

# Spontane Schwerewellenabstrahlung im differentiell geheizten rotierenden Annulus

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Geowissenschaften/Geographie  
der Johann Wolfgang Goethe-Universität  
in Frankfurt am Main

von  
Sebastian Borchert  
aus Thuine

Frankfurt 2015

D30

vom Fachbereich Geowissenschaften/Geographie der  
Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Ulrich Achatz

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Achatz,  
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frank-  
furt am Main, Institut für Atmosphäre und  
Umwelt

Apl. Prof. Dr. Uwe Harlander,  
Brandenburgische Technische Universität  
Cottbus-Senftenberg, Lehrstuhl für Aerodyna-  
mik und Strömungslehre

Datum der Disputation: 16. November 2015

---

---

## Zusammenfassung

---

Ein Finite-Volumen-Modell des differentiell geheizten rotierenden Annulus wird verwendet, um die spontane Schwerewellenabstrahlung durch die großskalige, von baroklinen Wellen beherrschte Strömung zu untersuchen. Bei diesem Vorgang bilden barokline Wellen und der durch sie abgelenkte und verzerrte Strahlstrom, die sich näherungsweise im hydrostatischen und geostrophischen Gleichgewicht befinden, durch ihre Dynamik Ungleichgewichte aus, die sich als Schwerewellen ausbreiten. Neben der Anregung von Schwerewellen durch Prozesse wie Gebirgsüberströmung, Konvektion und Frontogenese, bildet dieser Vorgang vermutlich eine weitere wichtige Quelle von Schwerewellen in der Atmosphäre. Anders als für orographisch und konvektiv angeregte Schwerewellen gibt es für die spontane Schwerewellenabstrahlung bislang keine befriedigende Parametrisierung in Wettervorhersage- und Klimamodellen, die diesen Prozess nicht auflösen können.

Die Durchführung von Messungen zur spontanen Schwerewellenabstrahlung in der Atmosphäre ist üblicherweise sehr aufwendig, sodass die Untersuchung dieses Vorganges in einem wiederholbaren und steuerbaren Laborexperiment reizvoll erscheint. Ob dafür möglicherweise das Experiment des differentiell geheizten rotierenden Annulus infrage kommt, untersuchen wir mit einem eigens dafür entwickelten numerischen Modell, dessen Tauglichkeit wir zunächst im Rahmen einer Validierung durch den Vergleich mit Labormessungen überprüfen.

Damit die Ergebnisse zur Schwerewellendynamik im Annulus auf die Atmosphäre übertragbar sind, verwenden wir eine neue, atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration. Im Gegensatz zu den klassischen Annuluskonfigurationen ist in der neuen Konfiguration die Brunt-Väisälä-Frequenz größer als der Coriolis-Parameter, sodass die Schwerewellen ein ähnliches Ausbreitungsverhalten zeigen sollten wie in der Atmosphäre.

Deutliche Hinweise auf eine Schwerewellenaktivität in der atmosphärenähnlichen Konfiguration geben die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz und eine Normalmodenzerlegung der kleinräumigen Strukturen der simulierten Strömung. Um der Herkunft der beobachteten Schwerewellen auf den Grund zu gehen, zerlegen wir die Strömung in den schwerewellenfreien quasigeostrophischen Anteil und den schwerewellenenthaltenden ageostrophischen Anteil. Bereiche innerhalb der baroklinen Welle, in denen ein erhöhter spontaner Antrieb des ageostrophischen Anteils durch die quasigeostrophische Strömung beobachtet wird, fallen mit Bereichen erhöhter Schwerewellenaktivität zusammen. Dies deutet darauf hin, dass die spontane Schwerewellenabstrahlung auch im Annulus zum Schwerewellenfeld beiträgt, sodass dieses Experiment als Labormodell dieser Schwerewellenquelle für deren weitere Erforschung geeignet erscheint.



---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Modell</b>	<b>5</b>
2.1	Der differentiell geheizte rotierende Annulus . . . . .	5
2.2	Die Grundgleichungen . . . . .	6
2.2.1	Die allgemeine Bilanzgleichung . . . . .	6
2.2.2	Die vollständig kompressiblen Grundgleichungen . . . . .	10
2.2.3	Die Boussinesq-Näherung . . . . .	13
2.2.4	Die Vermessung in Zylinderkoordinaten . . . . .	18
2.2.5	Die Randbedingungen . . . . .	20
2.3	Das numerische Modell . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Die Modellvalidierung</b>	<b>27</b>
3.1	Das Experiment . . . . .	27
3.2	Die Simulationsstrategie . . . . .	30
3.3	Simulationsergebnisse . . . . .	33
3.4	Die Auswirkung des Annulusanlaufs . . . . .	37
3.5	Eine Hauptkomponentenanalyse . . . . .	44
3.6	Das Eady-Modell . . . . .	52
3.6.1	Die Ausgangsgleichungen . . . . .	53
3.6.2	Eine Skalenanalyse . . . . .	55
3.6.3	Die Erhaltungsgleichung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity . . . . .	63
3.7	Zusammenfassung der Modellvalidierung . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Die spontane Schwerewellenabstrahlung</b>	<b>73</b>
4.1	Eine atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration . . . . .	74
4.1.1	Ergebnisse von einer klassischen Konfiguration . . . . .	74
4.1.2	Theoretische Betrachtungen . . . . .	75
4.1.3	Die simulierte großskalige Strömung in einer neuen Annuluskonfiguration . . . . .	78
4.2	Das Schwerewellensignal . . . . .	82
4.3	Eine Analyse mittels Modenzerlegung im Rahmen linearisierter Dynamik . . . . .	85
4.4	Der Mechanismus der Schwerewellenabstrahlung . . . . .	92
4.4.1	Der Gleichgewichtsanteil . . . . .	95

---

4.4.2	Der Antrieb des Ungleichgewichtsanteils durch den Gleichgewichtsanteil . . . . .	110
4.4.3	Ein tangential-lineares Modell . . . . .	116
4.4.4	Die „Reinigung“ des Schwerewellenfeldes . . . . .	118
4.5	Zusammenfassung der spontanen Schwerewellenabstrahlung im Annulus . .	120
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
	<b>Anhang</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Nebenrechnungen zum Modell</b>	<b>127</b>
A.1	Die Bilanzgleichung des äußeren Drehimpulses . . . . .	127
A.2	Ein kurzer Blick auf die Thermodynamik . . . . .	128
A.3	Die Poisson-Gleichung des Drucks . . . . .	136
A.4	Die Gesamtenergiebilanz der Boussinesq-Gleichungen . . . . .	137
<b>B</b>	<b>Nebenrechnungen zur Modellvalidierung</b>	<b>139</b>
B.1	Potenzen des normierten Coriolis-Tensors . . . . .	139
B.2	Die Divergenz der geostrophischen Geschwindigkeit . . . . .	139
B.3	Die quasigeostrophische Vorticitygleichung . . . . .	140
B.4	Die vertikale Ableitung der quasigeostrophischen Vertikalgeschwindigkeit .	143
<b>C</b>	<b>Nebenrechnungen zur spontanen Schwerewellenabstrahlung</b>	<b>145</b>
C.1	Die Eigenmoden der linearisierten Boussinesq-Gleichungen . . . . .	145
C.1.1	Die Eigenfrequenzen . . . . .	145
C.1.2	Die Eigenmoden . . . . .	146
C.2	Die Energie der Boussinesq-Gleichungen . . . . .	149
C.3	Die Anwendung des Hinkelmann'schen Filterungsverfahrens auf die linearisierten Boussinesq-Gleichungen . . . . .	150
C.4	Die prognostische Gleichung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity	159
C.5	Die materielle Ableitung des geostrophisch-hydrostatischen Drucks . . . . .	162
C.6	Die Schwerewellenabstrahlung vom teilchenfesten Blickwinkel . . . . .	164
<b>D</b>	<b>Nützliche Elemente der Tensorrechnung</b>	<b>177</b>
D.1	Der Skalar eines Tensors . . . . .	178
D.2	Der Vektor eines Tensors . . . . .	180
D.3	Das Doppelskalarprodukt zweier Tensoren . . . . .	182
D.4	Das Skalar-Kreuzprodukt zweier Tensoren . . . . .	186
D.5	Die Inverse eines Tensors . . . . .	187
D.5.1	Die Inverse eines Tensors der Gestalt $\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}$ . . . . .	191
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>195</b>

---

# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Interne Schwerewellen spielen eine wichtige Rolle in der Dynamik der Atmosphäre und der Ozeane, indem sie zum Beispiel Impuls vom Ort ihrer Entstehung über weite Strecken bis zum Ort, an dem sie brechen, befördern und auf diese Weise entfernte Bereiche der Atmosphäre beziehungsweise der Ozeane dynamisch miteinander koppeln (Müller *et al.*, 1986; Fritts & Alexander, 2003; Kim *et al.*, 2003; Zülicke & Peters, 2008; Alexander *et al.*, 2010). Ihr Bestehen verdanken Schwerewellen den auf ein Fluidteilchen wirkenden Rückstellkräften, einmal bedingt durch die stabile Schichtung der Atmosphäre und des Ozeans und zum anderen durch die Teilchenträgheit, wie sie in der Coriolis-Beschleunigung zum Ausdruck kommt (Holton, 2004). Die typischen räumlichen und zeitlichen Skalen der Schwerewellen sind üblicherweise zu klein, um in heutigen Wettervorhersage- und Klimamodellen aufgelöst werden zu können. Gleichwohl üben sie einen Einfluss auf die in den Modellen auflösbare großskalige Strömung aus, die in der Modellierung durch geeignete Parametrisierungen berücksichtigt werden sollte und ein Multiskalenproblem darstellt. Atmosphärische Schwerewellen werden im Allgemeinen in orographische, erzeugt durch Strömung über Topographie, und nichtorographische, hauptsächlich bedingt durch konvektive Vorgänge und spontane Ungleichgewichte der Strömung (englisch: *spontaneous imbalance*), unterteilt. Die Bedeutung der einzelnen Schwerewellenquellen ist jahreszeitenabhängig (Sato *et al.*, 2009). Während Ansätze für strömungsabhängige Parametrisierungen orographisch und konvektiv angeregter Schwerewellen seit einiger Zeit vorliegen (Palmer *et al.*, 1986; McFarlane, 1987; Chun & Baik, 1998; Beres *et al.*, 2004; Chun *et al.*, 2004; Beres *et al.*, 2005; Song & Chun, 2008; Richter *et al.*, 2010), werden physikalisch motivierte Ansätze für die anderen Quellen, wie das spontane Ungleichgewicht der synoptischskaligen Strömung, erst seit wenigen Jahren systematisch untersucht (zum Beispiel Zülicke & Peters, 2008; Mirzaei *et al.*, 2014). Die Beobachtung verstärkter Schwerewellentätigkeit in der Nähe von Ausgangsgebieten der Strahlströme (Gebiete in denen die Strahlströme abbremsen, englisch: *jet stream exit region*) (Uccellini & Koch, 1987; Guest *et al.*, 2000; Pavelin *et al.*, 2001; Plougonven *et al.*, 2003) sind ein Hinweis darauf, dass die großskalige Strömung, die häufig in guter Näherung Gleichgewichtsbedingungen erfüllt, zum Beispiel das hydrostatische und das geostrophische Gleichgewicht, spontan Ungleichgewichte entwickeln kann, die sich als Schwerewellen ausbreiten. Die unmittelbare Anwendung des geostrophischen Ausgleichs (englisch: *geostrophic adjustment*) in der Parametrisierung der so erzeugten Schwerewellen (Rossby, 1938; Uccellini & Koch, 1987; Fritts & Luo, 1992;

Luo & Fritts, 1993; O’Sullivan & Dunkerton, 1995; Pavelin *et al.*, 2001) ist schwierig, da die Strömung fortwährend neues Ungleichgewicht ausbildet. Ford (1994a,b,c) konnte das Konzept der Schallabstrahlung nach Lighthill (1952) erfolgreich auf die Schwerewellenabstrahlung durch Wirbel in einer Flachwasserströmung anwenden. Gewisse Voraussetzungen, welche die abgestrahlten Schwerewellen und die abstrahlende Strömung im Rahmen dieser Theorie zu erfüllen haben, werden von der spontanen Schwerewellenabstrahlung in der Atmosphäre verletzt (Plougonven *et al.*, 2009). Snyder *et al.* (2009) und Wang & Zhang (2010) konnten jedoch zeigen, dass sich der Vorgang in der Atmosphäre mithilfe tangential-linearer Modelle untersuchen lässt, in denen die Schwerewellen als Lösung des um eine Gleichgewichtsströmung linearisierten Gleichungssystems verstanden werden können. Der spontane Antrieb der Schwerewellen geht in diesen Modellen auf die sogenannte verminderte Tendenz der Gleichgewichtsströmung (englisch: *residual tendency*) zurück. Die Genauigkeit dieser Modelle hängt von der Wahl der Gleichgewichtsbedingungen ab, mittels derer die Gleichgewichtsströmung definiert wird. Das quasigeostrophische Gleichgewichtsmodell von Snyder *et al.* (2009) entwickelte im Laufe der Integration systematische Abweichungen von der Strömung, die mithilfe der vollständigen Gleichungen simuliert wurde. Durch die Verwendung eines Gleichgewichtsmodells höherer Ordnung konnten Wang & Zhang (2010) bessere Ergebnisse erzielen.

Bei der Untersuchung der spontanen Schwerewellenabstrahlung in der Atmosphäre selbst, stößt man auf einige Hindernisse. Aufgrund ihrer extremen Komplexität, ist die Schwerewellenabstrahlung immer in eine Vielzahl von miteinander wechselwirkenden Prozessen eingebettet. Dabei lässt sich der Prozess von Interesse nur selten auf der Grundlage der vorhandenen Messdaten gänzlich von den anderen Prozessen abgrenzen. Darüber hinaus ist die Wiederholbarkeit von Messungen in der Atmosphäre stark eingeschränkt. Ein atmosphärischer Zustand erscheint nicht ein zweites Mal, sodass sich nur ähnliche Zustände miteinander vergleichen lassen. All dies spricht für Laborexperimente als Ergänzung zu den Atmosphärenmessungen. Da insbesondere die spontane Schwerewellenabstrahlung von baroklinen Wellen und den durch sie abgelenkten und verzerrten Strahlstrom von Interesse ist (O’Sullivan & Dunkerton, 1995; Zhang, 2004; Viúdez & Dritschel, 2006; Plougonven & Snyder, 2007), erscheint das Laborexperiment des differentiell geheizten rotierenden Annulus besonders geeignet für die Untersuchung des Vorgangs. In diesem Experiment befindet sich eine Flüssigkeit zwischen zwei Zylindern mit konzentrischer, vertikaler Achse, wobei der innere Zylinder gekühlt und der äußere geheizt wird, um die differentielle Heizung der Atmosphäre zwischen dem Nordpol (beziehungsweise dem Südpol) und dem Äquator nachzubilden. Dieser Aufbau ist derart auf einer Drehscheibe befestigt, dass eine Drehung um die Zylinderachsen erfolgt, wodurch die Erdrotation nachempfunden wird. Bei geeigneter Wahl der Parameter des Experimentes wird die Flüssigkeitsströmung zwischen den beiden Zylindern baroklin instabil und bildet barokline Wellen aus – ein Prozess, von dem vermutet wird, dass er wesentlich an der Zyklogenese in der Atmosphäre beteiligt ist. Seine Anfänge hat dieses Experiment in den Versuchen von Vettin (1857), der als erster versuchte, Erkenntnisse über die Atmosphärenströmungen zu gewinnen, indem er sie im Labormaßstab nachbildete. Bis auf wenige Ausnahmen (zum Beispiel Dove, 1857; Czermak, 1893), erlangte sein Ansatz jedoch kaum Aufmerksamkeit und geriet unglücklicherweise für viele Jahrzehnte in Vergessenheit. Erst in den zwanziger Jahren des letzten Jahrhunderts haben Meteorologen wie Exner (1923) und Rossby (1926) den experimentellen Ansatz zur Erforschung der großskaligen Atmosphärenströmungen wieder

---



aufgegriffen. Riehl & Fultz (1957, 1958) und Hide (1958) waren es schließlich, die das Experiment technisch verbesserten, es systematisch untersuchten und ihm die Gestalt gaben, die auch heute noch in vielen Fällen verwendet wird. Ein Überblick über die Entwicklung dieses Experiments und verschiedene Varianten desselben, sowie über die unterschiedlichen Strömungsausprägungen, die sich beobachten lassen und theoretische Hintergründe dazu finden sich zum Beispiel bei Hide & Mason (1975); Hide (1977); Read (2001) und Ghil *et al.* (2010). Vielversprechende Experimente und darauf aufbauende weitergehende Untersuchungen zur Wellenanregung im Annulus wurden von Lovegrove *et al.* (1999, 2000) und Williams *et al.* (2003, 2005, 2008) durchgeführt. Dabei verwendeten sie eine Variante des Annulusexperiments, in der zwei Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte übereinanderliegen und die Baroklinität derselben nicht durch einen thermischen, sondern durch einen mechanischen Antrieb erzeugt wird. Auf der Grenzfläche zwischen den beiden Flüssigkeiten werden neben den großskaligen baroklinen Wellen, kleinskalige Wellen beobachtet, die als spontan abgestrahlte Schwerewellen gedeutet werden. Ob es sich dabei tatsächlich um Schwerewellen handelt, ist jedoch umstritten (Gula *et al.*, 2009; Flór *et al.*, 2011). In einem Experiment ohne Rotation und thermischen Strömungsantrieb, in dem Wirbeldipole in einer kontinuierlich geschichteten Flüssigkeit aufeinanderstoßen, konnte Afanasyev (2003) weiter Hinweise auf spontane Schwerewellenabstrahlung finden. Eine Variante des herkömmlichen differentiell geheizten rotierenden Annulus, in der zusätzlich zum radialen Temperaturunterschied zwischen den Zylinderwänden ein vertikaler Temperaturunterschied zwischen dem Boden und dem Deckel des Annulus aufgebaut wird, wurde von Miller & Fowles (1986); Hathaway & Fowles (1986) vorgestellt und von Kwak & Hyun (1992) mithilfe eines numerischen Modells simuliert. Diese Variante des Experiments ermöglicht es, die Schichtung der Flüssigkeit bis zu einem gewissen Grad unabhängig vom radialen Temperaturgradienten zu steuern. Sie hat sich jedoch gegenüber der herkömmlichen Variante des Experiments nicht durchgesetzt. Hinweise auf Schwerewellen an sich in einer klassischen Konfiguration des differentiell geheizten rotierenden Annulus wurden bereits von Jacoby *et al.* (2011) und Randriamampianina (2013) in Messdaten und numerischen Simulationen gefunden. Es konnte jedoch gezeigt werden, dass diese Wellen ihren Ursprung wahrscheinlich in Grenzschichtinstabilitäten haben und nicht auf eine spontane Abstrahlung durch die baroklinen Wellen zurückzuführen sind. Unter einer klassischen Annuluskonfiguration werden wir im Folgenden einen Aufbau mit einem äußeren Zylinderradius von ungefähr 10 cm, einer Spaltbreite zwischen innerem und äußerem Zylinder von unter 10 cm und einer Flüssigkeitsfüllhöhe von etwa 10 cm verstehen. Der Temperaturunterschied zwischen den Zylindern beträgt dabei ungefähr 10 K und die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Annulus dreht, reicht von 0 bis etwa 5 rad/s (0 bis 48 U/min) (Hide & Mason, 1975).

Mithilfe eines von uns entwickelten numerischen Finite-Volumen-Modells des differentiell geheizten rotierenden Annulus untersuchen wir in dieser Arbeit, ob wir eine neue Konfiguration finden können, die in Bezug auf Flüssigkeitsschichtung und Rotation – zwei wichtige Einflussfaktoren der Schwerewelldynamik – den atmosphärischen Gegebenheiten näher kommt, als die klassischen Annuluskonfigurationen. Weiterhin versuchen wir in einer solchen atmosphärenähnlicheren Konfiguration Hinweise auf die spontane Schwerewellenabstrahlung zu finden und damit zu zeigen, dass das Annulusexperiment für die Untersuchung dieses Vorgangs geeignet sein könnte. Wir beginnen in Kapitel 2 mit einer Vorstellung des Modells, das wir zur Beschreibung der Flüssigkeitsströmung im Annulus

verwenden. Dies beinhaltet das Differentialgleichungssystem und die Umsetzung der diskreten Näherung desselben in einem numerischen Modell des Annulus. Das daran anschließende Kapitel 3 widmen wir der Modellvalidierung, im Rahmen derer wir Simulationsergebnisse unseres Modells mit Labormessungen an einer klassischen Annuluskonfiguration vergleichen, die uns von Uwe Harlander, Miklos Vincze und Kiril D. Alexandrov (von der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg, im Folgenden mit BTU abgekürzt) zur Verfügung gestellt wurden. Die Vorstellung einer neuen, atmosphärenähnlicheren Annuluskonfiguration, die für die Vergleichbarkeit der Schwerewellendynamik mit derjenigen in der Atmosphäre geeigneter erscheint, als die klassischen Konfigurationen, erfolgt in Kapitel 4. Darüber hinaus werden dort Hinweise auf Schwerewellentätigkeit in der atmosphärenähnlichen und einer klassischen Konfiguration gezeigt, sowie Hinweise darauf, dass die spontane Abstrahlung durch barokline Wellen als eine Quelle der Schwerewellen infrage kommt. Schließlich werden wir die Ergebnisse dieser Arbeit in Kapitel 5 zusammenfassen und mögliche Richtungen für weiterführende Untersuchungen nennen.

---

# KAPITEL 2

---

## Das Modell

---

### 2.1 Der differentiell geheizte rotierende Annulus

Abbildung 2.1 zeigt den schematischen Aufbau des differentiell geheizten rotierenden Annulus. Er besteht aus zwei koaxialen Zylindern, die auf einer lotrechten, ebenen Bodenscheibe befestigt sind. Der innere Zylinder, mit Radius  $a$ , wird auf die konstante Temperatur  $T_a$  gekühlt, während der äußere Zylinder, mit Radius  $b$ , auf die Temperatur  $T_b$  geheizt wird. In dieser Arbeit wird durchgehend  $T_a < T_b$  angenommen. Der Spalt zwischen beiden Zylindern wird bis zur konstanten Gleichgewichtsfüllhöhe  $d$  mit der Arbeitsflüssigkeit gefüllt. Wenn nicht anders angegeben, ist diese Flüssigkeit Wasser. Der gesamte Aufbau kann in Rotation versetzt werden, wobei die Rotationsachse mit der Achse der beiden Zylinder zusammenfällt. Im Folgenden beschränken wir uns auf eine Rotation gegen den Uhrzeigersinn, so wie es in Abbildung 2.1 angedeutet ist. Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Rotation wird mit  $\Omega$  bezeichnet. Was die Flüssigkeitsoberfläche anbelangt, so gibt es zwei Varianten des Experiments. In der ersten Variante bleibt die Oberfläche frei, sodass deren Höhe  $h$  (gemessen vom Boden des Annulus) im Allgemeinen vom Ort und von der Zeit abhängen kann. In der zweiten Variante wird die Oberfläche mit einem ebenen Deckel in Kontakt gebracht, wodurch  $h = d$  erzwungen wird.

Die Dynamik der Flüssigkeit wird in einem mitrotierenden Bezugssystem beschrieben, das heißt der Beobachter rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , so wie alle anderen Teile des Annulus. Zur Vermessung der physikalischen Größen wird innerhalb dieses Bezugssystems ein zylindrisches Koordinatensystem mit dem Azimutwinkel  $\vartheta$ , dem Radius  $r$  und der Höhe  $z$  gemäß Abbildung 2.1 aufgespannt, wobei 0 den Koordinatenursprung kennzeichnet, der zugleich auch der Ort des Beobachters sein soll. Die übliche Anordnung der drei Koordinaten  $(r, \vartheta, z)$  (Bronstein *et al.*, 2001) wird in dieser Arbeit in  $(\vartheta, r, z)$  geändert. Auf diese Weise soll der Vergleich mit der in der Atmosphärenphysik gebräuchlichen Notation (zum Beispiel Holton, 2004) erleichtert werden: Die azimutale Koordinatenrichtung im Annulus entspricht der zonalen Richtung (West-Ost-Richtung) und die radiale Richtung entspricht der negativen meridionalen Richtung (Nord-Süd-Richtung) auf der Nordhalbkugel. Gegebenenfalls ist zu berücksichtigen, dass die Anordnung  $(\vartheta, r, z)$  ein Linkssystem darstellt. Die zylindrischen Einheitsvektoren in azimutaler, radialer und vertikaler Richtung werden mit  $\mathbf{e}_\vartheta$ ,  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_z$  bezeichnet.

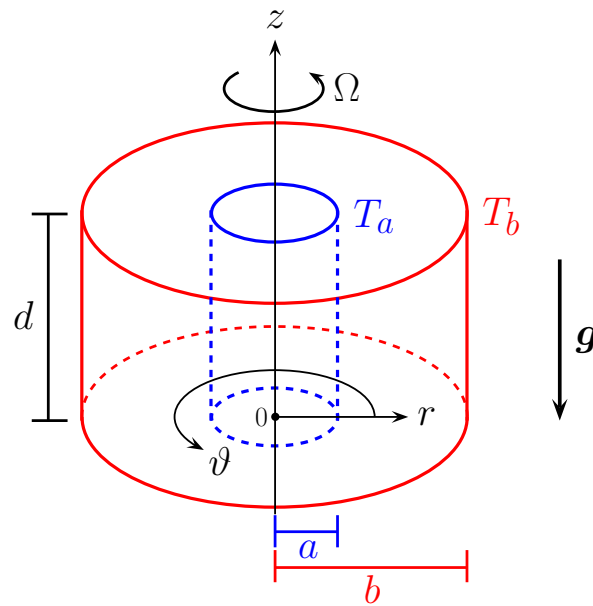


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau des differenziell geheizten rotierenden Annulus.

## 2.2 Die Grundgleichungen

Die Gleichungen, die zur Modellierung der Strömung im Annulus verwendet werden, sind die Boussinesq-Gleichungen. Sie sind eine Näherung der vollständig kompressiblen Gleichungen, die herangezogen wird, wenn die Dichteschwankungen in der Flüssigkeit verhältnismäßig gering sind. Die Struktur der Boussinesq-Gleichungen ist in vielen Punkten einfacher, als die der vollständig kompressiblen Gleichungen, was die theoretische Betrachtung des Strömungsverhaltens erleichtert.

Im Folgenden werden die vollständig kompressiblen Gleichungen als Bezugspunkt für die Boussinesq-Gleichungen kurz vorgestellt. Zunächst soll jedoch ein Blick auf die allgemeine Bilanzgleichung der Kontinuumsdynamik geworfen werden, welche Grundlage fast aller Gleichungen ist, die zur Beschreibung eines Fluids verwendet werden (Ausnahmen sind beispielsweise die Zustandsgleichungen). Dies erleichtert später die Einordnung und Beschreibung des Finite-Volumen-Verfahrens, das zur numerischen Integration der Grundgleichungen verwendet wird.

### 2.2.1 Die allgemeine Bilanzgleichung

Bilanzgleichungen können für extensive Zustandsgrößen der Flüssigkeit, das heißt Größen, die von der Größe des betrachteten Systems abhängen, aufgestellt werden (Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004). Ein solches System ist zum Beispiel ein materielles Volumen in der Flüssigkeit, womit ein Volumen gemeint ist, welches, einmal festgelegt, vereinbarungsgemäß zu allen zukünftigen Zeiten dieselben Flüssigkeitsteilchen einschließt und somit seine Gestalt fortwährend an die Bewegung der Teilchen, aus denen es besteht, angleicht.

Wir betrachten nun eine allgemeine extensive Zustandsgröße

$$\Phi = \int_{\Phi(V)} d\Phi = \int_V \rho\phi dV, \quad (2.1)$$

wobei  $V$  das materielle Volumen bezeichnet.  $d\Phi$  ist der (näherungsweise) infinitesimal kleine Anteil an  $\Phi$ , der einem Flüssigkeitsteilchen im Volumen zugewiesen wird. Ferner ist  $\rho := dM/dV$ <sup>1</sup> die Dichte des Flüssigkeitsteilchens mit der Masse  $dM$  und dem Volumen  $dV$ . Demzufolge ist  $\phi := d\Phi/dM$  die zu  $\Phi$  gehörige intensive oder genauer massenspezifische Zustandsgröße. Für die zeitliche Änderung der extensiven Zustandsgröße ergibt sich Folgendes

$$\begin{aligned} \frac{d(\Phi)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V \rho\phi dV = \int_V \frac{d}{dt} (\rho\phi dV) = \int_V \left[ \frac{d}{dt} (\rho\phi) dV + \rho\phi \frac{d(dV)}{dt} \right] \\ &= \int_V \left[ \frac{d}{dt} (\rho\phi) + \rho\phi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei wird die Änderung der integralen Größe  $\Phi$  mit  $d(\Phi)$  bezeichnet, um eine Verwechslung mit  $d\Phi$  zu vermeiden.  $d(\Phi)/dt$  bezeichnet dann die materielle Zeitableitung von  $\Phi$ . Aus der Kinematik des Kontinuums ist folgende Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung des Volumens eines (kompressiblen) Flüssigkeitsteilchens und der Geschwindigkeitsdivergenz bekannt (Pichler, 1984)

$$\frac{d(dV)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v} dV, \quad (2.3)$$

wobei  $\nabla$  den Nabla-Operator und  $\mathbf{v}$  die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens bezeichnen. (2.3) wurde bei der Ausführung der Produktregel unter dem Integral in (2.2) verwendet.

Die Ursachen für eine zeitliche Änderung von  $\Phi$  lassen sich im Allgemeinen in zwei Beiträge aufspalten (Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\frac{d(\Phi)}{dt} = \frac{d_i(\Phi)}{dt} + \frac{d_a(\Phi)}{dt}. \quad (2.4)$$

Der erste Beitrag

$$\frac{d_i(\Phi)}{dt} = \int_V \sigma_\phi dV \quad (2.5)$$

beschreibt die Erzeugung von  $\Phi$  ( $d_i(\Phi)/dt > 0$ ) oder Vernichtung von  $\Phi$  ( $d_i(\Phi)/dt < 0$ ) innerhalb des Bilanzvolumens.  $\sigma_\phi$  ist die Quellstärke oder Quelledichte von  $\phi$  im Flüssigkeitsteilchen ( $\sigma_\phi > 0 \rightarrow$  Quelle,  $\sigma_\phi < 0 \rightarrow$  Senke). Wie genau  $\sigma_\phi$  aussieht, hängt von der

---

<sup>1</sup> Mit „:=“ beziehungsweise „=“ bezeichnen wir die Definition einer Größe, wobei die Größe auf der Seite des Doppelpunktes durch den Ausdruck auf der anderen Seite definiert wird (Ebel *et al.*, 2006).

Physik der Größe  $\phi$  ab und kann im Rahmen der allgemeinen Bilanzgleichung nicht weiter aufgeschlüsselt werden. Im zweiten Beitrag

$$\frac{d_a(\Phi)}{dt} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_\phi = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_\phi dV \quad (2.6)$$

werden nichtadvektive Austauschvorgänge beziehungsweise Wechselwirkungen zwischen dem Bilanzvolumen und seiner Umgebung zusammengefasst. Ist  $d_a(\Phi)/dt > 0$ , so erfolgt ein Zufluss von  $\Phi$  in das Volumen. Ist das Vorzeichen hingegen negativ, so erfolgt ein Abfluss.  $\mathbf{J}_\phi$  bezeichnet hierbei den lokalen Fluss auf der Berandung des Bilanzvolumens  $\partial V$ . Da das vektorielle Oberflächenelement  $d\mathbf{S}$  vereinbarungsgemäß aus dem Volumen heraus weist, gilt für einen lokalen Fluss in das Volumen hinein  $d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_\phi < 0$ . Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite von (2.6) gleicht dies wieder aus (Kluge & Neugebauer, 1994). Schließlich wurde der Gauß'sche Integralsatz verwendet, um das Oberflächenintegral über den Fluss in ein Volumenintegral über die Flussdivergenz umzuwandeln (Bronstein *et al.*, 2001). Es wird weiterhin angenommen, dass sich  $\mathbf{J}_\phi$  ausschließlich aus molekularen Flüssen zusammensetzt. Die Ursache solcher Flüsse liegt darin, dass die Moleküle, aus denen ein Flüssigkeitsteilchen besteht, mit den Molekülen der benachbarten Flüssigkeitsteilchen zusammenstoßen. Dabei tauschen sie eine Menge  $d_a\phi$  der Zustandsgröße  $\phi$  miteinander aus (innerhalb der Zeitspanne  $dt$ ).

(2.2), (2.5) und (2.6) ergeben zusammen

$$\int_V \left[ \frac{d}{dt}(\rho\phi) + \rho\phi \nabla \cdot \mathbf{v} - \sigma_\phi + \nabla \cdot \mathbf{J}_\phi \right] dV = 0. \quad (2.7)$$

Diese Gleichung soll unabhängig von der Wahl des Bilanzvolumens gelten, sodass der Integrand selbst verschwinden muss. Wir erhalten die teilchenfeste Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi) + \rho\phi \nabla \cdot \mathbf{v} = \sigma_\phi - \nabla \cdot \mathbf{J}_\phi. \quad (2.8)$$

Die linke Seite von (2.8) lässt sich mithilfe der Euler'schen Zerlegung der materiellen Ableitung (zum Beispiel Pichler, 1984; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\frac{d}{dt}(\rho\phi) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \mathbf{v} \cdot \nabla(\rho\phi) \quad (2.9)$$

in folgende Form bringen

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\phi) = \sigma_\phi - \nabla \cdot \mathbf{J}_\phi, \quad (2.10)$$

wobei  $\partial(\cdot)/\partial t + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\cdot)]$  als Bilanzoperator bezeichnet wird (vergleiche Zdunkowski & Bott, 2003, 2004). Wird die Divergenz des advektiven Flusses  $\nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\phi)$  auf die rechte Seite gebracht, so erhalten wir die ortsfeste Bilanzgleichung (Kluge & Neugebauer, 1994)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) = \sigma_\phi - \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho\phi + \mathbf{J}_\phi). \quad (2.11)$$

Die Integralform von (2.11) bezieht sich üblicherweise nicht auf ein materielles, sondern ein raumfestes Bilanzvolumen, das heißt ein Volumen, das einmal festgelegt, weder Ort noch Gestalt ändert

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi \, dV = \int_V \sigma_\phi \, dV - \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \rho \phi + \mathbf{J}_\phi). \quad (2.12)$$

Dabei wurde auf der linken Seite verwendet, dass im Falle eines raumfesten Volumens,  $dV$  ein rein geometrisches Volumenelement ist, welches nicht von der Zeit abhängt. Die partielle Zeitableitung kann daher vor das Integral gezogen und genau genommen auch durch die vollständige Zeitableitung  $d/dt$  ersetzt werden, da das Integral nur noch von der Zeit abhängt. (2.12) bildet die Grundlage der Finite-Volumen-Verfahren zur numerischen Integration der Bilanzgleichungen.

Abschließend sei eine der Grundgleichungen, nämlich die Kontinuitätsgleichung, bereits an dieser Stelle vorweggenommen, um die allgemeine Bilanzgleichung (2.8) in ihre wohl gebräuchlichste Form zu bringen. Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Dichte  $\rho = dM/dV$  und folgt aus (2.8) für  $\phi = 1$ . Die Masse eines Flüssigkeitsteilchens soll vereinbarungsgemäß eine Erhaltungsgröße sein, das heißt  $d(dM)/dt \equiv 0$  sowie  $\sigma_1 \equiv 0$  und  $\mathbf{J}_1 \equiv 0$ <sup>2</sup>

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho) = 0. \quad (2.13)$$

Für die linke Seite von (2.8) können wir daher schreiben

$$\frac{d}{dt}(\rho \phi) + \rho \phi \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \frac{d\phi}{dt} + \underbrace{\phi \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0} = \rho \frac{d\phi}{dt} \quad (2.14)$$

und erhalten damit die teilchenfeste Bilanzgleichung in ihrer üblichen Gestalt

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = \sigma_\phi - \nabla \cdot \mathbf{J}_\phi. \quad (2.15)$$

(2.15) gilt nicht nur für skalare, sondern auch für vektorielle und tensorielle Größen (Altenbach, 2012). So lautet beispielsweise die Bilanzgleichung für einen Vektor  $\phi$

$$\rho \frac{d\phi}{dt} = \boldsymbol{\sigma}_\phi - \nabla \cdot \mathbb{J}_\phi, \quad (2.16)$$

wobei die Quellstärke  $\boldsymbol{\sigma}_\phi$  eine vektorielle Größe ist und der Fluss  $\mathbb{J}_\phi$  ein Tensor zweiter Stufe. Allerdings gilt (2.16) in dieser Form nur in Inertialsystemen. In beschleunigten Bezugssystemen ist die materielle Ableitung von Ausdehnungsgrößen<sup>3</sup>, wie Vektoren und Tensoren, einer Transformation zu unterziehen, um der Beschleunigung des Beobachters Rechnung zu tragen. Eine solche Transformation ist auch im rotierenden Bezugssystem des Annulus notwendig, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, in dem die allgemeinen Grundgleichungen für die Beschreibung der Flüssigkeitsdynamik vorgestellt werden.

<sup>2</sup> Mit „ $\equiv$ “ bezeichnen wir eine Forderung beziehungsweise Zwangsbedingung. Die Abgrenzung zum gewöhnlichen Gleichheitszeichen „ $=$ “ ist nicht immer eindeutig und wir werden „ $\equiv$ “ überwiegend dann verwenden, wenn wir hervorheben möchten, dass es sich bei einer Gleichung um eine Forderung handelt.

<sup>3</sup> Wir verwenden in dieser Arbeit die anschauliche Bezeichnung „Ausdehnungsgröße“ von Graßmann (1844) als Oberbegriff für vektorielle und tensorielle physikalische Größen.

## 2.2.2 Die vollständig kompressiblen Grundgleichungen

Die Kontinuitätsgleichung (2.13), in der sich die Massenerhaltung eines Flüssigkeitsteilchens widerspiegelt, wurde bereits im vorigen Abschnitt vorgestellt. Eine weitere Größe, die den Zustand eines Flüssigkeitsteilchens charakterisiert, ist dessen Schwerpunktsimpuls. Dessen Bilanzgleichung lautet im mitrotierenden Bezugssystem (Pichler, 1984; Johnson, 1998; Marsden & Ratiu, 1999; Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\rho \left[ \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] = \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbb{P}, \quad (2.17)$$

wobei  $\mathbf{r}$  den Ortsvektor des Flüssigkeitsteilchens bezeichnet, der seinen Anfangspunkt am Ort des Beobachters und seinen Endpunkt im Schwerpunkt des Flüssigkeitsteilchens hat. Als Quelle für Impuls wirkt die massenspezifische Schwerkraft  $\mathbf{g}$ , die antiparallel zur Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  ist (siehe Abbildung 2.1). Ein Austausch von Impuls zwischen benachbarten Flüssigkeitsteilchen oder auch zwischen Flüssigkeitsteilchen und der Berandung des Annulus wird durch den molekularen Impulsflusstensor  $\mathbb{P}$  modelliert. Die Transformation der Beschleunigung des Flüssigkeitsteilchens aus einem Inertialsystem in das rotierende Bezugssystem führt zu Zusatztermen auf der linken Seite von (2.17), namentlich die (massenspezifische) Coriolis-Beschleunigung  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ , die Zentrifugalbeschleunigung  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  und die Euler-Beschleunigung  $d\boldsymbol{\Omega}/dt \times \mathbf{r}$ . Letztere tritt nur in Erscheinung, falls sich die Winkelgeschwindigkeit der Annulusrotation ändert (Marsden & Ratiu, 1999). Um (2.17) auswerten zu können, muss schließlich noch eine Beziehung zwischen molekularem Impulsfluss und anderen Zustandsgrößen des Flüssigkeitsteilchens gefunden werden. Man wählt den Ansatz (Pichler, 1984)

$$\mathbb{P} = p\mathbb{E} + \mathbb{F}, \quad (2.18)$$

wobei  $\mathbb{E}$  den Einheitstensor bezeichnet. Der erste Beitrag zu  $\mathbb{P}$  geht auf den Druck  $p$  zurück. Er ist richtungsunabhängig, da die Kraft, die er auf ein Flächenelement  $d\mathbf{S}$  ausübt, nicht von der Richtung des Elements abhängt ( $-d\mathbf{S} \cdot p\mathbb{E} = -p d\mathbf{S}$ ). Der zweite Beitrag ist der viskose Impulsfluss  $\mathbb{F}$ . Im Gegensatz zum Druck wird  $\mathbb{F}$  nur wirksam, falls benachbarte Flüssigkeitsteilchen Relativbewegungen zueinander ausführen. Die Modellierung von  $\mathbb{F}$  ist jedoch Einschränkungen unterworfen. Dazu betrachten wir die Bilanzgleichung des massenspezifischen Schwerpunktsdrehimpulses des Flüssigkeitsteilchens  $\mathbf{l}_a := \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , auch als äußerer Drehimpuls bezeichnet (siehe Anhang A.1 und Zdunkowski & Bott (2003); Altenbach (2012); Herbert (2012b))

$$\rho \frac{d\mathbf{l}_a}{dt} + \rho \mathbf{r} \times \left[ 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] = \underbrace{\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{g}) + \mathbb{P}_\times}_{=\sigma_{\mathbf{l}_a}} - \nabla \cdot \underbrace{(-\mathbb{P} \times \mathbf{r})}_{=\mathbb{J}_{\mathbf{l}_a}}, \quad (2.19)$$

worin  $\mathbb{P}_\times = \mathbb{F}_\times$  den Vektor des molekularen Impulsflusstensors bezeichnet, zu dem allein sein antisymmetrischer Anteil beiträgt ( $\mathbb{E}_\times = 0$ , siehe Anhang D.2). Gemäß des Drehimpulserhaltungssatzes der klassischen Mechanik ist die Änderung des Gesamtdrehimpulses gleich dem Drehmoment, das die äußeren Kräfte (hier  $\mathbf{g}$ ) auf den Schwerpunkt ausüben (zum Beispiel Stöcker, 2005) zuzüglich des Drehimpulsflusses in der Kontinuumsdynamik.



Dieser Satz wird von (2.19), aufgrund des Beitrags von  $\mathbb{P}_\times$  zur Drehimpulsquellstärke, verletzt. Die Ursache dafür ist, dass  $\mathbf{l}_a$  genau genommen nicht den Gesamtdrehimpuls darstellt. Dieser ist durch  $\mathbf{l}_g = \mathbf{l}_a + \mathbf{l}_i$  gegeben, worin  $\mathbf{l}_i$  für den inneren Drehimpuls des Flüssigkeitsteilchens steht, der auf die Bewegung der Moleküle relativ zum Schwerpunkt zurückzuführen ist. Da in  $\mathbb{P}$  die Information des Impulses der Molekülbewegungen relativ zum Flüssigkeitsteilchenschwerpunkt steckt, kann  $\mathbb{P}_\times$  als Kopplung zwischen den Bilanzen von  $\mathbf{l}_a$  und  $\mathbf{l}_i$  verstanden werden. In der Bilanzgleichung von  $\mathbf{l}_i$  trägt  $\mathbb{P}_\times$  mit negativem Vorzeichen zur Quellstärke bei, sodass  $\mathbb{P}_\times$  in der Bilanzgleichung von  $\mathbf{l}_g = \mathbf{l}_a + \mathbf{l}_i$  nicht mehr auftaucht und der Drehimpulserhaltungssatz für  $\mathbf{l}_g$  erfüllt ist (Meixner, 1961; Herbert, 1978b). Im klassischen Gleichungssystem der Fluidodynamik wird die Bilanzgleichung von  $\mathbf{l}_i$  jedoch nicht berücksichtigt, sodass  $\mathbb{P}_\times \neq 0$  praktisch bedeutet, dass Drehimpuls aus dem „Nichts“ entsteht oder dahin verschwindet. Da zum Vektor eines Tensors allein sein antisymmetrischer Anteil beiträgt (siehe Anhang D.2), können wir durch die Forderung danach, dass  $\mathbb{P}$  ein symmetrischer Tensor sein soll ( $\mathbb{P}^\dagger = \mathbb{P}$ , worin das hochgestellte  $\dagger$  die Transponierung des Tensors kennzeichnet) erzwingen, dass  $\mathbb{P}_\times = \mathbb{F}_\times = 0$ . Dadurch wird  $\mathbf{l}_a$  von  $\mathbf{l}_i$  entkoppelt und der Drehimpulserhaltungssatz bleibt unverletzt.<sup>4</sup>

An dieser Stelle ist es vorteilhaft, einen Blick auf die Thermodynamik zu werfen, denn durch sie gelangen wir schließlich zu einem möglichen Modellierungsansatz für  $\mathbb{F}$ . Für die massenspezifische innere Energie eines im oder nahe dem thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeitsteilchens erhalten wir gemäß des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik die Bilanzgleichung (siehe Pichler (1984); Kluge & Neugebauer (1994); Zdunkowski & Bott (2004) und Anhang A.2)

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \rho \frac{dq}{dt}, \quad (2.20)$$

worin  $e$  die massenspezifische innere Energie,  $d\mathbf{a}/dt$  die massenspezifische thermodynamische Arbeitsleistung, die vom oder am Flüssigkeitsteilchen verrichtet wird und  $dq/dt$  den Wärmeaustausch zwischen dem Flüssigkeitsteilchen und seiner Umgebung bezeichnen. Das Zeichen  $d$  steht für ein unvollständiges Differential, da Arbeit und Wärmemenge, anders als die innere Energie, keine Zustandsgrößen des Teilchens, sondern Prozessgrößen sind, die für gewöhnlich kein vollständiges Differential besitzen. Die Arbeitsleistung setzt sich zusammen aus der Volumenarbeit und der Dissipationsrate beziehungsweise Reibungswärme (siehe Anhang A.2)

$$\rho \frac{d\mathbf{a}}{dt} = -\rho p \frac{dv}{dt} - \mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (2.21)$$

Dabei bezeichnet  $v := dV/dM = 1/\rho$  das massenspezifische Volumen des Flüssigkeitsteilchens und  $\mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v}$  steht für das Doppelskalarprodukt des Tensors  $\mathbb{F}^\dagger$  mit dem Tensor  $\nabla \mathbf{v}$  (siehe Anhang D.3). Der Wärmeaustausch wird mithilfe eines Flusses  $\mathbf{J}_q$  über die Oberfläche des Flüssigkeitsteilchens beschrieben

$$\rho \frac{dq}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q. \quad (2.22)$$

---

<sup>4</sup> Bilanzgleichungen für die Atmosphäre, die eine Wechselwirkung zwischen äußerem und innerem Drehimpuls berücksichtigen, finden sich bei Herbert (1978b).

Wir halten als Zwischenergebnis fest (Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\rho \left( \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = \rho \left( \frac{dh}{dt} - v \frac{dp}{dt} \right) = \underbrace{-\mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q}_{=:\rho \frac{dq^*}{dt}}, \quad (2.23)$$

worin  $h = e + vp$  die Enthalpie – eine in der Atmosphärendynamik bevorzugte Zustandsgröße – bezeichnet. Mithilfe einer Zustandsgleichung (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\mathcal{Z}(T, p, v) = 0, \quad (2.24)$$

gelingt es uns, die ursprünglichen drei thermodynamischen Freiheitsgrade  $T$ ,  $p$  und  $v$  auf zwei Freiheitsgrade zu verringern. Die innere Energie wird nun üblicherweise als Funktion der Temperatur und des spezifischen Volumens betrachtet, sodass wir ihr Differential folgendermaßen entwickeln können (zum Beispiel Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004; Herbert, 2012b)

$$de(T, v) = \underbrace{\left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v}_{=:c_v} dT + \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv, \quad (2.25)$$

wobei, wie in der Thermodynamik üblich, durch den Klammerindex gekennzeichnet wird, welche Größe bei der Bildung der partiellen Ableitung festzuhalten ist. Ferner bezeichnet  $c_v = c_v(T, v)$  die massenspezifische Wärmekapazität bei festgehaltenem Volumen. Die Enthalpie wird hingegen als Funktion der in der Atmosphäre verhältnismäßig einfach zu messenden Zustandsgrößen  $T$  und  $p$  betrachtet

$$dh(T, p) = \underbrace{\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}_{=:c_p} dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp, \quad (2.26)$$

worin  $c_p = c_p(T, p)$  für die massenspezifische Wärmekapazität bei festgehaltenem Druck steht. Damit erhalten wir den ersten Hauptsatz in seiner üblichen, differentiellen Gestalt (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\rho \left\{ c_v \frac{dT}{dt} + \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \frac{dv}{dt} \right\} = \rho \left\{ c_p \frac{dT}{dt} + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] \frac{dp}{dt} \right\} = \rho \frac{dq^*}{dt}. \quad (2.27)$$

In Bezug auf die Differentialform

$$dq^* = de + pdv = dh - vdp \quad (2.28)$$

findet man im Falle des idealen Gases analytisch und ansonsten aus der experimentellen Erfahrung, dass die absolute Temperatur als integrierender Nenner fungiert, der (2.28) in ein vollständiges Differential überführt, nämlich dasjenige der massenspezifischen Entropie  $s$  (zum Beispiel Päsler, 1964; Herbert, 2012b)

$$ds = \frac{1}{T}(de + pdv) = \frac{1}{T}(dh - vdp) = \frac{1}{T} dq^*. \quad (2.29)$$

Diese Gleichung (multipliziert mit  $T$ ) wird auch als Gibbs'sche Fundamentalgleichung des Flüssigkeitsteilchens bezeichnet. Formulieren wir (2.29) als Bilanzgleichung nach (2.15) (siehe Meixner (1943); Herbert (1973); Pichler (1984); Kluge & Neugebauer (1994); Jou *et al.* (2001); Zdunkowski & Bott (2004); Herbert (2012b) und Anhang A.2 für weitere Einzelheiten)

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} &= \frac{\rho}{T} \left( \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\rho}{T} \left( \frac{dh}{dt} - v \frac{dp}{dt} \right) \\ &= \frac{\rho}{T} \frac{dq^*}{dt} = \frac{1}{T} \left( -\mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q \right) \\ &= \underbrace{\mathbb{F}^\dagger \cdot \left( -T^{-1} \nabla \mathbf{v} \right) + \mathbf{J}_q \cdot \left( -T^{-2} \nabla T \right)}_{=\sigma_s} - \nabla \cdot \underbrace{\left( T^{-1} \mathbf{J}_q \right)}_{=\mathbf{J}_s}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

so erlangen wir Zugriff auf die Entropiequellendichte  $\sigma_s$ . Diese speist sich aus irreversiblen Prozessen im Flüssigkeitsteilchen und ist damit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik unterworfen

$$\sigma_s = \mathbb{F}^\dagger \cdot \left( -T^{-1} \nabla \mathbf{v} \right) + \mathbf{J}_q \cdot \left( -T^{-2} \nabla T \right) \geq 0. \quad (2.31)$$

Der Entropieaustausch mit der Umgebung,  $\rho d_a s / dt = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s$ , muss dem zweiten Hauptsatz nicht genügen, er kann sowohl negativ als auch positiv sein. Die Ungleichung (2.31) ist ein zentrales Ergebnis der irreversiblen Thermodynamik: Um die bisher unbestimmten nichtadvektiven Flüsse  $\mathbb{F}$  und  $\mathbf{J}_q$  „mit Leben zu füllen“, können wir den zweiten Hauptsatz in der Gestalt (2.31) zu Rate ziehen, denn es liegt nahe, diese Flüsse als lineare Funktion der sogenannten thermodynamischen Antriebe  $(-T^{-1} \nabla \mathbf{v})$  und  $(-T^{-2} \nabla T)$  zu modellieren. Dies führt im einfachsten Falle zum Fourier'schen Wärmeleitungsansatz

$$\mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T, \quad (2.32)$$

mit dem Wärmeleitungskoeffizienten  $\lambda > 0$  und zu

$$\mathbb{F} = -\eta \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbb{E} \right] - \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbb{E}, \quad (2.33)$$

mit dem dynamischen Viskositätskoeffizienten  $\eta > 0$  und dem Volumenviskositätskoeffizienten  $\mu > 0$ . Die Koeffizienten  $\lambda$ ,  $\eta$  und  $\mu$  können noch von Zustandsgrößen wie der Temperatur und dem Druck abhängen. Durch Streichung des antisymmetrischen Anteils von  $\nabla \mathbf{v}$  im Ansatz (2.33), wird der Forderung nach  $\mathbb{F}_\times = 0$  aus der Bilanz des äußeren Drehimpulses (2.19) Rechnung getragen (eine ausführlichere Betrachtung findet sich im Anhang A.2).

### 2.2.3 Die Boussinesq-Näherung

Würden die vollständig kompressiblen Grundgleichungen für die numerische Simulation von Flüssigkeiten herangezogen, so müssten sehr kleine Zeitschritte in der Zeitintegration verwendet werden. Der Grund dafür liegt darin, dass die Grundgleichungen auch

Schallwellen beschreiben, die beispielsweise in Wasser eine Phasengeschwindigkeit von  $c_S = 1480 \text{ m/s}$  bei  $20^\circ\text{C}$  besitzen (Stöcker, 2005). Um die Fortpflanzung von Schallwellen auf einem numerischen Gitter mit einer Maschenweite von der Größenordnung  $\Delta x \sim 1 \text{ mm}$ <sup>5</sup> – ein durchaus üblicher Wert für den Annulus – mit ausreichender Genauigkeit zu simulieren und mögliche numerische Instabilitäten zu vermeiden, müsste nach dem Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)-Kriterium ein Zeitschritt von der Größenordnung  $\Delta t \sim \Delta x/c_S \sim 10^{-6} \text{ s}$  verwendet werden (Durrant, 1999). Wäre die zu simulierende physikalische Zeitspanne beispielsweise von der Größenordnung Minuten bis Stunden, so entstünden aus einem solch kleinen Zeitschritt enorme Computerrechenzeiten. Sofern die Annahme zulässig ist, dass Schallwellen in der betrachteten Strömung nur eine untergeordnete Rolle spielen, ist es daher zweckmäßig die Grundgleichungen so abzuwandeln, dass die Schallwellen nicht mehr Bestandteil der Lösung sind. Eine solche Modifikation wird als Schallwellenfilterung bezeichnet (zum Beispiel Hinkelmann, 1962; Herbert, 1971). Ein möglicher Filter ist die sogenannte Boussinesq-Näherung der Grundgleichungen. Sie wurde 1879 von Oberbeck eingeführt und unabhängig davon erneut durch Boussinesq (1903) beschrieben. Diese Näherung bietet sich auch für die Modellierung der Flüssigkeitsströmung im Annulus an. Sie erleichtert nicht nur dessen numerische Simulation, sondern auch einige der theoretischen Betrachtungen. Wir werden im Folgenden die Änderungen vorstellen, denen die vollständig kompressiblen Gleichungen im Rahmen der Boussinesq-Näherung unterzogen werden, ohne jedoch genauer auf die Rechtfertigung der einzelnen Näherungsschritte einzugehen. Wir verweisen diesbezüglich auf die Literatur (zum Beispiel Vallis, 2006).

