1) Steigerung der Frequenz der Respirationsbewegungen hat keine wesentliche Steigerung der Wärmeproduction zur Folge.

2) Das von Vierordt aus seinen Versuchen über die Abhängigkeit der Kohlensäureausscheidung von der Frequenz der Respirationsbewegungen abstrahirte Gesetz bezieht sich nur auf den respiratorischen Gaswechsel; es gilt nur für kurze Zeiträume und hat keine Gültigkeit in Betreff der Kohlensäureproduction.

3) Die Thatsache der Regulirung der Wärmeproduction nach dem Wärmeverluste lässt sich nicht in der Weise erklären, dass man als nächste Wirkung verstärkter Wärmeentziehung von der äusseren Haut aus eine Steigerung der Respirationsbewegungen voraussetzt und aus dieser die Steigerung der Wärmeproduction ableitet.

Beiträge zur Haemodynamik.

Von

Dr. Heinrich Jacobson.

(Hierzu Taf. XVII.)

IV. Ueber die Bewegung einer Flüssigkeit in ungleich weiten Röhren.

Die Veränderungen des Seitendrucks bei plötzlicher Verengerung oder Erweiterung der Strombahn sind häufig von Physiologen und Aerzten discutirt, aber bisher nicht durch genaue Beobachtungen festgestellt worden. Volkmann hat zwar in seiner Haemodynamik eine Reihe von Versuchen darüber mitgetheilt. Dieselben lassen jedoch weder die Erscheinung in ihrer einfachsten Form erkennen, da sie sich auf eine Verbindung dreier Bahnen von verschiedenem Durchmesser beziehen, noch enthalten sie Messungen des Drucks gerade an den Stellen, an denen die unstetigen Geschwindigkeitsänderungen eintreten. Welche Verhältnisse hier stattfinden, glaubte Volkmann aus seinen an entfernteren Querschnitten gefundenen Druckwerthen nach der Gerstner'schen Formel berechnen zu können, und gelangte so zu dem Resultate, dass an der Uebergangsstelle von einer engeren in eine weitere Röhre der Druck am Ende der ersteren geringer sei als am Anfang der letzteren: eine Erscheinung, die er mit dem wohl nicht glücklich gewählten Namen: „negative Stauung" bezeichnete und zur Erklärung der auffallenden Versuche benutzte, die an der Arteria cruralis einen höheren Druck als an der Carotis ergeben hatten. Da ich bereits früher nachgewiesen habe, dass die von Gerstner aufgestellte Formel, die auch in die neuesten Lehrbücher der Physiologie Eingang gefunden, unrichtig ist, dürfte es überflüssig sein, sowohl auf Volkmann's Ableitungen aus derselben als auf die Polemik mit Donders näher einzugehen, der von denselben irrthümlichen Voraussetzungen ausging und keine neuen Beobachtungen hinzufügte.

Eine exacte Untersuchung des Gegenstandes ist, abgesehen von ihrer Wichtigkeit für die Mechanik des Kreislaufes, auch von pathologischem Interesse, wie die neuesten Arbeiten über die Ursache der Geräusche in den Arterien und Venen gezeigt haben.

Betrachten wir zuvörderst die plötzliche Verengerung der Strombahn. Die Flüssigkeit strömt aus einem Reservoir, in dem constantes Niveau erhalten wird, durch eine weitere Messingröhre, deren Länge 967,2 Mm., Durchmesser 5,108 Mm. in eine engere, deren Länge 620,4 Mm., Durchmesser 2,866 Mm. Um den Druck in unmittelbarster Nähe vor und hinter der Verengerung an mehreren Querschnitten messen zu können, fügte ich die beiden Röhren in folgender Art aneinander.

Auf jedes der beiden zu vereinigenden Enden ist ein Conus *ABCD* (Fig. I.) mit dem Stücke *EFGH* aufgelöthet, auf ihn ein zweiter Conus *IKLM* aufgeschliffen und auf diesen wieder das äussere Stück *N*, das den vorstehenden Ansatz *O* mit den 3 Schrauben α, β, γ (s. Fig. III.) trägt. Die drei Stücke sind von beiden Seiten genau abgedreht und ausserdem noch die untere Seite, die auf der entsprechenden des anderen Röhrenendes wasserdicht schliessen muss, plan geschliffen. In der oberen Hälfte des Conus *ABCD* sind 4 verticale, in der des Conus *IKLM* 4 horizontale Bohrkanäle angebracht, die mit dem in *P* befindlichen Manometer in Communication gesetzt werden können. Die Figur zeigt einen Versuch, in welchem der Druck in dem der Verengerung der Bahn zunächst liegenden Querschnitte bestimmt wird. Kanal (1) ist von derselben auf beiden Seiten nur 2,7 Mm. entfernt (eine grössere Annäherung ist mechanisch kaum erreichbar), während die übrigen Kanäle 2, 3, 4 von 1 und von einander um das Doppelte, 5,4 Mm. abstehen. Sie alle münden mit sehr engen Oeffnungen in die Röhre.

Das Stück *R* (Fig. II.) passt genau auf das Viereck *EFGH* und ist mit zwei Schrauben $\delta\delta$ an *N* befestigt. Dadurch ist es möglich, den mittleren Conus zu drehen und bei jeder Viertel-Drehung einen seiner Kanäle mit dem zugehörigen im Conus *ABCD* in Verbindung zu bringen. Dies geschieht, da eine Handhabe des beschränkten Raumes wegen nicht zulässig ist, mittels eines flachen Stahls mit 2 Zapfen, der als Schlüssel dient und in die Löcher (x) (Fig. III.) eingreift.

