarkeit der Typen-  
glieder  $(\pm)_a, (\pm)_b, (\pm)_c$  die, den Typen:

$$\begin{aligned} & [(+)_a (+)_b (+)_0], [(+)_a (+)_b (-)_0], [(+)_a (-)_b (+)_0], \\ & [(-)_a (+)_b (+)_0], [(+)_a (-)_b (-)_0], [(-)_a (+)_b (-)_0], \\ & [(-)_a (-)_b (+)_0], [(-)_a (-)_b (-)_0] \end{aligned}$$

entsprechenden Typen von Verschlingungen:

$$\begin{aligned} & [(+)_a (+)_{b+1}], [(+)_a (+)_b], [(+)_a (-)_b], [(-)_a (+)_{b+1}], \\ & [(+)_a (-)_{b+1}], [(-)_a (+)_b], [(-)_a (-)_b], [(-)_a (-)_{b+1}] \end{aligned}$$

genügen. Auch die letzteren Typen gestatten in Anbetracht



des Bildungsgesetzes jeder Verschlingung von Fall zu Fall eine Vertauschung ihrer Glieder.

(E) Jeder verkettete Doppelknoten einer geschlossenen Fläche  $F$  ist in eine Verflechtung transformirbar, deren drei Typenglieder durch jene des Doppelknotens und durch den Typus seiner Verkettung bestimmt erscheinen. Da hierbei die Reihenfolge dieser Glieder gemäss dem Satze (D) willkürlich ist, kann beispielsweise ein nach dem Typus  $(\pm)_a$  verketteter Doppelknoten vom Typus:  $[(\pm)_b (\pm)_c]$  auch in sämtliche verkettete Doppelknoten umgeformt werden, deren Typenglieder in ihrer natürlichen Reihenfolge eine beliebige Permutation der drei Typenglieder:  $(\pm)_a, (\pm)_b, (\pm)_c$  des ursprünglichen verketteten Doppelknotens darstellen.

Die vorstehenden näheren Bestimmungen der neuen topologischen Gattungsbegriffe gewähren nunmehr den Vortheil, dass man bei der Verwendung eines solchen Gattungsbegriffes von Fall zu Fall nur einen einzigen Typus anzugeben braucht, indem die möglichen Umformungen des letzteren bereits durch die Typenrelationen des benutzten Gattungsbegriffes vollständig characterisirt sind. Da ferner in allen noch zu beschreibenden Fällen die von den einzelnen Typengliedern umschlossenen Zeichen ausnahmslos mit den Zeichen jener Torsionszahlen übereinstimmen, welchen die Indices der betreffenden Typenglieder entnommen wurden, lassen sich die, den verschiedenen Zeichencombinationen von  $t_1, t_2, t_3$  zugehörigen Typen in formaler Hinsicht stets in einen einzigen Typus zusammenfassen.

Ebenso ist in sämtlichen Fällen der vierten Kategorie, in welchen die Torsionszahlen  $\alpha$  und  $\xi$  der durch den Schnitt erzeugten Flächen ausser den Variablen  $t_1, t_2, t_3$  noch gewisse constante Zahlen enthalten, das Zeichen jeder Zahl der letzteren Art gleich dem Zeichen der ihr vorhergehenden veränderlichen Torsionszahl, wonach sich auch für  $\alpha$  und  $\xi$  in demselben Sinne wie für die Typen generelle Gleichungen ergeben. Erst der Übergang von Fällen vierter Kategorie zu solchen niederer Kategorien bedingt wieder eine Unterscheidung einzelner Zeichencombinationen von  $t_1, t_2, t_3$ , insoweit hiervon die correspondirenden Specialisirungen der allgemeinen Typen in ihren weiteren Umformungen abhängig werden.

Die hier entwickelten Gesichtspunkte vermitteln schliesslich folgendes Schema:

**(IV.) Die Fälle vierter Kategorie.**

$$(\alpha) \dots t_1 = \pm 2h, t_2 = \pm 2k, t_3 = \pm 2l.$$

Man erhält drei, mit den Torsionszahlen:

$$x_1 = t_1 + t_2, x'_1 = t_1 + t_3, x''_1 = t_2 + t_3$$

versehene Flächen  $F_1$ , welche mit einander in einer wechselseitigen Verkettung vom Typus:  $[(\pm)_h (\pm)_k (\pm)_l]$  stehen. Diese Verkettung zerfällt speciell für  $l = 0$  gemäss dem Satze  $(A)_\alpha$  in zwei einfache Verbindungen von den Typen:  $(\pm)_h, (\pm)_k$ , so dass die hier beschriebenen Fälle der vierten Kategorie auch sämtliche Fälle  $(\alpha)$  der zweiten Kategorie umfassen.

$$(\beta) \dots t_1 = \pm(2h+1), t_2 = \pm 2k, t_3 = \pm 2l.$$

Es ergeben sich zwei, mit den Torsionszahlen:

$$x_1 = t_2 + t_3, x_2 = 2(t_1 \pm 1) + t_2 + t_3$$

versehene Flächen:  $F_1, F_2$ . Die Fläche  $F_2$  steht mit  $F_1$  in einer nach dem Typus:  $(\pm)_h$  geknoteten Doppelverbindung vom Typus:  $[(\pm)_h (\pm)_l]$ , während  $F_1$  mit  $F_2$  in eine knotenfreie Doppelverbindung vom Typus:  $[(\pm)_k (\pm)_l]$  tritt, welche regulär oder irregulär ist, je nachdem die Typenglieder:  $(\pm)_h, (\pm)_k$  gleiche oder verschiedene Zeichen einschliessen. Dasselbe gilt von jenen knotenfreien Doppelverbindungen, in welche die geknoteten Doppelverbindungen von  $F_2$  mit  $F_1$  gemäss dem Satze  $(B)_\alpha$  für  $h = 0$  übergehen, d. h. es entstehen in den Specialfällen:

$$t_1 = +1, t_2 = +2k, t_3 = +2l; t_1 = +1, t_2 = +2k, t_3 = -2l; \\ t_1 = -1, t_2 = -2k, t_3 = +2l; t_1 = -1, t_2 = -2k, t_3 = -2l$$

reguläre Doppelverbindungen beider Flächen von den Typen:

$$[(+)_k (+)_l], [(+)_k (-)_l], [(-)_k (+)_l], [(-)_k (-)_l],$$

und für:

$$t_1 = +1, t_2 = -2k, t_3 = +2l; t_1 = +1, t_2 = -2k, t_3 = -2l; \\ t_1 = -1, t_2 = +2k, t_3 = +2l; t_1 = -1, t_2 = +2k, t_3 = -2l$$

irreguläre Doppelverbindungen beider Flächen von den Typen:

$$[(-)_k(+)_l], [(-)_k(-)_l], [(+)_k(+)_l], [(+)_k(-)_l],$$

welche sich jedoch kraft den in  $(B)_\alpha$  angegebenen Typenrelationen auf lauter reguläre Doppelverbindungen von den Typen:

$$[(-)_{k-1}(+)_{l+1}], [(-)_{k-1}(-)_{l-1}], [(+)_{k-1}(+)_{l-1}], \\ [(+)_{k-1}(-)_{l+1}]$$

reduciren lassen. Hiernach entspringen den Fällen  $(\beta)$  der vierten Kategorie zunächst sämtliche Fälle  $(\alpha)$  der dritten Kategorie, sobald man in den acht hier hervorgehobenen Specialfällen die Buchstaben:  $t_1, t_2, t_3, k, l$  mit:  $t_3, t_1, t_2, h, k$  vertauscht.

