XV.

Einige Sätze aus der Analysis situs Riemann'scher Flächen.

Von

Dr. J. Thomae,

Docent an der Universität Halle.

(Hierzu Tafel V, Figur 1 bis 3.)

In seiner Theorie der Abel'schen Functionen hat Riemann die Sätze der Analysis situs, welche für Untersuchungen algebraischer Functionen und deren Integrale wichtig sind, gegeben. Wir wollen hier, um diese Theorie zugänglicher zu machen, jene Sätze etwas umständlicher herleiten, die Relation zwischen den Querschnitten und Verzweigungspunkten, welche Riemann mit Anwendung des Dirichlet'schen Princips findet, geometrisch nachweisen und daran Untersuchungen über die möglichen Lagen kanonischer Querschnittnetze knüpfen.

Bei der Betrachtung der Functionen einer reellen Veränderlichen stösst man in Bezug auf ihren Verlauf auf Eigenschaften, durch welche sehr einfache Functionen, die man für einander verwandt halten muss, weit von einander getrennt werden. So giebt es für eine ganze Function n^{ten} Grades zuweilen n, zuweilen weniger Werthe der Veränderlichen, für welche die Function Null wird. Diese Trennung zu vermeiden, hat man in das Zahlengebiet ideale Grössen eingeführt, welche eben Das leisten, jene ganzen Functionen unter einem Gesichtspunkte zu vereinigen. Historisch sind die Functionen zweiten Grades der Anlass hierzu gewesen; aber es ist in der Folge gezeigt worden, dass diese idealen Gebilde, die man complexe Zahlen genannt hat, nicht blos hinreichen, die angeführten Eigenschaften ganzer Functionen auszugleichen, sondern auch noch viel weiter hinaus befriedigende Aufschlüsse über den Verlauf der Functionen zu geben.

Die Untersuchungen über den Verlauf der Functionen einer complexen Variabeln werden am meisten unterstützt durch die graphische Darstellung der complexen Zahlen, welche Gauss erfunden hat. Wegen der zweifachen Mannichfaltigkeit benutzt er räumliche Gebilde von eben so vielfacher Mannichfaltigkeit, von zwei Dimensionen, nämlich die Ebene. Wir denken uns nach Gauss's Vorgange in einer Ebene in jedem Punkte die Maasszahlen der Entfernungen von einem rechtwinkligen Axenpaare aufgetragen und lassen die Entfernung von der einen (der x-Axe) den imaginären, von der anderen (der y-Axe) den reellen Theil einer Zahl $z=x+yi$ bilden. Der Punkt als Träger einer Zahl ist nach und nach so mit derselben verwachsen, dass Punkt und Zahl im Sprachgebrauche mit einander verwechselt werden. Diese Anschauung schafft gleichzeitig eine bequeme, fassliche Terminologie. Die Lage der Punkte als Träger der Zahlen spielt eine wesentliche Rolle in der Analysis; durch sie muss z. B. der Begriff grösser oder kleiner ersetzt werden, der für complexe Zahlen keine eigentliche Bedeutung hat. Für solche Beziehungen hat man eine besondere Disciplin, die Analysis situs erfunden, in welcher Sätze anschaulich und einfach erwiesen werden, welche rein analytisch oft fernliegende transcendente Hülfsmittel erfordern.

Eine Function von $z=x+yi$, welche in einem bestimmten Grössengebiete betrachtet wird, kann so eine Function eines Flächenstücks heissen. Wenn die Function für jeden Punkt des betrachteten Stückes nur einen Werth hat, so heisst sie dort einwerthig, im anderen Falle mehrwerthig. Denkt man sich die Werthe einer solchen Function, welche selbst complexe Zahlen sind, in einer anderen Ebene aufgetragen, so erhält man eine Abbildung, oder Abbildungen der ersten Ebene, und zwar, wie Gauss gezeigt hat, solche, dass die entsprechenden Figuren in den kleinsten Theilen einander ähnlich sind, ausgenommen in einzelnen Punkten.

Cauchy verdanken wir den wichtigen Satz, dass das Integral einer Function von $x+yi$ auch eine complexe Function der oberen Grenze $x+yi$ sei. Dies würde nicht der Fall sein, wenn ein Integral auf jedem anderen Integrationswege zwischen zwei Punkten einen anderen Werth erlangte. Es ist aber die Integration eine Hauptquelle zur Erlangung neuer Functionen, und es war daher nöthig, diesen wichtigen Satz zu finden. Cauchy zeigte, dass das Integral einer Function von $x+yi$ genommen über eine geschlossene Curve der Ebene Null sei, wenn innerhalb derselben die Function endlich und einwerthig ist. Das heisst, das Stück darf keinen (singulären) Punkt enthalten, um welchen herum die Function neue Werthe erlangt, wenn die Variable auf einem geschlossenen Wege um ihn geführt wird. Enthält das Stück keinen solchen singulären Punkt, so ist sie dort einwerthig, wie man auch die Variable darin herumführen mag.

Bei der Untersuchung der Integrale complexer Functionen gelangt man ordnungsmässig von denen der rationalen, welche nur eine neue Transcendente, den Logarithmos, liefern, zu denen, welche Wurzeln algebraischer Gleichungen unter dem Integralzeichen enthalten. Bei diesen bilde gerade die Mehrwerthigkeit einen wesentlichen Bestandtheil und ein Hinderniss in der Behandlung. Dem hat Riemann dadurch abgeholfen, dass er für algebraische Functionen eine neue Vorstellung schuf, indem er sie auf Flächengebilde bezieht, in welchen sie als einwerthige betrachtet werden können. Die Ebene, welche der Träger der Zahlen $z = x + yi$ ist, heisse die z-Ebene, s sei die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen s und z. Dann giebt es für jeden Werth von z, ausgenommen in einzelnen Punkten, gleichviele Werthe von s, etwa n an Zahl. Wir nehmen nun mit Riemann an, dass zu jedem dieser Werthe von s ein anderer über der z-Ebene gelegener Punkt gehöre, deren orthogonale Projectionen zusammenfallen. Indem wir dies für jeden Punkt ausführen, gelangen wir zu n überall über der z-Ebene ausgebreiteten Blättern. Diese n Blätter sind eine in den kleinsten Theilen ähnliche Abbildung der Ebene, auf welcher die Werthe von s aufgetragen sind. Jedem Punkt des Systems entspricht ein und nur ein Punkt der s-Ebene.