Ausserdem wurde der Druck in unmittelbarer Nähe der Einflussöffnung aus dem Reservoir und an mehreren Stellen im Verlaufe beider Röhren gemessen, deren Dimensionen ich übrigens — wie sich aus einem Vergleiche mit meinen früheren Versuchen ergiebt — so gewählt hatte, dass sie — wenn überhaupt Poiseuille's Gesetz auch für diesen Fall gelten sollte — bei den mässigen Druckhöhen und Temperaturen, die ich anwandte, innerhalb der Grenze desselben liegen mussten. Die übrige Anordnung des Apparats war dieselbe wie in Beitrag I. und III.

Die Druckcurven, wie sie mir zahlreiche Versuche übereinstimmend ergaben, zeigt Fig. IV. Auf der Abscissenaxe sind die Entfernungen von der Einflussöffnung, in denen die Manometerstände gemessen wurden, mit a, b . . . m bezeichnet. In der Mitte zwischen e und f befindet sich die Uebergangsstelle aus der engeren in die weitere Röhre; e entspricht einer 2,7 Mm. vor, f einer 18 Mm. hinter derselben liegenden Stelle; a liegt 1,5 Mm. hinter der Einflussöffnung am Reservoir. —

Die Druckcurve innerhalb des Intervalls, das sich 18 Mm. vor und eben so weit hinter die Uebergangsstelle erstreckt, also ef einschliesst, zeigt Fig. V. Wie in Fig. IV. sind hier beispielsweise einige Beobachtungen bei verschiedenen Druckhöhen im Reservoir dargestellt. Die Ordinaten geben die Drucke an 8 Querschnitten, die gleich weit von einander abstehen und wie die Kanäle (Fig. I.), die zu ihnen führen, mit 1) bis 4) bezeichnet sind. e und f sind die der Druckcurve (Fig. IV.) entsprechenden Stellen.

Vor der Verengerung der Bahn bleibt — wie man sieht — in diesem Intervall der Druck constant. Dann tritt plötzlich an der Uebergangsstelle eine sehr bedeutende Erniedrigung desselben ein, die an der zunächst liegenden Strecke hinter derselben sich noch in geringem Grade markirt.

Die speciellere Untersuchung dieser Verhältnisse und die Mittheilung der ihnen zu Grunde liegenden Beobachtungen lasse ich der Uebersichtlichkeit wegen später folgen. Es sei hier vorläufig nur als wesentlichstes Resultat derselben erwähnt, dass mit Ausnahme des beschriebenen Intervalls Poiseuille's Gesetz für die Strömung in beiden Röhren gilt.

Gehen wir nun zu dem zweiten Falle, einer plötzlichen Erweiterung der Strombahn über, indem wir die engere Röhre mit dem Reservoir in Verbindung setzen, also die Strömung von m nach a gehen lassen, so zeigt sich folgende auffallende Erscheinung: Innerhalb des ganzen Verlaufes der weiteren Röhre ist jetzt — wenn überhaupt ein positiver Druck, keine Aspiration vorhanden ist — derselbe so gering, dass er innerhalb der Wanddicke der Röhre liegt, also kaum 2 Mm. beträgt. Ich konnte die auf derselben befindlichen Manometer von der Erweiterungsstelle an bis zum Ende entfernen, ohne dass ein Tropfen

Flüssigkeit aus den Oeffnungen emporstieg, und zwar bei Anwendung der grössten Niveauhöhen, die der Apparat zuliess (c. 900 Mm.), ja selbst noch bei Verengung der Ausflussöffnung um mehr als ein Drittheil ihres Durchmessers. — In der engeren Röhre ist die Druckcurve nahezu eine gerade Linie, die so gegen die Axe derselben geneigt ist, als ob der Ausfluss aus ihr in die Luft stattfände, keine weitere Röhre mehr vorhanden wäre. Der Druck ist also schon in dem obigen, jetzt vor der Uebergangsstelle liegenden Intervall (*f*) 4 bis 1 (Fg. V.) nahe = 0. — Die Geschwindigkeit der Strömung ist in diesem Falle erheblich geringer als bei Verengerung der Bahn; aber der Strahl hat nicht etwa das trübe Aussehen wie bei Ansatzröhren, sondern bildet eine klare, durchsichtige Parabel, und der Ausfluss geschieht continuirlich, nicht stossweise.

Die Erscheinung ist also in diesem Falle eine durchaus andere, als sie Volkmann unter dem Namen „negative Stauung" beschrieben, und Donders und Fick a priori angenommen haben. Der Schluss, den sie aus dem Principe der Erhaltung der lebendigen Kraft gezogen: dass eine Verminderung der Geschwindigkeit von einer Druckerhöhung begleitet sein müsse, ist nur da gerechtfertigt, wo ausser dem durch die innere Reibung der Flüssigkeit bedingten kein anderer Verlust an lebendiger Kraft stattfindet, wie z. B. bei allmähliger Erweiterung der Strombahn. Ein solcher ist aber immer vorhanden, wenn — wie in unserem Falle — eine plötzliche Umsetzung einer grösseren Geschwindigkeit in eine geringere stattfindet.

Eine genauere Analyse der beiden hier beschriebenen Vorgänge setzt die Kenntniss der Theorie voraus, die Neumann[1]) für die Strömung in einer gleich weiten Bahn entwickelt hat. Wenn ich hier eine Ableitung der Relation zwischen der Niveauhöhe, der mittleren Ausflussgeschwindigkeit und dem Druck am Anfang der Röhre in einer anderen Form vorausschicke, um aus ihr weitere Folgerungen für die vorliegenden Fälle zu

1) In Reichert's und du Bois-Reymond's Archiv, 1861, S. 320 von mir mitgetheilt.

ziehen, so geschieht es, weil dieselbe mir einen leichteren Uebergang zu den in der Haemodynamik und Hydraulik gebräuchlichen Vorstellungen zu gestatten und daher dem allgemeinen Verständniss zugänglicher zu sein scheint.

