Aus

$$\lambda' : \lambda'' = \beta : \alpha = \beta\gamma : \gamma\alpha,$$

$$\lambda'' : \lambda''' = \gamma : \beta = \gamma\alpha : \alpha\beta$$

ergibt sich

$$\lambda' : \lambda'' : \lambda''' = \beta\gamma : \gamma\alpha : \alpha\beta.$$

Da

$$A\mathfrak{A} : G\mathfrak{A} = \lambda' + \lambda'' + \lambda''' : \lambda',$$

hat man

$$A\mathfrak{C} : B_a\mathfrak{C} = \lambda' + \lambda'' + \lambda''' : \lambda' = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha : \beta\gamma,$$

mithin, weil

$$A\mathfrak{C} = \alpha,$$

$$B_a\mathfrak{C} = m = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}.$$

Wir finden jetzt unmittelbar die Radien von

$$A_b A_c B_a \cdots = \sqrt{\varrho^2 + m^2},$$

$$A_b' A_c' B_a' \cdots = \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho^2 + m^2},$$

$$A_b'' A_c'' B_a'' \cdots = m,$$

wobei noch bemerkt werden soll, daß

$$m = \frac{\Delta}{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c}$$

gesetzt werden kann, wenn die Glieder im Nenner des Bruchs die Radien der Ankreise bedeuten.

Kolsnap, den 21. September 1907.

Das Maßwerk im geometrischen Unterricht.

Von Dr. ALFRED GERLACH in Frankfurt a. M.

Mit 38 Figuren im Text.

Vorbemerkungen.

Wenn man Antwort geben will auf die Frage, aus welchem Grunde in so verhältnismäßig kurzer Zeit die romanischen Bauformen durch die gotischen ersetzt worden sind, warum jahrhundertelang so massive Mauern mit kleinen Fenstern und dann plötzlich die himmelanstrebenden Bauten mit reicher Verzierung aufgeführt wurden, so muß man vor allen Dingen Rücksicht nehmen auf die konstruktiven Prinzipien. Das Streben nach schlanken Bauten im allgemeinen und nach lebendiger Gliederung im einzelnen war auch schon in der romanischen, besonders der spätromanischen Bauperiode, vorhanden;

aber in dieser Zeit war es nicht möglich, Bauten wie z. B. den Kölner Dom auszuführen, weil infolge der Verwendung des Rundbogens auch beim Gewölbebau an ein Durchbrechen der Mauern durch hohe breite Fenster nicht zu denken war; denn der Rundbogen übt einen verhältnismäßig hohen Seitendruck auf die Unterlage aus und macht daher dicke, widerstandsfähige Mauern erforderlich.

Nach Einführung des Spitzbogens im Kreuzgewölbe tauchte bald der Gedanke auf, nur die Teile der Mauern stark zu bauen, die besonders zu Stützen des Gewölbes geeignet waren. So entstanden Pfeiler, Strebepfeiler und später Strebebogen, während die Mauern nur noch die Stellung des einfachen Raumabschlusses einnehmen. Jetzt konnte man daran denken, den Bau durch hohe und breite Fenster zu beleben, und so entwickelte sich allmählich das gotische Kirchenfenster, das mit seinem so mannigfaltigen Maßwerk ganz außerordentlich zum Schmucke gotischer Kirchen beiträgt.

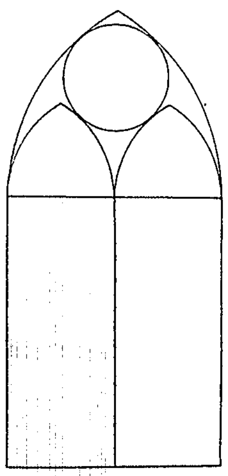


Fig. 1.

Das Wort Maßwerk ist eine Nachbildung des Wortes Laubwerk, es bedeutet also eigentlich gemessenes Werk. Daher verdienen die gotischen Kirchenfenster recht wohl vom Mathematiker beachtet zu werden, besonders wenn es darauf ankommt, nach praktischen Anwendungen unserer Probleme zu suchen, um unsern Schülern die mathematische Kost nach Möglichkeit schmackhaft zu machen. Daß das Maßwerk der Aufgaben, die im Unterricht Verwendung finden könnten, genug bietet, möchte ich im folgenden zeigen.

Doch zuvor noch einige Worte über den Zweck des Maßwerks. Es hat nicht etwa allein ornamentale Bedeutung, sondern dient zunächst dazu, große Flächen zu zergliedern. Ein einigermaßen breites Fenster muß durch einen oder mehrere Pfosten eingeteilt werden, weil ohne diese die Fensterverglasung zu leicht durch den Wind eingedrückt werden könnte. Die Verbindung dieser Pfosten mit den Hauptpfosten des Fensters geschieht am einfachsten durch Rund- oder Spitzbogen. Diese Verbindung allein genügt jedoch nicht, da die Pfosten vor einem Durchbiegen durch starken Wind geschützt werden müssen. Für jeden Pfeiler existiert nämlich eine Höchstbelastung, aber auch eine gewisse Minimalbelastung, die vorhanden sein muß, damit der Pfeiler nicht durch Wind eingedrückt wird. So beträgt z. B. für einen 3 m hohen Pfeiler, dessen Querschnitt ein Rechteck mit den Seiten 20 und 40 cm ist, bei mittlerer Widerstandsfähigkeit des Materials die Maximalbelastung ungefähr 6000 kg, die Minimalbelastung 540 kg.[1])

1) Ungewitter, Lehrbuch der gotischen Konstruktionen.

Um diese notwendige Belastung zu erhalten, muß also über den Pfosten Maßwerk angebracht werden. Hat dies gerade das erforderliche Gewicht, so bilden Pfosten und Maßwerk ein Ganzes und können nachträglich in das Mauerwerk eingesetzt werden.

Endlich hat das Maßwerk noch besondere Wichtigkeit in sehr hohen Fenstern, bei denen die Pfosten wegen ihrer großen Höhe übermäßig stark gebaut werden müßten. Um dies zu umgehen, bringt man das Maßwerk auch unter der Kämpferlinie d. h. unter der Verbindungsgeraden der Kämpfer, der obersten Teile der Fensterpfosten, an.

Man erkennt also, daß das Maßwerk kein Flächenornament ist wie z. B. die griechischen Mäander und die maurischen Verzierungen. Erst in der spätgotischen Bauperiode vergißt man die eigentliche Bedeutung des Maßwerks, man benutzt es als Flächenornament, die schmückenden Teile überwuchern das Baugerüst, wie Gurlitt sagt, bei aller Schönheit im einzelnen, dem Ganzen die innere Ruhe nehmend.[1])

Auch die rein geometrischen Formen verlieren sich nach und nach, sie werden durch die formenreichen Fischblasenmuster verdrängt.

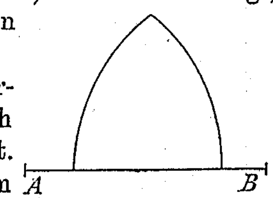


Fig. 2.