Ausserdem gehören hieher auch noch alle Fälle  $(\beta)$  der zweiten Kategorie, indem die geknotete Doppelverbindung von  $F_2$  mit  $F_1$  für  $l = 0$  gemäss dem Satze  $(B)_\beta$  in einen einfachen, der Fläche  $F_2$  angehörigen Knoten vom Typus:  $(\pm)_h$  und in eine einfache Verbindung von  $F_2$  mit  $F_1$  vom Typus:  $(\pm)_k$  zerfällt.

$$(\gamma) \dots t_1 = \pm(2h+1), t_2 = \pm(2k+1), t_3 = \pm 2l.$$

Es entsteht eine einzige, mit der äusseren Torsionszahl:

$$\xi = (t_1 \pm 2) + (t_2 \pm 2) + (t_3 \pm 2)$$

versehene Fläche  $F_3$ , welche ein nach dem Typus  $(\pm)_l$  verkettetes Knotenpaar vom Typus:  $[(\pm)_h(\pm)_k]$  enthält. Hieraus resultiren für  $l = 0$  unmittelbar die Fälle  $(\gamma)$  der zweiten Kategorie, da das verkettete Knotenpaar dann gemäss dem Satze  $(C)_\alpha$  in zwei isolirte einfache Knoten von den Typen:  $(\pm)_h, (\pm)_k$  zerfällt.

Wird andererseits  $k$  gleich Null, so verwandelt sich das verkettete Knotenpaar zufolge des Satzes  $(C)_\beta$  regelmässig in eine Verknüpfung erster Ordnung, wobei den Fällen:

$$t_1 = 2h+1, t_2 = +1; t_1 = 2h+1, t_2 = -1;$$

$$t_1 = -(2h+1), t_2 = +1; t_1 = -(2h+1), t_2 = -1$$

für  $t_3 = +2l$  Verknüpfungen von den Typen:

$$[(+)_h(+)_l], [(+)_h(+)_l], [(-)_h(+)_l], [(-)_h(+)_l]$$

dagegen für  $t_3 = -2l$  Verknüpfungen von den Typen:

$$[(+)_h(+)_l], [(+)_h(-)_{l-1}], [(-)_h(-)_{l-1}], [(-)_{h+1}(-)_l]$$

zugehören. Auf diese Art umfassen die Fälle ( $\gamma$ ) der vierten Kategorie, wie eine Vertauschung der Buchstaben:  $t_2, t_3, l$  mit:  $t_3, t_2, k$  in den letzten acht Specialfällen lehrt, auch sämtliche Fälle ( $\beta$ ) der dritten Kategorie.

$$(\delta) \dots t_1 = \pm(2h+1), t_2 = \pm(2k+1), t_3 = \pm(2l+1).$$

Es entsteht eine einzige, mit der äusseren Torsionszahl:

$$\xi = (t_1 \pm 1) + (t_2 \pm 1) + (t_3 \pm 1)$$

versehene Fläche  $F_3$ , welche eine Verflechtung vom Typus:  $[(\pm)_h(\pm)_k(\pm)_l]$  besitzt. Für  $l = 0$  resultiren hieraus direct sämtliche Fälle ( $\gamma$ ) der dritten Kategorie, wobei die Typen der denselben zugehörigen Verschlingungen durch Einführung der Substitutionen:  $a = h, b = k$  in die Typenrelationen des Satzes ( $D$ )<sub>a</sub> erhalten werden.

Die grosse formale Einfachheit unserer letzten Resultate macht es nunmehr wahrscheinlich, dass wenigstens die allgemeine Eintheilung der Fälle vierter Kategorie sich auch graphisch begründen lasse, und in der That kann die Gliederung dieser Fälle unmittelbar aus einer schematischen Darstellung jener Randlinien entnommen werden, welche die jeweilige Begrenzung der ursprünglich gegebenen Fläche bilden.

Hiebei bleibt der zu erörternde Zusammenhang, da alle Fälle der ersten, zweiten und dritten Kategorie erwiesenermassen den Fällen der vierten Kategorie topologisch untergeordnet sind, für sämtliche Specialisirungen von  $h, k, l$  qualitativ derselbe, so dass wir uns bei einer graphischen Begründung der gewählten Eintheilung ohne Beeinträchtigung ihrer Allgemeinheit auf die einfachste Gruppe von Substitutionen für  $h, k, l$ :

$$h = 0, k = 0, l = 0$$

beschränken können. Es reduciren sich dann für die verschiedenen Gruppen von Fällen alle geraden Torsionszahlen auf die Null, alle ungeraden Torsionszahlen hingegen auf die positive oder

negative Einheit, wonach der Verlauf der Randlinien jedes einzelnen Streifens der gegebenen Fläche je nach der Beschaffenheit seiner reducirten Torsionszahl schematisch durch zwei parallele oder durch zwei einander durchsetzende gerade Linien darstellbar ist.

Wir denken uns ferner beide Schlussstücke der Fläche, welche die Enden der drei Streifen enthalten, von Fall zu Fall in zwei Kreisflächen mit verschiedenen Radien umgeformt und gegenseitig so lange verschoben, bis die Projection ihrer Ränder auf eine bestimmte Ebene zwei concentrische Kreise liefert, deren Umfänge schliesslich durch die Projectionen der Streifenränder mit einander in Verbindung gesetzt werden.

Auf solche Art ergeben sich für die vier früher unterschiedenen Gruppen von Fällen vierter Kategorie der Reihe nach vier charakteristische Liniencomplexe (Taf. V, Fig. 25, 26, 27, 28) welche nicht nur die jeweilige Anzahl der durch den Schnitt erzeugten Flächen unmittelbar ersichtlich machen, sondern auch eine eindeutige Bestimmung ihrer Indices gestatten, indem der Index jeder solchen Fläche der halben Anzahl der in ihrer Randlinie enthaltenen Kreisbögen gleich ist.

Da sich endlich die, einem bestimmten Liniencomplexe zugeordneten Torsionszahlen von jedem Streifenende aus sowohl im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers als auch im entgegengesetzten Sinne vollständig durchlaufen lassen, characterisiren die schematischen Figuren 25—28 augenscheinlich alle topologischen Gebilde, welche den in Betracht kommenden Werthsystemen reducirter Torsionszahlen:

$$0, 0, 0; \pm 1, 0, 0; 0, 0, \pm 1; 0, \pm 1, 0; \pm 1, \pm 1, 0; \\ \pm 1, 0, \pm 1; 0, \pm 1, \pm 1; \pm 1, \pm 1, \pm 1$$

entsprechen und begründen daher noch die weitere Thatsache, dass eine allgemeine Classification der Fälle vierter Kategorie nicht mehr als vier verschiedene Flächengruppen liefert.

Ausserdem ist klar, dass die hier gegebene graphische Darstellung der Randlinien geschlossener Flächen, welche aus drei, mit den Torsionszahlen 0 oder  $\pm 1$  versehenen Streifen bestehen, in der Folge auch auf solche geschlossene Flächen anwendbar bleibt, welche sich in analoger Weise aus einer grösseren

Anzahl:  $u$  untordirter oder um  $\pm 1 \times 180^\circ$  tordirter Streifen zusammensetzen. Es kann mithin auch die allgemeine Einteilung jener Flächengruppen, welche aus einer vollkommen biegsamen Fläche mit mehr als drei bandförmigen Fortsätzen nach Vereinigung ihrer Enden:  $(A_1), (A_2) \dots (A_u)$  durch einen längs den Mittellinien:  $o\alpha_1, o\alpha_2, \dots o\alpha_u$  sämtlicher Fortsätze in sich selbst zurückkehrenden Schnitt erzeugbar sind, auf graphischem Wege festgestellt werden.