Es sei

h die constante Druckhöhe im Reservoir,

ϱ der Röhrenhalbmesser,

r der variable Radius eines concentrischen Wassercylinders im Inneren der Röhre,

u die Geschwindigkeit eines Wassertheilchens auf diesem Cylinder,

c die mittlere Geschwindigkeit im Röhrenquerschnitte,

l die Länge der Röhre,

η der Reibungscoëfficient,

p° und p die Drucküberschüsse über den Atmosphären-Druck an der Einmündungsstelle und an einer beliebigen Stelle der Röhre,

μ die im Zeitelement in Bewegung befindliche Masse,

T die lebendige Kraft im Röhrenquerschnitt,

D die Dichtigkeit des Wassers.

Dann ist nach Poiseuille's Gesetz

$$1)\ p^\circ = \frac{8\,\eta l c}{\varrho^2} \qquad 2)\ u = 2c\left(1 - \frac{r^2}{\varrho^2}\right)$$

und hieraus 3) $T = \frac{1}{2}\int u^2 \partial\mu = c^2\mu$.

Es ist nun nach einem allgemeinen Principe der Mechanik „der in einem Zeitelemente in jedem Theile der bewegten Flüssigkeitsmasse entstehende Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft gleich der in derselben Zeit geleisteten Arbeit, welche erstens von den auf die freie Oberfläche dieser Masse wirkenden Druckkräften, zweitens von den äusseren Kräften (hier der Schwere), drittens von den inneren Kräften (hier der Reibung) herrührt."

Ist ein stationärer Zustand eingetreten, so kann man bekanntlich den Gewinn oder Verlust an lebendiger Kraft der betrachteten Masse gleichsetzen dem Unterschiede der an ihren beiden freien Grenzschichten thätigen lebendigen Kräfte. Nennt man dieselben T und T°, P und P° die daselbst stattfindenden Drucke, A und I die Arbeit der äusseren und inneren Kräfte, so ist demnach

$$4)\quad T - T^{\circ} = \frac{P^{\circ} - P}{D}\mu + A + I.$$

Man betrachte zuerst den Theil der Wassermasse, der vom Niveau des Reservoirs und einem beliebigen Querschnitt der darin einmündenden, horizontalen Röhre begrenzt ist. Dann ist T° verschwindend klein, $A = \mu g h$, P° = Atmosphärendruck, $P = p + P^{\circ}$, also geht 4) über in

$$5)\quad T = \frac{-p\mu}{D} + \mu g h + I.$$

Ferner betrachte man den Theil, der von der Einmündungsstelle bis zu demselben Querschnitt der Röhre heranreicht, so wird in 4) $T = T^{\circ}$, $P^{\circ} - P = p^{\circ} - p$, $A = 0$ zu setzen sein und I denselben Werth haben wie in 5), weil die inneren Kräfte nur in der Röhre wirken; folglich

$$6)\quad 0 = \frac{p^{\circ} - p}{D}\mu + I.$$

Zieht man hieraus den Werth von I und substituirt ihn in 5), so entsteht

$$\frac{T}{\mu g} = h - \frac{p^{\circ}}{gD}$$

und wenn $h_{\circ}$ den Manometerstand an der Einmündungsstelle der Röhre bezeichnet, d. h. also,

$$7)\quad \frac{p^{\circ}}{gD} = h_{\circ}$$

gesetzt wird, so folgt:

$$8)\quad \frac{T}{\mu g} = h - h_{\circ}.$$

Diese Relation stimmt mit der von Neumann entwickelten vollständig überein. Substituirt man nämlich in dieselbe die Werthe aus 1) und 3), so wird

$$h = c^2 + \frac{8\,\eta l}{D\varrho^2}c.$$

Es scheint mir nicht überflüssig, diese einfache Gleichung noch in Worten auszusprechen, da sich in der neuesten Arbeit über diesen Gegenstand von Hagenbach[1]) eine irrige Auffassung derselben vorfindet. Sie lautet, wenn man h_0 Widerstandshöhe nennen will:

„Die Differenz zwischen Druckhöhe und Widerstandshöhe ist gleich dem Quotienten aus der lebendigen Kraft durch das Gewicht der in Bewegung befindlichen Masse."

Hieraus geht hervor, dass es ganz der Theorie gemäss ist, bei der Bestimmung von η aus der Formel 1) nicht die Druckhöhe, sondern die um $\frac{T}{\mu g}$ verminderte Druckhöhe, d. h. die Widerstandshöhe einzuführen. Es ist daher zunächst nicht auffallend, wenn Hagenbach aus Poiseuille's Versuchen abweichende Werthe für η gefunden hat, nachdem er die Druckhöhe (h) selbst in 1) eingeführt. Er hat aber ferner ohne weitere Begründung $h_0 = h - h'$ gesetzt und h' Geschwindigkeitshöhe genannt, welche er dadurch bestimmt, dass er die zu h' zugehörige Geschwindigkeit $\sqrt{2gh'}$ im Querschnitt gleichmässig vertheilt und die dieser Vertheilung entsprechende lebendige Kraft gleich der wirklich vorhandenen setzt. Dass er mit dieser Grösse h' unser im obigen Satze enthaltenes $\frac{T}{\mu g}$ nicht erhält ist klar. Er setzt nämlich die in der Secunde in Bewegung befindliche Masse, der Geschwindigkeitshöhe entsprechend, $= D\varrho^2\pi\sqrt{2gh'}$, während sie wirklich $D\varrho^2\pi c$ ist, was er bei allen seinen übrigen Formeln stillschweigend voraussetzt. In Folge dessen werden alle seine Formeln fehlerhaft, und es ist daher ferner nicht wunderbar, wenn auch nach Einführung von h' keine Uebereinstimmung mit Poiseuille's Versuchen zu erzielen war. — Er sagt S. 403:

„Die Geschwindigkeitshöhe sei h'; sie kann in der Zeiteinheit einer Flüssigkeitsmenge $D\varrho^2\pi\sqrt{2gh'}$ die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh'}$ ertheilen, und somit ist die lebendige Kraft, welche die Höhe h' liefern kann, $= D\varrho^2\pi\sqrt{2gh'^3}$."