Ausgangspunkt ist die Feststellung, dass innerhalb der üblicherweise verwendeten Temperaturspanne von  $|T_b - T_a| \sim 10 \text{ K}$  die Dichteschwankungen des Wassers  $\delta\rho$  verhältnismäßig klein sind im Vergleich zur konstanten Referenzdichte des Wassers  $\rho_0$  bei der Referenztemperatur  $T_0 = (T_a + T_b)/2$

$$|\delta\rho| \ll \rho_0. \quad (2.34)$$

Zerlegen wir die Geschwindigkeit nach Helmholtz in einen divergenzfreien Anteil  $\mathbf{v}_r$ , der  $\nabla \cdot \mathbf{v}_r = 0$  erfüllt, und einen rotationsfreien Anteil  $\mathbf{v}_d$ , der  $\nabla \times \mathbf{v}_d = 0$  erfüllt (Pichler, 1984; Zdunkowski & Bott, 2003), so lautet die Kontinuitätsgleichung (2.13) für diese beiden Anteile

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_r = 0, \quad (2.35a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v}_d. \quad (2.35b)$$

Aus einer Skalenabschätzung von (2.35b) folgt aufgrund von (2.34)  $|\mathbf{v}_d| \ll |\mathbf{v}_r|$ . Dies motiviert die Näherung beziehungsweise Zwangsbedingung  $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_r$ . Gemäß (2.35a) lautet die Kontinuitätsgleichung des Boussinesq-Modells daher

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.36)$$

---

<sup>5</sup> Mit „ $\sim$ “ bezeichnen wir, dass die Größenordnung des Betrages der Größe auf der linken Seite gleich dem (dimensionslosen oder dimensionsbehafteten) Zahlenwert auf der rechten Seite ist.

(2.36) wird auch als Inkompressibilitätsbedingung bezeichnet und ist zentral für die schallfilternde Wirkung der Boussinesq-Näherung (Vallis, 2006). Durch die Vernachlässigung des Anteils (2.35b) werden Dichteänderungen innerhalb des Boussinesq-Modells von der Kontinuitätsgleichung entkoppelt und müssen auf anderem Wege bestimmt werden.

Wenden wir uns als nächstes der Impulsgleichung (2.17) zu. Es ist üblich, die Dynamik relativ zum Referenzzustand der ruhenden Flüssigkeit zu beschreiben. Zerlegen wir, analog zur Dichte, den Druck  $p$  in einen Referenzwert  $p_0$  und eine Abweichung davon  $\delta p$ , so ist der Referenzzustand durch das hydrostatische Gleichgewicht bestimmt (Hide, 1958; Hignett *et al.*, 1985)

$$\nabla \cdot (p_0 \mathbb{E}) = \nabla p_0 = \begin{cases} \rho_0 \mathbf{g} - \rho_0 [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})], & \text{(I)} \\ \rho_0 \mathbf{g}, & \text{(II)} \end{cases} \quad (2.37)$$

Dabei werden zwei Fälle unterschieden: Im Falle I wird vorausgesetzt, dass die Winkelgeschwindigkeit des Annulus konstant ist, sodass ein Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten, der Schwerkraft und der Zentrifugalbeschleunigung besteht. Ist die Winkelgeschwindigkeit hingegen eine Funktion der Zeit,  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t)$ , so kann die Zentrifugalbeschleunigung nicht Teil des hydrostatischen Gleichgewichts sein. Dies ist der Fall II. Zieht man (2.37) von der Impulsbilanz ab und teilt diese durch die Dichte, so erhält man

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \frac{\delta\rho}{\rho_0} \mathbf{g} - \nabla \left( \frac{\delta p}{\rho_0} \right) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \mathbb{F} \right) + \begin{cases} -\frac{\delta\rho}{\rho_0} [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})], & \text{(I)} \\ -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}, & \text{(II)} \end{cases} \quad (2.38)$$

Aufgrund von (2.34) werden Dichteschwankungen durch die Näherung  $1/\rho \approx 1/\rho_0$  in fast allen Termen auf der rechten Seite von (2.38) vernachlässigt. Nur vermittelt Schwerkraft und Zentrifugalbeschleunigung können Dichteschwankungen einen wesentlichen Einfluss auf die Dynamik ausüben. Darüber hinaus besitzt der viskose Impulsfluss (2.33) aufgrund der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes (2.36) die einfachere Gestalt

$$\frac{1}{\rho_0} \mathbb{F} = -\nu [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger], \quad (2.39)$$

mit der kinematischen Viskosität  $\nu := \eta/\rho_0$ . Um die Impulsgleichung übersichtlicher zu gestalten, werden wir im Folgenden die Abkürzungen  $\tilde{\rho} := \delta\rho/\rho_0$ ,  $\tilde{p} := \delta p/\rho_0$  und  $\tilde{\mathbb{F}} := \mathbb{F}/\rho_0$  verwenden.

Schließlich hat (2.34) auch Auswirkungen auf die Bilanz der inneren Energie beziehungsweise Enthalpie (2.27). Die beiden Terme  $[(\partial e/\partial v)_T + p]dv/dt$  und  $[(\partial h/\partial p)_T - v]dp/dt$  sind verglichen mit  $c_v dT/dt$  und  $c_p dT/dt$  verhältnismäßig klein, sodass sie vernachlässigt werden. Dies bedeutet praktisch, dass  $c_v = c_p =: c$  (vergleiche Kluge & Neugebauer, 1994). Zudem gilt in den betrachteten Temperaturbereichen näherungsweise  $c = \text{konst.}$  Der Beitrag der Dissipationsrate zur inneren Energie des Flüssigkeitsteilchens ist üblicherweise verschwindend klein im Vergleich zum Beitrag der Wärmeleitung (Vallis, 2006). Daher wird auch sie hier vernachlässigt. Man erhält schließlich

$$\frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (2.40)$$

**Tabelle 2.1:** Koeffizienten für die Parametrisierung der Temperaturabhängigkeit der Dichte, kinematischen Viskosität und Temperaturleitfähigkeit von Wasser. Die Koeffizienten wurden durch die Berechnung einer Ausgleichsparabel an die in Abbildung 2.2 gezeigten Daten ermittelt. Die Standardabweichung der Koeffizienten ist ebenfalls angegeben.

Koeffizient	Dichte $\rho$	Kinematische Viskosität $\nu$	Temperaturleitfähigkeit $\kappa$
$\alpha$	$(1000,79 \pm 0,09) \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$	$(1,584 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$	$(1,3384 \pm 0,0004) \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
$\beta$	$-(5,7 \pm 0,6) \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3 \text{K}}$	$-(3,25 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \frac{\text{cm}^2}{\text{sK}}$	$(5,19 \pm 0,03) \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^2}{\text{sK}}$
$\gamma$	$-(3,9 \pm 0,1) \cdot 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3 \text{K}^2}$	$(2,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-6} \frac{\text{cm}^2}{\text{sK}^2}$	$-(1,86 \pm 0,03) \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^2}{\text{sK}^2}$

$\kappa := \lambda/(\rho_0 c)$  bezeichnet dabei die Temperaturleitfähigkeit.

Die Zustandsgleichung (2.24) ist für viele Flüssigkeiten in guter Näherung eine Beziehung allein zwischen Dichte und Temperatur. Farnell & Plumb (1975), James *et al.* (1981) und Hignett *et al.* (1985) folgend, parametrisieren wir die Abhängigkeit der Dichte von der Temperatur durch einen Potenzreihenansatz, wobei Potenzen  $T^n$  mit  $n > 2$  vernachlässigt werden

$$\rho = \rho(T) = \alpha_\rho + \beta_\rho T + \gamma_\rho T^2. \quad (2.41)$$

Auch die kinematische Viskosität  $\nu$  und die Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  zeigen eine gewisse Temperaturabhängigkeit, die ebenfalls verhältnismäßig genau durch einen Ansatz der Form (2.41) parametrisiert werden kann

$$\nu = \alpha_\nu + \beta_\nu T + \gamma_\nu T^2, \quad (2.42)$$

$$\kappa = \alpha_\kappa + \beta_\kappa T + \gamma_\kappa T^2. \quad (2.43)$$

Die Temperatur  $T$  in (2.41), (2.42) und (2.43) wird in  $^\circ\text{C}$  gemessen. Um die Koeffizienten der drei Parametrisierungen zu bestimmen, wurden Ausgleichsparabeln für tabellierte Werte von  $\rho$ ,  $\nu$  und  $\kappa$  für Wasser zwischen  $T = 10^\circ\text{C}$  und  $T = 70^\circ\text{C}$ , bei einem Druck von  $p = 1000 \text{ hPa}$ , entnommen aus Verein Deutscher Ingenieure *et al.* (2006), berechnet. Die Koeffizienten sind in Tabelle 2.1 aufgelistet und die Güte der Ausgleichsparabeln ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Abschließend wird die Temperaturkoordinate in den Parabeln  $\phi = \alpha_\phi + \beta_\phi T + \gamma_\phi T^2$ , mit  $\phi = \rho, \nu, \kappa$ , einer Translation unterzogen, sodass die Bezugstemperatur nicht mehr  $0^\circ\text{C}$ , sondern die Temperatur des Referenzzustands  $T_0$  ist

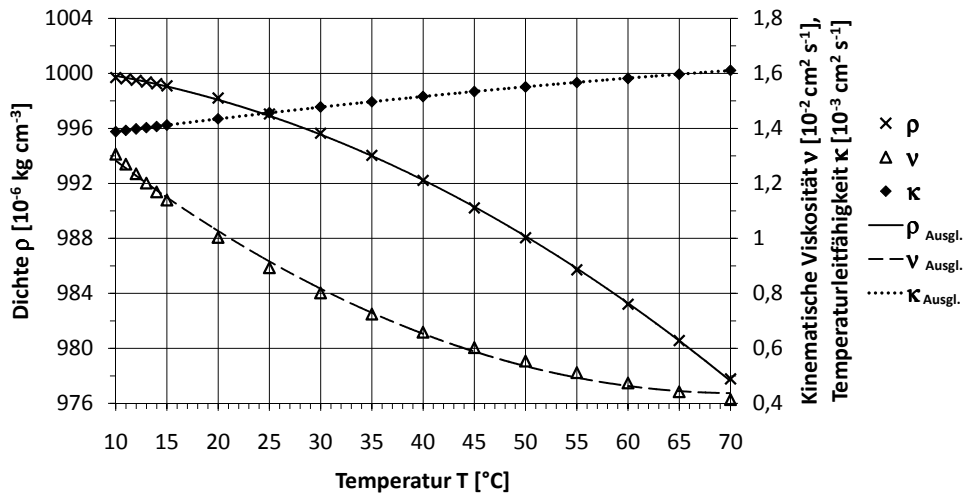
$$\phi = \phi_0 \left[ 1 + \phi_1 (T - T_0) + \phi_2 (T - T_0)^2 \right]. \quad (2.44)$$

Die neuen Koeffizienten können mittels

$$\phi_0 = \alpha_\phi + \beta_\phi T_0 + \gamma_\phi T_0^2, \quad (2.45a)$$

$$\phi_2 = \gamma_\phi / \phi_0, \quad (2.45b)$$

$$\phi_1 = \beta_\phi / \phi_0 + 2\phi_2 T_0 \quad (2.45c)$$



**Abbildung 2.2:** Temperaturabhängigkeit der Dichte  $\rho$ , kinematischen Viskosität  $\nu$  und Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  von Wasser bei einem Druck von 1000 hPa. Die Markierungen (Kreuz, Dreieck und Raute) bezeichnen tabellierte Werte vom Verein Deutscher Ingenieure *et al.* (2006, Abschnitt Db a 2). Darüber hinaus sind die Ausgleichsparabeln eingezeichnet, deren Koeffizienten in Tabelle 2.1 aufgelistet sind. Die Korrelation zwischen den Parabeln und den Tabellenwerten (Bronstein *et al.*, 2001) ist in allen Fällen größer als 0,99.

berechnet werden.

Das Gleichungssystem (2.36), (2.38), (2.40) und (2.41) ist grundsätzlich vollständig. Allerdings ist noch nicht ersichtlich, wie der Druck  $\tilde{p} = \delta p / \rho_0$  bestimmt werden kann. Zu diesem Zweck berechnen wir die Divergenz der Impulsgleichung (2.38) und eliminieren die auftretenden Geschwindigkeitsdivergenzen gemäß (2.36). Nach einigen Umformungen erhalten wir die Poisson-Gleichung des Drucks (siehe Anhang A.3)

$$\nabla^2 \tilde{p} = -\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g} \cdot \nabla \tilde{\rho} - \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}} + \begin{cases} 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot \nabla \tilde{\rho} + 2\Omega^2 \tilde{\rho}, & \text{(I)} \\ 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}), & \text{(II)} \end{cases} \quad (2.46)$$

(vergleiche Williams, 1969; James *et al.*, 1981; Hignett *et al.*, 1985). Darin bezeichnet  $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v}$  die Vorticity. Anders als in den vollständig kompressiblen Gleichungen ist der Druck hier nicht mehr eine Zustandsgröße, die unmittelbar mit der Thermodynamik verknüpft ist. Vielmehr kann er als ein Hilfsfeld betrachtet werden, das die Inkompressibilitätsbedingung,  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , an die Impulsgleichung vermittelt, sodass die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen zu allen Zeiten im Einklang mit dieser Bedingung ist (Gresho & Sani, 1987; Ferziger & Perić, 2008).

Wir haben nun die Boussinesq-Gleichungen kennen gelernt, welche die Grundlage für die Beschreibung der Flüssigkeitsdynamik im Annulus bilden (Farnell & Plumb, 1975, 1976; Hignett *et al.*, 1985). Da Dichteschwankungen nur im Zusammenspiel mit Schwerkraft und Zentrifugalbeschleunigung berücksichtigt werden, ist die Struktur der Boussinesq-Gleichungen einfacher als jene der kompressiblen Grundgleichungen. Dies wird aber um den Preis erkauft, dass die genäherten Gleichungen nicht mehr zwangsläufig physikalisch konsistent sind. So ist beispielsweise die Gesamtenergie eines Flüssigkeitsteilchens

streng genommen keine Erhaltungsgröße mehr (siehe Anhang A.4 und zum Beispiel Vallis (2006))

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \tilde{\rho}\Phi + e \right) = -\nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{J}}_q) + \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \Phi \frac{d\tilde{\rho}}{dt}, \quad (\text{I}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \tilde{\rho}\Phi_g + e \right) = -\nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{J}}_q) + \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \Phi_g \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \\ \quad - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot \mathbf{v} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot \mathbf{l}_a \quad (\text{II}) \end{array} \right. , \quad (2.47)$$

worin  $\Phi = \Phi_g + \Phi_\Omega$  die Summe aus dem Schwerkraftpotential  $\Phi_g$  und dem Zentrifugalpotential  $\Phi_\Omega$  bezeichnet. Weitere Bezeichnungen sind  $\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{p}\mathbb{E} + \tilde{\mathbb{F}}$  und  $\tilde{\mathbf{J}}_q := \mathbf{J}_q/\rho_0 = -(\lambda/\rho_0)\nabla T$ . Die Größe  $\tilde{\rho}\Phi$  beziehungsweise  $\tilde{\rho}\Phi_g$  kann als reduzierte potentielle Energie betrachtet werden, denn der Großteil der potentiellen Energie steckt im subtrahierten Referenzzustand (2.37). Die Trägheitsbeiträge zur Gesamtenergiebilanz auf der rechten Seite von (2.47) (durch Zentrifugal- und Euler-Beschleunigung) sind dem rotierenden Bezugssystem geschuldet und stellen kein Problem dar. Die Dissipationsrate  $\tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v}$  bildet jedoch eine unphysikalische Senke in der Gesamtenergiebilanz, da sie in der Bilanz der inneren Energie (2.40) vernachlässigt wurde. Auch der Term  $\Phi_{(g)}d\tilde{\rho}/dt$  ist eine inkonsistente Quelle beziehungsweise Senke. Um die Gesamtenergiebilanz diesbezüglich zu berichtigen, könnte dieser Term im Rahmen des Boussinesq-Modells als thermodynamischer Anteil an der Auftriebsarbeit gedeutet werden

$$\left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{\text{Auftr.}} = -\Phi_{(g)} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\Phi_{(g)} \frac{d\tilde{\rho}}{dT} \frac{dT}{dt}, \quad (2.48)$$

den man der Bilanz der inneren Energie zurechnet. Die Wirkung dieser Arbeit entspräche einer Korrektur der Wärmekapazität des Flüssigkeitsteilchens

$$c \frac{dT}{dt} - \left( \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right)_{\text{Auftr.}} = \left( c + \Phi_{(g)} \frac{d\tilde{\rho}}{dT} \right) \frac{dT}{dt}. \quad (2.49)$$

Betrachten wir  $\Phi_g = gz$ , mit der Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ , so finden wir aber für typische Füllhöhen des Annulus von der Größenordnung 0,1 m sowie eine Wärmekapazität von  $c = 4182 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$  für Wasser bei  $20^\circ\text{C}$ , dass  $|\Phi_{(g)}d\tilde{\rho}/dT| \ll c$  (vergleiche Stöcker, 2005; Vallis, 2006; Tailleux, 2012). Die Vernachlässigung dieses Arbeitsterms ist somit zulässig. Eine ausführliche Betrachtung der energetischen und thermodynamischen Konsistenz einiger schallfilternder Gleichungen, insbesondere auch der Boussinesq-Näherung, findet sich bei Tailleux (2012).

## 2.2.4 Die Vermessung in Zylinderkoordinaten

In Abschnitt 2.2.3 wurden die Boussinesq-Gleichungen in koordinatenunabhängiger Form vorgestellt. Wenn es, mit Blick auf das numerische Modell des Annulus, um die konkrete Berechnung von Zahlenwerten geht, muss ein Koordinatensystem gewählt werden, in welchem die physikalischen Ausdehnungsgrößen (Vektoren und Tensoren) vermessen werden. In Abschnitt 2.1 wurden bereits Zylinderkoordinaten als ein an die Geometrie des Annulus



angepasstes System gewählt. Um nun vektorielle Größen zu vermessen, werden sie mittels Skalarprodukt auf die orthonormalen Einheitsvektoren des Koordinatensystems projiziert. Für einen allgemeinen Vektor  $\mathbf{a}$  erhält man daraus, bei Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention (Bronstein *et al.*, 2001), die Darstellung  $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$ , mit  $i = \vartheta, r, z$  und den Koeffizienten  $a_i := \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$ . Die Vermessung eines allgemeinen Tensors  $\mathbb{A}$  erfolgt durch Projektion auf die Einheitsdyaden  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ( $i, j = \vartheta, r, z$ ) mithilfe des Doppelskalarproduktes (vergleiche Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012). Hieraus folgt die Darstellung  $\mathbb{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ , mit  $A_{ij} := \mathbb{A}^\dagger \cdot \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \cdot \mathbb{A}^\dagger$ <sup>6</sup>.

Wenden wir die zuvor genannten Projektionen auf die Vektor- und Tensorgrößen in den Boussinesq-Gleichungen an, so erhalten wir  $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$  für den Ortsvektor, da  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_\vartheta = 0$ . Die Abhängigkeit vom Azimutwinkel ist implizit durch  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\vartheta)$  gegeben. Die Vermessung der Schwerkraft und Winkelgeschwindigkeit ergibt  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$  und  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ . Für die Geschwindigkeit verwenden wir die Notation  $\mathbf{v} = u \mathbf{e}_\vartheta + v \mathbf{e}_r + w \mathbf{e}_z$ . Die Entwicklung des Nabla-Operators in Zylinderkoordinaten liefert  $\nabla = \mathbf{e}_\vartheta(1/r) \partial / \partial \vartheta + \mathbf{e}_r \partial / \partial r + \mathbf{e}_z \partial / \partial z$  (Bronstein *et al.*, 2001). Ordnen wir die Koeffizienten des viskosen Impulsflusses  $\mathbb{F} = \tilde{F}_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  in einer Matrix an, so lautet diese (Bestehorn, 2006)

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_{\vartheta\vartheta} & \tilde{F}_{\vartheta r} & \tilde{F}_{\vartheta z} \\ \tilde{F}_{r\vartheta} & \tilde{F}_{rr} & \tilde{F}_{rz} \\ \tilde{F}_{z\vartheta} & \tilde{F}_{zr} & \tilde{F}_{zz} \end{pmatrix} = -\nu \begin{pmatrix} 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{v}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} & 2 \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} & \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} & 2 \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Die metrischen Zusatzterme in den Koeffizienten ergeben sich daraus, dass  $\mathbf{e}_\vartheta$  und  $\mathbf{e}_r$  Funktionen des Azimutwinkels sind. Dies lässt sich am besten zeigen, wenn  $\mathbf{e}_\vartheta$  und  $\mathbf{e}_r$  auf die Einheitsvektoren eines kartesischen Koordinatensystems projiziert werden, das Ursprung und Vertikalachse mit dem Zylinderkoordinatensystem teilt und dessen horizontale Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{e}_y$  in geeigneter Weise ausgerichtet sind (Burg *et al.*, 2006)

$$\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta) = -\sin(\vartheta) \mathbf{e}_x + \cos(\vartheta) \mathbf{e}_y, \quad (2.51a)$$

$$\mathbf{e}_r(\vartheta) = \cos(\vartheta) \mathbf{e}_x + \sin(\vartheta) \mathbf{e}_y. \quad (2.51b)$$

Aus (2.51) folgt für die Gradienten der beiden Einheitsvektoren

$$\nabla \mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\vartheta}{\partial \vartheta} = -\frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r, \quad (2.52a)$$

$$\nabla \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta. \quad (2.52b)$$

Diese Beiträge sind bei der Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten  $\nabla \mathbf{v}$  (siehe (2.39)) zu berücksichtigen.

<sup>6</sup> Zur Veranschaulichung dieser Projektion folgen wir der üblichen Vorgehensweise und nehmen an, dass die Koordinatendarstellung des Tensors bereits vorliegt:  $\mathbb{A}^\dagger \cdot \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A_{kl} (\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l)^\dagger \cdot \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A_{kl} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k \cdot \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A_{kl} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_j) = A_{ij} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j) = A_{ij}$  (vergleiche Anhang D.3).

Auch die Boussinesq-Gleichungen sind entsprechend in Zylinderkoordinaten zu vermessen. Die Kontinuitätsgleichung (2.36) lautet dann

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.53)$$

Projiziert man die Impulsbilanz (2.38) auf die zylindrischen Einheitsvektoren, so erhält man für die drei Koeffizienten

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}u) - \frac{uw}{r} - \nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{e}_\vartheta) - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}_\vartheta - \frac{\tilde{F}_{\vartheta r}}{r} - 2\Omega v + \begin{cases} 0, & \text{(I)} \\ -\frac{d\Omega}{dt}r, & \text{(II)} \end{cases}, \quad (2.54a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}v) + \frac{u^2}{r} - \nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{e}_r) - \frac{\tilde{p}}{r} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}_r + \frac{\tilde{F}_{\vartheta\vartheta}}{r} + 2\Omega u + \begin{cases} \tilde{\rho}\Omega^2 r, & \text{(I)} \\ \Omega^2 r, & \text{(II)} \end{cases}, \quad (2.54b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}w) - \nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{e}_z) - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}_z - \tilde{\rho}g. \quad (2.54c)$$

Dabei wurden die Vektoren  $\tilde{\mathbf{F}}_\vartheta := \tilde{\mathbb{F}} \cdot \mathbf{e}_\vartheta$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_r := \tilde{\mathbb{F}} \cdot \mathbf{e}_r$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_z := \tilde{\mathbb{F}} \cdot \mathbf{e}_z$  eingeführt. Bei der Projektion der Tensordivergenzen auf die Einheitsvektoren ist die Identität  $(\nabla \cdot \mathbb{A}) \cdot \mathbf{a} = \nabla \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbf{a}) - \mathbb{A}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{a}$  für einen beliebigen Tensor  $\mathbb{A}$  und einen beliebigen Vektor  $\mathbf{a}$  zu beachten (vergleiche (A.12) in Anhang A.2). Als ein Beispiel betrachten wir folgende Projektion aus (2.54a)

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}}) \cdot \mathbf{e}_\vartheta &= \nabla \cdot (\tilde{\mathbb{F}} \cdot \mathbf{e}_\vartheta) - \tilde{\mathbb{F}}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{e}_\vartheta = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}_\vartheta + \tilde{\mathbb{F}}^\dagger \cdot \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta \mathbf{e}_r \\ &= \nabla \cdot \tilde{\mathbf{F}}_\vartheta + \frac{\tilde{F}_{\vartheta r}}{r}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

wobei (2.52a) und im letzten Schritt die Berechnungen in Fußnote 6 verwendet wurden. Entsprechendes gilt für die Divergenz des Drucks und des advektiven Flusses. Von welcher Seite wir dabei skalar mit den Einheitsvektoren multiplizieren, ob von rechts, wie in (2.55) oder von links, spielt letztlich keine Rolle, da alle Tensoren in der Impulsgleichung symmetrisch sind. Im Hinblick auf das Finite-Volumen-Verfahren, das in der numerischen Strömungsmodellierung zur Anwendung kommt, haben wir (2.54) bereits als ortsfeste Bilanzgleichungen formuliert. Dies wollen wir abschließend auch für die Bilanz der inneren Energie (2.40) machen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{v}T) + \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (2.56)$$

wobei der Temperaturgradient in Zylinderkoordinaten folgendermaßen lautet

$$\nabla T = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{e}_z \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2.57)$$

## 2.2.5 Die Randbedingungen

Damit die Beschreibung der Flüssigkeit im Annulus durch die Boussinesq-Gleichungen wohldefiniert ist, ist die Lösung derselben oder geeignete Bedingungen, welche die Lösung

erfüllen muss, auf der Berandung des Annulus vorzugeben. Bevor wir diese Randbedingungen genauer betrachten, möchten wir einen Blick auf die Flüssigkeitsoberfläche werfen. In Abschnitt 2.1 wurde erwähnt, dass die Möglichkeit besteht, die Oberfläche in Kontakt mit einem Deckel zu bringen, sodass ihre Höhe  $h$  erzwungenermaßen überall der Gleichgewichtsfüllhöhe  $d$  entspricht. Lässt man die Oberfläche hingegen frei, so wird sie sich aufgrund der Flüssigkeitsdynamik wölben. Um die Größenordnung dieser Wölbungen abzuschätzen, nehmen wir an, dass der größte Beitrag durch die Zentrifugalbeschleunigung erzeugt wird. Betrachten wir nun den Referenzzustand der Flüssigkeit für Fall I ( $\boldsymbol{\Omega} = \text{konst.}$ ,  $\mathbf{v} = 0$ ,  $T = T_0$ ), so können wir die Projektionen des hydrostatischen Gleichgewichts (2.37) auf  $\mathbf{e}_r$  und  $\mathbf{e}_z$  jeweils entlang  $r$  und  $z$  integrieren, um die relative Änderung der Oberflächenhöhe mit dem Radius zu erhalten. Setzen wir den durch die Zentrifugalbeschleunigung bedingten Höhenunterschied zwischen äußerer und innerer Zylinderwand in Relation zur Gleichgewichtsfüllhöhe, so bekommen wir (vergleiche Vincze *et al.*, 2015)

$$\frac{h(b, \Omega) - h(a, \Omega)}{d} = \frac{\Omega^2}{g} \frac{a + b}{2} \frac{b - a}{d}. \quad (2.58)$$

Dieses Verhältnis ist von der Größenordnung  $\mathcal{O}(0,01)$  für alle Experimente, die in dieser Arbeit vorgestellt werden. Aus diesem Grunde machen wir die Näherung, dass  $h = d$  auch im Falle einer freien Oberfläche gilt (Williams, 1967).

Als Randbedingung für die Geschwindigkeit verwenden wir die Haftreibungsbedingung überall dort, wo die Flüssigkeit eine feste Wand berührt (einschließlich Boden und Deckel). Das heißt sowohl die Geschwindigkeitskomponente normal als auch diejenige tangential zur Wand verschwinden dort (James *et al.*, 1981; Etling, 2002)

$$\mathbf{v}|_{r=a,b} = \mathbf{v}|_{z=0,d} = 0. \quad (2.59)$$

Liegt eine freie Flüssigkeitsoberfläche vor, so verschwindet nur die normale Geschwindigkeitskomponente (aufgrund der Näherung  $h = d$ )

$$w|_{z=d} = 0. \quad (2.60)$$

Von der Oberfläche wollen wir weiterhin annehmen, dass wir die Oberflächenspannung sowie einen möglichen Reibungswiderstand durch die darüber liegende Luft vernachlässigen können. Die Oberfläche ist dann reibungsfrei und der viskose Impulsfluss normal zur Oberfläche muss verschwinden (James *et al.*, 1981; Etling, 2002; Ferziger & Perić, 2008)

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{\vartheta} \cdot \mathbf{e}_z \Big|_{z=d} = \widetilde{F}_{z\vartheta} \Big|_{z=d} = \widetilde{F}_{\vartheta z} \Big|_{z=d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0, \quad (2.61a)$$

$$\widetilde{\mathbf{F}}_r \cdot \mathbf{e}_z \Big|_{z=d} = \widetilde{F}_{zr} \Big|_{z=d} = \widetilde{F}_{rz} \Big|_{z=d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=d} = 0. \quad (2.61b)$$

Dabei wurden (2.50) und (2.60) benutzt.

Um Randbedingungen für die Temperatur zu erhalten, betrachten wir zunächst die Zylinderwände. Wir wollen dabei annehmen, dass die Kühlung der inneren und Heizung der

äußeren Wand durch ideale Wärmebäder bewerkstelligt werden, das heißt durch thermodynamische Systeme, die im Vergleich zum System des Annulus eine sehr viel größere Wärmekapazität besitzen und eine gleichbleibende Temperatur bereitstellen, gleichgültig, wie viel Wärme sie an den Annulus abgeben oder von diesem aufnehmen (Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004). Ferner soll das Material der Zylinderwände eine Temperaturleitfähigkeit  $\kappa$  besitzen, die sehr viel größer ist als diejenige der Flüssigkeit. Wir können die Wände dann als isotherm betrachten und formulieren dies durch die Randbedingung

$$T|_{r=a} = T_a, \quad (2.62a)$$

$$T|_{r=b} = T_b. \quad (2.62b)$$

Boden und Deckel betrachten wir als vollkommene Isolatoren, sodass der Wärmefluss dort verschwindet (James *et al.*, 1981; Ferziger & Perić, 2008)

$$\lambda \nabla T \cdot \mathbf{e}_z|_{z=0,d} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0,d} = 0. \quad (2.63)$$

Diese Bedingung wird auch im Falle einer freien Flüssigkeitsoberfläche beibehalten. Ein Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und darüber liegender Luft, beispielsweise durch Wärmeleitung, Verdunstung und Strahlungsflüsse, wird daher vernachlässigt.

Obwohl im eigentlichen Sinne keine Randbedingung, sei der Vollständigkeit halber die  $2\pi$ -Periodizität der Strömung in azimuthaler Richtung erwähnt

$$\phi|_{\vartheta} = \phi|_{2\pi+\vartheta}, \quad (2.64)$$

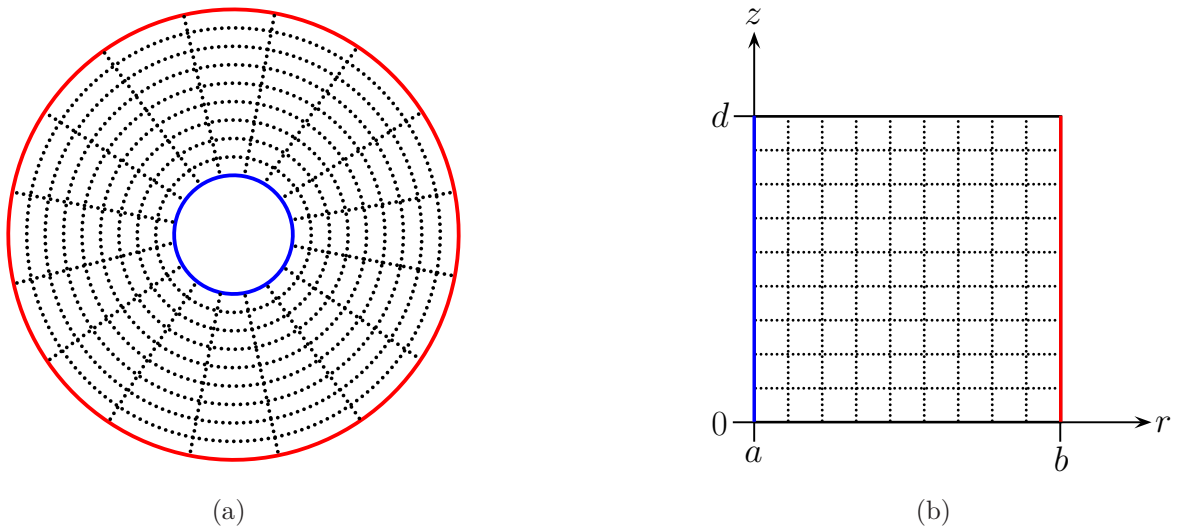
mit  $\phi = u, v, w, T, \tilde{p}$ .

Hiermit schließen wir die Betrachtung der Grundgleichungen ab und wenden uns nun ihrer numerischen Modellierung zu.

## 2.3 Das numerische Modell

Für die numerische Simulation der Strömung im Annulus wurde das Programm *cylindrical flow solver with implicit turbulence model* (cylFloit) geschrieben. Es ist ein Ableger des *pseudo-incompressible flow solver with implicit turbulence model* (pincFloit, Rieper *et al.*, 2013), das für die Simulation atmosphärischer Phänomene mithilfe der pseudoinkompressiblen Gleichungen (Durran, 1989) entwickelt wurde. In diesem Abschnitt werden lediglich die wesentlichen Bausteine von cylFloit vorgestellt, ohne zu sehr auf die Einzelheiten einzugehen. Eine ausführliche Beschreibung des numerischen Modells findet sich in Borchert (2010).

CylFloit basiert auf einem Finite-Volumen-Verfahren. Dabei wird das Annulusvolumen in gleichförmige Volumina, die Gitterzellen, zerlegt, innerhalb derer die Zustandsgrößen aus den Boussinesq-Gleichungen bilanziert werden. Dieses Gitter ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Aufgrund der Gleichförmigkeit des Gitters bestimmt die Anzahl der Gitterzellen in



**Abbildung 2.3:** (a) Grundriss des gleichförmigen, zylindrischen Finite-Volumen-Gitters von cylFloit (die gepunkteten Linien markieren die Wände der Gitterzellen). (b) Aufriss des Finite-Volumen-Gitters.

azimutaler, radialer und vertikaler Richtung  $N_\vartheta$ ,  $N_r$  und  $N_z$  die Abmessungen der Zellen, nämlich ihre azimutale, radiale und vertikale Seitenlänge  $\Delta\vartheta = 2\pi/N_\vartheta$ ,  $\Delta r = (b - a)/N_r$  und  $\Delta z = d/N_z$  (siehe Abbildung 2.4a).

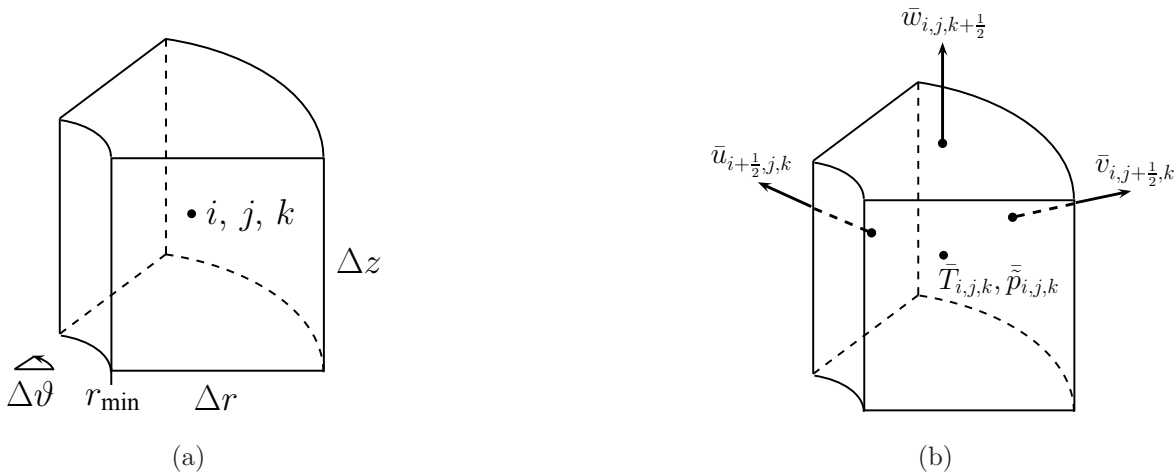
Die auf den Gitterpunkten definierten Zustandsgrößen sind über die zugehörige Gitterzelle gemittelte Größen. Ihre Anordnung auf dem Gitter ist versetzt und entspricht einem C-Gitter (Williams, 1969; Arakawa & Lamb, 1977). Abbildung 2.4b zeigt eine Gitterzelle der Temperatur und des Drucks, auf deren Seiten die drei Geschwindigkeitskomponenten definiert sind. Jede Geschwindigkeitskomponente wird in ihrer eigenen Gitterzelle bilanziert, die um jeweils eine halbe Zelle in der entsprechenden Richtung versetzt liegt.

Die Grundlage für die Bilanzierung der Zustandsgrößen auf dem Finite-Volumen-Gitter bildet die raumfeste Bilanzgleichung (2.12). Als Beispiel wollen wir die Bilanzierung der azimutalen Geschwindigkeitskomponente  $u$  in ihrer Gitterzelle betrachten. Dazu mitteln wir (2.54a) (Fall II) über das Gitterzellvolumen  $V_Z = r_Z \Delta\vartheta \Delta r \Delta z$ , mit  $r_Z = r_{\min} + \Delta r/2$  (siehe Abbildung 2.4a)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = & - \frac{1}{V_Z} \oint_{\partial V_Z} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} u - \overline{\left( \frac{uv}{r} \right)} - \frac{1}{V_Z} \oint_{\partial V_Z} d\mathbf{S} \cdot \tilde{p} \mathbf{e}_\vartheta \\ & - \frac{1}{V_Z} \oint_{\partial V_Z} d\mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_\vartheta - \overline{\left( \frac{\tilde{F}_{\vartheta r}}{r} \right)} - 2\Omega \bar{v} - \frac{d\Omega}{dt} \bar{r}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei  $\overline{(\cdot)} := \int_{V_Z} (\cdot) dV / V_Z$  das Volumenmittel bezeichnet.<sup>7</sup> Hier zeigt sich eine der Hauptschwierigkeiten eines Finite-Volumen-Verfahrens. Bekannt sind ausschließlich die volumen-

<sup>7</sup> Der üblichen Notation folgend, machen wir, was die Bezeichnung anbelangt, keinen Unterschied zwischen dem Raumgebiet, welches von einem Volumen eingenommen wird und dem Rauminhaltsmaß dieses Volumens. Beide werden, in diesem Falle, mit  $V_Z$  bezeichnet.



**Abbildung 2.4:** (a) Eine Gitterzelle mit azimutaler, radialer und vertikaler Seitenlänge  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta r$  und  $\Delta z$ . (b) Anordnung der volumengemittelten Zustandsgrößen nach Art eines C-Gitters.

gemittelten Zustandsgrößen auf diskreten Gitterpunkten. In den Oberflächenintegralen der Flüsse, aber auch in einigen Quelltermen werden indes die ungemittelten Zustandsgrößen benötigt. Der einfachste Weg zu einer Näherung derselben ist, sie durch die gemittelten Größen zu ersetzen. Diese Näherung ist im Allgemeinen von zweiter Ordnung, das heißt der Fehler ist proportional zu  $(\Delta\vartheta)^2$ ,  $(\Delta r)^2$  und  $(\Delta z)^2$ . Sie ist Bestandteil der folgenden Standardtechniken, die in *cylFloit* verwendet werden (zum Beispiel Ferziger & Perić, 2008): Volumen- und Oberflächenintegrale werden mithilfe der Mittelpunktsregel approximiert. Mittel von Produkten werden zu Produkten von Mitteln. So wird zum Beispiel der zweite Term auf der rechten Seite von (2.65) durch  $\overline{(uv/r)} \approx \bar{u}\bar{v}(1/r)$  genähert. Für die Berechnung der räumlichen Ableitungen im viskosen Impulsflusstensor (2.50) werden zentrale Differenzen verwendet. Schließlich werden Werte, die an einem Ort im Gitter benötigt werden, dort aber nicht definiert sind, durch lineare Interpolation aus Werten in der Umgebung ermittelt.

Eine Ausnahme bilden die advektiven Flüsse, zum Beispiel  $\oint_{\partial V_Z} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}u/V_Z$  in (2.65). Für deren Berechnung wird ein ausgeklügelteres Verfahren zur Rekonstruktion der ungemittelten Größen aus den gemittelten verwendet. Das eine solche Rekonstruktion zumindest prinzipiell möglich ist, sei folgendermaßen veranschaulicht: Einer Zustandsgröße  $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$  wird durch ein gleitendes Volumenmittel die Größe  $\bar{\phi}(\mathbf{r}) = \int_V \phi(\mathbf{r}') dV/V$  zugeordnet (die Zeitabhängigkeit wird im Folgenden nicht mehr ausdrücklich angeben). Dabei kann die Gestalt des Volumens  $V$  eine stetige Funktion des Ortes sein (so wie zum Beispiel der Rauminhalt der Gitterzellvolumina eine Funktion des Radius  $r$  ist). Für die Darstellung von  $\phi$  in der Umgebung des Ortes  $\mathbf{r}$  wird eine Taylor-Entwicklung verwendet (Nolting, 2004)

$$\phi(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m \phi, \quad (2.66)$$

wobei  $\nabla|_{\mathbf{r}}$  allein auf  $\phi$  am Ort  $\mathbf{r}$  wirkt. Wird (2.66) in das Volumenmittel eingesetzt, so

ergibt dies

$$\bar{\phi}(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \overline{(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m} \phi = \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \overline{(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m} \right] \phi. \quad (2.67)$$

Um nun  $\phi$  aus  $\bar{\phi}$  zu rekonstruieren, wird (2.67) zunächst formal invertiert

$$\phi(\mathbf{r}) = \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \overline{(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m} \right]^{-1} \bar{\phi}. \quad (2.68)$$

Ein mögliches Werkzeug zur Auswertung von (2.68) ist die von Heaviside (1893) entwickelte Operatorenrechnung<sup>8</sup>. Derzufolge kann der Ableitungsoperator  $\overline{(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m}$  bei der Entwicklung des inversen Operators in (2.68) formal behandelt werden wie ein gewöhnlicher Skalar. In Anlehnung an die Reihenentwicklung (Bronstein *et al.*, 2001)

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \text{falls } |x| < 1 \quad (2.69)$$

folgt daher

$$\phi(\mathbf{r}) = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \overline{(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m} \right]^n \right\} \bar{\phi}. \quad (2.70)$$

Eine Bedingung für die Konvergenz der Reihe (2.70) kann aus dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen (Bronstein *et al.*, 2001) gewonnen werden. Schreibt man als Abkürzung für (2.70)

$$\phi = (1 + \mathfrak{D})^{-1} \bar{\phi} = \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \mathfrak{D}^n \right] \bar{\phi} \quad (2.71)$$

und bezeichnet zudem

$$\phi_N = \left[ 1 + \sum_{n=1}^N (-1)^n \mathfrak{D}^n \right] \bar{\phi} \quad (2.72)$$

eine Partialsumme von (2.71), so ergibt die linksseitige Anwendung des Operators  $(1 + \mathfrak{D})$  auf (2.72)

$$(1 + \mathfrak{D})\phi_N = \left[ 1 + (-1)^N \mathfrak{D}^{N+1} \right] \bar{\phi} = \bar{\phi} + (-1)^N \mathfrak{D}^{N+1} \bar{\phi}. \quad (2.73)$$

Aus der Forderung  $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \mathfrak{D})\phi_N = \bar{\phi}$  folgt dann die Konvergenzbedingung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{D}^{N+1} \bar{\phi} = 0. \quad (2.74)$$

Selbst wenn die Reihe divergiert, kann es eine Partialsumme von (2.70)

$$\phi_{M,N} = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N (-1)^n \left[ \sum_{m=1}^M \frac{1}{m!} \overline{(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla|_{\mathbf{r}})^m} \right]^n \right\} \bar{\phi}, \quad (2.75)$$

---

<sup>8</sup> Eine ausführliche Beschreibung der Operatorenrechnung und ihrer Anwendung auf geophysikalische Problemstellungen findet man bei Ertel (1940a).

mit optimalem  $M$  und  $N$  geben, für die  $|\phi - \phi_{M,N}|$  minimal wird und  $\phi_{M,N}$  eine brauchbare Näherung für  $\phi$  darstellt ( $|\phi - \phi_{M,N}| \ll |\phi|$ ) (Sagaut, 2006; Garner *et al.*, 2009).

Wie diese Betrachtung zeigt, besteht unter gewissen Voraussetzungen die Möglichkeit, bei Kenntnis von  $\bar{\phi}$  und dessen Ableitungen an einem Ort  $\mathbf{r}$ , die ungemittelte Größe  $\phi$  dort zu rekonstruieren. In einem numerischen Gitter ist  $\bar{\phi}$  allerdings nur auf den diskreten Gitterpunkten bekannt. Auch eine optimale Rekonstruktion von  $\phi$  kann unter diesen Umständen lediglich jene räumlichen Strukturen in  $\phi$  auflösen, die um einen gewissen Faktor größer sind als die Maschenweite des Gitters ( $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta r$  und  $\Delta z$  in cylFloit). Diese Strukturen werden Grobstrukturen genannt. Die kleineren, unaufgelösten Strukturen (worunter man im Allgemeinen turbulente Strukturen versteht), die sogenannten Feinstrukturen auf der Subgitterskala (SGS), können aber in der wirklichen Strömung in einer nicht unerheblichen Wechselwirkung zu den Grobstrukturen stehen. Daher versucht man mithilfe eines Feinstrukturmodells diesen Einfluss zu parametrisieren. Diese Art der Strömungssimulation heißt Grobstruktursimulation (englisch: *large-eddy simulation* – LES, Ferziger & Perić (2008)). Das Feinstrukturmodell, das in cylFloit verwendet wird, ist die von Hickel *et al.* (2006, 2007) entwickelte *Adaptive Lokale Entfaltung* (englisch: *Adaptive Local Deconvolution Method* – ALDM) zur Berechnung der advektiven Flüsse. ALDM ermöglicht eine implizite LES, indem es die Diskretisierung der advektiven Flüsse dergestalt adjustiert, dass der implizite Diskretisierungsfehler derselben, wie ein explizites Feinstrukturmodell, zum Beispiel jenes von Smagorinsky (1963), wirkt.

Die Leistungsfähigkeit von ALDM wurde eingehend mit Richtwerten aus der Literatur verglichen und es hat sich gezeigt, dass damit mindestens ebenso gute Ergebnisse zu erzielen sind, wie mit bestehenden expliziten Feinstrukturmodellen, zum Beispiel dem dynamische Smagorinsky-Modell (Germano *et al.*, 1991). Beispiele für turbulente Strömungen, die mittels ALDM erfolgreich simuliert wurden, sind Turbulenzzerfall (Hickel *et al.*, 2006), Grenzschichtströmungen (Hickel & Adams, 2007, 2008) und Grenzschichtablösung (Hickel *et al.*, 2008; Grilli *et al.*, 2012). Die Simulation von Turbulenz in einem stabil geschichteten Fluid (Remmler & Hickel, 2012, 2013) und von konvektiver Strömung sowie vertikal propagierenden Schwerewellen in der Atmosphäre mithilfe der pseudoinkompressiblen Gleichungen (Rieper *et al.*, 2013) hat gezeigt, dass ALDM auch für die LES von geophysikalisch relevanten Strömungen einsetzbar ist.

Weiterhin wird für die Zeitintegration von  $t$  nach  $t + \Delta t$  ein explizites Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung nach Williamson (1980) in cylFloit verwendet. Der Zeitschritt  $\Delta t$  kann entweder auf einen festen Wert gesetzt werden oder wird mithilfe unterschiedlicher Stabilitätskriterien, zum Beispiel dem CFL-Kriterium, fortwährend neu berechnet. Keines der eingesetzten Stabilitätskriterien ist streng mathematisch für die Boussinesq-Gleichungen hergeleitet, aber sie haben sich in der Praxis als brauchbar erwiesen (Rieper *et al.*, 2013).

Für die Berechnung des Drucks wird eine Variante der Poisson-Gleichung (2.46) nach Chorin (1968) verwendet. Die Lösung dieser Gleichung erfolgt iterativ mithilfe eines präkonditionierten, stabilisierten Bikonjugierte-Gradienten-Verfahrens (englisch: *biconjugate gradient stabilised* – BiCGSTAB, siehe zum Beispiel Meister (2011)).



# KAPITEL 3

---

## Die Modellvalidierung

---

Eines der Hauptziele der numerischen Strömungssimulation ist es, das Verhalten der wirklichen Strömung möglichst genau wiedergeben zu können. Daher sollten die Ergebnisse des numerischen Modells im Rahmen einer Validierung mit Messungen der wirklichen Strömung verglichen werden, sofern dies machbar ist. Für die Validierung von *cylFloit* wurden Messungen von 26 Annulusexperimenten von U. Harlander, M. Vincze und K. D. Alexandrov (Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg – BTU im Folgenden) zur Verfügung gestellt. Von den verschiedenen Messtechniken, die an der BTU zum Einsatz kommen, verwenden wir die Ergebnisse der Infrarotthermographie. Bei dieser Technik wird das Infrarotlicht, das von der freien Flüssigkeitsoberfläche<sup>1</sup> abgestrahlt wird, von einer Infrarotkamera aufgezeichnet. Deren Bilder können anschließend in Temperaturkarten der Oberfläche übersetzt werden. Die baroklinen Wellen sind in diesen Temperaturkarten besonders gut erkennbar (von Larcher & Egbers, 2005; Harlander *et al.*, 2011). Gegenstände des Vergleichs von Experiment und Simulation sind die azimutale Modenzahl<sup>2</sup> der dominanten baroklinen Welle und die führenden Variabilitätsmuster, die sich aus Zeitreihen der Temperaturkarten ermitteln lassen.

### 3.1 Das Experiment

Der experimentelle Aufbau des Annulus an der BTU wird ausführlich von von Larcher & Egbers (2005) vorgestellt. Die physikalischen Parameter der Experimente, die für die Validierung von *cylFloit* verwendet wurden, sind in Tabelle 3.1 aufgelistet. Diese Werte sollten als zeitliche beziehungsweise räumliche Mittelwerte betrachtet werden, da kleine

---

<sup>1</sup> Die Infrarotthermographie ist nur bei einer freien Flüssigkeitsoberfläche möglich. Ein Deckel würde die Messung der Flüssigkeitstemperatur, abhängig von seinen thermischen Eigenschaften und seinen optischen Eigenschaften im Infrarotbereich, mehr oder weniger stark beeinträchtigen (Vincze *et al.*, 2015).

<sup>2</sup> Betrachten wir eine einfache Welle mit sinusförmigem Raumanteil in azimutaler Richtung  $\sin(k_\vartheta \vartheta)$ , der Wellenzahl  $k_\vartheta := 2\pi/\lambda_\vartheta$  und der Wellenlänge  $\lambda_\vartheta$  (Stöcker, 2005), so kann letztere aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität in azimutaler Richtung nur die Werte  $\lambda_\vartheta = 2\pi/n_\vartheta$ , mit  $n_\vartheta = 1, 2, 3, \dots$ , annehmen. Die Anzahl der Wellenberge beziehungsweise Wellentäler in azimutaler Richtung  $n_\vartheta$  bezeichnen wir in dieser Arbeit als azimutale Modenzahl.

**Tabelle 3.1:** Physikalische Parameter der Validierungsexperimente.

- Radius der inneren Zylinderwand, $a$ :	4,5 cm
- Radius der äußeren Zylinderwand, $b$ :	12 cm
- Gleichgewichtsfüllhöhe, $d$ :	13,5 cm
- Temperatur der inneren Zylinderwand, $T_a$ :	24 °C
- Temperatur der äußeren Zylinderwand, $T_b$ :	32 °C
- Winkelgeschwindigkeit, $\Omega$ :	$\in [2,99; 25,02]$ U/min $= [0,31; 2,62]$ rad/s
- Flüssigkeit:	Entionisiertes Wasser

Abweichungen in der Laborpraxis unvermeidbar sind. Der einzige Parameter, in dem sich die Experimente voneinander unterscheiden, ist die Winkelgeschwindigkeit, deren Werte in Tabelle 3.2 aufgelistet sind.

Jedes Experiment wird ohne Rotation ( $\Omega = 0$ ) initialisiert, bis sich, angetrieben durch das Aufsteigen wärmeren Wassers an der äußeren Zylinderwand und das Absinken kälteren Wassers an der inneren Zylinderwand, eine azimutalsymmetrische thermische Zirkulation ausgebildet hat. Im Anschluss daran wird der Annulus innerhalb einer Anlaufzeit von ungefähr 20 s auf die gewünschte Winkelgeschwindigkeit beschleunigt. Unvermeidbare kleine Störungen führen dann zur Bildung barokliner Wellen, falls die Flüssigkeit in der untersuchten experimentellen Konfiguration baroklin instabil ist.