In der guten Zeit folgt das Maßwerk dem obersten Grundsatz gotischer Kunst, daß alles nur einem Zwecke dienen und jeder Teil dem Grundgedanken des Ganzen sich unterordnen muß. War die Grundform der Kirche aus dem Viereck und dem Dreieck konstruiert, so kehrten diese einfachen Zahlen 3 und 4 auch überall im Maßwerk wieder, z. B. wurde ein vierteiliges Fenster noch besonders geschmückt durch 3 Kreise, in denen der Vierpaß angebracht war usf. Dieses Prinzip gibt auch die Erklärung für die sonderbare Konstruktion des steilen Spitzbogens, die in den Büchern über geometrisches Zeichnen zu finden ist. Bezeichnet man die Länge der Kämpferlinie mit k, so soll die Entfernung AB der Kreismittelpunkte $k\sqrt{2}$ sein. (Fig. 2.)

Man wundert sich, warum man gerade dieses irrationale Verhältnis $1:1{,}41\ldots$ gewählt hat, warum man nicht den vierten Teil der Kämpferlinie nach außen anträgt. Das dabei auftretende Verhältnis $1:1{,}5$ zeigt, daß der so konstruierte Bogen nur sehr wenig von dem andern abweichen würde. Als Grund für die meistens angewandte erste Konstruktion findet man in dem gotischen ABCBuch von Hoffstadt angegeben, daß der steile Spitzbogen hauptsächlich an solchen Bauten vorkommt, deren Grundriß aus dem regelmäßigen Achteck konstruiert ist. Aus dem regelmäßigen Achteck aber, oder vielmehr aus zwei verschränkten Quadraten ergibt sich leicht die obengenannte Konstruktion. (Fig. 3.)

1) Gurlitt, Geschichte der Kunst I. S. 625 f.

Das in der frühgotischen Zeit am häufigsten vorkommende Maßwerk ist das denkbar einfachste. Der Hauptspitzbogen wird mit den kleinen Spitzbogen durch einen Kreis verbunden, in dem natürlich noch weiteres Maßwerk angebracht sein kann. (Fig. 1.)[1] Dieser Kreis berührt also vier Kreise, und so haben wir hier eine schöne Anwendung des allgemeinen Apollonischen Problems.

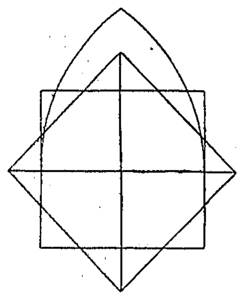


Fig. 3.

Die Aufgabe ist auch auf der Mittelstufe verwendbar. Da nämlich je zwei von den Kreisen konzentrisch sind, muß der Radius der vierte Teil der Kämpferlinie sein. Wir wollen die Länge der Kämpferlinie ein für allemal mit k bezeichnen und erhalten also als Lösung $z = \frac{k}{4}$. Da sich der Radius des Kreises leicht berechnen läßt, kann so diese Aufgabe in der Lehre von der Kreismessung Behandlung finden, und im Anschluß daran kann im Linearzeichnen ein Fenster dieser Art gezeichnet werden.

Die Behandlung des Maßwerkes im geometrischen Zeichnen ist nichts Neues, in vielen Büchern über Linearzeichnen findet man Konstruktionen von gotischem Maßwerk, ich kann mich also hier kurz fassen und erwähne nur, daß gerade diese Zeichnungen von den Schülern mit großem Interesse ausgeführt werden, vorausgesetzt natürlich, daß Fensterfüllungen von solchen Bauten gezeichnet werden, die die Schüler in Wirklichkeit oder im Bilde gesehen haben.

In der Ausführung steht außerordentlich große Auswahl zu Gebote. Bei ungeschickten Schülern wird man schon zufrieden sein, wenn man in der zur Verfügung stehenden Zeit eine sauber gezeichnete Gerippskizze bekommt, geübtere Zeichner können die Hohlkehlen andeuten und weiteres Maßwerk wie z. B. einen Sechspaß in den Kreis einzeichnen. Man darf wohl auch nicht versäumen,

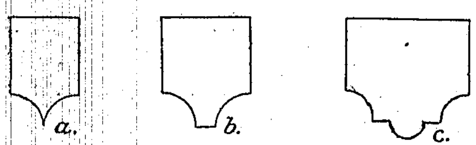


Fig. 4.

darauf hinzuweisen, daß der Querschnitt eines Pfostens meist eine der drei hier gezeichneten Formen hat, daß also die Zeichnung wesentlich komplizierter wird, wenn man außer den Hohlkehlen Plättchen oder Rundstab und Plättchen andeuten will.

Die obengenannte Aufgabe könnte endlich auch im stereometrischen Unterricht Verwendung finden. Man könnte mit Rücksicht auf die auf Seite 3 angegebene Minimalbelastung die Frage beantworten,

[1] Z. B. am Dom zu Frankfurt, Straßburg und Köln.

ob das Maßwerk das erforderliche Gewicht hat, oder ob in dem Kreis an Fenstern, die starkem Winde ausgesetzt sind, noch weiteres Maßwerk angebracht werden muß.

Als hauptsächlichste Verwendung des Maßwerkes im geometrischen Unterrichte möchte ich indessen die obengenannte Anwendung des Apollonischen Problems nochmals besonders hervorheben. Das an und für sich schon so interessante Berührungsproblem wird für den Schüler noch wesentlich fesselnder, wenn er neben den Konstruktionen von den im folgenden Kapitel angedeuteten Berechnungen einige ausführt, und wenn er vor allen Dingen in diesen Maßwerkaufgaben die praktischen Anwendungen der geometrischen Aufgaben erkennt. Dieser Zusammenhang des Maßwerkes mit dem Taktionsproblem ist in keinem der mir zur Verfügung stehenden geometrischeu Lehrbücher erwähnt, ich habe aus diesem Grunde aus der großen Fülle von Material in dem folgenden Kapitel einige Aufgaben zusammengestellt.

I. Kapitel.

Maßwerkaufgaben.

Ein großer Teil der folgenden Aufgaben hat zwar zunächst nur lokales Interresse, indessen wird man sehr viele von den gezeichneten Figuren auch an Kirchen in anderen Städten wiederfinden. Wie ich schon oben andeutete, sind die Aufgaben dem Schüler am interressantesten, die mit den Bauten der Vaterstadt im Zusammenhang stehen, darum habe ich bei der Auswahl auf das Maßwerk an Frankfurter Kirchen ganz besonders Rücksicht genommen.

1. An einem Beispiele möchte ich zunächst zeigen, in welcher Weise am einfachsten die Rechnungen ausgeführt werden können. Figur 1 unserer Tafel ist die Gerippskizze des großen Fensters der Christuskirche zu Frankfurt a. M. Der große Bogen ist ein gedrückter Spitzbogen, dessen Kreismittelpunkte durch Vierteilung der Kämpferlinie AB gefunden werden. Alle andern Spitzbogen sind gleichseitig. Die Konstruktion des Fensters ist also einfach bis auf die Konstruktion des großen Kreises mit dem Mittelpunkt Z. Bezeichnet man den unbekannten Radius dieses Kreises mit z, die als gegeben anzunehmende Kämpferlinie mit k, zieht man ferner die Zentralen ZC und ZB und die Verbindungsgerade der Mitte D der Kämpferlinie mit Z, so ergibt die Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes auf die Dreiecke DCZ und DBZ die Gleichung

$$\overline{CZ}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{BZ}^2 - \overline{BD}^2$$

oder

$$\left(\tfrac{3}{4}k - z\right)^2 - \left(\frac{k}{4}\right)^2 = \left(\frac{k}{2} + z\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2.$$

Da die quadratischen Glieder sich zu 0 ergänzen, ergibt sich hieraus eine lineare Gleichung mit der Lösung

$$z = \frac{k}{5},$$

während wir bereits früher für den entsprechenden Kreis im gleichseitigen Spitzbogen $z = \frac{k}{4}$ gefunden hatten.