Dieser Satz müsste doch lauten: „Wenn die Geschwindig-

---

1) Poggendorff's Annalen, 1860.

keitshöhe jener Masse die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh'}$ ertheilt, so hat die lebendige Kraft den angegebenen Werth"; denn mit derselben Geschwindigkeit würde z. B. an der contrahirten Stelle die Masse $\gamma D\varrho^2\pi\sqrt{2gh'}$ in Bewegung gesetzt werden, wenn γ der Contractions-Coëfficient ist, und dann wäre doch die lebendige Kraft eine andere. Berücksichtigt man dies, so fällt die Schlussfolgerung S. 407, wo es heisst:

„Die Menge der lebendigen Kraft, welche die Druckhöhe h' bei dem Querschnitte $\varrho^2\pi$ liefert, hat einen ganz bestimmten Werth, ohne von der mittleren Geschwindigkeit abzuhängen."

Dies würde nur in dem in der Wirklichkeit niemals eintretenden Falle stattfinden, wo das Torricelli'sche Gesetz genau richtig ist, und es ist demnach die an dieser Stelle von Hagenbach gegebene Correctur der Hagen'schen Formel unbegründet. Hätte er seine Hypothese richtig verfolgt, „dass man die seiner Geschwindigkeitshöhe entsprechende Geschwindigkeit gleichmässig auf dem Querschnitte vertheilen kann", d. h. die wirklich in Bewegung befindliche Masse zur Berechnung der lebendigen Kraft genommen, so hätte sich in der Formel S. 404 zur Bestimmung der Ausflussquantitäten für kurze Ansatzröhren nicht $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, sondern $\frac{1}{\sqrt{2}}$ als Ausflusscoefficient ergeben, der bekanntlich nur für den Ausfluss aus Oeffnungen in dünner Wand gilt. Dass $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}79$ den bisher gefundenen Coefficienten ziemlich die Mitte hält, ist also ein Zufall.

Kehren wir nun zu unserer Gleichung 6) zurück, so sehen wir, dass sie zur Bestimmung des Druckes p^0 führt, wie ihn Poiseuille's Gesetz lehrt. Man darf sie nur statt auf den ganzen Querschnitt auf einen beliebigen, ringförmigen Theil desselben beziehen. Nennt man nämlich $\partial\mu$ die durch die Ringfläche gehende Wassermasse und setzt hierfür die Arbeit der inneren Kräfte ∂I, so geht 6) über in

$$9)\quad \frac{p_0 - p}{D}\partial\mu + \partial I = 0,$$

und diese Gleichung auf die ganze Röhrenlänge bis $p = 0$ ausgedehnt und für ∂I seinen bekannten Werth

$$10)\quad \partial I = \frac{\eta}{D}\,\frac{1}{r}\,\frac{d\dfrac{r\partial u}{\partial r}}{\partial r}\, l\partial\mu$$

substituirt, giebt die bekannte Differential-Gleichung:

$$\frac{-p_o}{l} = \frac{\eta}{r}\,\frac{d\dfrac{r\partial u}{\partial r}}{\partial r}$$

die durch Integration zum Poiseuille'schen Gesetz führt.

Wendet man Gleichung 10) hingegen nur für eine Strecke (x) der Röhre an, so giebt sie

$$\frac{-p_o - p}{x} = \frac{\eta}{r}\,\frac{d\dfrac{r\partial u}{\partial r}}{\partial r} = \frac{-p_o}{l} \text{ oder}$$

$$11)\quad p = \frac{p_o\,(l-x)}{l}.$$

I. Verengerung der Strombahn.

Der Uebergang von der soeben entwickelten Theorie zu der für den vorliegenden Fall bietet keine Schwierigkeiten dar. Die l, c ϱ etc. entsprechenden Grössen für die zweite, engere Röhre nennen wir l', c', ϱ' etc.

Da die Gleichungen 5) und 6) für jedes Stück der ersten Röhre gelten, so bleiben sie auch jetzt bis nahe an die Vereinigungsstelle für den ganzen Verlauf der weiteren Röhre bestehen, wenn man nur für p den Druck setzt, der an ihrem Ende stattfindet. Dieser Druck, der oben bei nur **einer** Röhre $= 0$ war, sei $= p_1$, so ist

$$T = \frac{-p_1\mu}{D} + \mu g h + I,$$

$$0 = \frac{(p_o - p_1)\mu}{D} + I,$$

woraus nach Elimination von I, wodurch auch p_1 herausgeht, und nach Einführung des Manometerstandes wie in 7), wieder die frühere Grundgleichung entsteht:

$$\text{I.)}\quad \frac{T}{\mu g} = h - h_o.$$

Auf die zweite der vorstehenden Gleichungen kann man ein ähnliches Verfahren anwenden, wie unter 9) und 10), wenn man nur überall statt p_o $p_o - p_1$ substituirt. Dann wird

$$\frac{-p_0 - p_1}{l} = \frac{\eta}{r} \frac{d\frac{r\partial u}{\partial r}}{\partial r}$$

und durch Integration

$$p_0 - p_1 = \frac{8\,\eta c l}{\rho^2}$$

oder durch Einführung des Manometerstandes $h^1 = \frac{p_1}{\mu D}$

$$\text{II.)}\quad h_0 - h_1 = \frac{8\,\eta c l}{\rho^2 g D}.$$

Hierzu kommt die Bedingung

$$\text{III.)}\quad \rho^2 \pi c = \rho^{1^2} \pi c^1.$$

Betrachten wir nun in der engeren Röhre zunächst das sehr kleine Stück von ihrem Beginne bis etwa zu derjenigen Stelle, an welcher der Strahl contrahirt ist. Da hier Wirbel entstehen, so gilt für diese Strecke Poiseuille's Gesetz nicht; aber sie ist so kurz, dass — selbst wenn ein Reibungswiderstand auf derselben vorhanden ist — er vernachlässigt werden kann. Bezeichnet man daher mit T_c^1 die lebendige Kraft an der contrahirten Stelle, den an derselben stattfindenden Druck mit p_c^1, so giebt die Anwendung der Gleichung 4) auf diese kurze Strecke, weil $A = 0$, $I = 0$ ist,