Die Infrarotkamera ist über der Mitte des Annulus montiert. Alle 5 s nimmt sie ein Thermogramm mit einer Auflösung von  $640 \times 480$  Pixeln auf. Jedem Pixel kann, je nach dessen Farbe, ein Temperaturwert zugeordnet werden, sodass man eine Temperaturkarte erhält. Die Temperaturauflösung beträgt dabei ungefähr 0,03 K. Da das Infrarotlicht in dem für die Messung verwendeten Wellenlängenbereich schon nach wenigen Millimetern eines im Wasser zurückgelegten Weges zum Großteil absorbiert wird, kann man davon ausgehen, dass die Temperaturkarte in guter Näherung die Temperatur der oberflächennächsten Flüssigkeitsschicht wiedergibt. Aus einer Zeitreihe von Thermogrammen lassen sich viele Informationen über die Dynamik der baroklinen Wellen und den durch sie beeinflussten Wärmetransport zwischen äußerer und innerer Zylinderwand gewinnen (von Larcher & Egbers, 2005; Harlander *et al.*, 2011, 2012).

**Tabelle 3.2:** Azimutale Modenzahl der dominanten baroklinen Welle, beobachtet im Experiment und in den entsprechenden cylFloit-Simulationen ohne Anlauf ( $\Omega = \text{konst.}$ ) und mit Anlauf ( $\Omega = \Omega(t)$ ). Modenzahlen aus den Simulationen, die nicht mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen, sind in Klammern gesetzt. Darüber hinaus sind die Burger-Zahl  $Bu$ , die mit der thermischen Rossby-Zahl über  $Ro_{th} = 4Bu$  in Beziehung steht, und die Taylor-Zahl  $Ta$  der jeweiligen Experimente angegeben.

Experiment-Nr.	$\Omega$ [U/min]	$\Omega$ [rad/s]	Dimensionslose Kennzahlen		Azimutale Modenzahl		
			$Bu$	$Ta$	Experiment	cylFloit	
						Ohne Anlauf	Mit Anlauf
1	2,99	0,31	1,33	$9,44 \cdot 10^6$	0	0	0
2	3,53	0,37	0,95	$1,32 \cdot 10^7$	2	(0)	(0)
3	4,04	0,42	0,73	$1,72 \cdot 10^7$	2	(0)	2
4	4,5	0,47	0,59	$2,14 \cdot 10^7$	2	(0)	2
5	5,01	0,52	0,47	$2,66 \cdot 10^7$	2	(1)	(3)
6	5,41	0,57	0,4	$3,1 \cdot 10^7$	3	3	3
7	6	0,63	0,33	$3,8 \cdot 10^7$	3	3	3
8	6,48	0,68	0,28	$4,44 \cdot 10^7$	3	3	3
9	7,02	0,74	0,24	$5,2 \cdot 10^7$	3	3	3
10	7,5	0,79	0,21	$5,94 \cdot 10^7$	3	3	3
11	7,98	0,84	0,19	$6,73 \cdot 10^7$	3	3	(4)
12	8,5	0,89	0,16	$7,63 \cdot 10^7$	4	(3)	4
13	9	0,94	0,15	$8,55 \cdot 10^7$	3	(4)	(4)
14	9,5	0,99	0,13	$9,54 \cdot 10^7$	3	3	3
15	9,96	1,04	0,12	$1,05 \cdot 10^8$	3	(4)	3
16	10,8	1,13	0,1	$1,23 \cdot 10^8$	3	(4)	3
17	11,3	1,18	0,09	$1,35 \cdot 10^8$	3	(4)	3
18	12	1,26	0,08	$1,52 \cdot 10^8$	3	(4)	(4)
19	12,48	1,31	0,08	$1,65 \cdot 10^8$	3	(4)	(4)
20	13,02	1,36	0,07	$1,79 \cdot 10^8$	4	4	(3)
21	13,53	1,42	0,06	$1,93 \cdot 10^8$	3	(4)	(4)
22	13,98	1,46	0,06	$2,06 \cdot 10^8$	3	(5)	(4)
23	15,01	1,57	0,05	$2,38 \cdot 10^8$	3	(4)	(4)
24	15,99	1,67	0,05	$2,7 \cdot 10^8$	3	(4)	(4)
25	19,99	2,09	0,03	$4,22 \cdot 10^8$	4	(5)	4
26	25,02	2,62	0,02	$6,61 \cdot 10^8$	4	4	4

## 3.2 Die Simulationsstrategie

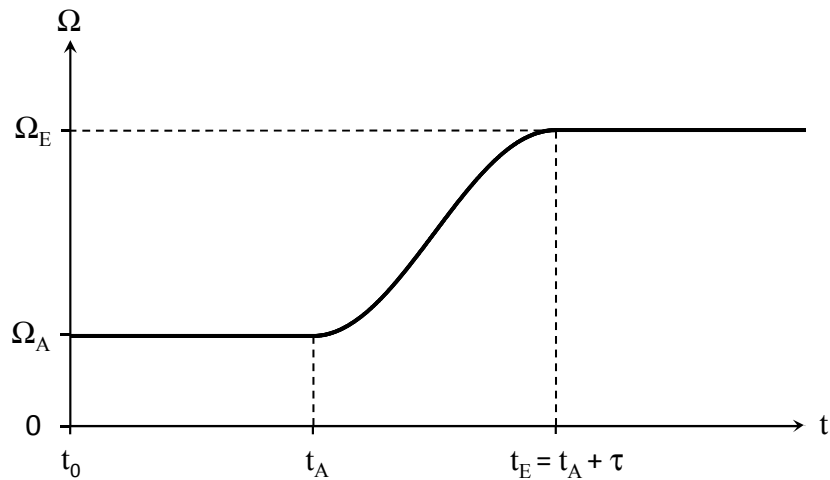
Der allgemeine Ablauf einer Simulation lautet wie folgt: Mit den Parametern des Experiments und  $\mathbf{v} = 0$ ,  $\tilde{p} = 0$  und  $T = T_0 = (T_a + T_b)/2$  als Anfangsbedingungen für die Zustandsgrößen wird zunächst eine azimuthalsymmetrische, stationäre Lösung berechnet. Gemäß der Zustandsgleichung (2.41) in der Formulierung (2.44) gewährleistet die Wahl  $T = T_0$ , dass die Flüssigkeit zu Beginn nirgendwo Auftrieb erfährt. Die Winkelgeschwindigkeit hat dabei bereits von Anfang an den konstanten Wert, der im Experiment erst nach der Anlaufzeit erreicht wird. Dies entspricht dem üblichen Vorgehen bei der Simulation der Strömung im Annulus (zum Beispiel Farnell & Plumb, 1975, 1976; James *et al.*, 1981; Hignett *et al.*, 1985). Azimutale Gradienten werden in diesem Abschnitt der Simulation durch  $N_\vartheta = 1$  unterdrückt. Eine Integrationszeit von  $t_{2D} = 10800 \text{ s} = 3 \text{ h}$  hat sich als ausreichend erwiesen, um eine gute Näherung der stationären 2D-Lösung zu erhalten.

Die 2D-Lösung bildet wiederum den Anfangszustand für die 3D-Simulation ( $N_\vartheta > 1$ ). Um darin die Bildung barokliner Wellen anzuregen, werden Zufallsstörungen mit kleiner Amplitude zum Temperaturfeld addiert. Das Temperaturfeld erscheint als am besten geeignet für die Ausbringung der kleinen Störungen, da es, anders als das Geschwindigkeits- und Druckfeld, nicht durch eine nichtlokale diagnostische Beziehung an andere Zustandsgrößen gekoppelt ist. Die maximale Amplitude der Zufallsstörungen wird auf  $\delta T_{St.} = 0,03|T_b - T_a|$  festgesetzt.

Die zuvor beschriebene klassische Simulationsvariante, in der die Winkelgeschwindigkeit gleich zu Beginn der azimuthalsymmetrischen Simulation auf ihren endgültigen Wert gesetzt wird, ist als Idealisierung zu betrachten. Sollte sich das Experiment innerhalb des Parameterraums, womit der abstrakte Raum gemeint ist, der durch die Annulusparameter  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $T_a$ ,  $T_b$  und  $\Omega$  aufgespannt wird, in einem Gebiet befinden, das baroklin instabil ist, so ist es sehr unwahrscheinlich, dass der azimuthalsymmetrische Zustand im Experiment überhaupt erreicht wird. Dies liegt daran, dass im Experiment ein Punkt im Parameterraum nur erreicht werden kann, indem man durch Variation von  $T_a$  und  $T_b$  oder, wie im Falle der Validierungsexperimente,  $\Omega$  einen Weg im Parameterraum abschreitet. Es ist daher damit zu rechnen, dass während und nach der Anlaufzeit die Azimutalsymmetrie zerstört wird, sobald die Flüssigkeit in einem Bereich baroklin instabil wird oder sich möglicherweise auch andere Arten von Instabilitäten<sup>3</sup> bilden. Die Anfangsbedingungen im Experiment und in der idealisierten Simulationsvariante unterscheiden sich demzufolge im Allgemeinen und es kann nicht ausgeschlossen werden, dass dieser Unterschied einen Einfluss auf die barokline Welle hat, die sich schließlich ausbildet. Aus diesem Grunde haben wir eine zweite Simulationsvariante untersucht, in der wir den Anlauf des Annulus im Experiment auf möglichst einfache Weise nachzubilden versuchen. Dies geschieht durch

---

<sup>3</sup> Während der Anlaufzeit setzt die Bildung der Grenzschichten ein und in der Nähe der Zylinderwände und des Bodens treten verhältnismäßig starke radiale und vertikale Geschwindigkeitsscherungen auf. Erfüllt diese Scherströmung gewisse Eigenschaften (zum Beispiel das Rayleigh- und Fjørtoft-Kriterium), so besteht die Möglichkeit, dass sie instabil wird (Greenspan, 1990).



**Abbildung 3.1:** Zeitlicher Verlauf der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , der für die Simulation des Annulusanlaufs zwischen zwei Winkelgeschwindigkeiten  $\Omega_A$  und  $\Omega_E$  verwendet wird.  $\tau$  bezeichnet die Zeitspanne, die für den Anlauf benötigt wird.

**Tabelle 3.3:** Gittereigenschaften und Anlaufzeiten für die Validierungssimulationen von cylFloit.

	$N_\vartheta \times N_r \times N_z$	$b\Delta\vartheta$ [cm]	$\Delta r$ [cm]	$\Delta z$ [cm]					
- Gitter G1:	$15 \times 10 \times 12$	5,03	0,75	1,13					
- Gitter G2:	$30 \times 20 \times 25$	2,51	0,38	0,54					
- Gitter G3:	$60 \times 40 \times 50$	1,26	0,19	0,27					
- Gitter G4:	$120 \times 80 \times 150$	0,63	0,09	0,09					
- Anlaufzeiten:									
Nr. <sup>1</sup>	$\tau$ [s]	Nr.	$\tau$ [s]	Nr.	$\tau$ [s]	Nr.	$\tau$ [s]	Nr.	$\tau$ [s]
1	20	7	20	13	180	19	360	25	720
2	20	8	20	14	210	20	390	26	910
3	20	9	20	15	240	21	410		
4	20	10	20	16	260	22	440		
5	20	11	20	17	300	23	460		
6	20	12	20	18	330	24	500		

<sup>1</sup> Experiment-Nr.

folgenden Ansatz für die zeitliche Entwicklung des Betrages der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_A, & \text{falls } t < t_A \\ \Omega_A + \frac{\Omega_E - \Omega_A}{2} \left[ 1 - \cos\left(\pi \frac{t - t_A}{\tau}\right) \right], & \text{falls } t_A \leq t \leq t_E = t_A + \tau, \\ \Omega_E, & \text{falls } t_E < t \end{cases} \quad (3.1)$$

wobei  $\Omega_A$  die Winkelgeschwindigkeit zu Anfang des Anlaufs und  $\Omega_E$  jene am Ende des Anlaufs bezeichnet.  $\tau = t_E - t_A$  ist die Anlaufzeit. Der zeitliche Verlauf von (3.1) ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Für die Simulation des Anlaufs aus dem Zustand der Ruhe wird  $\Omega_A = 0$  gesetzt, wobei  $t_A = t_{2D}$  die Integrationszeit der azimutalsymmetrischen Simulation ist.

Die numerischen Parameter von cylFloit, die für die Validierungssimulationen verwendet

wurden, sind in Tabelle 3.3 aufgelistet. Gitter G3 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 60 \times 40 \times 50$ ) wurde für alle 26 Experimente verwendet. Diese Auflösung hat sich im Allgemeinen als ausreichend für die Simulation der baroklinen Wellen erwiesen. Eine Anlaufzeit von  $\tau = 20$  s, wie sie im Experiment verwendet wurde, konnte in den Simulationen nur bis einschließlich Experiment Nr. 12 übernommen werden. In der Simulation der nachfolgenden Experimente entwickelte sich eine numerische Instabilität, deren Ursache bisher nicht gefunden werden konnte. Möglicherweise hängt ihr Auftreten mit der starken Geschwindigkeitsscherung zusammen, welche sich in den Grenzschichtbereichen während und nach der Anlaufzeit ausbildet. Um die Instabilität zu vermeiden, wurde die Anlaufzeit in den Simulationen erhöht. Auf diesem Wege wird Reibungsprozessen mehr Zeit gelassen, um die Scherung in den Grenzschichten abzubauen. Die neuen Anlaufzeiten reichen von  $\tau = 180$  s für die Simulation von Experiment Nr. 13 bis  $\tau = 910$  s für Nr. 26. Sie sind in Tabelle 3.3 aufgelistet.

Als Grenzschichten im Annulus werden üblicherweise die Ekman-Schicht am Boden und gegebenenfalls am Deckel, die Stewartson-Schicht an den Zylinderwänden sowie eine thermischen Grenzschicht, die sich ebenfalls an den Wänden befindet, unterschieden. Wenn sich, eine gewisse Zeit nach dem Anlauf, die Grenzschichten vollständig entwickelt haben, lassen sich deren Schichtdicken durch

$$\delta_E = d Ek^{1/2}, \quad (3.2a)$$

$$\delta_S = (b - a) Ek^{1/3}, \quad (3.2b)$$

$$\delta_T = d \left( \frac{\kappa_0 \nu_0}{g |\rho_1(T_b - T_a)| d^3} \right)^{1/4} \quad (3.2c)$$

abschätzen, wobei  $\delta_E$ ,  $\delta_S$  und  $\delta_T$  nacheinander die Schichtdicken der Ekman- und Stewartson-Schicht sowie der thermischen Grenzschicht bezeichnen (Farnell & Plumb, 1975; James *et al.*, 1981). Ferner steht

$$Ek := \frac{\nu_0}{\Omega d^2} \quad (3.3)$$

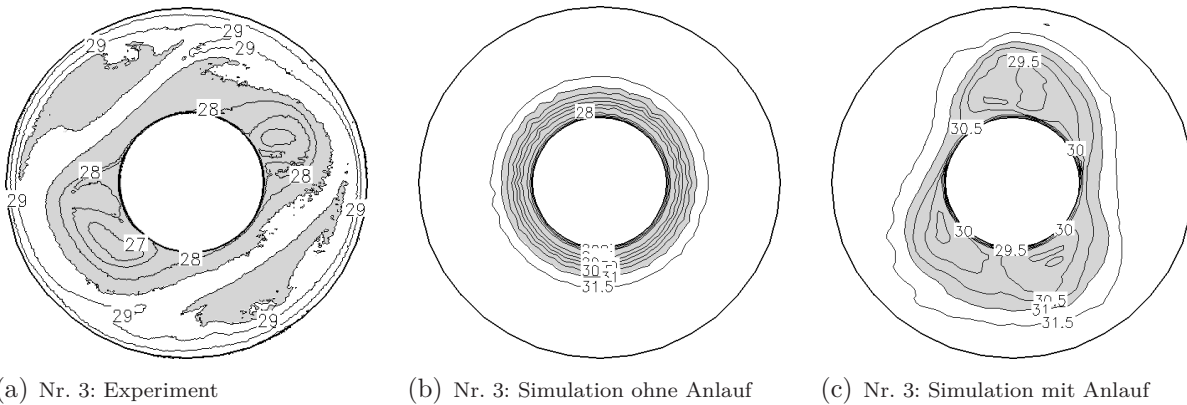
für die Ekman-Zahl, die ein Maß dafür ist, welche Bedeutung die viskose Reibung im Vergleich zur Coriolis-Beschleunigung in der betrachteten Strömung hat (falls  $Ek \gg 1$  überwiegt der Einfluss der viskosen Reibung, falls  $Ek \ll 1$  der der Coriolis-Beschleunigung, Vallis (2006)). Als repräsentative Werte für die kinematische Viskosität und die Temperaturleitfähigkeit wurden jene des Referenzzustandes der Flüssigkeit,  $\nu_0 = \nu(T_0)$  und  $\kappa_0 = \kappa(T_0)$ , gewählt (siehe (2.42) und (2.43) in der Formulierung (2.44)). Schließlich ist  $|\rho_1(T_b - T_a)| = |\rho(T_b) - \rho(T_a)|$  in (3.2c) der Betrag der maximalen Dichtedifferenz, die in der Flüssigkeit auftritt, berechnet gemäß der Zustandsgleichung (2.41) in der Formulierung (2.44). Streng genommen gelten die Schichtdickeabschätzungen (3.2a) und (3.2b) nur für homogene Flüssigkeiten. Für eine geschichtete Flüssigkeit, wie sie, durch das Aufsteigen warmen Wassers mit geringerer Dichte und das Absinken kalten Wassers mit höherer Dichte, auch im Annulus vorliegt, gibt es modifizierte Abschätzungen (Barcilon & Pedlosky, 1967a,b). Da in den Annuluskonfigurationen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, die Schichtung verhältnismäßig schwach ist (siehe Bedingung (2.34) für die Zulässigkeit der Boussinesq-Näherung), wird angenommen, dass die einfacheren Formeln (3.2a) und (3.2b) hier ausreichend sind.

Setzt man in (3.2a), (3.2b) und (3.2c) die Experimentparameter aus Tabelle 3.1 und 3.2 ein, so erhält man für die Ekman-Schicht eine Schichtdicke von  $\delta_E = 0,06$  bis  $0,17$  cm und für die Stewartson-Schicht  $\delta_S = 0,2$  bis  $0,4$  cm. Die Schichtdicke der thermischen Grenzschicht ist für alle Experimente  $\delta_T = 0,09$  cm. Bei einer radialen und vertikalen Auflösung von  $\Delta r = 0,19$  cm und  $\Delta z = 0,27$  cm für Gitter G3, muss davon ausgegangen werden, dass insbesondere die Dynamik in der Ekman-Schicht nur sehr grob in den Simulationen nachempfunden werden kann. Um den Einfluss der unzureichenden Grenzschichtauflösung auf die Simulation abschätzen zu können, werden in Abschnitt 3.5 Ergebnisse aus Simulationen von drei der 26 Experimente vorgestellt, in denen durch Nutzung des Gitters G4 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 120 \times 80 \times 150$ ) eine bessere Auflösung der Grenzschichten gewährleistet wird. Da in cylFloit ein gleichförmiges Gitter verwendet wird, ist die Erhöhung der Anzahl von Gitterzellen  $N_r \times N_z$  die einzige Möglichkeit, die Auflösung der Grenzschichten zu verbessern. Es gibt numerische Modelle des Annulus, die dieses Problem durch eine Gitterverfeinerung lösen (Farnell & Plumb, 1975, 1976; James *et al.*, 1981; Hignett *et al.*, 1985). Dabei wird, grob gesprochen, Gitterauflösung aus dem Inneren des Annulusspalts in die Grenzschichten verlagert, ohne die Anzahl der Gitterpunkte  $N_r \times N_z$  zu erhöhen. Die verringerte Auflösung im Innenbereich ist für die Simulation der baroklinen Wellen im Allgemeinen immer noch ausreichend. Da die Länge des Zeitschritts für die Integration,  $\Delta t$ , zum Beispiel gemäß des CFL-Kriteriums, proportional zu  $\Delta r$  und  $\Delta z$  sein sollte, müssen auch die Modelle mit Gitterverfeinerung einen kleineren Zeitschritt verwenden, um numerische Stabilität in den höher aufgelösten Grenzschichten gewährleisten zu können.

### 3.3 Simulationsergebnisse

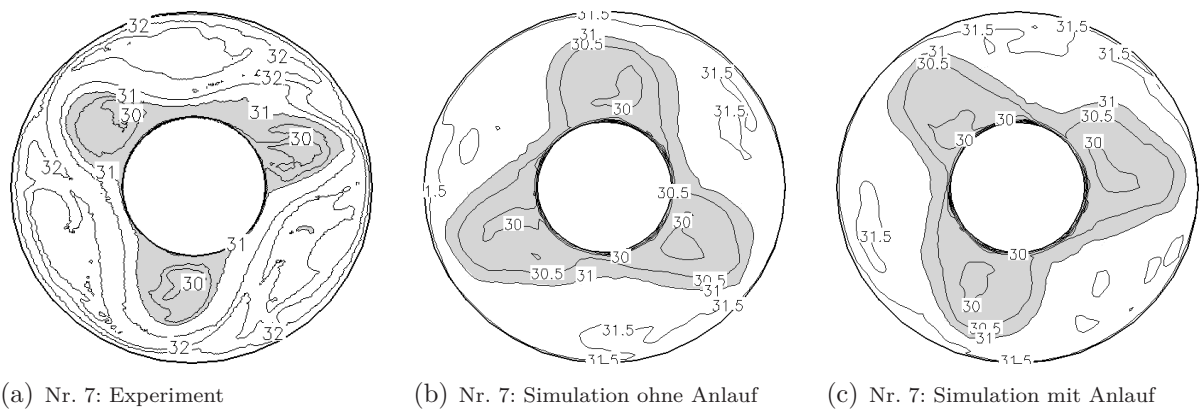
In Tabelle 3.2 ist die führende azimuthale Modenzahl angegeben, die in den Experimenten und den zwei Simulationsvarianten (ohne und mit Anlauf) beobachtet wurde. Den baroklinen Wellen wurde in den 3D-Simulationen 10800 s (= 3 h) Zeit gegeben, um sich nach der Initialisierung durch die kleinen Temperaturstörungen vollständig auszubilden. Drei Beispiele der experimentell beobachteten und der simulierten Temperatur der Flüssigkeitsoberfläche für  $\Omega = 4,04$  U/min,  $\Omega = 6$  U/min und  $\Omega = 25,02$  U/min (Experimente Nr. 3, Nr. 7 und Nr. 26) sind in den Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4 gezeigt.

Alle Simulationen weisen einen Mangel bezüglich der Temperatur der Flüssigkeitsoberfläche auf: Beträgt die experimentell beobachtete Temperaturamplitude der baroklinen Welle im Innenbereich des Annulusspalts ungefähr 2 bis 3 K, so ist die simulierte Amplitude gewöhnlich höchstens ein Drittel so groß. Wie Diekmann (2014) in einer Studienarbeit an cylFloit zeigen konnte, ist eine mögliche Ursache dieses Mangels die Vernachlässigung des Wärmeflusses über die Flüssigkeitsoberfläche (siehe (2.63)). Die Modellierung des molekularen Anteils des Wärmeflusses mithilfe eines Newton'schen Wärmestromansatzes (vergleiche Read *et al.*, 2000) ergab dabei bereits eine bessere Übereinstimmung der simulierten Oberflächentemperatur mit der experimentell beobachteten. Da ein Großteil der in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse vor der zuvor genannten Studienarbeit gewonnen wurden, wird hier auf die Einführung eines Modells für den Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und Umgebung verzichtet. Stattdessen werden die Temperaturen aus den Simulationen in einer Höhe von  $z = 10$  cm,  $3,5$  cm unterhalb der Oberfläche, in Abbildung 3.2, 3.3 und 3.4

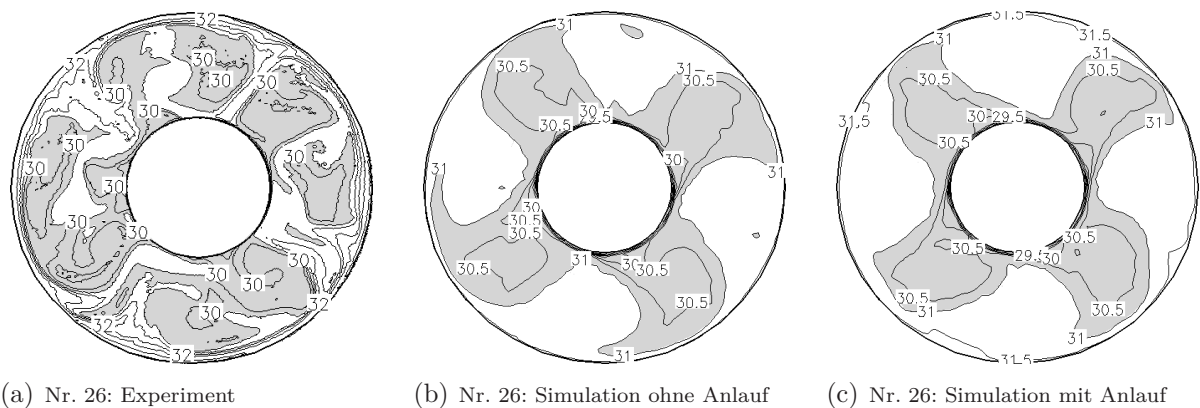


**Abbildung 3.2:** Temperatur in  $^{\circ}\text{C}$  aus dem Experiment Nr. 3 ( $\Omega = 4 \text{ U/min}$ ) und den entsprechenden 3D-Simulationen. (a) zeigt die Temperaturmessung an der Flüssigkeitsoberfläche ( $z = d = 13,5 \text{ cm}$ ) im Experiment zu einem repräsentativen Zeitpunkt. Es ist deutlich eine barokline Welle mit azimuthaler Modenzahl 2 zu erkennen. Die Temperatur aus der Simulationsvariante ohne Anlauf ist in (b) und die aus der Simulationsvariante mit Anlauf in (c) zu sehen. Beide Horizontalschnitte des Temperaturfeldes befinden sich in der Höhe  $z = 10 \text{ cm}$ . Der dargestellte Zeitpunkt ist  $t = 10800 \text{ s}$  ( $= 3 \text{ h}$ ). Das Isolinienintervall beträgt  $0,5 \text{ K}$ . Um die baroklinen Wellen hervorzuheben, sind Temperaturen mit einem Wert niedriger als  $T_S$  grau schattiert, wobei  $T_S = 28,5^{\circ}\text{C}$  in (a) und  $T_S = 31^{\circ}\text{C}$  in (b) und (c). Für die Simulationen wurde Gitter G3 verwendet ( $N_{\vartheta} \times N_r \times N_z = 60 \times 40 \times 50$ , siehe Tabelle 3.3). *Hinweis:* In dieser und allen folgenden Abbildungen wird ein Punkt als Dezimaltrennzeichen verwendet, da das Programm, welches zur Erstellung dieser Abbildungen verwendet wurde, eine Umstellung auf ein Komma als Trennzeichen nicht vorsieht.





**Abbildung 3.3:** Wie in Abbildung 3.2, aber nun für Experiment Nr. 7 ( $\Omega = 6 \text{ U/min}$ ). Das Isolinienintervall beträgt  $0,5 \text{ K}$ . Temperaturwerte, die unter  $T_S = 31 \text{ }^\circ\text{C}$  liegen, sind grau schattiert.



**Abbildung 3.4:** Wie in Abbildung 3.2, aber nun für Experiment Nr. 26 ( $\Omega = 25 \text{ U/min}$ ). Das Isolinienintervall beträgt  $0,5 \text{ K}$ . Temperaturwerte, die unter  $T_S$  liegen, sind grau schattiert, wobei  $T_S = 30,5 \text{ }^\circ\text{C}$  in (a) und  $T_S = 31 \text{ }^\circ\text{C}$  in (b) und (c).

dargestellt. Die Temperaturamplitude gewinnt nämlich mit zunehmender Tiefe an Stärke.

Die Ergebnisse in Tabelle 3.2 zeigen, dass die Flüssigkeitsströmung im Experiment bei einer Winkelgeschwindigkeit zwischen  $\Omega = 2,99 \text{ U/min}$  und  $\Omega = 3,53 \text{ U/min}$  baroklin instabil wird. In der Simulationsvariante ohne Anlauf setzt Instabilität zwischen  $\Omega = 4,5 \text{ U/min}$  und  $\Omega = 5,01 \text{ U/min}$  ein und in der Variante mit Anlauf zwischen  $\Omega = 3,53 \text{ U/min}$  und  $\Omega = 4,04 \text{ U/min}$ . Diesbezüglich ist die Variante mit Anlauf näher am Experiment. In Abschnitt 3.6 werden wir den Beginn barokliner Instabilität im Experiment und in der Simulation mit den Vorhersagen des Eady-Modells vergleichen. Weiterhin lässt sich beobachten, dass die azimutale Modenzahl der baroklinen Welle sowohl im Experiment als auch in der Simulation mit steigender Winkelgeschwindigkeit generell zunimmt. Die Gestalt der baroklinen Wellen ist dabei zunächst sehr gleichmäßig (siehe Abbildung 3.2 und 3.3). Je größer aber der Wert von  $\Omega$  von Experiment zu Experiment wird, desto mehr spielen neben der führenden Modenzahl höhere Modenzahlen, das heißt Strukturen mit kleineren räum-

lichen Skalen, eine Rolle, bis die Strömung schließlich ein turbulentes Erscheinungsbild annimmt. Dies zeigt sich besonders deutlich in Experiment Nr. 26 (Abbildung 3.4a) und schwächer ausgebildet in den entsprechenden Simulationen (Abbildung 3.4b und 3.4c). Die unterschiedlichen Erscheinungsbilder der Strömung haben in der Vergangenheit die Einführung sogenannter Strömungsregime motiviert. So wird die baroklin stabile Strömung als azimutalsymmetrisches Regime, die gleichmäßigen baroklinen Wellen als reguläres Wellenregime und die turbulenten baroklinen Wellen als irreguläres Wellenregime bezeichnet. Bei der Auftragung der verschiedenen Regime im Parameterraum des Annulus  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $T_a$ ,  $T_b$  und  $\Omega$  (siehe Abschnitt 3.1), den man um die Referenzeigenschaften der Flüssigkeit  $\nu_0$ ,  $\kappa_0$  und  $\rho_1$ <sup>4</sup> erweitert, haben maßgeblich von Hide vorangetriebene Untersuchungen bereits früh gezeigt, dass sich ein Großteil der Variation zwischen den Regimen auf Flächen innerhalb des Parameterraums abspielen, die durch die abgeleiteten Größen  $Ta$  und  $Ro_{th}$  aufgespannt werden<sup>5</sup>. Dabei bezeichnet erstere Größe die dimensionslose Taylor-Zahl (zum Beispiel Hide, 1958; von Larcher & Egbers, 2005; Harlander *et al.*, 2011)

$$Ta := \frac{4\Omega^2(b-a)^5}{\nu_0^2 d}. \quad (3.4)$$

Sie kann als das quadrierte Verhältnis der Größenordnung der Coriolis-Beschleunigung zur Größenordnung der viskosen Reibung betrachtet werden. Weiterhin bezeichnet  $Ro_{th}$  die dimensionslose thermische Rossby-Zahl (Hide, 1958; von Larcher & Egbers, 2005; Harlander *et al.*, 2011)

$$Ro_{th} := \frac{g|\rho_1(T_b - T_a)|d}{\Omega^2(b-a)^2}, \quad (3.5)$$

die das Verhältnis der Größenordnung der Trägheitsbeschleunigung zur Größenordnung der Coriolis-Beschleunigung ist. Sie heißt thermische Rossby-Zahl, weil die Größenordnung der Horizontalgeschwindigkeit durch die thermische Windbeziehung abgeschätzt wird (James *et al.*, 1981). Wir werden auf (3.5) in Abschnitt 3.6 zurückkommen. Aufgrund dieser Zusammenhänge ist es üblich, die Strömungsregime des Annulus im sogenannten Regiemediagramm – eine Ebene, die durch  $Ta$  und  $Ro_{th}$  aufgespannt wird – aufzutragen (zum Beispiel Hide & Mason, 1975; Hide, 1977; von Larcher & Egbers, 2005). Die Werte von  $Ta$  und  $Ro_{th}$  für die 26 Validierungsexperimente sind Tabelle 3.2 zu entnehmen. Statt  $Ro_{th}$  ist dort allerdings die Burger-Zahl  $Bu$  angegeben, die eine wichtige Kennzahl des Eady-Modells ist (siehe Abschnitt 3.6). Es gilt der Zusammenhang

$$Ro_{th} = 4Bu. \quad (3.6)$$

<sup>4</sup> Häufig wird statt der quadratischen Zustandsgleichung  $\rho(T) = \rho_0[1 + \rho_1(T - T_0) + \rho_2(T - T_0)^2]$  (siehe (2.41) und (2.44)) ein linearer Ansatz der Form  $\rho(T) = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$  mit dem thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  verwendet (Williams, 1967; Hide, 1967b). Dieser Ansatz folgt wiederum aus dem linearen Ansatz für die Temperaturabhängigkeit des massenspezifischen Volumens:  $v(T) = v_0[1 + \alpha(T - T_0)]$  für  $|\alpha(T - T_0)| \ll 1 \Rightarrow \rho = 1/v = \rho_0/[1 + \alpha(T - T_0)] \approx \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$  (vergleiche (2.69), Oberbeck (1879)). Vor diesem Hintergrund können wir die quadratische Zustandsgleichung auch als Ausdruck eines temperaturabhängigen Volumenausdehnungskoeffizienten  $\alpha(T) = -\rho_1 - \rho_2(T - T_0)$ , mit dem Referenzwert  $\alpha_0 := \alpha(T_0) = -\rho_1$  betrachten.

<sup>5</sup> Eine weitere wichtige dimensionslose Kennzahl ist das Verhältnis der kinematischen Viskosität zur Temperaturleitfähigkeit, die Prandtl-Zahl  $Pr := \nu/\kappa$  (Hide, 1958; von Larcher & Egbers, 2005; Harlander *et al.*, 2011). Da in dieser Arbeit ausschließlich Wasser als Flüssigkeit verwendet wird ( $Pr \approx 7$ ), kann, trotz einer gewissen Temperaturabhängigkeit der Prandtl-Zahl, die Variation des Erscheinungsbildes der Strömung mit  $Pr$  vernachlässigt werden.

Eine ausführliche Beschreibung der Strömungsregime im Annulus findet sich zum Beispiel bei Hide & Mason (1975).

Vergleicht man als nächstes die azimutale Modenzahl im Experiment mit der in den beiden Simulationsvarianten, so findet man für die Variante mit Anlauf eine Übereinstimmung mit dem Experiment in 15 von 26 Fällen, während die Modenzahl in der Variante ohne Anlauf nur in 10 Fällen mit der experimentell beobachteten übereinstimmt. In den Fällen, in denen die Modenzahlen voneinander abweichen, neigen beide Simulationsvarianten zu einer höheren Modenzahl als das Experiment. Allerdings hat sich in der Simulationsvariante mit Anlauf, bei Winkelgeschwindigkeiten zwischen  $\Omega = 12$  U/min und  $\Omega = 15,99$  U/min, die experimentell beobachtete Modenzahl während einer verhältnismäßig langen Zeitspanne der Integration gezeigt. Erst nach einer Integrationszeit von 2700 bis 9700 s hat in diesen Simulationen ein Übergang zur nächsthöheren Modenzahl stattgefunden, wie sie sich in der Simulationsvariante ohne Anlauf bereits von Anfang an ausgebildet hat. Es kann daher nicht ausgeschlossen werden, dass weitere Übergänge in Simulationen der Variante mit Anlauf stattfinden, wenn man die Integrationszeit über  $t = 3$  h hinaus ausdehnt (zum Beispiel im Falle von  $\Omega = 10,8$  U/min und  $\Omega = 11,3$  U/min).

### 3.4 Die Auswirkung des Annulusanlaufs

Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, zeigen die baroklinen Wellen in den zwei Simulationsvarianten, ohne und mit Anlauf, in einigen Fällen unterschiedliche azimutale Modenzahlen. Wir betrachten hier mögliche Ursachen für dieses Phänomen.

Ein möglicher Erklärungsansatz fußt auf der Annahme der Existenz multipler Gleichgewichte. Damit ist gemeint, dass es im Parameterraum des Annulus Punkte geben könnte, in denen die beobachtete führende Modenzahl der baroklinen Welle nicht nur vom Punkt selbst, sondern auch vom Weg abhängt, der im Parameterraum zurückgelegt wurde, um diesen Punkt zu erreichen (dieses Verhalten wird auch Hysterese genannt, siehe zum Beispiel Stöcker (2005)). So führt beispielsweise der Weg ohne Anlauf in der Simulation von Experiment Nr. 11 in ein Gleichgewicht, in dem die barokline Welle die führende Modenzahl 3 aufweist, während der Weg mit Anlauf in ein Gleichgewicht mit Modenzahl 4 führt. Diese Annahme wird durch Hystereseexperimente an der BTU von Vincze *et al.* (2015) gestützt. Bei diesen Experimenten wird die Winkelgeschwindigkeit, beginnend bei einem Wert  $\Omega_{\min}$ , zunächst über einen verhältnismäßig langen Zeitraum stufenweise auf einen Wert  $\Omega_{\max}$  erhöht, und anschließend in gleicher (oder ähnlicher) Weise wieder stufenweise auf  $\Omega_{\min}$  verringert. Dabei beobachtet man auf einigen Stufen (damit sind jene Zeitspannen während des Experiments gemeint, in denen  $\Omega = \text{konst.}$ ) unterschiedliche Modenzahlen, je nachdem, ob man sich auf dem „Hinweg“ (Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit) oder auf dem „Rückweg“ (Verringerung der Winkelgeschwindigkeit) befindet. Wir haben versucht, die Hystereseexperimente mit cylFloit nachzubilden, indem wir die Übergänge zwischen den Stufen mittels (3.1) simuliert haben. Auf dem Hinweg von  $\Omega_{\min} = 2$  U/min nach  $\Omega_{\max} = 20$  U/min ist dabei  $\Omega_A$  die vorhergehende Stufe, beginnend mit  $\Omega_A = \Omega_{\min}$ , und  $\Omega_E > \Omega_A$  die nachfolgende Stufe. Die Schrittweite zwischen zwei Stufen beträgt  $|\Omega_E - \Omega_A| = 1$  U/min, bei einer Anlaufzeit von  $\tau = 1200$  s (20 min). Jede Stufe ist dann 1800 s (30 min) lang. Um den Rückweg von  $\Omega_{\max}$  nach  $\Omega_{\min}$  zu

simulieren, wird  $\Omega_E < \Omega_A$  gesetzt. Die einzelnen Stufen sind nun nur noch 1200 s (20 min) lang, um Rechenzeit zu sparen. Der Einfluss dieser Maßnahme auf die Ergebnisse dürfte jedoch gering sein, da die baroklinen Wellen auch innerhalb von 20 min im Allgemeinen bereits das neue Gleichgewicht erreicht haben. Die übrigen Annulusparameter entsprechen denen der Validierungsexperimente in Tabelle 3.1. In Tabelle 3.4 sind die azimuthalen Modenzahlen der baroklinen Wellen aufgelistet, die im Hystereseexperiment und in der entsprechenden cyFloit-Simulation beobachtet wurden. Dazu sei angemerkt, dass die aufgeführten Winkelgeschwindigkeiten, jene sind, die in der Simulation verwendet wurden. Die Winkelgeschwindigkeiten im Experiment können etwas von diesen Werten abweichen. Darüber hinaus geht die letzte Stufe auf dem Hinweg im Experiment von  $\Omega_A = 17$  U/min nach  $\Omega_E = 21$  U/min, sodass für  $\Omega = 18, 19$  und  $20$  U/min keine Modenzahlen vorliegen. Auf dem Rückweg des Hystereseexperiments bilden  $\Omega_A = 21$  U/min und  $\Omega_E = 20$  U/min sowie  $\Omega_A = 20$  U/min und  $\Omega_E = 17$  U/min die ersten beiden Stufen (siehe Vincze *et al.*, 2015). Ein Hystereseverhalten kann im Experiment im Bereich von  $\Omega = 4$  bis  $16$  U/min beobachtet werden. In der Simulation zeigt sich Hysterese im Bereich von  $\Omega = 5$  bis  $12$  U/min. Es liegt nahe, dass das System im Winkelgeschwindigkeitsbereich mit Hysterese mindestens zwei Gleichgewichtszustände besitzt. Die Winkelgeschwindigkeiten, für die unterschiedliche Modenzahlen in den zwei Simulationsvarianten, ohne und mit Anlauf, beobachtet werden, fallen teilweise in den Bereich mit Hysterese, sodass auch dieses Verhalten als Ausdruck multipler Gleichgewichte gedeutet werden könnte. Eine tiefer gehende Untersuchung dieses Verhaltens würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Wir möchten daher auf die Arbeit von Vincze *et al.* (2015) verweisen, in der nicht nur die Experimente an der BTU und die cyFloit-Simulationen, sondern auch entsprechende Simulationen mit anderen numerischen Modellen des Annulus genauer vorgestellt und ausgewertet werden.

Für einen weiteren Ansatz zur Erklärung der unterschiedlichen Modenzahlen betrachten wir die lineare Dynamik der baroklinen Wellen. Wir möchten bei der Vorstellung des linearen Modells auf eine erneute Wiedergabe der Gleichungen (2.53) bis (2.56) in ihrer linearisierten Form verzichten und fassen die Zustandsgrößen stattdessen in einem algebraischen Zustandsspaltenvektor<sup>6</sup>  $\mathbf{z} = (u, v, w, T)^\top$  zusammen (wobei gegebenenfalls zu

---

<sup>6</sup> Wir werden in dieser Arbeit zwischen algebraischen Vektoren und Matrizen und den koordinatenunabhängigen physikalischen Vektoren und Tensoren unterscheiden. Unter algebraischen Vektoren (durch serifenlose, fettgedruckte Kleinbuchstaben gekennzeichnet) verstehen wir die Anordnung beliebig vieler (skalärer) Größen, die nicht notwendigerweise dieselbe Dimension haben, in einer Struktur  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top$  ( $\top$  steht für die Transponierung einer algebraischen Struktur,  $\dagger$  hingegen für die Transponierung eines Tensors). Eine algebraische Matrix (serifenlose, fettgedruckte Großbuchstaben) bezeichnet eine Anordnungsstruktur der Gestalt  $\mathbf{M} = (M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1m}; \dots; M_{n1}, M_{n2}, \dots, M_{nm})$  (wobei das Semikolon einen Zeilenumbruch kennzeichnet). Der Vektor- oder Matrixstruktur an sich kommt dabei im Allgemeinen keine physikalische Bedeutung zu.

Algebraische Vektoren und Matrizen sind eine mögliche Darstellungsform für physikalische Vektoren und Tensoren, sofern ein Koordinatensystem festgelegt wurde, in dem diese Größen vermessen werden sollen. In diesem Falle erhält auch die Vektor- und Matrixstruktur an sich eine physikalische Bedeutung, nämlich als Ausdruck der drei Raumdimensionen. Betrachten wir beispielsweise einen physikalischen Vektor  $\mathbf{a}$  und Tensor  $\mathbb{A}$ , so können die Koeffizienten, die sich aus der Projektion von  $\mathbf{a}$  auf die zylindrischen Einheitsvektoren ergeben (siehe Abschnitt 2.2.4), in dem algebraischen Spaltenvektor  $\mathbf{a} = (a_\vartheta, a_r, a_z)^\top$  angeordnet werden. Die Koeffizienten, die die Projektion von  $\mathbb{A}$  auf die zylindrischen Einheitsdyaden liefert, können als Matrix  $\mathbf{A} = (A_{\vartheta\vartheta}, A_{\vartheta r}, A_{\vartheta z}; A_{r\vartheta}, A_{rr}, A_{rz}; A_{z\vartheta}, A_{zr}, A_{zz})$  dargestellt werden. Für die algebraischen Matrix- und Vektormultiplikationen verwenden wir die übliche Notati-

**Tabelle 3.4:** Azimutale Modenzahl der dominanten baroklinen Welle, beobachtet in einem Hystereseexperiment und in der entsprechenden cylFloit-Simulation. Der „Hinweg“ steht für den ersten Teil des Hystereseexperiments, in dem die Winkelgeschwindigkeit schrittweise erhöht wird. Mit „Rückweg“ wird der zweite Teil bezeichnet, in dem die Winkelgeschwindigkeit wieder schrittweise verringert wird. Modenzahlen aus den Simulationen, die nicht mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmen, sind in Klammern gesetzt (siehe Vincze *et al.*, 2015).

$\Omega$ [U/min]	$\Omega$ [rad/s]	Azimutale Modenzahl			
		„Hinweg“		„Rückweg“	
		Experiment	cylFloit	Experiment	cylFloit
2	0,21	0	0	0	0
3	0,31	2	(0)	2	(0)
4	0,42	2	(0)	3	(0)
5	0,52	2	(0)	3	3
6	0,63	2	(3)	4	4
7	0,73	3	3	4	4
8	0,84	3	3	4	4
9	0,94	3	3	4	4
10	1,05	3	3	4	4
11	1,15	3	3	4	4
12	1,26	3	3	4	4
13	1,36	3	(4)	4	4
14	1,47	3	(4)	4	4
15	1,57	3	(4)	4	4
16	1,68	3	(4)	4	4
17	1,78	4	4	4	4
18	1,88	–	4	–	4
19	1,99	–	4	–	4
20	2,09	–	4	4	4

berücksichtigen ist, dass nicht alle Einträge dieselbe Dimension haben). Die Gleichungen selbst drücken wir abstrakt durch

$$\frac{\partial \mathbf{z}(\mathbf{r})}{\partial t} = \mathbf{f}[\mathbf{z}(\mathbf{r}), \tilde{p}(\mathbf{r}), \mathbf{r}], \quad (3.7a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z} = 0 \quad (3.7b)$$

aus, wobei in  $\mathbf{r} = (\vartheta, r, z, t)^\top$  die Raum- und Zeitkoordinaten zusammengefasst sind.  $\mathbf{f}$  bezeichnet die rechte Seite der Gleichungen, eine im Allgemeinen nichtlineare Operatorfunktion von  $\mathbf{z}$ , Druck  $\tilde{p}$  und  $\mathbf{r}$  (die auch räumliche Ableitungen enthält). Schließlich wird  $\boldsymbol{\delta}^\top = [(1/r)\partial/\partial\vartheta, \partial/\partial r, \partial/\partial z, 0]$  eingeführt, um die Kontinuitätsgleichung (2.53) darzustellen. Als nächstes zerlegen wir  $\mathbf{z}$  in einen Grundzustand  $\mathbf{z}_0$  und eine Abweichung davon, die Störung  $\mathbf{z}'$ . Der Grundzustand soll (3.7) selbst erfüllen

$$\frac{\partial \mathbf{z}_0(\mathbf{r})}{\partial t} = \mathbf{f}[\mathbf{z}_0(\mathbf{r}), \tilde{p}_0(\mathbf{r}), \mathbf{r}], \quad (3.8a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z}_0 = 0. \quad (3.8b)$$

(3.7) entwickeln wir nun um den Grundzustand (zum Beispiel Herbert, 2012a)

$$\frac{\partial \mathbf{z}_0(\mathbf{r})}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{z}'(\mathbf{r})}{\partial t} = \mathbf{f}[\mathbf{z}_0(\mathbf{r}), \tilde{p}_0(\mathbf{r}), \mathbf{r}] + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \\ \tilde{p}=\tilde{p}_0}} \mathbf{z}' + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{p}} \right|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \\ \tilde{p}=\tilde{p}_0}} \tilde{p}' + \mathcal{O}(\mathbf{z}'\mathbf{z}'^\top), \quad (3.9a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z}_0 + \boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z}' = 0, \quad (3.9b)$$

wobei  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$  eine Matrix ist (die Ableitung nach  $\mathbf{z}$  ist bei festgehaltenem  $\mathbf{r}$  zu bilden). Das Restglied der Taylor-Entwicklung der rechten Seite von (3.9a) ist von quadratischer Ordnung in  $\mathbf{z}'$  (der erste und im Falle der Boussinesq-Gleichungen einzige vektorielle Term des Restgliedes ist eine lineare Funktion der Matrix  $\mathbf{z}'\mathbf{z}'^\top$ ). Subtrahieren wir schließlich (3.8) von (3.9) und nehmen an, dass die nichtlinearen Terme vernachlässigbar klein im Vergleich zu den linearen Termen sind, so erhalten wir die linearisierten Boussinesq-Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{z}'(\mathbf{r})}{\partial t} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}} \right|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \\ \tilde{p}=\tilde{p}_0}} \mathbf{z}' + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{p}} \right|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \\ \tilde{p}=\tilde{p}_0}} \tilde{p}', \quad (3.10a)$$

$$\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z}' = 0. \quad (3.10b)$$

Die Komponenten von (3.10a) lauten

$$\frac{\partial z'_i(\mathbf{r})}{\partial t} = \sum_{j=1}^4 \left. \frac{\partial f_i}{\partial z_j} \right|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \\ \tilde{p}=\tilde{p}_0}} z'_j + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \tilde{p}} \right|_{\substack{\mathbf{z}=\mathbf{z}_0, \\ \tilde{p}=\tilde{p}_0}} \tilde{p}'. \quad (3.11)$$

Die Randbedingungen aus Abschnitt 2.2.5 gelten sowohl für den Grundzustand als auch für die Störung. Nur für die Temperatur an den Zylinderwänden gilt

$$T_0|_{r=a} = T_a, \quad (3.12a)$$

$$T_0|_{r=b} = T_b, \quad (3.12b)$$

$$T'|_{r=a,b} = 0. \quad (3.12c)$$

---

on: Skalarprodukt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a}^\top \mathbf{a}$ , dyadisches Produkt  $\mathbf{a} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{a} \mathbf{a}^\top$ , Vektor-Matrix-Produkt  $\mathbf{a} \cdot \mathbb{A} \rightarrow \mathbf{a}^\top \mathbf{A}$  und Matrix-Vektor-Produkt  $\mathbb{A} \cdot \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{A} \mathbf{a}$  (Bronstein *et al.*, 2001).

Wir betrachten die durch (3.10) beschriebene lineare Dynamik auf zwei azimutalsymmetrischen Grundzuständen. Als ersten Grundzustand wählen wir die in Abschnitt 3.2 beschriebene stationäre 2D-Lösung

$$\mathbf{z}_{0,\mathbf{I}} = \mathbf{z}(r, z). \quad (3.13)$$

Der zweite Grundzustand ist ein azimutales Mittel der Strömung zu einem Zeitpunkt, da sich die barokline Welle bereits vollständig ausgebildet hat

$$\mathbf{z}_{0,\mathbf{II}} = \bar{\mathbf{z}}^\vartheta(r, z, t), \quad (3.14)$$

wobei  $\overline{(\cdot)}^\vartheta := \int_0^{2\pi} (\cdot) d\vartheta / (2\pi)$ . Im Folgenden wird angenommen, dass die zeitlichen Änderungen von (3.14) vernachlässigbar klein sind im Vergleich zu den zeitlichen Schwankungen der Störung  $\mathbf{z}'$ , sodass  $\mathbf{z}_{0,\mathbf{II}}(r, z, t) \approx \mathbf{z}_{0,\mathbf{II}}(r, z)$  gerechtfertigt erscheint.  $\mathbf{z}_{0,\mathbf{II}}$  wird für beide Simulationsvarianten (ohne und mit Anlauf) untersucht. Da die Grundzustände und auch  $\mathbf{f}$  nicht von  $\vartheta$  und  $t$  abhängen, lautet die Fourier-Entwicklung von  $\mathbf{z}'$  bezüglich dieser beiden Koordinaten (zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001; Bestehorn, 2006; Vallis, 2006; Lin, 2007; Achatz, 2010)

$$\mathbf{z}'(\vartheta, r, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n_\vartheta=-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{z}}(n_\vartheta, r, z, \omega) e^{i(n_\vartheta\vartheta - \omega t)}, \quad (3.15)$$

wobei, wegen der  $2\pi$ -Periodizität in azimuthaler Richtung, für die azimuthale Wellenlänge  $\lambda_\vartheta = 2\pi/n_\vartheta$ , mit der Modenzahl  $n_\vartheta \in \mathbb{Z}$  gilt. Die zugehörige Wellenzahl lautet daher  $k_\vartheta = 2\pi/\lambda_\vartheta = n_\vartheta$ . Ferner ist  $\omega$  die Kreisfrequenz (im Folgenden einfach als Frequenz bezeichnet). Überführt man (3.10a) bezüglich  $\vartheta$  und  $t$  in den Fourier-Raum, so erfüllt jede azimuthale Mode  $\hat{\mathbf{z}}_{n_\vartheta} := \hat{\mathbf{z}}(n_\vartheta, r, z, \omega)$  die Gleichung

$$(-i\omega)\hat{\mathbf{z}}_{n_\vartheta} = \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)\hat{\mathbf{z}}_{n_\vartheta} + \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{p}}\right)\hat{\tilde{p}}_{n_\vartheta}. \quad (3.16)$$

Ein untersuchter Grundzustand stellt dann für eine Mode  $\hat{\mathbf{z}}_{n_\vartheta}$  eine instabile Umgebung dar, falls  $\text{Im}(\omega) > 0$  (Anwachs) und eine stabile, falls  $\text{Im}(\omega) < 0$  (Dämpfung). Neutrale Moden ( $\text{Im}(\omega) = 0$ ) haben in dieser Untersuchung keine Rolle gespielt. Wir setzen dabei voraus, dass eine etwaige Instabilität großskaliger Moden ( $|n_\vartheta| \lesssim 10$ ) auf den baroklinen Instabilitätsmechanismus (gemäß des Eady-Modells) zurückgeht oder zumindest von diesem dominiert wird.