Für den gesuchten Mittelpunkt Z ergeben sich also als geometrische Örter die Kreise um A und B mit $\frac{k}{2} + \frac{k}{5}$.

In ganz entsprechender Weise lassen sich bei allen angeführten Aufgaben teils leichter teils schwerer die Lösungen finden.

2. Fig. 2 der Tafel (Erker des Frankfurter Doms) $z = \frac{k}{4}$;

$$z_1 = \frac{k}{2}\left[4 + \sqrt{3} - 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}\right].$$

3. (Peterskirche, Matthäuskirche Frankfurt) r sei Radius des großen Kreises $z = r(3 - 2\sqrt{2})$.

4. (2 Träger der elektrischen Oberleitung Zwickau und Coblenz) r sei Radius des großen Kreises $z = r(3 - 2\sqrt{2})$;

$$z_1 = r\left[5 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{10 - 7\sqrt{2}}\right]$$

5. (Elisabethenkirche, Bockenheim) $z = \frac{3}{8}k$.

6. (Dom, Mailand) $z = \frac{1}{3}k$; $z_1 = \frac{3}{289}(19 - 6\sqrt{2})k$.

7. (Eingang zum Archiv, Frankfurt) $z = k - \frac{k}{2}\sqrt{2}$; Lösung für z_1 verhältnismäßig kompliziert. Entfernung des Mittelpunktes Z von der Kämpferlinie $\frac{k}{2}$. Einfache geometrische Konstruktion. Synthetischer Beweis.

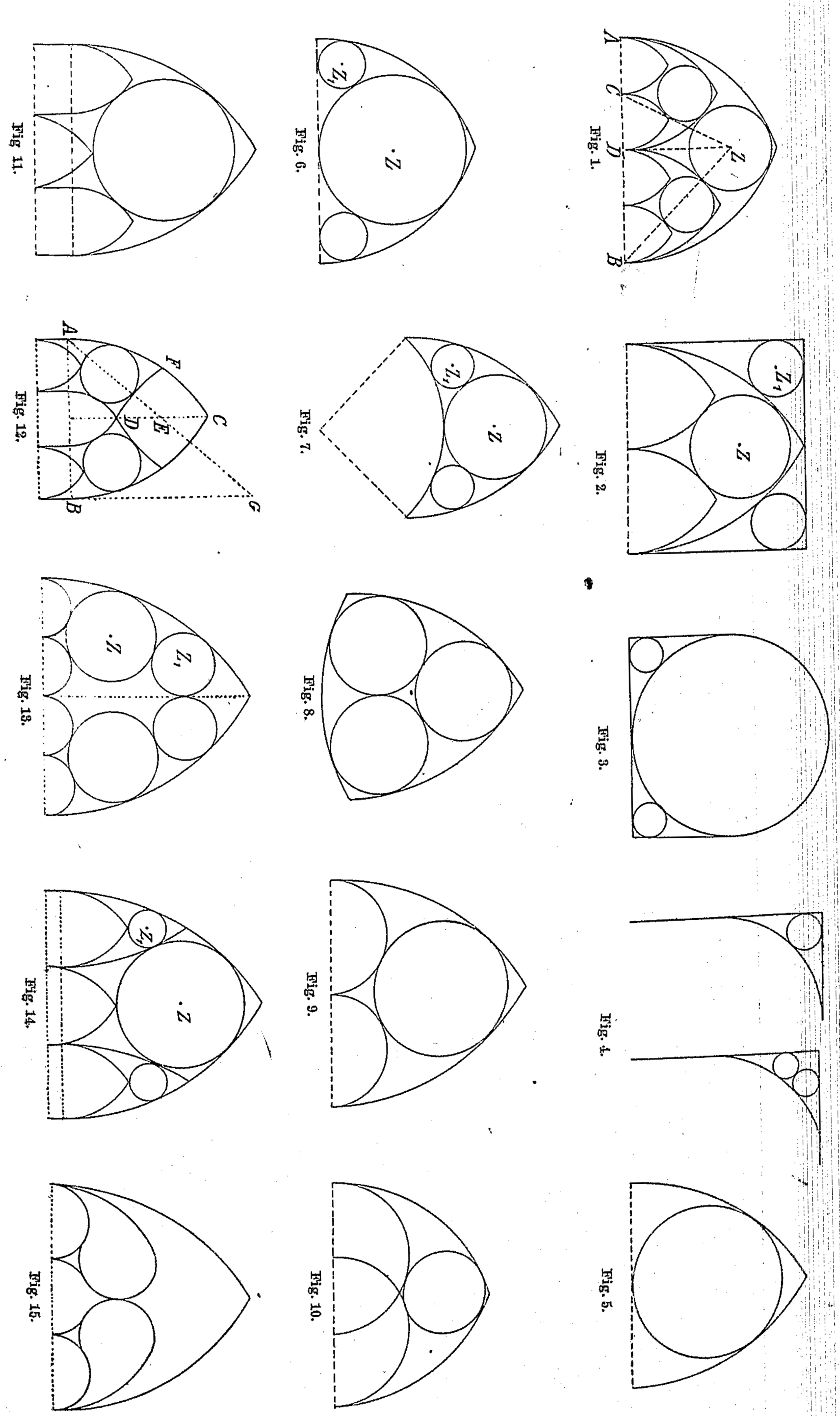
8. Dreiblatt (Elisabethenkirche, Bockenheim) $z = k(3\sqrt{2} - 4) = 0{,}2426\,k$. Die Näherungskonstruktion mit $z = \frac{k}{4}$ kann angewandt werden, wenn das mittlere Bogendreieck nicht mitgezeichnet werden soll. Bei Ausführung in Stein wird der Radius dann oft noch größer gewählt, weil sonst die Nasen zu spitz werden und abbrechen.

9. (Rathaus Braunschweig und Liebfrauenkirche Frankfurt) $z = \frac{3}{10}k$.

10. (Dom, Florenz) $z = \frac{5}{26}k$.

11. (Dom, Erfurt und Mailand) $z = \frac{k}{3}$.

12. (Dom und Deutschordenskirche, Frankfurt). Zieht man von A nach der Mitte E von CD die Gerade und die Senkrechte in B auf AB, so erhält man G, den Mittelpunkt des Bogens FD. Es ist $GF = GD = k$; $GB = \frac{2k}{3}\sqrt{3}$; $z = \frac{k}{36}(12 - \sqrt{30})$.