$$T_c^1 - T = \frac{(p_1 - p_c^1}{D}$$

$$\text{oder}\quad \frac{p_c^1}{gD} = h_c^1 \text{ gesetzt}$$

$$\text{IV.)}\quad \frac{T_c^1 - T}{g\mu} = h_1 - h_c^1.$$

Um T_c^1 zu berechnen, muss man in Erwägung ziehn, dass, wie gering die Contraction auch sein mag (sie verringert sich bekanntlich, wenn das Wasser mit Geschwindigkeit vor die Verengerung tritt) ein Anlegen an die Röhrenwand *nicht statt-*

findet, mithin auch eine von der Mitte des Querschnitts nach Null hin abnehmende Geschwindigkeit nicht vorausgesetzt werden kann. Man wird daher von der Wahrheit nicht weit abweichen, wenn man im contrahirten Querschnitt eine gleichförmige Geschwindigkeit c_1 annimmt und daher

$$T^1_c = \frac{c_1^2 \mu}{2}$$

setzt; da nun, wenn γ^1 der Contractions-Coefficient —

$$\gamma^1 c_1 \varrho^{12} \pi = c^1 \varrho^{12} \pi,$$

also $c_1 = \frac{c^1}{\gamma^1}$, so

$$\text{V.)} \quad T^1_c = \frac{c^{1^2} \mu}{2 \gamma^{1^2}}$$

Ehe die Geschwindigkeit wieder in die Poiseuille's Gesetz gemässe c^1 übergeht, welche analog mit 3) die lebendige Kraft

$$\text{VI.)} \quad T^1 = c^{1^2} \mu$$

giebt, findet noch einmal, wie die Druckcurve (Fig. V.) zeigt, auf eine sehr kurze Strecke eine Erniedrigung des Drucks — wenn auch in weit geringerem Grade — statt, so dass, wenn p^1_0 den Druck, $\frac{p^1_0}{gD} = h^1_0$ die Manometerhöhe an der Stelle bezeichnet, von welcher ab Poiseuille's Gesetz wieder gilt, die mit IV.) analoge Gleichung

$$\text{VII.)} \quad \frac{T^1 - T^1_c}{\mu g} = h^1_c - h^1_0$$

auf dieser Strecke gilt. Von hier aus bleibt T^1 auf der weiteren Länge constant, und man erhält wieder durch Anwendung der Gleichung 6) auf die ganze zweite Röhre wie oben:

$$0 = \frac{p^1_0}{D} \mu + I_T$$

$$\text{und VIII.)} \quad \frac{p^1_0}{l^1} = \frac{8 \eta c^1}{\varrho^{1^2}}$$

$$\text{oder } h^1_0 = \frac{8 \eta c^1 l^1}{\varrho^{1^2} g D} \text{ etc.}$$

Prüfen wir nun, ob die bisher aus der Anschauung der Druckcurve abgeleiteten theoretischen Resultate durch die Erfahrung bestätigt werden.

1) Aus Tab. I. folgt:

„dass die Differenz zwischen dem Druck an einem beliebigen Querschnitt und der Ausflussöffnung in beiden Strombahnen mit Ausnahme der nächsten Umgebung der Uebergangsstelle eine lineare Function der Entfernung ist.“

Für die weitere Röhre ist der Druck an der Ausflussöffnung, d. h. ihrer Uebergangsstelle in die engere (unserer früheren Bezeichnung gemäss h_1) 2 Mm. vor derselben gemessen. Die Manometerstände im Verlauf der beiden Röhren werde ich H_1, H_{11} und H^1, H^{11} nennen, wo die unteren Indices immer der weiteren, die oberen der engeren angehören. Entsprechend nenne ich die Abstände der Manometer von den resp. Ausflussöffnungen L_1 und L^1; sind also l_1 und l^1 die Röhrenlänge, so ist für einen um x_1 von der Einflussöffnung aus dem Reservoir entfernten Querschnitt $L_1 = l_1 - x_1$ und analog für einen um x^1 von der Einflussöffnung aus der weiteren Röhre, d. h. der Uebergangsstelle entfernten Querschnitt der engeren Röhre $L^1 = l^1 - x^1$. — Wie in der Theorie bleibt h_0 überall der unmittelbar an der Einflussstelle aus dem Druckgefäss gemessene Manometerstand, über dessen Bestimmung Beitrag III. zu vergleichen ist; h_0^1 entspricht der Stelle, in deren Nähe die Druckcurve für die engere Röhre eine gerade Linie zu werden anfängt, die also am Ende des (Fig. V.) beschriebenen Intervalls, 18 Mm. hinter der Verengerung liegt. Für sie ist somit der Abstand von der Ausflussöffnung $L_0^1 = 620{,}4 - 18 = 602{,}4$ Mm.

Tab. I.