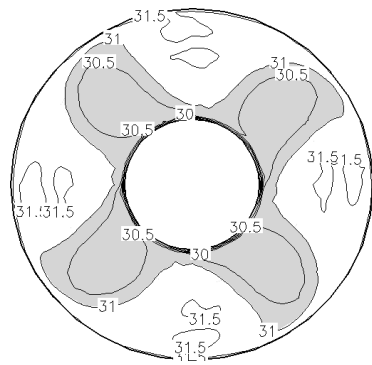
Da die vollständig nichtlineare Grundversion von cylFloit die Boussinesq-Gleichungen im physikalischen Raum integriert, verwenden wir der Einfachheit halber für die linearisierte Version das Gleichungssystem (3.10) und nicht (3.16). Integriert man das lineare Modell mit den ursprünglichen Flüssigkeitsparametern, so enthält  $\mathbf{z}'$  räumliche Strukturen mit sehr kleinen Skalen (von der Größenordnung der Gitterskalen  $\Delta\vartheta$ ,  $\Delta r$  und  $\Delta z$ ), die den größten Anwachs zeigen. Sie verschleiern den Anwachs der großskaligen baroklinen Moden. Durch eine Erhöhung der kinematischen Viskosität und Temperaturleitfähigkeit auf den konstanten Wert  $\nu_0 = \kappa_0 = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$  (vergleiche die Werte von  $\nu$  und  $\kappa$  für Wasser im Bereich von  $T_a = 24^\circ\text{C}$  bis  $T_b = 32^\circ\text{C}$  in Abbildung 2.2) konnte der Anwachs der

kleinskaligen Strukturen unterdrückt werden. Dabei wird angenommen, dass die Auswirkungen einer erhöhten Viskosität und Temperaturleitfähigkeit auf die baroklinen Moden verhältnismäßig klein ist (vergleiche Durran, 1999). Die Simulationen des linearen Modells wurden mit den gleichen Zufallstemperaturstörungen initialisiert, wie die in Abschnitt 3.2 beschriebenen 3D-Simulationen. Alle anderen Anfangseinträge von  $\mathbf{z}'$  sind Null.

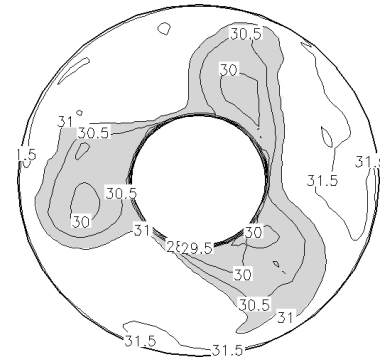
Wir haben die linearisierte Version von *cylFloit* auf einige der Validierungsexperimente angewendet. Generell sind die Grundzustände  $\mathbf{z}_{0,II}$ , die sich aus der azimuthalen Mittelung der Strömungen mit voll ausgebildeten baroklinen Wellen ergeben, nicht oder nur sehr schwach baroklin instabil, mit Anwachsraten, die verhältnismäßig klein sind im Vergleich zu den Anwachsraten auf einem baroklin instabilen Grundzustand  $\mathbf{z}_{0,I}$ . Falls der untersuchte Grundzustand baroklin instabil ist, so bezeichnen wir die Mode mit dem schnellsten Anwachs als dominante Mode. Sollte der Grundzustand baroklin stabil sein, so wird die am schwächsten gedämpfte Mode als dominante Mode bezeichnet. Als ein Beispiel sind die Ergebnisse des linearen Modells für Experiment Nr. 16 ( $\Omega = 10,8 \text{ U/min}$ ) in Abbildung 3.5 gezeigt. In den nichtlinearen Simulationen bilden sich barokline Wellen mit Modenzahl 4 in der Variante ohne Anlauf und Modenzahl 3 in der Variante mit Anlauf (Abbildung 3.5a und 3.5b). Die Modenzahl 3 wurde ebenfalls im Laborexperiment beobachtet (siehe Tabelle 3.2). Auf dem Grundzustand  $\mathbf{z}_{0,I}$  dieses Experiments zeigt die lineare Mode mit Modenzahl 4 den schnellsten Anwachs (Abbildung 3.5c). Der Grundzustand  $\mathbf{z}_{0,II}$  ist in beiden Simulationsvarianten baroklin stabil in Bezug auf alle Moden, sodass die am schwächsten gedämpfte Mode als dominant bezeichnet wird. In der Simulationsvariante ohne Anlauf gilt dies für Modenzahl 5 (Abbildung 3.5d) und in der Variante mit Anlauf für Modenzahl 3 (Abbildung 3.5e). Demzufolge können Grundzustände von vollständig nichtlinearen Strömungen barokliner Wellen mit unterschiedlichen Modenzahlen dominante lineare Moden aufweisen, die ebenfalls verschiedene Modenzahlen besitzen. Diese Beobachtung wurde auch bei anderen Experimenten gemacht. Allerdings stimmen die Modenzahlen der vollständig nichtlinearen baroklinen Wellen und der zugehörigen dominanten linearen Moden im Allgemeinen nicht überein. Dies ist ein Hinweis darauf, dass die nichtlinearen Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\mathbf{z}'\mathbf{z}'^T)$  in (3.9a) einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Dynamik haben.

In diesem Zusammenhang mögen die eingangs erwähnten kleinskaligen Strukturen, deren Anwachs durch die Erhöhung der kinematischen Viskosität und Temperaturleitfähigkeit unterdrückt wurde, unter folgendem Gesichtspunkt betrachtet werden: In den Simulationen ist die Strömung außerhalb der Grenzschichten vorwiegend horizontal. Theoretische Betrachtungen zeigen, dass die Energie in einer turbulenten zweidimensionalen Strömung von Strukturen mit kleinen räumlichen Skalen auf Strukturen mit größeren Skalen übertragen wird. Im Unterschied dazu wird die Energie in einer turbulenten dreidimensionalen Strömung von größerskaligen Strukturen auf kleinerskalige Strukturen übertragen (dieser Vorgang wird als Energiekaskade bezeichnet, siehe Vallis (2006)). In den Strömungen mit vollständig ausgebildeten baroklinen Wellen, die die Grundzustände  $\mathbf{z}_{0,II}$  liefern, könnten es demzufolge die in der linearen Dynamik instabilen kleinskaligen Strukturen sein, die ihre Energie über die umgekehrte Energiekaskade einer turbulenten zweidimensionalen Strömung auf die großskaligen baroklinen Wellenmoden übertragen und auf diese Weise dazu beitragen, dass die baroklinen Wellen in der nichtlinearen Dynamik aufrecht erhalten werden, wengleich sie in der linearen Dynamik gedämpft sind.

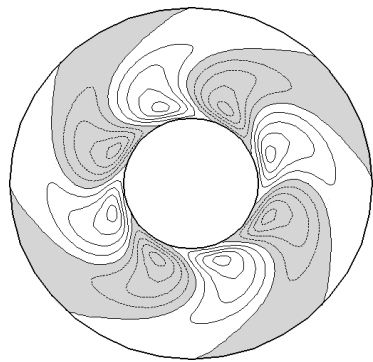
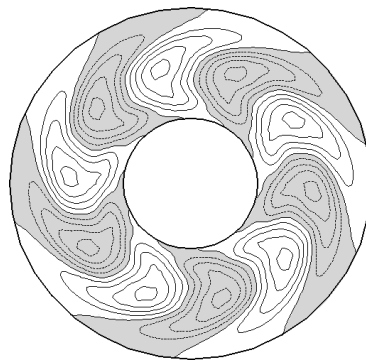
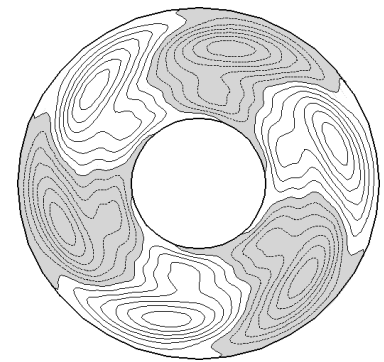




(a) Nr. 16: Simulation ohne Anlauf



(b) Nr. 16: Simulation mit Anlauf

(c) Nr. 16: Linearisiertes Modell,  
Grundzustand ohne Anlauf,  
 $t = t_{2D}$ (d) Nr. 16: Linearisiertes Modell,  
Grundzustand ohne Anlauf,  
 $t > t_{2D}$ (e) Nr. 16: Linearisiertes Modell,  
Grundzustand mit Anlauf

**Abbildung 3.5:** (a) und (b) wie in Abbildung 3.2b und 3.2c, aber hier für Experiment Nr. 16 ( $\Omega = 10,8 U/\text{min}$ ). Temperaturwerte unter  $31^\circ\text{C}$  sind grau schattiert. (c), (d) und (e) zeigen Temperaturmoden in der Höhe  $z = 10\text{ cm}$ , in willkürlichen Einheiten (Bereiche mit negativen Werten sind grau schattiert). Sie wurden mithilfe einer linearisierten Modellversion von cylFloIt berechnet. (c) ist die Mode mit schnellstem Anwachs auf dem baroklin instabilen azimutalsymmetrischen Grundzustand der Simulationsvariante ohne Anlauf zur Zeit  $t = t_{2D}$ . (d) ist die am schwächsten gedämpfte Mode auf dem baroklin stabilen Grundzustand, der durch azimutale Mittelung der Strömung mit vollständig ausgebildeter barokliner Welle aus der Simulation ohne Anlauf, von der die Temperatur in (a) gezeigt ist, gewonnen wurde. (e) ist die am schwächsten gedämpfte Mode auf dem Grundzustand, der durch azimutale Mittelung der Strömung aus der Simulation mit Anlauf gewonnen wurde, deren Temperatur in (b) gezeigt ist.

Vor dem Hintergrund dieser Ergebnisse besteht die Möglichkeit, das Auftreten unterschiedlicher Modenzahlen in den beiden Simulationsvarianten, ohne und mit Anlauf, darauf zurückzuführen, dass die jeweiligen Grundzustände dominante lineare Moden mit unterschiedlichen Modenzahlen besitzen. Jedoch stellt sich bei dieser Deutung die Frage, ob es wirklich der Grundzustand, gemäß seiner Definition (3.14), ist, der die Modenzahl der baroklinen Welle beeinflusst oder ob es umgekehrt die barokline Welle ist, die einen maßgeblichen Einfluss auf die Eigenschaften des Grundzustandes hat? Möglicherweise ist es physikalisch gar nicht sinnvoll, Grundzustand und barokline Welle kausal voneinander zu trennen. Wir können diese Fragen im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht beantworten.

### 3.5 Eine Hauptkomponentenanalyse

Neben dem Vergleich der azimuthalen Modenzahl der baroklinen Wellen, der ein wichtiges Werkzeug in den beiden vorangegangenen Abschnitten war, möchten wir hier, als ein weiteres Werkzeug der Modellvalidierung, die führenden Variabilitätsmuster des Temperaturfeldes aus dem Experiment und der Simulation miteinander vergleichen. Diese Muster sind das Ergebnis einer Hauptkomponentenanalyse (englisch: *principal component analysis* – PCA) von Zeitreihen des Temperaturfeldes. Die PCA ist ein Werkzeug aus der multivariaten Statistik, welche die Eigenschaften mehrdimensionaler Messgrößen untersucht (zum Beispiel Preisendorfer, 1988; Harlander *et al.*, 2011). Das Temperaturfeld, das im Falle des Experiments untersucht wurde, ist die Flüssigkeitsoberflächentemperatur, wie zum Beispiel in Abbildung 3.2a gezeigt. Zeitreihen dieses Temperaturfeldes wurden bereits an der BTU mittels PCA analysiert. Die Ergebnisse wurden uns von U. Harlander, M. Vincze und K. D. Alexandrov zur Verfügung gestellt. Im Falle der Simulationen haben wir Horizontalschnitte des Temperaturfeldes in der Höhe  $z = 10$  cm untersucht (siehe zum Beispiel Abbildung 3.2b und 3.2c). Dazu haben wir die Temperaturwerte auf dem numerischen Gitter zu jedem Zeitpunkt  $t_m$  der Zeitreihe ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) in einem Spaltenvektor angeordnet

$$\mathbf{T}(t_m) = \begin{pmatrix} T_1(t_m) \\ T_2(t_m) \\ \vdots \\ T_n(t_m) \\ \vdots \\ T_N(t_m) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

wobei  $N = N_\vartheta \times N_r$  die Anzahl der Gitterpunkte in der Horizontalen ist. Da es sich um die Temperatur handelt, bezeichnen wir den algebraischen Vektor  $\mathbf{T}$  ausnahmsweise mit einem Großbuchstaben. Die Anordnung der einzelnen Temperaturwerte im Vektor muss eine eindeutige Abbildung zwischen dem azimuthalen und radialen Gitterindizes  $i$  und  $j$  und dem Vektorindex  $n$  sein, ist ansonsten aber willkürlich. Die Hauptkomponentenanalyse von  $\mathbf{T}(t_m)$  kann als eine Koordinatentransformation betrachtet werden. Dabei

wird zunächst der Ursprung in das zeitliche Mittel von  $\mathbf{T}(t_m)$ ,  $\bar{\mathbf{T}}^t := \sum_{m=1}^M \mathbf{T}(t_m)/M$  verschoben

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t_m) &:= \mathbf{T}(t_m) - \bar{\mathbf{T}}^t = \begin{pmatrix} T'_1(t_m) \\ T'_2(t_m) \\ \vdots \\ T'_N(t_m) \end{pmatrix} \\ &= T'_1(t_m) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{e}_1} + T'_2(t_m) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{e}_2} + \cdots + T'_N(t_m) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{e}_N}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei mit  $\mathbf{e}_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) die algebraischen Einheitsvektoren bezeichnet werden. Durch eine Rotation der Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_n$  wird im nächsten Schritt eine neue ortho-normale Basis  $\tilde{\mathbf{e}}_n$  erzeugt. Diese Rotation erfolgt dergestalt, dass der Bildvektor  $\tilde{\mathbf{e}}_1$ , der sich aus der Rotation von  $\mathbf{e}_1$  ergibt, in Richtung des Höchstwertes der zeitlichen Varianz von  $\mathbf{T}'$  weist, der Bildvektor  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  in Richtung des zweithöchsten Wertes der Varianz von  $\mathbf{T}'$  weist, usw. Die Vektoren der neuen Basis  $\tilde{\mathbf{e}}_n$  werden empirische Orthogonalfunktionen (EOF) genannt. Sie erfüllen die Eigenwertgleichung (Preisendorfer, 1988)

$$\mathbf{C}\tilde{\mathbf{e}}_n = \xi_n \tilde{\mathbf{e}}_n. \quad (3.19)$$

Dabei ist  $\mathbf{C}$  die Kovarianzmatrix der Temperaturwerte

$$\mathbf{C} = \overline{\mathbf{W}\mathbf{T}'(\mathbf{W}\mathbf{T}')^T}, \quad (3.20)$$

mit einer diagonalen Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W}$ , die folgende Einträge enthält (in Anlehnung an Hannachi & O'Neill, 2001; Jolliffe, 2002)

$$W_{nq} = \begin{cases} r(n)/b, & \text{falls } n = q \\ 0, & \text{falls } n \neq q \end{cases}, \quad (3.21)$$

wobei  $r(n)$  die radiale Koordinate des Gitterpunktes ist, dem der Vektorindex  $n$  zugewiesen wurde. Diese geometrische Gewichtung der Temperaturwerte trägt der Tatsache Rechnung, dass die horizontale Fläche, die ein Temperaturwert repräsentiert, linear mit dem Radius zunimmt (siehe Abbildung 2.3a). Gemäß (3.19) entspricht die zuvor beschriebene Koordinatentransformation in die neue Basis  $\tilde{\mathbf{e}}_n$  einer Hauptachsentransformation in Bezug auf die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  (zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001). Wenn man die Einträge der EOF wieder dem horizontalen Gitter zuordnet, kann man die EOF als räumliche Variabilitätsmuster des Temperaturfeldes deuten. Da  $\tilde{\mathbf{e}}_n^T \tilde{\mathbf{e}}_n = 1$  gilt, entspricht der zugehörige Eigenwert  $\xi_n$  der Varianz der Temperaturwerte in Richtung von  $\tilde{\mathbf{e}}_n$ . Es gilt  $\xi_1 \geq \xi_2 \geq \dots \geq \xi_N$ , weil vereinbarungsgemäß  $\tilde{\mathbf{e}}_1$  in Richtung der größten Varianz,  $\tilde{\mathbf{e}}_2$  in Richtung der zweitgrößten Varianz usw. weisen. Gewöhnlich werden nicht die absoluten Varianzen  $\xi_n$  angegeben, sondern ihr Wert wird mit der Summe aller Eigenwerte von  $\mathbf{C}$

normiert:  $\xi_n / \sum_{i=1}^N \xi_i$  (= Anteil der Varianz  $\xi_n$  an der Gesamtvarianz). Ist (3.18) die Darstellung von  $\mathbf{T}'$  in der ursprünglichen Basis  $\mathbf{e}_n$ , so schreiben wir für die Darstellung in der EOF-Basis (Preisendorfer, 1988)

$$\mathbf{T}'(t_m) = \sum_{n=1}^N \theta_n(t_m) \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_n, \quad (3.22)$$

wobei die  $\theta_n$  als prinzipale Komponenten bezeichnet werden, die sich aus der Projektion von  $\tilde{\mathbf{e}}_n$  auf  $\mathbf{W}\mathbf{T}'$  ergeben.

Ein Programm, das mithilfe einer numerische Bestimmung der Eigenwerte und -vektoren von Gleichung (3.19) eine Hauptkomponentenanalyse von Temperaturfeldzeitreihen aus cylFloit-Simulationen ermöglicht, wurde von Heppelmann (2011) im Rahmen einer Studienarbeit entwickelt. Wir haben dieses Programm verwendet, um eine PCA der Experimente Nr. 3, Nr. 7 und Nr. 26 durchzuführen. Im Falle des Laborexperiments wurden Zeitreihen von  $M = 3000$  Thermographieaufnahmen mit einem Intervall von 5 s zwischen zwei aufeinander folgenden Aufnahmen analysiert. Von den Simulationsergebnissen wurden lediglich diejenigen aus der Variante mit Anlauf untersucht. Nach einer Einschwingzeit von 2000 s für Nr. 3 und Nr. 7 sowie 4200 s für Nr. 26, wurden in 5 h physikalischer Integrationszeit alle 1,8 s Ausgaben des Temperaturfeldes gemacht, sodass  $M = 10000$ . Neben Simulationen, die G3 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 60 \times 40 \times 50$ ) verwenden, wurden Simulationen mit gröberer Gitterauflösung durchgeführt, nämlich  $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 15 \times 10 \times 12$ , als Gitter G1 bezeichnet, und  $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 30 \times 20 \times 25$ , als Gitter G2 bezeichnet (siehe Tabelle 3.3). Mit Gitter G4 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 120 \times 80 \times 150$ ) wurde der Einfluss der Grenzschichten (siehe Abschnitt 3.2) untersucht, da bei dieser Auflösung ungefähr eine Gitterzellschicht innerhalb der jeweiligen Grenzschicht liegt. In Simulationen mit Gitter G4 begann die Aufzeichnung der Zeitreihe bereits nach einer Einschwingzeit von 1800 s für Experiment Nr. 3, Nr. 7 und Nr. 26. Die Zeitreihen bestehen aus  $M = 2800$  Ausgaben des Temperaturfeldes im Falle von Nr. 3 und Nr. 7, und  $M = 1500$  Ausgaben für Nr. 26. Das Intervall zwischen zwei aufeinander folgenden Ausgaben beträgt 1 s. Diese Verringerung des Zeitreihenumfangs war notwendig, da der Rechenaufwand für Simulationen mit Gitter G4 sehr viel größer ist, als für Simulationen mit G1, G2 und G3. Der Einfluss auf die Ergebnisse der PCA ist aber nicht allzu groß. Darüber hinaus wurden im Falle der Gitter G3 und G4 Simulationen durchgeführt, in denen statt ALDM ein einfaches Zentrale-Differenzen-Schema (ZD) (zum Beispiel Ferziger & Perić, 2008) zur numerischen Berechnung der advektiven Flüsse verwendet wurde. Auf diesem Wege konnten Ergebnisse aus Simulationen, die ALDM verwenden, mit Ergebnissen aus Simulationen verglichen werden, in denen kein besonderes Feinstrukturmodell (siehe Abschnitt 2.3) zum Einsatz kam.

Als ein Beispiel werden in Abbildung 3.6 Temperaturfelder aus Simulationen von Experiment Nr. 26 gezeigt, in denen die zuvor genannten unterschiedlichen Gitterauflösungen zum Einsatz kamen. Da für Gitter G4 die Auflösung bereits so hoch ist, dass zwischen den Ergebnissen aus der Simulation mit ALDM und aus derjenigen mit ZD kein großer Unterschied zu erkennen ist, zeigen wir hier und im Folgenden nur die ALDM-Ergebnisse für G4. Bei der Auswertung der PCA beschränken wir uns auf die erste EOF (EOF 1), die in Richtung der größten Varianz des Temperaturfeldes weist. EOF 1 und die zugehörige normierte Varianz  $\xi_1 / \sum_{i=1}^N \xi_i$  werden in Abbildung 3.7 für Nr. 3, Abbildung 3.8 für Nr. 7

und Abbildung 3.9 für Nr. 26 gezeigt. In Koordinatenrichtungen, in denen der Antrieb des dynamischen Systems und die Randbedingungen symmetrisch sind, sollte die PCA, bis auf willkürliche konstante Faktoren, einer Fourier-Zerlegung entsprechen (Achatz & Schmitz, 1997). Diese Voraussetzung ist im Annulus in azimuthaler Richtung erfüllt. Demzufolge sollte jede EOF genau einer azimuthalen Mode entsprechen, vorausgesetzt die untersuchte Zeitreihe ist umfangreich genug, um das System im statistischen Sinne vollständig zu repräsentieren. Für die EOF in den Abbildungen 3.7 bis 3.9 ist dies augenscheinlich größtenteils erfüllt. In der Fourier-Zerlegung einer propagierenden Wellenmode erhält man einen Kosinus- und Sinus-Anteil. Daher bilden auch die EOF Paare, in denen die beiden EOF dieselbe Modenzahl besitzen, aber in azimuthaler Richtung gegeneinander phasenverschoben sind. So hat beispielsweise EOF 2 im Idealfall die gleiche Gestalt wie EOF 1 und die Varianz des Temperaturfeldes entlang der Richtung von EOF 1 und EOF 2 ist identisch (nicht gezeigt).

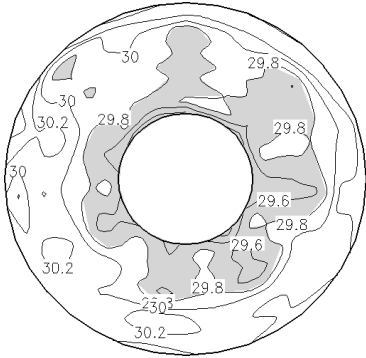
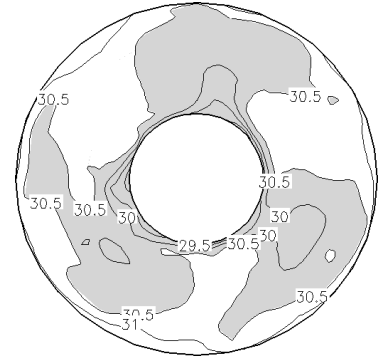
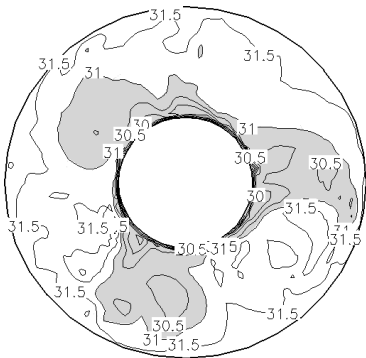
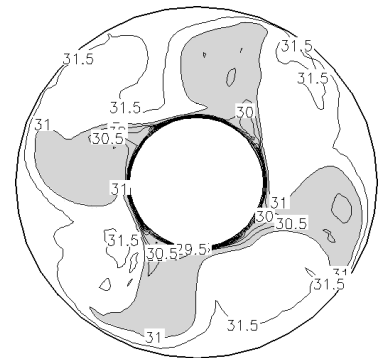
Um die EOF, die aus der PCA der Laborexperimente gewonnen wurden, mit den EOF der Simulationen zu vergleichen, bietet sich der Korrelationskoeffizient als ein Vergleichsmaß an (Jolliffe, 2002)

$$\varrho = \frac{\check{\mathbf{e}}_1^\top(\text{Exp.})\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})}{\sqrt{[\check{\mathbf{e}}_1^\top(\text{Exp.})\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})][\check{\mathbf{e}}_1^\top(\text{Sim.})\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})]}}, \quad (3.23)$$

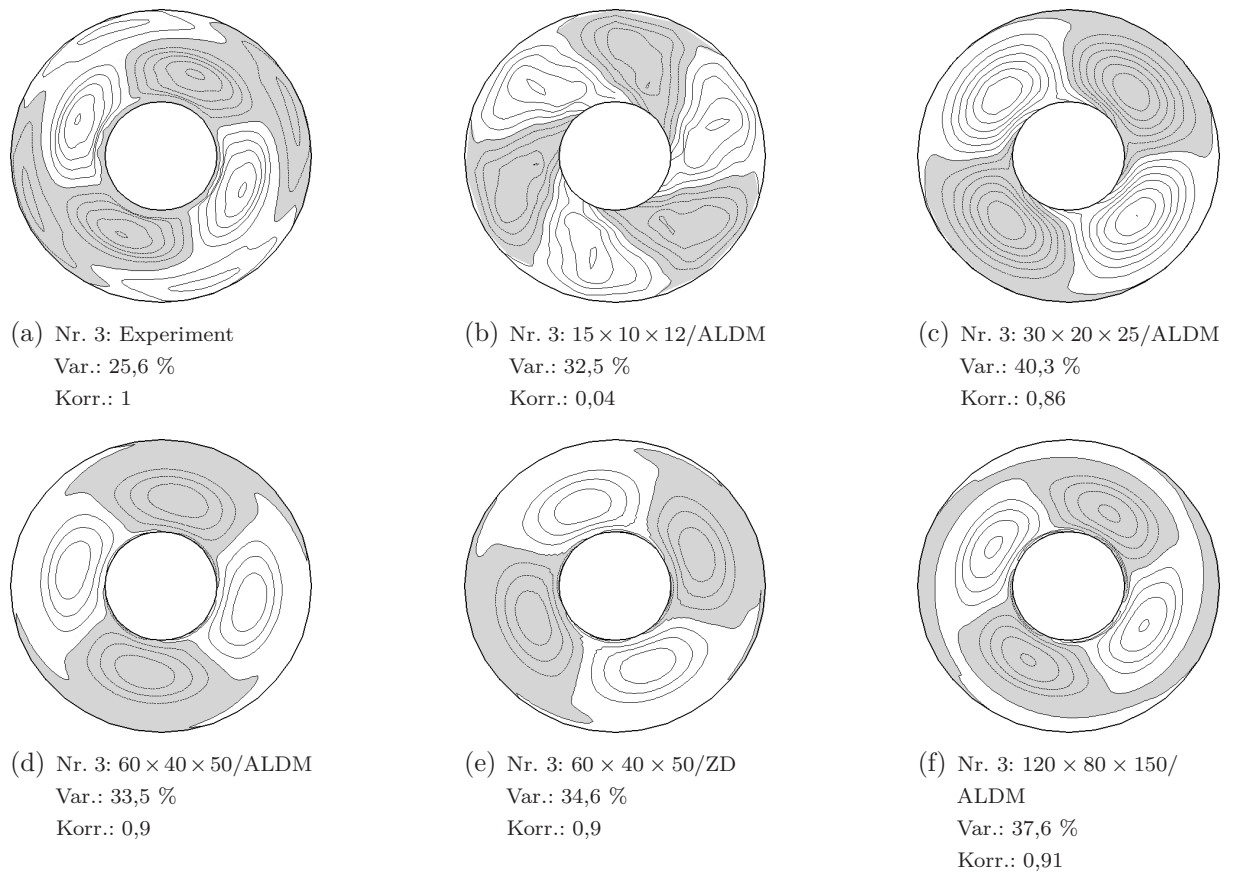
wobei  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.}) := \mathbf{W}^{-1}\tilde{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$ . Die Normierung durch den Nenner in (3.23) ist notwendig, da  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$ , anders als  $\tilde{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$ , die Orthonormalitätsbedingung im Allgemeinen nicht erfüllt ( $\check{\mathbf{e}}_1^\top(\text{Sim.})\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.}) \neq 1$ ). Die EOF der Laborexperimente  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})$  werden wie die Thermogramme auf einem kartesischen Gitter abgebildet. Der Flächeninhalt, den ein Temperaturwert repräsentiert, ist daher konstant und hängt nicht, wie im Falle des zylindrischen Gitters, vom Ort ab. Aus diesem Grunde bedarf es keiner geometrischen Gewichtung wie in (3.20) beziehungsweise  $\mathbf{W} = \mathbf{E}$ , mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$ . Um (3.23) berechnen zu können, werden die  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})$  allerdings auf das jeweilige zylindrische Gitter von cylFloit interpoliert, wodurch sie ihre Orthogonalität vermutlich ebenfalls einbüßen. Da die azimuthale Ausrichtung der EOF verschiedener Zeitreihen willkürlich ist, werden  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})$  und  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$  solange gegeneinander gedreht, bis  $\varrho$  einen Höchstwert erreicht, der dann als Korrelation zwischen  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})$  und  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$  bezeichnet wird. Vergleichen wir (3.23) mit dem Skalarprodukt zweier physikalischer Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  (Bronstein *et al.*, 2001)

$$\cos(\gamma) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})}}, \quad (3.24)$$

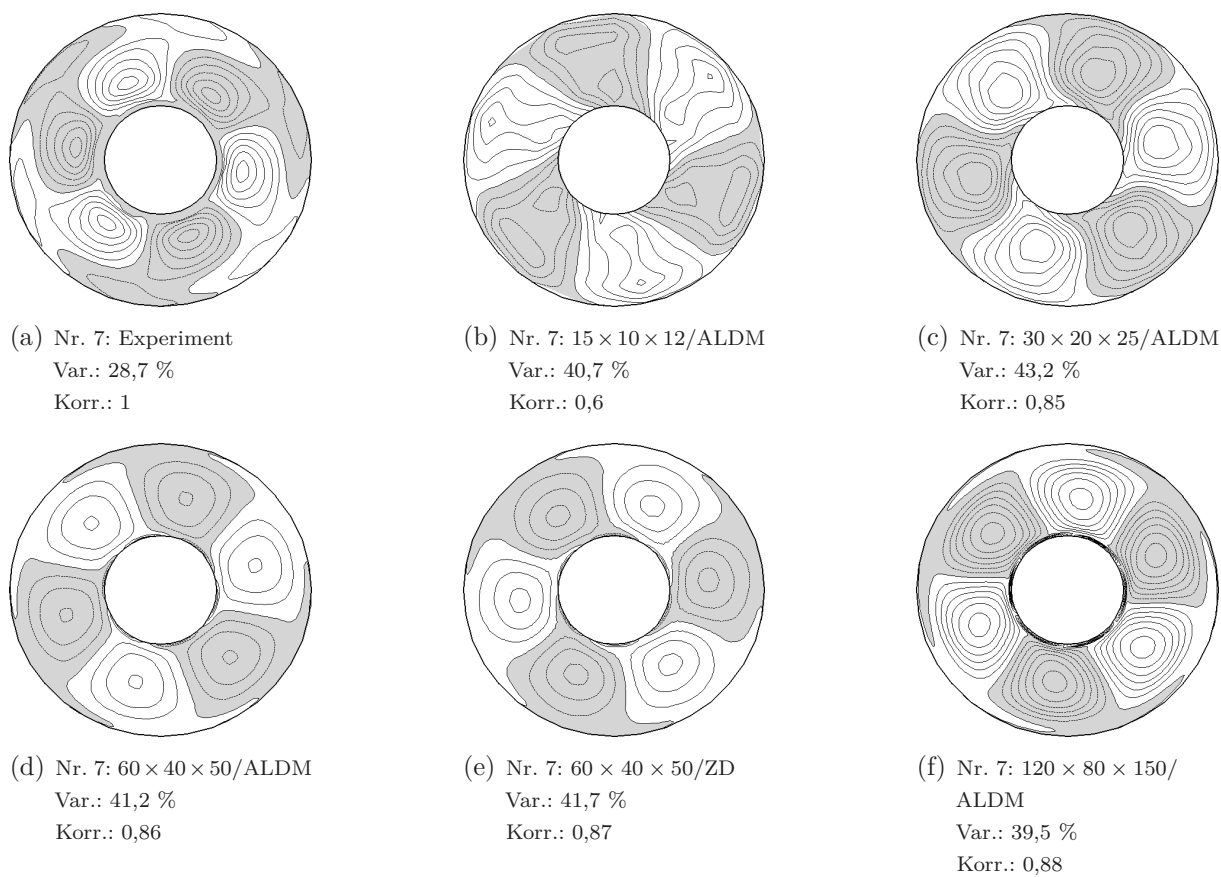
wobei  $\gamma$  der von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  eingeschlossene Winkel ist, so bietet sich auch für den Korrelationskoeffizienten die Deutung  $\varrho = \cos(\varphi)$  an. Dabei wäre  $\varphi$  der Winkel zwischen  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})$  und  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$ . Weiterhin kann (3.24) entnommen werden, dass  $\varrho \in [-1; 1]$ , wobei der bestmögliche Wert,  $\varrho = 1$ , erzielt würde, falls  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Exp.})$  und  $\check{\mathbf{e}}_1(\text{Sim.})$  parallel wären. Die Korrelationskoeffizienten für die EOF der verschiedenen Simulationen von Nr. 3, Nr. 7 und Nr. 26 sind in den Abbildungen 3.7 bis 3.9 angegeben.

(a) Nr. 26:  $15 \times 10 \times 12$ /ALDM(b) Nr. 26:  $30 \times 20 \times 25$ /ALDM(c) Nr. 26:  $60 \times 40 \times 50$ /ZD(d) Nr. 26:  $120 \times 80 \times 150$ /ALDM

**Abbildung 3.6:** Temperaturfelder aus 3D-Simulationen von Experiment Nr. 26 mit Anlauf, in denen unterschiedliche numerische Parameter verwendet wurden. (a) und (b) zeigen die Temperaturfelder, die aus der Verwendung der Gitter G1 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 15 \times 10 \times 12$ ) und G2 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 30 \times 20 \times 25$ , siehe Tabelle 3.3) resultieren. In (c) wurde Gitter G3 ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 60 \times 40 \times 50$ ) verwendet. Außerdem wurde zur Berechnung der advektiven Flüsse nicht das Feinstrukturmodell ALDM, sondern ein einfaches Zentrale-Differenzen-Schema (ZD) benutzt. Das Temperaturfeld aus der Simulation mit der höchsten Gitterauflösung ( $N_\vartheta \times N_r \times N_z = 120 \times 80 \times 150$ ) ist in (d) gezeigt. Alle Temperaturfelder sind Horizontalschnitte in der Höhe  $z = 10$  cm zum Zeitpunkt  $t = 10800$  s im Falle von (a), (b) und (c), und  $t = 3300$  s im Falle von (d). Das Intervall der Isothermen beträgt  $0,2$  K für (a) und  $0,5$  K für (b), (c) und (d). Um die baroklinen Wellen hervorzuheben, sind Temperaturwerte kleiner als  $T_S$  grau schattiert, wobei  $T_S = 29,8^\circ\text{C}$  in (a),  $T_S = 30,5^\circ\text{C}$  in (b) und  $T_S = 31^\circ\text{C}$  in (c) und (d).

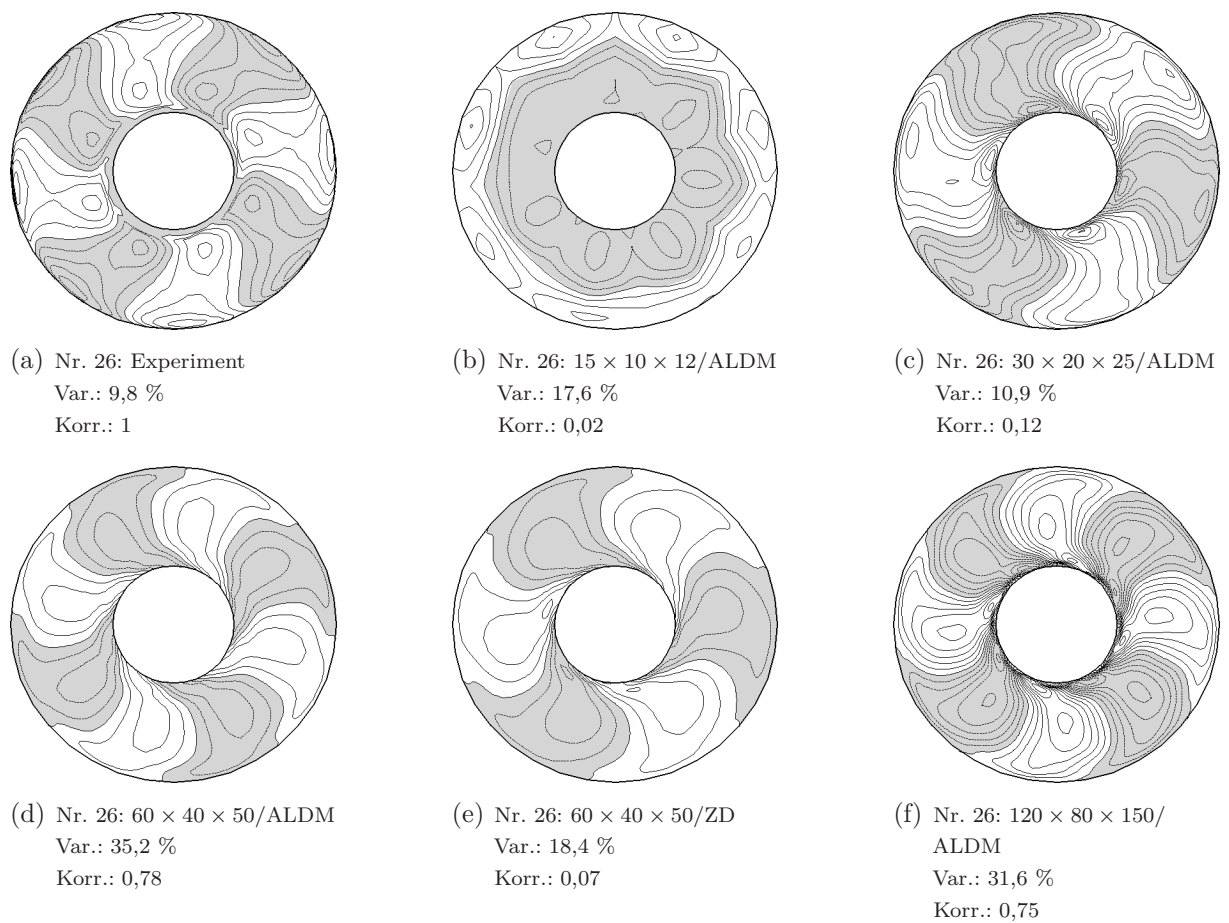


**Abbildung 3.7:** Die ersten empirischen Orthogonalfunktionen (EOF 1), die aus einer Hauptkomponentenanalyse von Temperaturfeldzeitreihen aus Experiment Nr. 3 ( $\Omega = 4 \text{ U/min}$ ) und dessen Simulationen mittels cylFloit resultieren. (a) zeigt EOF 1 aus dem Laborexperiment. (b) bis (f) sind EOF aus 3D-Simulationen dieses Experiments, die unterschiedliche numerische Parameter verwenden. Die Bildunterschriften geben dabei an, welches Gitter und welches Schema zur Berechnung der advektiven Flüsse verwendet wurden, nach dem Muster  $N_\vartheta \times N_r \times N_z$ /Flussschema (entweder die Adaptive Local Deconvolution Method – ALDM oder ein Zentrale-Differenzen-Schema – ZD). Darüber hinaus ist angegeben, welchen Anteil die Varianz (Var.) des Temperaturfeldes in Richtung von EOF 1 an der Gesamtvarianz hat. Die Korrelation (Korr.) zwischen EOF 1 aus dem Experiment (a) und den jeweiligen EOF 1 aus den Simulationen wird ebenfalls genannt. Alle EOF sind in willkürlichen Einheiten dargestellt und Bereiche mit negativen Werten sind grau schattiert.



**Abbildung 3.8:** Wie in Abbildung 3.7, aber hier für Experiment Nr. 7 ( $\Omega = 6$  U/min).





**Abbildung 3.9:** Wie in Abbildung 3.7, aber hier für Experiment Nr. 26 ( $\Omega = 25$  U/min).

Im Falle von Experiment Nr. 3 und Nr. 7 stimmen die EOF der Simulationen mit Gitter G2, G3 und G4 verhältnismäßig gut mit den EOF des Experiments überein. Je höher die Gitterauflösung, desto besser ist dabei die Korrelation. Die relativ geringe Verbesserung der Korrelation beim Übergang von Gitter G3 nach G4 könnte darauf hindeuten, dass die beiden EOF in ihrer Richtung nur noch geringfügig von einer Grenz-EOF für  $N_\theta \times N_r \times N_z \rightarrow \infty$  abweichen. Einige der strukturellen Unterschiede zwischen den EOF des Experiments und denjenigen der Simulation, zum Beispiel im Bereich der äußeren Zylinderwand, mögen darauf zurückgehen, dass die Horizontalschnitte des Temperaturfeldes in den Simulationen 3,5 cm unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche liegen und einige physikalische Effekte an der Oberfläche, wie der Wärmeaustausch zwischen Flüssigkeit und Umgebung, nicht berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 3.3). Das führende Variabilitätsmuster der Simulationen mit der niedrigsten Gitterauflösung G1 ( $N_\theta \times N_r \times N_z = 15 \times 10 \times 12$ ) zeigt nur für Nr. 7 dieselbe Modenzahl wie im Experiment. Der Unterschied zwischen ALDM und ZD ist im Falle von Nr. 3 und Nr. 7 relativ gering. Von den verschiedenen Simulationen von Experiment Nr. 26 zeigen fast alle eine barokline Welle mit Modenzahl 3, statt der im Experiment beobachteten Modenzahl 4. Die Simulationen mit Gitter G4 reproduzieren jedoch die richtige Modenzahl (sowohl mit ALDM als auch mit ZD). Simulationen mit Gitter G3 zeigen Modenzahl 4 nur in Kombination mit ALDM.

Eine weitere Beobachtung betrifft die zu den EOF 1 gehörigen Varianzen. In den Fällen, wo eine signifikante Korrelation zwischen den EOF des Experiments und der Simulationen vorliegt, ist die Varianz in den Simulationen systematisch größer als im Experiment. Eine Erhöhung der Gitterauflösung erzielt diesbezüglich nur geringe Verbesserungen für Nr. 7 und Nr. 26 und keine Verbesserung für Nr. 3. Setzt man voraus, dass die Lösung des numerischen Modells mit zunehmender Gitterauflösung mehr oder weniger monoton gegen die Kontinuumslösung konvergiert, so könnte diese Beobachtung darauf hindeuten, dass es schlecht aufgelöste oder vom Modell gar nicht erfasste physikalische Prozesse sind, auf die der Unterschied in der Varianz zurückzuführen ist. Diese Vermutung wird durch die Ergebnisse von Diekmann (2014) gestützt, wonach die Einführung eines Wärmeaustausches zwischen Flüssigkeit und Umgebung über die Flüssigkeitsoberfläche eine Verringerung der zu EOF 1 gehörigen Varianzen zur Folge hat, sodass deren Wert im Allgemeinen der Varianz des Experiments näher kommt. Nehmen wir weiterhin an, dass der Übergang von Gitter G3 nach G4 insbesondere der Darstellung der Grenzschichten zugute kommt, so deuten die mäßigen Verbesserungen der Korrelation und Varianz bei diesem Übergang an, dass bereits Gitter G3 die Grenzschichtdynamik verhältnismäßig gut wiedergibt, in soweit dies von den hier berücksichtigten Ergebnissen der Hauptkomponentenanalyse des Temperaturfeldes geschlossen werden kann.

### 3.6 Das Eady-Modell

Das Auftreten der baroklinen Wellen im Annulus geht auf die barokline Instabilität des azimutalsymmetrischen Grundzustandes zurück, wie bereits in Abschnitt 3.3 angesprochen. Ein verhältnismäßig einfaches quasigeostrophisches, lineares Modell der baroklinen Instabilität wurde von Eady (1949) entwickelt. Dieses sogenannte Eady-Modell beschränkt sich auf die wesentlichen Faktoren, die für eine baroklin instabile Strömung notwendig sind

und erlaubt die Herleitung einer einfachen Instabilitätsbedingung sowie der typischen Eigenschaften der linearen baroklinen Wellen. Die Vorhersagen des Modells, insbesondere in Bezug auf die Instabilitätsbedingung, können mit den Validierungsexperimenten und den Simulationen derselben verglichen werden, um zu zeigen, dass dieses Modell, trotz seiner Einfachheit, den Instabilitätsmechanismus im betrachteten Parameterbereich des Annulus sehr gut wiedergibt. Nicht zuletzt werden die Ergebnisse des Eady-Modells und die quasigeostrophisch genäherten Gleichungen, die diesem zugrunde liegen, auch im nächsten Kapitel von Nutzen sein.

### 3.6.1 Die Ausgangsgleichungen

Um zum Eady-Modell zu gelangen, sind einige Vereinfachungen des Gleichungssystems (2.36) bis (2.40) erforderlich. Zunächst beschränken wir uns in der Impulsbilanz (2.38) auf den Fall I ( $\boldsymbol{\Omega} = \text{konst.}$ ). Betrachten wir die Beträge der reduzierten Schwerkraft  $\tilde{\rho}\mathbf{g}$  und der reduzierten Zentrifugalbeschleunigung  $-\tilde{\rho}[\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})]$  an der repräsentativen radialen Position  $r = (a + b)/2$ , so gilt für alle in dieser Arbeit betrachteten Annuluskonfigurationen  $\Omega^2(a + b)/2 \ll g = 981 \text{ cm/s}^2$ . Daher vernachlässigen wir im Folgenden die Zentrifugalbeschleunigung (Hide, 1958; Williams, 1967).<sup>7</sup> Darüber hinaus bleiben der Einfachheit halber die Reibung,  $-\nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}}$ , in der Impulsbilanz (2.38) und die Wärmeleitung,  $\nabla \cdot (\kappa \nabla T)$ , in der Bilanz der inneren Energie (2.40) unberücksichtigt. Dies kann dadurch begründet werden, dass die barokline Instabilität in der freien Strömung, womit die Strömung außerhalb der Grenzschichten gemeint ist, stattfindet. Dort sollten Reibung und Wärmeleitung auf der typischen Zeitskala der baroklinen Instabilität nur eine untergeordnete Rolle spielen (Vallis, 2006). Als Zwischenergebnis erhalten wir aus den bisherigen Vereinfachungen das Gleichungssystem

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \tilde{\rho}\mathbf{g} - \nabla\tilde{p}, \quad (3.25a)$$

$$\frac{dT}{dt} = 0, \quad (3.25b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (3.25c)$$

Sowohl durch die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\Omega}$  als auch durch die massenspezifische Schwerkraft  $\mathbf{g}$  ist eine durch die Physik ausgezeichnete, konstante Richtung im Raum vorgegeben. Beide sind (anti)parallel zum vertikalen Einheitsvektor  $\mathbf{e}_z = \boldsymbol{\Omega}/\Omega = -\mathbf{g}/g$ . Die Vektorgößen in (3.25) können nun in einen Anteil (anti)parallel zur ausgezeichneten Richtung  $\mathbf{e}_z$  und einen Anteil senkrecht dazu zerlegt werden (vergleiche Wilson, 1929; Klein, 2000, 2004, 2008). Anhand des Geschwindigkeitsvektors sei die Zerlegung in den (anti)parallelen und senkrechten Anteil veranschaulicht

$$\mathbf{v}_{\parallel} := \mathbf{e}_z(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}), \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{v}_{\perp} := \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbb{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v}. \quad (3.26b)$$

<sup>7</sup> Auch das strengere Kriterium  $\Omega^2 b \ll g$  (Hide & Mason, 1975) wird von allen Annuluskonfigurationen in dieser Arbeit erfüllt.

Da  $\mathbf{e}_z = \text{konst.}$ , gilt auch für den Tensor  $\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = \text{konst.}$  Der Betrag des (anti)parallelen Anteils (3.26a) ist die bereits in Abschnitt 2.2.4 eingeführte Vertikalgeschwindigkeit  $w = \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{e}_z$ . Den senkrechten Anteil (3.26b) bezeichnen wir als Horizontalgeschwindigkeit  $\mathbf{u} := \mathbf{v}_\perp$ . Desgleichen zerlegen wir den Nabla-Operator

$$\nabla_\parallel := \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \cdot \nabla) = \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.27a)$$

$$\nabla_\perp := (\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \cdot \nabla =: \nabla_h, \quad (3.27b)$$

wobei  $\nabla_h$  als horizontaler Nabla-Operator bezeichnet wird. Mittels  $(\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) \cdot$  (3.25a) und  $\mathbf{e}_z \cdot$  (3.25a) erhalten wir die beiden üblichen Anteile der Impulsbilanz

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = -\nabla_h \tilde{p}, \quad (3.28a)$$

$$\frac{dw}{dt} = B - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \quad (3.28b)$$

wobei wir den Coriolis-Parameter  $f := 2\Omega = \text{konst.}$  und den Auftrieb  $B := -\tilde{\rho}g$  eingeführt haben (zum Beispiel Vallis, 2006). Es wird im Folgenden von Vorteil sein, wenn die Coriolis-Beschleunigung folgendermaßen umformuliert wird

$$f \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} = f \mathbf{e}_z \times (\mathbb{E} \cdot \mathbf{u}) = \underbrace{(f \mathbf{e}_z \times \mathbb{E})}_{=: \mathfrak{f}} \cdot \mathbf{u}, \quad (3.29)$$

wobei vom Assoziativgesetz  $\mathbf{a} \times \mathbb{A} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbb{A}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbb{A} \cdot \mathbf{b})$  für zwei beliebige Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  und einen beliebigen Tensor  $\mathbb{A}$  Gebrauch gemacht wurde (Wilson (1929), siehe auch Anhang D.2). Den antisymmetrischen Tensor  $\mathfrak{f}$  bezeichnen wir als Coriolis-Tensor. Die thermodynamische Gleichung (3.25b) kann in eine prognostische Gleichung für den Auftrieb  $B$  eingebunden werden (Vallis, 2006)

$$\frac{dB}{dt} = -g \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -g \frac{d\tilde{\rho}}{dT} \frac{dT}{dt} = 0, \quad (3.30)$$

wobei  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(T)$  (siehe (2.41)) verwendet wurde. Die Kontinuitätsgleichung (3.25c) schreiben wir in der Form (Vallis, 2006)

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.31)$$

Wie erwähnt, ist  $\mathbf{e}_z$  der Einheitsvektor einer Richtung, die durch die Physik selbst ausgezeichnet ist. Daher kann das Gleichungssystem (3.28), (3.30) und (3.31) weiterhin als koordinatenunabhängig betrachtet werden (vergleiche Graßmann, 1911).

Das Aufsteigen wärmeren Wassers ( $B > 0$ ) und Absinken kälteren Wassers ( $B < 0$ ) im Annulus führt dazu, dass sich eine mehr oder weniger starke Schichtung der Flüssigkeit ausbildet. Von dieser Schichtung wird angenommen, dass sie innerhalb der freien Flüssigkeit das hydrostatische Gleichgewicht erfüllt und lediglich eine Funktion von  $z$  ist. Zwischen dem Auftriebs- und Druckfeld der Schichtung,  $B_{00}$  und  $\tilde{p}_{00}$ , besteht daher folgende Beziehung

$$\frac{dB_{00}}{dz} = \frac{d^2 \tilde{p}_{00}}{dz^2} =: N^2, \quad (3.32)$$

mit der Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$  (vergleiche Vallis, 2006). In dieser Arbeit wird durchgehend  $N^2 = \text{konst.}$  angenommen. Auftrieb und Druck werden nun in Schichtung und Abweichung davon aufgespalten

$$B = B_{00} + B', \quad (3.33a)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_{00} + \tilde{p}'. \quad (3.33b)$$

Da es üblich ist, Auftrieb und Druck relativ zu einer etwaigen Fluidschichtung zu betrachten, machen wir der Einfachheit halber im Folgenden die Umbenennungen  $B' \rightarrow B$  und  $\tilde{p}' \rightarrow \tilde{p}$ . Wegen  $B_{00} = d\tilde{p}_{00}/dz$  kürzt sich der Beitrag der Schichtung aus (3.28b) heraus. Setzt man (3.33a) in (3.30) ein, so erhält man (Vallis, 2006)

$$\frac{dB}{dt} + wN^2 = 0. \quad (3.34)$$

Die Gleichungen (3.28), (3.31) und (3.34) bilden den Ausgangspunkt des Eady-Modells.

