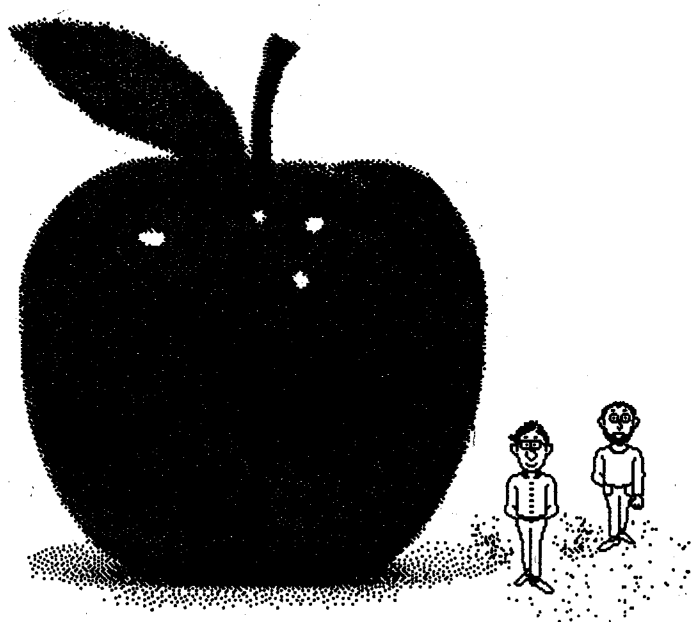
Int. Rep. 90 - 8

Normierte Eigenfunktionen für Zylindrische Hohlleiter

P. Hülsmann, M. Kurz

Institut für Angewandte Physik
der
Universität Frankfurt am Main



Frankfurt am Main
April 1990

Normierte Eigenfunktionen für zylindrische Hohlleiter

1) Einleitende Bemerkungen

Bei der Untersuchung der Wellenausbreitung in einem zylindrischen Hohlleiter muß die allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0 \qquad (1)$$

für das Vektorpotential Π gefunden werden. Da der Laplaceoperator in allgemeinen Zylinderkoordinaten separiert, kann die Gleichung (1) durch den Ansatz

$$\Pi = T(\rho,\varphi) \cdot Z(z) \qquad (2)$$

in zwei Gleichungen getrennt werden. Man erhält so eine Gleichung zur Lösung des transversalen und eine weitere Gleichung zur Lösung des longitudinalen Problems. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf dabei für Π lediglich eine Komponente in z-Richtung angenommen werden.

$$\Delta_T T + k_c^2 T = 0 \ , \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \ , \qquad (3)$$

$$\text{mit } k_c^2 + k_z^2 = k^2 \ .$$

Die Lösung der longitudinalen Gleichung läßt sich sofort angeben.

$$Z(z) = C(Ae^{-ik_z z} + Be^{ik_z z}) \ . \qquad (4)$$

Sie besteht aus einer vor- und einer rücklaufenden Welle. Je nach größe der transversalen Separationskonstante (i.e. die transversale Wellenzahl), wird k_z reell oder imaginär, was zu einer ungedämpften oder exponentiell gedämpften Welle in z-Richtung führt.

Die transversale Verteilungsfunktion für das Vektorpotential sowie die transversale Wellenzahl k_c ergeben sich aus der Lösung der transversalen Wellengleichung mit Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen.

Die (realen) elektrischen Ströme sind Quellen magnetischer Felder. Diese können aus dem elektrischen Vektorpotential A über $H = \mathrm{rot} A$ gewonnen werden. Genauso läßt sich die Wellengleichung (1) aber auch durch ein magnetisches Vektopotential, hervorgerufen durch (fiktive) magnetische Ströme, befriedigen. Tatsächlich ist ja das elektrische Feld im homogenen ladungsfreien Raum quellenfrei und läßt sich deshalb ebenso wie das magnetische Feld aus einem Vektorpotential $E = -\,\mathrm{rot} F$ herleiten.

Diese zwei verschiedenen Vektorpotentiale führen auf zwei partikuläre Lösungen der allgemeinen Wellengleichung. Mit dem elektrischen Vektorpotential erhält man E-Wellen, mit dem magnetischen H-Wellen als Lösung. Eine beliebige Feldverteilung in einem Hohlleiter wird sich demnach als Überlagerung von E- und H-Wellen darstellen lassen.