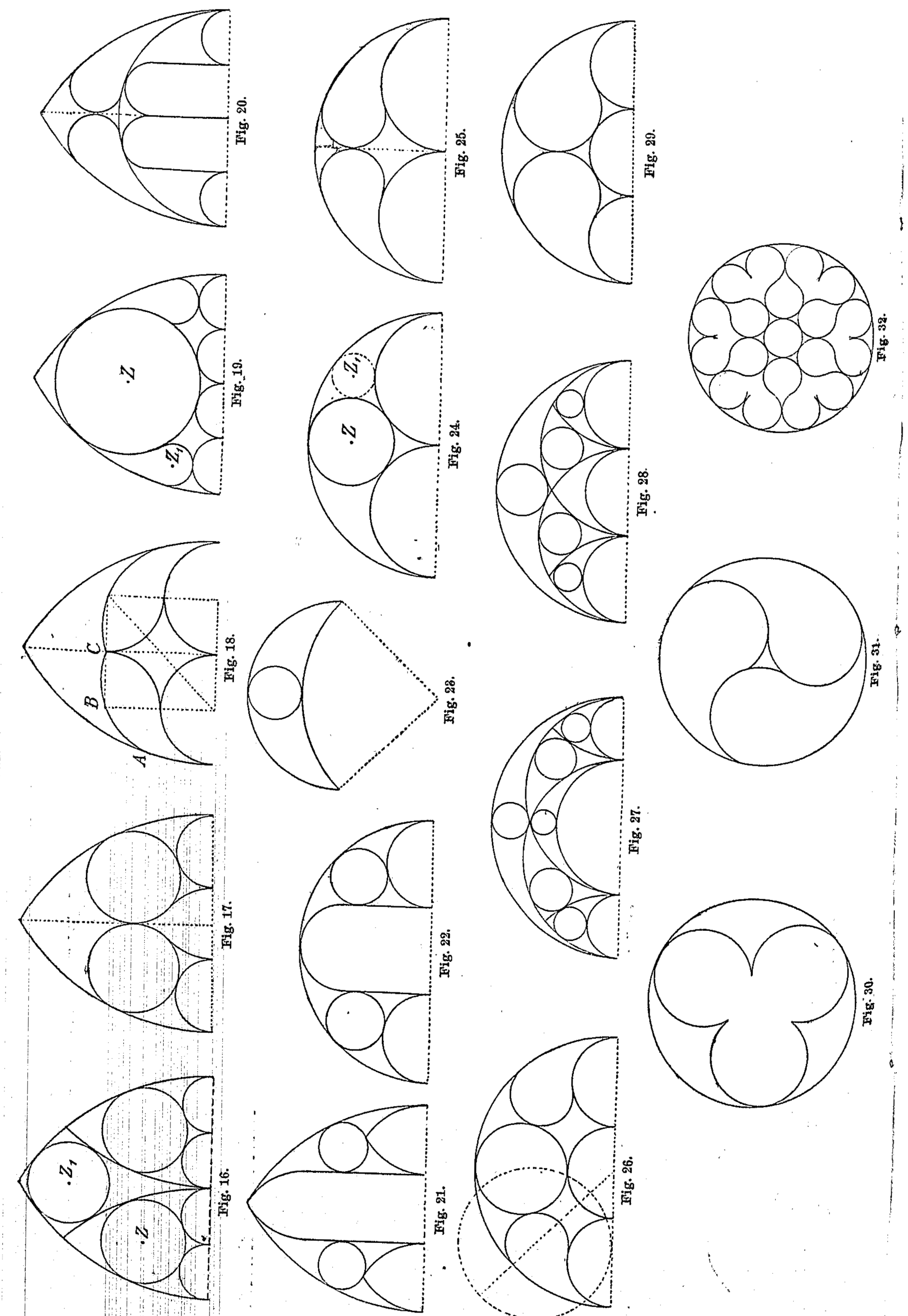


Fig. 16. Fig. 17. Fig. 18. Fig. 19. Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30. Fig. 31. Fig. 32.

13. (Frauenkirche, Nürnberg) $z = \frac{7}{36} k$; $z_1 = \frac{3}{16} k$, z ist um $\frac{1}{144} k$ größer als z_1.

14. (Kloster Haina) $z = \frac{5}{18} k$; $z_1 = \frac{2}{99} k (6 - \sqrt{3})$.

15. (Dom, Frankfurt) $z = \frac{k}{6}$. Vergleiche die Sechspaßaufgabe.

16. (Dom, Frankfurt) $z = \frac{7}{36} k$; $k_1 = \frac{1}{700} (131 - 16\sqrt{6}) k$.

17. (Liebfrauenkirche, Frankfurt) $z = \frac{5}{24} k$.

18. (Weißfrauenkirche, Frankfurt) Für dieses Fenster, das auch an anderen Kirchen vorkommt, findet man die angegebene Näherungskonstruktion in dem Handbuch der Ornamentik von Franz Sales Meyer. Der Radius des Bogens soll die Hälfte der Quadratdiagonale, also $\frac{k}{4}\sqrt{2}$ sein. Die Rechnung ergibt $k(1 + \sqrt{\frac{1}{6}})$, wobei angenommen worden ist, daß der Bogen durch B und C geht und in A berührt. Der Fehler der Näherungskonstruktion beträgt 0,0015 k.

19. (Dom, Frankfurt) $z = \frac{1}{3} k$; $z_1 = \frac{7}{71} k$.

20. (Desgl.) $z = \frac{k}{8}$.

21. (Desgl.) $z = \frac{5}{42} k$.

22. (Bahnhof, Bockenheim) Für die Spitzbogen in Aufg. 21 treten Rundbogen $z = \frac{1}{9} k$.

23. (Privathaus in der Nähe der Station Östrich-Winkel) Einfache Anwendung der Formel für die Quadratdiagonale $d = a\sqrt{2}$, $z = \frac{k}{4}(2 - \sqrt{2})$.

24. (Synagoge am Börneplatz, Frankfurt, und an vielen anderen Bauten) $z = \frac{k}{6}$.

24a. Der Kreis z_1 findet sich an einem Privathause der Bockenheimerlandstrasse $z_1 = \frac{k}{12}$.

25. (Leonhardkirche und Katharinenkirche, Frankfurt) $z = \frac{k}{8}$.

26. (Desgl.) $z = \frac{k}{14}(3 - \sqrt{2})$. Der Hilfskreis deutet an, wie die Aufgabe auf die Zeichnung eines Kreises durch 3 Punkte reduziert werden kann.

27, 28. (Orsanmichele, Florenz) Die Radien der Kreise sind $\frac{r}{2}, \frac{r}{3}, \frac{r}{4}, \frac{r}{5}, \frac{r}{6}, \frac{r}{7}, \frac{r}{8}, \frac{r}{9}, \frac{r}{10} \left(r = \frac{k}{2}\right)$.

29. (Leonhardkirche, Frankfurt) $z = \frac{k}{6}$. Vgl. Aufg. 15 und die Sechspaßaufgabe.

30, 31. Dreipaß und Dreischweifung führen auf bekannte Berührungsaufgaben, sie sind als Vertreter der Vielpaßaufgaben der Vollständigkeit wegen mit aufgeführt.

32. Ornament an der Uhr am Römer, Frankfurt. Der synthetische Beweis, daß die Radien der 19 kleinen Kreise gleich sind, ist einfach.

II. Kapitel.

Analytische Lösung des Apollonischen Problems mit Rücksicht auf die Maßwerkaufgaben.

Erster Teil.

Berührung dreier Kreise von außen.

Alle im ersten Kapitel aufgeführten Aufgaben sind Spezialfälle des Apollonischen Berührungsproblems. Daher möchte ich versuchen, eine allgemeine Lösung aufzustellen, die für alle unsere Aufgaben Gültigkeit besitzt.