### 3.6.2 Eine Skalenanalyse

Der nächste Schritt zum Eady-Modell besteht darin, die Größenordnung der Terme in den Gleichungen (3.28), (3.31) und (3.34) abzuschätzen, um zu entscheiden, welche Terme gegenüber anderen Termen vernachlässigt werden können. Im Rahmen einer solchen Skalenanalyse werden typische Skalen für die Zustandsgrößen und die Orts- und Zeitkoordinaten eingeführt (zum Beispiel Zdunkowski & Bott, 2003; Holton, 2004; Vallis, 2006)

- Zeitskala:  $\mathcal{T}$
- Horizontale Längenskala:  $L$
- Vertikale Längenskala:  $H$
- Skala der Horizontalgeschwindigkeit:  $U$
- Skala der Vertikalgeschwindigkeit:  $W$
- Druckskala:  $P$
- Auftriebsskala:  $\mathcal{B}$

Diese Skalen werden zur Entdimensionalisierung der Zustandsgrößen und der Orts- und Zeitkoordinaten verwendet, zum Beispiel

$$\mathbf{u} = U\hat{\mathbf{u}}, \quad (3.35)$$

wobei der Bogen entdimensionalisierte Größen kennzeichnet. Von den entdimensionalisierten Größen wird angenommen, dass sie von der Größenordnung  $\mathcal{O}(1)$  sind (Vallis, 2006). Bei der Abschätzung typischer Skalen ist es üblich den Euler'schen (ortsfesten) Blickwinkel einzunehmen (Lin, 2007). Das heißt die Zustandsgrößen werden als Felder betrachtet, welche die Strukturen von Interesse (zum Beispiel barokline Wellen) aufweisen. Diesen Strukturen können charakteristische globale Eigenschaften, wie eine mittlere horizontale und vertikale Ausdehnung und eine mittlere Geschwindigkeitsamplitude zugewiesen

werden. Allerdings gibt es hierfür keine allgemein anerkannten, einheitlichen Verfahren, sodass ein gewisser Grad an Willkürlichkeit bei der Festlegung der Skalen vorhanden ist. Abschätzungen für die typischen Skalen der Strömung im Annulus können mithilfe der Parameter in Tabelle 3.1 und den Simulationsergebnissen gewonnen werden. Die Abschätzung der Zeitskala  $\mathcal{T}$  aus der Simulation ist etwas umständlich. Wie sich später zeigt, kann sie aber aus anderen, leichter bestimmbareren Skalen berechnet werden. Für die Horizontalausdehnung der baroklinen Wellen lässt sich zumindest ein ungefährender Bereich eingrenzen. In radialer Richtung erstrecken sie sich nahezu über die gesamte Spaltbreite, zumindest in den Validierungsexperimenten (siehe Abbildung 3.2, 3.3 und 3.4). In azimuthaler Richtung hängt die Ausdehnung ( $\sim$  azimuthale Wellenlänge) von der Modenzahl ab, ist aber auf maximal  $2\pi$  begrenzt. Daher kann als Bereich für  $L$

$$b - a \lesssim L \lesssim \pi(a + b), \quad (3.36)$$

mit der Spaltbreite  $b - a = 7,5$  cm und dem mittleren Annulusumfang  $\pi(a + b) = 51,84$  cm, angegeben werden. In vertikaler Richtung erstrecken sich die baroklinen Wellen üblicherweise über die gesamte Flüssigkeitssäule, sodass

$$H \sim d, \quad (3.37)$$

mit  $d = 13,5$  cm. Für die Größenordnung von Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeit in den baroklinen Wellen ergeben die Simulationen

$$U \sim 0,1 \text{ bis } 1 \text{ cm/s}, \quad (3.38a)$$

$$W \sim 0,01 \text{ bis } 0,1 \text{ cm/s}. \quad (3.38b)$$

Die Druckamplitude der Tief- und Hochdruckgebiete in den Wellen zeigt typische Werte um

$$P \sim 1 \text{ bis } 10 \text{ cm}^2/\text{s}^2. \quad (3.39)$$

Für die Auftriebsskala findet man in den Simulationen

$$\mathcal{B} \sim 0,1 \text{ bis } 1 \text{ cm/s}^2. \quad (3.40)$$

Es zeigt sich in der nachfolgenden Skalenanalyse, dass einige Skalen aus anderen abgeschätzt werden können. Diese abgeleiteten Skalen können mit den zuvor genannten, in den Simulationen beobachteten Skalen verglichen werden.

Verwendet man die Skalen nun zur Entdimensionalisierung des Gleichungssystems, so erhält man (vergleiche Vallis, 2006)

$$\frac{U}{\mathcal{T}_{\text{Lagr.}}} \frac{d\widehat{\mathbf{u}}}{d\widehat{t}} + fU\widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} = -\frac{P}{L} \widehat{\nabla}_h \widehat{p}, \quad (3.41a)$$

$$\frac{W}{\mathcal{T}_{\text{Lagr.}}} \frac{d\widehat{w}}{d\widehat{t}} = \mathcal{B}\widehat{B} - \frac{P}{H} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{z}}, \quad (3.41b)$$

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{T}_{\text{Lagr.}}} \frac{d\widehat{B}}{d\widehat{t}} + WN^2\widehat{w} = 0, \quad (3.41c)$$

$$\frac{U}{L} \widehat{\nabla}_h \cdot \widehat{\mathbf{u}} + \frac{W}{H} \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \widehat{z}} = 0, \quad (3.41d)$$

mit  $\hat{\mathfrak{f}} := \mathfrak{f}/f = \mathbf{e}_z \times \mathbb{E}$ . Die Lagrange'sche Zeitskala  $\mathcal{T}_{\text{Lagr.}}$  in der materiellen Ableitung

$$\frac{1}{\mathcal{T}_{\text{Lagr.}}} \frac{d}{d\hat{t}} = \frac{1}{\mathcal{T}_{\text{Euler}}} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} + \frac{U}{L} \hat{\mathbf{u}} \cdot \widehat{\nabla}_h + \frac{W}{H} \hat{w} \frac{\partial}{\partial \hat{z}}, \quad (3.42)$$

ist in der Dynamik der baroklinen Wellen üblicherweise von der Größenordnung der Zeitskala der Horizontaladvektion (Vallis, 2006)

$$\mathcal{T}_{\text{Lagr.}} \sim \mathcal{T}_{\text{Adv.}} = \frac{L}{U}. \quad (3.43)$$

$U/L$  ist damit obere Schranke für die Größenordnung der partiellen Zeitableitung und der Vertikaladvektion auf der rechten Seite von (3.42). Zur Entdimensionalisierung von (3.41a) wird durch die Skala der Coriolis-Beschleunigung  $fU$  geteilt (Vallis, 2006)

$$Ro \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\hat{t}} + \hat{\mathfrak{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}} = -\frac{P}{fUL} \widehat{\nabla}_h \hat{p}. \quad (3.44)$$

Die Rossby-Zahl (Vallis, 2006)

$$Ro := \frac{1/f}{\mathcal{T}_{\text{Adv.}}} = \frac{U}{fL} \quad (3.45)$$

ist eine zentrale dimensionslose Kennzahl bei der Herleitung der quasigeostrophisch genäherten Gleichungen, die dem Eady-Modell zugrunde liegen. Ein Merkmal der Dynamik der baroklinen Wellen ist, dass im Allgemeinen gilt

$$Ro \ll 1. \quad (3.46)$$

Das heißt die advektive Zeitskala ist sehr viel größer als die Zeitskala der Coriolis-Beschleunigung  $1/f$ . Mit  $f \sim 1 \text{ rad/s}$  als repräsentativer Wert für die Validierungsexperimente sowie (3.36) und (3.38a) erhält man  $Ro \sim 0,1$ . Dieser Wert ist ebenfalls charakteristisch für die synoptischskalige Atmosphärenströmung in mittleren Breiten (Vallis, 2006). Infolgedessen gilt für die Druckskala

$$P \sim fUL, \quad (3.47)$$

damit die Größenordnungen beider Seiten von (3.44) übereinstimmen. Die Größenordnung, die man gemäß (3.47) für  $P$  erhält, ist im Einklang mit dem Befund aus der Simulation (3.39).

Des Weiteren entnimmt man der Kontinuitätsgleichung (3.41d), dass

$$W \sim \frac{H}{L} U. \quad (3.48)$$

Setzt man (3.43), (3.47) und (3.48) in die vertikale Impulsbilanz (3.41b) ein und teilt diese zur Entdimensionalisierung durch  $P/H \sim fUL/H$ , so erhält man

$$Ro \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{d\hat{w}}{d\hat{t}} = \frac{\mathcal{B}H}{fUL} \widehat{\mathcal{B}} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}}. \quad (3.49)$$

Für synoptischskalige Strömungen in der Atmosphäre gilt für die Größenordnung des Aspektverhältnisses im Allgemeinen  $H/L \sim Ro^2$  (vergleiche Holton, 2004; Vallis, 2006; Achatz, 2010). Im Falle der Validierungsexperimente kann gemäß (3.36) und (3.37) bestenfalls  $H/L \sim Ro$  angenommen werden. Nichtsdestoweniger folgt für beide Skalierungen des Aspektverhältnisses

$$\mathcal{B} \sim \frac{fUL}{H}. \quad (3.50)$$

Die Strömung erfüllt somit in sehr guter Näherung das hydrostatische Gleichgewicht.

Setzt man schließlich (3.50) zusammen mit (3.48) und (3.43) in die Auftriebsgleichung (3.41c) ein und dividiert zur Entdimensionalisierung durch  $H/(f^2UL)$ , so erhält man

$$Ro \frac{d\widehat{B}}{dt} + Bu \widehat{w} = 0, \quad (3.51)$$

mit der Burger-Zahl (Read *et al.*, 1997; Bastin & Read, 1998; Vallis, 2006)

$$Bu := \left(\frac{L_d}{L}\right)^2 \quad (3.52)$$

und dem internen Rossby-Deformationsradius

$$L_d := \frac{NH}{f}. \quad (3.53)$$

In einer quasigeostrophischen Strömung besteht zwischen der Rossby- und Burger-Zahl folgende Beziehung (Vallis, 2006)

$$\frac{Ro}{Bu} \sim Ro. \quad (3.54)$$

Damit können nun alle Vorfaktoren in den entdimensionalisierten Gleichungen (3.44), (3.49) und (3.51) in Relation zur Rossby-Zahl gebracht werden.

Enthalten Differentialgleichungen Parameter (Vorfaktoren der Ableitungen), so sind deren Lösungen im Allgemeinen auch Funktionen dieser Parameter (vergleiche Bronstein *et al.*, 2001). Die entdimensionalisierten Zustandsgrößen sollten demnach nicht nur Funktionen des Ortes und der Zeit, sondern auch Funktionen der Rossby-Zahl sein. Da  $Ro \ll 1$ , besteht die Möglichkeit die Abhängigkeit von  $Ro$  in einem Potenzreihenansatz zu entwickeln (Pedlosky, 1987; Vallis, 2006; Achatz, 2010)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}} \\ \widehat{w} \\ \widehat{B} \\ \widehat{p} \end{pmatrix} (\widehat{\mathbf{r}}_h, \widehat{z}, \widehat{t}, Ro) &= \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_0 \\ \widehat{w}_0 \\ \widehat{B}_0 \\ \widehat{p}_0 \end{pmatrix} (\widehat{\mathbf{r}}_h, \widehat{z}, \widehat{t}) + Ro \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_1 \\ \widehat{w}_1 \\ \widehat{B}_1 \\ \widehat{p}_1 \end{pmatrix} (\widehat{\mathbf{r}}_h, \widehat{z}, \widehat{t}) + Ro^2 \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_2 \\ \widehat{w}_2 \\ \widehat{B}_2 \\ \widehat{p}_2 \end{pmatrix} (\widehat{\mathbf{r}}_h, \widehat{z}, \widehat{t}) + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Ro^n \begin{pmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_n \\ \widehat{w}_n \\ \widehat{B}_n \\ \widehat{p}_n \end{pmatrix} (\widehat{\mathbf{r}}_h, \widehat{z}, \widehat{t}), \end{aligned} \quad (3.55)$$



worin  $\mathbf{r}_h$  für den Horizontalanteil des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  steht und  $\widehat{\mathbf{u}}_n, \widehat{w}_n, \widehat{B}_n, \widehat{p}_n \sim 1$ . Die Reihe (3.55) ist Grundlage für die sogenannte skalenasymptotische Untersuchung der Grundgleichungen. Diese Technik hält bereits seit über hundert Jahren Einzug in die Theorie der Fluidodynamik (zum Beispiel Oberbeck, 1879; Prandtl, 1904) und ist dort heutzutage ein verbreitetes Werkzeug (zum Beispiel Pedlosky, 1987; Vallis, 2006; Klein, 2000, 2004, 2008; Achatz *et al.*, 2010). Dazu wird (3.55) in die entdimensionalisierten Gleichungen eingesetzt und die Terme werden nach Potenzen der Rossby-Zahl geordnet. Daraus lässt sich dann eine systematische Hierarchie genäherter Gleichungssysteme entwickeln: Werden alle Terme mit Vorfaktor  $Ro^m$ ,  $m > n$ , vernachlässigt, so ergibt dies ein genähertes Gleichungssystem  $n$ -ter Ordnung in der Rossby-Zahl. Das dem Eady-Modell zugrunde liegende, quasigeostrophische Gleichungssystem ist zum Beispiel dasjenige erster Ordnung.

Wir möchten hier jedoch nicht von der unmittelbaren Potenzreihenentwicklung (3.55) Gebrauch machen, sondern von einer mittelbaren, die sich aus dem entdimensionalisierten Gleichungssystem ableiten lässt. Wir gehen so vor, weil wir auf die derart gewonnenen Reihenentwicklungen in Abschnitt 4.4, in einem anderen Zusammenhang, zurückgreifen werden, wohingegen die hiesige skalenanalytische Umgebung für die theoretische Rechtfertigung derselben vorteilhaft erscheint. Durch die Verwendung der mittelbaren Reihenentwicklungen entsteht hier kein Nachteil, da wir zu demselben Ergebnis gelangen, das wir durch Nutzung von (3.55) erhalten hätten. Wir beginnen die Ableitung der Reihenentwicklungen mit der horizontalen Impulsgleichung (3.44), die wir mit  $-\widehat{\mathbf{f}}$  multiplizieren

$$-Ro \widehat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\widehat{\mathbf{u}}}{dt} - \widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\nabla}_h \widehat{p}. \quad (3.56)$$

Für das Quadrat des normierten Coriolis-Tensors gilt (siehe Anhang B.1 und vergleiche Philipps (1939a); Albert (1980))

$$\widehat{\mathbf{f}}^2 = -(\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z), \quad (3.57)$$

wobei  $\widehat{\mathbf{f}}^2 := \widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\mathbf{f}}$  (Wilson, 1929). Wird  $\widehat{\mathbf{f}}^2$  mit einem beliebigen horizontalen Vektor  $\mathbf{a}_h$  skalar multipliziert, so ist zu berücksichtigen, dass

$$\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{a}_h = \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{a}_h) = 0. \quad (3.58)$$

Damit können wir für (3.56) schreiben

$$\left( \mathbb{E} - Ro \widehat{\mathbf{f}} \frac{d}{dt} \right) \cdot \widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{u}}_g, \quad (3.59)$$

wobei wir den Druckgradienten mit der geostrophischen Horizontalgeschwindigkeit gleichsetzen (Vallis, 2006)

$$\widehat{\mathbf{u}}_g := \widehat{\mathbf{f}} \cdot \widehat{\nabla}_h \widehat{p}. \quad (3.60)$$

Nun machen wir erneut von der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Heaviside'schen Operatorrechnung Gebrauch, indem wir die Inverse des Operators auf der linken Seite von (3.59) gemäß dem Vorbild (Bronstein *et al.*, 2001)

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad \text{falls } |x| < 1 \quad (3.61)$$

entwickeln

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{u}} &= \left( \mathbb{E} - Ro \widehat{\mathfrak{f}} \frac{d}{d\widehat{t}} \right)^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{u}}_g \\
&= \left( \mathbb{E} + Ro \widehat{\mathfrak{f}} \frac{d}{d\widehat{t}} + Ro^2 \widehat{\mathfrak{f}} \cdot \widehat{\mathfrak{f}} \frac{d^2}{d\widehat{t}^2} + Ro^3 \widehat{\mathfrak{f}} \cdot \widehat{\mathfrak{f}} \cdot \widehat{\mathfrak{f}} \frac{d^3}{d\widehat{t}^3} + \dots \right) \cdot \widehat{\mathbf{u}}_g \\
&= \widehat{\mathbf{u}}_g + \sum_{n=1}^{\infty} Ro^n \widehat{\mathfrak{f}}^n \cdot \frac{d^n \widehat{\mathbf{u}}_g}{d\widehat{t}^n}, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

mit

$$\widehat{\mathfrak{f}}^n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \widehat{\mathfrak{f}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} (\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{3.63}$$

(siehe Anhang B.1). Bei der Reihenentwicklung wurde  $d\widehat{\mathfrak{f}}/d\widehat{t} = 0$  verwendet. (3.62) ist jedoch nur gültig, falls die Reihe konvergiert. Setzen wir voraus, dass

$$\frac{d^n \widehat{\mathbf{u}}_g}{d\widehat{t}^n} \sim 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.64}$$

so sollte Konvergenz für

$$Ro < 1 \tag{3.65}$$

gewährleistet sein. Im Falle der Konvergenz erfüllt der Ausdruck (3.62) die Impulsgleichung (3.44), wie man durch Einsetzen zeigen kann (Philipps, 1939a; Herbert, 1978a). Jedoch ist (3.62) nicht als Lösung von (3.44) zu betrachten, da die Kenntnis von  $\widehat{\mathbf{u}}_g$  und dessen materieller Ableitungen  $d^n \widehat{\mathbf{u}}_g / d\widehat{t}^n$  im Allgemeinen eine Integration des Gleichungssystems (3.41) voraussetzt. Vielmehr ist der Ausdruck (3.62) eine für unsere Zwecke geeignete nichttriviale Umformung von (3.44) (Albert, 1980). Erstmals hergeleitet wurde die Reihe (3.62) bereits vor nunmehr hundert Jahren von Hesselberg (1915) und erneut von Philipps (1939a), der die Reihe eingehend untersuchte und ihre quasigeostrophische Näherung für die Berechnung ageostrophischer Felder in einer idealisierten baroklinen Welle verwandte. Untersuchungen zu (3.62) jüngerer Datums wurden von Herbert (1978a) und Albert (1980) angestellt. Ersterer betrachtete eine alternative beziehungsweise erweiterte Formulierung zu (3.62), welche unter anderem einen Ausdruck für das Restglied von Partialsummen von (3.62) liefert. Letzterer analysierte die Konvergenz der Reihe eingehend. Wir nennen (3.62) im Folgenden Hesselberg-Philipps'sche Reihe und übernehmen damit die von Albert (1980) gewählte Bezeichnung.

Auf ähnliche Weise können wir eine Reihenentwicklung für die vertikale Geschwindigkeitskomponente  $\widehat{w}$  erhalten. Zu diesem Zweck bilden wir  $Ro d(3.49)/d\widehat{t}$

$$Ro^2 \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{d^2 \widehat{w}}{d\widehat{t}^2} = Ro \frac{d\widehat{B}}{d\widehat{t}} - Ro \frac{d\widehat{B}_g}{d\widehat{t}}, \tag{3.66}$$

wobei wir den vertikalen Druckgradienten mit dem hydrostatischen Auftrieb identifizieren

$$\widehat{B}_g := \frac{\partial \widehat{p}}{\partial \widehat{z}}. \tag{3.67}$$

Verwenden wir weiterhin (3.51), definieren in Anlehnung an (3.60)

$$Bu \widehat{w}_g := -Ro \frac{d\widehat{B}_g}{d\widehat{t}} \quad (3.68)$$

und teilen (3.66) durch die Burger-Zahl  $Bu$ , so erhalten wir

$$\left[ 1 + Fr^2 \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{d^2}{d\widehat{t}^2} \right] \widehat{w} = \widehat{w}_g, \quad (3.69)$$

mit dem Quadrat der Froude-Zahl (Vallis, 2006)

$$Fr^2 := \frac{Ro^2}{Bu} = \frac{U^2}{N^2 H^2}. \quad (3.70)$$

Nun invertieren wir (3.69) und entwickeln wiederum den inversen Operator

$$\begin{aligned} \widehat{w} &= \left[ 1 + Fr^2 \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{d^2}{d\widehat{t}^2} \right]^{-1} \widehat{w}_g \\ &= \left[ 1 - Fr^2 \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{d^2}{d\widehat{t}^2} + Fr^4 \left( \frac{H}{L} \right)^4 \frac{d^4}{d\widehat{t}^4} - Fr^6 \left( \frac{H}{L} \right)^6 \frac{d^6}{d\widehat{t}^6} \pm \dots \right] \widehat{w}_g \\ &= \widehat{w}_g + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Fr^{2n} \left( \frac{H}{L} \right)^{2n} \frac{d^{2n} \widehat{w}_g}{d\widehat{t}^{2n}}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

wobei  $N^2 = \text{konst.}$  berücksichtigt wurde. Analog erhalten wir aus  $Ro(H/L)^2 d(3.51)/d\widehat{t}$

$$\begin{aligned} \widehat{B} &= \left[ 1 + Fr^2 \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{d^2}{d\widehat{t}^2} \right]^{-1} \widehat{B}_g \\ &= \widehat{B}_g + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Fr^{2n} \left( \frac{H}{L} \right)^{2n} \frac{d^{2n} \widehat{B}_g}{d\widehat{t}^{2n}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Mit (3.54) und  $H/L \sim Ro$  sollte im Annulus gelten

$$Fr^2 \left( \frac{H}{L} \right)^2 \sim Ro^4. \quad (3.73)$$

Die Gültigkeit von (3.65) vorausgesetzt, konvergieren (3.71) und (3.72) daher sehr viel rascher als (3.62).

Die Hesselberg-Philipps'schen Reihenentwicklungen, wozu wir nun ebenfalls (3.71) und (3.72) zählen wollen, können als eine mögliche Realisierung der allgemeinen Rossby-Zahl-Entwicklung (3.55) betrachtet werden, allerdings mit dem Unterschied, dass der Druck  $\widehat{p}$  in den Hesselberg-Philipps'schen Reihenentwicklungen nicht explizit entwickelt wird.

Bevor wir uns der quasigeostrophischen Näherung zuwenden, soll die Skala der Vertikalgeschwindigkeit (3.48) noch einmal betrachtet werden. Da die geostrophische Horizontalgeschwindigkeit (3.60) divergenzfrei ist (siehe Anhang B.2 und Vallis (2006))

$$\widehat{\nabla}_h \cdot \widehat{\mathbf{u}}_g = 0, \quad (3.74)$$

folgt für die Kontinuitätsgleichung (3.41d)

$$\widehat{\nabla}_h \cdot \widehat{\mathbf{u}}_a + \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \widehat{z}} = 0, \quad (3.75)$$

mit der ageostrophischen Horizontalgeschwindigkeit (Holton, 2004)

$$\widehat{\mathbf{u}}_a := \widehat{\mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{u}}_g. \quad (3.76)$$

Gemäß (3.62) gilt für die Skala der ageostrophischen Geschwindigkeit

$$U_a \sim Ro U \quad (3.77)$$

und damit

$$W \sim Ro \frac{H}{L} U. \quad (3.78)$$

Tatsächlich ist  $W$  somit eine Größenordnung kleiner als die ursprüngliche Abschätzung. Dies wiederum bedeutet für die materielle Ableitung (3.42)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathbf{u}}_g \cdot \widehat{\nabla}_h + Ro \widehat{\mathbf{u}}_a \cdot \widehat{\nabla}_h + Ro \widehat{w} \frac{\partial}{\partial \widehat{z}}, \quad (3.79)$$

wobei angenommen wurde, dass die Euler'sche Zeitskala ungefähr der advektiven Zeitskala entspricht

$$\frac{L}{\mathcal{T}_{\text{Euler}} U} \sim 1. \quad (3.80)$$

Wenden wir nun die quasigeostrophische Näherung, wonach nur Terme bis einschließlich  $\mathcal{O}(Ro)$  berücksichtigt werden, auf die Hesselberg-Philipps'schen Reihen (3.62), (3.71) und (3.72) an, so liefert dies

$$\widehat{\mathbf{u}} = \widehat{\mathbf{u}}_g + Ro \widehat{\mathfrak{f}} \cdot \frac{d_g \widehat{\mathbf{u}}_g}{dt}, \quad (3.81a)$$

$$\widehat{w} = \widehat{w}_g = -\frac{Ro}{Bu} \frac{d_g \widehat{B}_g}{dt}, \quad (3.81b)$$

$$\widehat{B} = \widehat{B}_g = \frac{\partial \widehat{p}_g}{\partial \widehat{z}}, \quad (3.81c)$$

mit der geostrophisch genäherten materiellen Ableitung (Zdunkowski & Bott, 2003; Holton, 2004)

$$\frac{d_g}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \widehat{\mathbf{u}}_g \cdot \widehat{\nabla}_h. \quad (3.82)$$

Ferner bezeichnet  $\widehat{p}_g$  den zu dieser Näherungsordnung gehörigen, quasigeostrophischen Druck.

An diesem Punkt sind die skalenanalytischen Betrachtungen abgeschlossen und wir können mit dem redimensionalisierten quasigeostrophischen Gleichungssystem (vergleiche Gill, 1982; Zdunkowski & Bott, 2003; Holton, 2004; Vallis, 2006; Achatz, 2010)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt}, \quad (3.83a)$$

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g, \quad (3.83b)$$

$$w = w_g = -\frac{1}{N^2} \frac{d_g B_g}{dt}, \quad (3.83c)$$

$$B = B_g = \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z}, \quad (3.83d)$$

$$0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_a + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.83e)$$

weiterarbeiten.

### 3.6.3 Die Erhaltungsgleichung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity

Das Gleichungssystem (3.83) wird nun in eine einzige prognostische Gleichung überführt, indem die quasigeostrophischen Geschwindigkeitsanteile (3.83a) und (3.83c) in die Kontinuitätsgleichung (3.83e) eingesetzt werden (vergleiche Philipps, 1939b,a; Ertel, 1940b, 1941a; Charney, 1948; Hinkelmann, 1951b)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla_h \cdot \mathbf{u}_a + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla_h \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{d_g B_g}{dt} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{f} \frac{d_g \zeta_g}{dt} - \frac{1}{N^2} \frac{d_g}{dt} \left( \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) = 0 \quad | \cdot (-f) \\ &\Rightarrow \frac{d_g}{dt} \left( \zeta_g + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.84)$$

mit der Vertikalkomponente der geostrophischen relativen Vorticity  $\zeta_g := \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \times \mathbf{u}_g)$  (siehe Anhang B.2, B.3 und B.4). Durch die quasigeostrophische Näherung wandelt sich die Kontinuitätsgleichung in eine Erhaltungsgleichung für die quasigeostrophische potentielle Vorticity (zum Beispiel Vallis, 2006)

$$\begin{aligned} \Pi_g &:= \zeta_g + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_g}{\partial z} = \frac{1}{f} \nabla_h^2 \tilde{p}_g + \frac{f}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}_g}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{f} \left( \nabla_h^2 \tilde{p}_g + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}_g}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{f} \nabla_{gg}^2 \tilde{p}_g, \end{aligned} \quad (3.85)$$

wobei von (3.83d) und (B.18) Gebrauch gemacht wurde. Ferner haben wir den quasi-geostrophischen Nabla-Operator (vergleiche Dritschel & Viúdez, 2003)

$$\nabla_{gg} := \nabla_h + \mathbf{e}_z \frac{f}{N} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.86)$$

$$\Rightarrow \nabla_{gg}^2 := \nabla_h^2 + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.87)$$

eingeführt (wobei  $N^2 > 0$  vorausgesetzt wird).

Der nächste Schritt zum Eady-Modell besteht darin, (3.84) um einen stationären Grundzustand zu linearisieren (vergleiche Abschnitt 3.4)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{g,0} \cdot \nabla_h \right) \Pi'_g + \mathbf{u}'_g \cdot \nabla_h \Pi_{g,0} = 0. \quad (3.88)$$

Einige Einschränkungen sind vonnöten, um (3.88) so zu modifizieren, dass eine analytische Lösung für das Störungsfeld gefunden werden kann. Zunächst wird angenommen, dass die typische horizontale Längenskala der Störungen sehr viel kleiner ist, als ihr typischer Abstand von der Rotationsachse des Annulus

$$L \ll \frac{1}{2}(a + b). \quad (3.89)$$

Dies ist gemäß der Abschätzung (3.36) nicht unbedingt erfüllt, wird aber aus Bequemlichkeitsgründen angenommen, da dann die metrischen Zusatzterme, die allesamt einen Faktor  $1/r$  enthalten, in den Boussinesq-Gleichungen in Zylinderkoordinaten (2.54) bis (2.57) gegenüber den anderen Termen vernachlässigt werden können. Durch diese sogenannte Schmalspaltnäherung (englisch: *narrow gap approximation*, Allen (1972); Hide & Mason (1975)) bleiben die Krümmungseffekte der zylindrischen Geometrie unberücksichtigt und die Gleichungen sind praktisch identisch mit denjenigen in kartesischen Koordinaten. Daher betrachten wir im Folgenden statt des Annulusspalts einen periodischen Kanal mit den neuen Koordinaten

$$\frac{1}{2}(a + b)\vartheta \rightarrow x, \quad x \in [0; (a + b)\pi), \quad (3.90a)$$

$$r - \frac{1}{2}(a + b) \rightarrow y, \quad y \in \left[ -\frac{1}{2}(b - a); \frac{1}{2}(b - a) \right] \quad (3.90b)$$

(dieses Koordinatensystem ist ebenfalls ein Linkssystem). Für die Transformation der Ableitungen in azimuthaler und radialer Richtung gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(a + b)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.91a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.91b)$$

Ferner ist der Zustand der Flüssigkeit festzulegen, auf dem die Entwicklung kleiner Störungen mittels (3.88) untersucht werden soll. Wir betrachten zuerst die Flüssigkeitsschichtung nach (3.32) und definieren diese durch das Volumen- und Zeitmittel des vertikalen

Dichtegradienten (Hide, 1967b,a)

$$N^2 = \frac{dB_{00}}{dz} = -g \frac{\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)}{d} \chi_z = g \frac{|\rho_1(T_b - T_a)|}{d} \chi_z = \text{konst.}, \quad (3.92)$$

mit dem normierten, gemittelten vertikalen Dichtegradienten

$$\chi_z := \frac{d}{\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{V_A - V_\delta} \int_{V_A \setminus V_\delta} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} dV' dt'. \quad (3.93)$$

Im letzten Schritt in (3.92) wurde (2.41) in der Formulierung (2.44) verwandt. Das Volumenintegral in (3.93) geht über das gesamte Annulusvolumen  $V_A$ , spart dabei jedoch den durch die Grenzschichten eingenommenen Volumenanteil  $V_\delta$  aus. Ferner ist  $\tau$  eine ausreichend lange Mittelungszeitspanne. Die Wahl des Normierungsfaktors  $d/[\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)]$  wird dadurch begründet, dass aufgrund der thermischen Zirkulation im Annulus näherungsweise  $\tilde{\rho}|_{z=0} \approx \tilde{\rho}(T_a)$  und  $\tilde{\rho}|_{z=d} \approx \tilde{\rho}(T_b)$  gelten sollte, sodass  $[\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)]/d$  als globale Abschätzung des vertikalen Dichtegradienten betrachtet werden kann. Dieser Schichtung überlagert ist ein barokliner Grundzustand, denn der Temperaturunterschied zwischen innerer und äußere Zylinderwand prägt der Flüssigkeit ebenfalls einen radialen Temperaturbeziehungsweise Auftriebsgradienten auf. Um das Modell möglichst einfach zu halten, wird von diesem Grundzustand des Auftriebsfeldes angenommen, dass er lediglich von der radialen Position abhängt,  $B_{g,0} = B_{g,0}(r)$  beziehungsweise  $B_{g,0} = B_{g,0}(y)$ . Der radiale Gradient des Auftriebsfeldes wird definiert durch (Hide, 1967b,a)

$$\frac{dB_{g,0}}{dr} = \frac{dB_{g,0}}{dy} = -g \frac{\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)}{b-a} \chi_r = g \frac{|\rho_1(T_b - T_a)|}{b-a} \chi_r = \text{konst.}, \quad (3.94)$$

mit dem normierten, gemittelten radialen Dichtegradienten

$$\chi_r := \frac{b-a}{\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)} \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{V_A - V_\delta} \int_{V_A \setminus V_\delta} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial r} dV' dt'. \quad (3.95)$$

Die Normierung erfolgt dabei mit der Abschätzung für den globalen radialen Dichtegradienten  $[\tilde{\rho}(T_b) - \tilde{\rho}(T_a)]/(b-a)$ . Der thermischen Windbeziehung (B.34) zufolge, bedeutet (3.94) für den Vertikalgradienten des Grundzustandes der Horizontalgeschwindigkeitskomponenten

$$\frac{\partial u_{g,0}}{\partial z} = \frac{1}{f} \frac{dB_{g,0}}{dr} = \frac{1}{f} \frac{dB_{g,0}}{dy} =: \Upsilon = \text{konst.}, \quad (3.96a)$$

$$\frac{\partial v_{g,0}}{\partial z} = 0, \quad (3.96b)$$

mit  $\mathbf{u}_{g,0} = u_{g,0}\mathbf{e}_\vartheta + v_{g,0}\mathbf{e}_r$  beziehungsweise  $\mathbf{u}_{g,0} = u_{g,0}\mathbf{e}_x + v_{g,0}\mathbf{e}_y$ . Zusammen mit der Randbedingung (2.59)

$$\mathbf{u}_{g,0}|_{z=0} = 0, \quad (3.97)$$

folgt daraus

$$u_{g,0}(z) = \Upsilon z, \quad (3.98a)$$

$$v_{g,0} = 0 \quad (3.98b)$$

(dass die Randbedingung für die Horizontalgeschwindigkeit an der Flüssigkeitsoberfläche (2.61a) von (3.98a) nicht erfüllt wird, ist hier hinnehmbar). Wird der Wert von  $u_{g,0}$  an der Flüssigkeitsoberfläche als typische Geschwindigkeitsskala des Grundzustandes gewählt

$$U = \Upsilon d = \frac{g|\rho_1(T_b - T_a)|d}{f(b-a)} \chi_r = \frac{N^2 d^2}{f(b-a)} \frac{\chi_r}{\chi_z}, \quad (3.99)$$

wobei (3.92) verwendet wurde, so lässt sich dem Grundzustand eine Rossby-Zahl  $Ro = U/(fL)$  zuordnen (Hide, 1967b)

$$Ro_{th} = \frac{g|\rho_1(T_b - T_a)|d}{f^2(b-a)^2} \frac{\chi_r}{\chi_z} = \left( \frac{N}{f} \frac{d}{b-a} \right)^2 \frac{\chi_r}{\chi_z} = Bu \frac{\chi_r}{\chi_z}. \quad (3.100)$$

Aufgrund der Azimutalsymmetrie des Grundzustandes wurde dabei  $L = b - a$  als typische horizontale Längenskala gewählt. (3.100) ist die bereits in Abschnitt 3.3 (siehe (3.5)) eingeführte thermische Rossby-Zahl. Die dortige Definition (in der  $\Omega$  anstelle von  $f$  verwendet wird und  $\chi_r/\chi_z = 1$ , siehe dazu Williams (1971)) wird üblicherweise in der Literatur verwendet. Der Faktor  $N^2 d^2/[f^2(b-a)^2]$  kann als Burger-Zahl des Grundzustandes aufgefasst werden, wenn als typische vertikale Längenskala  $H = d$  gesetzt wird (vergleiche (3.52) und (3.53)). Zahlenwerte für  $\chi_r$  und  $\chi_z$  können beispielsweise durch Simulationen ermittelt werden. Theoretische Betrachtungen zur ungefähren Größe von  $\chi_r$  und  $\chi_z$  wurden von Hide (1967b) angestellt, sind aber auf einen bestimmten Parameterbereich des Annulus bezogen und ihre Übertragung auf die Validierungsexperimente ist mit einem gewissen Aufwand verbunden. Für die einfachste Variante des Eady-Modells des Annulus ist es aber ausreichend, wenn angenommen wird, dass die globale Abschätzung der Dichtegradienten, deren Inverse als Normierungsfaktor in (3.93) und (3.95) verwendet werden, von gleicher Größenordnung sind wie die durch Mittelung bestimmten Dichtegradienten, das heißt  $\chi_r \sim \chi_z \sim 1$ . Im Rahmen des Eady-Modells wird daher ausdrücklich

$$\chi_r = \chi_z = 1 \quad (3.101)$$

gesetzt.

Setzen wir den Grundzustand (3.94) und (3.98a) in die linearisierte Gleichung (3.88) ein, so erhalten wir (Eady, 1949; Hide & Mason, 1975; Gill, 1982; Vallis, 2006)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Upsilon z \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2 \tilde{p}'_g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}'_g}{\partial y^2} + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}'_g}{\partial z^2} \right) \right] = 0, \quad (3.102)$$

mit

$$\Pi_{g,0} = \zeta_{g,0} + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_{g,0}}{\partial z} = 0. \quad (3.103)$$



Als Lösungsansatz für (3.102) wählen wir (Vallis, 2006)

$$\tilde{p}'_g(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_{n_x, n_y} \hat{p}_g(n_x, n_y, z, \omega) \cos[k_y(n_y)y] e^{i[k_x(n_x)x - \omega t]} \quad (3.104)$$

(vergleiche (3.15)). Die  $z$ -Abhängigkeit von  $\tilde{p}'_g$  kann nicht ohne Weiteres in Kosinus- und Sinusfunktionen entwickelt werden, da (3.102) mit  $\Upsilon z$  einen  $z$ -abhängigen Koeffizienten besitzt. Um gewährleisten zu können, dass die radiale Störungsgeschwindigkeit  $v'_g = -(1/f)\partial\tilde{p}'_g/\partial x$  an den Zylinderwänden des Annulus verschwindet, wird bei der Fourier-Entwicklung in der  $y$ -Koordinate nur der Kosinus berücksichtigt.  $n_x$  und  $n_y$  sind die Modenzahlen in azimuthaler und radialer Richtung ( $x$ - und  $y$ -Richtung). Die zugehörigen Wellenzahlen  $k_x$  und  $k_y$  lauten

$$k_x(n_x) = \frac{2\pi}{\lambda_x} = \frac{2\pi}{\frac{\pi(a+b)}{n_x}} = \frac{2n_x}{a+b}, \quad (3.105a)$$

$$k_y(n_y) = \frac{2\pi}{\lambda_y} = \frac{2\pi}{\frac{b-a}{n_y/2}} = \frac{\pi n_y}{b-a}, \quad (3.105b)$$

mit azimuthaler und radialer Wellenlänge  $\lambda_x$  und  $\lambda_y$ . In (3.105a) kommt zum Ausdruck, dass aufgrund der  $2\pi$ -Periodizität in azimuthaler Richtung, die azimuthale Wellenlänge  $\lambda_x$  der Störungsmode (die barokline Welle) nur ein ganzzahliger Bruchteil des mittleren Annulusumfangs  $\pi(a+b)$  sein kann. Um die erwähnte Randbedingung  $v'_g|_{y=\pm\frac{1}{2}(b-a)} = 0$  erfüllen zu können, muss der Kosinus in (3.104) an den Zylinderwänden verschwinden. Das ist nur möglich, wenn die radiale Wellenlänge  $\lambda_y$  ein ganzzahliger Bruchteil der doppelten Spaltbreite  $2(b-a)$  ist. Setzen wir nun (3.104) in (3.102) ein, so folgt, dass jeder Integrand/Summand die Gleichung

$$-i \underbrace{(\omega - \Upsilon z k_x)}_{=: \hat{\omega}} \left\{ \frac{1}{f} \left[ -(k_x^2 + k_y^2) \hat{p}_g + \frac{f^2}{N^2} \frac{d^2 \hat{p}_g}{dz^2} \right] \right\} = 0 \quad (3.106)$$

erfüllen muss.  $\hat{\omega}$  bezeichnet die intrinsische Frequenz der Mode, das heißt die Frequenz, die relativ zur Grundströmung  $\Upsilon z$  gemessen wird. Um die Lösung  $\hat{p}_g = \hat{p}_g(z)$  zu bestimmen, braucht es zwei Randbedingungen, da die  $z$ -Ableitung von  $\hat{p}_g$  in (3.106) von zweiter Ordnung ist. Diese Randbedingungen erhalten wir aus der Linearisierung von (3.83c)

$$\begin{aligned} w' &= -\frac{1}{N^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_{g,0} \frac{\partial}{\partial x} \right) B'_g + v'_g \frac{dB_{g,0}}{dy} \right] \\ &= -\frac{1}{N^2} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Upsilon z \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \tilde{p}'_g}{\partial z} - \Upsilon \frac{\partial \tilde{p}'_g}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (3.107)$$

wobei die Linearisierungen von (3.83b) und (3.83d), sowie (3.96a) gebraucht wurden. Aus dem Verschwinden der Vertikalgeschwindigkeit am Boden und an der Flüssigkeitsoberfläche  $w'|_{z=0,d} = 0$  (siehe (2.59) und (2.60)) folgen dann die beiden Randbedingungen

(Holton, 2004; Vallis, 2006)

$$-\frac{1}{N^2} \left[ -i\omega \frac{d\hat{p}_g}{dz} - i\Upsilon k_x \hat{p}_g \right]_{z=0} = 0, \quad (3.108a)$$

$$-\frac{1}{N^2} \left[ -i(\omega - \Upsilon dk_x) \frac{d\hat{p}_g}{dz} - i\Upsilon k_x \hat{p}_g \right]_{z=d} = 0. \quad (3.108b)$$

Die Herleitung der Lösung des Systems (3.106) und (3.108) ist ein eher länglicher, technischer Vorgang. Es sei daher an dieser Stelle gestattet, auf die Wiedergabe derselben zu verzichten. Wir verweisen stattdessen auf die ausführliche Literatur zum Eady-Modell (zum Beispiel Eady, 1949; Hide & Mason, 1975; Holton, 2004; Vallis, 2006). Für unsere Zwecke ist nur ein Nebenprodukt der Lösung, die Dispersionsrelation für die Frequenz  $\omega$ , von Bedeutung. Aus dieser lässt sich nämlich ableiten, welche Bedingung eine Störungsmode erfüllen muss, damit  $\text{Im}(\omega) > 0$ , sodass die Amplitude der Mode exponentiell anwächst. Diese Bedingung lautet (Holton, 2004; Vallis, 2006)

$$\begin{aligned} L_d^2(k_x^2 + k_y^2) &< \mu_{\text{krit}}^2 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{2n_x L_d}{a+b} \right)^2 + \left( \frac{\pi n_y L_d}{b-a} \right)^2 &< \mu_{\text{krit}}^2, \end{aligned} \quad (3.109)$$

mit  $\mu_{\text{krit}} = 2,399$  und dem Rossby-Deformationsradius des Grundzustandes als der typischen horizontalen Längenskala der Störungsmoden

$$L_d = \frac{Nd}{f}. \quad (3.110)$$

Die kleinstmöglichen Modenzahlen einer Welle im Annulus sind  $n_x = n_y = 1$ . Um überhaupt baroklin instabil sein zu können, muss der Grundzustand demzufolge die Bedingung

$$\left[ \frac{2L_d}{\pi(a+b)} \right]^2 + \left( \frac{L_d}{b-a} \right)^2 < \left( \frac{\mu_{\text{krit}}}{\pi} \right)^2 \quad (3.111)$$

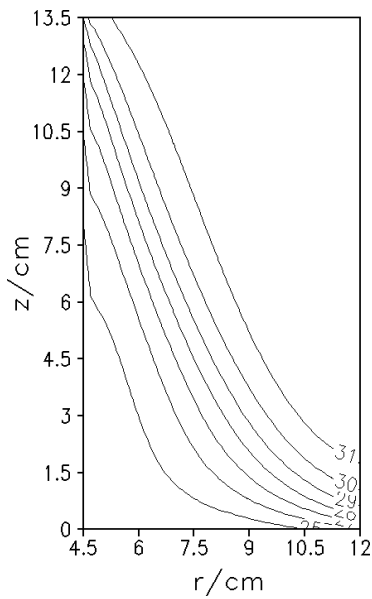
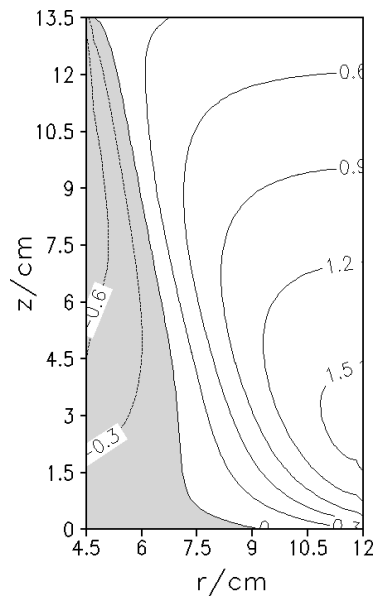
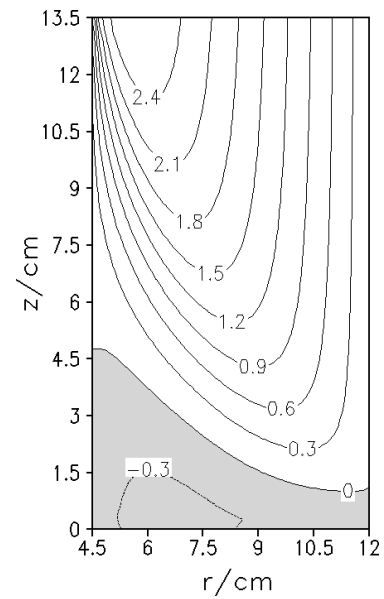
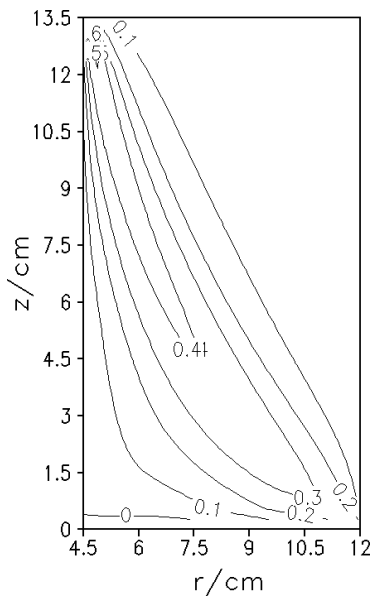
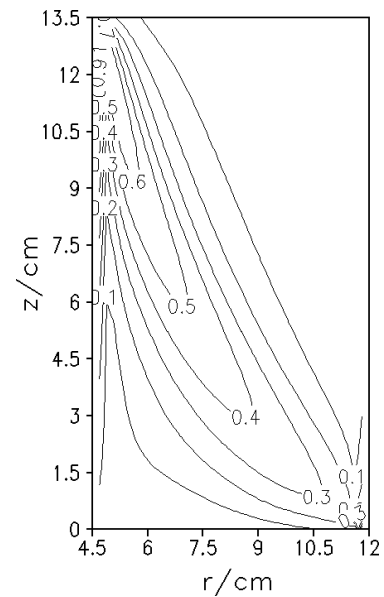
erfüllen, mit  $(\mu_{\text{krit}}/\pi)^2 = 0,583$ . Von den beiden Termen auf der linken Seite von (3.111) ist der zweit immer der größere, da  $\pi/2 > 1$  und damit  $b-a < \pi(a+b)/2$ . Vernachlässigt man den ersten Term, so erhält man das schwächere Instabilitätskriterium (Hide & Mason, 1975)

$$\left( \frac{L_d}{b-a} \right)^2 = Bu < \left( \frac{\mu_{\text{krit}}}{\pi} \right)^2. \quad (3.112)$$

Die Burger-Zahlen der Validierungsexperimente (berechnet für  $\chi_r = \chi_z = 1$ ) sind in Tabelle 3.2 aufgelistet. Nach (3.112) sollte Instabilität ab Experiment Nr. 5 eintreten. Diese Vorhersage trifft am besten auf die Simulationsvariante ohne Anlauf zu. Im Experiment wird die Strömung bereits ab Nr. 2 instabil und in der Simulationsvariante mit Anlauf ab Nr. 3. Dieses Ergebnis lässt sich dadurch erklären, dass die numerische Näherung der stationären, azimutalsymmetrischen Lösung, die zur Initialisierung der 3D-Simulation ohne Anlauf verwendet wird, dem Grundzustand des Eady-Modells am nächsten kommt. In

Abbildung 3.10 sind Temperatur, Auftrieb und Azimutalgeschwindigkeit sowie  $\partial u/\partial z$  und  $f^{-1}\partial B/\partial r$  der stationären, azimutalsymmetrischen Lösung für Experiment Nr. 7 gezeigt. Ein Vergleich von Abbildung 3.10d mit 3.10e zeigt, dass die thermische Windbeziehung (3.96a) in der freien Flüssigkeit näherungsweise erfüllt ist. Im Experiment und in der Simulationsvariante mit Anlauf, hingegen, herrscht während und eine Weile nach dem Anlauf eine unstete Strömung. Solch ein zeitlich veränderlicher Grundzustand wird vom Eady-Modell nicht abgedeckt. Trotz dieser Unterschiede und der Vereinfachungen, die im Eady-Modell vorgenommen werden, lässt sich doch festhalten, dass die Vorhersage den Beobachtungen im Experiment und in den Simulationsvarianten sehr nahe kommt.

---

(a) Nr. 7: Temperatur  $T$ (b) Nr. 7: Auftrieb  $B$ (c) Nr. 7: Azimutale Geschwindigkeitskomponente  $u$ (d) Nr. 7:  $\partial u / \partial z$ (e) Nr. 7:  $f^{-1} \partial B / \partial r$ 

**Abbildung 3.10:** Vertikalschnitte der näherungsweise stationären, azimutalsymmetrischen numerischen Lösung aus der 2D-Simulation von Validierungsexperiment Nr. 7 ( $\Omega = 6 \text{ U/min}$ ) nach einer Integrationszeit von  $t_{2D} = 10800 \text{ s}$ . (a) Temperaturfeld in  $^{\circ}\text{C}$ , mit einem Isolinienintervall von  $1 \text{ K}$ . (b) Zugehöriges Auftriebsfeld  $B$  in  $\text{cm/s}^2$ , Isolinienintervall  $0,3 \text{ cm/s}^2$ . ( $B$  ist die Abweichung von der Flüssigkeitsschichtung  $B_{00}(z)$ , siehe (3.32) und (3.33a), wobei letztere gemäß (3.92) und (4.51a) berechnet wurde.) (c) Azimutale Geschwindigkeitskomponente in  $\text{cm/s}$ . Das Isolinienintervall beträgt  $0,3 \text{ cm/s}$ . (d) Der vertikale Gradient der azimutalen Geschwindigkeitskomponente,  $\partial u / \partial z$ , in  $\text{s}^{-1}$ , mit einem Isolinienintervall von  $0,1 \text{ s}^{-1}$  und in (e) zum Vergleich  $f^{-1} \partial B / \partial r$ , siehe die thermische Windbeziehung (3.96a). Bereiche mit negativen Zahlenwerten sind grau schattiert.

### 3.7 Zusammenfassung der Modellvalidierung

Um das Finite-Volumen-Modell des differentiell geheizten rotierenden Annulus cylFloit zu validieren, haben wir 26 Laborexperimente simuliert, die sich im Wert der Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Annulus rotiert, voneinander unterscheiden, und die Ergebnisse mit den Messungen verglichen. Gegenstand des Vergleichs war einmal die azimutale Modenzahl der führenden baroklinen Welle in allen 26 Experimenten und das führende Variabilitätsmuster aus Zeitreihen von Temperaturfeldhorizontalschnitten in drei ausgewählten Experimenten. Die in diesen Experimenten beobachteten Strömungsregime reichten vom azimutalsymmetrischen Zustand ohne barokline Wellen, über das reguläre Wellenregime bis hin zum Regime irregulärer (stark turbulenter) barokliner Wellen. Zwei Simulationsvarianten wurden erprobt: Die erste mit einer gleichbleibenden Winkelgeschwindigkeit während der gesamten Integration, bestehend einmal aus einer azimutalsymmetrischen Simulation, um den thermischen Hintergrundzustand zu berechnen und zum anderen aus der darauffolgenden 3D-Simulation der baroklinen Wellen. Die zweite Simulationsvariante orientiert sich stärker an der Versuchsdurchführung im Labor, indem der Annulus während der azimutalsymmetrischen Simulation ruht und anschließend auf die gewünschte Winkelgeschwindigkeit beschleunigt wird. Diese Beschleunigungsphase wird hier als Anlauf bezeichnet. Beide Simulationsvarianten zeigen im Hinblick auf die azimutale Modenzahl der baroklinen Wellen insgesamt eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment und weichen von der beobachteten Modenzahl höchstens um den Wert 2 ab. Die Simulationsvariante mit Anlauf zeigt jedoch in einigen Fällen eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment als die herkömmliche Variante ohne Anlauf. Auch die Übergänge zwischen den Strömungsregimen können durch den Einbezug des Anlaufs besser wiedergegeben werden.

Die unterschiedlichen Modenzahlen in den beiden Simulationvarianten können möglicherweise durch das Vorhandensein multipler Gleichgewichte erklärt werden. Diese Vermutung wird durch Hystereseexperimente gestützt (Vincze *et al.*, 2015). Darüber hinaus haben wir einen alternativen Blickwinkel erwogen, indem wir die dominanten baroklinen Wellenmoden der um die azimutal gemittelten Hintergrundströmung linearisierten Dynamik bestimmt haben. Diese Analyse hat gezeigt, dass die beiden Hintergrundströmungen aus den Simulationen mit und ohne Anlauf dominante Moden mit unterschiedlichen azimutalen Modenzahlen hervorbringen können. Möglicherweise kann dies ebenfalls erklären, warum in den vollständig nichtlinearen Simulationen mit und ohne Anlauf unterschiedliche Modenzahlen beobachtet werden.

Ein weiteres Element der Datenauswertung war eine Hauptkomponentenanalyse (PCA) von Zeitreihen von Temperaturfeldhorizontalschnitten. Mithilfe dieser Analyse konnten die führenden Variabilitätsmuster des Temperaturfeldes im Laborexperiment und in den Simulationen bestimmt und miteinander verglichen werden. Die PCA wurde auf drei verschiedene Experimente angewandt. Es hat sich gezeigt, dass die Simulationen die großskaligen Strukturen der Variabilitätsmuster des Laborexperiments verhältnismäßig gut wiedergeben können. Dennoch gibt es Abweichungen in einigen Bereichen, zum Beispiel in der Nähe der Zylinderwände, was auf eine unzureichende Auflösung der Grenzschichten in den Simulationen hindeuten könnte. Jedoch konnte eine Erhöhung der Gitterauflösung

die Unterschiede in den Variabilitätsmustern nur teilweise beseitigen. Dies ist möglicherweise ein Hinweis darauf, dass ein Teil der verbleibenden Unterschiede nicht auf eine ungenügende Gitterauflösung zurückzuführen ist, sondern auf physikalische Prozesse, die im Modell nicht berücksichtigt werden, wie zum Beispiel der Wärmestrom zwischen Flüssigkeit und der darüber liegenden Luft. Zudem konnte mithilfe der PCA gezeigt werden, dass durch die Verwendung des Feinstrukturmodells ALDM eine Verbesserung der Simulationsergebnisse erzielt wird, wenn man diese mit Ergebnissen aus Simulationen gleicher Auflösung, jedoch ohne ein besonderes Feinstrukturmodell, vergleicht.