Hiebei entsprechen jeder einzelnen Flächengruppe ebenfalls gewisse charakteristische Werthsysteme von reducirten Torsionszahlen, welche bereits durch Angabe der Reihenfolge ihrer numerischen Werthe: 0, 1 vollständig bestimmt erscheinen und sich daher am einfachsten durch eine zeichenlose Aneinanderreihung der letzteren kennzeichnen lassen. Die so erhaltenen symbolischen Producte mit unvertauschbaren Factoren sind ihrerseits gleich den sogenannten dyadischen Producten<sup>1</sup> insoferne noch einer kürzeren Schreibweise fähig, als man jede aus gleichen Ziffern gebildete Factorengruppe durch eine einzige Ziffer derselben Art mit einem, deren Anzahl präcisirenden Exponenten ersetzen kann.

Um ferner auch die allgemeine topologische Beschreibung jeder einzelnen Flächengruppe möglichst übersichtlich zu gestalten, wollen wir in consequenter Fortbildung unserer früheren Symbolik künftighin jede geschlossene Fläche, welche aus  $q$ , den  $u$  Sektoren der ursprünglichen Fläche:

$$\alpha_1 o\alpha_2, \alpha_2 o\alpha_3, \dots \alpha_{u-1} o\alpha_u, \alpha_u o\alpha_1$$

beliebig entnommenen Sektoren besteht, mit  $F_q$  bezeichnen<sup>2</sup> und die Glieder jedes Flächenschemas stets in jener Reihenfolge anführen, welche einer vom ersten Zeichen seines ersten charac-

<sup>1</sup> S. h. die 1887 im XCVI. Bande der Sitzungsberichte erschienene Abhandlung Prof. O. Simony's: „Über den Zusammenhang gewisser topologischer Thatsachen mit neuen Sätzen der höheren Arithmetik und dessen theoretische Bedeutung“, S. 215, 216.

<sup>2</sup> Bei Einführung dieser Symbolik besitzt dann auch die früher angegebene Regel zur Bestimmung des Index einer geschlossenen Fläche aus der Anzahl der in ihrer Randlinie enthaltenen Kreisbögen eine allgemeine Giltigkeit.

teristischen Werthsystems im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers fortschreitenden Zählung entspricht. Ergibt sich bei der letzteren dann beispielsweise eine aus  $z$  gleichen Flächen:  $F_z$  gebildete Flächenreihe, so mag dieselbe ohne Rücksicht darauf, ob die Randlinien dieser Flächen sich gegenseitig durchsetzen oder isolirt sind, durch das Symbol:  $zF_z$  markirt werden, indem beide Fälle schon vermöge der Werthe ihrer charakteristischen reducirten Torsionszahlen nie einem und demselben Gliede der allgemeinen Eintheilung angehören können.<sup>1</sup>

Die Einführung der hier gewählten Symbolik in die Charakteristik jener allgemeinen Flächengruppen, welche den zunächst in Betracht kommenden Substitutionen für  $u$ , nämlich:  $u = 4, 5, 6, 7$  zugehören, liefert direct das nachstehende Schema, dessen graphische Begründung speciell für  $u = 4$  und  $u = 5$  in den schematischen Figuren 29—34 und 35—42 (Taf. V) enthalten ist:

(1) ...  $u = 4$ :

( $\alpha$ ) ...  $0^4 | 4F_1$ .

( $\beta$ ) ...  $10^3; 0^31; 010^2; 0^210 | F_2, 2F_1$ .

( $\gamma$ ) ...  $1^20^2; 10^21; 0^21^2; 01^20 | F_3, F_1$ .

( $\delta$ ) ...  $1010; 0101 | 2F_2$ .

( $\epsilon$ ) ...  $1^30; 101^2; 1^201; 01^3 | F_4$ .

( $\zeta$ ) ...  $1^4 | 2F_2$ .

(2) ...  $u = 5$ :

( $\alpha$ ) ...  $0^5 | 5F_1$ .

( $\beta$ ) ...  $10^4; 0^41; 010^3; 0^310; 0^210^2 | F_2, 3F_1$ .

( $\gamma$ ) ...  $1^20^3; 10^31; 0^31^2; 01^20^2; 0^21^20 | F_3, 2F_1$ .

( $\delta$ ) ...  $1010^2; 10^210; 010^21; 0^2101; 01010 | 2F_2, F_1$ .

( $\epsilon$ ) ...  $1^30^2; 10^21^2; 1^20^21; 0^21^3; 01^30 | F_4, F_1$ .

( $\zeta$ ) ...  $1^2010; 10101; 0101^2; 01^201; 101^20 | F_3, F_2$ .

( $\eta$ ) ...  $1^40; 101^3; 1^301; 1^201^2; 01^4 | F_5$ .

( $\vartheta$ ) ...  $1^5 | F_5$ .

<sup>1</sup> Man vergleiche in dieser Hinsicht zunächst die beiden schematischen Figuren 32 und 34 auf Taf. V.

(3) ...  $u = 6$ : $(\alpha) \dots 0^6 | 6F_1.$  $(\beta) \dots 10^5; 0^51; 010^4; 0^410; 0^210^3; 0^310^2 | F_2, 4F_1.$  $(\gamma) \dots 1^20^4; 10^41; 0^41^2; 01^20^3; 0^31^20; 0^21^20^2 | F_3, 3F_1.$  $(\delta) \dots 1010^3; 10^310; 010^31; 0^3101; 01010^2; 0^21010 | 2F_2, 2F_1.$  $(\varepsilon) \dots 10^210^2; 0^210^21; 010^210 | F_2, F_1; F_2, F_1.$  $(\zeta) \dots 1^30^3; 10^31^2; 1^20^31; 0^31^3; 01^30^2; 0^21^30 | F_4, 2F_1.$  $(\eta) \dots 1^2010^2; 10^2101; 1010^21; 1^20^210; 010^21^2; 01^20^21;$   
 $10^21^20; 101^20^2; 0^21^201; 0101^20; 01^2010; 0^2101^2 | F_3, F_2, F_1.$  $(\theta) \dots 101010; 010101 | 3F_2.$  $(\iota) \dots 1^40^2; 10^21^3; 1^30^21; 1^20^21^2; 0^21^4; 01^40 | F_5, F_1.$  $(\kappa) \dots 1^3010; 10101^2; 1^20101; 0101^3; 01^301; 101^30 | F_4, F_2.$  $(\lambda) \dots 1^201^20; 101^201; 01^201^2 | 2F_3.$  $(\mu) \dots 1^50; 101^4; 1^401; 1^201^3; 1^301^2; 01^5 | F_6.$  $(\nu) \dots 1^6 | 2F_3.$ (4) ...  $u = 7$ . $(\alpha) \dots 0^7 | 7F_1.$  $(\beta) \dots 10^6; 0^61; 010^5; 0^510; 0^210^4; 0^410^2; 0^310^3 | F_2, 5F_1.$  $(\gamma) \dots 1^20^5; 10^51; 0^51^2; 01^20^4; 0^41^20; 0^21^20^3; 0^31^20^2 | F_3, 4F_1.$  $(\delta) \dots 1010^4; 10^410; 010^41; 0^4101; 01010^3;$  $0^31010; 0^21010^2 | 2F_2, 3F_1.$  $(\varepsilon) \dots 10^210^3; 10^310^2; 0^210^31; 010^310; 0^310^21;$  $010^210^2; 0^210^210 | F_2, F_1; F_2, 2F_1.$  $(\zeta) \dots 1^30^4; 10^41^2; 1^20^41; 0^41^3; 01^30^3; 0^31^30; 0^21^30^2 | F_4, 3F_1.$  $(\eta) \dots 1^2010^3; 10^3101; 1010^31; 1^20^310; 010^31^2;$  $01^20^31; 10^31^20; 101^20^3; 0^31^201; 0101^20^2; 0^21^2010;$  $0^2101^20; 01^2010^2; 0^3101^2 | F_3, F_2, 2F_1.$  $(\theta) \dots 1^20^210^2; 10^210^21; 0^210^21^2; 01^20^210; 010^21^20;$  $0^21^20^21; 10^21^20^2 | F_3, F_1; F_2, F_1.$  $(\iota) \dots 101010^2; 10^21010; 01010^21; 010^2101; 1010^210;$  $0^210101; 0101010 | 3F_2, F_1.$