$M_1 M_2 M_3$ seien die Mittelpunkte der gegebenen Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3, Z der Mittelpunkt des gesuchten Kreises mit dem Radius z, der die gegebenen Kreise von außen berührt. Als gegeben darf ich außer r_1, r_2, r_3 das Dreieck

$M_1 M_2 M_3$

(Fig. 5.) annehmen, und zwar soll dessen Gestalt bestimmt sein durch die Höhe h von M_3 auf $M_1 M_2$ und durch die beiden Abschnitte p und q, die der Höhenfußpunkt H auf $M_1 M_2$ bildet. Bezieht man die Lage des gesuchten Punktes Z auf ein Koordinatensystem, dessen X-Achse $M_1 M_2$ ist, dessen Y-Achse in M_1 auf $M_1 M_2$ senkrecht steht, so müssen die Ordinate $ZA = y$ und die Abszisse $AM_1 = x$ als Unbekannte in die Rechnung eingeführt werden. Fällt man nun noch von Z die Senkrechte auf $M_3 H$, und nennt man deren Fußpunkt B, so ergibt sich aus den drei rechtwinkligen Dreiecken $M_1 AZ$, $M_2 AZ$ und ZBM_3

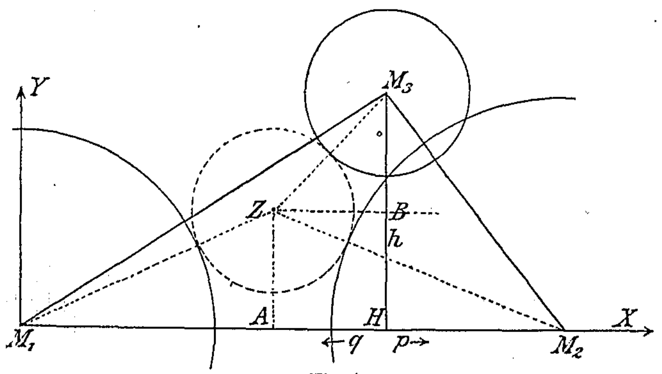


Fig. 5.

$$(1)\quad \begin{cases} (r_1 + z)^2 = x^2 + y^2 \\ (r_2 + z)^2 = (p + q - x)^2 + y^2 \\ (r_3 + z)^2 = (q - x)^2 + (h - y)^2. \end{cases}$$

Wir erhalten also 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, und es erübrigt noch zu zeigen, daß man aus diesen Gleichungen z berechnen kann.

Man erhält

$$(2)\qquad z^2 - y^2 - x^2 = -2zr_1 - r_1^2$$

$$(3)\qquad z^2 - y^2 - x^2 = (p+q)^2 - r_2^2 - 2(p+q)x - 2r_2 z$$

$$(4)\qquad z^2 - y^2 - x^2 = h^2 + q^2 - r_3^2 - 2yh - 2qx - 2r_3 z.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) läßt sich x durch z ausdrücken

$$(5)\qquad x = \frac{1}{2(p+q)}[2z(r_1 - r_2) + r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2].$$

Ferner erhält man aus (2) und (4) die Gleichung

$$2zr_1 + r_1^2 + h^2 + q^2 - r_3^2 - 2yh - 2qx - 2r_3 z = 0.$$

Jetzt können wir auch y durch z ausdrücken:

$$y = \frac{1}{2h}[2z(r_1 - r_3) - 2xq + r_1^2 - r_3^2 + h^2 + q^2]$$

oder mit Rücksicht auf Gleichung (5)

$$y = \frac{1}{2h(p+q)}\{2z[(p+q)(r_1 - r_3) - q(r_1 - r_2)] + [(p+q)(r_1^2 - r_3^2 + h^2 + q^2) - q(r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2)]\}.$$

Zur Abkürzung setze ich

$$(6)\qquad y = \frac{2z\alpha + \beta}{2h(p+q)}.$$

Dabei bedeutet also

$\alpha = (p+q)(r_1 - r_3) - q(r_1 - r_2)$

$\alpha = p(r_1 - r_3) + q(r_2 - r_3)$. Nach entsprechender Umformung wird $\beta = p(r_1^2 - r_3^2 + h^2 - q^2) + q(r_2^2 - r_3^2 + h^2 - p^2)$.

Setzt man nunmehr die gefundenen Werte für x und y (Gleichung 5 und 6) in die erste Gleichung des Systems (1) ein, so ergibt sich:

$$r_1^2 + 2r_1 z + z^2 = \frac{1}{4h^2(p+q)^2}(4z^2\alpha^2 + 4z\alpha\beta + \beta^2) + \frac{1}{4(p+q)^2}[4z^2(r_1 - r_2)^2 + 4z(r_1 - r_2)(r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2) + (r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2)^2].$$

Ordnet man, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$4z^2\gamma + 4z\delta = \varepsilon.$$

Als Lösung der Gleichung ergibt sich

$$z = \frac{1}{2\gamma}[\pm\sqrt{\delta^2 + \varepsilon\gamma} - \delta].$$

1. Lehrsatz. Wenn ein Kreis mit dem Radius z drei andere Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3 von außen berührt, so kann z aus der Gleichung

$$z = \frac{1}{2\gamma}[\pm\sqrt{\delta^2 + \varepsilon\gamma} - \delta]$$

berechnet werden. Setzt man zur Abkürzung

$$\alpha = p(r_1 - r_3) + q(r_2 - r_3)$$

$$\beta = p(r_1^2 - r_3^2 + h^2 - q^2) + q(r_2^2 - r_3^2 + h^2 - p^2),$$

so sind für γ, δ und ε folgende Werte zu substituieren

$$\gamma = h^2(p+q)^2 - \alpha^2 - h^2(r_1 - r_2)^2$$
$$\delta = 2r_1 h^2(p+q)^2 - \alpha\beta - h^2(r_1 - r_2)(r_1^2 - r_2^2 + [p+q]^2)$$
$$\varepsilon = \beta^2 - 4r_1^2 h^2(p+q)^2 + h^2(r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2)^2.$$

In diesen Gleichungen sind p, q und h die Bestimmungsstücke des Zentraldreiecks $M_1 M_2 M_3$.

Zweiter Teil.

Berührung dreier Kreise von innen oder von außen.[1])

Wenn der gesuchte Kreis einen der gegebenen Kreise z. B. den mit dem Radius r_3 von innen berühren soll, so wird dadurch bei Aufstellung der Gleichungen (1) nur eine Änderung anzubringen sein, die Gleichungen lauten nämlich:

$$(r_1 + z)^2 = x^2 + y^2,$$
$$(r_2 + z)^2 = (p + q - x)^2 + y^2,$$
$$(r_3 - z)^2 = (q - x)^2 + (y - h)^2.$$

Man erkennt, daß diese Gleichungen aus (1) hervorgehen, wenn man r_3 mit $-r_3$ vertauscht, daher wird man auch die Lösung der zugehörigen Aufgabe aus Lehrsatz 1 ableiten können. Man hat nur in der Gleichung für α an Stelle von $-r_3$ $+r_3$ einzusetzen.

Man erkennt weiter, daß in der Lösung auch noch das Vorzeichen von r_2 oder r_1 zu ändern ist, falls außer dem Kreise um M_3 auch der Kreis um M_2 oder M_1 von innen berührt werden soll.

2. Lehrsatz. Soll ein Kreis gesucht werden, der drei gegebene Kreise berührt, aber nicht alle drei von außen, so wird die im ersten Lehrsatze angegebene Lösung gleichfalls Gültigkeit besitzen, falls nur die Radien der von innen berührten Kreise mit negativem Vorzeichen in Rechnung gebracht werden.

III. Kapitel.

Spezialisierung der allgemeinen Lösung.