Wir stellen uns nun die Ebene als eine geschlossene Fläche vor, etwa als Kugel mit unendlich grossem Radius, so dass sie einen unendlich fernen Punkt enthält. Ein System von n Blättern wird dann vorgestellt werden müssen als n unendlich grosse in einander liegende Kugeln mit n unendlich fernen Punkten.

Es kann das System zunächst der Art sein, dass die Blätter ohne jedweden Zusammenhang sind, so dass ein Punkt, welcher sich in einem der Blätter beliebig bewegt, stets in demselben bleibt. Solche Systeme jedoch, welche entweder ganz oder theilweise unverbunden sind, werden als von geringer Bedeutung hier ausgeschlossen. Wir nehmen daher an, dass ein Punkt, der sich um einen gewissen Punkt, einen Verzweigungspunkt herum bewegt, aus einem Blatt in ein anderes gelange. Die algebraische n werthige Function s gelangt, wie Puisseux ausführlich gezeigt hat, wenn man die Variable z um einen solchen Punkt bewegt, den wir früher in der Ebene einen singulären Punkt nannten, zu einem anderen Werthe, wenn die Variable ihren ursprünglichen wieder hat. Ebenso muss auch der Punkt zu einem anderen Punkte des Systems gelangen, weil wir annahmen, dass jedem anderen Werthe von s ein anderer des Systems entspräche. Wenn die algebraische Function bei einem zweiten Umgange der Variabeln um den Verzweigungspunkt denselben Werth wieder annimmt, so muss auch der Punkt im System seine erste Lage wieder erhalten. In diesem Falle heisst der Punkt ein einfacher Verzweigungspunkt. Befindet sich im zweiten Blatte ein eben solcher Verzweigungspunkt, der dieses mit einem dritten verbindet, so kann durch Umgehung eines Systemstückes, dessen Projection in der z-Ebene beide Punkte enthält, ein Punkt bei einem ersten Umgange in ein zweites, beim folgenden in ein drittes Blatt und dann erst zurück gelangen. Nähert man die beiden Punkte einander, bis sie zusammenfallen, so enthält die Projection eines Flächenstücks beide Punkte, wenn sie einen enthält, und man muss nun der Reihe nach in drei Blätter, oder wenn mehr solche Punkte in ähnlicher Weise zusammfallen, durch Umgänge um denselben in mehr Blätter gelangen. Ein solcher Punkt heisst ein mehrfacher Verzweigungspunkt und er leistet genau dasselbe, was mehrere einfache Verzweigungspunkte leisten. Ebenso können algebraische Functionen um gewisse Punkte herum erst nach mehreren Umgängen der Variabeln ihren ersten Werth wieder erlangen, z. B. $\sqrt[m]{z}$ im Punkte $z=0$. Wenn aber zwei Verzweigungspunkte zusammenfallen, welche dieselben Blätter verbinden, so führt uns ein Umgang um beide immer zum Ursprunge zurück, die beiden Verzweigungspunkte haben sich aufgehoben. Ein sich Aufheben kann offenbar immer nur zwischen einer geraden Anzahl von Verzweigungspunkten stattfinden. Wir führen nun von allen wirklichen Verzweigungspunkten Linien nach n übereinander liegenden, sich deckenden Punkten des Systems, und nehmen an, dass längs einer solchen Linie ein Blatt mit einem anderen zusammenhänge, d. h. dass man durch Ueberschreitung einer derselben aus einem Blatte in ein anderes gelange. Führt man nämlich einen Punkt einmal über die Linie, und ein andermal um den zugehörenden Punkt herum nach einem festen Punkte, so bilden beide Wege zusammen einen Umgang um den Verzweigungspunkt, und müssen daher zu verschiedenen Punkten des Systems führen. Zu jedem unserer Verzweigungspunkte kann man in der Nähe des Endpunkts und auf der zugehörigen Linie einen gleichartigen annehmen; lässt man dann alle jene Punkte in einem Punkte (Knotenpunkt) zusammenfallen, so wird das System in Nichts geändert; da wir nun den Knotenpunkt willkürlich wählten, so kann man ihn so bestimmen, dass dort keine Verzweigung (um ihn herum) stattfindet. In diesem Falle müssen alle jene Verzweigungspunkte sich aufheben. Hieraus folgt, dass in einer geschlossenen (begrenzungslosen) Fläche die Anzahl aller Verzweigungspunkte gerade sein muss, wenn man die mehrfachen so vielen einfachen gleichsetzt, als solche dasselbe leisten.

Die von uns angegebene Art, Linien zu ziehen, ist immer ausführbar und gewährt ein festes Bild. Was die Vorstellung anbetrifft, so nimmt Riemann eben an, dass längs der Linien Verzweigung stattfinde, dass die Blätter in einander und durch einander hindurch verwachsen seien. Die Verzweigungspunkte erscheinen dann als Schrauben mit in sich zurücklaufenden Windungen. Wir können aber auch die Linien als blose Grenzmarken oder Brücken ansehen, über welche wir nur vermittels des Willens in ein anderes Blatt gelangen. Die Verzweigungspunkte sind dann Nichts, als die Endpunkte jener Brücken.

Zuerst sind die algebraischen Functionen wirklich der Grund dieser

Flächenbildung gewesen; hernach hat jedoch Riemann die Flächen früher construirt, und dann nachgewiessen, dass zu jedem Systeme eine Classe algebraischer Functionen gehöre, die einwerthig in ihr sind.

Für die Ebene gilt nun die für den Cauchy'schen Satz wichtige Beziehung, dass jede geschlossene Curve ein Stück vollständig aus ihr heraus schneidet. Wenn daher jener Satz verlangt, dass die behandelte Function innerhalb der geschlossenen Curve endlich und einwerthig sein soll, so entsteht kaum ein Zweifel über den Sinn des Innerhalb. Es bleibt zwar noch zu wählen zwischen dem Theile, der den unendlich fernen Punkt enthält und dem, welcher ihn ausschliesst; aber das Wort ist bezeichnend genug, um den zweiten Sinn darin finden zu lassen.

Diese Eigenschaft haben die algebraischen Flächen keineswegs, und es hat Riemann diejenigen Flächen einfach zusammenhängend genannt, welche die Eigenschaft der Ebene haben, von jeder geschlossenen Curve zerstückelt zu werden. Mehrfach zusammenhängende aber nennt er solche, in welchen, wie etwa auf der Oberfläche eines Ringes, Querschnitte gezogen werden können, welche die Fläche nicht zerstückeln. Unter einem Querschnitte aber verstehen wir eine Linie, welche zwei Punkte der Begrenzung verbindet, oder, wenn die Fläche eine geschlossene ist, eine in sich zurücklaufende, sich selbst aber oder die Begrenzung niemals schneidende Linie. Die algebraischen Flächen sind nun freilich anderer Natur, als die Oberfläche eines Ringes; aber die Sätze über den Zusammenhang gelten ganz allgemein.