$L_1 = 726{,}6$ Mm.	485,9	2	$L^1 = 467{,}2$	351,2	467,2	272,8	620,4	467,2
H_1	H_{11}	h_1	H^1	H^{11}	H^1	H^{111}	h_c^1	H^1
388,1	378,1	356,7	146,6	109,7	224,5	132,5	247,1	186,5
362,7	353	342,7	169,6	125,4	210	123,8	235	178,5
347	337,8	318	195,5	142,9	203	120	223	170,5
332,7	323,1	304,2	222,2	163,2	196	116	213,1	164
280,2	271,4	254,4			169,5	101	198,1	153,5
314	303,2	285,3					186,1	144,4
295	286,2	268,7					171,5	135
242,8	235,5	220						
207,8	201,4	187,5						
191,7	184,8	170,9						

Wir erhalten also:

$$\underbrace{\frac{L_{I}}{L_{II}} = 1{,}49} \qquad \frac{H_{I} - h_{I}}{H_{II} - h_{I}} = \begin{cases} 1{,}46 \\ 1{,}49 \\ 1{,}47 \\ 1{,}51 \\ 1{,}51 \\ 1{,}49 \\ 1{,}50 \\ 1{,}47 \\ 1{,}50 \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{L^{I}}{L^{II}} = 1{,}33} \qquad \frac{H^{I}}{H^{II}} = \begin{cases} 1{,}33 \\ 1{,}35 \\ 1{,}35 \\ 1{,}37 \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{L^{I}}{L^{III}} = 1{,}71} \qquad \frac{H^{I}}{H^{III}} = \begin{cases} 1{,}69 \\ 1{,}69 \\ 1{,}69 \\ 1{,}69 \\ 1{,}68 \end{cases}$$

$$\underbrace{\frac{L_{0}^{I}}{L^{I}} = 1{,}29} \qquad \frac{h_{0}^{I}}{H^{I}} = \begin{cases} 1{,}32 \\ 1{,}31 \\ 1{,}30 \\ 1{,}30 \\ 1{,}30 \\ 1{,}29 \\ 1{,}27 \end{cases}$$

Die Beobachtungen ergeben eine Abweichung, die den kaum zu vermeidenden Schwankungen in den Manometern zuzuschreiben ist.

2) Aus Tab. II. folgt:

„dass in beiden Strombahnen mit Ausnahme der nächsten Umgebung der Uebergangsstelle Poiseuille's Gesetz gilt.“

Wie meine früheren Versuche[1]) lehren, kann auch ausserhalb der Grenze dieses Gesetzes der Druck eine lineare Function der Entfernung sein. Es ist daher noch der Beweis für die Gültigkeit desselben zu liefern.

Um bei den späteren Betrachtungen Wiederholungen zu vermeiden, habe ich in diese Tabelle noch die Niveauhöhe (h) und die Manometerstände innerhalb des 18 Mm. langen Intervalls hinter der Uebergangsstelle h_c^{I}, h_c^{II}, h_c^{III} aufgenommen. h_c^{I} entspricht (f) in Fig. V., d. h. der Stelle der plötzlichen, bedeutenden Druckerniedrigung, an der ich oben eine Contraction des Strahls angenommen habe; die 5,7 Mm. von einander entfernten h_c^{II}, h_c^{III} (in der Fig. 2, 3) zeigen eine zwar weit geringere, aber noch nicht dem Gesetz gemässe Verminderung des Druckes. Dieses gilt erst von h_0^{I} (4) an. — c^{I} ist die mittlere Ausflussgeschwindigkeit aus der engeren Röhre.

Der Druck innerhalb des gleich langen Intervalls vor der Verengerung ist, da die Differenz zwischen den hier gemessenen 4 Manometerständen nicht mehr als $^1/_{300}$ — $^1/_{200}$ betrug, als constant anzusehen, und daher nur der eine Werth (h) hier angegeben.

---

1) Reichert's u. du Bois-Reymond's Archiv 1860.

Tab. II.

h	h_0	h_1	h_c^1	h_c^{11}	h_c^{111}	h_0^1	c^1
327,8	318,5	285,3	240,7	237	232,4	227,8	852,3 Mm.
309,3	301	268,7	228,6	225	219,4	216,8	812,5
292,3	284,4	254,8	215,8	213	209,3	205,7	778,7
278,4	270,6	241,9	207,5	204,8	200,2	196,5	750,7
258,2	251,7	224,4	194,6	190,9	186,8	182,6	713,6
240,6	234,6	208,7	181,7	178	173,4	171,6	688
220,8	216,2	192,1	167,9	164,2	161,3	158,1	629
216,5	211,6	187,5	164,2	161,4	158,7	155,9	604,7
196,7	194,1	170,9	152,2	149	145,8	143,9	558,6
176,7	173,8	153,4	137,5	134,7	131,9	130,5	510,7
168,1	165,7	146	131,9	129,2	126,4	124,6	497,2
153,8	150,7	132,7	119,9	118,1	115,3	113,5	456,8
138,6	136,9	120,2	109,8	108	106,1	106,1	421,4
409,4	397,2	356,7	292,8	289,7	284,1	278,4	
382,2	371,8	332,7	273	270,6	264,6	259,1	
365,6	355,7	318	263,8	261	253,3	249,9	

Soll Poiseuille's Gesetz in beiden Strombahnen gelten, so muss nach Gleichung II., III. und VIII. sein:

$$\frac{h_0 - h_1}{h_0^1} = \frac{\varrho^{1^4} l}{\varrho^4 l^1} = 0{,}1592,$$

da für l^1 nicht die ganze Länge der engeren Röhre, sondern das h_0^1 entsprechende $L_0^1 = 602{,}4$ Mm. zu setzen ist.

In Uebereinstimmung damit erhalte ich aus Tab. II. sowie aus meinen übrigen Versuchen, deren vollständige Mittheilung zu viel Raum erfordern würde:

$$\frac{h_0 - h_1}{h_0^1} = \left\{\begin{array}{l} 0{,}1494 \\ 0{,}1439 \\ 0{,}1459 \\ 0{,}1469 \\ 0{,}1510 \\ 0{,}1522 \\ 0{,}1544 \\ 0{,}1608 \\ 0{,}1560 \\ 0{,}1577 \\ 0{,}1592 \\ 0{,}1572 \\ 0{,}1558 \\ 0{,}1629 \\ 0{,}1522 \\ 0{,}1584 \\ 0{,}1457 \\ 0{,}1597 \\ 0{,}1599 \\ 0{,}1509 \\ 0{,}1565 \\ 0{,}1501 \end{array}\right.$$

Zum Vergleich mit Poiseuille's und meinen Werfhen (Beitrag I. u. II.) habe ich überdies die Reibungs-Constante aus einer Reihe von Beobachtungen berechnet. Im Einklang mit denselben ergab sich bei einer Temperatur von 22,2—22,8°C.

aus der weiteren Röhre:	aus der engeren Röhre:
$\eta = 0{,}0001204$ Mm. g	$\eta = 0{,}0001098$ Mm. g
1159	1089
1147	1068
1149	1059
1150	1073
$\eta = 0{,}0001046$ Mm. g	$\eta = 0{,}0001139$ Mm. g
1067	1137
1018	1126
1023	1116
1007	1091
1009	1063
1023	1071

3) Tab. II. spricht ferner für die oben angenommenen theoretischen Voraussetzungen über die Vorgänge an der Uebergangsstelle selbst.