Erster Teil.

Die Formel Descartes.

Nach Aufstellung eines so allgemeinen Satzes ist es zweckmäßig, zunächst die Richtigkeit der Resultate durch Anwendung auf einen möglichst einfachen Fall zu prüfen. Setzen wir $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, so wird z der Radius des Umkreises für das Dreieck $M_1 M_2 M_3$.

1) Vgl. Aufg. 7, 12, 19, 24, 26.

Dann wird aber, falls man $p + q = c$ setzt und die beiden anderen Dreiecksseiten mit a und b bezeichnet,

$$\alpha = 0,$$
$$\beta = p(h^2 - q^2) + q(h^2 - p^2) = (h^2 - pq)c,$$
$$\gamma = c^2 h^2,$$
$$\delta = 0,$$
$$\varepsilon = (h^2 - pq)^2 c^2 + h^2 c^4$$
$$= c^2[(b^2 - cq)^2 + h^2 c^2] = b^2 c^2 (b^2 - 2cq + c^2).$$

Die Anwendung des allgemeinen pythagoreischen Lehrsatzes ergibt

$$\varepsilon = a^2 b^2 c^2,$$

und somit ist

$$z = \pm \frac{\sqrt{c^2 h^2 a^2 b^2 c^2}}{2c^2 h^2},$$

also da nur der positive Wert in Betracht kommen kann,

$$z = \frac{abc}{2hc} = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Dies ist aber die bekannte Formel des Cartesius.

Zweiter Teil.

Die Mittelpunkte der drei Kreise liegen auf einer Geraden.[1])

Bei einer großen Anzahl der im I. Kapitel gestellten Maßwerkaufgaben liegen die Mittelpunkte der drei gegebenen Kreise auf einer Geraden, auf der Kämpferlinie. Für diesen einfachen Fall wird auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe wesentlich einfacher. Es ist nämlich dann $h = 0$ zu setzen, und man findet

$$\gamma = -\alpha^2,$$
$$\delta = -\alpha\beta,$$
$$\varepsilon = \beta^2.$$

Ferner wird $\delta^2 + \varepsilon\gamma = 0$ und somit

$$z = -\frac{\beta}{2\alpha} \qquad \text{oder}$$

$$z = \frac{p(r_3^2 - r_1^2 + q^2) + q(r_3^2 - r_2^2 + p^2)}{2[p(r_1 - r_3) + q(r_2 - r_3)]}.$$

Die gleiche Lösung findet man natürlich, aber durch wesentlich mehr Rechnung, wenn man in ähnlicher Weise wie bei der Lösung der Hauptaufgabe mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes Gleichungen zur Berechnung von z aufstellt.

1) Vgl. Aufg. 1, 2, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 19, 24, 27, 28.

3. Lehrsatz. Wenn die Mittelpunkte dreier Kreise mit den Radien r_1, r_2 und r_3 auf einer geraden Linie liegen, so gilt für den Radius eines Kreises, der alle drei von außen berührt, die Formel

$$z = \frac{p(r_3^2 - r_1^2 + q^2) + q(r_3^2 - r_2^2 + p^2)}{2[p(r_1 - r_3) + q(r_2 - r_3)]}.$$

Die Zentralen der Kreise sind dabei mit p, q und $p+q$ bezeichnet.

Falls der gesuchte Kreis einen der beiden gegebenen Kreise von innen berühren soll, so wird Analoges zu sagen sein, wie im zweiten Lehrsatze.

Dritter Teil.

Grenzübergang von einem Kreis zu einer Geraden.[2]

Aus den im ersten Lehrsatze angegebenen Gleichungen wird man auch den Radius eines Kreises finden können, der zwei Kreise und eine gerade Linie berührt. Setzt man indessen $r_1 = \infty$ ein, so nehmen sämtliche Größen α, β, γ, δ und ε den Wert ∞ an, infolgedessen erhält z eine unbestimmte Form. Ehe man den Wert der unbestimmten Form berechnet, indem man den Differentialquotienten des Zählers durch den des Nenners dividiert, ist es notwendig, z umzuformen. Da zugleich mit r_1 auch q unendlich wird, ist es zunächst ratsam, für $q = r_1 + \lambda$ einzuführen, wobei dann λ den Abstand des Höhenfußpunkts vom Schnittpunkte der Basis mit dem Kreise um M_1 bedeutet. Ferner setzen wir statt

$$z = \frac{1}{2\gamma}[\pm\sqrt{\delta^2 + \varepsilon\gamma} - \delta],$$

$$2z = \pm\sqrt{\left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{\gamma}} - \frac{\delta}{\gamma},$$

dann ist es nur noch nötig, die Werte $\frac{\delta}{\gamma}$ und $\frac{\varepsilon}{\gamma}$ zu bestimmen, und dies ist möglich durch zweimalige Differentiation. Die ersten Differentialquotienten von γ, δ und ε werden nämlich für $r_1 = \infty$ auch unendlich, die zweiten dagegen sind unabhängig von r_1. Führt man für die zweiten Ableitungen von γ, δ und ε nach r_1 die Lagrangeschen Bezeichnungen γ'', δ'', ε'' ein, dann ergibt sich als Lösung

$$\lim_{r_1=\infty} 2z = \pm\sqrt{\left(\frac{\delta''}{\gamma''}\right)^2 + \frac{\varepsilon''}{\gamma''}} - \frac{\delta''}{\gamma''}$$

oder

$$\lim_{r_1=\infty} z = \frac{1}{2\gamma''}(\pm\sqrt{\delta''^2 + \varepsilon''\gamma''} - \delta'').$$

2) Vgl. Aufg. 6, 8, 16.

Die Differentiation nach r_1 ergibt folgende Resultate

$$\alpha' = p + r_2 - r_3,$$
$$\beta' = 2pr_1 - 2pq + r_2^2 - r_3^2 + h^2 - p^2,$$
$$\gamma' = 2h^2(p + \lambda + r_2) - 2[p(r_2 - r_3) + r_1(r_2 - r_3) + \lambda(r_2 - r_3)](p + r_2 - r_3),$$
$$\delta' = 2h^2(p+q)^2 + 4h^2r_1(p+q) - \alpha\beta' - \beta\alpha' - 2h^2(r_1 - r_2)(r_1 + p + q) - h^2(r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2),$$
$$\varepsilon' = 2\beta\beta' - 8h^2r_1(p+q)^2 - 8h^2r_1^2(p+q) + 4h^2[r_1^2 - r_2^2 + (p+q)^2][r_1 + p + q].$$
$$\alpha'' = 0,$$
$$\beta'' = 0,$$
$$\gamma'' = -2(p + r_2 - r_3)^2,$$
$$\delta'' = 4h^2(p + \lambda + r_2) - 2(p + r_2 - r_3)(-2p\lambda + r_2^2 - r_3^2 + h^2 - p^2),$$
$$\varepsilon'' = 2(-2p\lambda + r_2^2 - r_3^2 + h^2 - p^2)^2 + 8h^2[(p+\lambda)^2 - r_2^2].$$

4. Lehrsatz. Bezeichnet man die Radien zweier Kreise mit r_2 und r_3, die Abstände der Mittelpunkte M_2 und M_3 von einer gegebenen Geraden mit $p + \lambda$ und λ, die Projektion von M_2M_3 auf die Gerade mit h, alsdann gilt für den Radius z_1 des Kreises, der die Gerade und die beiden Kreise von außen berührt, die Gleichung

$$z_1 = \frac{1}{2\gamma''}(\pm\sqrt{(\delta'')^2 + \varepsilon''\gamma''} - \delta''),$$

in der γ'', δ'' und ε'' die oben angegebenen Werte besitzen.