Die erste Forderung an eine einfach zusammenhängende Fläche ist die, dass sie wirklich zusammenhänge, nicht aus getrennten Stücken bestehe, wie etwa das erwähnte System von n Blättern ohne Verzweigungspunkte, und eine erste Folgerung ist die, dass die Begrenzung derselben aus einem Stück bestehe. Im anderen Falle können wir zwei Punkte der verschiedenen Begrenzungsstücke mit einander durch einen Querschnitt verbinden und dieser wird die Fläche nicht zerstückeln. Denn man kann nun von einem zum anderen Ufer des Querschnittes dadurch gelangen, dass man sich längs der Begrenzung fortbewegt, weil die einzelnen Begrenzungsstücke in sich zusammenhängen.

Stossen zwei einfach zusammenhängende Flächen so an einander, dass sie entweder die ganze Begrenzung oder einen continuirlichen Theil derselben gemein haben, so bilden sie zusammen nach Aufhebung der gemeinsamen Begrenzung eine einfach zusammenhängende Fläche.

Wird die Fläche T durch einen Querschnitt α in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt, so heisst sie zweifach zusammenhängend, und sie wird durch jeden möglichen Querschnitt a, der T nicht zerstückelt, in eine einfach zusammenhängende verwandelt. Denn der Querschnitt a zerstückelt T' in mehrere einfach zusammenhängende Stücke; hebt man α auf, so stossen solche Stücke längs eines continuirlichen Theils ihrer Begrenzung an einander, die entstehende Fläche T'' ist einfach zusammenhängend.

Giebt es in einer mehrfach zusammenhängenden Fläche irgend einen nicht zerstückelnden Querschnitt, welcher zwei Punkte der Begrenzungen G und G_1 (die auch dieselben sein können) mit einander verbindet, so kann man auch einen eben solchen Querschnitt von einem beliebigen Punkt von G nach einem beliebigen von G_1 führen; denn man kann einmal den Theil von G zwischen dem Anfangspunkte des Querschnitts und dem gegebenen Punkte zum Querschnitt hinzunehmen, oder man kann auch, anstatt den Querschnitt in G einmünden zu lassen, ihn in endlicher Entfernung etwa parallel mit G bis zu jenem Punkte hinführen und dort erst auslaufen lassen, wobei die Parallele so zu ziehen ist, dass zwischen ihr und G ein einfach zusammenhängender Flächenstreifen liegt.

Wird eine Fläche T durch einen Querschnitt α in eine n-fach zusammenhängende T' verwandelt, so heisst sie $\overline{n+1}$-fach zusammenhängend und sie wird durch jeden in ihr möglichen, T nicht zerstückelnden Querschnitt a in eine n-fach zusammenhängende T'' verwandelt. Um den Schluss von n auf $n+1$ anzuwenden, setzen wir voraus, der Satz sei für eine n-fach zusammenhängende Fläche völlig erwiesen.

Wenn die Querschnitte α und a keinen Punkt mit einander gemein haben, so können wir sie durch einen Querschnitt c verbinden, was immer als geschehen angenommen wird, wenn sie nicht schon durch die Begrenzung von T mit einander verbunden sind; es ist dann $a+c$ ein nicht zerstückelnder Querschnit in T' und $\alpha+c$ ein eben solcher Querschnitt in T'', weil eine Linie c, die getrennte Begrenzungsstücke verbindet, nach dem Früheren eine Fläche nicht zerstückelt. Wenn a und α (und c) kein Stück der Fläche völlig begrenzen, so wird die n-fach zusammenhängende Fläche T' durch a in eine $\overline{n-1}$-fach zusammenhängende P zerschnitten. Da T'' durch α in P zerlegt wird, so ist T'' n-fach zusammenhängend w. s. e. w. Wenn a (und c) T' zerstückelt, so kann es einen Querschnitt β geben, der weder T' noch T'' zerstückelt. Dann kann erst β den Querschnitt α, darauf a den Querschnitt β ersetzen. Einen solchen Querschnitt β giebt es aber jedesmal, so lange eins der Stücke mehrfach zusammenhängend ist. Wenn aber keins der Stücke mehrfach zusammenhängend ist, so können wir von a diejenigen Stücke tilgen, zu deren beiden Ufern **verschiedene** einfach zusammenhängende Stücke der Fläche sich ausbreiten. Der Rest von a und der Querschnitt α zerschneiden dann T in eine einfach zusammenhängende Fläche Q. Die einzelnen Stücke von a bilden daher $n-1$ Querschnitte, weil T' durch jedwede $\overline{n-1}$ Querschnitte, aber auch nur durch so viel, in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt wird. Tilgen wir aber nun statt jener Stücke von a diejenigen von α, welche mit ihnen Stücke der Fläche völlig begrenzen, so werden von der einfach zusammenhängenden

Fläche Q hier einfach zusammenhängende Stücke abgeschnitten und dort längs eines continuirlichen Theiles ihrer Begrenzung angefügt. Die Reste von α bilden aber (weil sie mit den Resten von a in Q gleichviel Anfangs- und Endpunkte und gleichviel Punkte auf der Begrenzung von T haben $n-1$ Querschnitte. Es wird also T' durch $n-1$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt und ist daher n-fach zusammenhängend, w. z. e. w.

Flächen, welche längs einer Linie sich spalten, können unberücksichtigt bleiben, weil sie einen unendlich grossen Zusammenhang haben. Z. B. wenn auf einer Ebene irgendwo ein Halbkegel aufsitzt, so sind alle grössten Kreise durch einen Punkt, wenn man sie in der Ebene durch Gerade, welche durch einen Punkt gehen, verbindet, nicht zerstückelnde Querschnitte.

Ausser diesem Falle gehört aber zu jeder Fläche eine ganz bestimmte Anzahl von Querschnitten. Für eine geschlossene (begrenzungslose) Fläche ist diese Anzahl gerade, was wir nur für eine bestimmte Art von Querschnitten beweisen, da es wegen der Unveränderlichkeit dieser Zahl dann für alle Arten gilt.