Die Ergebnisse dieses Kapitels wurden in Borchert *et al.* (2015) veröffentlicht.

# KAPITEL 4

---

## Die spontane Schwerewellenabstrahlung

---

Neben den baroklinen Wellen, die Gegenstand des vorherigen Kapitels waren, bringt die Dynamik im Annulus auch Schwerewellen hervor. Diese Wellen unterscheiden sich grundlegend von den baroklinen Wellen. So sind beispielsweise ihre typischen räumlichen und zeitlichen Skalen sowie ihre Amplituden teilweise erheblich kleiner als jene der baroklinen Wellen – ein Umstand, der die Untersuchung von Schwerewellen nicht nur im Annulus, sondern auch in der Atmosphäre erschwert. Die Ursache für das Vorhandensein von Schwerewellen liegt in Rückstellkräften, die auf ein Fluidteilchen wirken. Bedingt werden diese Kräfte durch die stabile Schichtung des Fluids sowie die Coriolis-Beschleunigung (zum Beispiel Gill, 1982; Holton, 2004).

Die Lebenszeit einer Schwerewelle wird für gewöhnlich dreigeteilt: Am Anfang steht die Quelle beziehungsweise der Antrieb der Schwerewelle. Hier unterscheidet man orographisch und nichtorographisch angeregte Schwerewellen. Erstere entstehen bei der Überströmung eines Hindernisses. Ein Beispiel hierfür sind Leewellen über einem Gebirge. Zu den nichtorographischen Quellen zählen in erster Linie die Anregung durch Konvektion (zum Beispiel Gewitter) und die spontane Emission von Schwerewellen durch die Ausbildung von Ungleichgewichten in der synoptischskaligen Strömung. Diese entstehen bevorzugt im Bereich des Strahlstroms und der Fronten. Nichtorographische Schwerewellen sind in der Atmosphäre üblicherweise schwieriger zu untersuchen als die orographischen, schon allein deswegen, weil ihre Anregung nicht ortsfest ist. Insbesondere Messungen zur spontanen Abstrahlung von Schwerewellen in der Atmosphäre sind mit größeren Unsicherheiten verbunden, da der Vorgang an sich noch nicht gänzlich verstanden ist (zum Beispiel Fritts & Alexander, 2003; Kim *et al.*, 2003; Plougonven & Zhang, 2014). Wir sind daher der Frage nachgegangen, ob sich im Annulusexperiment Hinweise auf die spontane Schwerewellenabstrahlung finden lassen. Alle Vorteile eines Laborexperimentes gegenüber Atmosphärenmessungen (Wiederholbarkeit, Änderung von Parametern usw.) kämen dann der Untersuchung der spontanen Emission zugute.

Der zweite Teil der Lebenszeit betrifft die Fortpflanzung der angeregten Welle auf dem Hintergrund. Im Allgemeinen findet dabei eine Wechselwirkung zwischen Hintergrund und Welle statt. Wir gehen aber davon aus, dass in den Fällen, die wir betrachten, der Einfluss des Hintergrundes auf die Welle stärker ist, als die umgekehrte Beeinflussung. Alle

Eigenschaften der Schwerewelle, wie zum Beispiel ihre Wellenlänge, Frequenz und Fortpflanzungsrichtung können sich dabei im Laufe der Zeit verändern (Bühler & McIntyre, 2005; Plougonven & Snyder, 2005). Es ist daher zu vermuten, dass die Vergleichbarkeit zwischen Annulusexperiment und Atmosphäre in Bezug auf Schwerewellen verbessert werden kann, wenn der Hintergrund im Annulus dem der Atmosphäre möglichst ähnlich ist. Diesbezüglich liegt unser Hauptaugenmerk auf dem Verhältnis der Schichtung, gemessen durch die Brunt-Väisälä-Frequenz  $N$ , zum Coriolis-Parameter  $f$ , denn dieses Verhältnis beeinflusst maßgeblich die Fortpflanzungsrichtung der Schwerewellen. Wir unterscheiden in diesem Zusammenhang klassische Annuluskonfigurationen und atmosphärenähnliche Annuluskonfigurationen. Unter ersteren Konfigurationen verstehen wir Annuli mit einem äußeren Zylinderradius von der Größenordnung 10 cm, einer Spaltbreite zwischen innerem und äußerem Zylinder von weniger als 10 cm und einer Gleichgewichtsfüllhöhe von ungefähr 10 cm. Der Temperaturunterschied zwischen den Zylinderwänden beträgt in einer klassischen Konfiguration etwa 10 K und die Winkelgeschwindigkeit reicht von 0 bis ungefähr 48 U/min (0 bis 5 rad/s) (vergleiche Hide & Mason, 1975). Die Validierungsexperimente fallen unter diese Konfiguration. Im Unterschied zur Atmosphäre, wo ungefähr  $N/f \sim 100$  vorliegt (genau genommen gilt dies für die Troposphäre, Esler & Polvani (2004); Dritschel & McKiver (2015)), finden wir im klassischen Annulus Werte von  $N/f < 1$ . Aus diesem Grunde untersuchen wir ebenfalls eine atmosphärenähnlichere Konfiguration, die im Vergleich zur klassischen Konfiguration eine größere Spaltbreite, eine geringere Füllhöhe, einen größeren Temperaturunterschied und eine geringere Winkelgeschwindigkeit besitzt. Durch diese Modifikationen kann das Verhältnis zumindest auf Werte von  $N/f > 1$  angehoben werden.

Der dritte Teil der Lebenszeit der Schwerewelle ist ihre Auslöschung. Im Annulus ist es am wahrscheinlichsten, dass dies allmählich durch molekulare Dissipation geschieht, möglicherweise beeinflusst durch die Wechselwirkung mit dem Hintergrund und durch eine geometrische Amplitudenabschwächung (man denke an Kreiswellen auf der Wasseroberfläche, deren Energie sich auf einen immer größer werdenden Kreisumfang verteilt). In der Atmosphäre gibt es zudem mannigfache Instabilitätsmechanismen, die zu einem Anwachs der Schwerewellenamplitude führen, bis diese schließlich bricht. Ihre Energie wird dabei auf turbulente Strömungsbewegungen übertragen. Die Turbulenz wiederum reicht die ursprüngliche Wellenenergie an die unterschiedlichen Energieformen des Hintergrundes weiter. Zwischen ihrer Anregung und ihrer Auslöschung kann eine Schwerewelle große horizontale und vertikale Entfernungen zurücklegen und wird so zu einem wichtigen Beförderungsmittel von Impuls in der Atmosphäre (zum Beispiel Fritts & Alexander, 2003; Kim *et al.*, 2003). Der letzte Teil der Schwerewellenlebenszeit wird allerdings in dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

## 4.1 Eine atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration

### 4.1.1 Ergebnisse von einer klassischen Konfiguration

Wie erwähnt, gehören die Validierungsexperimente zur Kategorie der klassischen Konfiguration. Zur Untersuchung der Schwerewellen in einer solchen Konfiguration, haben wir

---



Experiment Nr. 7 ( $\Omega = 6 \text{ U/min}$ ) als repräsentatives Beispiel gewählt. Dessen Parameter sowie die Koeffizienten für die temperaturabhängigen Eigenschaftsgrößen der Flüssigkeit gemäß (2.44) sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Alle Simulationen, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, wurden ohne Anlauf durchgeführt. Die numerischen Parameter für die Simulation mittels cylFloit sind der Spalte K1 („K“ für klassisch) in Tabelle 4.2 zu entnehmen. Abbildung 4.1 zeigt Horizontalschnitte des Temperatur- und Horizontalgeschwindigkeitsfeldes. Vertikalschnitte des stationären, azimutalsymmetrischen Temperaturfeldes sowie des azimutal gemittelten Temperaturfeldes zu einem Zeitpunkt, da die barokline Welle bereits voll ausgebildet ist, sind in Abbildung 4.2 zu sehen.

Um eine Vorstellung von der radialen und vertikalen Struktur der Flüssigkeitsschichtung zu bekommen, haben wir das lokale Verhältnis  $N_l/f$  eingeführt, wobei

$$N_l^2 := -g \overline{\left( \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \right)^\vartheta} . \quad (4.1)$$

$\overline{(\cdot)^\vartheta}$  bezeichnet die Mittelung entlang der azimutalen Koordinate. Die Verteilung von  $N_l/f$  in der klassischen Konfiguration ist in Abbildung 4.2c gezeigt. Demnach ist die typische Größenordnung  $N_l/f \sim 0,1$ . Dies ist ungefähr drei Größenordnungen kleiner als die Abschätzung des Verhältnisses in der Atmosphäre von  $\mathcal{O}(100)$  (Esler & Polvani, 2004; Dritschel & McKiver, 2015). Die intrinsische Frequenz  $\hat{\omega}$  ebener Schwerewellen auf einem (näherungsweise) zeit- und ortsunabhängigen Hintergrund erfüllt die Dispersionsrelation (zum Beispiel Gill, 1982; Fritts & Alexander, 2003)

$$\hat{\omega}^2 = \frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = N^2 \cos^2(\alpha) + f^2 \sin^2(\alpha), \quad (4.2)$$

wobei  $\alpha = \arctan(k_z/\sqrt{k_x^2 + k_y^2})$  den Winkel bezeichnet, den der Phasengeschwindigkeitsvektor der Schwerewelle mit der Horizontalebene einschließt. Während in der Atmosphäre hochfrequente Schwerewellen ( $\hat{\omega} \sim N$ ) eine nahezu horizontale Phasengeschwindigkeit und niederfrequente Wellen ( $\hat{\omega} \sim f$ ) eine überwiegend vertikal Phasengeschwindigkeit aufweisen, verhält es sich in der klassischen Konfiguration genau umgekehrt, da  $N < f$ . Dies ist die Motivation dafür, nach einer atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration zu suchen, in der zumindest  $N > f$ .

### 4.1.2 Theoretische Betrachtungen

Verwenden wir für die Brunt-Väisälä-Frequenz die Definition (3.92), so erhalten wir für das Verhältnis  $N/f$

$$\frac{N}{f} = \frac{\sqrt{g|\rho_1(T_b - T_a)|\chi_z/d}}{2\Omega}, \quad (4.3)$$

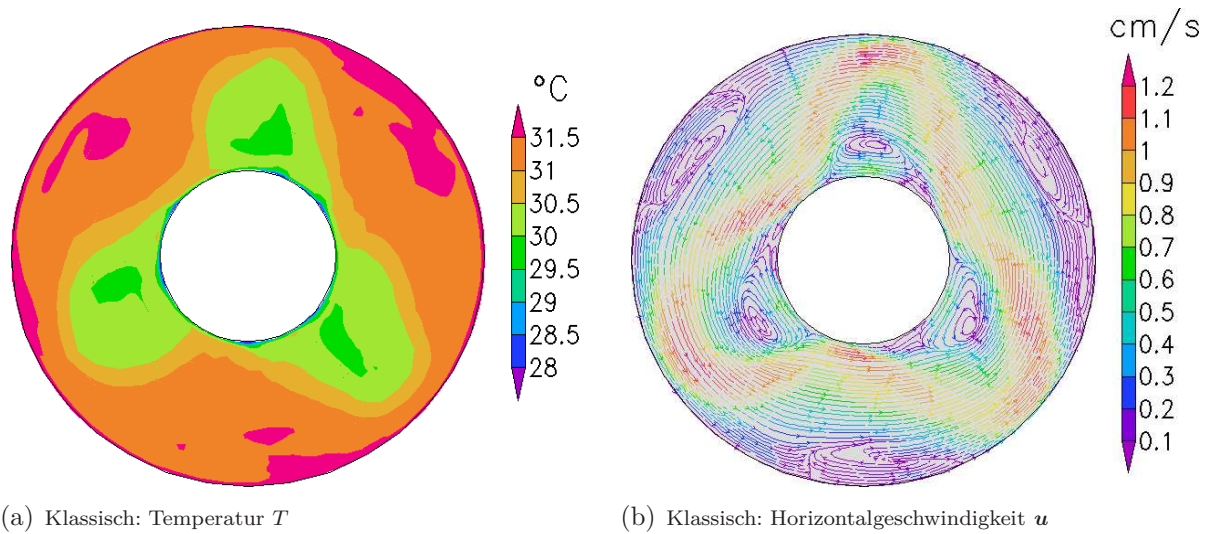
wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, dass  $\chi_z \sim 1$ . Es bestehen demnach mehrere Möglichkeiten, um  $N/f$  zu erhöhen. Davon ist der Wechsel zu einer Flüssigkeit mit einem größeren thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten  $-\rho_1$  eine Option, die

**Tabelle 4.1:** Physikalische Parameter und abgeleitete Größen für eine klassische Anuluskonfiguration (Validierungsexperiment Nr. 7) und eine atmosphärenähnliche Konfiguration.

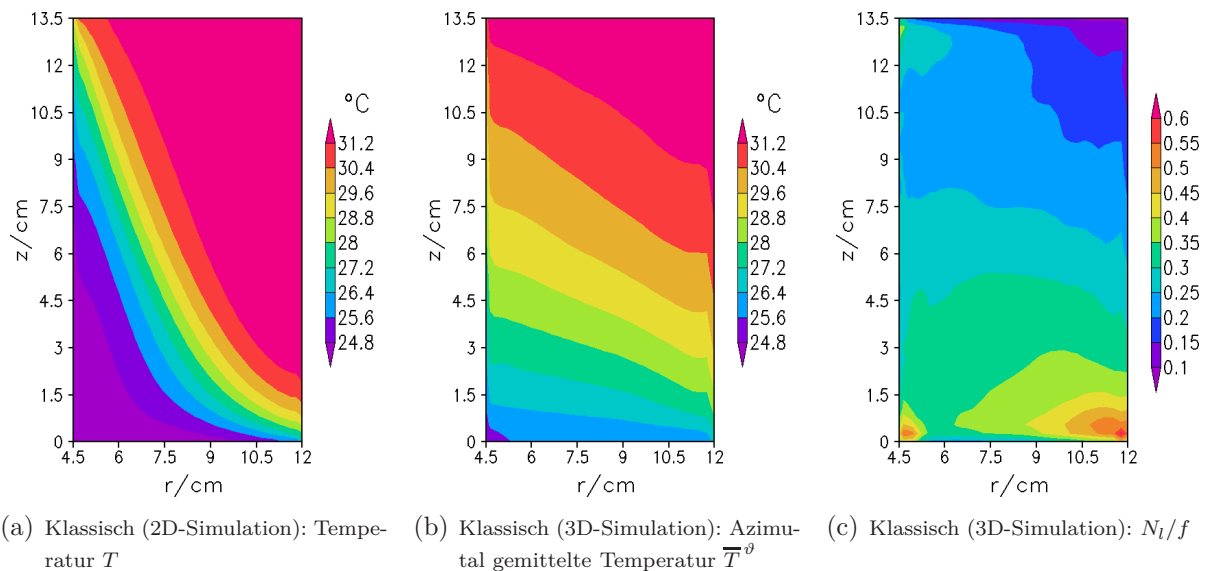
	Klassische Konfiguration (Experiment Nr. 7)	Atmosphärenähnliche Konfiguration
- Radius der inneren Zylinderwand, $a$ :	4,5 cm	20 cm
- Radius der äußeren Zylinderwand, $b$ :	12 cm	70 cm
- Gleichgewichtsfüllhöhe, $d$ :	13,5 cm	4 cm
- Temperatur der inneren Zylinderwand, $T_a$ :	24 °C	15 °C
- Temperatur der äußeren Zylinderwand, $T_b$ :	32 °C	45 °C
- Winkelgeschwindigkeit, $\Omega$ :	0,63 rad/s (6 U/min)	0,08 rad/s (0,76 U/min)
- Flüssigkeit:	Wasser	Wasser
- $\rho_1$ :	$-2,765 \cdot 10^{-4}$ 1/K	$-2,923 \cdot 10^{-4}$ 1/K
- $\rho_2$ :	$-3,915 \cdot 10^{-6}$ 1/K <sup>2</sup>	$-3,917 \cdot 10^{-6}$ 1/K <sup>2</sup>
- $\nu_0$ :	$8,543 \cdot 10^{-3}$ cm <sup>2</sup> /s	$8,160 \cdot 10^{-3}$ cm <sup>2</sup> /s
- $\nu_1$ :	$-2,297 \cdot 10^{-2}$ 1/K	$-2,292 \cdot 10^{-2}$ 1/K
- $\nu_2$ :	$2,692 \cdot 10^{-4}$ 1/K <sup>2</sup>	$2,819 \cdot 10^{-4}$ 1/K <sup>2</sup>
- $\kappa_0$ :	$1,469 \cdot 10^{-3}$ cm <sup>2</sup> /s	$1,477 \cdot 10^{-3}$ cm <sup>2</sup> /s
- $\kappa_1$ :	$2,824 \cdot 10^{-3}$ 1/K	$2,758 \cdot 10^{-3}$ 1/K
- $\kappa_2$ :	$-1,266 \cdot 10^{-5}$ 1/K <sup>2</sup>	$-1,259 \cdot 10^{-5}$ 1/K <sup>2</sup>
- Ekman-Zahl, $Ek$ :	$7 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$
- Dicke der Ekman-Schicht, $\delta_E$ :	0,12 cm	0,32 cm
- Dicke der Stewartson-Schicht, $\delta_S$ :	0,32 cm	9,27 cm
- Dicke der thermischen Grenzschicht, $\delta_T$ :	0,09 cm	0,05 cm

**Tabelle 4.2:** Numerische Parameter für die Simulation der klassischen und atmosphärenähnlichen Konfiguration.

	Klassische Konfiguration			Atmosphärenähnliche Konfiguration		
	K1	K2	K3	A1	A2	A3
- Anzahl Gitterzellen in azimuthaler Richtung, $N_\theta$ :	60	90	160	80	80	160
- Anzahl Gitterzellen in radialer Richtung, $N_r$ :	40	45	90	80	80	160
- Anzahl Gitterzellen in vertikaler Richtung, $N_z$ :	50	80	160	30	30	90
- Azimutale Ausdehnung des simulierten periodischen Ausschnitts:	$2\pi$ rad	$2\pi$ rad	$2\pi/3$ rad	$2\pi$ rad	$2\pi/3$ rad	$2\pi/3$ rad
- Integrationszeit des 2D-Modells um stationären Zustand zu erreichen, $t_{2D}$ :	10800 s	10800 s	—	36000 s	36000 s	—
- Max. Amplitude der anfänglichen Zufallstemperaturstörungen $\delta T_{St}$ in Einheiten von $ T_b - T_a $ :	0,03	0,03	—	0,01	0,01	—



**Abbildung 4.1:** (a) Horizontalschnitt des Temperaturfeldes für die klassische Annuluskonfiguration (Validierungsexperiment Nr. 7) in der Höhe  $z = 0,74 \cdot d = 10 \text{ cm}$  und zum Zeitpunkt  $t = 2700 \text{ s}$ . (b) Stromlinien des zugehörigen Horizontalgeschwindigkeitsfeldes  $u$  (die Bepfeilung zeigt die Richtung von  $u$  an, während die Einfärbung den Geschwindigkeitsbetrag,  $|u|$ , wiedergibt).



**Abbildung 4.2:** (a) Stationäre, azimutalsymmetrische Lösung für das Temperaturfeld aus der Simulation der klassischen Konfiguration (Validierungsexperiment Nr. 7). (b) Azimutales Mittel der Temperatur und (c) das lokale Verhältnis  $N_i/f$  aus derselben 3D-Simulation, die in Abbildung 4.1 gezeigt ist.

wir nicht verfolgen werden. Es bleiben daher die Erhöhung des Temperaturunterschiedes  $T_b - T_a$  sowie die Verringerung der Füllhöhe  $d$  und der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ .

Allerdings wird die Variation dieser drei Stellschrauben durch Nebenbedingungen eingeschränkt. Zunächst muss gewährleistet bleiben, dass die Strömung in der atmosphärenähnlichen Konfiguration baroklin instabil ist, denn es sind die baroklinen Wellen, die Schwerewellen spontan emittieren. Gemäß der Bedingung für barokline Instabilität (3.112), muss daher eine Erhöhung von  $N/f$ , sobald die Burger-Zahl den Wert  $Bu = (\mu_{\text{krit}}/\pi)^2$  erreicht, durch eine entsprechende Verringerung des Aspektverhältnisses  $d/(b-a)$  ausgeglichen werden.

Eine weitere Einschränkung kommt vonseiten der Grenzschichten. Durch die Verringerung der Winkelgeschwindigkeit und der Füllhöhe wächst die Ekman-Zahl  $Ek = \nu_0/(\Omega d^2)$ . Infolgedessen wird auch der Anteil am gesamten Flüssigkeitsvolumen, den die Grenzschichten ausmachen, immer größer (siehe die Formeln für die Grenzschichtdicken (3.2)). Ab einem gewissen Punkt wird die Dynamik in der gesamten Flüssigkeit in erheblichem Maße durch die Viskosität beeinflusst. Da wir an der Dynamik in der freien Flüssigkeit interessiert sind, möchten wir dies vermeiden.

Darüber hinaus bedingt eine Verringerung des Aspektverhältnisses eine Zunahme des Verhältnisses des Flächeninhaltes der Flüssigkeitsoberfläche  $F_d$  zum Flächeninhalt der Gesamtoberfläche des Annulus  $F_{\partial V_A}$  (Boden, Flüssigkeitsoberfläche und Zylinderwände)

$$\frac{F_d}{F_{\partial V_A}} = \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{d}{b-a} \right)}. \quad (4.4)$$

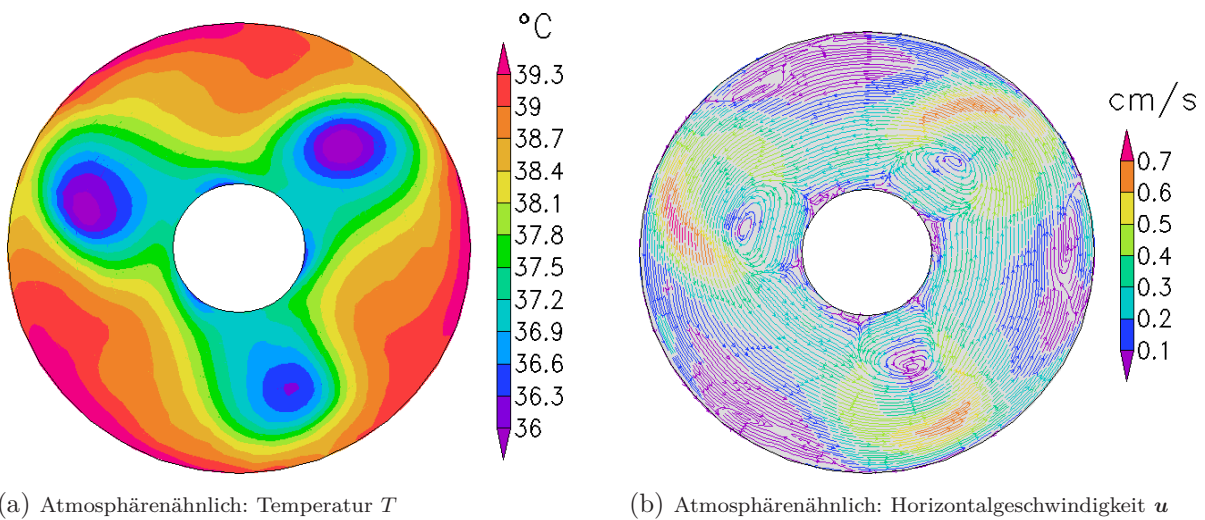
Damit wird die Vernachlässigung des Wärmeübergangs zwischen Flüssigkeit und Umgebung über die Flüssigkeitsoberfläche in cylFloit (siehe Abschnitt 2.2.5) fragwürdiger, insbesondere, wenn die Temperatur der äußeren Zylinderwand erhöht wird, um den Temperaturunterschied zwischen den Zylinderwänden zu vergrößern. In einer Laborversion eines atmosphärenähnlichen Annulus könnte es erforderlich sein, einen Deckel geringfügig oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche anzubringen, damit thermische Flüsse und auch der Luftwiderstand auf die Oberfläche weitestgehend unterbunden werden (Williams, 1969). Generell haben wir versucht, uns bei der Wahl der Parameter eines atmosphärenähnlichen Annulus im Rahmen experimenteller Umsetzbarkeit zu bewegen (soweit wir dies einschätzen konnten).

### 4.1.3 Die simulierte großskalige Strömung in einer neuen Annuluskonfiguration

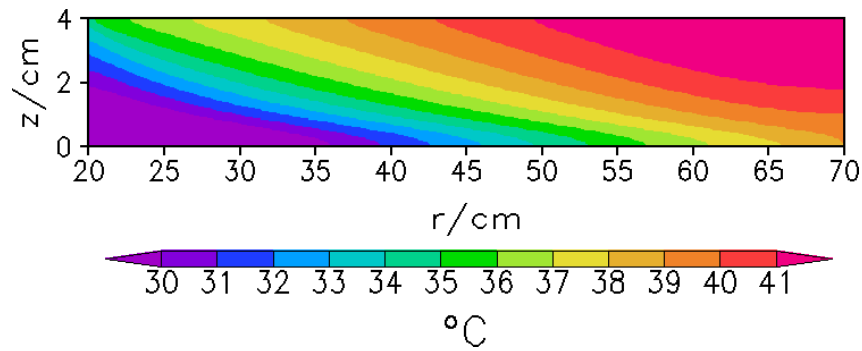
In Tabelle 4.1 sind die Parameter einer neuen atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration aufgelistet, die als Kompromiss zwischen unserem Ziel,  $N/f$  zu erhöhen und den zuvor erwähnten Einschränkungen gewählt wurden. Innerer und äußerer Zylinderradius sowie die Füllhöhe dieser Konfiguration betragen  $a = 20$  cm,  $b = 70$  cm und  $d = 4$  cm. Der Temperaturunterschied zwischen den Zylinderwänden ist  $T_b - T_a = 30$  K und die Winkelgeschwindigkeit des Annulus beträgt  $\Omega = 0,08$  rad/s (0,76 U/min). Die räumlichen

Abmessungen der neuen Konfiguration ähneln denen, die Rossby (1926) für ein Experiment zur Nachahmung atmosphärischer Strömungen vorgeschlagen hat. Überdies besteht Ähnlichkeit zu den frühen Experimenten von Riehl & Fultz (1957) mit, im Vergleich zur klassischen Konfiguration, verhältnismäßig seichten, großen Annuli, sowie zu den Untersuchungen von Douglas & Mason (1973) zur Variierung des Aspektverhältnisses.

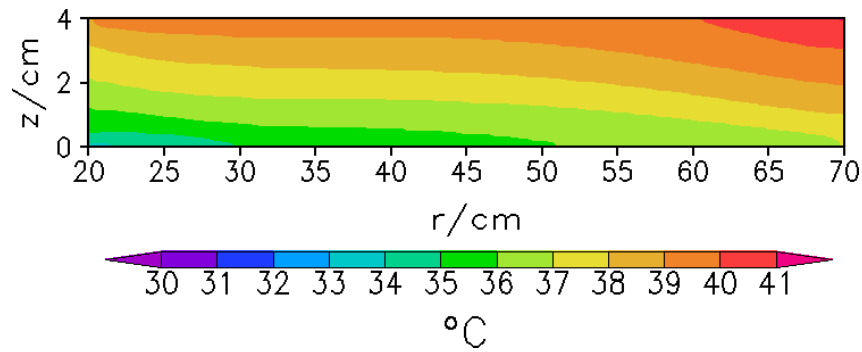
Die numerischen Parameter für die Simulation der atmosphärenähnlichen Konfiguration stehen in Spalte A1 („A“ für atmosphärenähnlich) in Tabelle 4.2. Horizontalschnitte des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes auf halber Höhe aus der 3D-Simulation sind in Abbildung 4.3 gezeigt. Vertikalschnitte des stationären, azimutalsymmetrischen Temperaturfeldes aus der 2D-Simulation und der azimutal gemittelten Temperatur sowie des lokalen Verhältnisses  $N_l/f$  in Gegenwart der voll ausgebildeten baroklinen Welle sind in Abbildung 4.4 abgebildet. Sowohl in der klassischen als auch in der atmosphärenähnlichen Konfiguration besitzt die führende barokline Welle die azimutale Modenzahl 3. In beiden Fällen ist die Gestalt der Welle relativ gleichmäßig und sie driftet mit einer einigermäßen gleichbleibenden azimutalen Phasengeschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn. In der Simulation der atmosphärenähnlichen Konfiguration durchläuft die barokline Welle nach ungefähr 2 h einen Übergang von Modenzahl 3 nach Modenzahl 2. Nach etwa 0,7 h bildet sich die Modenzahl 3 wieder zurück. Ein Vergleich der Geschwindigkeitsfelder in den Abbildungen 4.1b und 4.3b zeigt, dass die Tiefdruckgebiete (Gebiete mit niedrigeren Temperaturwerten in Abbildung 4.1a und 4.3a) in der atmosphärenähnlichen Konfiguration einen stärkeren Wirbelcharakter haben als jene in der klassischen Konfiguration. Dort schlängelt sich der Strahlstrom verhältnismäßig gleichförmig zwischen Hoch- und Tiefdruckgebieten. Die Werte  $N^2 \approx 0,33$  (0,64)  $s^{-2}$ ,  $\chi_r \approx 0,07$  (0,41),  $\chi_z \approx 0,15$  (0,3),  $Bu \approx 0,08$  (0,16),  $Ro_{th} \approx 0,04$  (0,22) und  $N/f \approx 3,6$  (5) sind typisch für die 3D-Simulation der atmosphärenähnlichen Konfiguration (Werte aus der azimutalsymmetrischen 2D-Simulation stehen in Klammern,  $\chi_r$  und  $\chi_z$  wurden gemäß ihrer Definitionen (3.95) und (3.93) berechnet). Zum Vergleich: Simulationen der klassischen Konfiguration liefern  $N^2 \approx 0,12$  (0,14)  $s^{-2}$ ,  $\chi_r \approx 0,19$  (0,74),  $\chi_z \approx 0,77$  (0,89),  $Bu \approx 0,26$  (0,29),  $Ro_{th} \approx 0,06$  (0,24) und  $N/f \approx 0,27$  (0,3). Zuvor wurde an einigen Stellen von der Abschätzung  $\chi_r \sim \chi_z \sim 1$  Gebrauch gemacht. Wir sehen jedoch nun, dass besonders in der 3D-Simulation  $\chi_r < 1$ , da die barokline Welle während ihres Wachstums die Ursache für ihr Wachstum, die Baroklinität der Strömung ( $\sim dB_{g,0}/dr$ ), abbaut, und  $\chi_z < 1$ , da dieser Vorgang von einer Abnahme des vertikalen Dichtegradienten begleitet wird (Douglas & Mason, 1973) (man erkennt dies gut an der Zunahme des vertikalen Abstandes zwischen den Isothermen zwischen Abbildung 4.4a und 4.4b). Am wichtigsten für unsere Zwecke ist, dass die gewünschte Erhöhung von  $N/f$  mithilfe der atmosphärenähnlichen Konfiguration erreicht werden konnte. Im Mittel finden wir nun  $N > f$ . Die Ekman-Zahl der atmosphärenähnlichen Konfiguration ist ungefähr 100 mal größer als die der klassischen Konfiguration (siehe Tabelle 4.1). Die damit verbundene Zunahme des Anteils am Flüssigkeitsvolumen, der von den Grenzschichten beansprucht wird, ist jedoch noch hinnehmbar. Das Oberflächenverhältnis steigt von  $F_d/F_{\partial V_A} = 0,18$  in der klassischen Konfiguration auf  $F_d/F_{\partial V_A} = 0,46$  in der atmosphärenähnlichen Konfiguration (zum Vergleich: Für  $d/(b-a) \rightarrow 0$  erhält man  $F_d/F_{\partial V_A} \rightarrow 0,5$ ).



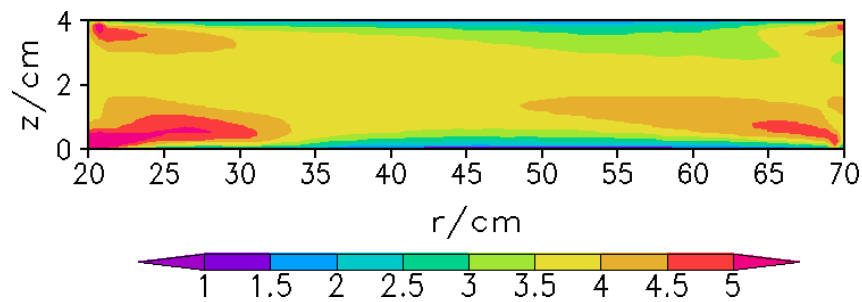
**Abbildung 4.3:** (a) Horizontalschnitt des Temperaturfeldes für die atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration in der Höhe  $z = d/2 = 2$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 3600$  s. (b) Stromlinien des zugehörigen Horizontalgeschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{u}$  (die Bepfeilung zeigt die Richtung von  $\mathbf{u}$  an, während die Einfärbung den Geschwindigkeitsbetrag,  $|\mathbf{u}|$ , wiedergibt).



(a) Atmosphärenähnlich (2D-Simulation): Temperatur  $T$



(b) Atmosphärenähnlich (3D-Simulation): Azimutal gemittelte Temperatur  $\bar{T}^\phi$



(c) Atmosphärenähnlich (3D-Simulation):  $N_l/f$

**Abbildung 4.4:** (a) Stationäre, azimutalsymmetrische Lösung für das Temperaturfeld aus der Simulation der atmosphärenähnlichen Konfiguration. (b) Azimutales Mittel der Temperatur und (c) das lokale Verhältnis  $N_l/f$  aus derselben 3D-Simulation, die in Abbildung 4.3 gezeigt ist.

## 4.2 Das Schwerewellensignal

Für die Simulation der Schwerewellen sind die Gitterauflösungen K1 und A1, die im vorhergehenden Abschnitt verwendet wurde (siehe Tabelle 4.2), zu grob, da die räumlichen Skalen der Schwerewellen typischerweise erheblich kleiner sind als diejenigen der baroklinen Wellen (Jacoby *et al.*, 2011). Neben der Erhöhung der Gitterzellanzahl, kann Auflösung in azimuthaler Richtung dadurch gewonnen werden, dass die Simulation auf die Wiedergabe einer azimuthalen Wellenlänge der führenden baroklinen Welle beschränkt wird (Williams, 1969, 1971). Von dieser Methode wird auch bei der Simulation barokliner Wellen in der Atmosphäre Gebrauch gemacht (zum Beispiel Simmons & Hoskins, 1975). Dies bedeutet praktisch, dass die ursprüngliche  $2\pi$ -Periodizität in beiden Konfigurationen durch eine  $2\pi/3$ -Periodizität ersetzt wird. Vergleiche der Simulationsergebnisse zeigen, dass die Dynamik der führenden baroklinen Welle durch diese Methode nicht wesentlich beeinträchtigt wird. Die numerischen Parameter für die Simulationen mit  $2\pi/3$ -Periodizität sind in den Spalten K3 und A3 in Tabelle 4.2 aufgelistet. Um Rechenzeit zu sparen, wurden die 3D-Simulationen zunächst mit den gröberen Auflösungen K2 und A2 durchgeführt, bis zur vollständigen Ausbildung der baroklinen Wellen, das heißt 2100 s Integrationszeit für die atmosphärenähnliche Konfiguration und 600 s für die klassische Konfiguration. Von diesen Gittern wurden die Felder dann auf die feineren Gitter K3 und A3 interpoliert. Im Falle der klassischen Konfiguration war es allerdings nicht möglich, die  $2\pi/3$ -Periodizität schon in dieser gröberen Vorsimulation zu nutzen, da der stationäre, azimuthalsymmetrische Zustand aus der 2D-Simulation baroklin instabil in Bezug auf Modenzahl 2 ist. Erst nach einigen Minuten durchläuft die barokline Welle einen Übergang zur Modenzahl 3. Aus diesem Grunde wurde  $2\pi$ -Periodizität in der Vorsimulation verwendet und ein  $2\pi/3$ -Ausschnitt davon auf das feinere Gitter mit  $2\pi/3$ -Periodizität interpoliert. Auf den feineren Gittern waren weitere 1100 s Integrationszeit für die atmosphärenähnliche Konfiguration und 400 s für die klassische Konfiguration notwendig, um die Rückstände der Interpolation zu dissipieren. Im Falle der atmosphärenähnlichen Konfiguration haben wir unsere Untersuchungen auf Zeiten beschränkt, die weit vor dem Auftreten des Übergangs von Modenzahl 3 nach 2 liegen.

Als Indikator für Schwerewellen verwenden wir die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz (zum Beispiel O'Sullivan & Dunkerton, 1995)

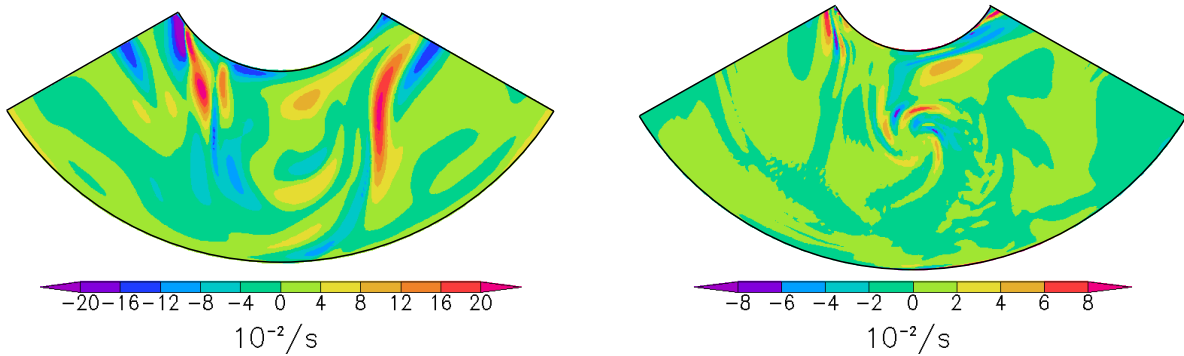
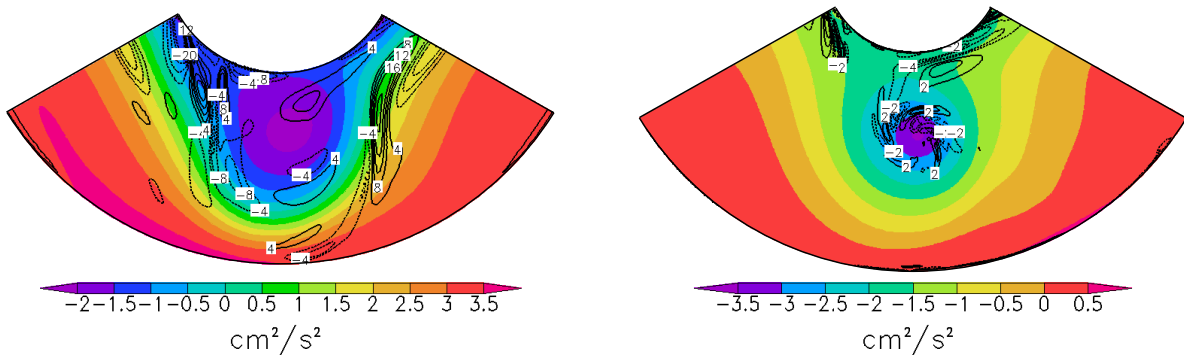
$$\delta := \nabla_h \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right]. \quad (4.5)$$

Ein Grund für den Gebrauch von  $\delta$  als Schwerewellenindikator liegt darin, dass es Abweichungen von einer divergenzfreien Strömung anzeigt. Von diesen Abweichungen wird angenommen, dass sie die Schwerewellen enthalten. Der größte Teil der divergenzfreien Strömung sollte das geostrophische Gleichgewicht erfüllen (siehe Abschnitt 3.6 und Gleichung (3.74)).  $\delta$  kann einen Anteil enthalten, den man üblicherweise nicht den Schwerewellen zuweist. Dieser Anteil lässt sich beispielsweise mit der quasigeostrophischen Omega-Gleichung abschätzen (Zhang *et al.*, 2000; Viúdez & Dritschel, 2006; Plougonven *et al.*, 2009; Danioux *et al.*, 2012). Wir nehmen jedoch an, dass die Amplitude dieses Anteils verhältnismäßig klein ist im Vergleich zur Gesamtamplitude von  $\delta$  und verweisen darauf, dass die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz immer noch ein weit verbreiteter Indikator für



Schwerewellen ist (zum Beispiel Vanneste, 2013; Plougonven & Zhang, 2014; Mirzaei *et al.*, 2014). Horizontalschnitte von  $\delta$  für die klassische und atmosphärenähnliche Konfiguration sind in Abbildung 4.5 gezeigt. Die auffälligsten Strukturen sind mit vergleichbarer Amplitude bereits in den gröber aufgelösten Vorsimulationen erkennbar, was nahelegt, dass sie nicht mögliche Rückstände der Interpolation sind. Darüber hinaus haben wir getestet, ob die Verwendung des impliziten Feinstrukturmodells ALDM (siehe Abschnitt 2.3) Auswirkungen auf die Simulation der Schwerewellen hat. Eine Wiederholung der Simulationen, in denen statt ALDM ein einfaches Zentrale-Differenzen-Schema für die Berechnung der advektiven Flüsse benutzt wurde (zum Beispiel Ferziger & Perić (2008), vergleiche auch Abschnitt 3.5), hat keinen Unterschied bezüglich der typischen Gestalt, Amplitude und anderer Merkmale des Divergenzsignals erkennen lassen (nicht gezeigt). Einerseits mag daraus gefolgert werden, dass die Strömung durch die Gitter K3 und A3 bereits so gut aufgelöst wird, dass ein Feinstrukturmodell überflüssig ist. Andererseits zeigt dieses Ergebnis jedoch auch, dass die Simulation der Schwerewellen durch ALDM nicht nachteilig beeinflusst wird.

Betrachten wir zunächst das Divergenzsignal der atmosphärenähnlichen Konfiguration genauer, so erkennen wir einmal ein starkes Signal nahe dem inneren Zylinder. Es rührt wahrscheinlich von Schwerewellen her, die ihren Ursprung in Instabilitäten der Grenzschicht haben. Diese Art von Schwerewellen im differentiell geheizten rotierenden Annulus wurde erstmals von Jacoby *et al.* (2011) beschrieben. Diese Autoren haben auch einen möglichen Instabilitätsmechanismus vorgestellt. Weitere numerische Untersuchungen zu diesen Wellen wurden von Randriamampianina (2013) durchgeführt, der zugleich einen alternativen Instabilitätsmechanismus vorgeschlagen hat. Weiterhin sieht man eine spiralförmige Struktur um das Tiefdruckzentrum angeordnet. Ein erheblicher Anteil dieses Signals könnte aus Schwerewellen von der Grenzschichtinstabilität gespeist werden, da diese sich auch in die freie Flüssigkeit hinein ausbreiten – ein Verhalten, das sowohl die Simulationen von Jacoby *et al.* (2011) als auch animierte Zeitreihen des Divergenzsignals aus unseren Simulationen nahelegen. In der klassischen Konfiguration sieht das Bild ähnlich aus. Auch hier finden sich starke Signale nahe der Grenzschicht des inneren Zylinders. Im Unterschied zur atmosphärenähnlichen Konfiguration, gleicht das Divergenzsignal in der freien Flüssigkeit eher länglichen Zungen, die sich entlang des Strahlstroms anordnen. Unsere Simulationsergebnisse stimmen gut mit den Ergebnissen anderer Modelle überein. So ähneln die Schwerewellen in beiden Konfigurationen jenen, die in Simulationen des Lebenszyklus einer instabilen baroklinen Welle in der Atmosphäre von O’Sullivan & Dunkerton (1995); Zhang (2004); Plougonven & Snyder (2005, 2007) beobachtet wurden. Vergleichbare Schwerewellen haben sich auch in Simulationen von Wirbeldipolen in rotierenden, geschichteten Fluiden gezeigt (Snyder *et al.*, 2007, 2009). In all diesen Simulationen waren die Schwerewellen nahezu stationär relativ zur baroklinen Welle beziehungsweise zum Wirbeldipol. In unseren Simulationen verhalten sich die Schwerewellen in der baroklinen Welle ebenso. Ferner waren die Schwerewellen in den zuvor zitierten Arbeiten überwiegend niederfrequent, mit intrinsischen Frequenzen von  $\hat{\omega} \gtrsim f$  (in allen Arbeiten war  $N \gg f$ ). Ob dies auch auf die Schwerewellen im Annulus zutrifft, wissen wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht. Die Autoren der obigen Arbeiten konnten darüber hinaus die spontane Emission als wahrscheinliche Quelle der von ihnen beobachteten Schwerewellen ausmachen. Es darf daher vermutet werden, dass ein Teil der Schwerewellen in unseren Simulationen ebenfalls spontan von der baroklinen Welle abgestrahlt wird.

(a) Klassisch: Horizontale Geschwindigkeitsdivergenz  $\delta$ (b) Atmosphärenähnlich: Horizontale Geschwindigkeitsdivergenz  $\delta$ (c) Klassisch: Druck  $\tilde{p}$  und  $\delta$ (d) Atmosphärenähnlich: Druck  $\tilde{p}$  und  $\delta$ 

**Abbildung 4.5:** Horizontale Geschwindigkeitsdivergenz  $\delta = \nabla_h \cdot \mathbf{u}$ , (a) für die klassische Annulluskonfiguration in der Höhe  $z = 0,74 \cdot d = 10$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s nach Beginn der 3D-Simulation, und (b) für die atmosphärenähnliche Konfiguration in der Höhe  $z = d/2 = 2$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 3200$  s. In der Reihe darunter ist das zugehörige Druckfeld  $\tilde{p}$  (Farbskala) gezeigt sowie die Isolinien von  $\delta$ , (c) für die klassische Konfiguration, mit einem Isolinienintervall von  $4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , und (d) für die atmosphärenähnliche Konfiguration, mit einem Isolinienintervall von  $2 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Die Isolinie für  $\delta = 0$  ist nicht eingezeichnet. Negative Werte von  $\delta$  sind durch gestrichelte Isolinien dargestellt.

Unabhängig von der Quelle dürfte die Gestalt der Schwerewellen (zum Beispiel das Spirmuster in der atmosphärenähnlichen Konfiguration) hauptsächlich durch Wechselwirkungen mit dem Hintergrund beeinflusst werden. Laut Bühler & McIntyre (2005); Plougonven & Snyder (2005); Wang *et al.* (2009) hat die horizontale und vertikale Scherung des Hintergrundgeschwindigkeitsfeldes einen starken Einfluss auf den Aufenthaltsort, die Ausrichtung und andere Eigenschaften der Welle, wie beispielsweise ihre Wellenlängen.

### 4.3 Eine Analyse mittels Modenzerlegung im Rahmen linearisierter Dynamik

Ein wichtiger Bestandteil der Untersuchung von Schwerewellen in numerischen Simulationen ist es, zu prüfen, ob die Merkmale der beobachteten Strukturen, von denen angenommen wird, dass es sich um Schwerewellen handelt, mit den Vorhersagen der linearen Schwerewellentheorie übereinstimmen (O'Sullivan & Dunkerton, 1995; Zhang, 2004; Plougonven & Snyder, 2007). Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Strömung mithilfe eines gleitenden Volumenmittels in einen großskaligen und einen kleinskaligen Anteil. Nachdem dies geschehen ist, bestimmen wir, wie die Energie im kleinskaligen Anteil zwischen den verschiedenen Eigenmoden der linearisierten Gleichungen aufgeteilt ist.

