Kaiserliche Marine.
Deutsche Seewarte.

AUS DEM
ARCHIV DER DEUTSCHEN SEEWARTE.
XXXII. JAHRGANG 1909.

Nr. 1.

Beiträge zur nautischen Astronomie.

(Rechnerische Behandlung einiger Gruppen theoretisch möglicher Fälle der Polhöhenbestimmung.)

Von

Carl Schoy,
Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Essen (Ruhr).

Mit 4 Textfiguren.

HAMBURG 1910.

Nr. 1.

Beiträge zur nautischen Astronomie.

(Rechnerische Behandlung einiger Gruppen theoretisch möglicher Fälle der Polhöhenbestimmung.)

Von **Karl Schoy,**
Oberlehrer am städtischen Gymnasium zu Essen (Ruhr).

I.

Im 65. Bande (Jahrg. 1880) des Grunertschen Archivs, S. 225—238, hat C. Israël-Holtzwart die sämtlichen theoretisch möglichen Fälle der Bestimmung der Polhöhe oder geographischen Breite aufgeführt und dabei folgende vier Gruppen unterschieden:

I. Methoden, bei denen die Deklination und die Lage des Meridians als bekannt angenommen werden;
II. Methoden, welchen Kenntnis der Deklination zugrunde liegt;
III. Auf die Kenntnis der Lage des Meridians gestützte Methoden;
IV. Methoden, welche von der Kenntnis der Deklination und des Meridians unabhängig sind.

Gruppe I liefert die drei möglichen Aufgaben:

a) Gegeben: Deklination, Höhe und Azimut,
b) „ Deklination, Stundenwinkel und Höhe,
c) „ Deklination, Stundenwinkel und Azimut.

Gesucht wird jeweils die Polhöhe.

Da diese einfachen Fälle sich als Übungsbeispiele in vielen Lehrbüchern der sphärischen Trigonometrie und als Prüfungsaufgaben in ungezählten Jahresberichten höherer Schulen in den verschiedensten Fassungen wieder finden, so soll auf ihre Behandlung hier nicht näher eingegangen werden.

Aus Gruppe II sind folgende Fälle möglich:

a) Gegeben: die Deklination, zwei Höhen und die entsprechende Azimutdifferenz,
b) „ die Deklination, zwei Höhen und die Zwischenzeit der Beobachtungen,
c) „ die Deklination, eine Höhe, eine Azimutdifferenz und die Zwischenzeit der Beobachtungen,
d) „ die Deklination, zwei Azimutänderungen und die zugehörigen Zeitinkremente.

Hiervon bieten b) und d) insofern ein gewisses Interesse, als die Aufgabe b) mit dem Douwesschen, Aufgabe d) mit dem Pothenotschen Problem (auf der Kugel) identisch ist. Beide Fälle sollen deshalb im folgenden ausführlich erörtert werden, während a) und c) infolge ihrer einfachen Natur nicht weiter zur Sprache kommen sollen.

In Gruppe III ist der beobachtete Stern zweimal durch je zwei seiner sphärischen Koordinaten bestimmt, und zwar können die beiden Positionen (S und S') desselben gegeben sein:

a) jeweils durch Höhe und Azimut,
b) „ „ Höhe und Stundenwinkel,
c) „ „ Stundenwinkel und Azimut,
d) S ist gegeben durch Azimut und Höhe, S' durch Stundenwinkel und Höhe,
e) S „ „ „ Azimut und Höhe, S' durch Stundenwinkel und Azimut,
f) S „ „ „ Stundenwinkel und Höhe; S' durch Stundenwinkel und Azimut.

Diese hier möglichen sechs Aufgaben sollen, wie auch die nächstfolgende Gruppe, soweit das angängig ist, rechnerisch behandelt werden, da Israël-Holtzwart die ausgesprochene Absicht, dies in einer Spezialuntersuchung zu tun, unseres Wissens nicht verwirklicht hat.

In der IV. Gruppe müssen sich die Beobachtungen stets auf drei, in einem Falle sogar auf vier Punkte des Sternparallels erstrecken. Die hier möglichen Fälle lassen sich einteilen:

1. in solche, bei denen drei Höhen (h, h', h''),
2. in solche, bei denen zwei Höhen,
3. in solche, bei denen nur eine Höhe zu den beobachteten Elementen gehört,
4. in solche, welche von Höhenbeobachtungen unabhängig sind.

1. Sind drei Höhen (h, h', h'') gegeben, so bedarf man zur Ermittlung der Polhöhe noch außerdem:

entweder a) der beiden zugehörigen Azimutdifferenzen Δa und $\Delta a'$,
oder b) der beiden entsprechenden Zeitdifferenzen Δs und $\Delta s'$,
oder c) einer Azimutdifferenz Δa und einer Zeitdifferenz $\Delta s'$.

Zu 1a finden sich drei Auflösungen in Grunerts Elementen der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie (S. 202, 205, 237), darunter eine von Mollweide, der die Aufgabe zur Bestimmung der Mittagslinie benützte (vgl. v. Zach: Monatl. Corresp. Bd. 28 S. 396—426: „Erläuterung einer in den scriptoribus rei agrariae pag. 176 u. 177; edit. Goesii gegebenen Vorschrift, aus drei beobachteten ungleichen Schattenlängen die Mittagslinie zu finden"); ferner in K. H. Schellbachs „Sammlung und Auflösung mathematischer Aufgaben" (S. 172 ff., Lösung von Gauss).

Zu 1b findet sich ebenso eine sehr elegante Lösung von Mollweide (vgl. v. Zach: „Monatl. Corresp., 20. Bd. S. 125 ff., reproduziert v. Grunert a. a. O. S. 221 ff.).

Wir werden die Lösung von 1c ausführlich behandeln und zu 1a eine Art stereometrischer Lösung hinzufügen.

2. Sind zwei Höhen aus Beobachtungen bekannt, so ist es nicht immer einerlei, ob h und h' oder h und h'' diese Höhen sind. Es können gegeben sein:

a) $h, h', \Delta a$ und Δs,
b) $h, h', \Delta a, \Delta a'$ und $\Delta s'$,
c) $h, h', \Delta s, \Delta s'$ und $\Delta a'$,
d) $h, h'', \Delta a, \Delta a'$ und Δs,
e) $h, h'', \Delta a, \Delta a'$ und $\Delta s'$,
f) $h, h'', \Delta s, \Delta s'$ und $\Delta a'$.

3. Kennt man nur eine einzige Höhe — h oder h' oder h'' —, so bleibt nur der eine Fall zu betrachten:

a) Gegeben $h, \Delta a, \Delta s, \Delta a', \Delta s'$.

4. Im Falle man über gar keine Höhenbeobachtung verfügt, und ebensowenig Kenntnis des Meridians und der Deklination vorausgesetzt wird, bleibt die eine Aufgabe zu lösen:

a) Gegeben: $\Delta a, \Delta s, \Delta a', \Delta s', \Delta a'', \Delta s''$, gesucht wie jedesmal die Polhöhe φ.

Ehe wir in die rechnerische Behandlung der oben näher bezeichneten Aufgaben eintreten, sei noch erwähnt, daß man eine übersichtliche Zusammenstellung der möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung auch bei Weyer: Allg. Enzyklopädie der Physik (Zeit- und Ortsbestimmung, S. 731) findet.

II.

Wir beginnen mit Aufgabe b der II. Gruppe, welche bekanntlich die Douwessche Aufgabe heißt und infolge ihrer wichtigen Rolle, welche sie dereinst in der praktischen Nautik spielte — heute ist diese Art der Ortsbestimmung zur See so gut wie außer Gebrauch —, eine oftmalige analytische Behandlung erfuhr. Da die Schlußformel ziemlich unhandlich ausfällt, so war es das Bemühen zahlreicher Mathematiker, möglichst elegante, zum logarithmischen Gebrauch bequeme Lösungen des anscheinend bis auf Nunẽs (1542) zurückgehenden, zum erstenmal von Maupertuis (astronomie nautique 1751) genau formulierten Problems zu geben. Seine Einführung in die Nautik verdankt man dem Niederländer Douwes, der durch seine „Zeemans-Tafelen" (1761) eine bequemere Handhabung für den praktischen Gebrauch ermöglichte. Nicht selten begnügte man sich, besonders zur See, mit einer angenäherten Lösung. (Vgl. z. B. die von Ligowski im Archiv der Mathematik und Physik, 53. Teil, S. 107 ff.) Strenge Lösungen in geschlossenen Formeln gaben G. W. und W. L. Krafft (Nova Acta Petropoli ad A. 1791, 95, 1805; hiermit stimmt wesentlich überein die Lösung von Matern in den Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Jahrg. 11 S. 400 ff.). S. Klügel (vgl. Berl. astron. Jahrb. 1798, woselbst sich in Jahrg. 1859 ein interessanter Aufsatz Enckes: „Über die Erweiterung der Douwesschen Aufgabe" findet, welcher uns mit der trefflichen Methode des Herrn Camphausen in Cöln bekannt macht), Ivory (On Nautical Astronomy und on the Double Altitude Problem; Philos. Magazine 1821 und 1822) und Mollweide in v. Zachs schon erwähnter Monatl. Korrespondenz (Jahrg. 1809 S. 545 ff.).

Reiche historische Belehrung findet man ferner in einem sehr gründlich gearbeiteten Aufsatz Weyers: „Die direkten oder strengen Auflösungen für die Bestimmung des Beobachtungsortes aus zwei Höhen der Sonne oder anderer bekannter Gestirne nebst dem Zeitunterschiede der Beobachtungen" (Ann. hydr. u. marit. Meteorol. 11. Jahrg. S. 69 ff., S. 148 ff., S. 209 ff.). Daselbst erfährt man auch näheres über den Ursprung der interessanten Formel des Kapitäns Heyenga, die er im Kriegsjahr 1870, wo er mit seinem Schiffe „Otto" mehrere Monate in Bahia aufliegen mußte, im „Zeitvertreib" fand. (Vgl. auch: „Neue Methode zur Erleichterung der Bestimmung des Schiffsortes ... Für den Seegebrauch untersucht auf der Kaiserl. Seewarte" von Kapitän H. Heyenga, Hamburg 1882.) Eine der Heyengaschen ähnliche, jedoch logarithmisch etwas unbequemere Formel stammt von dem vormaligen Navigationsexaminator für Schleswig-Holstein S. Middelboe, Kapitänleutnant der dänischen Marine. (Vgl. dessen „Handbuch für den praktischen Navigateur", S. 36; Tönning 1843.) Eine eigenartige Behandlung des Douwesschen Problems verdankt man Y. Villarceau. (Vgl. s. Nouvelle navigation astronomique, 1877.) Seine elegante Lösung, die er vermittelst der sogenannten Hyperbelfunktionen gab, wurde im deutschen Binnenlande hauptsächlich durch S. Günther bekannt, der sie in seinem vortrefflichen Buche: „Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen" 1879, in das ihr gebührende Licht setzt und sehr instruktiv beleuchtet (S. 199 ff.).