( $\alpha$ )... $1^40^3$ ;  $10^31^3$ ;  $1^30^31$ ;  $1^20^31^2$ ;  $0^31^4$ ;  $01^40^2$ ;  $0^21^40$  |  $F_5, 2F_1$ .

( $\lambda$ )... $1^3010^2$ ;  $10^2101^2$ ;  $1^2010^21$ ;  $1^20^2101$ ;  $1010^21^2$ ;  
 $1^30^210$ ;  $010^21^3$ ;  $01^30^21$ ;  $10^21^30$ ;  $101^30^2$ ;  $0^21^301$ ;  $0101^30$ ;  
 $01^3010$ ;  $0^2101^3$  |  $F_4, F_2, F_1$ .

( $\mu$ )... $1^201^20^2$ ;  $10^21^201$ ;  $101^20^21$ ;  $1^20^21^20$ ;  $01^20^21^2$ ;  
 $0^21^201^2$ ;  $01^201^20$  |  $2F_3, F_1$ .

( $\nu$ )... $1^201010$ ;  $1010101$ ;  $010101^2$ ;  $01^20101$ ;  $10101^20$ ;  
 $101^2010$ ;  $0101^201$  |  $F_3, 2F_2$ .

( $\xi$ )... $1^50^2$ ;  $10^21^4$ ;  $1^40^21$ ;  $1^20^21^3$ ;  $1^30^21^2$ ;  $0^21^5$ ;  $01^50$  |  $F_6, F_1$ .

( $\sigma$ )... $1^4010$ ;  $10101^3$ ;  $1^30101$ ;  $1^20101^2$ ;  $0101^4$ ;  
 $01^401$ ;  $101^40$  |  $F_5, F_2$ .

( $\pi$ )... $1^301^20$ ;  $101^201^2$ ;  $1^201^201$ ;  $01^201^3$ ;  $01^301^2$ ;  
 $1^201^30$ ;  $101^301$  |  $F_4, F_3$ .

( $\rho$ )... $1^60$ ;  $101^5$ ;  $1^501$ ;  $1^201^4$ ;  $1^401^2$ ;  $1^301^3$ ;  $01^6$  |  $F_7$ .

( $\sigma$ )... $1^7$  |  $F_7$ .

Auf Grundlage dieser graphisch abgeleiteten Resultate ergeben sich nunmehr ohne Schwierigkeit folgende Sätze, welche auch die für  $n = 3$  erzeugbaren Flächensysteme bestimmen:

( $\mathfrak{A}$ ) Sind in einer aus  $n$  Streifen zusammengesetzten geschlossenen Fläche die Torsionszahlen der ersteren insgesamt ungerade, so entsteht durch einen längs den Mittellinien aller Streifen in sich selbst zurückkehrenden Schnitt eine einzige Fläche  $F_n$  oder ein aus zwei gleichen Flächen mit dem Index  $\frac{1}{2}n$  gebildetes Flächenpaar, je nachdem die ursprünglich gegebene Fläche aus einer ungeraden oder aus einer geraden Anzahl von Streifen zusammengesetzt war.

( $\mathfrak{B}$ ) Sind allgemein die Torsionszahlen von  $p$  aufeinanderfolgenden Streifen gerade und jene der  $n-p$  übrigen Streifen ungerade, so erzeugt der beschriebene Schnitt ausser einer Fläche mit dem Index:  $n-p+1$  noch die Flächenreihe  $(p-1)F_1$ , liefert also speciell für  $p=1$  regelmässig eine einzige Fläche:  $F_n$  und für  $p=n$  stets  $n$  gleiche Flächen  $F_1$ .

( $\mathfrak{C}$ ) Bilden endlich die Torsionszahlen der aufeinanderfolgenden Streifen zwei oder mehrere Gruppenpaare, welche aus je einer Gruppe ungerader Zahlen und je einer Gruppe gerader

Zahlen bestehen, so entspricht nach Ausführung des Schnittes jeder aus  $a$  Zahlen zusammengesetzten Gruppe eine einzige Fläche  $F_{a+1}$  oder die Flächenreihe:  $(a-1)F_1$ , je nachdem jene  $a$  Zahlen ungerade oder gerade sind.

Sobald mithin die Glieder einer und derselben Werthreihe von  $t_1, t_2, \dots, t_n$  die Bildung zweier oder mehrerer Gruppenpaare von Torsionszahlen im Sinne des Satzes (C) gestatten, vertheilen sich die verschiedenen Permutationen dieser Glieder auf zwei oder mehrere verschiedene Flächensysteme, d. h. es wird die Beschaffenheit der durch den Schnitt erzeugbaren Flächengruppen bereits für  $n = 4$  theilweise von der Reihenfolge der ungeraden und geraden Torsionszahlen abhängig,<sup>1</sup> während dieselbe für  $n = 3$  noch vollkommen beliebig ist.

<sup>1</sup> Infolge dieses Umstandes liefert jede der  $n+1$  Gruppen, in welche die  $2^n$  Variationen ungerader und gerader Specialisirungen von  $t_1, t_2, \dots, t_n$  im Anschlusse an die Entwicklung:

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + n + 1$$

zerfallen, für  $n \leq 4$  im Mittel mehr als je eine charakteristische Flächengruppe, wobei die Anzahl der letzteren für  $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  successive auf 6, 8, 13, 18, 30, 46, 78 wächst. Es dürfte daher die Specialisirung:  $n = 8$  zugleich die obere Grenze für eine experimentelle topologische Untersuchung jener Gebilde vorstellen, welche geschlossenen, aus vier und mehr tordirten Streifen hergestellten Flächen durch, längs den Mittellinien sämtlicher Streifen in sich selbst zurückkehrende Schnitte entspringen, und mag aus diesem Grunde hier noch das für  $n = 8$  bestehende Schema der charakteristischen Flächengruppen in möglichst gedrängter Darstellung Platz finden:

- (1)<sub>1</sub>...0<sup>8</sup> | 8F<sub>1</sub>.    (2)<sub>8</sub>...10<sup>7</sup> | F<sub>2</sub>, 6F<sub>1</sub>.    (3)<sub>8</sub>...1<sup>2</sup>0<sup>6</sup> | F<sub>3</sub>, 5F<sub>1</sub>.  
 (4)<sub>8</sub>...1010<sup>5</sup> | 2F<sub>2</sub>, 4F<sub>1</sub>.    (5)<sub>8</sub>...10<sup>2</sup>10<sup>4</sup> | F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>; F<sub>2</sub>, 3F<sub>1</sub>.  
 (6)<sub>4</sub>...10<sup>3</sup>10<sup>3</sup> | F<sub>2</sub>, 2F<sub>1</sub>; F<sub>2</sub>, 2F<sub>1</sub>.    (7)<sub>8</sub>...1<sup>3</sup>0<sup>5</sup> | F<sub>4</sub>, 4F<sub>1</sub>.  
 (8)<sub>16</sub>...1<sup>2</sup>010<sup>4</sup> | F<sub>3</sub>, F<sub>2</sub>, 3F<sub>1</sub>.    (9)<sub>16</sub>...1<sup>2</sup>0<sup>2</sup>10<sup>3</sup> | F<sub>3</sub>, F<sub>1</sub>; F<sub>2</sub>, 2F<sub>1</sub>.  
 (10)<sub>8</sub>...101010<sup>3</sup> | 3F<sub>2</sub>, 2F<sub>1</sub>.    (11)<sub>8</sub>...1010<sup>2</sup>10<sup>2</sup> | 2F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>; F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>.  
 (12)<sub>8</sub>...1<sup>4</sup>0<sup>4</sup> | F<sub>5</sub>, 3F<sub>1</sub>.    (13)<sub>16</sub>...1<sup>3</sup>010<sup>3</sup> | F<sub>4</sub>, F<sub>2</sub>, 2F<sub>1</sub>.  
 (14)<sub>8</sub>...1<sup>3</sup>0<sup>2</sup>10<sup>2</sup> | F<sub>4</sub>, F<sub>1</sub>; F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>.    (15)<sub>8</sub>...1<sup>2</sup>01<sup>2</sup>0<sup>3</sup> | 2F<sub>3</sub>, 2F<sub>1</sub>.  
 (16)<sub>4</sub>...1<sup>2</sup>0<sup>2</sup>1<sup>2</sup>0<sup>2</sup> | F<sub>3</sub>, F<sub>1</sub>; F<sub>3</sub>, F<sub>1</sub>.    (17)<sub>16</sub>...1<sup>2</sup>01010<sup>2</sup> | F<sub>3</sub>, 2F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>.  
 (18)<sub>8</sub>...1<sup>2</sup>010<sup>2</sup>10 | F<sub>3</sub>; F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>.    (19)<sub>2</sub>...10101010 | 4F<sub>2</sub>.  
 (20)<sub>8</sub>...1<sup>5</sup>0<sup>3</sup> | F<sub>6</sub>, 2F<sub>1</sub>.    (21)<sub>16</sub>...1<sup>4</sup>010<sup>2</sup> | F<sub>5</sub>, F<sub>2</sub>, F<sub>1</sub>.

Auf solche Art erfordert jede Fortsetzung der hier dargestellten topologischen Untersuchungen ungleich mehr Experimente als der Specialfall:  $n = 3$ , so dass die Frage nahe liegt, ob nicht wenigstens die zur Herstellung der in Betracht kommenden Gebilde dienenden mechanischen Operationen durch passende Hilfsvorrichtungen wesentlich abgekürzt werden können.

Um hierüber Aufschluss zu gewinnen, denken wir uns zunächst in der durch Fig. 5 (Taf. I) charakterisirten geschlossenen Fläche sämtliche Torsionen in die rechtseitigen Streifenhälften geschoben, ferner die Mittelpunkte beider Schlussstücke durch die Mittellinien der drei Streifen verbunden und durch die Halbierungspunkte dieser Mittellinien eine Ebene gelegt.

Es zerfällt dann die ursprünglich gegebene Fläche in sechs Sektoren, wobei die Scheitel je dreier Sektoren im Mittelpunkte eines und desselben Schlussstückes zusammenstossen, und die Arme jedes Sektors verschiedenen Streifen angehören. Alle, dem linkseitigen Schlussstücke entspringenden Sektorenarme sind untordirt, während die Sektorenarme des rechtseitigen Schlussstückes dieselben Torsionszahlen wie die sie enthaltenden Streifenhälften besitzen.

Man kann nunmehr, ohne den topologischen Charakter des ganzen Flächensystems irgendwie zu verändern, jeden Sector durch ein vollkommen biegsames Band ersetzen, dessen beide Hälften an Stelle der Arme des Sektors treten, folglich auch deren jeweilige Torsionen zu erhalten haben. Hierbei entfallen auf jeden Streifen der ursprünglich gegebenen Fläche vier Bandhälften, deren Ränder sich längs dessen Mittellinie berühren, so dass der längs der letzteren zerschnittene Streifen durch Vereinigung je zweier auf derselben Seite seiner Mittellinie ein-

$$(22)_{16} \dots 1^3 0 1^2 0^2 | F_4, F_3, F_1. \quad (23)_8 \dots 1^3 0 1 0 1 0 | F_4, 2F_2.$$

$$(24)_8 \dots 1^2 0 1^2 0 1 0 | 2F_3, F_2. \quad (25)_8 \dots 1^6 0^3 | F_7, F_1.$$

$$(26)_8 \dots 1^5 0 1 0 | F_6, F_2. \quad (27)_8 \dots 1^4 0 1^2 0 | F_5, F_3.$$

$$(28)_4 \dots 1^3 0 1^3 0 | 2F_4. \quad (29)_8 \dots 1^7 0 | F_8. \quad (30)_1 \dots 1^8 | 2F_4.$$

Hierbei bestimmt das jeder Flächenklasse vorgesetzte symbolische Product die jeweilige erste Variation der, auf die betreffende Flächenklasse entfallenden Variationen ungerader und gerader Specialisirungen von  $t_1, t_2, \dots, t_8$ , während die Anzahl dieser Variationen aus dem Index der Nummer der betreffenden Flächenklasse zu entnehmen ist.

ander gegenüber liegender Bandenden nachgebildet werden kann. Sobald man daher sämtliche Enden der sechs Bänder in dem hier präcisirten Sinne paarweise vereinigt, stimmt das erhaltene Gebilde in topologischer Hinsicht vollständig mit jenem überein, welches ein längs den Mittellinien sämtlicher Streifen der ursprünglich gegebenen Fläche in sich selbst zurückkehrender Schnitt liefert.

Die praktische Durchführung der hier geschilderten Erzeugungsweise erfordert ihrerseits einen einfachen Hilfsapparat,<sup>1</sup> der sich wohl am angemessensten als topologische Radwelle bezeichnen lässt und folgende wesentliche Bestandtheile (s. die schematische Fig. 1 auf Taf. I) aufweist:

1. Eine eiserne cylindrische Welle von 35 *cm* Länge, welche in einer Ausdehnung von 1·5 *cm* von 8 *mm* auf 6 *mm* Durchmesser abgedreht ist und sich hiedurch in drei Cylinder von 30, 1·5 und 3·5 *cm* Länge gliedert. Das äussere Ende des ersten Cylinders trägt einen 5 *mm* langen konischen Zapfen, jenes des dritten Cylinders einen abschraubbaren Knopf: *K*, dessen Drehung zugleich die Welle in Rotation versetzt.

2. Zwei in der Breite von 8 *mm* concentrisch und kreisförmig ausgebohrte eiserne Kreisscheiben: *E*, *E'* von je 1·5 *mm* Dicke und 8 *cm* Durchmesser, welche auf der Mantelfläche des ersten Cylinders in solcher Lage festgelöthet sind, dass die Mittelpunkte beider Scheiben dessen Axe in einem und demselben Verhältnisse von 1 zu 10 theilen. Ihre von einander abgekehrten Flächen sind mit je drei gleich weit von einander abstehenden spitzen Eisenstiften von je 1 *cm* Länge versehen, welche zur Cylinderaxe parallel laufen und im Umfange eines zum Grenzkreis der Fläche concentrischen Kreises von 4 *cm* Durchmesser liegen.