Für diese Analyse verwenden wir die Boussinesq-Gleichungen (3.28), (3.31) und (3.34) in kartesischen Koordinaten und zerlegen die Zustandsgrößen in einen großskaligen und einen kleinskaligen Anteil

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad (4.6a)$$

$$B = B_0 + B', \quad (4.6b)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \tilde{p}', \quad (4.6c)$$

mit  $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$ , wobei, wie in Abschnitt 3.6,  $x$  für die azimutale,  $y$  für die radiale und  $z$  für die vertikale Richtung steht. Vom großskaligen Zustand wird angenommen, dass er das geostrophische und hydrostatische Gleichgewicht erfüllt

$$u_0 = \frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial y}, \quad (4.7a)$$

$$v_0 = -\frac{1}{f} \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x}, \quad (4.7b)$$

$$w_0 = 0, \quad (4.7c)$$

$$B_0 = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial z}, \quad (4.7d)$$

$$\frac{\partial B_0}{\partial z} = N^2. \quad (4.7e)$$

Der Wentzel-Kramers-Brillouin(WKB)-Methode folgend (zum Beispiel Grimshaw, 1975), nehmen wir weiterhin an, dass die räumlichen und zeitlichen Ableitungen von  $u_0$ ,  $v_0$  und

$N^2$  im Vergleich zu den entsprechenden Ableitungen der kleinskaligen Felder zu vernachlässigen sind, sodass  $u_0$ ,  $v_0$  und  $N^2$  praktisch als konstant betrachtet werden können. Damit ist folgende Fourier-Entwicklung der kleinskaligen Zustandsgrößen möglich (zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001; Bestehorn, 2006; Vallis, 2006; Lin, 2007)

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ B' \\ \hat{p}' \end{pmatrix} (x, y, z, t) = \sum_{n_x=-\infty}^{\infty} \sum_{n_y=-\infty}^{\infty} \sum_{n_z=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{B} \\ \hat{p} \end{pmatrix} (k_x, k_y, k_z, \omega) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}, \quad (4.8)$$

wobei Periodizität in allen drei räumlichen Koordinaten bezüglich eines Gebietes mit azimuthaler, radialer und vertikaler Ausdehnung  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  angenommen wird

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L_x}, \quad (4.9a)$$

$$k_y = \frac{2\pi n_y}{L_y}, \quad (4.9b)$$

$$k_z = \frac{2\pi n_z}{L_z}. \quad (4.9c)$$

Jede einzelne Mode erfüllt dann die linearisierten Boussinesq-Gleichungen (zum Beispiel Fritts & Alexander, 2003)

$$-i\hat{\omega}\hat{u} = -f\hat{v} - ik_x\hat{p}, \quad (4.10a)$$

$$-i\hat{\omega}\hat{v} = f\hat{u} - ik_y\hat{p}, \quad (4.10b)$$

$$-i\hat{\omega}\hat{w} = \hat{B} - ik_z\hat{p}, \quad (4.10c)$$

$$-i\hat{\omega}\hat{B} = -N^2\hat{w}, \quad (4.10d)$$

$$0 = i(k_x\hat{u} + k_y\hat{v} + k_z\hat{w}), \quad (4.10e)$$

mit der intrinsischen Frequenz  $\hat{\omega} = \omega - k_x u_0 - k_y v_0$ . Fassen wir die Fourier-Transformierten im Zustandsspaltenvektor  $\hat{\mathbf{z}} := (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{B})^\top$  zusammen (vergleiche Abschnitt 3.4), so lässt sich dieser im Allgemeinen in die drei Eigenmoden des Systems (4.10) zerlegen. Die erste Eigenmode ist die geostrophische, mit der Eigenfrequenz

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 = 0 \quad (4.11)$$

und der Struktur

$$\hat{\mathbf{z}}_1 = \frac{\sqrt{2}fN}{\sqrt{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2k_z^2}} \left( \frac{k_y}{f}, -\frac{k_x}{f}, 0, k_z \right)^\top i \frac{\hat{p}}{|\hat{p}|} =: \hat{\mathbf{g}}, \quad (4.12)$$

mit dem Betrag des Drucks  $|\hat{p}| = (\hat{p}\hat{p}^*)^{1/2}$ , wobei das hochgestellte Sternchen die komplex Konjugierte der Größe kennzeichnet. Die anderen beiden Eigenmoden sind diejenigen der

Schwerewellen, mit den Eigenfrequenzen

$$\hat{\omega} = \hat{\omega}_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \quad (4.13)$$

und den Strukturen

$$\hat{\mathbf{z}}_{2,3} = \begin{cases} (1, \pm i, 0, 0)^\top \frac{\hat{u}}{|\hat{u}|}, \\ \text{falls } k_x = k_y = 0 \\ \frac{\hat{p}/|\hat{p}|}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \left[ \frac{k_z (k_x - i k_y \frac{f}{\hat{\omega}})}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \frac{k_z (k_y + i k_x \frac{f}{\hat{\omega}})}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, i \frac{N^2}{\hat{\omega}} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right]^\top, \\ \text{sonst} \end{cases} \quad (4.14)$$

=:  $\hat{\mathbf{s}}^\pm$ ,

wobei  $k_x = k_y = 0$  der Trägheitsschwingung entspricht (siehe Anhang C.1.1 und C.1.2). Auf die nachfolgenden Analysen hat es keine Auswirkung, wenn wir die Faktoren (i)  $\hat{p}/|\hat{p}|$  und  $\hat{u}/|\hat{u}|$  in (4.12) und (4.14) auf Eins setzen. Die Eigenmoden  $\hat{\mathbf{g}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}^+$  und  $\hat{\mathbf{s}}^-$  bilden eine vollständige Basis des Zustandes  $\hat{\mathbf{z}}$ , solange dieser die Kontinuitätsgleichung (4.10e) erfüllt (Mohebalhojeh & Dritschel, 2001; Smith & Waleffe, 2002; Achatz, 2007). Bei der Zerlegung des Zustandes in einen großskaligen und einen kleinskaligen Anteil mittels gleitendem Volumenmittel kann jedoch nicht gewährleistet werden, dass der kleinskalige Anteil die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Daher braucht es noch den vierten Basisvektor

$$\hat{\mathbf{z}}_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} (k_x, k_y, k_z, 0)^\top =: \hat{\mathbf{d}}, \quad (4.15)$$

mit dessen Hilfe der unphysikalische Teil des Geschwindigkeitsfeldes aufgespannt werden kann, der (4.10e) nicht erfüllt (siehe Anhang C.1.2). Die vier Basisvektoren  $\hat{\mathbf{g}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}^+$ ,  $\hat{\mathbf{s}}^-$  und  $\hat{\mathbf{d}}$  sind orthonormal in Bezug auf das Energieskalarprodukt

$$\langle \hat{\mathbf{z}}_i, \hat{\mathbf{z}}_j \rangle := \frac{1}{2} \left( \hat{u}_i \hat{u}_j^* + \hat{v}_i \hat{v}_j^* + \hat{w}_i \hat{w}_j^* + \frac{\hat{B}_i \hat{B}_j^*}{N^2} \right), \quad (4.16)$$

das heißt  $\langle \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{g}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{s}}^\pm, \hat{\mathbf{s}}^\pm \rangle = \langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 1$  und  $\langle \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{s}}^\pm \rangle = \langle \hat{\mathbf{s}}^\pm, \hat{\mathbf{s}}^\mp \rangle = \langle \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{s}}^\pm, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0$ . Der Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{z}}$  lässt sich nun als Überlagerung einer geostrophischen Mode, zweier Schwerewellenmoden und der divergenten, unphysikalischen Mode darstellen (Mohebalhojeh & Dritschel, 2001; Smith & Waleffe, 2002; Achatz, 2007)

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\gamma} \hat{\mathbf{g}} + \hat{\sigma}^+ \hat{\mathbf{s}}^+ + \hat{\sigma}^- \hat{\mathbf{s}}^- + \hat{\epsilon} \hat{\mathbf{d}}, \quad (4.17)$$

wobei die Koeffizienten aus der Projektion des Zustandsvektors auf den jeweiligen Basisvektor mithilfe des Skalarproduktes (4.16) folgen, zum Beispiel

$$\hat{\gamma} = \langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{g}} \rangle. \quad (4.18)$$

Die zum Energieskalarprodukt gehörige Norm entspricht der Summe aus massenspezifischer kinetischer und verfügbarer potentieller Energie (vergleiche Anhang C.2).

$$\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle = \frac{1}{2} \left( \hat{u}\hat{u}^* + \hat{v}\hat{v}^* + \hat{w}\hat{w}^* + \frac{\hat{B}\hat{B}^*}{N^2} \right) = |\hat{\gamma}|^2 + |\hat{\sigma}^+|^2 + |\hat{\sigma}^-|^2 + |\hat{\epsilon}|^2. \quad (4.19)$$

Durch Summierung über alle Modenzahlen erhält man schließlich die Beiträge der vier Eigenmoden zur massenspezifischen Gesamtenergie (Mohebalhojeh & Dritschel, 2001; Smith & Waleffe, 2002; Achatz, 2007)

$$\hat{\mathfrak{E}}(\hat{\mathbf{g}}) = \sum_{n_x, n_y, n_z} |\hat{\gamma}[k_x(n_x), k_y(n_y), k_z(n_z)]|^2, \quad (4.20a)$$

$$\hat{\mathfrak{E}}(\hat{\mathbf{s}}^\pm) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \left| \hat{\sigma}^+[k_x(n_x), k_y(n_y), k_z(n_z)] \right|^2 + \left| \hat{\sigma}^-[k_x(n_x), k_y(n_y), k_z(n_z)] \right|^2, \quad (4.20b)$$

$$\hat{\mathfrak{E}}(\hat{\mathbf{d}}) = \sum_{n_x, n_y, n_z} |\hat{\epsilon}[k_x(n_x), k_y(n_y), k_z(n_z)]|^2. \quad (4.20c)$$

Um aus den Simulationsdaten den großskaligen Strömungsanteil zu erhalten, gebrauchen wir ein einfaches gleitendes Mittel. Jeder Gitterzelle mit azimuthalem, radialem und vertikalem Index  $i$ ,  $j$  und  $k$  wird dabei der gemittelte, großskalige Zustand

$$(\mathbf{z}_0)_{i,j,k} = \frac{1}{(2I+1)(2J+1)(2K+1)} \sum_{i'=-I}^I \sum_{j'=-J}^J \sum_{k'=-K}^K \mathbf{z}_{i',j',k'} \quad (4.21)$$

zugewiesen. Die Mittelung von  $\tilde{p}$  ist nicht notwendig. Die azimuthale, radiale und vertikale Ausdehnung des Mittelungsbereiches um die Gitterzelle im Zentrum in Indexeinheiten  $2I+1$ ,  $2J+1$  und  $2K+1$  wird ausreichend klein gewählt, damit die Krümmung der zylindrischen Geometrie vernachlässigt werden kann. Bei Gitterzellen, wo der Mittelungsbereich über die Berandung des Annulus hinausreicht, wird der überstehende Bereich gestutzt. Die Brunt-Väisälä-Frequenz wird folgendermaßen festgelegt

$$(N^2)_{i,j,k} = \frac{(B_0)_{i,j,k+1} - (B_0)_{i,j,k-1}}{2\Delta z}. \quad (4.22)$$

Der Mittelungsbereich um einer Gitterzelle ist zugleich auch der Bereich, innerhalb dessen eine diskrete Fourier-Analyse des kleinskaligen Anteils der Felder

$$(\mathbf{z}')_{i,j,k} = \mathbf{z}_{i,j,k} - (\mathbf{z}_0)_{i,j,k} \quad (4.23)$$

erfolgt, wobei Periodizität in allen drei Koordinaten angenommen wird. Um den sogenannten spektralen Leck-Effekt zu vermindern, wird der kleinskalige Zustand  $\mathbf{z}'$  vor der Fourier-Analyse zum Rand des Mittelungsbereichs hin allmählich auf Null gesetzt, indem man  $\mathbf{z}'$  mit einer Fensterfunktion  $\mathfrak{F}_{i',j',k'}$  multipliziert. Wir verwenden hier ein Tukey-Fenster (Harris, 1978)

$$\mathfrak{F}_{i',j',k'} = f_I(i') f_J(j') f_K(k'), \quad (4.24)$$

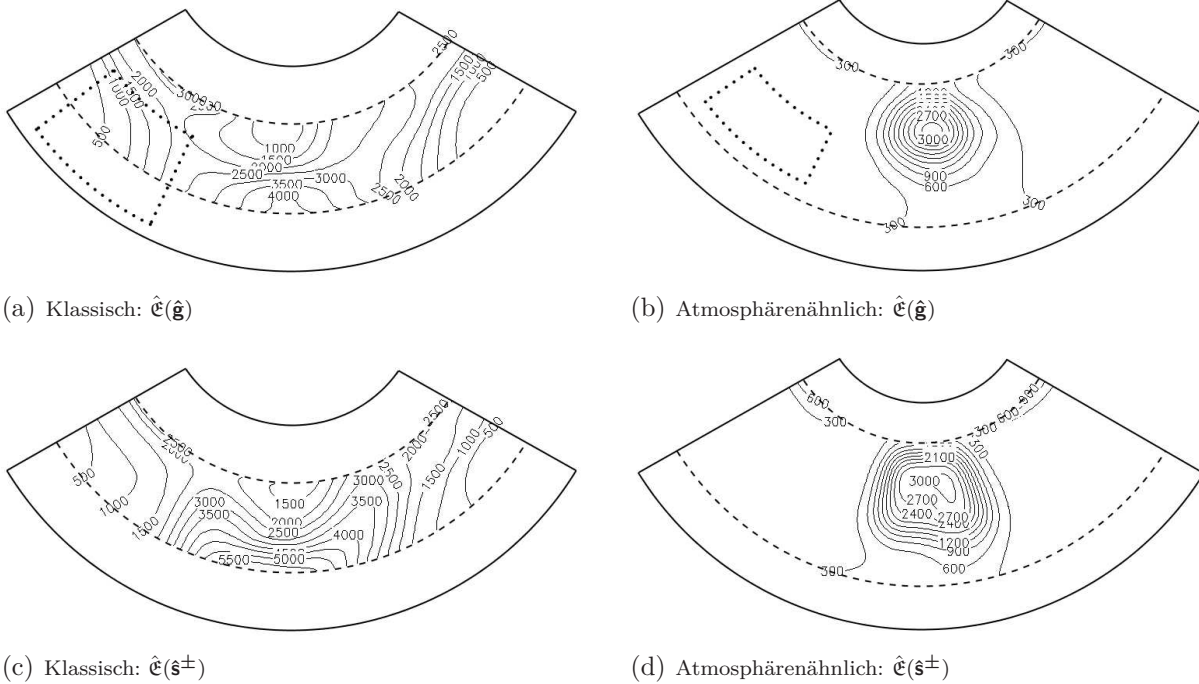
wobei

$$f_I(i') = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi(-i' - \beta I)}{(1 - \beta)I} \right] \right\}, & \text{falls } i' < -\beta I \\ 1, & \text{falls } -\beta I \leq i' \leq \beta I, \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi(i' - \beta I)}{(1 - \beta)I} \right] \right\}, & \text{falls } \beta I < i' \end{cases} \quad (4.25)$$

mit  $\beta = 3/4$ , und entsprechenden Definitionen für  $f_J(j')$  und  $f_K(k')$ . Die Fourier-Analyse liefert dann für jede Wellenzahlkombination  $(k_x, k_y, k_z)$  die Fourier-Transformierte  $\hat{\mathbf{z}}$ . Aus den Wellenzahlen sowie  $f$  und  $N$  werden anschließend die vier Basisvektoren  $\hat{\mathbf{g}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}^+$ ,  $\hat{\mathbf{s}}^-$  und  $\hat{\mathbf{d}}$  gemäß (4.12), (4.14) und (4.15) berechnet. Die Projektion von  $\hat{\mathbf{z}}$  auf die vier Basisvektoren mithilfe des Energieskalarproduktes (4.16) ergibt die Koeffizienten  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\sigma}^+$ ,  $\hat{\sigma}^-$  und  $\hat{\epsilon}$ , die schließlich über alle Wellenzahlen beziehungsweise Modenzahlen summiert werden, um die Energiebeiträge (4.20) zu ermitteln. Dieses Verfahren wird von Gitterzelle zu Gitterzelle wiederholt, sodass man eine räumliche Verteilung der Energiebeiträge erhält.

Abbildung 4.6 zeigt die Ergebnisse für beide Annuluskonfigurationen zu dem Zeitpunkt, von dem bereits Horizontalschnitte von Druck und horizontaler Geschwindigkeitsdivergenz in Abbildung 4.5 abgebildet sind. Als Abmessungen für den Mittelungsbereich wurden  $I = J = K = 25$  im Falle der klassischen Konfiguration und  $I = K = 20$ ,  $J = 30$  im Falle der atmosphärenähnlichen Konfiguration verwendet. In beiden Konfigurationen ist der Energiebeitrag der geostrophischen Mode  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{g}})$  von gleicher Größenordnung wie derjenige der Schwerewellenmoden  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{s}}^\pm)$ . Der Energiebeitrag der unphysikalischen, divergenten Mode  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{d}})$  ist ungefähr eine Größenordnung kleiner als die zuvor genannten Beiträge (nicht gezeigt). In der klassischen Konfiguration liegen die höchsten Werte des Energiebeitrags der geostrophischen Mode im Bereich des Strahlstroms, wo Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld verhältnismäßig stark variieren (siehe Abbildung 4.1). Auch die höchsten Werte von  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{s}}^\pm)$  liegen im Strahlstrombereich, in dem ebenfalls hohe Werte der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz beobachtet werden (siehe Abbildung 4.5a). In der atmosphärenähnlichen Konfiguration haben  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{g}})$  und  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{s}}^\pm)$  ihre Höchstwerte im Zentrum des Tiefdruckgebietes (vergleiche Abbildung 4.5b). Dies kann ebenfalls mit den dortigen stärkeren Variationen des Temperatur- und Geschwindigkeitsfeldes in Verbindung gebracht werden (siehe Abbildung 4.3). Auch in dieser Konfiguration fallen hohe Werte von  $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{s}}^\pm)$  mit dem Spiralmuster der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz zusammen (Abbildung 4.5b). Die Grenzschichtbereiche liegen außerhalb des untersuchten Bereiches, da in unserer numerischen Implementierung der Modenzerlegung der Mittelungsbereich, innerhalb dessen auch die Fourier-Analyse erfolgt, die Annulusberandung nicht überschreiten kann (vergleiche Abbildung 4.6a und 4.6b).

Bei der Deutung der Ergebnisse der Modenzerlegung ist eine gewisse Vorsicht geboten, da einige Elemente derselben willkürlich sind. So ist, statt eines Quadrates als Mittelungsbereich, eine große Zahl anderer Körper denkbar (zum Beispiel eine Kugel oder ein Ellipsoid). In diesem Zusammenhang überrascht es nicht, dass alle Energiebeiträge bei einer Vergrößerung des Mittelungsbereiches ebenfalls zunehmen. Allerdings haben Tests gezeigt, dass



**Abbildung 4.6:** Beiträge der verschiedenen linearen Eigenmoden zur Gesamtenergie im kleinskaligen Strömungsanteil, der definiert ist als die Differenz zwischen der simulierten Strömung (von der das Druckfeld und die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz in Abbildung 4.5 gezeigt sind) und dem großskaligen Strömungsanteil, der durch ein gleitendes Volumenmittel bestimmt wird. Abgebildet ist der Energiebeitrag der geostrophischen Moden in (a) und (b), und der Energiebeitrag der Schwerewellenmoden in (c) und (d), in willkürlichen Einheiten, für die klassische Konfiguration in (a) und (c), und für die atmosphärenähnliche Konfiguration in (b) und (d). Die gestrichelten Linien zeigen den Bereich des Annulus, der analysiert wurde und die gepunkteten Linien die ungefähre horizontale Ausdehnung des Mittelungsbereiches für das gleitende Volumenmittel, innerhalb dessen ebenfalls die Fourier-Analyse durchgeführt wurde.



das Verhältnis der einzelnen Energiebeiträge zur Gesamtenergie ( $\hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{g}}) + \hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{s}}^\pm) + \hat{\mathcal{E}}(\hat{\mathbf{d}})$ ) nur schwach von der Größe des Mittelungsbereiches abhängt. Demzufolge ist die Modenzerlegung eher für die Bestimmung des relativen Beitrags der geostrophischen Moden und der Schwerewellenmoden zur Gesamtenergie im kleinskaligen Strömungsanteil geeignet. Ferner ist zu beachten, dass die Näherungen bei der Linearisierung der Boussinesq-Gleichungen – hier sind insbesondere die Vernachlässigung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen des großskaligen Strömungsanteils und die Vernachlässigung der zylindrischen Geometrie zu nennen – in gewissem Umfange der Bequemlichkeit geschuldet sind, da andernfalls eine Modenzerlegung nur mit erheblichem Mehraufwand oder gar nicht möglich wäre. Deswegen ungeachtet betrachten wir die Ergebnisse dieses Abschnitts, neben der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz, als wichtigen Hinweis auf eine nicht unerhebliche Schwerewellenaktivität in der freien Flüssigkeit.

Die Zerlegung der Strömung in einen großskaligen und einen kleinskaligen Anteil mithilfe eines gleitenden Volumenmittels ist von einem weiteren gängigen Zerlegungsverfahren zur Identifizierung von Schwerewellen zu unterscheiden, bei dem diagnostische Beziehungen verwendet werden, um die Strömung in einen großskaligen Gleichgewichtsanteil und die Abweichung davon, den Ungleichgewichtsanteil, aufzuspalten (diese beiden Anteile werden auch balancierter und unbalancierter Anteil genannt). Vom Ungleichgewichtsanteil wird angenommen, dass er die Schwerewellen enthält (zum Beispiel Warn *et al.*, 1995; Zhang *et al.*, 2000; Snyder *et al.*, 2009; Wang & Zhang, 2010). Wir werden diese Art der Zerlegung des Strömungszustandes im nächsten Abschnitt genauer betrachten. Obwohl die in diesem Abschnitt vorgestellte Modenzerlegung nicht auf der weit verbreiteten Zerlegung in Gleichgewichts- und Ungleichgewichtsanteil beruht, mag sie dennoch zukünftig in Bezug auf eine Fragestellung von anhaltendem Interesse zum Einsatz kommen, nämlich der nach der Abhängigkeit der Energie im kleinskaligen Strömungsanteil von der Rossby-Zahl. Die Kenntnis dieser Abhängigkeit, so eine Eindeutige vorliegt, kann beispielsweise für verhältnismäßig einfache Parametrisierungen derjenigen spontan abgestrahlten Schwerewellen verwendet werden, die sich in numerischen Wettervorhersage- und Klimamodellen nicht auflösen lassen. In einem vereinfachten Modell spontaner Schwerewellenemission konnte mithilfe einer Exponentialasymptotik analytisch gezeigt werden, dass für  $Ro \ll 1$  die Amplitude der Schwerewellen, gemessen in Größenordnungen der Rossby-Zahl, exponentiell klein ist, genauer gesagt proportional zu  $Ro^{-1/2} e^{-\alpha/Ro}$  mit einer Konstanten  $\alpha > 0$  (Vanneste & Yavneh, 2004). Numerische Simulationen von Wirbeldipolen deuten hingegen auf ein Potenzgesetz der Form  $Ro^\beta$  hin, mit typischen Werten für den Exponenten von  $\beta \approx 4$  (Snyder *et al.*, 2007) oder  $\beta \approx 6$  (Wang *et al.*, 2009) im betrachteten Rossby-Zahl-Bereich. Zwischenzeitlich haben Williams *et al.* (2008) in Laboruntersuchungen an einem rotierenden Zweischichtenannulus einen linearen Zusammenhang zwischen der Amplitude des kleinskaligen Strömungsanteils und der Rossby-Zahl gefunden. Um dieser Fragestellung mithilfe des differentiell geheizten rotierenden Annulus nachzugehen, wäre es notwendig eine große Anzahl von Experimenten mit verschiedenen Annulusparametern durchzuführen, um einen Rossby-Zahl-Bereich ausreichender Größe abzudecken. Die thermische Rossby-Zahl (entweder (3.5) oder (3.100)) könnte als Bezugspunkt dienen, um geeignete Parameter zu finden, während die Rossby-Zahl  $Ro = U/(fL)$ , aus typischer Geschwindigkeits- und Längenskala der tatsächlichen Strömung, für den Vergleich mit den zuvor zitierten Arbeiten herangezogen würde. Allerdings würde die Modenzerlegung statt einer absoluten Beziehung zwischen der Energie im kleinskaligen Strömungsanteil

und der Rossby-Zahl, die relative Änderung der Energie mit der Rossby-Zahl liefern.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts und der beiden vorangegangenen Abschnitte 4.1 und 4.2 wurden in Borchert *et al.* (2014) veröffentlicht.

## 4.4 Der Mechanismus der Schwerewellenabstrahlung

Um Schwerewellen untersuchen zu können, ist es notwendig, sie auf irgendeine Weise von der übrigen Strömung zu trennen. Ein möglicher Ansatz wurde im vorigen Abschnitt vorgestellt. Hier möchten wir einen weiteren Ansatz betrachten, der eine eingehendere Untersuchung der Wechselwirkungen zwischen den Schwerewellen und der übrigen Strömung ermöglicht. Dabei interessiert uns insbesondere, ob und in welchem Umfang letztere Schwerewellen abstrahlt. Ausgangspunkt sind die Boussinesq-Gleichungen (3.28), (3.31), und (3.34), das heißt die Schichtung der Flüssigkeit wurde bereits abgesondert. Um die Schwerewellen greifbar zu machen, zerlegen wir die Zustandsgrößen in (zum Beispiel Lynch, 1989; Mohebalhojeh & Dritschel, 2000)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ B \\ \tilde{p} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ B \\ \tilde{p} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_g} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ B \\ \tilde{p} \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{z}_a} \quad (4.26)$$

(anders als in Abschnitt 3.4, beinhaltet  $\mathbf{z}$  hier auch den Druck  $\tilde{p}$ ). Der erste Anteil auf der rechten Seite ist der Gleichgewichtsanteil, auch balancierter Anteil oder Rossby-Anteil genannt und durch ein  $g$  indiziert. Der zweite Anteil ist der Ungleichgewichtsanteil, auch unbalancierter Anteil oder Lärmanteil<sup>1</sup> genannt und durch ein  $a$  indiziert. Der Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{z}_g$  erfüllt eine Gleichgewichtsbedingung, zum Beispiel das geostrophische oder quasigeostrophische Gleichgewicht und das hydrostatische Gleichgewicht.  $\mathbf{z}_g$  besteht im Allgemeinen aus der großskaligen Strömung und beinhaltet die baroklinen Wellen. Vom Ungleichgewichtsanteil  $\mathbf{z}_a$  wird angenommen, dass er die Schwerewellen enthält oder gar gänzlich aus diesen besteht. Es ist üblich, von den beiden Anteilen auf der rechten Seite von (4.26) den Gleichgewichtsanteil festzulegen, sodass der Ungleichgewichtsanteil aus  $\mathbf{z}_a = \mathbf{z} - \mathbf{z}_g$  folgt (zum Beispiel Mohebalhojeh & Dritschel, 2000).

Bevor wir diese Zerlegung genauer betrachten, möchten wir einige allgemeine Worte zu Zerlegungsansätzen verlieren (worunter zum Beispiel auch das Verfahren der Linearisierung fällt, das bereits an mehreren Stellen in dieser Arbeit zum Einsatz gekommen ist). Dazu führen wir folgende Begriffe ein: Die Boussinesq-Gleichungen, die in diesem Falle die Entwicklung des Zustandes  $\mathbf{z}$  beschreiben, bezeichnen wir als Ursprungsmodell. Das Modell, welches in diesem Falle die Entwicklung der Zustände  $\mathbf{z}_g$  und  $\mathbf{z}_a$  getrennt beschreibt, bezeichnen wir als Ablegermodell.  $\mathbf{z}_g$  und  $\mathbf{z}_a$  selbst nennen wir dynamische Elemente. Für

<sup>1</sup> In der älteren Literatur werden die Schwerewellen und Schallwellen (sowie andere verhältnismäßig schnelle Prozesse) unter dem Begriff „meteorologischer Lärm“ zusammengefasst, während die Vorgänge auf der synoptischen Skala (barokline Wellen usw.) als „Rossby-Prozesse“ bezeichnet werden (Hinkelmann, 1951a, 1966; Herbert, 1980).

das Ablegermodell müssen wir entweder beide Größen,  $\mathbf{z}_g$  und  $\mathbf{z}_a$ , festlegen oder, falls  $\mathbf{z}$  bekannt ist, eine von beiden. Für gewöhnlich wird  $\mathbf{z}_g$  festgelegt. So können wir beispielsweise vereinbaren, dass  $\mathbf{z}_g$  das geostrophische und hydrostatische Gleichgewicht erfüllt (zum Beispiel Vallis, 2006)

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g, \quad (4.27a)$$

$$w_g = 0, \quad (4.27b)$$

$$B_g = \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z}, \quad (4.27c)$$

nebst einer Bedingung, die  $\tilde{p}_g$  festlegt. Die Bedingungen (4.27) sind dadurch zustande gekommen, dass wir im Gleichungssystem des Ursprungsmodells die materiellen Ableitungen  $d\mathbf{v}/dt$  und  $dB/dt$  als klein gegenüber den anderen Termen betrachtet und vernachlässigt haben. Mathematisch bedeutet dies jedoch, dass wir die Zwangsbedingungen

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv 0, \quad (4.28a)$$

$$\frac{dB}{dt} \equiv 0 \quad (4.28b)$$

auf die Ursprungsgleichungen angewendet haben. Dieses einfache Beispiel soll Folgendes verdeutlichen: Die Bedingungen die zur Definition eines oder mehrerer dynamischer Elemente des Ablegermodells eingeführt werden, können nicht allein aus Äquivalenzumformungen der ursprünglichen Gleichungen gewonnen werden. An irgendeinem Punkt müssen ursprungsmodellfremde (Zwangs)bedingungen, zum Beispiel (4.28), ins Spiel kommen. Dies bedeutet, zugespitzt formuliert, dass die dynamischen Elemente „Neuschöpfungen“ innerhalb des Ablegermodells sind. Innerhalb des Ursprungsmodells Bezug auf die dynamischen Elemente zu nehmen, ist genau genommen inkonsistent, da das Ursprungsmodell nicht zwischen diesen unterscheiden kann, es „sieht“ allein die Überlagerung aller dynamischen Elemente. So sind auch Schwerewellen und barokline Wellen oder Grundzustand und Störung in einem linearisierten Modell dynamische Elemente, die in den Boussinesq-Gleichungen (3.28), (3.31), und (3.34) für sich genommen nicht existieren. Wenn von Gleichgewichts- und Ungleichgewichtsanteil die Rede ist beziehungsweise, mehr oder minder gleichbedeutend damit, von baroklinen Wellen und Schwerewellen, muss es demzufolge (häufig ungenannte) Definitionen im Hintergrund geben, mit denen diese dynamischen Elemente „ins Leben gerufen wurden“. Es folgt unmittelbar, dass von einer Wechselwirkung zwischen dynamischen Elementen (zum Beispiel einem Antrieb von  $\mathbf{z}_a$  durch  $\mathbf{z}_g$ ) erst nach der Definition derselben gesprochen werden kann. Die spontane Schwerewellenabstrahlung existiert daher erst im Ablegermodell, nicht aber im Ursprungsmodell, das nur  $\mathbf{z}$  kennt. Dies ist nicht als Kritik an den Ablegermodellen zu verstehen, denn die sinnvolle Neuschöpfung dynamischer Elemente kann wertvolle Erkenntnisse über die Strömungsdynamik erbringen. Ohnedies beruhen wohl alle Modelle auf der Einführung neuer dynamischer Elemente, auch jenes Modell, welches wir hier als Ursprungsmodell bezeichnet haben. Vielmehr soll mit diesen Ausführungen vermieden werden, dass im Folgenden der falsche Eindruck entsteht, dass balancierter und unbalancierter Anteil beziehungsweise

barokline Wellen und Schwerewellen ureigene, voneinander getrennte Elemente des Ursprungsmodells wären und eine der Hauptaufgaben der Theorie darin bestünde, die eine, richtige Zerlegung (4.26) zu finden, welche eine eindeutige Identifizierung dieser Elemente ermöglicht. Daran anknüpfend, sei zur Definition der dynamischen Elemente Folgendes angemerkt: Das Konzept der Definition beinhaltet an sich keine Wertung. Liegen zwei verschiedene Definitionen vor, die eine definiert Ablegermodell A, die andere Ablegermodell B, so kann ausschließlich anhand der Definitionen nicht behauptet werden, dass beispielsweise Modell B besser sei als Modell A. Ist eine solche Bewertung gewünscht, so muss zusätzlich ein Maß vereinbart werden, mit dessen Hilfe die Güte unterschiedlicher Ablegermodelle gemessen werden kann. Eine Möglichkeit besteht darin, sich an der in Abschnitt 3.6 vorgestellten Skalenasymptotik zu orientieren, wonach der Unterschied zwischen dem ursprünglichen Modell und dem durch Vernachlässigung von Termen der Größenordnung  $\mathcal{O}(Ro^n)$  erhaltenen Gleichgewichtsmodell eben von dieser Größenordnung  $\mathcal{O}(Ro^n)$  sein sollte. Ein darauf aufbauendes Maß mag zum Beispiel lauten

$$\frac{\|\mathbf{z}_a\|}{\|\mathbf{z}\|} \sim Ro^n, \quad (4.29)$$

wobei  $\|\cdot\|$  eine geeignete Norm ist, beispielsweise die Wurzel des Volumenmittels von kinetischer und verfügbarer potentieller Energie (vergleiche Anhang C.2). (4.29) meint dann, dass die Größenordnung des Verhältnisses von  $\|\mathbf{z}_a\|$  zu  $\|\mathbf{z}\|$  in Potenzen der Rossby-Zahl der Strömung gemessen wird ( $Ro < 1$  vorausgesetzt). Nun kann vereinbart werden, dass von zwei Ablegermodellen jenes als das bessere bezeichnet wird, dass gemäß (4.29) den größeren Exponenten  $n$  erzielt, wobei  $n$  als die Genauigkeitsordnung des Modells betrachtet werden kann. Demnach wird ein Ablegermodell als umso besser betrachtet, je größer der Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{z}_g$  an  $\mathbf{z}$  ist. Vergleiche Mohebalhojeh & Dritschel (2000); Dritschel & Viúdez (2003); Dritschel & McKiver (2015).

In den vergangenen Jahrzehnten wurden erhebliche Fortschritte in der Theorie der spontanen Schwerewellenabstrahlung erzielt. Viele ausgeklügelte Modelle nutzen das Werkzeug der Skalenasymptotik um  $\mathbf{z}_g$  zu definieren und darauf aufbauend zu untersuchen, wie  $\mathbf{z}_a$  durch  $\mathbf{z}_g$  angetrieben wird. Ein Beispiel ist die Übertragung der Lighthill'schen Theorie der Schallabstrahlung durch eine turbulente Strömung (Lighthill, 1952) auf Schwerewellen in einem Flachwassermodell (Ford, 1994a,b,c; Ford *et al.*, 2000). Der Mechanismus der spontanen Schwerewellenemission in einem geschichteten Fluid wurde von Medvedev & Gavrilov (1995) mithilfe einer skalenasymptotischen Entwicklung der Gleichungen nach der Rossby-Zahl unter Berücksichtigung multipler Zeitskalen untersucht. Allerdings hat die strenge Skalenasymptotik bis zur höchsten betrachteten Entwicklungsordnung keinen Antrieb des Ungleichgewichtsanteils durch den Gleichgewichtsanteil gezeigt und gewisse Vorannahmen für die Skalenasymptotik mussten aufgegeben werden, um einen Antrieb zu erhalten (Plougonven & Zhang, 2007; Plougonven *et al.*, 2009; Snyder *et al.*, 2009). Plougonven & Zhang (2007) haben im Rahmen theoretischer Betrachtungen der Schwerewellenanregung eine relative Aufspaltung in  $\mathbf{z}_g$  und  $\mathbf{z}_a$  verwendet, indem sie die Größenordnung der typischen Skalen von  $\mathbf{z}_a$  relativ zur Größenordnung der typischen Skalen von  $\mathbf{z}_g$  abgeschätzt haben, ohne dabei den Absolutbetrag der Skalen festzulegen. Sie haben Gleichungen für die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz, die Vertikalkomponente der relativen Vorticity und die potentielle Temperatur des Ungleichgewichtsanteils abgeleitet. Im Falle der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz, besteht der Antrieb beispielsweise

aus dem sogenannten Residuum der nichtlinearen Balancegleichung (englisch: *residual of the nonlinear balance equation*)  $\Delta_{\text{NBE}}$ , eine Größe, die sich bereits in vorangegangenen Arbeiten, zum Beispiel Zhang *et al.* (2000), als hilfreicher Indikator für den schwerewellenenthaltenden unbalancierten Strömungsanteil erwiesen hat. Snyder *et al.* (2009) und Wang & Zhang (2010) haben die Grundgleichungen in Bezug auf  $\mathbf{z}_a$  um den Zustand  $\mathbf{z}_g$  linearisiert. In der erstgenannten Arbeit wurde  $\mathbf{z}_g$  durch das quasigeostrophische Gleichgewicht definiert, in der zweiten Arbeit durch die nichtlineare Balancegleichung. In deren Ansatz wird  $\mathbf{z}_a$  durch die sogenannte verminderte Tendenz (englisch: *residual tendency*) von  $\mathbf{z}_g$  angetrieben. In der Simulation von Wirbeldipolen hat sich eine gute Übereinstimmung zwischen der Lösung des linearisierten Modells und den Schwerewellen im vollständig nichtlinearen Modell gezeigt. Wang & Zhang (2010) haben darüber hinaus in ihrem betrachteten Testfall gefunden, dass der Antrieb der Vertikalkomponente der relativen Vorticity des Ungleichgewichtsanteils am stärksten zu den spontan abgestrahlten Schwerewellen beiträgt. Für eine Zusammenschau des gegenwärtigen Wissensstandes auf diesem Gebiet sei auf Vanneste (2013) und Plougonven & Zhang (2014) verwiesen. Wir stellen im Folgenden unseren Ansatz für die Untersuchung der spontanen Schwerewellenabstrahlung vor und beginnen mit der Beschreibung des Gleichgewichtsanteils.

#### 4.4.1 Der Gleichgewichtsanteil

Untersuchungen zum Gleichgewicht atmosphärischer Strömungen sind lange vor dem aufkeimenden Interesse an spontaner Schwerewellenabstrahlung in den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts (zum Beispiel O'Sullivan & Dunkerton, 1995) angestellt worden und haben ihren Anfang wohl in der Erkenntnis der synoptischen Wetterkunde, dass zwischen dem Druckfeld und der horizontalen Geschwindigkeit in erster Näherung das geostrophische Gleichgewicht und zwischen Druckfeld und Dichte in guter Näherung das hydrostatische Gleichgewicht besteht. Diese beiden Gleichgewichte sind für die Wettervorhersage jedoch unbrauchbar, solange nicht bekannt ist, wie sich eines der an den Gleichgewichten beteiligten Felder im Laufe der Zeit ändert. Und so haben viele Meteorologen in den ersten Jahrzehnten des zwanzigsten Jahrhunderts daran gearbeitet, Gleichgewichte höherer Genauigkeit zwischen den Zustandsgrößen auszumachen, die zugleich Aussagen über die zeitliche Entwicklung des Gleichgewichtszustandes machen. In diesem Zusammenhang lassen sich zum Beispiel die Arbeiten von Ertel (1936, 1940b, 1941a,b, 1944), Philipps (1939b,a), Rossby & Mitarbeiter (1939), Charney (1948); Charney & Eliassen (1949); Charney *et al.* (1950) und Hinkelmann (1962, 1966), als ein sehr kleiner Ausschnitt der umfangreichen einschlägigen Literatur nennen. Die heutige Auffassung vom Gleichgewichtsanteil der Strömung hat wohl als einer der ersten Kleinschmidt (1950) entwickelt. Er hatte bei der synoptischen Analyse eines Wetterereignisses bemerkt, dass ein großer Luftmassenkörper in der oberen Troposphäre einen erheblichen Einfluss auf das Wettergeschehen in der mittleren und unteren Troposphäre ausübte, indem er beispielsweise für die starke Belebung eines Tiefdruckgebietes sorgte. Was diesen Luftmassenkörper von der Umgebungsluft unterschied, waren erhöhte Werte der Ertel'schen potentiellen Vorticity, die bei Abwesenheit dissipativer Prozesse eine materielle Erhaltungsgröße ist (Ertel, 1942). Mithilfe eines analytischen Modells des Luftmassenkörpers konnte Kleinschmidt zeigen, dass sich aus der potentiellen Vorticity bei gleichzeitiger Annahme des Gradientwind-

gleichgewichts und des hydrostatischen Gleichgewichts alle anderen synoptischen Felder (Horizontalgeschwindigkeit, potentielle Temperatur usw.) eindeutig berechnen lassen. Er hat diesen neuen Ansatz in umfassender Weise untersucht und auf Wetterereignisse angewendet (Kleinschmidt, 1950, 1951, 1955). Kleinschmidts Konzept entspricht im Grunde schon der heutigen Vorstellung von einer Gleichgewichtsströmung. Danach gibt es eine skalare Zustandsgröße, aus der sich alle anderen Zustandsgrößen der Gleichgewichtsströmung mithilfe diagnostischer, im Allgemeinen nichtlokaler Beziehungen berechnen lassen. Diese skalare Größe nennen wir hier Leitgröße. Die diagnostischen Beziehungen sind nicht-lokal, weil sie sich prinzipiell in äquivalente Integralgleichungen umformulieren lassen, die deutliche machen, dass jeder Ort im Fluidvolumen das Geschehen an jedem anderen Ort instantan beeinflusst, wenn auch in irgendeiner Weise mit dem Kehrwert des Abstandes gewichtet (die Poisson-Gleichung des Drucks ist ein Beispiel für eine nichtlokale diagnostische Beziehung, wie ihre Integralform (zum Beispiel Nolting, 2004) verdeutlicht). Wie schon Kleinschmidt, betrachtet man üblicherweise die Ertel'sche potentielle Vorticity als allgemeine Leitgröße. Verschiedene Modelle der Gleichgewichtsströmung unterscheiden sich meist darin, ob und wie sie die potentielle Vorticity nähern und welche diagnostischen Beziehungen verwendet werden, um alle anderen Zustandsgrößen aus der Leitgröße zu bestimmen. Im Unterschied zur vollständigen Strömung besitzt die Gleichgewichtsströmung im Grunde nur noch einen Freiheitsgrad, die zeitliche Entwicklung des Feldes der Leitgröße. Linearisiert man das Gleichungssystem der Gleichgewichtsströmung, so findet man nur noch eine Mode, nämlich diejenige, die in Abschnitt 4.3 als geostrophische Mode bezeichnet wurde, wenn auch, je nach Gleichgewichtsmodell, in mehr oder minder modifizierter Form. Das Auftreten von Schwerewellenmoden ist in der Gleichgewichtsdynamik nicht mehr möglich. Trotz dieser Einschränkung ist die Übereinstimmung zwischen Gleichgewichtsströmung und vollständiger Strömung häufig erstaunlich gut (zum Beispiel Hoskins *et al.*, 1985; Warn *et al.*, 1995; McIntyre, 2014a,b). Bis zu einem gewissen Grade lassen sich Parallelen zur Elektrostatik ziehen: In einem Raumgebiet befinden sich frei bewegliche Ladungsträger und erzeugen ein elektrisches Feld, welches den umgebenden Raum ausfüllt. Das elektrische Feld wiederum übt eine Kraft auf die Ladungsträger aus und bestimmt, wie sich die Ladungsverteilung ändert. Die potentielle Vorticity beziehungsweise eine Anomalie derselben (eine lokale Abweichung vom Umgebungswert) entspricht hierbei der Ladung. Ähnlich wie von der Ladung das elektrische Feld ausgeht, erzeugt die potentielle Vorticity ein Wirbelfeld, und zwar nicht nur an Ort und Stelle, sondern in der gesamten Umgebung. Das Wirbelfeld wiederum bewirkt eine Verlagerung der potentiellen Vorticity. Aufgrund der diagnostischen, nichtlokalen Natur der Gleichungen die innerhalb der Gleichgewichtsdynamik zur Berechnung aller Zustandsgrößen aus der Leitgröße verwendet werden, reagiert das Wirbelfeld an jedem Ort ohne Zeitverzögerung auf die Verlagerung auch noch so weit entfernter potentieller Vorticity. Das heißt Änderungen beziehungsweise Störungen an einem Ort, die sich im vollständigen Ursprungsmodell zwar verhältnismäßig rasch, aber dennoch mit endlicher Geschwindigkeit im Raum ausbreiten, zum Beispiel in Form von Schwerewellen, erhalten im Gleichgewichtsmodell gewissermaßen eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit (daher die Parallele zur Elektrostatik und nicht zur Elektrodynamik mit ihrer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Änderungen beziehungsweise Störungen) (zum Beispiel Ertel, 1940b; Hinkelmann, 1962, 1966; Hoskins *et al.*, 1985; Herbert, 2007; McIntyre, 2014b).

Wir möchten uns nun einem Verfahren zur Entwicklung von Gleichgewichtsmodellen zu-

---

wenden, dass für unsere Zwecke besonders geeignet erscheint. Nehmen wir als Vergleich die in Abschnitt 3.6 vorgestellte Skalenasymptotik als ein mögliches Werkzeug zur Konstruktion von Gleichgewichtsmodellen. Durch ihre Anwendung wird das Ursprungsmodell systematisch gestutzt, bis ein Gleichgewichtsmodell gewünschter Ordnung übrig bleibt. Ausgangspunkt ist dabei die Abschätzung der typischen Skalen der Gleichgewichtsströmung, für die man sich interessiert. Die Größenordnung von Termen gemessen in Potenzen der Rossby-Zahl (oder einer anderen Kennzahl) ist dabei das einzige Unterscheidungsmerkmal in der Skalenasymptotik. Terme derselben Größenordnung sind vom Standpunkt der Skalenasymptotik gleichwertig. Werden nun Terme ab einer bestimmten Größenordnung vernachlässigt, so lässt sich aufgrund dieser Gleichwertigkeit nicht ohne Weiteres sagen, welche vernachlässigten Terme für die Filterung der Schwerewellen verantwortlich sind. Aus diesem Grunde greifen wir auf ein Verfahren zurück, in dem die Filterung der Schwerewellen den Ausgangspunkt für die Entwicklung des Gleichgewichtsmodells bildet. Dieses Verfahren wurde von Hinkelmann (1962, 1966) entwickelt. Bereits 1951a hatte er sich mit der Problematik der Schwerewellen in einem idealisierten Flachwassermodell auseinandergesetzt. Die Schwierigkeiten, die Schwerewellen in der numerischen Wettervorhersage aufgrund ihrer verhältnismäßig großen Phasengeschwindigkeit und der damit verbundenen Forderung nach einem kleinen Zeitschritt verursachen, waren ein Hauptbeweggrund für seine Untersuchungen. Es erschien beim damaligen Stand der Messtechnik und Numerik am sinnvollsten, die Schwerewellen, mit ihren, im Vergleich zum Gleichgewichtsanteil, relativ kleinen Amplituden soweit möglich aus den Modellen zu eliminieren. Dafür wurden zwei mögliche Wege vorgeschlagen: Das erste Verfahren lässt das Gleichungssystem unangetastet, sodass Schwerewellen prinzipiell in Erscheinung treten können. Die Anfangsfelder, hingegen, werden durch diagnostische Beziehungen so adjustiert, dass das Schwerewellensignal aus ihnen weitestgehende eliminiert wird. In der numerischen Integration solcherart schwerewellengefilterter Anfangsfelder bereiten Schwerewellen, zumindest während einer gewissen Integrationszeitspanne, keine größeren Schwierigkeiten mehr. In der zweiten Methode ist es das Gleichungssystem, welches dergestalt adjustiert wird, dass Schwerewellen nicht mehr Teil der Lösung sein können, selbst wenn sie in den Anfangsfeldern vorhanden sind. Dies geschieht dadurch, dass prognostische Gleichungen durch diagnostische Gleichungen ersetzt werden. Beide Methoden sind eng verwandt, denn die diagnostischen Beziehungen, die im ersten Verfahren einmalig zum Anfangszeitpunkt der Integration zum Einsatz kommen, werden im zweiten Verfahren gewissermaßen zu jedem Zeitpunkt der Integration angewendet.

Ausgangspunkt für beide Verfahren sind sogenannte Filterbedingungen (Hinkelmann, 1962, 1966; Herbert, 1971, 1980, 2012a; Lynch, 1989)

$$\frac{d^m \psi}{dt^m} \equiv 0, \quad (4.30a)$$

$$\frac{d^n \varphi}{dt^n} \equiv 0, \quad (4.30b)$$

mit  $m, n \in \mathbb{N}$ . Die beiden skalaren Größen  $\psi$  und  $\varphi$  können von  $\mathbf{v}$  und  $B$  selbst sowie Ortsableitungen derselben beliebiger Ordnung abhängen, der Einfachheit halber jedoch nicht vom Druck  $\tilde{p}$ . (4.30) besagt, dass durch das Nullsetzen zweier materieller Ableitungen geeigneter skalarer Zustandsgrößen Schwerewellen eliminiert werden.<sup>2</sup> In gewisser Weise

---

<sup>2</sup> Als Alternative zur materiellen Ableitung in (4.30) schlägt Hinkelmann (1962) den Bilanzoperator

verschließen die beiden Filterbedingungen zwei Freiheitsgrade des Systems, die für die Schwerewellendynamik unerlässlich sind.  $\psi$  und  $\varphi$  sollten zwei Größen sein, von denen vermutet werden kann, dass sich die kleinskaligen, verhältnismäßig schnellen Prozesse gut in ihnen abbilden. Als ein Beispiel seien zwei Filterbedingungen genannte, die in der Literatur vornehmlich untersucht wurden (Hinkelmann, 1962, 1966; Herbert, 1980, 2012a; Lynch, 1989)

$$\frac{d^m \delta}{dt^m} \equiv 0, \quad (4.31a)$$

$$\frac{d^{m+1} \delta}{dt^{m+1}} \equiv 0 \quad (4.31b)$$

(mit  $\psi = \varphi = \delta = \nabla_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{u}$  und  $n = m + 1$ ). Wir hatten die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz ja bereits in Abschnitt 4.2 als nützlichen Schwerewellenindikator kennengelernt. Da sich die Filterbedingungen auf den (durch sie definierten) Ungleichgewichtsanteil der Strömung beziehen, sind sie selbst für die praktische Schwerewellenfilterung unbrauchbar. Sie müssen zunächst in äquivalente Gleichgewichtsbedingungen übersetzt werden, die für den Gleichgewichtsanteil der Strömung gelten. Zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{d^m \psi}{dt^m} &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[ \frac{d}{dt} \psi(\mathbf{v}, B) \right] = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left[ \mathfrak{G}_1 \left( \mathbf{v}, B, \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \frac{dB}{dt} \right) \right] \\ &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \mathfrak{G}_1(\mathbf{v}, B, \tilde{p}) = \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} \left[ \frac{d}{dt} \mathfrak{G}_1(\mathbf{v}, B, \tilde{p}) \right] \\ &= \dots = \mathfrak{G}_m(\mathbf{v}, B, \tilde{p}) \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dabei ist im dritten Schritt die Impuls- und Auftriebsgleichung (3.28) und (3.34) zu verwenden, um die materiellen Ableitungen  $d\mathbf{v}/dt$  und  $dB/dt$  zu eliminieren. Die materielle Ableitung des Drucks  $d\tilde{p}/dt$  kann mithilfe der Poisson-Gleichung (2.46) durch  $d\mathbf{v}/dt$  und  $dB/dt$  ausgedrückt werden. Entsprechend lässt sich (4.30b) in eine weitere Gleichgewichtsbedingung übersetzen

$$\mathfrak{H}_n(\mathbf{v}, B, \tilde{p}) \equiv 0. \quad (4.33)$$

(4.32) und (4.33) bilden die diagnostischen Beziehungen, welche die Gleichgewichtsströmung definitionsgemäß zu erfüllen hat, das heißt

$$\mathfrak{G}_m(\mathbf{v}_g, B_g, \tilde{p}_g) \equiv 0, \quad (4.34a)$$

$$\mathfrak{H}_n(\mathbf{v}_g, B_g, \tilde{p}_g) \equiv 0. \quad (4.34b)$$

Die Beziehungen (4.34) sind im Allgemeinen nichtlokal, da sie Ortsableitungen und infolge der schallfilternden Poisson-Gleichung des Drucks ebenfalls Raumintegrale enthalten. Ihre schwerewellenfilternde Wirkung lässt sich besonders gut in den linearisierten Boussinesq-Gleichungen veranschaulichen. Siehe dazu Anhang C.3. Der letzte Baustein des Modells

---

$\partial(\cdot)/\partial t + \nabla \cdot [\mathbf{v}(\cdot)]$  vor (siehe (2.10)). Aufgrund der Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  besteht jedoch in den Boussinesq-Gleichungen kein Unterschied zwischen dem Bilanzoperator und der materiellen Ableitung.



ist die Festlegung der Leitgröße  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{v}, B)$ . Für sie sollte eine skalare Größe gewählt werden, von der angenommen werden kann, dass sich die großskaligen, verhältnismäßig langsamen Prozesse (zum Beispiel die baroklinen Wellen) gut in ihr widerspiegeln. Die Ertel'sche potentielle Vorticity wurde bereits als möglicher Anwärter für  $\Lambda$  genannt. Auch die Vertikalkomponente der relativen Vorticity  $\zeta = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \times \mathbf{u})$  dürfte geeignet sein (Herbert, 2012a). Von der Leitgröße wird nun vereinbarungsgemäß angenommen, dass sich nur der Gleichgewichtsanteil in ihr abbildet

$$\Lambda = \Lambda(\mathbf{v}, B) \equiv \Lambda(\mathbf{v}_g, B_g) \quad (4.35a)$$

$$\Leftrightarrow \Lambda(\mathbf{v}_a, B_a) \equiv 0. \quad (4.35b)$$

$\Lambda$  ist die einzige Größe, die sich frei entwickeln darf, gemäß der Gleichung, die ihre Entwicklung auch in den ursprünglichen Boussinesq-Gleichungen beschrieb. Wir fassen das Hinkelmann'sche schwerewellengefilterte Modell noch einmal zusammen

$$\frac{d\Lambda}{dt} = \mathfrak{L}(\mathbf{v}_g, B_g, \tilde{p}_g), \quad (4.36a)$$

$$\mathfrak{G}_m(\mathbf{v}_g, B_g, \tilde{p}_g) \equiv 0, \quad (4.36b)$$

$$\mathfrak{H}_n(\mathbf{v}_g, B_g, \tilde{p}_g) \equiv 0, \quad (4.36c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_g = 0, \quad (4.36d)$$

wobei wir mit dem Index  $g$  verdeutlichen, dass (4.36) den Gleichgewichtsanteil beschreibt.  $\Lambda$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $m$  und  $n$  sind die freien Parameter des Modells. Als einzig verbliebener Freiheitsgrad in (4.36) beschreibt  $\Lambda$  die zeitliche Entwicklung der Gleichgewichtsströmung gemäß (4.36a). Aus  $\Lambda$  wiederum können, zusammen mit den diagnostischen Beziehungen (4.36b), (4.36c) und (4.36d)  $\mathbf{v}_g$ ,  $B_g$  und  $\tilde{p}_g$ , zu jedem Zeitpunkt berechnet werden. Dies ist notwendig, da diese Größen im Allgemeinen für die Berechnung der rechten Seite von (4.36a) benötigt werden und  $\mathbf{v}_g$  darüber hinaus für die Euler'sche Entwicklung der materiellen Ableitung (vorausgesetzt die vollständige Strömung besteht nur aus dem Gleichgewichtsanteil, ansonsten würde auch der Gleichgewichtsanteil genau genommen mit  $\mathbf{v}_g + \mathbf{v}_a$  advehiert). In den linearisierten Boussinesq-Gleichungen zeigt sich, dass die Schwerewellenfilterung im Allgemeinen umso besser ist, je größer  $m$  und  $n$  gewählt werden (siehe Anhang C.3). Dies trifft auf das nichtlineare Modell (4.36) nur bedingt zu. Es ist vielmehr ein asymptotisches Verhalten zu erwarten, wonach die Güte des Modells bis zu den Ordnungen  $m = m_{\text{krit}}$  und  $n = n_{\text{krit}}$  zunimmt und für  $m > m_{\text{krit}}$  und  $n > n_{\text{krit}}$  wieder abnimmt (in Bezug auf ein vereinbartes Gütemaß wie (4.29)) (zum Beispiel Warn *et al.*, 1995; Mohebalhojeh & Dritschel, 2000). Die Wahl großer Werte für  $m$  und  $n$  wird ohnedies durch Folgendes erschwert: Je größer  $m$  und  $n$ , desto größer ist üblicherweise auch die höchste Ordnung der Ortsableitungen, die in (4.36b) und (4.36c) vorkommt. Dies dürfte die Formulierung geeigneter Randbedingungen zur Lösung der beiden diagnostischen Beziehungen erschweren (Herbert, 1971, 1980).

Wie eingangs erwähnt, lässt sich (4.36) auf zweierlei Weise verwenden. Einmal kann zum Zeitpunkt  $t = t_0$  aus den Anfangsfeldern  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{v}, B)$  berechnet werden. Daraus wiederum lassen sich mittels  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{v}_g, B_g)$  sowie (4.36b), (4.36c) und (4.36d)  $\mathbf{v}_g$ ,  $B_g$  und  $\tilde{p}_g$  der Gleichgewichtsströmung ermitteln. Wie sich die Gleichgewichtsbedingungen (4.36b)

und (4.36c) mit der Kontinuitätsgleichung (4.36d), die in den ursprünglichen Boussinesq-Gleichungen durch den Druck  $\tilde{p}$  an die Impulsgleichung vermittelt wird, in Einklang bringen lassen, muss wohl von Fall zu Fall untersucht werden (siehe dazu auch die abschließenden Bemerkungen in Anhang C.3). Die so gefilterten Anfangsbedingungen werden nun mit den ursprünglichen Boussinesq-Gleichungen integriert, in der Hoffnung, dass störende Schwerewellen dann eine gewisse Zeitlang nur in handhabbarem Umfange in Erscheinung treten. Andererseits können diese Anfangsbedingungen auch mit dem gefilterten Gleichungssystem (4.36) integriert werden, in dem die Ausbreitung von Schwerewellen dynamisch unmöglich ist. Diese zweite Variante hat den Vorteil, dass größere Zeitschritte verwendet werden können. Allerdings wird dieser Vorteil zumindest teilweise dadurch geschmälert, dass die numerische Lösung von (4.36) im Allgemeinen erheblich aufwendiger ist als die Lösung der vollständigen Boussinesq-Gleichungen (Hinkelmann, 1966; Herbert, 1980).

Das Hinkelmann'sche Filterverfahren ist auch in jüngerer Zeit im Zusammenhang mit Flachwassermodellen untersucht worden (zum Beispiel McIntyre & Norton, 2000; Mohebalhojeh & Dritschel, 2000, 2001; Mohebalhojeh & McIntyre, 2007a,b). In diesen Arbeiten wurde jedoch die materielle Ableitung in den Filterbedingungen (4.30) durch die partielle Zeitableitung,  $\partial/\partial t$ , ersetzt. Dies erleichtert die Bestimmung der Gleichgewichtsbedingungen (4.32), da die partielle Zeitableitung, im Unterschied zur materiellen Ableitung, mit Ortsableitungen kommutiert. Ob dieser ortsfeste oder der von Hinkelmann ursprünglich eingeführte teilchenfeste Blickwinkel (4.30) bessere Ergebnisse erzielt, sei dahingestellt. Sollen jedoch globale Erhaltungsgrößen wie die Gesamtenergie auch im gefilterten Modell (4.36) die nämliche Eigenschaft bewahren, so ist dies möglicherweise mit teilchenfesten Filterbedingungen einfacher zu bewerkstelligen als mit den ortsfesten (vergleiche Lynch, 1989).<sup>3</sup> Unabhängig davon konnte in den zitierten Arbeiten eine gute Übereinstimmung zwischen dem durch die Filterbedingungen bestimmten Gleichgewichtsanteil und der vollständigen Strömung beobachtet werden. Weiterhin lassen sich auch gewisse Parallelen zwischen dem Hinkelmann'schen Modell und der nichtlinearen Normalmodeninitialisierung von Baer (1977); Baer & Tribbia (1977); Machenhauer (1977); Tribbia (1984) ausmachen, die zur Schwerewellenfilterung von Anfangsfeldern in der numerischen Wettervorhersage genutzt wird. Nur am Rande sei noch erwähnt, dass Filterbedingungen der Gestalt (4.30) ebenfalls zur Schallfilterung benutzt werden können, wobei dann andere skalare Felder  $\psi$  und  $\varphi$ , zum Beispiel die Dichte und der Druck, zu wählen sind (Hinkelmann, 1962, 1966; Herbert, 1971).