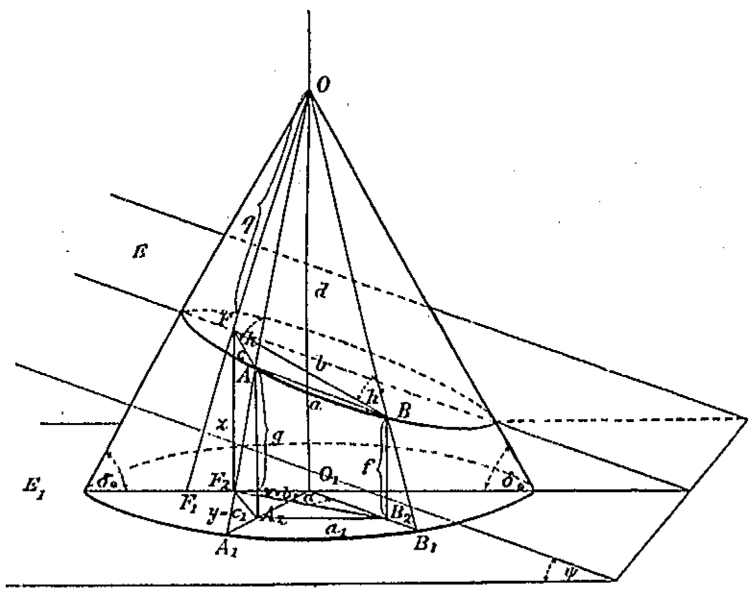

Fig. 1.

Daß man der Douwesschen Aufgabe auch rein geometrisch beikommen kann, hat der Verfasser in dem Aufsatze: „Die Douwessche Aufgabe in geometrischer Behandlung" (Ann. d. Hydrogr. usw. 1908, S. 558 ff.) gezeigt, und daran anknüpfend, möchte er hier noch eine Art stereometrischer Lösung hinzufügen. Auch hier sei von der Kegelfigur ausgegangen, die gebildet wird von dem Parallelkreis, den die Sonne während eines Tages durchläuft ($\delta_\odot =$ const.) und den sämtlichen Sonnenstrahlen (als Mantellinien), die in derselben Zeit das Ende O eines Stabes der Höhe q, der auf der Ebene E (Horizont) in F senkrecht steht, durchsetzen. So entsteht eigentlich, mit O als Spitze, ein Doppelkegel, dessen Mantellinien zum Grundkreis, der natürlich dem Himmelsäquator parallel läuft, die Neigung $\delta_\odot$ haben, wie ohne weiteres einleuchtend ist, wenn man O in den Erdmittelpunkt verlegt, also für die als unendlich weit entfernt anzunehmende Sonne wahren und scheinbaren Horizont identifiziert. Es genügt zur weiteren Betrachtung die eine hier verzeichnete Kegelhälfte: E_1 sei die Äquatorebene, die zu E, dem Horizont, die Neigung $\psi = 90^\circ - \varphi$ hat, wo φ eben die gesuchte geographische Breite oder Polhöhe ist. In zwei gegebenen Sonnenpositionen wirft nun $\overline{OF} = q$ die zwei Schatten $FB = b$ und $FA = c$, (Sonnenhöhe h und h') und es kann durch Verbindung von A, B und F Dreieck ABF (Schattendreieck) $= \varDelta$ als bekannt angenommen werden. Seine Projektion nach E_1 sei Dreieck $A_2B_2F_2 = \varDelta \cdot \cos\psi$. Wie man leicht sieht, dürfen ferner als gegeben gelten: $\sphericalangle A_1O_1B_1 = \sphericalangle \alpha$ (Zwischenzeit der Beobachtungen) $\overline{OO_1} = d$, (Höhe des Kegels) AA_1 und BB_1 (als Differenzen der ganzen Mantellinien des Kegels $= d \cdot \operatorname{cosec} \cdot \delta_\odot$ und der über dem Horizont liegenden Stücke OA und OB). Es wird somit: $OA = q \cdot \operatorname{cosec} h$; $OB = q \cdot \operatorname{cosec} h'$, also

$AA_1 = d \cdot \operatorname{cosec} \delta_\odot - q \cdot \operatorname{cosec} h$; $BB_1 = d \cdot \operatorname{cosec} \delta_\odot - q \cdot \operatorname{cosec} h'$ und damit $AA_2 = g = AA_1 \cdot \sin \delta_\odot = (d \cdot \operatorname{cosec} \delta_\odot - q \cdot \operatorname{cosec} h) \cdot \sin \delta_\odot = d - q \cdot \operatorname{cosec} h \cdot \sin \delta_\odot$. Ebenso: $BB_2 = f = BB_1 \sin \delta_\odot = (d \cdot \operatorname{cosec} \delta_\odot - q \cdot \operatorname{cosec} h') \cdot \sin \delta_\odot = d - q \cdot \operatorname{cosec} h' \cdot \sin \delta_\odot$, womit f und g in lauter bekannten Größen ausgedrückt sind. Wäre nun noch $FF_2 = z$ gegeben, so würde man auch ψ sofort kennen; da ja $z = d - q \cdot \cos \psi$.

Nun ist aber
$$\begin{aligned}
\overline{B_2F_2}^2 = x^2 &= b^2 - (z-f)^2 \\
&= b^2 - z^2 + 2 f \cdot z - f^2 \\
&= b^2 - (d^2 - 2 dq \cdot \cos \psi + q^2 \cos^2 \psi) + 2 df - 2 f \cdot q \cdot \cos \psi - f^2 \\
&= - q^2 \cos^2 \psi + 2 q (d-f) \cos \psi + \underbrace{b^2 - d^2 + 2 df - f^2}_{m}.
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\overline{A_2F_2}^2 = y^2 &= c^2 - (z-g)^2 \\
&= - q^2 \cos^2 \psi + 2 q \cdot (d-g) \cos \psi + \overbrace{c^2 - d^2 + 2 dg - f^2}^{n}.
\end{aligned}$$

Aus der Heronschen Inhaltsformel erhält man für das Dreieck $A_2B_2F_2 = \Delta_1 = \Delta \cdot \cos \psi$:
$$\begin{aligned}
16 \Delta_1^2 &= - a_1^4 - b_1^4 - c_1^4 + 2 a_1^2 b_1^2 + 2 a_1^2 c_1^2 + 2 b_1^2 c_1^2 \\
&= - a_1^4 - (b_1^2 - c_1^2)^2 + 2 a_1^2 (b_1^2 + c_1^2) \\
&= - a_1^4 - \{ 2 q \cdot (g-f) \cos \psi + m - n \}^2 + 2 a_1 \{ - 2 q^2 \cos^2 \psi + 2 q \cdot \cos \psi (2 d - f - g) + m + n \} \\
&= - 4 q^2 \cos^2 \psi \{ (g-f)^2 + a_1^2 \} - 4 q \cdot \cos \psi \{ (g-f)(m-n) - a_1^2 (2d - f - g) \} + \text{einer geg. Größe } M
\end{aligned}$$
$16 \Delta_1^2 = 16 \Delta^2 \cos^2 \psi$; $\cos \psi = \cos (90^0 - \varphi) = \sin \varphi$; $a_1^2 = a^2 - (g-f)^2$,

folglich erhalten wir in $\sin \varphi$ folgende quadratische Gleichung:
$$4 (4 \Delta^2 + a^2 q^2) \sin^2 \varphi + 4 q \{ (g-f)(m-n) - a_1^2 (2 d - f - g) \} \sin \varphi = M.$$

Ersetzt man hier noch a_1^2 durch $a^2 - (g-f)^2$, so sieht man, daß der Inhalt der geschwungenen Klammer von $\sin \varphi$ eine Funktion der sechs gegebenen Größen: $a, b, c, d, f, g = G(a, b, c, d, f, g)$ und M ebenso eine andere Funktion G_1 derselben sechs Stücke ist. Somit läßt sich die quadratische Schlußgleichung der Douwesschen Aufgabe auch so schreiben:
$$4 (4 \Delta^2 + a^2 q^2) \cdot \sin^2 \varphi + 4 q \cdot G(a, b, c, d, f, g) \cdot \sin \varphi = G_1 (a, b, c, d, f, g).$$

Für mehr ins Detail gehende Studien in dieser Richtung gestattet sich der Verfasser auf seinen schon zitierten Aufsatz sowie seine „Beiträge zur konstruktiven Lösung sphärisch-astronomischer Aufgaben“ (1910, Leipzig, Teubner) zu verweisen.

III.

Unsere eben betrachtete Aufgabe ist quadratisch; d. h. es genügen zwei Polhöhen: φ_1 und φ_2 den gegeben Bedingungen. Man kann nun auch nach Aufgaben fragen, deren Lösung auf eine Gleichung von höherem als dem zweiten Grade führt. Früher erwartete man bei etwas verwickelteren Aufgaben der sphärischen Astronomie auch stets eine Gleichung höheren Grades als Schlußformel. Erwähnt sei nur das berühmte Problem der kürzesten Dämmerung, von dem auch Kästner noch glaubte, daß die Anwendung der höheren Analysis und die Auflösung einer biquadratischen Gleichung nicht zu umgehen seien (Astron. Abhandlungen 2. Bd. 1774). Heute wissen wir, daß die Behandlung dieser Minimumsaufgabe ganz elementar und ohne höhere Gleichung möglich ist; ja, daß eine solche in sphärisch-trigonometrischen Aufgaben nur ausnahmsweise in dem Pothenotschen Problem auf der Kugelfläche auftritt. Hier ist dieselbe vom vierten Grade, und man könnte versucht sein zu glauben, daß der trigonometrische Kalkul nur auf lineare, quadratische oder biquadratische Gleichungen führe [1]. Im Gegensatz zur Douwesschen hat die Pothenotsche Aufgabe auf der Sphäre noch eine sehr kurze

---

[1]) Dies ist jedoch anscheinend nicht der Fall. In der Abhandlung: De minima variatione azimuthi stellarum circulos parallelos uniformiter describentium untersucht A. F. Möbius die Frage, wann die Änderung des Azimuts am langsamsten sei. Delambre und Biot hatten dieselbe stillschweigend in den Sechsstundenkreis verlegt; sie findet aber dort nur statt für $\delta = o$ oder $\cos \delta = \operatorname{cotg} \varphi$, während sich die Deklination für den am meisten nach Norden entfernt liegenden Ort für eine gegebene Polhöhe aus der für δ tatsächlich kubischen Gleichung
$$\operatorname{tang}^6 \delta - 3 \operatorname{tang}^2 \delta \cdot \operatorname{tang}^2 \varphi + \operatorname{tang}^2 \varphi - \operatorname{tang}^4 \varphi = o$$
errechnet.