Aus den Gleichungen I. und IV. folgt nämlich:

$$h - (h_0 - h_1) - h_c^1 = \frac{c^{1^2}}{2g\gamma^2}.$$

Berechnet man den Contractions-Coefficienten γ an der Uebergangsstelle aus Tab. II., so findet man:

$\gamma = 0{,}83$
0,83
0,81
0,82
0,84
0,85
0,83
0,81
0,85
0,84
0,86
0,83

Die Beobachtungen von h_c^1 führen also zu einem nahezu constanten Contractions-Coefficienten, der, übereinstimmend mit andern hydraulischen Erfahrungen, grösser ist als der von Newton für Ausfluss durch Oeffnungen in dünner Wand gefundene Coefficient (0,7), da hier das Wasser schon mit Geschwindigkeit vor der Stelle der Verengerung anlangt.

Endlich ist nach den Gleichungen I, IV, VII:

$$\frac{c^{1^2}}{g} = h - (h_0 - h_1) - h_0^1.$$

Die Versuche geben einen zwar nicht ganz constanten, aber so wenig von 1 abweichenden Coefficienten, dass die Differenz innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler liegt.

II. Erweiterung der Strombahn.

Es liessen sich leicht die analogen Gleichungen auch für diesen Fall ableiten, wenn meine oben beschriebenen Versuche nicht zeigten, dass hier die der Uebergangsstelle zunächst liegenden Drucke (früher h_1 und h_0^1) schon $= 0$ sind, was auf keine Weise aus den nach Poiseuille's Gesetz gebildeten Formeln abgeleitet werden kann. Es bliebe demnach nichts weiter übrig, als anzunehmen, dass die Bewegung der Flüssigkeit in der zweiten weiteren Röhre nur unter dem Einflusse der am Ende der ersten erlangten Geschwindigkeit wie in freier Luft stattfinde, und dass die zweite Röhre weiter keinen Effect hervorbringe als den Strahl horizontal zu halten.

Hiergegen sprechen aber wiederum die Beobachtungen in Tab. IV., bei denen ich die Ausflussöffnung verengte. Sie zeigen, dass der Druck stets am Ende der engeren Röhre grösser ist als am Anfang der weiteren.

Es tritt hier also die Nothwendigkeit einer Abänderung des Poiseuille'schen Gesetzes ein, was auch schon aus der Veränderung der Druckcurve hervorgeht, die bei Verengerung der Ausflussöffnung keine gerade Linie bleibt.

Der Verlauf derselben ist in diesem Falle nämlich, wie Tab. IV. zeigt, folgender: Hinter der Erweiterung der Strombahn tritt ein Minimum ein, dem ein Maximum folgt, von welchem aus die Curve nach 0 hin abnimmt. Mit steigender Niveauhöhe im Reservoir sowohl als mit steigender Verengerung der Ausflussöffnung kann man Minimum und Maximum gleichzeitig der Uebergangsstelle der beiden Bahnen näher bringen.

Ob vielleicht schliesslich bei der gehörigen Röhrenlänge diese Curve wieder in eine gerade Linie übergeht, muss vorläufig dahin gestellt bleiben. Wahrscheinlich wäre auch ohne Verengerung der Ausflussöffnung bei entsprechender Verlängerung der weiteren Röhre, also Erhöhung des Reibungswiderstandes ein positiver Druck in derselben erzeugt worden, da aus Tab. IV. hervorgeht, dass am Anfang der weiteren Röhre der Druck unter 0 sinken muss, sobald man die Ausflussöffnung nicht verengt.

Eine Erklärung dieser eigenthümlichen Verhältnisse erfordert eine weitere Ausdehnung der Versuche, auf die ich vorläufig keine Aussicht habe, da mir die erforderlichen Apparate nicht zu Gebote stehen. Ich beschränke mich daher darauf, meine Beobachtungen hier soweit mitzutheilen, dass sie die Erscheinung wenigstens deutlich erkennen lassen.

Die ersten 5 Beispiele in Tab. III. sollen ein Bild der Druckcurve in der engeren Röhre geben; gegen das Ende derselben und in dem ganzen Verlauf der weiteren ist — da die Ausflussöffnung nicht verengt ist — nirgend ein Seitendruck bemerkbar. Ich benutzte dieselben Röhren wie für Fall I. und brachte nur das Druckgefäss mit der engeren Röhre in Verbindung. Den an 6 Stellen gemessenen Manometerständen H^{I}, H^{II} u. s. w. entsprechen die über denselben vermerkten Abstände von der Uebergangsstelle L^{I}.

Bei den darauf folgenden Beobachtungen, bei denen es mir vorzugsweise auf eine genaue Ermittelung der mittleren Ausflussgeschwindigkeit (c) aus der weiteren Röhre ankam, habe ich nur die ersten 4 Manometer genau ablesen können.

Tab. III.