Ein einzelner Querschnitt, der in unserem Fall in sich zurückläuft, kann eine geschlossene Fläche nicht in eine einfach zusammenhängende verwandeln, weil seine beiden Ufer zwei getrennte Begrenzungsstücke bilden. Eine Verbindungslinie der beiden Ufer bringt die ganze Begrenzung in einen einzigen Zusammenhang. Die Fläche kann nun einfach zusammenhängend sein. Einen dritten Querschnitt, wenn noch einer möglich ist, kann man so ziehen, dass er von einem Punkte des früheren ausgeht und in sich zurückläuft. Dadurch wird die Begrenzung irgendwo geöffnet, das eine Ufer des neuen Querschnitts eingeschaltet, das andere bildet ein getrenntes Begrenzungsstück; es ist daher noch ein vierter Querschnitt möglich u. s. f.

Es findet nun, wie Riemann angiebt, bei einer einfach zusammenhängenden, über einen endlichen Theil der z-Ebene ausgebreiteten Fläche zwischen der Anzahl ihrer einfachen Verzweigungspunkte und der Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung ihrer Begrenzungslinie macht, die Relation statt, dass die letztere um eine Einheit grösser ist, als die ertere, und aus dieser ergiebt sich für eine mehrfach zusammenhängende Fläche eine Relation zwischen diesen Anzahlen und der Anzahl der Querschnitte, welche sie in eine einfach zusammenhängende verwandelt.

Den letzten Theil dieses Satzes, den wir geometrisch nachweisen, hat Riemann mit Hülfe einer logarithmischen Transcendenten erwiesen.

Von dem vertikalen Abstande der Blätter einer über die z-Ebene ausgebreiteten Fläche können wir absehen, wir stellen uns dieselben als einander sehr nahe vor, müssen jedoch in Betracht ziehen, dass eine Verzweigung der Blätter auch um Löcher herum stattfinden kann.

Wenn Jemand auf der Begrenzung eines Flächenstückes fortschreitet, das Gesicht in der Bewegungsrichtung, so sagt man, er durchlaufe die Begrenzung in positiver Richtung, wenn die anstossende Fläche immer zur Linken bleibt; und wenn Jemand um einen Kreis herumgegangen ist, so sagen wir, er habe eine ganze positive Umdrehung seiner Richtung ausgeführt.

Das betrachtete Flächenstück besteht nun aus mehreren Blättern, jedes vielleicht mit anderen Grenzen. Diese Blätter setzen sich um die Verzweigungspunkte oder Löcher herum in einander fort. Dass Blätter am Rande dieser Löcher oder der Grenzen, wie etwa die platt gedrückte Oberfläche eines Ringes, zusammenhängen, wollen wir der Einfachheit wegen vermeiden.

Betrachten wir nun ein einzelnes Blatt der Fläche, so hat es etwa folgende Gestalt: Um die Verzweigungspunkte herum ziehen wir Kreise k und verbinden einen Punkt derselben mit der Begrenzung, was auf mehrere Arten geschehen kann. Die Linie l (Taf. V, Fig. 1), welche anzeigt, dass das Blatt sich längs derselben in ein anderes fortsetzt, welche aber hier nur einen Theil der Begrenzung bildet, kann entweder an die äussere Begrenzung s wie l_1 oder zu einem Loche wie l_2 geführt werden, oder es kann eine frühere Linie l als Begrenzung angesehen werden, so dass l_4 in l_3 einläuft und den Schnittpunkt eine Linie λ mit der übrigen Begrenzung verbindet. Ebenso lassen sich Löcher durch Linien mit der übrigen Begrenzung verbinden (welche Verbindungslinien ebenfalls einen Ort der Verzweigung angeben können); endlich kann eine Linie, wie in der Figur ε, gleichsam als eine Spitze der äusseren Begrenzung ins Innere hineinragen. Alle jene Linien aber sollen sich unter sich oder mit der vorhandenen Begrenzung nicht schneiden, und alle zusammen als die Begrenzung des Flächenstücks S angesehen werden. Wie man sieht, ist dann in S jeder Querschnitt ein zerstückelnder, also S einfach zusammenhängend.

Die Umdrehung, welche die Richtung der äusseren Grenze s macht, ist offenbar eine ganze positive. Eine beliebig in S liegende Linie, die beiderseits begrenzt ist, ändert ihre Richtung so, dass sich die Aenderungen auf beiden Ufern gegenseitig aufheben; aber in ihren Endpunkten macht die Richtung zusammen eine ganze negative Umdrehung, weil sie von links nach rechts vor sich geht, wenn die Linie l in positiver Richtung durchlaufen wird. Hieran wird Nichts geändert, wenn wir an einem Endpunkte einen Kreis oder ein Loch anfügen, weil von der Linie zum Kreise und vom Kreise zur Linie genau eine halbe positive, auf dem Kreise oder Loche aber eine ganze negative Umdrehung gemacht wird. Von der Begrenzung zu einer Linie ε oder λ, von dieser zur Begrenzung s wird in Summa eine halbe positive Umdrehung gemacht, so dass der gesammte Einfluss einer Linie ε, oder einer Linie λ oder l mit einem Kreise oder

Loche in Bezug auf die Anzahl der Umdrehungen Null ist, und irgend ein solcher Theil der Begrenzung schadlos aufgehoben werden kann. Da S keinen Verzweigungspunkt enthält und die Richtung von s eine ganze Umdrehung macht, so ist die letztere Zahl wirklich um Eins grösser, als die der Verzweigungspunkte.

Fügen wir hieran ein zweites Blatt, so müssen in diesem die Linien l, längs welcher es mit dem ersten zusammenhängt, sich decken, soweit überhaupt sich die Blätter decken; sonst kann eine Linie in dem einen Blatte wohl über das andere Blatt hinausgehen. Um nun einen Zusammenhang zwischen den beiden Blättern herzustellen, tilgen wir das eine Ufer einer Linie in S und das andere der entsprechenden Linie in S_1. Der dort liegende Verzweigungspunkt bleibt durch die Kreise, welche zusammen eine Schraubenlinie bilden, welche durch die beiden anderen Ufer von l mit der äusseren Begrenzung verbunden ist, ausgeschlossen. Die Summe der Umdrehungen der Richtung, welche die Begrenzung von S und S_1 macht, war 2; aber in den Endpunkten der zerstörten Ufer macht die Richtung zusammen genommen genau eine ganze. Diese wurde zerstört, es bleibt also eine Umdrehung. Wenn jener Verzweigungspunkt ein einfacher ist, so wird durch Aufhebung der beiden anderen Ufer und der Kreise die Fläche in sich zurück fortgesetzt und ein Verzweigungspunkt eingeschaltet. Die Umdrehungen werden um eine vermehrt (zwei negative an den Kreisen und eine positive an den Ufern werden aufgehoben), also ist noch die letztere Zahl um Eins grösser, als die erstere. Jede geschlossene Curve zerstückelt die Fläche, sie ist daher einfach zusammenhängend.