Geschichte. Man findet die eigenartige Aufgabe zum erstenmal von Grunert im Archiv der Mathematik und Physik behandelt (7. Teil, pag. 104 ff.), jedoch nur vom mathematischen Standpunkt aus und ohne Rücksicht auf praktische Anwendung. Eine solche strebte Rümker zur Bestimmung der Polhöhe an (Handbuch der Schiffahrtskunde, 1850, pag. 162 ff.) in richtiger Erkenntnis des großen Vorzugs, den Azimutbeobachtungen gegenüber den mit dem Refraktionsfehler behafteten Höhenmessungen haben. Allein dieser Vorteil wiegt die Schwierigkeiten nicht auf, welche diese Art der Polhöhenbestimmung darbietet: Erstens sind zur gleichzeitigen Ermittlung der Azimute zweier verschiedener Sterne zwei Beobachter notwendig, zweitens fällt die Schlußgleichung viel zu unübersichtlich aus, als daß sie zur numerischen Durchrechnung sich eignen würde. Dazu kommt, daß Grunert und Rümker, deren Lösungen übrigens völlig identisch sind, nicht direkt die geographische Breite zu eruieren suchen, sondern zuerst mittelst einer Gleichung vierten Grades eine Hilfsgröße tang $\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)$ bestimmen, um mit ihrer Kenntnis in durchaus nicht einfacher Weise auf das astronomische Dreieck: Zenit-Pol-Stern überzugehen.

Diese komplizierten Lösungen scheinen in Lehrbücher keinen Eingang gefunden zu haben; uns ist nur die Trigonometrie von Heis bekannt, in welcher sich im wesentlichen die Grunertsche Behandlung findet. Erwähnt wird das Problem auch noch von Weyer (Zeit- und Ortsbestimmung; allgem. Enzyklopädie der Physik, pag. 738) und von Israël-Holtzwart in seinem eingangs zitierten Aufsatze. Die Lösungen Grunerts und Rümkers sind indirekte; bis zum Jahre 1904 sind keine ernstlichen Versuche zu direkten Lösungen gemacht worden. Erst hier erfuhr das Problem eine direkte überaus elegante Behandlung durch S. Günther (vgl.: das Pothenotsche Problem auf der Kugelfläche; Sitzungsber. d. math.-physik. Klasse d. k. bayr. Akad. d. Wiss. 34. Bd., II. Heft) die wir deshalb im folgenden ausführlich wiedergeben werden.

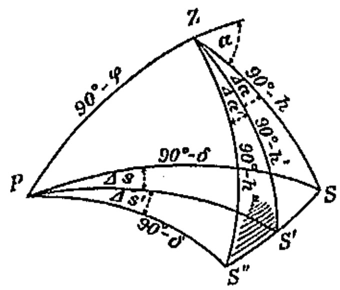

Fig. 2.

Zuvor sei jedoch die Aufgabe d) der II. Gruppe einer näheren Betrachtung unterzogen. Da in diesem Falle δ, $\varDelta s$, $\varDelta s'$, $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\alpha'$ gegeben sind, so können auch die Großkreisbögen (in der nebenstehenden Figur ist $SS'S''$ ein Stück eines Parallels oder Kleinkreises) $SS'=e$; $S'S''=f$ und $SS''=g$ als bekannt angenommen werden. Nennt man die drei unbekannten Höhen h, h' und h'' resp. x, y und z, so hat man zu ihrer Berechnung folgende drei Bestimmungsgleichungen:

$$\cos e = \sin x\cdot\sin y + \cos x\cdot\cos y\cdot\cos\varDelta\alpha,$$
$$\cos f = \sin y\cdot\sin z + \cos y\cdot\cos z\cdot\cos\varDelta\alpha',$$
$$\cos g = \sin x\cdot\sin z + \cos x\cdot\cos z\cdot\cos(\varDelta\alpha+\varDelta\alpha').$$

Mit ihrer Kenntnis hätte man dann die Seite $PZ=90^0-\varphi$ und damit die geforderte Polhöhe zu berechnen.

Übrigens ist die usuelle Formulierung der Pothenotschen Aufgabe eine etwas andere. Man kennt die Azimute α_1 und α_2 zweier gleichzeitig beobachteten Sterne der bekannten Deklinationen δ_1 und δ_2; gesucht ist die Polhöhe φ. Hier ist das sphärische Dreieck $S'PS''$ vollständig gegeben, also auch $S'S''=d$ und ebenso $\sphericalangle S'PS''=\sphericalangle\gamma$. Unter Anwendung des Cosinussatzes auf die drei Dreiecke PZS', PZS'' und $S'ZS''$ erhält man eine direkte Lösung aus den drei Gleichungen:

$$\text{I.}\ \ldots\ldots\quad \sin\delta_1 = \sin\varphi\cdot\sin y - \cos\varphi\cdot\cos y\cdot\cos\alpha_1,$$
$$\text{II.}\ \ldots\ldots\quad \sin\delta_2 = \sin\varphi\cdot\sin z - \cos\varphi\cdot\cos z\cdot\cos\alpha_2,$$
$$\text{III.}\ \ldots\ldots\quad \cos d = \sin p\cdot\sin z + \cos y\cdot\cos z\cdot\cos(d_2-d_1),$$

welche sich in ihrem Bau von den obenstehenden der Aufgabe d) nicht unterscheiden, nur daß φ selbst schon eine der drei Unbekannnte ist.

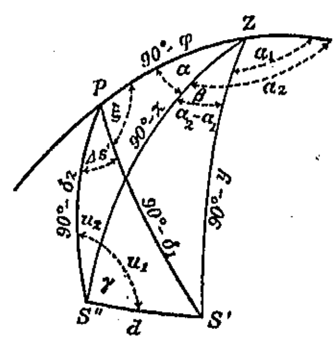

Fig. 3.

Aus I würde nun zunächst sin y als irrationale Funktion zweiten Grades von φ und auf gleiche Weise sin z aus II hervorgehen; die zwei hieraus entfließenden Werte für sin y und sin z hätte man dann in die zu

$$(1-\sin^2 y)\,(1-\sin^2 z)\cdot\cos^2(\alpha_2-\alpha_1) = \cos^2 d - 2\cos d\cdot\sin y\cdot\sin z + \sin^2 y\cdot\sin^2 z$$

umgestaltete Gleichung III einzusetzen. Allein, man wird auf den ersten Blick zugeben müssen, daß eine so mühevolle Eliminationsarbeit fast untunlich ist. Deshalb wird es sich empfehlen, andere unbekannte Größen einzuführen. In S. Günthers schon erwähntem Essai sind dies die zwei Winkel μ_1 und μ_2, in welche der bekannte Winkel γ durch die Diagonale ZS'' des sphärischen Vierecks $PZS'S''$ zerfällt wird. Sei noch für den Moment $\sphericalangle PZS'' = \sphericalangle \alpha$; $\sphericalangle S'ZS'' = \sphericalangle \beta$, so stehen uns nach Günther folgende vier Bestimmungsgleichungen zu Gebote:

$$\text{I.} \quad \sin\varphi\cdot\sin y + \cos\varphi\cdot\cos y\cdot\cos(\alpha+\beta) = \sin\delta_1,$$

$$\text{II.} \quad \mu_1 + \mu_2 = \gamma,$$

$$\text{III.} \quad \frac{\sin(90^0-\varphi)}{\sin\mu_2} = \frac{\sin(90^0-\delta_2)}{\sin\alpha} = \frac{1}{m},$$

$$\text{IV.} \quad \frac{\sin(90^0-y)}{\sin\mu_1} = \frac{\sin(90^0-\delta_1)}{\sin\beta} = \frac{1}{n}.$$

Aus III und IV folgt:

$$\sin\mu_2 = m\cdot\sin(90^0-\varphi)$$
$$\sin\mu_1 = n\cdot\sin(90^0-y),$$

und aus II:

$$\cos\gamma = \cos\mu_1\cdot\cos\mu_2 - \sin\mu_1\cdot\sin\mu_2$$

oder:

$$\cos\mu_1\cdot\cos\mu_2 = \cos\gamma + m\cdot n\cdot\cos\varphi\cdot\cos y$$
$$(1-m^2\cos^2\varphi)\,(1-n^2\cos^2 y) = (\cos\gamma + m\cdot n\cdot\cos\varphi\cdot\cos y)^2,$$

d. i.

$$1 - m^2\cos^2\varphi - n^2\cos^2 y = \cos^2\gamma + 2\,m\,n\cdot\cos\varphi\cdot\cos y.$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\cos\varphi = \zeta;\ \cos y = \eta,$$

so erhält man in ζ und η die Gleichung:

$$\text{V.} \quad \sin^2\gamma = m^2\cdot\zeta^2 + 2\,m\,n\cdot\cos\gamma\cdot\zeta\cdot\eta + n^2\cdot\eta^2.$$

Die Gleichung I können wir ähnlich umgestalten:

$$\sin\varphi\cdot\sin y = \sin\delta_1 - \cos\varphi\cdot\cos y\cdot\cos(\alpha+\beta)$$
$$(1-\zeta^2)\cdot(1-\eta^2) = [\sin\delta_1 - \zeta\cdot\eta\cdot\cos(\alpha+\beta)]^2.$$

$$\text{VI.} \quad -\cos^2\delta_1 = \zeta^2\cdot\eta^2\cdot\sin^2(\alpha+\beta) + 2\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\zeta\cdot\eta - \zeta^2 - \eta^2.$$

Nun kann man aus V und VI η mittelst der Sylvesterschen Determinante eliminieren, nachdem man noch vorher beide Gleichungen nach Potenzen von η geordnet hat. So findet sich denn als neues Paar:

$$\eta^2\,[1-\zeta^2\sin^2(\alpha+\beta)] - \eta\cdot 2\,\zeta\cdot\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta) + (\zeta^2-\cos^2\delta_1) = o$$
$$\eta^2\cdot n^2 + \eta\cdot 2\,\zeta\cdot m\cdot n\cdot\cos y + (\zeta^2 m^2 - \sin^2\gamma) = o$$

Die Elimination von η liefert die Determinante:

$$\text{VII.} \quad \begin{vmatrix} 1-\zeta^2\sin^2(\alpha+\beta) & -2\,\zeta\cdot\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta & \zeta^2-\cos^2\delta_1 & o \\ o & 1-\zeta^2\sin^2(\alpha+\beta) & -2\,\zeta\cdot\sin\delta_1\cdot\cos(\alpha+\beta) & \zeta^2-\cos^2\delta_1 \\ n^2 & 2\,\zeta\cdot m\cdot n\cdot\cos\gamma & \zeta^2 m^2-\sin^2\gamma & o \\ o & n^2 & 2\,\zeta\,m\cdot n\cdot\cos\gamma & \zeta^2 m^2-\sin^2\gamma \end{vmatrix} = o.$$