Zusatz zum 4. Lehrsatze. Bei Innenberührung ist r_2 bzw. r_3 durch $-r_2$ bzw. $-r_3$ zu ersetzen.

Vierter Teil.

Erster spezieller Fall des vierten Lehrsatzes.

(Die Mittelpunkte der gegebenen Kreise liegen auf der gegebenen Geraden.)[1]

Wenn M_2 und M_3 auf der gegebenen Geraden liegen, so ist $p = \lambda = 0$ zu setzen, dann wird aber

$$\gamma'' = -2(r_2 - r_3)^2,$$
$$\delta'' = 4h^2r_2 - 2(r_2 - r_3)(r_2^2 - r_3^2 + h^2),$$
$$\varepsilon'' = 2(r_2^2 - r_3^2 + h^2)^2 - 8h^2r_2^2.$$

Der Radikand der Wurzel $\delta''^2 + \varepsilon''\gamma''$ vereinfacht sich wesentlich, und es ergibt sich

$$z = \frac{1}{-2(r_2 - r_3)^2}[\pm 2h\sqrt{r_2r_3(h^2 - (r_2 - r_3)^2)} - [2h^2r_2 - (r_2 - r_3)(r_2^2 - r_3^2 + h^2)]].$$

1) Vgl. Aufg. 5, 6.

5. Lehrsatz. Wenn ein Kreis zwei Kreise mit den Radien r_2 und r_3 und deren Mittelpunktsgerade berührt, so gilt für den Radius z des Kreises die obenstehende Formel, in der h die Zentrale der gegebenen Kreise ist.

Wenn die Radien r_2 und r_3 gleich sind, so wird der eine Wert für $z = \frac{0}{0}$, der andere ∞. Um den unbestimmten Wert zu berechnen, bilde ich die Differentialquotienten des Zählers Z und des Nenners N nach r_2. Die Rechnung ergibt

$$Z'' = \frac{4r_3^2 - h^2}{2r_3},$$

$$N'' = -4.$$

Sieht man also von dem unendlich großen Wert von z ab, so erhält man

$$\lim_{r_2 = r_3} z = \frac{h^2 - 4r_3^2}{8r_3}.$$

Zusatz zum 5. Lehrsatz. Wenn die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich sind, so reduziert sich die oben angegebene Gleichung auf

$$z = \frac{h^2 - 4r_3^2}{8r_3}.$$

Fünfter Teil.

Zweiter spezieller Fall des vierten Lehrsatzes.[1])

(Die Zentrale der gegebenen Kreise steht auf der gegebenen Geraden senkrecht.)

Wenn die Zentrale der gegebenen Kreise auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, so ist wieder wie im zweiten Teile dieser Betrachtungen $h = 0$ zu setzen, es ist also wieder

$$z = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Zur Bestimmung dieses unbestimmten Wertes genügen schon die auf S. 355 stehenden ersten Ableitungen

$$z = -\frac{\beta'}{2\alpha'},$$

$$z = \frac{2p\lambda - r_2^2 + r_3^2 + p^2}{2(p + r_2 - r_3)}.$$

6. Lehrsatz. Wenn die Zentrale der gegebenen Kreise auf der gegebenen Geraden senkrecht steht, so reduziert sich die Gleichung des 4. Lehrsatzes auf

$$z = \frac{2p\lambda - r_2^2 + r_3^2 + p^2}{2(p + r_2 - r_3)}.$$

1) Vgl. Aufg. 17, 20, 21, 22, 25.

Sechster Teil.

Grenzübergang zu einem Kreise und zwei Geraden.[1])

Nunmehr betrachten wir den Fall, daß zwei Kreise in zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade übergehen.

Setzt man in der im vierten Lehrsatze angegebenen Formel $h = \varkappa + r_2$ und $r_2 = \infty$, so erhält man die gewünschte Lösung. Die Rechnung ist sehr einfach, ich begnüge mich mit den Resultaten. Die Differentialquotienten nach r_2 sind

$$\frac{d^2\gamma''}{dr_2^2} = -4,$$

$$\frac{d^2\delta''}{dr_2^2} = 8(\varkappa + \lambda + r_3),$$

$$\frac{d^2\varepsilon''}{dr_2^2} = 16(\lambda^2 + \varkappa^2 - r_3^2).$$

Für den Radius ergibt sich

$$z = \lim_{r_2 = \infty} z_1 = \pm\sqrt{(\varkappa + \lambda + r_3)^2 - (\lambda^2 + \varkappa^2 - r_3^2)} + \varkappa + \lambda + r_3.$$

7. Lehrsatz. Der Radius eines Kreises, der zwei senkrecht aufeinander stehende gerade Linien und einen Kreis mit dem Radius r_3 von außen berührt, ist aus obenstehender Formel für z zu berechnen. In dieser Formel bedeuten $\varkappa$ und λ die Abstände des Kreismittelpunktes von den Geraden.

1. Zusatz. Bei Innenberührung ist r_3 durch $-r_3$ zu ersetzen.

2. Zusatz. Wenn $r_3^2 > \lambda^2 + \varkappa^2$, d. h. wenn der Schnittpunkt der Geraden innerhalb des gegebenen Kreises liegt, so liefert die Formel nur eine Lösung.

Die drei anderen Lösungen erhält man, wenn man $\varkappa$ oder λ oder $\varkappa$ und λ mit negativem Vorzeichen in die Rechnung einführt.

Siebenter Teil.

Vielpaßaufgaben.[2])

Von besonderem Interesse ist für uns der Übergang von zwei Kreisen in zwei Gerade, deren Schnittpunkt Mittelpunkt des dritten Kreises ist. Diese Aufgabe: „Einen Kreis zu suchen, der zwei sich schneidende Gerade und einen um den Schnittpunkt der Geraden geschlagenen Kreis berührt", findet Anwendung bei Konstruktion des Dreipasses, Vierpasses usw., der Dreischweifung, Vierschweifung usw. Ich habe sie darum kurzweg als Vielpaßaufgabe bezeichnet. Eine

1) Vgl. Aufg. 2, 3, 4.
2) Vgl. Aufg. 15, 29, 30, 31, 32.

allgemeine Lösung für die Vielpaßaufgabe findet man z. B., indem man den Winkel ϑ, den die beiden Geraden miteinander bilden, und den Radius r_3 als gegeben annimmt. Dann gilt für den Radius z des von innen berührenden Kreises die Formel

$$z = r_3 \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{1+\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

Auch diese Lösung muß sich aus unserem allgemeinen ersten oder vierten Lehrsatze ergeben.

Man setze in den Formeln des vierten Lehrsatzes $\lambda = 0$, da M_3 auf der gegebenen Geraden liegen soll. Man setze ferner $r_2^2 = p^2 + h^2$, da man annehmen muß, daß der Kreis um M_2, dessen Radius unendlich groß werden soll, durch M_3 hindurchgeht. (Fig. 6.)