So können wir ein drittes und viertes Blatt hinzufügen. Wir nehmen nun an, der Riemann'sche Satz sei bewiesen für eine Fläche von k Blättern, die auf die beschriebene Weise an einander gefügt wurden, wir zeigen, dass er dann noch gilt, wenn wir ein $\overline{k+1}^{\text{tes}}$ Blatt hinzufügen.

Wir fügen zunächst das Blatt so an, dass kein Verzweigungspunkt in die Fläche eingeschaltet wird. Sei es nun, dass der Zusammenhang dadurch hergestellt wird, dass zwei entsprechende Ufer von Linien l aufgehoben werden als Begrenzung, welche von einem Punkte oder Loche ausgehen, um das herum sich die Fläche zweimal windet, sei es von einem solchen, um welches sich die Fläche mehrmals windet, es stossen immer zwei einfach zusammenhängende Flächenstücke längs eines continuirlichen Theils ihrer Begrenzung an einander, und es wird die hinzugekommene Umdrehung des neuen Blattes durch die wegfallende an den Ufern von l aufgehoben, so dass der Satz von Riemann gilt.

Wenn aber l von einem α-fachen Verzweigungspunkte ausging, und wenn dort schon α Blätter zusammenhängen, so können wir nun auch die beiden letzten noch übrig gebliebenen Ufer von l aufheben sammt den $\alpha+1$ Kreisen, die sich um jenen Verzweigungspunkt winden. Es werden dadurch genau α Umdrehungen ($\alpha + 1$ aus den Kreisen und eine negative von l) hinzugefügt und genau α Verzweigungspunkte eingeschaltet. Eine Linie, welche vorher zwei benachbarte Punkte der Ufer von l verband, zerstückelte die Fläche. Jetzt ist sie als geschlossene Curve anzusehen, und da weder auf der einen, noch auf der anderen Seite von l ein Weg von ihrem Inneren nach dem Aeusseren führt, so zerstückelt sie die Fläche noch, oder jene ist einfach zusammenhängend und es gilt der Satz Riemann's. Es sind jedoch, wenn die Fläche aus n Blättern besteht, nicht mehr, als $\overline{n-1}$ Verzweigungspunkte in die Fläche hinein gekommen und ein Loch können wir überhaupt nicht einfügen, weil, wenn dies nicht mit der äusseren Begrenzung verbunden ist, die Fläche mehrfach zusammenhängend ist. Wir wollen nun noch die übrigen Verzweigungspunkte in die Fläche hineinbringen und annehmen, dass Löcher in der Fläche nicht enthalten seien, indem wir deren Begrenzung als äussere Begrenzung mit betrachten.

Zerstören wir einen Kreis um einen Verzweigungspunkt, einen Kreis in einem Blatte, so fliesst sofort ein einfach zusammenhängendes Flächenstück in die Fläche ein längs einer continuirlichen Begrenzung. Die Fläche bleibt also einfach zusammenhängend. Die inneren Ufer der an diesen sich anhängenden Kreise um den Verzweigungspunkt, deren genau noch so viel sind, als der Verzweigungspunkt vielfach ist, werden so der Begrenzung hinzugefügt und sind durch die Linie l des ersten Blattes mit der übrigen Begrenzung verbunden, deren ein Ufer sich an einen solchen Kreis, deren anderes an den letzten Kreis sich anschliesst. Hierdurch werden α Umdrehungen von den inneren Kreisen und ein α-facher Verzweigungspunkt hinzugefügt, und sonst wird Nichts geändert. Fügen wir so nach und nach alle Verzweigungspunkte in die Fläche ein, so können wir noch die Kreise zu anderen Curven ausdehnen, die Linien l zusammenziehen, immer gilt der Riemann'sche Satz. Um nun den zweiten Theil desselben, von den mehrfach zusammenhängenden Flächen und der Querschnittzahl nachzuweisen, nehmen wir an, dass alle Verzweigungspunkte durch Linien l mit einem im Inneren liegenden Punkte verbunden seien und von dort aus in jedem Blatte nur eine einzige keine Verzweigung anzeigende Linie λ nach der äusseren Begrenzung führe. Wenn wir diese äussere Begrenzung nach und nach erweitern, so können wir diese endlich in einen Punkt, den unendlich fernen, zusammenziehen und dann die Linie λ bis ins Endliche verkürzen. Während nun vorher an die Endpunkte der Linien λ sich die äusseren Begrenzungsstücke anschlossen und mit diesen $n + \frac{n}{2}$ positive Umdrehungen zusammen dort stattfanden, so finden jetzt $\frac{n}{2}$ negative statt. Der Zusammenhang ist hierbei nirgend geändert. Ist nun w die Anzahl der Verzweigungspunkte, so war vorher $w + 1$, und ist jetzt $w + 1 - 2n$, die genaue Anzahl der Umdrehungen, welche die Richtung der ganzen Begrenzung macht. Die Linien λ können sodann noch, wie wir wissen, ohne Schaden weggelassen werden.

Wird nun die Fläche T durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt, so ist die Umdrehung der Richtung auf dem einen Ufer immer die entgegengesetzte, als auf dem anderen, diese Umdrehungen heben sich auf; aber wo zwei Querschnitte an einander stossen, was $4p-2$ mal geschieht, wird je eine halbe positive Umdrehung gemacht. Daher ist die Anzahl der Umdrehungen $2(p-1)$, woraus die von Riemann schon algebraisch bewiesene Gleichung folgt: $w-2n=2(p-1)$.

Wir nennen nun ein kanonisches Querschnittsystem in einer Fläche T ein solches, in welchem der Querschnitt b_1 zwei benachbarte Punkte der beiden Ufer des Querschnitts a_1 verbindet und a_2 aus einer Linie c_1, welche von einem Punkte von b_1 ausläuft und aus einem in sich zurücklaufenden Schnitte a_2 besteht. Ein vierter Querschnitt b_2 führt von einem Ufer von a_2 zu dem benachbarten Punkte auf dem anderen Ufer etc. So besteht das ganze Netz aus Systemen $a_\mu\ b_\mu$, denen eine Linie $c_{\mu-1}$ vorauf geht und eine c_μ folgt.