Wertet man dieselbe aus und setzt nun $\zeta = \cos\varphi$, so stellt sich die Günthersche Schlußgleichung in folgender Gestalt dar:

$$\begin{aligned} \text{VIII.} \quad & \cos^8\varphi\cdot m^4\sin^2\gamma\cdot\sin^4(\alpha+\beta) \\ & -2\cdot\cos^6\varphi\cdot\Big(m^4\sin^2(\alpha+\beta) + 2\,m^3 n\cdot\sin\delta_1\cdot\cos\gamma\cdot\sin^2(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) \\ & \qquad + 2\,m^2 n^2\cdot\cos^2\gamma\cdot\sin^2(\alpha+\beta) + m^2\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2(\alpha+\beta) \\ & \qquad - 2\,m n^3\sin\delta_1\cdot\cos^2\delta_1\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)\Big) \\ & +\cos^4\varphi\cdot\Big(m^4 + 4\,m^3 n\cdot\sin\delta_1\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta) + 4\,m^2 n^2\cdot\cos^2\gamma \\ & \qquad + 4\,m^2 n^2\cdot\cos^2(\alpha+\beta) + 4\,m^2 n^2\cdot\cos^2\delta_1\cdot\sin^2(\alpha+\beta) \\ & \qquad + 4\,m^2\sin^2\gamma\cdot\sin^2(\alpha+\beta) + 4\,m n^3\sin\delta_1\cdot\cos\delta_1\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta) \\ & \qquad + 4 m n\sin\delta_1\sin^2\gamma\cdot\cos\gamma\cdot\sin^2\cdot(\alpha+\beta)\cdot\cos\cdot(\alpha+\beta) + \sin^2\gamma\cdot\sin^2(\alpha+\beta) - n^4\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-2\cos^2\varphi\cdot\Big(&m^2\sin^2\gamma-2\,m^2n^2\cos^2\delta_1\cdot\cos^2\gamma\\
&+2\,mn^3\sin\delta_1\cos^2\delta_1\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)\\
&+2\,mn\sin\delta_1\sin^2\gamma\cdot\cos\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)-n^4\cos^2\delta_1\\
&+2\,n^2\sin^2\delta_1\cdot\sin^2\gamma\cdot\cos^2(\alpha+\beta)+2\sin^4\gamma\cdot\sin^2(\alpha+\beta)\Big)\\
+(\sin^4\gamma&-n^4\cos^4\delta_1)=o.
\end{aligned}
$$

In dieser Gleichung achten Grades, die sich aber sofort auf eine biquadrische reduzieren läßt, hat man dann noch statt $\alpha:180^0-\alpha_2$, und ebenso statt $\beta:\alpha_2-\alpha_1$ zu setzen. Obwohl sie für die Praxis, wie zu erwarten, nicht geeignet ist, so dürfte sie doch andrerseits um nichts verwickelter sein als diejenige, welche Grunert und Rümker schon zur Berechnung der Hilfsgröße tang $\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)$ nötig haben.

Um dem Pothenotschen Problem eine größere Brauchbarkeit für die Praxis zu verleihen, wird man bestrebt sein müssen, es zu modifizieren. Wenn wir in dem bekannten Dreieck $S'PS''$ den Winkel $\varDelta s'=\text{arc cos}\,\dfrac{\cos d-\sin\delta_1\cdot\sin\delta_2}{\cos\delta_1\cdot\cos\delta_2}$ ins Auge fassen und außerdem $\delta_1=\delta_2=\delta$ setzen, also statt zwei beliebigen Sternen nur einen einzigen in Betracht ziehen, so erscheint $\sphericalangle\,\varDelta s'=\text{arc cos}$ $\dfrac{\cos d-\sin^2\delta}{\cos^2\delta}$ als Differenz zweier Stundenwinkel, und wir können nun das Problem ganz analog dem Douwesschen so formulieren: gegeben die Deklination, zwei Azimute und die Zwischenzeit der Beobachtungen; gesucht die Polhöhe. In dieser Fassung setzt die Aufgabe auch nur einen Beobachter voraus.

Man kommt sogar mit der Aufstellung von nur zwei Gleichungen zwischen den Unbekannten φ und ξ aus ($\xi=$ unbekannter Stundenwinkel der ersten Messung), wenn man den sogenannten Kotangentensatz der sphärischen Trigonometrie anwendet. Dann hat man aus den zwei Kugeldreiecken PSZ und $PS''Z$:

I. . . . . $\sin\varphi\cdot\cos\xi=\cos\varphi\cdot\text{tang}\,\delta+\text{cotg}\,\alpha_1\cdot\sin\xi.$

II. . . . . $\sin\varphi\cdot\cos(\varDelta s'+\xi)=\cos\varphi\cdot\text{tang}\,\delta+\text{cotg}\,\alpha_2\cdot\sin(\varDelta s'+\xi).$

Indem man I und II beiderseits durch $\cos\xi$ dividiert, erhält man:

III. . . . . $\sin\varphi=\dfrac{\cos\varphi\cdot\text{tang}\,\delta}{\cos\xi}+\text{cotg}\,\alpha_1\cdot\text{tang}\,\xi.$

IV. . . . $\sin\varphi(\cos\varDelta s'-\sin\varDelta s'\cdot\text{tang}\,\xi)=\dfrac{\cos\varphi\cdot\text{tang}\,\delta}{\cos\xi}+\text{cotg}\,\alpha_2(\sin\varDelta s'+\cos\varDelta s'\cdot\text{tang}\,\xi).$

Subtrahiert man jetzt III von IV, so folgt:

V. . . $\sin\varphi(\cos\varDelta s'-\sin\varDelta s'\cdot\text{tang}\,\xi-1)=\text{cotg}\,\alpha_2\cdot\sin\varDelta s'+\text{tang}\,\xi(\text{cotg}\,\alpha_2\cos\varDelta s'-\text{cotg}\,\alpha_1),$

und hieraus:

$$\text{tang}\,\xi=\frac{\cos\varDelta s'\cdot\sin\varphi-\sin\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2}{\sin\varDelta s'\cdot\sin\varphi+\cos\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2-\text{cotg}\,\alpha_1}.$$

Setzt man diesen Wert für tang ξ in III ein unter Beachtung, daß $\dfrac{1}{\cos\xi}=\sqrt{1+\text{tang}^2\,\xi}$ ist, so hat man schon die gesuchte Gleichung zwischen φ, α_1, α_2, δ und $\varDelta s'$ in impliziter Form, nämlich:

$$\sin\varphi-\frac{\text{cotg}\,\alpha_1\cdot\cos\varDelta s'\cdot\sin\varphi-\text{cotg}\,\alpha_1\cdot\text{cotg}\,\alpha_2\cdot\sin\varDelta s'}{\sin\varDelta s'\cdot\sin\varphi+\cos\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2-\text{cotg}\,\alpha_1}=$$

$$\text{tang}\,\delta\cdot\sqrt{(1-\sin^2\varphi)\cdot\left[1+\frac{\cos\varDelta s'\cdot\sin\varphi-\sin\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2}{\sin\varDelta s'\cdot\sin\varphi+\cos\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2-\text{cotg}\,\alpha_1}\right]^2}.$$

Mit den Abkürzungen:

$$
\begin{aligned}
\cos\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2-\text{cotg}\,\alpha_1&=A\\
\text{cotg}\,\alpha_1\cdot\text{cotg}\,\alpha_2\cdot\sin\varDelta s'&=B\\
A-\text{cotg}\,\alpha_1\cdot\cos\varDelta s'&=C\\
2\,A\cdot\sin\varDelta s'-\sin 2\,\varDelta s'\cdot\text{cotg}\,\alpha_2&=D
\end{aligned}
$$

folgt durch beiderseitiges Quadrieren und Fortschaffen der Nenner:

$$[\sin^2\varphi\cdot\sin\Delta s'+\sin\varphi\cdot C+B]^2=\operatorname{tang}^2\delta\,(1-\sin^2\varphi)\,[(A+\sin\Delta s'\cdot\sin\varphi)^2+(\cos\Delta s'\cdot\sin\varphi-\sin\Delta s'\cdot\operatorname{cotg}\alpha_2)^2]$$

und nach Ausrechnung und Zusammenfassung gleich hoher Potenzen von $\sin\varphi$:

$$\text{VI.}\quad \begin{aligned}&\sin^4\varphi\cdot(\sin^2\Delta s'+\operatorname{tang}^2\delta)\\&+\sin^3\varphi\cdot(2\,C\cdot\sin\Delta s'+D\cdot\operatorname{tang}^2\delta)\\&+\sin^2\varphi\cdot\big(\operatorname{tang}^2\delta\,(A^2-1+\sin^2\Delta s'\cdot\operatorname{cotg}^2\alpha_2)+2\,B\cdot\sin\Delta s'+C^2\big)\\&+\sin\varphi\cdot(B\cdot C-D\cdot\operatorname{tang}^2\delta)\\&+\big(B^2-\operatorname{tang}^2\delta\,(A^2+\sin^2\Delta s'\cdot\operatorname{cotg}^2\alpha_2)\big)=o\end{aligned}$$

als die verlangte Endgleichung.. Um sie zur numerischen Rechnung etwas brauchbarer zu gestalten, kann man die drei Abkürzungen A, C, D und damit auch sofort mehrere Koeffizienten von VI auf logarithmisch bequeme Formen bringen. So ist

$$A=\cos\Delta s'\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha_2)}{\sin\alpha_2\cdot\sin\beta};\ \text{für}\ \frac{\operatorname{cotg}\alpha_1}{\cos\Delta s'}=\operatorname{cotg}\beta,$$

$$C=\cos\Delta s'\cdot\frac{\sin(\alpha_1-\gamma)}{\sin\alpha_1\cdot\sin\gamma};\ \text{für}\ \frac{\sin(\beta-\alpha_2)}{\sin\alpha_2\cdot\sin\beta}=\operatorname{cotg}\gamma,$$

$$D=\sin 2\,(\Delta s')\cdot\frac{\sin(\alpha_2-\gamma)}{\sin\alpha_2\cdot\sin\gamma}.$$

Ferner wird der Koeffizient von $\sin^4\varphi$ sofort zu $\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\delta}$; für $\cos^2\Delta s'\cdot\cos^2\delta=\sin^2\varepsilon$, während sich jene von $\sin^3\varphi$ und $\sin\varphi$ so schreiben lassen:

$$2\,C\cdot\sin\Delta s'+D\cdot\operatorname{tang}^2\delta=\frac{\sin 2\,(\Delta s')}{\sin\gamma}\cdot\left[\frac{\sin(\alpha_1-\gamma)}{\sin\alpha_1}+\frac{\sin(\alpha_2-\gamma)}{\sin\alpha_2}\cdot\operatorname{tang}^2\delta\right]$$

$$B\cdot C-D\cdot\operatorname{tang}^2\delta=\frac{\sin 2\,(\Delta s')}{\sin\gamma}\cdot\left[\frac{\cos\alpha_1\cdot\sin(\alpha_1-\gamma)}{2\sin\alpha_1}\cdot\operatorname{cotg}\alpha_2-\frac{\sin(\alpha_2-\gamma)}{\sin\alpha_2}\operatorname{tang}^2\delta\right].$$

Die indirekte Lösung von Rümker lehrt uns zunächst die Differenz $\mu_1-\mu_2$ bestimmen, deren Betrag wir im voraus nicht zu schätzen vermögen, während die näherungsweise Lösung der Schlußgleichung in φ bei der approximativ als bekannt vorauszusetzenden Polhöhe rascher zu dem gewünschten Resultate führt.