L^{I} =		504,7	426,3	347,6	269,2	153,2	
h	h_0	H^{I}	H^{II}	H^{III}	H^{IV}	H^{V}	c
466,1	380,3	331,9	284,9	233,7	179,3	108,1	
503,9	410,1	359,1	305,6	251,2	192,2	116,2	
546,7	442,4	388,2	330	264,6	208,6	124,7	
632,9	509,7	449,5	380,8	312,1	240,2	143,6	
658,8	528,6	467	396	325	250,3	149,2	
143,4	124,3	100	84,4	68,7			79,4 Mm.
165,3	141,8	114,5	96,1	77,9			96,2
189,9	159,8	129,5	108,3	88,5			114,8
227,3	183,3	149,4	123,5	99,6			148
243,9	193,4	157,7	130,9	105,6			160,1
271,5	217,4	178	147,5	118,9			168,5
313	252,9	210,2	177	143,9			178,2
332,4	268,1	225,9	190,8	156,7			183,8
352,7	286,6	242	206,1	168,9			187,4
377,7	311,9	263,7	225,9	185,8			193,8
413,5	338,7	290	248,9	206,3			206,5

Ein Seitendruck in der weiteren Röhre zeigte sich erst, als ich ihre Ausflussöffnung beträchtlich verengerte. Dies geschah durch über das Ende derselben hinübergeschobene Messingkapseln, die in ihrer Mitte kreisförmige Oeffnungen hatten. Betrug der Durchmesser derselben die Hälfte des Röhrendurchmessers (5,108 Mm.), so war noch kein Druck bemerkbar; erst bei einer Oeffnung von 2,37 Mm. Durchmesser trat er hervor.

Da ich feststellen wollte, ob hier etwa, wo die Bedingungen des Versuchs ähnlich denen waren, die Volkmann durch Einschaltung der weiteren Bahn zwischen zwei engere eingeführt hatte, der Druck kurz vor der Erweiterung geringer werden könne als unmittelbar hinter derselben, also die sogenannte negative Stauung eintrete, beobachtete ich besonders genau den Druck h_w^1 2 Mm. vor der Erweiterung und h_{w_I}, $h_{w_{II}}$ hinter derselben. Die Bezeichnungen sind analog der für den Fall I. gewählten (Tab. II.), um anzudeuten, dass die Drucke an denselben Stellen gemessen wurden wie dort; h_w liegt also 2 Mm. hinter der Erweiterung; $h_{w_{II}}$, $h_{w_{III}}$ und $h_{w_{IV}}$ jedes um 5,7 Mm. von h_{w_I} entfernt.

Tab. IV.[1]

a) Durchmesser der Ausflussöffnung = 2,374 Mm.

		L^{I} = 347,6	153,2	2.	L_{I}=965,2	959,5	953,8	948,1	705,5	480,4
h	h_0	H^{III}	H^{V}	h_w^{I}	h_{w_I}	$h_{w_{II}}$	$h_{w_{III}}$	$h_{w_{IV}}$	H_I	H_{II}
689,6	564,1	378,8	225,3	95,9	91,3	99,9	115,6	120,2	108,2	102,3
616,4	495,8	324	198,6	91,4	87	94	105,1	108,2	106,4	99,6
538	422,1	265,9	162,6	82,1	78,7	78,7	79,6	80,5	102,7	97,8
457,8	368,6	229,9	141	71,1	67,7	69,5	69,4	68,6	87,9	83

b) Durchmesser der Ausflussöffnung = 1,773 Mm.

780,5	656,3	472,4	327,7	201	204,1	205	222,6	227,2	216,1	211,1
734,4	619,4	443,9	306,5	193,6	191,8	193,6	204,7	216,7	206,5	202,8
705,8	590,8	425	298,7	189,9	188,1	189,9	206,9	210,2	204,7	198,2
679,5	566,8	401,4	286,2	188	184,4	186,2	193,6	201	205	200,1
590,1	488,5	340,6	244,2	168,7	164,5	165,4	165,4	166,3	189,4	184,2
505,7	424,4	293,1	209,7	143,9	138,7	138,7	138,7	139,6	158,9	154,9
384,5	332,6	224,9	158,9	104,3	100,5	100,5	100,8	101,4	116,7	116,2
284,4	252,4	168,2	117,5	76,2	72,3	72,5	72,5	72,3	83,4	85,3
242,9	216,4	144,7	99	62,8	58,1	58,4	59	59,3	69,5	71,9

1) H^{III} u. H^{V} sind an denselben Stellen gemessen wie die gleich bezeichneten in Tab. III. — H_I u. H_{II} Manometerstände im Verlauf der weiteren Röhre.

Der besseren Uebersicht wegen habe ich in diese Tabelle nur h_w^1, den unmittelbar vor der Erweiterung stattfindenden Druck in der engeren Röhre, aufgenommen. Ich habe ihn aber auch an den zunächst liegenden 3 Querschnitten gemessen und mich überzeugt, dass er gegen die Uebergangsstelle hin allmählig abnimmt. Zum Belege dafür mögen nachstehende Beispiele dienen, in denen das über den einzelnen Columnen verzeichnete L^I den Abstand von derselben bezeichnet, und zum Vergleich der unmittelbar hinter der Erweiterung befindliche Druck h_{wI} hinzugefügt ist.

L^I=18,2 Mm.	12,8	7,4	2	
h_w^{IV}	h_w^{III}	h_w^{II}	h_w^{I}	h_{w_I}
65,5	65,5	64,6	62,9	58,1
109,8	105,3	105,2	105,2	99,6
152,7	145,7	145	144,3	140,5
176,2	173,4	166,1	165,8	162,4
198,3	195,5	188,2	188,4	182,0

Ueber die Ossification des hyalinen Knorpels.

Von

N. Lieberkuehn.

(Hierzu Taf. XVIII. u. XIX.)

In einer Arbeit in Siebold's und Kölliker's Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie, Band 9 S. 147 ff. über die Entwickelung der Knochensubstanz nebst Bemerkungen über den Bau rhachitischer Knochen wird von Heinrich Müller eine Lehre von der Ossification mitgetheilt, welche von der bis dahin allgemein angenommenen in den meisten wesentli-