Es giebt unendlich viele solcher kanonischer Netze. Bildet man alle so zerschnittenen Flächen, etwa T', T'', T'''.... durch ein überall endliches Integral in T ab, welches in einem endlichen Theile von T jedesmal dasselbe ist, so bestehen zwischen den Ortsverschiedenheiten der parallelen Begrenzungsstücke (Periodicitätsmoduln) aller dieser Abbildungen lineare ganzzahlige Relationen, welche die Abel'schen Transformationsrelationen genannt werden und welche aus der Theorie der ϑ-Functionen bekannt sind.

Hat u in T' die Periodicitätsmoduln $A'_1, A'_2 \dots A'_p$, bei $a_1, a_2, \dots a_p$; $B'_1, B'_2, \dots B'_p$ bei $b_1, b_2, \dots b_p$, und in T'' an $a''_1, a''_2, \dots a''_p$ die $A''_1, A''_2, \dots A''_p$, an $b''_1, b''_2, \dots b''_p$ die $B''_1, B''_2, \dots B''_p$, so besteht die Relation:

$$A''_\mu = \sum_1^p{}_\varepsilon (A'_\varepsilon\, \alpha_{\mu\varepsilon} + B'_\varepsilon\, \beta_{\mu\varepsilon}),\quad B''_\mu = \sum_1^p{}_\varepsilon\, (A'_\varepsilon\, \gamma_{\mu\varepsilon} + B'_\varepsilon\, \delta_{\mu\varepsilon}),\quad \mu = 1, 2, \dots p,$$

worin $\alpha\beta\gamma\delta$ ganze Zahlen sind. Alle Abbildungen durch u, also auch die, zu welchen A'_μ und A''_μ gehören, müssen denselben Flächeninhalt haben, und bildet man A'_μ, A''_μ durch p von einander unabhängige Functionen ab, so müssen für jede Abbildung durch irgend ein u dieselben Relationen bestehen, und da zwischen den Periodicitätsmoduln verschiedener u bestimmte, von Riemann (Abel'sche Functionen Theil 4, §. 20) gegebene Beziehungen stattfinden, so müssen jene ganzen Zahlen folgenden Bedingungen Genüge leisten:

$$\sum_1^p{}_\varepsilon (\alpha_{\varepsilon\mu}\ \gamma_{\varepsilon\mu'} - \alpha_{\varepsilon\mu'}\ \gamma_{\varepsilon\mu}) = 0,\qquad \sum_1^p{}_\varepsilon\, (\beta_{\varepsilon\mu}\ \delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\ \delta_{\varepsilon\mu}) = 0,$$

$$\sum_1^p{}_\varepsilon (\alpha_{\varepsilon\mu}\ \delta_{\varepsilon\mu} - \beta_{\varepsilon\mu}\ \gamma_{\varepsilon\mu}) = 1,\qquad \sum_1^p{}_\varepsilon\, (\alpha_{\varepsilon\mu}\ \delta_{\varepsilon\mu'} - \beta_{\varepsilon\mu'}\ \gamma_{\varepsilon\mu}) = 0 \text{ für } \mu \gtrless \mu',$$

woraus noch folgt:

$$\sum_1^p {}_\varepsilon(\alpha_{\mu\varepsilon}\,\beta_{\mu'\varepsilon}-\alpha_{\mu'\varepsilon}\,\beta_{\mu\varepsilon})=0,\qquad \sum_1^p {}_\varepsilon(\gamma_{\mu\varepsilon}\,\delta_{\mu'\varepsilon}-\gamma_{\mu'\varepsilon}\,\delta_{\mu\varepsilon})=0,$$

$$\sum_1^p {}_\varepsilon(\alpha_{\mu\varepsilon}\,\delta_{\mu\varepsilon}-\beta_{\mu\varepsilon}\,\gamma_{\mu\varepsilon})=1,\qquad \sum_1^p {}_\varepsilon(\alpha_{\mu\varepsilon}\,\delta_{\mu'\varepsilon}-\beta_{\mu'\varepsilon}\,\gamma_{\mu\varepsilon})=0\quad \mu\gtrless\mu'.$$

Diese nothwendigen Bedingungen können wir als bekannt voraussetzen; wir begnügen uns hier damit, nachzuweisen, dass sie auch hinreichende sind, d. h. dass zu jedem System solcher Zahlen ein kanonisches Querschnittnetz existirt. Welches Ufer eines Querschnitts positiv oder negativ genannt werde, ist an sich gleichgültig; aber im kanonischen System muss eine bestimmte Ordnung getroffen werden, so dass man beim Durchlaufen des Querschnittsystems in ganz bestimmter Reihenfolge die positiven und negativen Ufer durchläuft.

I) Wir wählen nun zuerst T' und T'' so, dass sie ganz übereinstimmen, bis auf die Linien $c'_{\varepsilon-1}$ und $c''_{\varepsilon-1}$, so dass sie zwar einen gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt haben, letztere aber auf dem entgegengesetzten Ufer von a_ε liegen, und bis auf die Linien c'_ε und c''_ε, deren Anfangspunkte auf entgegengesetzten Ufern liegen sollen. Es findet dann in $a'_\varepsilon\,b'_\varepsilon$ und $a''_\varepsilon\,b''_\varepsilon$ die entgegengesetzte Uferordnung statt, so dass $A'_\varepsilon=-A''_\varepsilon$, $B'_\varepsilon=-B''_\varepsilon$, sonst aber $A'_\nu=A''_\nu$, $B'_\nu=B''_\nu$ ist. Demnach ist $\alpha_{\mu\mu}=1$, $\delta_{\mu\mu}=1$, nur $\delta_{\varepsilon\varepsilon}=-1$, $\alpha_{\varepsilon\varepsilon}=-1$ und alle übrigen $\alpha\;\beta\;\gamma\;\delta$ sind Null.

II) Es sollen ferner T' und T'' übereinstimmen, es soll nur $c''_{\varepsilon-1}$ zu dem Endpunkte von $c'_{\varepsilon'-1}$ führen, und $c''_{\varepsilon'-1}$ zu dem Endpunkte von $c'_{\varepsilon-1}$, dann muss an die Stelle von $a'_{\varepsilon'}\,b'_{\varepsilon'}$, $a''_\varepsilon b''_\varepsilon$, an Stelle von $a'_\varepsilon\,b'_\varepsilon$, $a''_{\varepsilon'}\,b''_{\varepsilon'}$ gesetzt werden und es ist demnach $A''_\varepsilon=A'_{\varepsilon'}$, $B''_\varepsilon=B'_{\varepsilon'}$, $A''_{\varepsilon'}=A'_\varepsilon$, $B''_{\varepsilon'}=B'_\varepsilon$, oder $\alpha_{\mu\mu}=1$ ausser $\alpha_{\varepsilon\varepsilon}$, $\alpha_{\varepsilon'\varepsilon'}$, welche Null sind, $\alpha_{\varepsilon\varepsilon'}=\alpha_{\varepsilon'\varepsilon}=1$; ebenso $\delta_{\mu\mu}=1$ ausser $\delta_{\varepsilon\varepsilon}$, $\delta_{\varepsilon'\varepsilon'}$, welche Null sind, und $\delta_{\varepsilon\varepsilon'}=\delta_{\varepsilon'\varepsilon}=1$, alle übrigen $\alpha\;\beta\;\gamma\;\delta$ sind Null.