Eine nähere Diskussion von VI ist bei der Unbestimmtheit des Vorzeichens aller Glieder, mit Ausnahme des ersten, nicht angängig. Natürlich muß die Gleichung bei den durch Beobachtung ermittelten Daten mindestens einen reellen Wert für $\sin\varphi$ liefern, der zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegt, weil die vorgenommenen Messungen sich auf einen Beobachtungsort von ganz bestimmter Lage beziehen. Da komplexe Wurzeln nur paarweise auftreten, so zieht die Existenz einer reellen Wurzel in unserm Falle diejenige einer zweiten nach sich. Dabei wäre es aber denkbar, daß dieser Wurzelwert $(\sin\varphi_2)>+1$ oder <-1 sein könnte. Dann entspricht dem Argument φ_2 kein reeller Kreisbogen mehr: wir müssen den zyklischen sinus durch einen hyperbolischen ersetzen, dessen Wert bekanntlich zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwankt, und schreiben:

$$\mathfrak{Sin}\,\varphi_2=\frac{1}{i}\sin(i\varphi_2).$$

Ist das Absolutglied unserer Gleichung VI negativ, so existieren wenigstens zwei reelle Wurzeln, von denen die eine positiv, die andere negativ ist.

Im verallgemeinerten Falle, wo zwei verschiedene Sterne mit den Deklinationen δ_1 und δ_2 beobachtet werden, ist $\operatorname{tang}\xi$ aus den zwei Gleichungen:

$$\sin\varphi=\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta_1\cdot\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\xi}+\operatorname{cotg}\alpha_1\cdot\operatorname{tang}\xi$$

$$\sin\varphi[\cos\Delta s'-\sin\Delta s'\operatorname{tang}\xi]=\cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta_2\cdot\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\xi}+\operatorname{cotg}\alpha_2\cdot[\sin\Delta s'+\cos\Delta s'\operatorname{tang}\xi]$$

zu eliminieren. Dies geschieht nach Wegschaffung der Wurzeln ebenfalls am besten mittelst der Sylvesterschen Determinante, und wir werden dann auf eine Schlußgleichung geführt, die ebenfalls wie die Günthersche vom achten Grade in geraden Potenzen von $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ ist.

IV.

In Gruppe III erledigen sich die drei ersten Aufgaben a), b), c) sehr einfach. Für Aufgabe a) hat man nach Fig. 2:

$$\text{I.} \quad \sin\delta = \sin\varphi\cdot\sin h - \cos\varphi\cdot\cos h\cdot\cos\alpha,$$

$$\text{II.} \quad \sin\delta = \sin\varphi\cdot\sin h' - \cos\varphi\cdot\cos h'\cdot\cos(\alpha+\Delta\alpha),$$

woraus durch Gleichsetzung von I und II folgt:

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{\sin h' - \sin h}{\cos h'\cdot\cos(\alpha+\Delta\alpha) - \cos h\cdot\cos\alpha},$$

womit φ bequem berechnet werden kann.

Im Falle b) lauten die zwei Bestimmungsgleichungen für δ und φ:

$$\text{I.} \quad \sin h = \cos\varphi\cdot\cos\delta + \sin\varphi\cdot\sin\delta\cdot\cos s,$$

$$\text{II.} \quad \sin h' = \cos\varphi\cdot\cos\delta + \sin\varphi\cdot\sin\delta\cdot\cos s' \qquad (s' = s+\Delta s).$$

Auch hier unterliegt die Berechnung von δ und φ keinen Schwierigkeiten, wiewohl sich logarithmisch brauchbare Formeln nicht ohne weiteres herstellen lassen. (Vergl. die Lösung in nicht logarithmischer Form von C. Spitz, Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. pag. 171.) Danach erhält man aus I und II leicht:

$$\text{III.} \quad \cos\varphi\cdot\cos\delta = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'} = \frac{\cos\frac{h+h'}{2}\cdot\sin\frac{h-h'}{2}}{\sin\frac{s+s'}{2}\cdot\sin\frac{s'-s}{2}},$$

$$\text{IV.} \quad \sin\varphi\cdot\sin\delta = \sin h - \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'}\cdot\cos s$$

und daraus durch Addition und Subtraktion

$$\cos(\varphi-\delta) = -\frac{2\cdot\cos\frac{1}{2}(h+h')\cdot\sin\frac{1}{2}(h-h')\cdot\sin^2\frac{s}{2}}{\sin\frac{1}{2}(s+s')\cdot\sin\frac{1}{2}(s-s')} + \sin h$$

$$\cos(\varphi+\delta) = -\frac{2\cdot\cos\frac{1}{2}(h+h')\cdot\sin\frac{1}{2}(h-h')\cdot\cos^2\frac{s}{2}}{\sin\frac{1}{2}(s+s')\cdot\sin\frac{1}{2}(s-s')} - \sin h,$$

womit φ und auch δ gefunden werden können.

Eleganter jedoch wird die Behandlung, wenn man sich der Hyperbelfunktionen bedient. Der Sinus hyperbolicus reicht von $-\infty$ bis $+\infty$, ist also, wie der trigonometrische Tangens, an gar keine Grenzen gebunden, und auch der hyperbolische Cosinus geht von $+1$ bis $+\infty$. Wenn man nun I durch $\cos s$, II durch $\cos s'$ dividiert, so erhält man:

$$\text{V.} \quad \frac{\sin h}{\cos s} = \frac{\sin\delta\cdot\sin\varphi}{\cos s} + \cos\delta\cdot\cos\varphi$$

$$\text{VI.} \quad \frac{\sin h'}{\cos s'} = \frac{\sin\delta\cdot\sin\varphi}{\cos s'} + \cos\delta\cdot\cos\varphi,$$

und nun VI von V subtrahiert:

$$\text{VII.} \quad \frac{\sin h}{\cos s} - \frac{\sin h'}{\cos s'} = \sin\varphi\cdot\sin\delta\left[\frac{1}{\cos s} - \frac{1}{\cos s'}\right].$$

Jetzt setze man:

$$\frac{\sin h}{\cos s} = \mathfrak{Sin}\,\alpha;\ \frac{\sin h'}{\cos s'} = \mathfrak{Sin}\,\beta.$$

$$\frac{1}{\cos s} = \mathfrak{Cof}\,m;\ \frac{1}{\cos s'} = \mathfrak{Cof}\,n,$$

so wird VII zu:

$$\sin\varphi\cdot\sin\delta = \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha - \mathfrak{Sin}\,\beta}{\mathfrak{Cof}\,m - \mathfrak{Cof}\,n} = \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathfrak{Sin}\,\frac{m+n}{2}\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{m-n}{2}},$$

während nach III ist: $$\cos\varphi\cdot\cos\delta = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'} = \frac{\cos\frac{h+h'}{2}\cdot\sin\frac{h-h'}{2}}{\sin\frac{s+s'}{2}\cdot\sin\frac{s'-s}{2}},$$

womit die Lösung sich formell sehr homogen ausnimmt.

Eliminiert man aber φ oder δ, so erhält man in einer Unbekannten eine biquadratische Gleichung vom geraden Grade. Setzt man nämlich

$$\sin\delta = \frac{B}{\sin\varphi} \text{ (wo } B \text{ bekannt)},$$

so wird $$\cos\delta = \sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi - B^2}{1-\cos^2\varphi}}$$

und damit $$\cos\varphi\cdot\cos\delta = \cos\varphi\cdot\sqrt{\frac{1-\cos^2\varphi-B^2}{1-\cos^2\varphi}} = C \text{ (wo } C \text{ bekannt)},$$

woraus folgt: $$\cos^4\varphi + \cos^2\varphi\,(B^2 - C^2 - 1) + C^2 = o.$$

Unter den vier Wurzeln von $\cos\varphi$ (oder auch $\sin\varphi$, da ja die Gleichung auch in $\sin\varphi$ biquadratisch) wären Werte denkbar, welche die Einheit überstiegen; dann ist φ imaginär und der zyklische Cosinus durch einen hyperbolischen zu ersetzen. Dasselbe gilt für die Gleichung in δ. Die allgemeinste, alle Fälle umfassende Lösung ist also wohl diese:

$$\sin\varphi\cdot\sin\delta = \mathfrak{Sin}\,\gamma_0$$
$$\cos\varphi\cdot\cos\delta = \mathfrak{Sin}\,\gamma_1,$$

so daß wird:

$$\cos(\varphi-\delta) = 2\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\gamma_0+\gamma_1}{2}\cdot\mathfrak{Cof}\,\frac{\gamma_0-\gamma_1}{2}$$

$$\cos(\varphi+\delta) = 2\cdot\mathfrak{Cof}\,\frac{\gamma_0+\gamma_1}{2}\cdot\mathfrak{Sin}\,\frac{\gamma_0-\gamma_1}{2}.$$

Für die Aufgabe c) liefert der Cotangentensatz:

I. . . . . $\sin\varphi\cdot\cos s = \cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta + \sin s\cdot\operatorname{cotg}\alpha,$

II. . . . . $\sin\varphi\cdot\cos s' = \cos\varphi\cdot\operatorname{tang}\delta + \sin s'\cdot\operatorname{cotg}(\alpha+\varDelta\alpha).$

Hieraus folgt:

$$\sin\varphi = \frac{\sin s\cdot\operatorname{cotg}\alpha - \sin s'\cdot\operatorname{cotg}(\alpha+\varDelta\alpha)}{\cos s - \cos s'},$$

welcher Ausdruck leicht logarithmisch gebrauchsfähig zu machen ist.