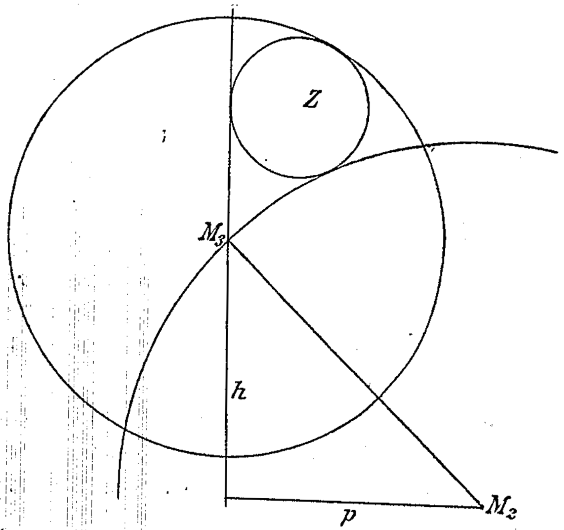


Fig. 6.

Da es sich bei der Vielpaßaufgabe um eine Innenberührung handelt, ist r_3 bei Aufstellung der Gleichungen für γ'' δ'' ε'' mit negativem Zeichen in Rechnung zu bringen. Man findet

$$\gamma'' = -2(p+r_2+r_3)^2,$$
$$\delta'' = 4h^2(p+r_2) - 2(p+r_2+r_3)(2h^2-r_3^2),$$
$$\varepsilon'' = 2(2h^2-r_3^2)^2 - 8h^4.$$

In diesen Gleichungen sind h und p von r_2 abhängig, bezeichnet man den Winkel, den $M_2 M_3$ mit p, dem Lote von M_2 auf die Gerade, bildet mit η, so ist

$$p = r_2 \cos\eta,$$
$$h = r_2 \sin\eta.$$

Setzt man diese Werte ein, so kann man den Wert des Radius z für $r_2 = \infty$ bestimmen. Die Differentiation ergibt

$$\frac{d\gamma''}{dr_2} = -4(p+r_2+r_3)(\cos\eta+1) \qquad \frac{d^2\gamma''}{dr_2^2} = -4(\cos\eta+1)^2,$$
$$\frac{d\delta''}{dr_2} = -8r_3 h\sin\eta + 2r_3^2\cos\eta + 2r_3^2 \qquad \frac{d^2\delta''}{dr_2^2} = -8r_3\sin^2\eta,$$
$$\frac{d\varepsilon''}{dr_2} = -16hr_3^2\sin\eta \qquad \frac{d^2\varepsilon''}{dr_2^2} = -16r_3^2\sin^2\eta.$$

Daher findet man

$$\text{(A)} \quad z = \lim_{r_2=\infty} z_1 = \frac{\pm 8r_3\sqrt{\sin^4\eta + \sin^2\eta(\cos\eta+1)^2} + 8r_3\sin^2\eta}{-8(\cos\eta+1)^2}.$$

Da das Ergebnis einen positiven Wert haben muß, kann nur das negative Vorzeichen der Wurzel in Betracht kommen

$$z = \frac{r_3}{4\cos^4\frac{\eta}{2}}\left(+\sin\eta\sqrt{\sin^2\eta+\cos^2\eta+2\cos\eta+1} - \sin^2\eta\right),$$

$$z = \frac{r_3}{4\cos^4\frac{\eta}{2}}\left(\sin\eta\, 2\cos\frac{\eta}{2} - \sin^2\eta\right),$$

$$z = \frac{r_3}{4\cos^4\frac{\eta}{2}}\left(4\sin\frac{\eta}{2}\cos^2\frac{\eta}{2} - 4\sin^2\frac{\eta}{2}\cos^2\frac{\eta}{2}\right),$$

$$z = \frac{r_3\sin\frac{\eta}{2}\left(1-\sin\frac{\eta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\eta}{2}}.$$

Erweitert man jetzt mit $\left(1+\sin\frac{\eta}{2}\right)$, so findet man in Übereinstimmung mit der obenstehenden Formel

$$z = \frac{r_3\sin\frac{\eta}{2}}{1+\sin\frac{\eta}{2}}.$$

Beim Übergang des Kreises um M_2 in eine Gerade geht der Winkel η in den am Eingang dieser Untersuchungen erwähnten Winkel ϑ über.

8. Lehrsatz. Der Radius eines Kreises, der einen andern Kreis mit dem Radius r_3 von innen und außerdem zwei durch das Zentrum des gegebenen Kreises gehende gerade Linien berührt, ist gleich

$$z = \frac{r_3\sin\frac{\vartheta}{2}}{1+\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

Dabei ist ϑ der von den gegebenen Geraden gebildete Winkel.

Zusatz zum 8. Lehrsatz. Für Außenberührung gilt eine ähnliche Gleichung. Man erhält sie, wenn man in Gleichung (A) $+r_3$ mit $-r_3$ vertauscht.

Achter Teil.

Anwendung der acht Lehrsätze auf Maßwerkaufgaben.

Anwendung des 8. Lehrsatzes auf Aufg. 29.

Es sei zunächst bemerkt, daß in vielen Fällen die auf S. 345 angegebene Methode am schnellsten zum Ziele führt, doch möchte ich der Vollständigkeit wegen zeigen, daß die angegebenen Lösungen ohne Mühe auch aus unseren allgemeinen Lösungen sich ergeben. Der Einfachheit wegen gehe ich nur auf zwei Beispiele ein. Es wird im wesentlichen darauf ankommen, anzugeben, welche Werte die konstanten Größen r_1, r_2, r_3, p, q, h bzw. λ, $\varkappa$, η haben.

Aufg. 29 verlangt sechs Kreise zu suchen, die einen gegebenen Kreis von innen berühren, und zwar derart, daß jeder Kreis zugleich seine beiden Nachbarkreise berührt. Man kann diese Aufgabe zurückführen auf folgende: „In einen Sektor mit dem Zentriwinkel $\vartheta = 60^0$ einen Kreis einzuschreiben.“ Da $\vartheta = 60^0$ ist, ergibt sich für $\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}$, und somit findet man $z = \frac{1}{3}r$. Hieraus geht hervor, daß noch ein siebenter Kreis mit dem gleichen Radius $\frac{1}{3}r$ existiert, der die sechs gesuchten Kreise von außen berührt.

Anwendung des 7. Lehrsatzes auf Aufg. 3.

In Aufgabe 3 ist ein Kreis zu finden, der zwei sich rechtwinklig schneidende gerade Linien und einen gegebenen Kreis von außen berührt, es kommt also der 7. Lehrsatz in Anwendung, und zwar ist

$$r_3 = r,$$
$$\lambda = r,$$
$$\varkappa = r$$

zu setzen, und dann ergibt sich

$$z = \pm\sqrt{9r^2 - r^2} + 3r,$$
$$z = r(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Für unser Maßwerk kommt nur der kleinere mögliche Kreis in Betracht, daher die Lösung

$$z = r(3 - 2\sqrt{2}).$$

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Unsere Betrachtungen lassen erkennen, daß das gotische Maßwerk reichlich Gelegenheit bietet, den mathematischen Unterricht zu beleben. Insbesondere sind Aufgaben über das Apollonische Problem, die sich durch Rechnung und Zeichnung ohne Schwierigkeit lösen lassen, bemerkenswert. Es wurde eine ganz allgemeine Formel als Lösung des Apollonischen Problems aufgestellt, aus der sich die Lösungen für alle in Betracht kommenden Maßwerkaufgaben ableiten lassen.