III) Nun sei T' von T'' dadurch verschieden, dass $c''_{\varepsilon-1}$ von $b'_{\varepsilon-1}$ nach b'_ε führe, welcher Querschnitt dann a''_ε heissen wird, und dass c''_ε von a'_ε $(=b''_\varepsilon)$ nach $a'_{\varepsilon+1}$ führe. Hierbei vollzieht sich entweder eine Umordnung des Ufervorzeichens an b'_ε oder an a'_ε. Man hat daher $A''_\varepsilon=\pm B'_\varepsilon$, $B''_\varepsilon=\mp A'_\varepsilon$, oder es ist: $\alpha_{\mu\mu}=1$ ausser $\alpha_{\varepsilon\varepsilon}=0$, $\beta_{\varepsilon\varepsilon}=\pm 1$, $\delta_{\mu\mu}=1$ ausser $\delta_{\varepsilon\varepsilon}=0$, $\gamma_{\varepsilon\varepsilon}=\mp 1$ und alle übrigen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ sind Null.

IV) Ferner sollen die Netze T' und T'' zusammenfallen, nur b''_ε nicht mit b'_ε. Es soll b''_ε mit b'_ε von a_ε anfangen, wie in Fig. 2, über die Linien $k_3\,k_4$, aus einem Flächenast in einen anderen gehen; dort aber soll b''_ε sich n Mal um $k_3\,k_4$ rechts oder links herum winden, also im zweiten Flächenast b'_ε $n-1$ Mal schneiden und beim n^{ten} Zusammentreffen wieder mit b'_ε auf das andere Ufer von a'_ε zurückgehen. Es ist dann $A''_\varepsilon=A'_\varepsilon\pm n\,B'_\varepsilon$, je nach der Richtung der Umläufe von b''_ε oder es ist $\alpha_{\mu\mu}=\delta_{\mu\mu}=1$,

$\mu=1, 2, \ldots p$, $\beta_{\varepsilon\varepsilon} = \pm n$ und sonst sind alle $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ Null. Es ist nicht immer möglich, die Windungen blos um $k_3\,k_4$ herum zu machen; aber es ist stets möglich mit Hinzuziehung noch anderer Verzweigungspunkte.

Eine ganz analoge Operation kann man auch auf a'_ε anwenden, wodurch man erhält $\alpha_{\mu\mu} = \delta_{\mu\mu} = 1$, $\gamma_{\varepsilon\varepsilon} = \pm n$ und sonst $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = 0$.

V) Endlich mögen sich T' und T'' dadurch unterscheiden, dass b''_ε etwa eben da, wo b'_ε oder in der Nähe auf a'_ε anfange und durch das Innere von T' nach $b'_{\varepsilon'}$ hinlaufe und überschreite, wie es in Fig. 3 angedeutet ist. Es sei hierbei $\varepsilon' = \varepsilon + 1$. Von dort aus kann man dann, weil die Fläche einfach zusammenhängend, also jedenfalls zusammenhängend ist, ohne irgend einen Querschnitt zu schneiden, und ohne einen früheren Punkt der Linie zu treffen, die Linie b''_ε zu dem dem Anfangspunkte auf dem anderen Ufer gegenüberliegenden Punkte führen. Von irgend einem Punkte von $a'_{\varepsilon'}$ ziehen wir $b''_{\varepsilon'}$ nach b'_ε und überschreiten diese Linie und führen $b''_{\varepsilon'}$, ohne irgend eine der schon gezogenen Linien zu schneiden, die Querschnitte als Wegweiser benutzend, zu dem dem Anfangspunkte auf dem entgegengesetzten Ufer von $a'_{\varepsilon'}$ gegenüberliegenden Punkte zurück. Dann verbinden wir b''_ε mit $a''_{\varepsilon'}$ (oder $a'_{\varepsilon'}$) durch c''_ε. Man zeigt leicht, dass T'' einfach zusammenhängend ist. Dann ist $A''_\varepsilon = A'_\varepsilon - B'_{\varepsilon'}$, $A''_{\varepsilon'} = A'_{\varepsilon'} - B'_\varepsilon$ oder $\alpha_{\mu\mu} = \delta_{\mu\mu} = 1$, $\mu = 1, 2, \ldots p$, $\beta_{\varepsilon\varepsilon'} = \beta_{\varepsilon'\varepsilon} = \mp 1$. Das untere Zeichen wird durch Ueberschreitung in entgegengesetztem Sinne erhalten. Ein selbiges Verfahren auf a_ε und $a_{\varepsilon'}$ angewendet, liefert das verwandte System, in welchem statt $\beta_{\varepsilon\varepsilon'} = \beta_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm 1$, $\gamma_{\varepsilon\varepsilon'} = \gamma_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm 1$ zu setzen ist.

Wenn man das angewandte Verfahren wiederholt, so gelangt man zu einem System, in dem $\beta_{\varepsilon\varepsilon'} = \beta_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm n$, oder $\gamma_{\varepsilon\varepsilon'} = \gamma_{\varepsilon'\varepsilon} = \pm n$ ist, und wegen II) können wir noch ε', welches gleich $\varepsilon + 1$ war, willkürlich wählen.

Betrachten wir T'' als erstes System und T' als abgeleitetes, so fliessen hieraus ebenso viele Zahlensysteme, denen wirkliche Transformationen eines Schnittnetzes entsprechen. Beide Arten von Transformationen können beliebig oft wiederholt und in beliebiger Reihenfolge angewandt werden, so dass man aus T' T'' und hieraus T''' etc. erhält, weil wir ja das erste System ganz willkürlich, nur von kanonischer Form annahmen, von welcher die folgenden auch sind.