Die Ermittlung der Polhöhe in den Fällen d), e), f) hingegen führt, wie beim Pothenotschen Probleme, auf biquadratische Gleichungen. Bezeichnet man für diese Aufgaben die unbekannte Deklination mit x, so hat man im Falle d):

I. . . . . $\sin x = \sin h\cdot\sin\varphi - \cos h\cdot\cos\varphi\cdot\cos\alpha,$

II. . . . . $\sin h' = \sin\varphi\cdot\sin x + \cos\varphi\cdot\cos x\cdot\cos s'.$

Um x aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren, quadriere man beide und ordne sie nach Potenzen von $\sin x$. Gleichung I ergibt:

III. . . . . $\sin^2 x - (\sin h\cdot\sin\varphi - \cos h\cdot\cos\varphi\cdot\cos\alpha)^2 = o,$

während aus II folgt:

IV. . . . . . $\sin^2 x\,(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cdot\cos^2 s') - \sin x\cdot 2\sin\varphi\sin h' + \sin^2 h' - \cos^2\varphi\cos^2 s' = o.$

Wie früher, so ergibt sich aus III und IV die Sylvestersche Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (\sin h\cdot\sin\varphi - \cos h\cdot\cos\varphi\cdot\cos\alpha)^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\sin h\cdot\sin\varphi - \cos h\cos\varphi\cdot\cos\alpha)^2 \\ \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2 s' & -2\sin\varphi\sin h' & \sin^2 h' - \cos^2\varphi\cos^2 s' & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2 s' & -2\sin\varphi\sin h' & \sin^2 h' - \cos^2\varphi\cos^2 s' \end{vmatrix} = o,$$

deren Auswertung auf eine Gleichung achten Grades in geraden Potenzen von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ führt.

Aufgabe e) führt auf die zwei Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \sin x = \sin\varphi\cdot\sin h - \cos\varphi\cdot\cos h\cdot\cos\alpha.$$

$$\text{II.} \quad \sin\varphi\cdot\cos_1 = \cos\varphi\cdot\operatorname{tang} x + \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha).$$

Man dividiere I durch $\cos x$ und beachte, daß $\frac{1}{\cos x} = \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 x}$ ist; dann folgt durch Quadrieren:

$$\text{III.} \quad \operatorname{tang}^2 x = \frac{(\sin\varphi\cdot\sin h - \cos\varphi\cdot\cos h\cdot\cos\alpha)^2}{1 - (\sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cdot\cos h\cdot\cos\alpha)^2},$$

während man aus II erhält:

$$\text{IV.} \quad \operatorname{tang}^2 x = \frac{\left(\sin\varphi\cdot\cos s_1 - \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha)\right)^2}{\cos^2\varphi}.$$

Aus der Gleichsetzung von III und IV entfließt die Gleichung:

$$\left(\sin\varphi\cdot\cos s_1 - \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha)\right)^2\left[1 - (\sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cdot\cos h\cdot\cos\alpha)^2\right] = \cos^2\varphi\cdot(\sin\varphi\sin h - \cos\varphi\cos h\cdot\cos\alpha)^2,$$

welche wiederum vom achten Grade in geraden Potenzen von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ ist.

Im Falle f) endlich hat man:

$$\text{I.} \quad \sin h = \sin x\cdot\sin\varphi + \cos x\cdot\cos\varphi\cdot\cos s,$$

$$\text{II.} \quad \sin\varphi\cdot\cos s_1 = \cos\varphi\cdot\operatorname{tang} x + \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha).$$

Dividiert man I durch $\cos x$ und quadriert, so erhält man:

$$\text{III.} \quad \operatorname{tang}^2 x(\sin^2 h - \sin^2\varphi) - 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\cos s\cdot\operatorname{tang} x + \sin^2 h - \cos^2\varphi\cdot\cos^2 s = o.$$

Setzt man in diese Gleichung III den aus II folgenden Wert für

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin\varphi\cdot\cos s_1 - \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha)}{\cos\varphi}$$

ein, so errechnet sich φ auch hier aus einer Gleichung von ganz demselben Typus wie in d) und e); man findet nämlich nach Beseitigung des Nenners:

$$(\sin^2 h - \sin^2\varphi)\left(\sin\varphi\cdot\cos s_1 - \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha)\right)^2 - 2\sin\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot\cos s\left(\sin\varphi\cos s_1 - \sin s_1\cdot\operatorname{cotg}(\alpha + \varDelta\alpha)\right) - \cos^4\varphi\cdot\cos^2 s + \cos^2\varphi\cdot\sin^2 h = o.$$

V.

So elegant sich die Lösungen von Aufgabe 1a und 1b der IV. Gruppe, die wir bereits S. 4 mit ihren Autoren Gauß, Grunert und Mollweide erwähnten, ausnehmen, so wenig scheint dies vom Falle IV, 1c zu gelten, wo die Auflösung einer komplizierten biquadratischen Gleichung wohl unerläßlich ist. Bezeichnet man die Äquatordistanz wiederum mit x, das unbekannte $\varDelta s$ und $\varDelta\alpha'$ mit resp. ξ und ψ, so ist das Dreieck SZS' (Fig. 2) bekannt und damit auch $SS' = f = \operatorname{arc}\cos(\sin h\cdot\sin h' + \cos h\cdot\cos h'\cdot\cos\varDelta\alpha)$, womit sich folgende drei Bestimmungsgleichungen für die drei Unbekannten: x, ξ und ψ aufstellen lassen:

$$\text{I.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x\cdot\cos\xi = \cos f,$$

$$\text{II.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x\cdot\cos\varDelta s' = \sin h'\cdot\sin h'' + \cos h'\cdot\cos h''\cdot\cos\psi,$$

$$\text{III.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x\cdot\cos(\xi + \varDelta s') = \sin h\cdot\sin h'' + \cos h\cdot\cos h''\cdot\cos(\varDelta\alpha + \psi).$$

Um hieraus z. B. ψ zu finden, kann man folgenden Weg einschlagen:

Aus I folgt:

$$\cos\xi = \frac{\cos f - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \cos f - (1-\cos f)\,\mathrm{tang}^2 x = 1 - \frac{2\sin^2\frac{f}{2}}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2\xi = \frac{\cos^4 x - 4\cos^2 x\cdot\sin^2\frac{f}{2} + 4\sin^4\frac{f}{2}}{\cos^4 x}$$

und daraus

$$\mathrm{tang}\,\xi = \frac{2\sin\frac{f}{2}\cdot\sqrt{\cos^2 x - \sin^2\frac{f}{2}}}{\cos^2 x - 2\sin^2\frac{f}{2}}.$$

III gibt entwickelt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x\,(\cos\Delta s' - \sin\Delta s'\,\mathrm{tang}\,\xi)\cos\xi = \sin h\cdot\sin h'' + \cos h\cdot\cos h''\cdot(\cos\Delta\alpha\cdot\cos\psi - \sin\Delta\alpha\cdot\sin\psi).$$

Ersetzt man hierin $\cos\xi$ und $\mathrm{tang}\,\xi$ durch die oben gefundenen Werte, so erhält man:

$$\text{IV.}\quad \sin^2 x + \cos\Delta s'\left(\cos^2 x - 2\sin^2\frac{f}{2}\right) - 2\sin\Delta s'\cdot\sin\frac{f}{2}\cdot\sqrt{\cos^2 x - \sin^2\frac{f}{2}} = \sin h\cdot\sin h'' + \cos h\cdot\cos h''\cdot\cos(\Delta\alpha + \psi).$$

Subtrahiert man jetzt II von IV, so bleibt:

$$\text{V.}\quad -2\sin\frac{f}{2}\left(\cos\Delta s'\cdot\sin\frac{f}{2} + \sin\Delta s'\cdot\sqrt{\cos^2 x - \sin^2\frac{f}{2}}\right) = \sin h''(\sin h - \sin h') + \cos h''\times(\cos h\cdot\cos\Delta\alpha\cdot\cos\psi - \cos h'\cdot\cos\psi - \cos h\cdot\sin\Delta\alpha\cdot\sin\psi).$$

Aus II findet man ferner:

$$\sqrt{\cos^2 x - \sin^2\frac{f}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \sin h'\cdot\sin h'' - 2\sin^2\frac{f}{2}\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta s'}{2}\right) - \cos h'\cos h''\cdot\cos\psi}}{\sin\left(\frac{\Delta s'}{2}\right)\cdot\sqrt{2}}.$$

Damit, und mit einigen leicht verständlichen Abkürzungen, erhält man aus V:

$$-A - 2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{f}{2}\cdot\cos\frac{\Delta s'}{2}\cdot\sqrt{B - C\cdot\cos\psi} = D_0 + E\cdot\cos\psi - F\cdot\sqrt{1-\cos^2\psi}$$

oder:

$$-2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{f}{2}\cdot\cos\frac{\Delta s'}{2}\sqrt{B - C\cdot\cos\psi} = D + E\cdot\cos\psi - F\sqrt{1-\cos^2\psi},$$

$$8\sin^2\frac{f}{2}\cdot\cos^2\frac{\Delta s'}{2}(B - C\cdot\cos\psi) = D^2 + 2\,DE\cdot\cos\psi - 2\,F(D+E)\sqrt{1-\cos^2\psi} + F^2 - F^2\cos^2\psi,$$

$$B_1 - C_1\cdot\cos\psi + D_1\cdot\cos^2\psi = -E_1\cdot\sqrt{1-\cos^2\psi}.$$

Beseitigt man die Wurzel rechter Hand durch Quadrieren, so folgt:

$$D_1^2\cos^4\psi - C_1 D_1\cdot\cos^3\psi + (2\,B_1 D_1 + C_1^2 - C_1 D_1 + E_1^2)\cdot\cos^2\psi - 2\,B_1 C_1\cos\psi + B_1^2 - E_1^2 = o$$

und nach Division mit D_1^2 und Einführung der weiter abkürzenden Koeffizienten α, β, γ, δ:

$$\text{VI.}\quad \cos^4\psi + \alpha\cos^3\psi + \beta\cos^2\psi + \gamma\cdot\cos\psi + \delta = o.$$

Zur Ermittlung von φ beachte man, daß mit der Kenntnis von ψ auch das sphärische Dreieck: SZS'' (Fig. 2) vollständig gegeben ist. Es sei $SS'' = g$ gefunden worden. Berechnet man aus II noch x, so kennt man auch das gleichschenklige Dreieck: SPS''. Der Winkel ZSP des sphärischen Dreiecks ZPS ist gleich der Differenz der Winkel ZSS'' und PSS'' der eben genannten, vollständig bestimmten Dreiecke; er sei $= m$; dann läßt sich die Seite $PZ = 90^0 - \varphi$ des astronomischen Dreiecks Zenit-Pol-Stern nach dem Cosinussatz finden:

$$\sin\varphi = \sin h\cdot\sin\delta + \cos h\cdot\cos\delta\cdot\cos m.$$

(Vgl. die Behandlung der Aufgabe: IV, 2a!)