3. Zwei in der Breite von 8 *mm* concentrisch und kreisförmig ausgebohrte Korkscheiben: *S*, *S'* von je 1·5 *cm* Dicke und 8 *cm* Durchmesser, welche einander auf der Welle nach Abschraubung ihres Knopfes von Fall zu Fall so lange ge-

<sup>1</sup> Diese Vorrichtung spielt bei der Erzeugung der hier in Betracht gezogenen Gebilde eine analoge Rolle wie der topologische Rotationsapparat (s. die zuletzt citirte Abhandlung, S. 194—196) bei der Herstellung von Knotenverbindungen und Knotenverschlingungen.

nähert werden, bis die Stifte der eisernen Scheiben vollständig in den Kork eingedrungen sind und hiedurch jede Drehung der Korkscheiben um die Wellenaxe ausschliessen.

4. Eine rechteckige Eisenplatte von 40 *cm* Länge und 16 *cm* Breite, in welche zwei quadratische eiserne Prismen: *P*, *P'* von je 13 *cm* Höhe und 1.3 *cm* Durchmesser in solcher Lage eingietet sind, dass die Axen beider Prismen auf der mittleren Längslinie der Platte im Abstände von 31.4 *cm* senkrecht stehen. Das Prisma *P* besitzt in einer Höhe von 11 *cm* über seiner Basis eine dem Wellenzapfen entsprechende Bohrung, während das Prisma *P'* — von seinem freien Endquerschnitte aus gerechnet — bis in eine Tiefe von 2.3 *cm* *U*-förmig ausgeschnitten ist, um die Welle mit ihrem verjüngten Theile parallel zur Platte einlagern zu können. Ausserdem befindet sich an dem Prisma *P'* noch ein um die Axe *D* drehbarer Eisenhacken *H*, welcher in der abgebildeten Stellung ein Heraustreten der rotirenden Welle aus ihrem Lager verhindert.

Die jeweilige Verwerthungsweise des hier beschriebenen einfachen Apparates bleibt dieselbe, mag nun das darzustellende topologische Gebilde einer geschlossenen Fläche entspringen, welche aus drei Streifen besteht, oder einer solchen, welche sich aus 4, 5, 6 . . . *n* Streifen zusammensetzt.

Man zieht zunächst auf den Mantelflächen beider Korkscheiben nach Befestigung der letzteren auf den eisernen Scheiben parallel zur Wellenaxe in gleichen Abständen ebensoviele Theilstriche, als die in Betracht kommende geschlossene Fläche Streifen besitzt, wobei je zwei, auf verschiedenen Scheiben gezogene Theilstriche in einer und derselben, zur Wellenaxe parallelen Geraden liegen müssen. Diese Geraden bestimmen gleichzeitig die Mittellinien sämtlicher Streifen, welche ihrerseits mittelst einer doppelt so grossen Anzahl leinerner Bänder von je 50 *cm* Länge und 1 *cm* Breite nachgebildet werden, indem man zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Theilstrichen je ein Band nach dem Muster der schematischen Figuren 2 und 3 (Taf. I) — also ohne Torsion seines Mittelstückes — mit Stecknadeln festheftet.

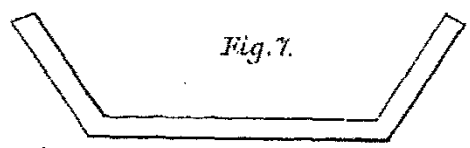
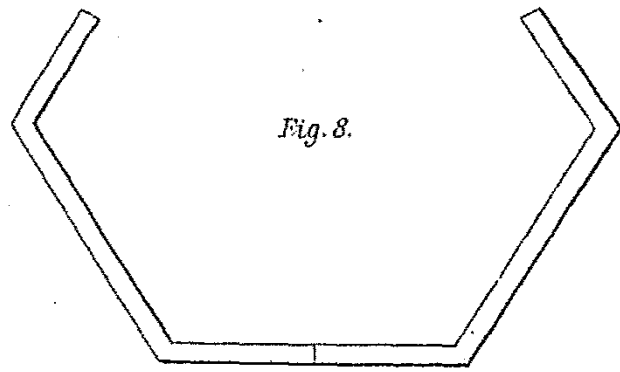
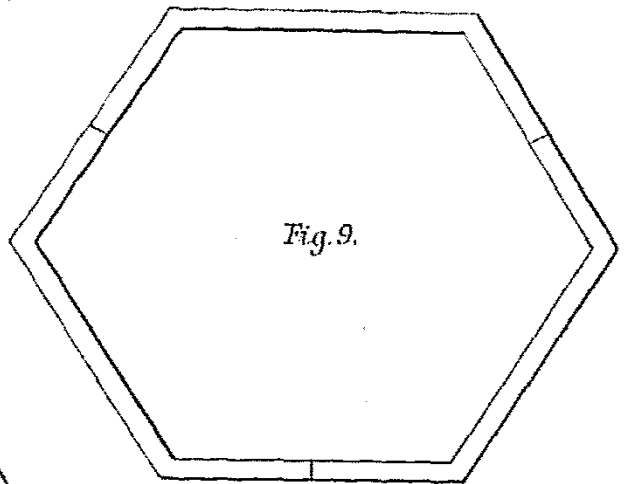
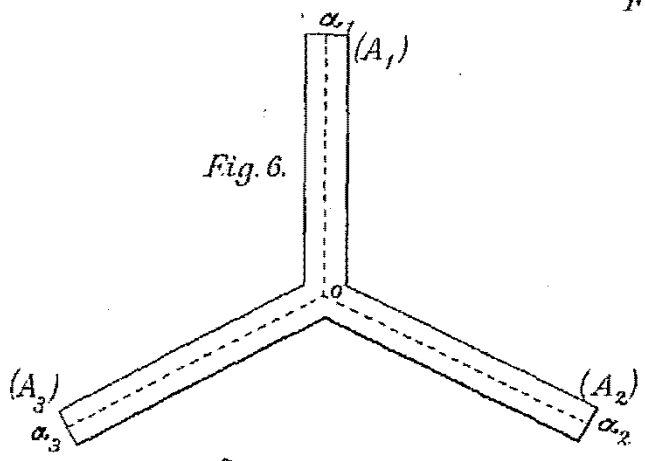
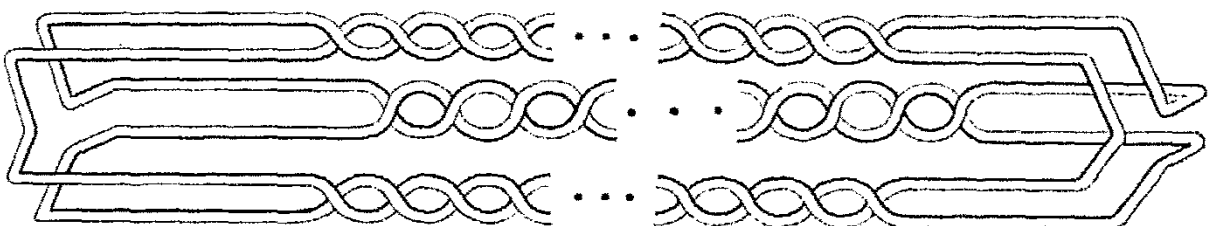
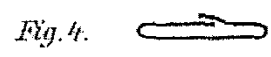
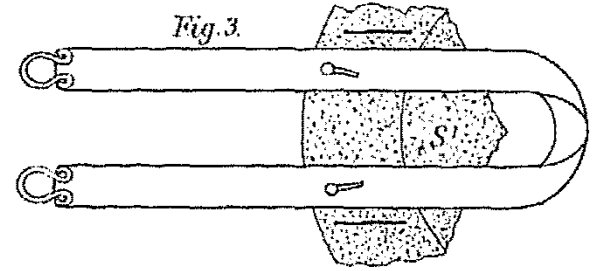
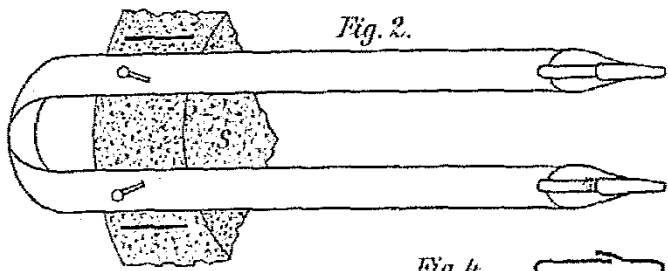
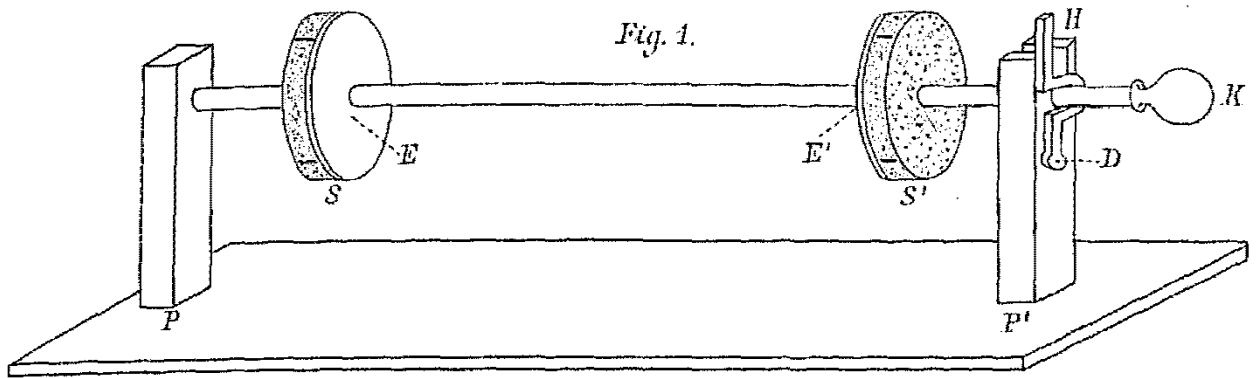
Um dann die Vereinigung der einander correspondirenden Bandenden von Fall zu Fall rasch und sicher durchführen zu