Wir wollen nun die Randbedingungen für die beiden partikulären Lösungen bestimmen: E-Wellen oder auch TM-Wellen (<u>T</u>ransversal <u>M</u>agnetisch) werden aus dem elektrischen Vektorpotential mit $A=1_z \cdot \Psi_e$ abgeleitet. Dabei soll 1_z den Einheitsvektor in z-Richtung bedeuten. Das magnetische Feld ist also:

$$H = \operatorname{rot} A = -(1_z \times \nabla_T T(\rho,\varphi)) \cdot Z(z) \tag{5}$$

Aus der Maxwellgleichung erhält man unter der Annahme einer harmonischen Zeitabhängigkeit und unter Benutzung der transversalen Wellengleichung für das elektrische Feld:

$$E_z = \frac{1}{i\omega\varepsilon} k_c^2 T(\rho,\varphi) \ , \tag{6}$$

$$E_T = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \frac{d}{dz} Z(z) \nabla_T T(\rho,\varphi) \ ,$$

da $E_z+E_T=E$ gelten muß. Die Hohlleiterwandung sei als idealleitend angenommen. Daraus folgt, daß die Tangentialkomponente (das is thier die z-Komponente) des elektrischen Feldes dort verschwinden muß. Hier bedeutet das, das E_z auf der Berandung verschwinden muß. Da aber k_c im allgemeinen ungleich null ist, fürt dieses auf die Randbedingung

$$T(\rho,\varphi) = 0 \Big|_{\text{Rand}} \tag{7}$$

Für H-Wellen gilt natürlich ebenfalls die gleiche Randbedingung für das elektrische Feld in tangentialer Richtung. Hier gilt:

$$E = -\operatorname{rot} F = (1_z \times \nabla_T T(\rho,\varphi)) \cdot Z(z) \tag{8}$$

Das liefert für das tangentiale elektrische Feld:

$$E_t = 1_t (1_z \times \nabla_T T(\rho,\varphi)) \cdot Z(z) = 1_n \cdot \nabla_T T(\rho,\varphi) \cdot Z(z) \tag{9}$$

Auf der Berandungsfläche muß E_t verschwinden, damit folgt direkt aus Gleichung (9):

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \Big|_{\text{Rand}} \tag{10}$$

Durch die Einführung von Randbedingungen wir die Lösung der transversalen Wellengleichung zu einem Eigenwertproblem mit diskreten, reellen Eigenwerten k_c. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind ebenfalls reel, denn über den Hohlleiterquerschnitt ist die Phase einer Welle als konstant anzusehen. Mit der Randbedingung (7) wird es als Dirichlet-Problem, mit der Randbedingung (10) als Neumann-Problem bezeichnet. Daß die Eigenwerte diskret sein müssen, kann man sich anschaulich dadurch klarmachen, daß nur eine Welle mit einer passenden transversalen Wellenzahl die Randbedingungen erfüllen kann. Es kann weiterhin gezeigt werden, daß es unendlich viele dieser diskreten Eigenwerte gibt. Die tranversalen Funktionen T für die beiden Wellentypen stellen damit die Eigenvektoren des Systems dar und bilden damit ein vollständiges Orthogonalsystem. Um zu einem Orthonormalsystem zu gelangen, muß jeder Eigenvektor T normiert werden. Dies soll in diesem Artikel vorgeführt werden.

In einem ONS hat jeder Eigenvektor die Länge eins. Eine Normierung auf eins bedeutet im Falle von Hohlleiterwellen eine Normierung der transversalen Funktionen T auf die Leistung eins. Daß hierbei tatsächlich nur die transversalen Anteile des Vektorpotentials für den Energietransport durch den Hohlleiter von Bedeutung sind, kann man sich sofort durch die Betrachtung des Poynting-Vektors klarmachen. Um schließlich die Normierungskonstanten berecnen zu können, ist es sinnvoll die sogenannten Typen-Funktionen einzuführen.