Ähnlich wie die Douwessche, so ist auch Aufgabe IV, 1a zu einer sehr anschaulichen Behandlung mit Hilfe der nebenstehenden Kegelfigur geeignet. In der Ebene E liege der Parallelkreis der Sonne mit den drei Sonnenpositionen $SS'S''$. Auf der Ebene E_1 des Horizonts stehe senkrecht das Gnomon der Höhe $OO_1 = q$. Das Originaldreieck $SS'S'' = \varDelta$ erscheint auf E_1 in zwei Projektionen: der zentralperspektivischen S_1, S_1', S_1'' und der orthogonalen $S_I, S_I', S_I'' = \varDelta_1$ [1]). Da sich die Inhalte von $\varDelta_1$ und $\varDelta$ wie der Cosinus des Neigungswinkels von E und E_1 zur Einheit verhalten, so ist die Berechnung der Polhöhe φ mit der Inhaltsbestimmung dieser zwei Dreiecke identisch. Die Winkel zwischen den von q geworfenen Schatten a_1, b_1, c_1 sind eben gleich den gegebenen Azimutdifferenzen $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\alpha'$. Ferner seien die Mantellinien des geraden Kreiskegels $SS'S''O$, nämlich OS, OS', OS'' jeweils $= 1$ gesetzt. Nach der Fig. 4 ist nun:

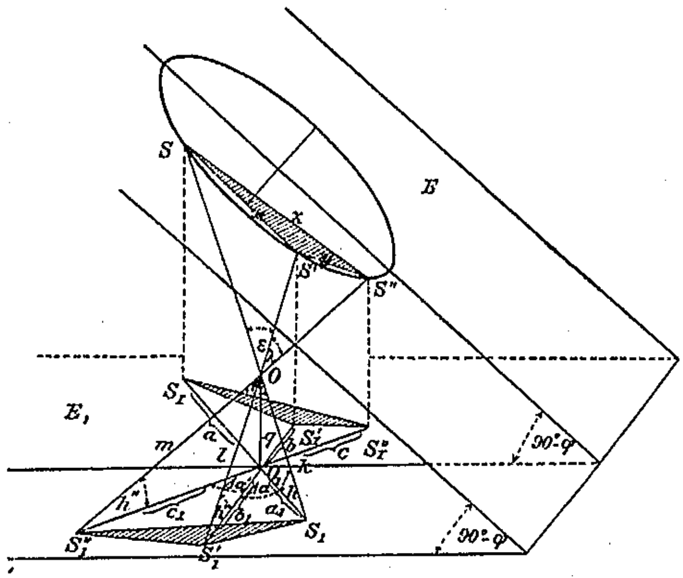

Fig. 4.

$$
\begin{aligned}
a &= \cos h, \\
b &= \cos h', \\
c &= \cos h'', \\
a_1 &= q \cdot \operatorname{cotg} h, \\
b_1 &= q \cdot \operatorname{cotg} h', \\
c_1 &= q \cdot \operatorname{cotg} h'', \\
k &= q \cdot \operatorname{cosec} h, \\
l &= q \cdot \operatorname{cosec} h', \\
m &= q \cdot \operatorname{cosec} h''.
\end{aligned}
$$

Ferner:

$$
\begin{aligned}
\varDelta S_I OS_I'' &= \frac{1}{2} ac \cdot \sin(\varDelta\alpha + \varDelta\alpha') = \frac{1}{2} \cos h \cdot \cos h'' \cdot \sin(\varDelta\alpha + \varDelta\alpha'), \\
\varDelta S_I OS_I' &= \frac{1}{2} ab \cdot \sin \varDelta\alpha = \frac{1}{2} \cos h \cdot \cos h' \cdot \sin \varDelta\alpha, \\
\varDelta S_I' OS_I'' &= \frac{1}{2} bc \cdot \sin \varDelta\alpha' = \frac{1}{2} \cos h' \cdot \cos h'' \cdot \sin \varDelta\alpha',
\end{aligned}
$$

folglich:

$$
\varDelta S_I S_I' S_I'' = \varDelta_1 = \frac{1}{2}\left[\cos h \cdot \cos h'' \cdot \sin(\varDelta\alpha + \varDelta\alpha') - \cos h \cdot \cos h' \cdot \sin \varDelta\alpha - \cos h \cdot \cos h'' \cdot \sin \varDelta\alpha'\right].
$$

Um den Inhalt des Dreiecks $SS'S'' = \varDelta$ zu finden, berechne man seine drei Seiten x, y und z und wende dann die Heronsche Inhaltsformel an. Dazu bedarf man der Kenntnis der drei Winkel ε, λ und μ. Aus

$$
S_1 S_1' = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 - 2\, a_1 b_1 \cdot \cos \varDelta\alpha} = \sqrt{k^2 + l^2 - 2\, kl \cdot \cos \varepsilon}
$$

folgt:

$$
\cos \varepsilon = \frac{k^2 + l^2 + 2\, a_1 b_1 \cos \varDelta\alpha - a_1^2 - b_1^2}{2\, kl},
$$

und ganz analog findet man λ und μ. Nun bestimmen sich die Seiten x, y, z leicht aus den gleichschenkligen Dreiecken SOS_1, $S'OS''$ SOS'' zu

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{2} &= \sin \frac{\varepsilon}{2} \\
\frac{y}{2} &= \sin \frac{\lambda}{2} \\
\frac{z}{2} &= \sin \frac{\mu}{2},
\end{aligned}
$$

woraus folgt:

[1]) Zur Erzielung größerer Deutlichkeit in den rückwärtsliegenden Teil der Horizontebene verlegt.

$$\Delta=\sqrt{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}+\sin\frac{\lambda}{2}+\sin\frac{\mu}{2}\right)\left(\sin\frac{\lambda}{2}+\sin\frac{\mu}{2}-\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}+\sin\frac{\mu}{2}-\sin\frac{\lambda}{2}\right)\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}+\sin\frac{\lambda}{2}-\sin\frac{\mu}{2}\right)}.$$

Somit kennt man jetzt Δ und Δ_1, und damit ergibt sich sofort:

$$\frac{\Delta_1}{\Delta}=\cos(90^0-\varphi)=\sin\varphi.$$

VI.

Auch bei den Aufgaben 2 a) bis f) der IV. Gruppe tritt zur Berechnung der geographischen Breite mehrmals eine verwickelte biquadratische Gleichung auf; mit Ausnahme des ersten Falles sind sie alle zur Polhöhenbestimmung praktisch durchaus ungeeignet.

Im Falle a) ergibt der Cosinussatz für das Dreieck SZS':

$$\cos SS'=\cos f=\sin h\cdot\sin h'+\cos h\cdot\cos h'\cdot\cos\Delta\alpha,$$

womit f gefunden ist; ebenso folgt aus Dreieck SPS':

$$\cos f=\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\Delta s$$

oder

$$\cos f=\cos^2 x(\operatorname{tang}^2 x+\cos\Delta s),$$

$$(1+\operatorname{tang}^2 x)\cos f=\operatorname{tang}^2 x+\cos\Delta s,$$

$$\cos f-\cos\Delta s=\operatorname{tang}^2 x(1-\cos f),$$

$$\sin\frac{f+\Delta s}{2}\cdot\sin\frac{\Delta s-f}{2}=\sin^2\frac{f}{2}\cdot\operatorname{tang}^2 x,$$

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{\Delta s+f}{2}\cdot\sin\frac{\Delta s-f}{2}}}{\sin\frac{f}{2}}=\operatorname{tang} x,$$

$$\sphericalangle\,\delta=\sphericalangle\,x.$$

Da Dreieck SZS' bekannt ist, so ist es auch $\sphericalangle\,ZSS'=l$, und ebenso in Dreieck SPS': $\sphericalangle\,S'SP=l_1$. Mithin ist $\sphericalangle\,ZSP=\sphericalangle\,l-l_1$, und das Dreieck SPZ kann jetzt mittelst des Cosinussatzes aufgelöst werden:

$$\sin\varphi=\sin\delta\cdot\sin h+\cos\delta\cdot\cos h\cdot\cos(l-l_1).$$

Fall b). Nennt man die dritte unbekannte Höhe z, den unbekannten Winkel SPS' ξ, so lassen sich für ξ, x und z folgende Gleichungen aufstellen:

I. . . . . . $\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\xi=\sin h\cdot\sin h'+\cos h\cdot\cos h'\cdot\cos\Delta\alpha=\cos f,$

II. . . . . . $\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\Delta s'=\sin h'\cdot\sin z+\cos h'\cdot\cos z\cdot\cos\Delta\alpha',$

III. . . . . . $\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos(\xi+\Delta s')=\sin h\cdot\sin z+\cos h\cdot\cos z\cdot\cos(\Delta\alpha+\Delta\alpha'),$

Aus I folgt wieder, wie in IV, 1 c):

$$\cos\xi=1-2\cdot\left(\frac{\sin\frac{f}{2}}{\cos x}\right)^2;$$

$$\operatorname{tang}\xi=\frac{2\cdot\sin\frac{f}{2}\cdot\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\frac{f}{2}}}{\cos^2 x-2\sin^2\frac{f}{2}}.$$

III. kann man schreiben:

$$\sin^2 x+\cos^2 x(\cos\Delta s'-\sin\Delta s'\operatorname{tang}\xi)\cdot\cos^2\xi=\sin h\cdot\sin z+\cos h\cdot\cos z\cdot\cos(\Delta\alpha+\Delta\alpha')$$

oder, nach Einführung der Ausdrücke für $\cos\xi$ und $\operatorname{tang}\xi$:

IV. $$\sin^2 x+\cos\Delta s'\left(\cos^2 x-2\sin^2\frac{f}{2}\right)-2\sin\Delta s'\cdot\sin\frac{f}{2}\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\frac{f}{2}}=\sin h\cdot\sin z+\cos h\cdot\cos z\cdot\cos(\Delta\alpha+\Delta\alpha').$$

II von IV subtrahiert gibt:

$$\text{V.} \quad \ldots \quad -2\sin\frac{f}{2}\left(\cos\varDelta s'\cdot\sin\frac{f}{2}+\sin\varDelta s'\cdot\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\frac{f}{2}}\right)=(\sin h-\sin h')\sin z$$
$$+[\cos h\cdot\cos(\varDelta\alpha+\varDelta\alpha')-\cos h\cdot\cos\varDelta\alpha']\cdot\cos z.$$

Aus II findet man:

$$\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\frac{f}{2}}=\frac{\sqrt{1-(\sin h'\sin z+\cos h'\cdot\cos\varDelta\alpha')-2\sin^2\frac{f}{2}\cdot\sin^2\frac{\varDelta s'}{2}}}{\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\varDelta s'}{2}}.$$

Setzt man diesen Ausdruck statt $\sqrt{\cos^2 x-\sin^2\frac{f}{2}}$ in V ein und führt rechts die leicht verständlichen Abkürzungen M und N ein, so resultiert in der einen Unbekannten z folgende Gleichung:

$$\text{VI.} \quad -2\sin^2\frac{f}{2}\cdot\cos\varDelta s'-2\sqrt{2}\cdot\sin\frac{f}{2}\cdot\cos\frac{\varDelta s'}{2}\cdot\sqrt{1-(\sin h'\sin z+\cos h'\cos z\cdot\cos\varDelta\alpha')-2\sin^2\frac{f}{2}\cdot\sin\frac{\varDelta s'}{2}}$$
$$=M\cdot\sin z+N\cdot\cos z,$$

welche sich ebenfalls als biquadratisch herausstellt. Die weitere Behandlung der Aufgabe ist von jetzt ab ganz analog derjenigen von IV 1, c).