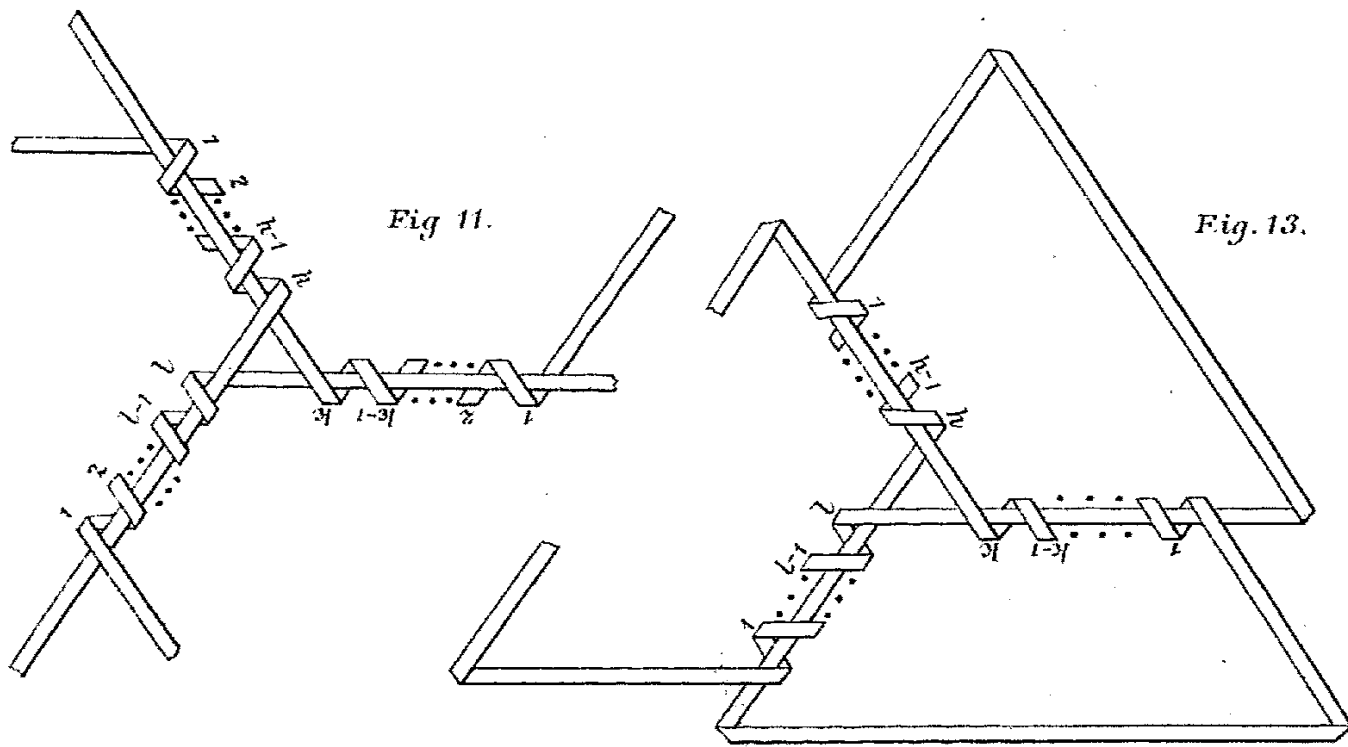
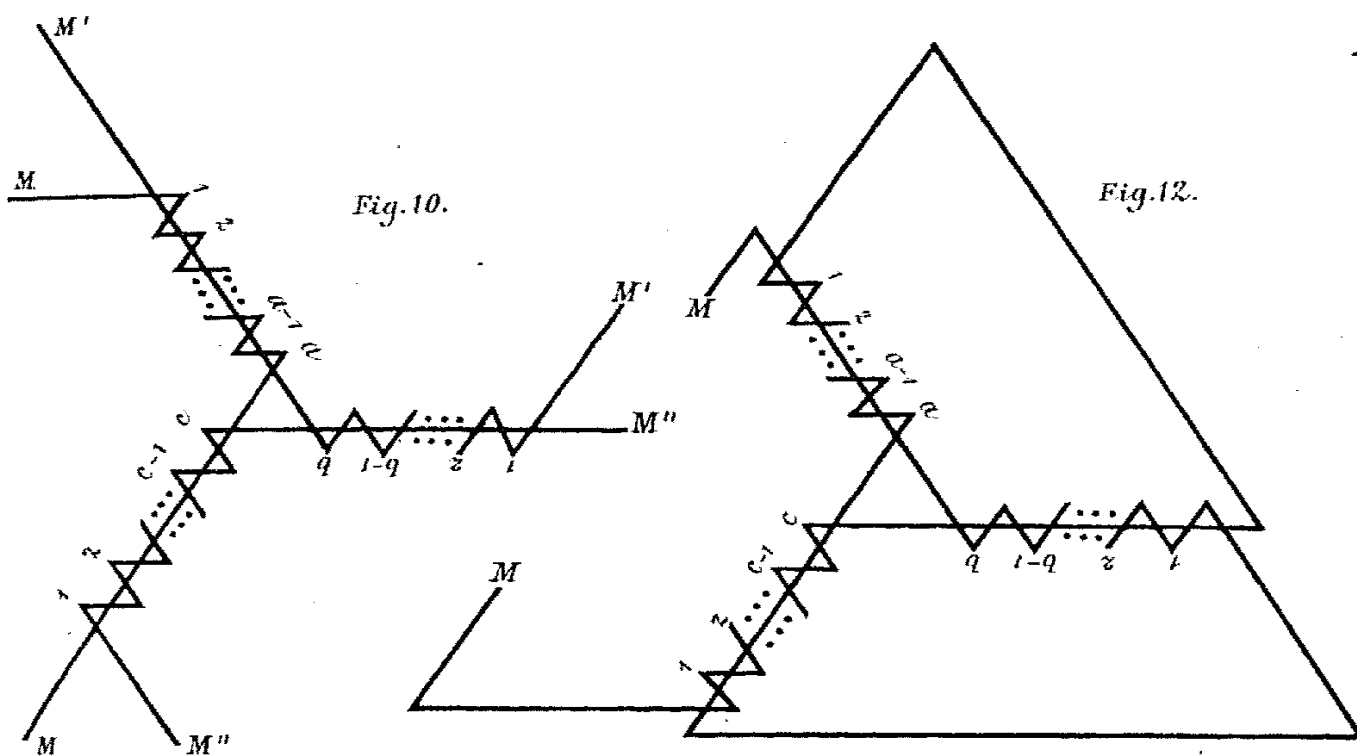
können, sind die Enden der auf der Korkscheibe  $S$  zu befestigenden Bänder mit flachen Carabinern aus elastischem Stahlblech (Fig. 2 und 4) montirt, während die ihnen gegenüberliegenden, der Korkscheibe  $S'$  zugehörigen Bandenden mit  $\Omega$ -Öhren (Fig. 3) versehen sind.