2) Die Typen-Funktionen

Die Feldverteilungen im Hohlleiter lassen sich nach dem oben gemachten Ansatz (Gleichung (2)) ebenso in transversale und longitudinale Anteile aufspalten. Das bedeutet transversale Eigenvektoren $e(\rho,\varphi)$ und $h(\rho,\varphi)$ als Funktionen der transversalen Koordinaten und Funktionen $U(z)$ und $I(z)$, abhängig von der longitudinalen Koordinate.

$$E_T^E = e^E U^E , \qquad H^E = h^E I^E \qquad \text{für E-Wellen,}$$

$$E^H = e^H U^H , \qquad H^H = h^H I^H \qquad \text{für H-Wellen.}$$

Unter Benutzung der aus der Diskussion der Randbedingungen erhaltenen Felder lassen sich für E-Wellen die folgenden Typen-Funktionen angeben:

$$e^E = -\nabla_T T^E = h^E \times 1_z \; ; \qquad U^E = -\frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{d}{dz} Z$$

$$h^E = -1_z \times \nabla_T T^E = 1_z \times e^E \; ; \qquad I^E = Z$$

Für die H-Wellen folgt:

$$e^H = 1_z \times \nabla_T T^H = h^T \times 1_z \; ; \qquad U^H = Z$$

$$h^H = -\nabla_T T^H = 1_z \times e^H \; ; \qquad I^H_{\bullet} = - \frac{1}{i\omega\mu} \frac{d}{dz} Z$$

Die Faktoren U und I haben die Bedeutung von Spannungs- und Stromkoeffizienten. Man kann nämlich für den jeweiligen Wellentyp leicht die Telegrafengleichungen aus ihnen ableiten [Un].

Gemäß den oben gemachten Aussagen über die Normierung der Eigenwellen folgt so, daß die Typenfunktionen e und h auf eins normiert werden, alle möglicherweise auftretenden Amplitudenfaktoren werden in den Spannungs- und Stromkoeffizienten berücksichtigt. Das bedeutet, eine Welle mit der Spannungs- und Stromamplitude eins trägt die Leistung eins. Wie schon oben bemerkt, sollen die Eigenfunktionen reell sein. Für die Normierungsbedingung führt dies auf:

$$1 = \iint_A \left(e^E\right)^2 dA = \iint_A \left(h^E\right)^2 dA$$

$$1 = \iint_A \left(e^H\right)^2 dA = \iint_A \left(h^H\right)^2 dA$$

Damit sind alle zur expliziten Berechnung der Normierung notwendigen Beziehungen bekannt. Im folgenden sollen nun die normierten Typenfunktionen berechnet werden.

3) Normierung der Eigenwellen

Aus der Lösung der Besselschen Differentialgleichung erhält man für die transversale Komponente des Vektorpotentials:

$$T_{mn} = C_{mn} \; J_m(s\rho) \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{Bmatrix}$$

Dieses Vektorpotential gilt ganz allgemein für beide Typen von Wellen im Hohlleiter.

3.1) Die Normierungskonstante für E-Wellen (TM-Wellen)

Um aus der allgemeinen Lösung die transversale Eigenfunktion für E-Wellen

(TM-Wellen) zu erhalten, muß in die Randbedingung eingesetzt werden. Diese lautet gemäß Gleichung (7) $T=0|_{R_0}$. Damit lautet die Funktion explizit:

$$T^E_{mn} = C^E_{mn}\; J_m\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin(m\varphi)\\ \cos(m\varphi)\end{Bmatrix}$$

Die Typen-Funktionen lauten:

$$e = -\nabla_T T^E_{mn}$$

$$= -\left(1_\rho\, C^E_{mn}\, \frac{x_{mn}}{R_0}\, J'_m\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin(m\varphi)\\ \cos(m\varphi)\end{Bmatrix} + 1_\varphi\, C^E_{mn}\, \frac{m}{\rho}\, J_m\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos(m\varphi)\\ -\sin(m\varphi)\end{Bmatrix}\right)$$

$$h = -1_z \times \nabla_T T^E_{mn}.$$

Da die Normierung des Vektorpotentials nicht von der zu ihrer Berechnung benutzten Typenfunktion abhängt, können wir uns z.B. auf die Funktion e beschränken. Damit ist nun das folgende Integral zu lösen:

$$1 = \left(C^E_{mn}\right)^2 \int_0^{R_0}\int_0^{2\pi} \left(\left(\frac{x^2_{mn}}{R_0^2}\right) J'^2_m\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos^2(m\varphi)\\ \sin^2(m\varphi)\end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. \frac{m^2}{\rho^2} J^2_m\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin^2(m\varphi)\\ \cos^2(m\varphi)\end{Bmatrix}\right) \rho\, d\rho\, d\varphi\ .$$