Schreiben wir das Zahlensystem $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1p}, \beta_{11}, \ldots \beta_{1p} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{11}, \ldots\ldots \gamma_{1p}, \delta_{11}, \ldots \delta_{1p} \\ \cdots\cdots \\ \gamma_{p1}, \ldots\ldots \gamma_{pp}, \delta_{p1}, \ldots \delta^{pp} \end{vmatrix}$$

so bewirken zwei aufeinander folgende Transformationen ein System, welches aus dem System, das $T^{(n)}$ angehört und dem System der Transformation der Art zusammengesetzt ist, wie sich Determinantenproducte zusammensetzen. Wendet man diese Transformationen (I bis V) auf ein vorliegendes System $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ an, so findet man folgende Regeln:

Man kann die Zahlen einer der p ersten Horizontalreihen oder Vertikalreihen ihr Zeichen wechseln lassen, wenn man dasselbe gleichzeitig mit denen der entsprechenden Reihe aus den p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen thut.

Man kann zwei beliebige der p ersten Horizontal- oder Vertikalreihen und die entsprechenden der p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen mit einander vertauschen.

Man kann eine der p ersten Horizontal- oder Vertikalreihen mit der entsprechenden der p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen vertauschen und muss gleichzeitig das Vorzeichen einer derselben ändern.

Man kann eine der p ersten Horizontal- oder Vertikalreihen, mit einem ganzen positiven oder negativen Factor multiplicirt, zu der entsprechenden der p letzten Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihen addiren und umgekehrt.

Man kann die ν^{te} Horizontal- oder Vertikalreihe mit einem beliebigen ganzen positiven oder negativen Factor multiplicirt, zur $p+\nu'^{ten}$ Horizontal-, beziehentlich Vertikalreihe addiren, wenn man gleichzeitig die ν'^{te} mit demselben Factor zur $p+\nu^{ten}$ addirt und umgekehrt.

Hierbei sind die Abel'schen Transformationsrelationen Invarianten. Wendet man also diese Transformationen auf ein vorliegendes System an, so oft und in der Art, dass so viel als möglich Glieder des entstehenden Systems Null werden, so findet man, dass jedwedes, den Abel'schen Transformationsrelationen genügendes System auf das einfache $\alpha_{\mu\mu}=\delta_{\mu\mu}=1$ $\mu=1\ 2\ldots p$, sonst $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ gleich Null gebracht werden kann. Wir brauchen diese Rechnung nicht auszuführen, da ihre Art hinlänglich bekannt ist.

Umgekehrt kann man durch eine Reihe von Transformationen zu jedwedem möglichen, d. h. den Abel'schen Transformationsrelationen genügenden System von Zahlen $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, oder von einer Zerschneidung T' zu einer diesem Systeme entsprechenden Zerschneidung T'' gelangen, und man erhält so alle möglichen Zerschneidungen der Fläche T in eine einfach zusammenhängende durch ein kanonisches Querschnittnetz.

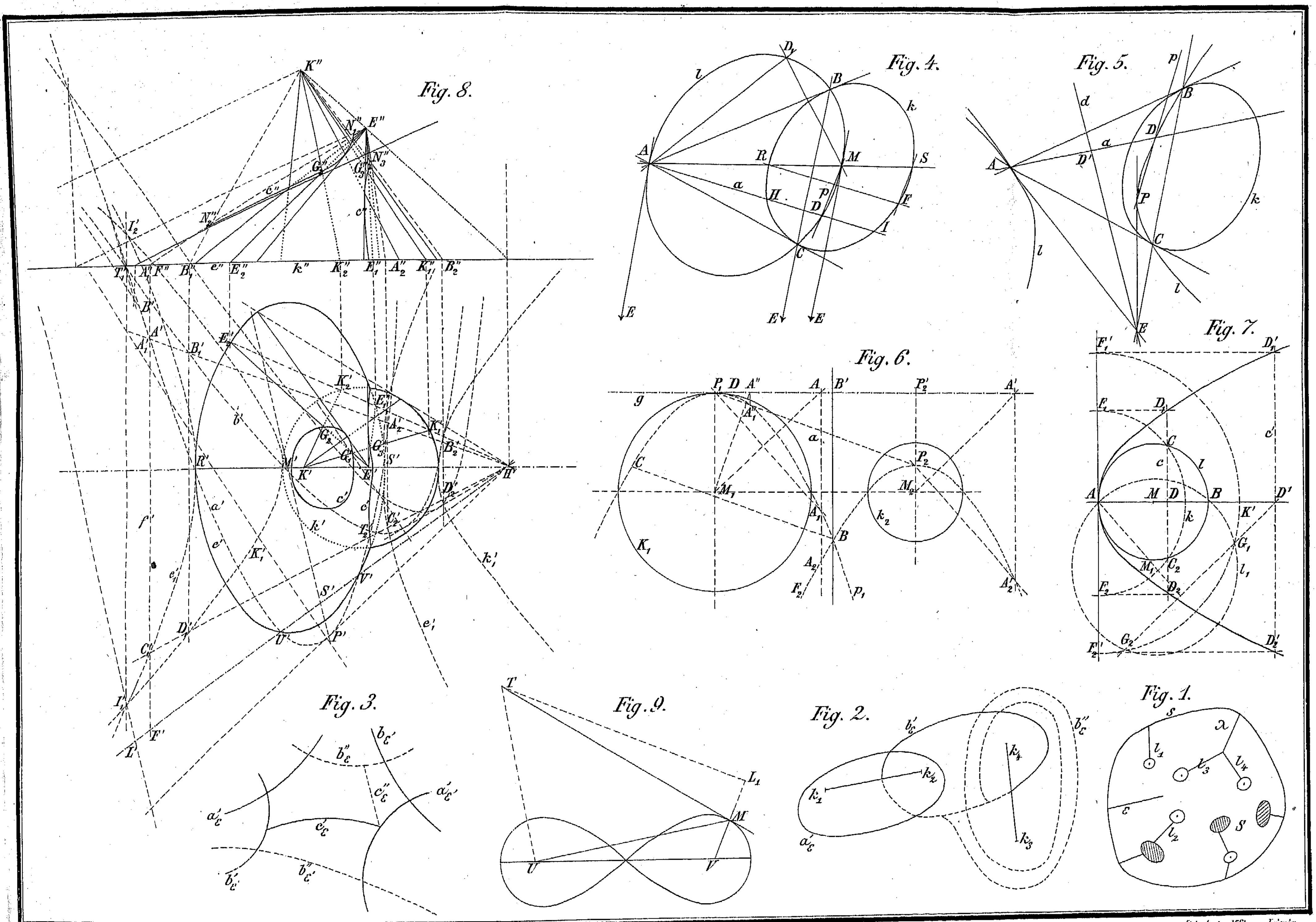
Fig. 8.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 3.
Fig. 9.
Fig. 2.
Fig. 1.