Auf solche Art wird jeder nachzubildende Streifen aus vier Bandhälften hergestellt, welche mit ihren einander zugekehrten Rändern die gemeinsame Gerade zweier Theilstriche einschliessen und ihre jeweiligen Torsionen durch Drehung beider in Öhre endigender Bandhälften um jene Gerade als Rotationsaxe erhalten.

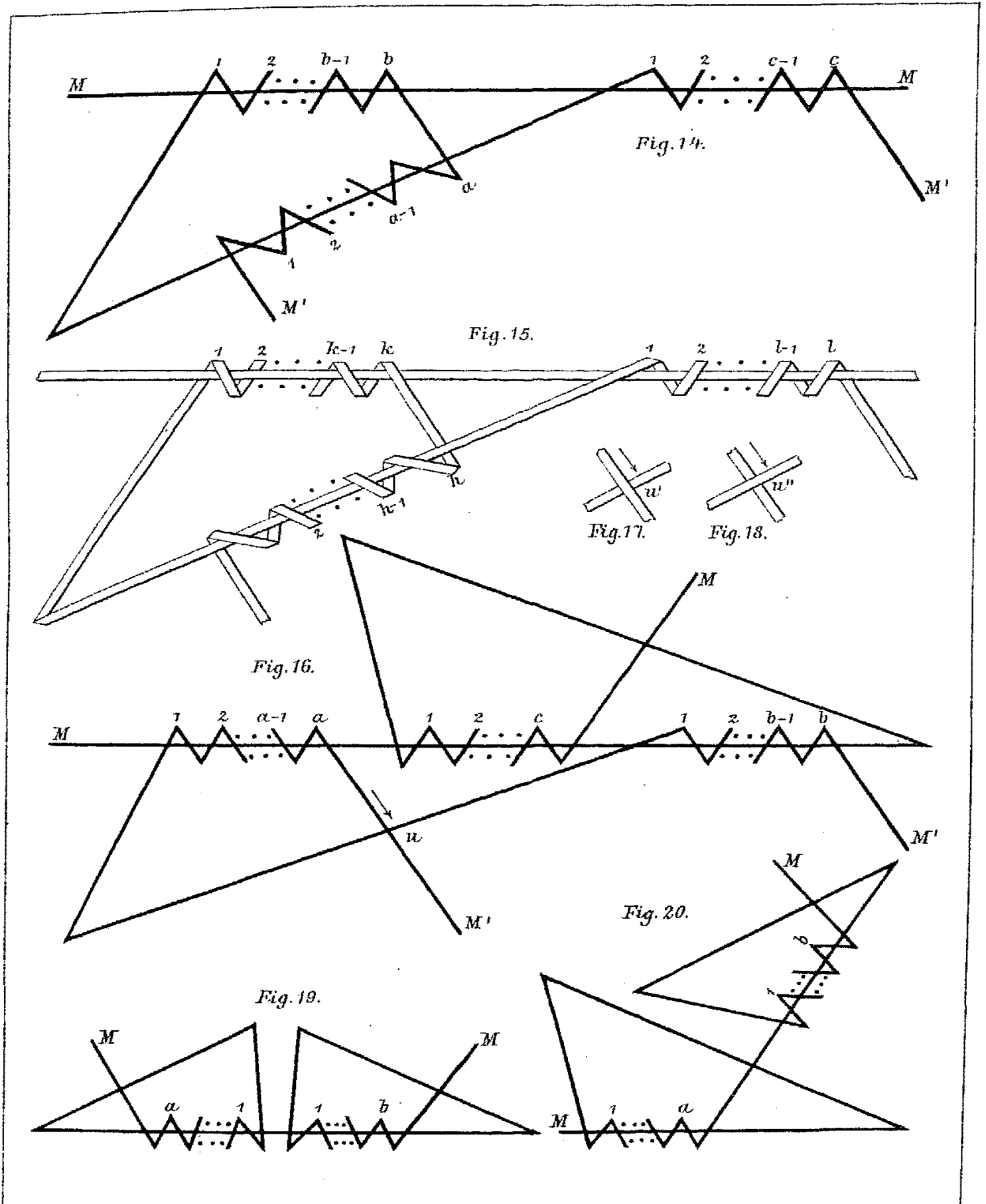
Nach paarweiser Vereinigung sämtlicher Enden werden die Nadeln aus beiden Korkscheiben herausgezogen, so dass das erzeugte Flächensystem sich vollständig von der Radwelle ablöst und behufs seiner topologischen Untersuchung auf irgend eine weiche ebene Unterlage, am besten auf eine Korkplatte von entsprechenden Dimensionen übertragen werden kann. Hierbei erscheint die Darstellung der jeweiligen Verkettungen, Verflechtungen etc. dadurch wesentlich erleichtert, dass an Stelle der früher erhaltenen keilförmigen Flächensectoren nunmehr lauter ringförmig geschlossene Bänder getreten sind, deren jeweilige Aufhängungen und Knotenwindungen sich ohne zeitraubende Verschiebungen in eckenfreie Flächentheile direct mit Stecknadeln auf der betreffenden Platte fixiren lassen.

Durch Aushängen aller Öhre aus den sie umschliessenden Carabinern kann endlich das ganze Flächensystem wieder in einzelne Bänder aufgelöst werden, wonach die zuletzt angegebene Erzeugungsweise der hier untersuchten topologischen Gebilde vor jeder anderen auch noch den geringen Aufwand an Materiale voraus hat.









Autor del. J. Fikrie lith.

K. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