Da der Index m Werte von $m=0,1,2,\ldots.$ annehmen kann, muß für die φ-Integration eine Fallunterscheidung für $m=0$ und und $m>0$ gemacht werden. Es ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(m\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 2\pi \text{ für } m=0 \\ \pi \text{ für } m\neq 0 \end{cases} = (1+\delta_{mo})\,\pi\ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(m\varphi)\, dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos(2m\varphi)\right)dz = \begin{cases} 0 \text{ für } m=0 \\ \pi \text{ für } m\neq 0 \end{cases} = (1-\delta_{mo})\pi$$

Wir erhalten so:

$$1 = (C_{mn})^2 \pi \int_0^{R_0} \left(\left(\frac{x_{mn}^2}{R_0^2}\right) J_m'^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) \begin{Bmatrix} (1+\delta_{mo}) \\ (1-\delta_{mo}) \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. \frac{m^2}{\rho^2} J_m^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) \begin{Bmatrix} (1-\delta_{mo}) \\ (1+\delta_{mo}) \end{Bmatrix} \right) \rho \, d\rho$$

Damit bleibt nur noch die Integration über ρ auszuführen. Es soll an dieser Stelle auf die explizite Berechnung des Normierungsfaktors verzichtet werden, lediglich das Ergebnis sei angegeben. Eine ausführliche Darstellung der Rechnung findet sich z.B. in [Iap]. Nützliche Tafeln für Besselfunktionen schlägt man z.B. bei [Si], [Ab] nach. Als Ergebnis für die Normierungskonstante für E-Wellen (TM-Wellen) erhalten wir so:

$$C_{mn}^{E} = \sqrt{\frac{(2-\delta_{mo})}{\pi}} \; \frac{1}{x_{mn} J_m'(x_{mn})} \; .$$

Damit bleibt noch die Normierungskonstante für H-Wellen zu bestimmen.

3.2) Die Normierungskonstante für H-Wellen (TE-Wellen)

Um das transversale Vektorpotential für H-Wellen zu erhalten, muß die allgemeine Funktion wieder auf die Randbedingungen hin angepaßt werden. Diese lauten gemäß Gleichung (10): $n \cdot \nabla_T T(\rho,\varphi) = 0 \big|_{R_0}$. Die Einheitsvektoren in Normalen- und φ-Richtung sind orthogonal zueinander, es bleibt deshalb nur das Produkt von Normalen- und ρ–Einheitsvektor übrig. Damit lautet das Vektorpotential:

$$T_{mn}^{H} = C_{mn}^{H} \; J_m\left(\frac{x'_{mn}}{R_0}\rho\right) \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{Bmatrix}$$

Es sind nun wiederum die Typenfunktionen zu bilden und das Integral zu lösen. Ganz analog zum obigen Fall ist auch hier wieder die Fallunterscheidung für m=0 und m>0 zu treffen. Ansonsten erfolgt die Ausrechnung der Normierungskonstanten wie oben. Als Ergebnis erhält man:

$$C_{mn}^{H} = \sqrt{\frac{(2-\delta_{mo})}{\pi \, (x_{mn}'^2 - m^2 + 2m)}} \; \frac{1}{J_m^2(x'_{mn})} \; .$$

Literaturhinweise:

[Ab] Abramowitz/Stegun Handbook of Math. Functions, 1965
Dover Publications, New York, S. 484, 11.3.33

[Iap] P. Hülsmann, M. Kurz, Interner Report 90-7, 1990
Institut für Angewandte Physik, Frankfurt

[Si] K. Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, 1980, 8. Auflage
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
S. 233ff, S. 239, 112

[Un] G. F. Unger, Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik,
1981, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, Bd. II, S. 164f