Fall c). Es sei die dritte unbekannte Höhe $=z$ und die erste unbekannte Azimutdifferenz $=\psi$. Dann hat man zur Auflösung der Aufgabe folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\varDelta s=\sin h\cdot\sin h'+\cos h\cdot\cos h'\cdot\cos\psi,$$
$$\text{II.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\varDelta s'=\sin h'\cdot\sin z+\cos h'\cdot\cos z\cdot\cos\varDelta\alpha',$$
$$\text{III.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot(\cos\varDelta s+\varDelta s')=\sin h\cdot\sin z+\cos h\cdot\cos z\cdot\cos(\psi+\varDelta\alpha').$$

Die rechnerische Behandlung dieser drei Gleichungen gestaltet sich fast ebenso unelegant und mühevoll wie jene der II. Gruppe d), weshalb wir auf die detaillierte Durchführung verzichten müssen. Man könnte z. B. aus I $\cos\psi$ eliminieren und abkürzungsweise setzen:

$$\text{IV.} \quad \ldots \quad \cos\psi=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\varDelta s-M}{N}.$$

hierauf III rechter Hand entwickeln zu:

$$\text{V.} \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos(\varDelta s+\varDelta s')-\sin h\cdot\sin z+\cos h\cdot\cos z\,[\cos\varDelta s'\cdot\cos\psi-\sin\varDelta s'\cdot\sin\psi],$$

darauf den Wert für $\cos\psi$ aus IV in V einsetzen und nach $\sin\psi$ auflösen, wodurch man erhielte:

$$\text{VI.} \quad \sin\psi=\frac{\cos h\cdot\cos\varDelta s'\cdot\cos z\,[\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\varDelta s-M]-[\sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos(\varDelta s+\varDelta s')-\sin h\cdot\sin z]}{N\cdot\cos h\cdot\cos z}.$$

Durch Quadrieren und Addieren von IV und VI verschwindet die Unbekannte ψ; die daraus resultierende Gleichung in x und z wäre dann mit II zu verbinden und aus diesem sehr komplizierten System x oder z zu eliminieren.

Ebenso verwickelt liegen die Verhältnisse im Fall d).

Ersetzt man hier $\varDelta s'$ durch ξ, h' durch y, so hat man:

$$\text{I.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\varDelta s=\sin h\cdot\sin y+\cos h\cdot\cos y\cdot\cos\varDelta\alpha,$$
$$\text{II.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\xi=\sin h''\cdot\sin y+\cos h''\cdot\cos y\cdot\cos\varDelta\alpha',$$
$$\text{III.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos(\varDelta s+\xi)=\sin h\cdot\sin h''+\cos h\cdot\cos h''\cdot\cos(\varDelta\alpha+\varDelta\alpha')=\cos f.$$

Aus III folgt:

$$\text{IV.} \quad \ldots \quad \sin^2 x+\cos^2 x\cdot\cos\xi\cdot\cos\varDelta s-\cos^2 x\cdot\sin\xi\cdot\sin\varDelta s=\cos f.$$

II mit $\cos\varDelta s$ multipliziert und von IV subtrahiert gibt:

$$\sin\xi=\frac{\sin h''\cdot\cos\varDelta s\cdot\sin y+\cos h''\cdot\cos\varDelta\alpha\cdot\cos\varDelta s\cdot\cos y+2\sin^2 x\sin^2\frac{\varDelta s}{2}-\cos f}{\sin\varDelta s\cdot\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos\gamma\cdot\sin y+\cos\gamma_1\cdot\cos y+2\sin^2 x\cdot\sin^2\frac{\varDelta s}{2}-\cos f}{\sin\varDelta s\cdot\cos^2 x}.$$

Aus II erhält man:

$$\cos \xi = \frac{\sin h'' \cdot \sin y + \cos h'' \cdot \cos \Delta\alpha' \cdot \cos y - \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Die Unbekannte ξ verschwindet wieder, wie in der vorhergehenden Aufgabe, durch Quadrieren und Addieren der Ausdrücke für $\sin \xi$ und $\cos \xi$. Die so erhaltene Gleichung in x und y ist dann zur Berechnung einer der Unbekannten x oder y mit I zu verbinden.

Ganz ähnlich geartet sind auch die Gleichungen, auf die man sich in den Fällen e) und f) geführt sieht. Sie alle haben gegenüber den Fällen b) und c) den Nachteil, daß kein Ausdruck von der Form

$$\sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \xi = \cos f$$

auftritt, wodurch sich $\cos \xi$ sehr einfach eliminieren läßt. Wir setzen die Gleichungskomplexe für Fall e) und f) der Vollständigkeit wegen noch an.

Fall e):

$$\text{I.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \xi = \sin h \cdot \sin y + \cos h \cdot \cos y \cdot \cos \Delta\alpha,$$

$$\text{II.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \Delta s' = \sin h'' \cdot \sin y + \cos h'' \cdot \cos y \cdot \cos \Delta\alpha'$$

$$\text{III.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos (\xi + \Delta s') = \sin h \cdot \sin h'' + \cos h \cdot \cos h'' \cdot \cos (\Delta\alpha + \Delta\alpha') = \cos f.$$

Fall f):

$$\text{I.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \Delta s = \sin h \cdot \sin y + \cos h \cdot \cos y \cdot \cos \psi,$$

$$\text{II.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \Delta s' = \sin h'' \cdot \sin y + \cos h'' \cdot \cos y \cdot \cos \Delta\alpha',$$

$$\text{III.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos (\Delta s + \Delta s') = \sin h \cdot \sin h'' + \cos h \cdot \cos h'' \cdot \cos (\Delta\alpha' + \psi).$$

VII.

Auch der eine Fall a) von IV, 3 bietet der rechnerischen Durchführung ähnliche Schwierigkeiten, wie sie sich bei der direkten Auflösung des Pothenotschen Problems der algebraischen Behandlung entgegenstellen. Um dies aus den Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \Delta s = \sin h \cdot \sin y + \cos h \cdot \cos y \cdot \cos \Delta\alpha,$$

$$\text{II.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \Delta s' = \sin y \cdot \sin z + \cos y \cdot \cos z \cdot \cos \Delta\alpha',$$

$$\text{III.} \quad \sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos (\Delta s + \Delta s') = \sin h \cdot \sin z + \cos h \cdot \cos z \cdot \cos (\Delta\alpha + \Delta\alpha')$$

leichter zu erkennen, führen wir in I und III Hyperbelfunktionen ein und setzen:

$$\cos y = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\chi}; \; \sin y = \mathfrak{Tang}\,\chi,$$

$$\cos z = \frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\nu}; \; \sin z = \mathfrak{Tang}\,\nu,$$

so folgt für I:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos \Delta s)\, \mathfrak{Cos}\,\chi - \sin h \cdot \mathfrak{Sin}\,\chi = \cos h \cdot \cos \Delta\alpha;$$

für III:

$$[\sin^2 x + \cos^2 x \cdot \cos (\Delta s + \Delta s')]\, \mathfrak{Cos}\,\nu - \sin h \cdot \mathfrak{Sin}\,\nu = \cos h \cdot \cos (\Delta\alpha + \Delta\alpha'),$$

während II gar alle drei Unbekannten enthält.

VIII.

Zum Schlusse bleibt noch der Fall zu betrachten, wo über gar keine Höhenbeobachtung verfügt und ebenso wenig Kenntnis der Deklination und des Meridians vorausgesetzt wird. Dann muß der Stern in vier aufeinander folgenden Positionen S, S', S'' und S''' beobachtet sein. Die Beobachtungsdaten sind die drei Azimutdifferenzen:

$$\Delta\alpha, \; \Delta\alpha', \; \Delta\alpha'',$$

sowie die drei Zeitinkremente:

$$\Delta s, \; \Delta s', \; \Delta s''.$$

Nennt man die Deklination wiederum x, die vier unbekannten Höhen y, z, z' und z'', so findet man unter Beachtung, daß

$$\sin \frac{SS'}{2} = \cos x \cdot \sin \frac{\Delta s}{2}$$

$$\sin \frac{S'S''}{2} = \cos x \cdot \sin \frac{\Delta s'}{2} \text{ usw.}$$

und

$$\cos \frac{SS'}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{SS'}{2} \text{ usw. ist,}$$

leicht für die fünf Unbekannten: x, y, z, z', z'' folgende Gleichungen:

$$\text{I.} \quad \cos SS' = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{\Delta s}{2} = \sin y \cdot \sin z + \cos y \cdot \cos z \cdot \cos \Delta\alpha,$$

$$\text{II.} \quad \cos S'S'' = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{\Delta s'}{2} = \sin z \cdot \sin z' + \cos z \cdot \cos z' \cdot \cos \Delta\alpha',$$

$$\text{III.} \quad \cos S''S''' = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{\Delta s''}{2} = \sin z' \cdot \sin z'' + \cos z' \cdot \cos z'' \cdot \cos \Delta\alpha''.$$

$$\text{IV.} \quad \cos SS'' = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{\Delta s + \Delta s'}{2} = \sin y \cdot \sin z' + \cos y \cdot \cos z' \cdot \cos(\Delta\alpha + \Delta\alpha'),$$

$$\text{V.} \quad \cos SS''' = 1 - 2\cos^2 x \cdot \sin^2 \frac{\Delta s + \Delta s' + \Delta s''}{2} = \sin y \cdot \sin z'' + \cos y \cdot \cos z'' \cdot \cos(\Delta\alpha + \Delta\alpha' + \Delta\alpha'').$$

Daß diese Art der Polhöhenbestimmung wegen der enormen rechnerischen Schwierigkeiten, welche die fünf Gleichungen der Auflösung darbieten, praktisch nicht in Frage kommen kann, sieht man auf den ersten Blick.

Auf welche Art und Weise im Laufe der Zeiten die Ortsbestimmung in der praktischen Astronomie und Nautik vorgenommen und jeweils rechnerisch zweckmäßig behandelt wurde, zusammenhängend darzustellen, soll Gegenstand einer künftigen speziellen Studie sein.