Vor dem Hintergrund des Hinkelmann'schen Modells lassen sich alle Näherungen, die an den ursprünglichen Boussinesq-Gleichungen vorgenommen werden können, in zwei Gruppen unterteilen: filterwirksame und filterunwirksame. Unter ersteren verstehen wir die bei-

---

<sup>3</sup> In diesem Zusammenhang sei auf ein weiteres von Hinkelmann (1962) vorgeschlagenes Filterungsverfahren hingewiesen, das von ihm „nichtcharakteristische Lärmfilterung“ genannt wurde (das hier vorgestellte Verfahren heißt im Gegensatz dazu „charakteristische Lärmfilterung“). Bei diesem Verfahren werden die Schwerewellen nicht gänzlich eliminiert, vielmehr wird selektiv der Teil des Schwerewellenspektrums entfernt, der in der numerischen Integration Schwierigkeiten bereitet. Dabei ist der Eingriff in das ursprüngliche Gleichungssystem sogar geringer als im hier vorgestellten Verfahren. Auch im Bezug auf globale Erhaltungsgrößen könnte die nichtcharakteristische Filterung interessante Eigenschaften besitzen. Nach bestem Wissen des Verfassers ist dieses Verfahren jedoch unglücklicherweise in Vergessenheit geraten und wurde nach Hinkelmann nicht weiter untersucht.

den Filterbedingungen (4.30) beziehungsweise ihre diagnostischen Entsprechungen (4.34). Sie sind verantwortlich für die Eliminierung der Schwerewellen. Als filterunwirksame Näherungen bezeichnen wir jene Näherungen, die über die filterwirksamen hinausgehen. Sie haben zwar einen Einfluss auf die Gestalt der Gleichgewichtsströmung, sind jedoch für die Schwerewellenfilterung unerheblich. Über filterunwirksame Näherungen macht das Hinkelmann'sche Modell keine expliziten Aussagen, sofern sie sich nicht aus (4.36b) und (4.36c) ableiten lassen. Sind Näherungen dieser Art gewünscht, so kann auf das Gleichungssystem (4.36) zum Beispiel eine Skalenasymptotik angewendet werden.

In unseren Untersuchungen verwenden wir die in Abschnitt 3.6 vorgestellte quasigeostrophische Näherung, um den Gleichgewichtsanteil der Strömung im Annulus zu definieren und folgen damit ähnlichen Ansätzen von Davis & Emanuel (1991); Zhang *et al.* (2000); Wang & Zhang (2010) für geschichtete Fluide und von Verkley (2009) für eine Flachwasserströmung auf der Kugel. Auch die quasigeostrophische Näherung lässt sich in das Hinkelmann'sche Modell einordnen. Wir betrachten dazu die Bilanzgleichungen der beiden Impulsanteile und des Auftriebs (siehe Abschnitt 3.6.1)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} = -\nabla_h \tilde{p}, \quad (4.37a)$$

$$\frac{dw}{dt} = B - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \quad (4.37b)$$

$$\frac{dB}{dt} = -N^2 w \quad (4.37c)$$

und beginnen mit der horizontalen Impulsbilanz, die wir durch  $-(\hat{\mathbf{f}}/f) \cdot (4.37a)$  in folgende Form bringen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \quad (4.38)$$

mit der formalen geostrophischen Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_g := \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}/f$  (siehe (3.60)). Setzen wir nun die rechte Seite von (4.38) in die materielle Ableitung  $d\mathbf{u}/dt$  auf der rechten Seite ein, so erhalten wir

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \mathbf{u}_g + \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) = \mathbf{u}_g + \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_g}{dt} + \frac{1}{f^2}\hat{\mathbf{f}}^2 \cdot \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}. \quad (4.39)$$

Dabei wurde von  $f = \text{konst.}$  und  $\hat{\mathbf{f}} = \text{konst.}$  Gebrauch gemacht. Dieses Vorgehen können wir beliebig oft wiederholen und erhalten dadurch eine alternative Formulierung der Hesselberg-Philipps'schen Reihenentwicklung (3.62) (Philipps, 1939a; Herbert, 1978a; Zdunkowski & Bott, 2003; Lin, 2007). Bevor wir das allgemeine Ergebnis angeben, betrachten wir noch die Vertikalgeschwindigkeit und den Auftrieb. Aus  $-(1/N^2)d(4.37b)/dt$  und (4.37c) erhalten wir

$$w = w_g - \frac{1}{N^2} \frac{d^2 w}{dt^2}, \quad (4.40)$$

mit der formalen (quasi)geostrophischen Vertikalgeschwindigkeit  $w_g := -(1/N^2)dB_g/dt$  und dem hydrostatischen Auftrieb  $B_g := \partial \tilde{p}/\partial z$  (siehe (3.67) und (3.68)). Das gleiche

Verfahren wie in (4.39) liefert

$$w = w_g - \frac{1}{N^2} \frac{d^2}{dt^2} \left( w_g - \frac{1}{N^2} \frac{d^2 w}{dt^2} \right) = w_g - \frac{1}{N^2} \frac{d^2 w_g}{dt^2} + \frac{1}{N^4} \frac{d^4 w}{dt^4}, \quad (4.41)$$

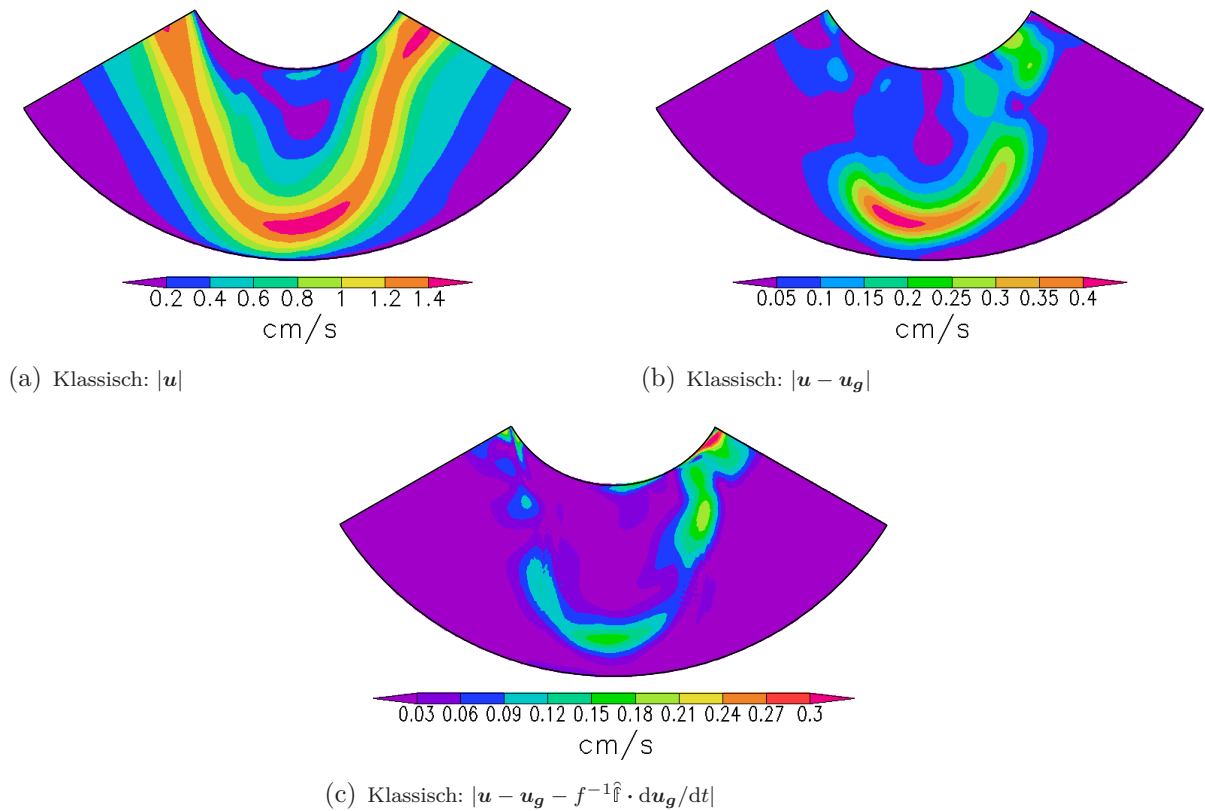
wobei  $N^2 = \text{konst.}$  verwendet wurde. Einen analogen Ausdruck für  $B$  erhalten wir, wenn wir in (4.41)  $w$  durch  $B$  und  $w_g$  durch  $B_g$  ersetzen. Verallgemeinern wir schließlich (4.39) und (4.41), so finden wir alternative Formulierungen der Hesselberg-Philipps'schen Reihenentwicklungen (3.62), (3.71) und (3.72)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_g + \sum_{j=1}^J \frac{1}{f^j} \hat{\mathbf{f}}^j \cdot \frac{d^j \mathbf{u}_g}{dt^j} + \frac{1}{f^{J+1}} \hat{\mathbf{f}}^{J+1} \cdot \frac{d^{J+1} \mathbf{u}}{dt^{J+1}}, \quad (4.42a)$$

$$w = w_g + \sum_{j=1}^J (-1)^j \frac{1}{N^{2j}} \frac{d^{2j} w_g}{dt^{2j}} + (-1)^{J+1} \frac{1}{N^{2(J+1)}} \frac{d^{2(J+1)} w}{dt^{2(J+1)}}, \quad (4.42b)$$

$$B = B_g + \sum_{j=1}^J (-1)^j \frac{1}{N^{2j}} \frac{d^{2j} B_g}{dt^{2j}} + (-1)^{J+1} \frac{1}{N^{2(J+1)}} \frac{d^{2(J+1)} B}{dt^{2(J+1)}}. \quad (4.42c)$$

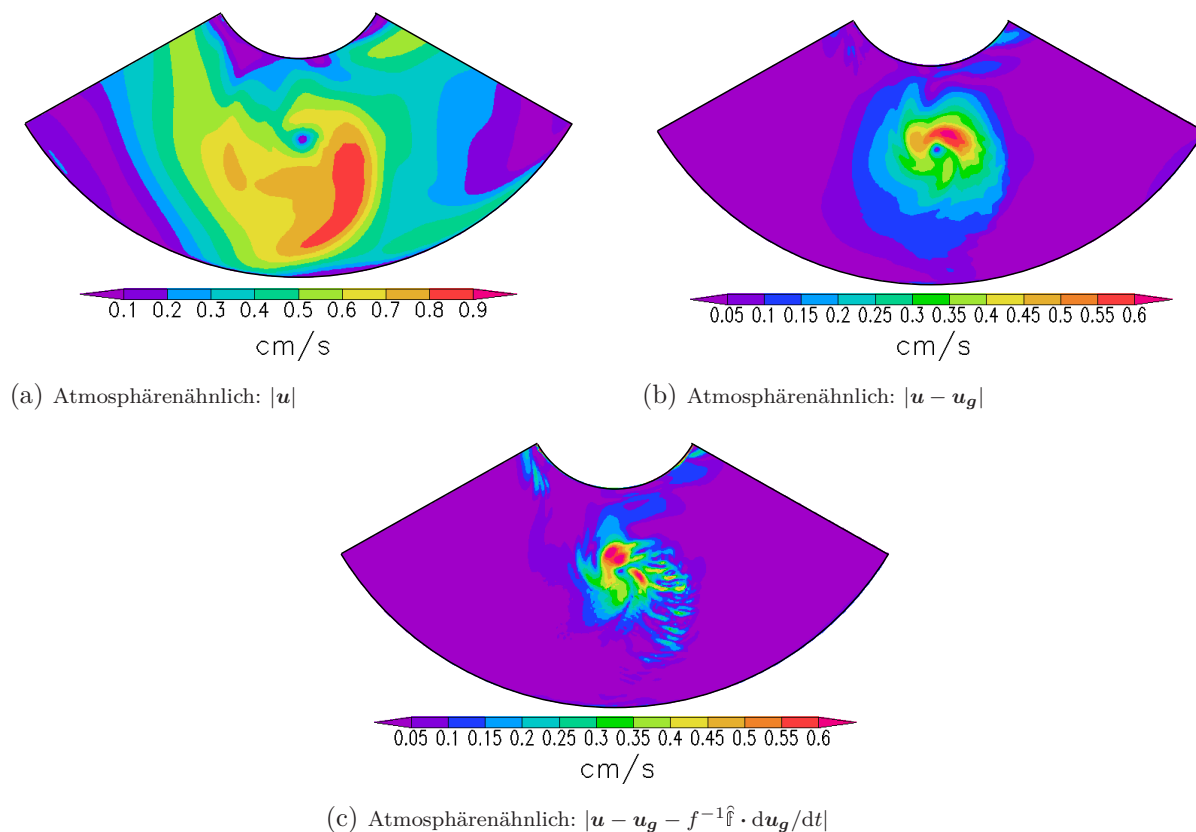
Dabei unterstellen wir die Konvergenz der Hesselberg-Philipps'schen Reihen, denn die Ausdrücke (4.42) erfüllen (4.37) im Allgemeinen auch dann, wenn (3.62), (3.71) und (3.72) divergieren sollten. Mit dem jeweils dritten Term auf den rechten Seiten von (4.42) haben wir einen Ausdruck für die zu den  $J$ -ten Partialsummen von (3.62), (3.71) und (3.72) gehörigen Restglieder. Es erfolgt hier keine Euler'sche Zerlegung der materiellen Ableitungen wie im Falle der Skalenanalyse in Abschnitt 3.6.2 (siehe (3.79)), da die Filterbedingungen des Hinkelmann'schen Modells (4.30) vom teilchenfesten Blickwinkel ausgehen. Als Beispiel für das Verhalten der Hesselberg-Philipps'schen Reihen in der Annulusströmung sind  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g|$  und  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g - f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{u}_g/dt|$  sowie zum Vergleich  $|\mathbf{u}|$  in Abbildung 4.7 für die klassische Annuluskonfiguration und in Abbildung 4.8 für die atmosphärenähnliche Konfiguration dargestellt. Man erkennt in beiden Abbildungen, dass die Strukturen im Übergang von  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g|$  (Abbildung 4.7b und 4.8b) nach  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g - f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{u}_g/dt|$  (Abbildung 4.7c und 4.8c) zwar kleinskaliger werden, ihre Amplitude jedoch in der klassischen Konfiguration nur mäßig und in der atmosphärenähnlichen Konfiguration gar nicht abnimmt. Dies könnte darauf hindeuten, dass die Hesselberg-Philipps'sche Reihe, zumindest im Falle der atmosphärenähnlichen Konfiguration, in diesen Bereichen nicht konvergiert. Wir können jedoch zum jetzigen Zeitpunkt nicht ausschließen, dass die schlechte Konvergenz nicht physikalischen, sondern numerischen Ursprungs ist. Möglicherweise ist die Berechnung von  $d\mathbf{u}_g/dt$  aus einer Zeitableitung von  $\mathbf{u}_g$ , wie hier geschehen, zu ungenau und die Verwendung der diagnostischen Entsprechung zu  $d\mathbf{u}_g/dt$ , die nur Ortsableitungen und aufgrund der Poisson-Gleichung des Drucks Raumintegrale enthält (vergleiche (4.32)), würde bessere Ergebnisse erzielen. Andererseits ist es naheliegend, dass die schwache Konvergenz beziehungsweise Divergenz in einigen Bereichen der Flüssigkeit gerade darauf hindeutet, dass die Strömung dort ein Ungleichgewicht ausgebildet hat, welches durch die Reihenentwicklungen (3.62), (3.71) und (3.72) nicht mehr erfasst werden kann (wohl aber durch (4.42)). Dieses Ungleichgewicht breitet sich dann in Gestalt spontan abgestrahlte Schwerewellen aus (zum Beispiel Knox, 1997). Gestützt wird diese Vermutung dadurch, dass in den Bereichen, in denen  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g - f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{u}_g/dt|$  eine verhältnismäßig



**Abbildung 4.7:** Beträge der Horizontalgeschwindigkeit und der ageostrophischen Horizontalgeschwindigkeitsanteile nullter und erster Ordnung. (a)  $|\mathbf{u}|$ , (b)  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g|$  und (c)  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g - f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{u}_g/dt|$  in der klassischen Annuluskonfiguration in der Höhe  $z = 0,74 \cdot d = 10$  cm zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s (wie in Abbildung 4.5). In allen drei Abbildungen sind unterschiedliche Farbskalen verwendet worden, um die Strukturen besser hervorzuheben.

große Amplitude aufweist – entlang des Strahlstroms in der klassischen Konfiguration und im Tiefdruckzentrum in der atmosphärenähnlichen Konfiguration –, eine verstärkte Schwerewellentätigkeit stattfindet, wie es die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz nahelegt (siehe Abbildung 4.5).

Die Gleichgewichtsbedingungen, die nun zur Formulierung des quasigeostrophischen Modells gemäß des Hinkelmann'schen Ansatzes (4.36) benötigt werden, sind das geostrophische und hydrostatische Gleichgewicht. Wir erhalten diese durch folgende Filterbedingun-



**Abbildung 4.8:** Beträge der Horizontalgeschwindigkeit und der ageostrophischen Horizontalgeschwindigkeitsanteile nullter und erster Ordnung. (a)  $|\mathbf{u}|$ , (b)  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g|$  und (c)  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_g - f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{u}_g/dt|$  in der atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration in der Höhe  $z = d/2 = 2$  cm zum Zeitpunkt  $t = 3200$  s (wie in Abbildung 4.5). Die Farbskala in (a) unterscheidet sich von derjenigen, die in (b) und (c) verwendet wurde.

gen<sup>4</sup>

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g, \quad (4.43a)$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad w \equiv w_g = -\frac{1}{N^2} \frac{dB_g}{dt}, \quad (4.43b)$$

$$\frac{d^2 B}{dt^2} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad B \equiv B_g = \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z}. \quad (4.43c)$$

Da die geostrophische Geschwindigkeit divergenzfrei ist,  $\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = 0$  (siehe B.2), folgt aus der Kontinuitätsgleichung (3.31)  $\partial w / \partial z = \partial w_g / \partial z = 0$ . In Verbindung mit den Randbedingungen  $w|_{z=0,d} = 0$  (siehe Abschnitt 2.2.5) bedeutet dies wiederum, dass die Vertikalgeschwindigkeit des Gleichgewichtsanteils verschwindet (zum Beispiel Vallis, 2006)

$$w = w_g = 0. \quad (4.44)$$

Die Filterwirkung wird üblicherweise (4.43a) zugewiesen (projiziert man (4.43a) auf die beiden horizontalen Einheitsvektoren des gewählten Koordinatensystems, so erhält man, bis auf etwaige metrische Zusatzterme, zwei Filterbedingungen der Gestalt (4.30) in Abhängigkeit von den beiden Geschwindigkeitskomponenten). In der quasigeostrophischen Theorie der Atmosphäre würden die beiden Entsprechungen zu (4.43b) und (4.43c) die Schallfilterung übernehmen (Hinkelmann, 1962, 1966; Herbert, 1971, 1980). Da die Bousinesq-Gleichungen bereits schallfrei sind, werden (4.43b) und (4.43c) hier jedoch zu filterunwirksamen Näherungen.

Als Leitgröße verwenden wir die quasigeostrophische potentielle Vorticity

$$\Lambda = \Pi = \zeta + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z}. \quad (4.45)$$

(Genau genommen ist  $\Pi_g = \nabla_{gg}^2 \tilde{p}_g / f$  in (3.85) die quasigeostrophische potentielle Vorticity. Aus Bequemlichkeit verwenden wir diese Bezeichnung jedoch auch für  $\Pi$ .) Laut (4.35) gilt definitionsgemäß

$$\Pi = \Pi_g = \zeta_g + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_g}{\partial z} = \frac{1}{f} \left( \nabla_h^2 \tilde{p}_g + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}_g}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{f} \nabla_{gg}^2 \tilde{p}_g \quad (4.46a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Pi_a = \zeta_a + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_a}{\partial z} = 0, \quad (4.46b)$$

---

<sup>4</sup> Bei der skalenasymptotischen Herleitung des quasigeostrophischen Modells in Abschnitt 3.6 wurde in der genäherten Hesselberg-Philipp'schen Reihe (4.43a) auch der Term  $f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot d\mathbf{u}_g / dt$  berücksichtigt. Dies liegt letztlich daran, dass eine explizite konzeptionelle Unterteilung in Gleichgewichtsbedingungen und prognostischer Gleichung der Leitgröße, wie sie dem Hinkelmann'schen Modell zugrunde liegt, nicht Teil des strengen skalenasymptotischen Modells ist, auch wenn ihre Endergebnisse dahingehend gedeutet werden können. Und so werden die Hesselberg-Philipp'schen Reihen in der Skalenasymptotik letztendlich zur Herleitung der prognostischen Gleichung der Leitgröße verwendet, während im Hinkelmann'schen Modell die Gleichgewichtsbedingungen aus ihnen abgeleitet werden.

wobei von den Gleichgewichtsbedingungen (4.43a) und (4.43c) Gebrauch gemacht wurde sowie von (3.85). Es sei bemerkt, dass  $\Pi_g$  nur in Verbindung mit dem geostrophisch-hydrostatischen Gleichgewicht (4.43) die Gestalt (4.46a) annimmt. Wären andere Filterbedingungen gewählt worden, so besäße auch  $\Pi_g$  hier eine andere Gestalt. Aus den vollständigen Boussinesq-Gleichungen (4.37) kann für  $\Pi$  folgende prognostische Gleichung hergeleitet werden (siehe Anhang C.4)

$$\frac{d\Pi}{dt} = - \left( \zeta - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \left( \mathbf{e}_z \times \nabla_h w + \frac{f}{N^2} \nabla_h B \right). \quad (4.47)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung enthält keine rein geostrophischen Terme, da  $\partial \mathbf{u}_g / \partial z \cdot \nabla_h B_g = 0$  (siehe (C.75) und (C.76)). Das heißt  $\Pi$  kann nur dann materielle Änderungen erfahren, wenn die Strömung einen ageostrophischen Anteil enthält. Würde dieser Anteil gemäß des Gleichgewichtsmodells (4.36) vernachlässigt, so würde (4.47) zur Erhaltungsgleichung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity (siehe (3.84))

$$\frac{d_g \Pi_g}{dt} = 0. \quad (4.48)$$

Auch vom Standpunkt der um eine orts- und zeitunabhängige Grundströmung linearisierten Boussinesq-Gleichungen ist  $\Pi = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x + (f/N^2) \partial B / \partial z$  eine geeignete Wahl der Leitgröße. Setzt man die Schwerewelleneigenmoden (4.14) in die Fourier-Transformierte  $\hat{\Pi} = i[k_y \hat{u} - k_x \hat{v} + (f/N^2) k_z \hat{B}]$  ein, so zeigt sich, dass  $\hat{\Pi}(\hat{\mathbf{s}}^\pm) = 0$ . Das heißt allein die geostrophische Mode (4.12), der Gleichgewichtsanteil des linearisierten Modells, trägt zur quasigeostrophischen potentiellen Vorticity bei (Phillips, 1963; Mohebalhojeh & Dritschel, 2001; Smith & Waleffe, 2002).

Um eine Vorstellung von der Genauigkeit dieses Modells zu bekommen, haben wir die lokale Lagrange'sche Rossby-Zahl (O'Sullivan & Dunkerton, 1995; Zhang *et al.*, 2000)

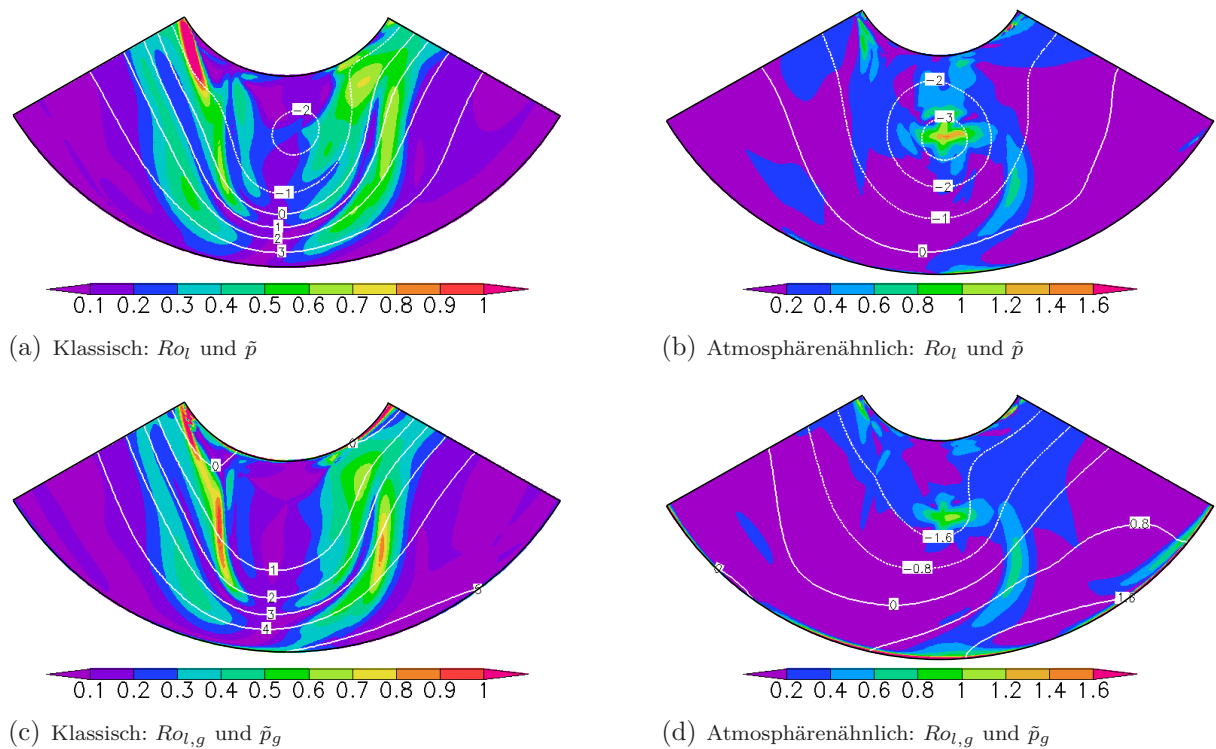
$$Ro_l(\mathbf{r}, t) := \frac{|d\mathbf{u}/dt|}{|\mathfrak{f} \cdot \mathbf{u}|} \approx \frac{|\mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{u}|}{|\mathfrak{f} \cdot \mathbf{u}|} \quad (4.49)$$

in der klassischen und atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration betrachtet. Da der Ungleichgewichtsanteil der Strömung zur Rossby-Zahl beitragen kann, haben wir zudem die Rossby-Zahl der Gleichgewichtsströmung bestimmt

$$Ro_{l,g}(\mathbf{r}, t) := \frac{|d_g \mathbf{u}_g / dt|}{|\mathfrak{f} \cdot \mathbf{u}_g|} \approx \frac{|\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g|}{|\mathfrak{f} \cdot \mathbf{u}_g|} \quad (4.50)$$

(die praktische Berechnung des Gleichgewichtsanteils wird im nächsten Absatz vorgestellt).  $Ro_l$  und  $Ro_{l,g}$  sind für beide Konfigurationen in Abbildung 4.9 dargestellt. In großen Bereichen der Strömung haben beide Rossby-Zahlen verhältnismäßig niedrige Werte von  $Ro_l, Ro_{l,g} \lesssim 0,2$ . Entlang des Strahlstroms in der klassischen Konfiguration findet man jedoch  $Ro_l \approx 0,6$  und im Tiefdruckzentrum der atmosphärenähnlichen Konfiguration  $Ro_l \approx 1,4$ . Die Rossby-Zahl der Gleichgewichtsströmung weicht nur geringfügig von diesen Werten ab. In diesen Bereichen kann schwerlich von  $Ro \ll 1$  die Rede sein, insbesondere im Falle der atmosphärenähnlichen Konfiguration. Es ist daher zu erwarten, dass der durch das quasigeostrophische Gleichgewicht definierte balancierte Anteil, der zumindest





**Abbildung 4.9:** Lokale Lagrange'sche Rossby-Zahl  $Ro_l$ , (a) in der klassischen Annuluskonfiguration und (b) in der atmosphärenähnlichen Konfiguration, jeweils in derselben Höhe und zum selben Zeitpunkt wie der Druck und die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz in Abbildung 4.5. Darunter ist die lokale Lagrange'sche Rossby-Zahl der Gleichgewichtsströmung  $Ro_{l,g}$  für die klassische, (c), und für die atmosphärenähnliche Konfiguration, (d), abgebildet. Die dünnen weißen Linien sind die Isobaren von  $\bar{p}$  in (a) und (b) (vergleiche Abbildung 4.5) und von  $\bar{p}_g$  in (c) und (d) (vergleiche Abbildung 4.10). Negative Druckwerte werden durch gestrichelte Linien dargestellt.

formal eine kleine Rossby-Zahl voraussetzt, in diesen Bereichen nicht sehr gut mit der tatsächlichen Strömung übereinstimmt. Es mag verwundern, dass die quasigeostrophische Gleichgewichtsströmung in Bereichen mit  $Ro_{l,g} \sim 1$  in gewisser Weise ihrem eigenen Gültigkeitsbereich  $Ro \lesssim 0,1$  widerspricht. Wie zum Beispiel von McIntyre (2009, 2014a) und Dritschel & McKiver (2015) näher ausgeführt wird, kann jedoch in vielen Fällen beobachtet werden, dass die Gleichgewichtsströmung mit der vollständigen Strömung sehr viel besser übereinstimmt, als es skalenanalytische Betrachtungen vorhersagen. Selbst wenn eine Strömung  $Ro \gtrsim 1$  aufweist, muss dies nicht zwangsläufig bedeuten, dass ein Gleichgewicht, dessen Herleitung auf  $Ro \ll 1$  (oder  $Ro < 1$ ) fußt, zur Beschreibung dieser Strömung ungeeignet ist. Daher mag auch im Annulus  $Ro_l \gtrsim 1$  lediglich als ein Hinweis auf die Möglichkeit einer Ungenauigkeit des quasigeostrophischen Gleichgewichts in diesen Bereichen gedeutet werden.

Für die praktische Bestimmung des Gleichgewichtsanteils der Strömung im Annulus berechnen wir zunächst die Brunt-Väisälä-Frequenz gemäß (3.92). Daraus folgen die Felder

der Flüssigkeitsschichtung mittels

$$B_{00}(z) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{F_{z=0}} \int_{S_{z=0}} B \, dS' \, dt' + N^2 z, \quad (4.51a)$$

$$\tilde{p}_{00}(z) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \frac{1}{F_{z=0}} \int_{S_{z=0}} \tilde{p} \, dS' \, dt' + \int_0^z B_{00} \, dz', \quad (4.51b)$$

wobei  $S_{z=0}$  die Fläche des Annulusbodens bezeichnet und  $F_{z=0}$  deren Flächeninhalt. Im Falle des Flächenintegrals verzichten wir darauf, die Grenzschichten auszuspüren (vergleiche (3.92)), da die bodennächste Flüssigkeitsschicht ohnehin gänzlich in der Ekman-Schicht liegt. Aus  $\mathbf{u}$  und dem um die Schichtung  $B_{00}$  verminderten Auftrieb  $B$  wird als nächstes die quasigeostrophische potentielle Vorticity  $\Pi = \zeta + (f/N^2)\partial B/\partial z$  berechnet. Laut (4.46a) gilt definitionsgemäß

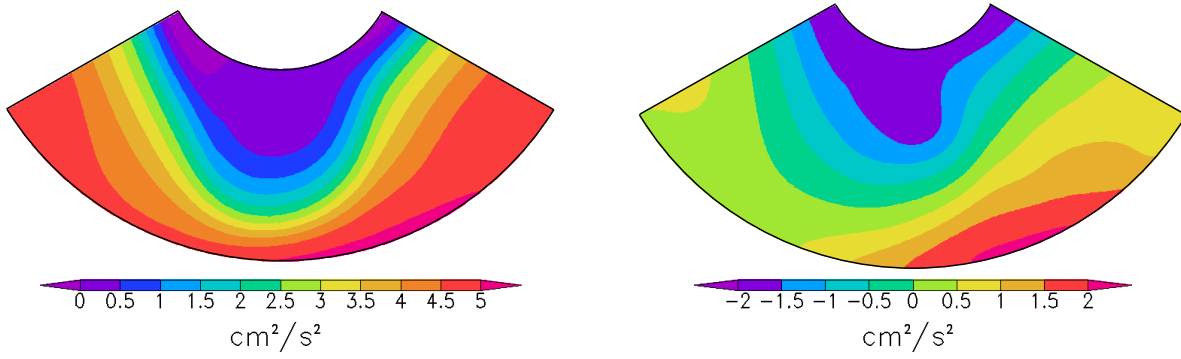
$$\Pi = \Pi_g = \zeta_g + \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_g}{\partial z} = \frac{1}{f} \left( \nabla_h^2 \tilde{p}_g + \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}_g}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{f} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g \quad (4.52)$$

(siehe (3.85)). Da  $\Pi$  gegeben ist, können wir (4.52) als Poisson-Gleichung zur Bestimmung des quasigeostrophischen Drucks  $\tilde{p}_g$  betrachten (vergleiche Davis & Emanuel, 1991; Zhang *et al.*, 2000; Verkley, 2009; Wang & Zhang, 2010). Dabei verwenden wir als Randbedingung, dass der Gradient des quasigeostrophischen Drucks senkrecht zur Annulusberandung  $\partial V_A$  verschwindet, das heißt  $\nabla \tilde{p}_g \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V_A} = 0$ . Gemäß der geostrophischen Azimutalgeschwindigkeit  $u_g = (1/f)\partial \tilde{p}_g/\partial r$  und dem hydrostatischen Auftrieb  $B_g = \partial \tilde{p}_g/\partial z$  entsprechen dieser Randbedingung  $u_g|_{r=a,b} = 0$  und  $B_g|_{z=0,d} = 0$ . (Die Randbedingung undurchlässiger Wände  $v_g|_{r=a,b} = -(1/f)(1/r)\partial \tilde{p}/\partial \vartheta|_{r=a,b} = 0$  ist schwieriger umsetzbar). Aus dieser Randbedingung folgt für das Mittel von (4.52) über das Annulusvolumen

$$\frac{1}{V_A} \int_{V_A} f \Pi \, dV = \frac{1}{V_A} \int_{V_A} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g \, dV = \frac{1}{V_A} \oint_{\partial V_A} \left( \nabla_h \tilde{p}_g + \mathbf{e}_z \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (4.53)$$

wobei vom Gauß'schen Integralsatz Gebrauch gemacht wurde (Bronstein *et al.*, 2001). Da  $\Pi$  aber aus der tatsächlichen Strömung berechnet wird, ist im Allgemeinen von  $\int_{V_A} f \Pi \, dV/V_A \neq 0$  auszugehen. Um die Lösbarkeitsbedingung (4.53) dennoch zu erfüllen, verwenden wir in der Poisson-Gleichung (4.52) statt  $\Pi$ , die um ihr Volumenmittel verminderte quasigeostrophische potentielle Vorticity,  $\Pi - \int_{V_A} \Pi \, dV/V_A$ . Die numerische Lösung von (4.52) erfolgt, wie im Falle der Poisson-Gleichung von  $\tilde{p}$ , durch das BiCGSTAB-Verfahren (siehe Abschnitt 2.3). Ist  $\tilde{p}_g$  (bis auf eine Konstante) bestimmt, so können quasigeostrophische Geschwindigkeit und Auftrieb mithilfe von (4.43) berechnet werden. Zur Prüfung des numerischen Lösungsverfahrens haben wir  $\Pi_a = \zeta_a + (f/N^2)\partial B_a/\partial z$ , mit  $\zeta_a = \zeta - \zeta_g$  und  $B_a = B - B_g$  berechnet. Gemäß (4.46b) sollte  $\Pi_a = 0$  gelten. Es hat sich gezeigt, dass  $\Pi_a$  bis auf den Abbruchfehler des BiCGSTAB-Verfahrens dem subtrahierten Volumenmittel von  $\Pi$  entspricht. Wir können demzufolge davon ausgehen, dass das Lösungsverfahren richtig funktioniert. Zudem ist  $|\Pi_a|$  ungefähr eine Größenordnung kleiner als  $|\zeta_a|$ , sodass (4.46b) in guter Näherung erfüllt ist. Es sei bemerkt, dass die zeitliche Entwicklung von  $\Pi$  in der Simulation der prognostischen Gleichung (4.47)

folgt (abgesehen von den darin vernachlässigten dissipativen Prozessen). Das heißt (4.47) zusammen mit (4.43) bilden kein Gleichgewichtsmodell im strengen Sinne von (4.36), sondern sind an den Ungleichgewichtsanteil gekoppelt (dass  $\Pi$  gemäß der Modellvereinbarung (4.46) keinen Ungleichgewichtsanteil enthalten soll, bedeutet nicht, dass  $\Pi$  nicht mit demselben wechselwirken kann). Im Hinblick auf die beiden Anwendungsvarianten des Hinkelmann'schen Modells, benutzen wir die Gleichgewichtsbedingungen somit für die erste Variante: Die schwerewellenfilternde Adjustierung der (Anfangs)felder. Wollte man das strenge Gleichgewichtsmodell verwenden, so müsste, ausgehend von denselben Anfangsbedingungen, die Erhaltungsgleichung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity (4.48) parallel zum vollständigen Modell integriert werden (die zweite Anwendungsvariante des Hinkelmann'schen Modells). Aufgrund der relativen Ungenauigkeit des quasigeostrophischen Modells hinsichtlich seiner Rossby-Zahl-Entwicklungsordnung, in Verbindung mit den erwähnten verhältnismäßig hohen Werten der lokalen Rossby-Zahl (4.49) in beiden Annuluskonfigurationen, dürfte der so bestimmte Gleichgewichtsanteil jedoch im Laufe der Zeit zunehmend von der tatsächlichen Strömung abweichen und damit für unsere Zwecke unbrauchbar werden (vergleiche Snyder *et al.*, 2009; Wang & Zhang, 2010). Die Ergebnisse aus der Invertierung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity nach (4.52) für die klassische und atmosphärenähnliche Konfiguration sind in den Abbildungen 4.10 und 4.11 dargestellt. Die allgemeine großräumige Gestalt der simulierten Strömung wird durch das quasigeostrophische Gleichgewicht verhältnismäßig gut wiedergegeben. Allerdings fallen auch einige Unterschiede ins Auge, insbesondere in der atmosphärenähnlichen Konfiguration. Vergleicht man den tatsächlichen Druck  $\tilde{p}$  in Abbildung 4.5b mit dem quasigeostrophischen Druck  $\tilde{p}$  in Abbildung 4.10b, so erkennt man Abweichungen in der Gestalt des Tiefdruckgebietes und in der Lage des Tiefdruckzentrums. Dies spiegelt sich auch in größeren Unterschieden zwischen der vollständigen und der geostrophischen Horizontalgeschwindigkeit,  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}_g$ , im Tiefdruckwirbel der atmosphärenähnlichen Konfiguration wider (Abbildungen 4.11b, 4.11d und 4.11f). Angesichts des erwähnten verhältnismäßig hohen Wertes der lokalen Rossby-Zahl im Tiefdruckzentrum und der völligen Vernachlässigung dissipativer Prozesse (Reibung und Wärmeleitung) in unserem quasigeostrophischen Gleichgewichtsmodell, die zumindest in den Grenzschichten eine nicht zu vernachlässigende Rolle in der Dynamik spielen, mögen die Abweichungen jedoch nicht verwundern. Möglicherweise könnte eine etwas bessere Übereinstimmung zwischen vollständiger Strömung und Gleichgewichtsströmung erreicht werden, indem die Randbedingung  $u_g|_{r=a,b} = 0$  durch die Randbedingung undurchlässiger Wände,  $v_g|_{r=a,b} = 0$ , ersetzt würde, sofern dies machbar ist. Die Stromlinien von  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_g$  in Abbildung 4.11e und 4.11f zeigen nämlich deutlich, dass die quasigeostrophische Strömung die Zylinderwände durchfließt, da  $\mathbf{u}$  die Randbedingung undurchlässiger Wände erfüllt. Nichtsdestotrotz erachten wir das quasigeostrophische Modell, gerade wegen seiner verhältnismäßigen Schlichtheit, als besonders geeignet, um erste Erfahrungen in der Untersuchung der spontanen Schwerewellenanregung durch den Gleichgewichtsanteil zu sammeln, auch wenn dies bedeutet in Bezug auf die Genauigkeit Abstriche in Kauf nehmen zu müssen.

(a) Klassisch:  $\tilde{p}_g$ (b) Atmosphärenähnlich:  $\tilde{p}_g$ 

**Abbildung 4.10:** Quasigeostrophischer Druck  $\tilde{p}_g$ , berechnet aus der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity, (a) für die klassische Annuluskonfiguration in der Höhe  $z = 0,74 \cdot d = 10$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s, (b) für die atmosphärenähnliche Konfiguration in der Höhe  $z = d/2 = 2$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 3200$  s (vergleiche Abbildung 4.5).

#### 4.4.2 Der Antrieb des Ungleichgewichtsanteils durch den Gleichgewichtsanteil

Wird das Gleichgewicht (4.43) und (4.44) von (4.37) und der Kontinuitätsgleichung abgezogen, so erhält man

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_a - \nabla_h \tilde{p}_a - \frac{d\mathbf{u}_g}{dt}, \quad (4.54a)$$

$$\frac{dw_a}{dt} = B_a - \frac{\partial \tilde{p}_a}{\partial z}, \quad (4.54b)$$

$$\frac{dB_a}{dt} = -N^2 w_a - \frac{dB_g}{dt}, \quad (4.54c)$$

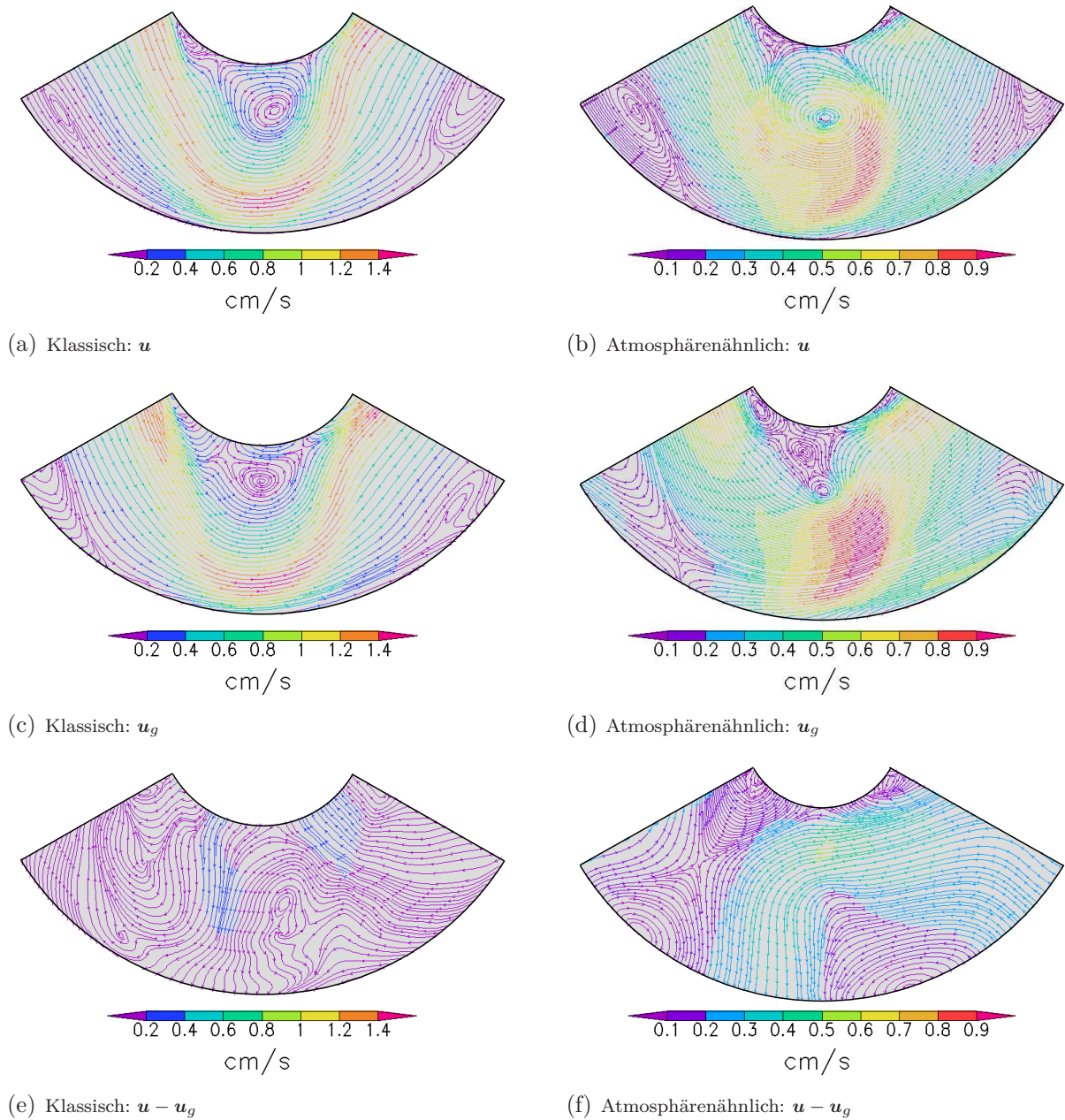
$$0 = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_a + \frac{\partial w_a}{\partial z}. \quad (4.54d)$$

Dieses Gleichungssystem beschreibt die zeitliche Entwicklung des ageostrophischen Ungleichgewichtsanteils, da  $\mathbf{u}_g$ ,  $B_g$ ,  $\tilde{p}_g$  und damit auch  $d\mathbf{u}_g/dt$  sowie  $dB_g/dt$  durch das Gleichgewichtsmodell (4.43) und (4.47) bestimmt sind. Definieren wir nun innerhalb unseres Modells, dass

$$\text{Ungleichgewichtsanteil} =: \text{Schwerewellen}, \quad (4.55)$$

so erfolgt die spontane Schwerewellenanregung, wie später gezeigt wird, durch rein geostrophische Anteile in den materiellen Ableitungen des Gleichgewichtsanteils und im ageostrophischen Druck  $\tilde{p}_a$  (vergleiche Snyder *et al.*, 2009; Wang & Zhang, 2010).

In Abschnitt 4.2 wurde die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz  $\delta = \nabla_h \cdot \mathbf{u} = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_a$  bereits als Indikator für Schwerewellen eingesetzt. Innerhalb unseres Gleichgewichtsmodells, besitzt  $\delta$  keinen balancierten Anteil, sodass es gemäß (4.55) ausschließlich Schwerewellen sind, die sich in  $\delta$  abbilden. Wir untersuchen daher zuerst den geostrophischen Antrieb



**Abbildung 4.11:** (a), (c) und (e) zeigen nacheinander Stromlinien der Horizontalgeschwindigkeit  $u$ , der geostrophischen Horizontalgeschwindigkeit  $u_g$  und der Differenz  $u - u_g$  für die klassische Annuluskonfiguration in der Höhe  $z = 0,74 \cdot d = 10$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s.  $u$ ,  $u_g$  und  $u - u_g$  für die atmosphärenähnliche Konfiguration sind in (b), (d) und (f) in der Höhe  $z = d/2 = 2$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 3200$  s dargestellt.

von  $\delta$  und verwenden diesen als (einen möglichen) Indikator für die spontane Schwerewellenanregung. Zu diesem Zweck bilden wir die Poisson-Gleichung des ageostrophischen Drucks  $\tilde{p}_a$  durch  $\nabla_{\mathbf{h}} \cdot (4.54a) + \partial(4.54b)/\partial z$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{p}_a &= f\zeta_a + \frac{\partial B_a}{\partial z} - \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &= \left(1 - \frac{f^2}{N^2}\right) \frac{\partial B_a}{\partial z} - (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g) - \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \end{aligned} \quad (4.56a)$$

$$\Rightarrow \tilde{p}_a = \underbrace{\nabla^{-2} \left[ \left(1 - \frac{f^2}{N^2}\right) \frac{\partial B_a}{\partial z} - (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g) \right]}_{=:\tilde{p}_{aa}} - \underbrace{\nabla^{-2} (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)}_{=:\tilde{p}_{ag}} \quad (4.56b)$$

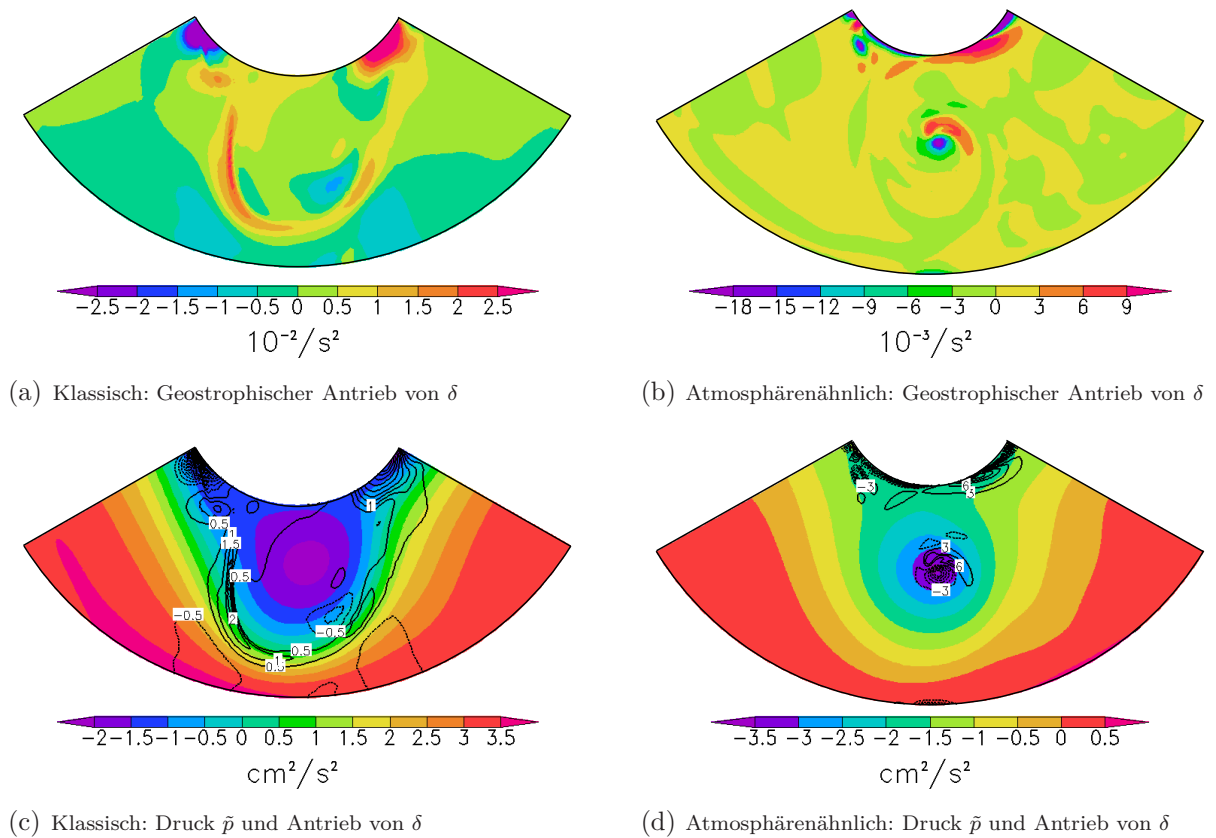
(vergleiche (2.46)). Dabei wurde von (4.46b) Gebrauch gemacht. Ferner bezeichnet  $\nabla^{-2}$  die Integraloperation, die den Laplace-Operator  $\nabla^2$  invertiert (zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001; Dritschel & Viúdez, 2003; Nolting, 2004). So wie auch  $\tilde{p}$ , soll  $\tilde{p}_a$  dabei die Randbedingung  $\nabla \tilde{p}_a \cdot d\mathbf{S}|_{\partial V_A} = 0$  erfüllen (dies gilt gleichermaßen für die Anteile  $\tilde{p}_{aa}$  und  $\tilde{p}_{ag}$ ). Der aus der nichtlinearen Geschwindigkeitsadvektion hervorgehende Term  $\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g$  ist der einzige rein geostrophische Antrieb des ageostrophischen Drucks.<sup>5</sup> Wird  $\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g$  in seinen symmetrischen Anteil  $(\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_s$  und seinen antisymmetrischen Anteil  $(\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_{as}$  zerlegt, so kann  $\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g$  gemäß (D.59) in Anhang D.3 auch wie folgt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g &= (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_s \cdot (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_s + (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_{as} \cdot (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_{as} \\ &= (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_s \cdot (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g)_s - \frac{1}{2} \zeta_g^2, \end{aligned} \quad (4.57)$$

worin  $\zeta_g^2/2$  als geostrophische Enstrophie betrachtet werden kann (vergleiche Vallis, 2006). Selbst wenn sich die Strömung anfangs gänzlich im geostrophisch-hydrostatischen Gleichgewicht befinden sollte, können Terme dieser Art einen ageostrophischen Strömungsanteil erzeugen. Das Ergebnis (4.56b) können wir nun in der prognostischen Gleichung der Horizontaldivergenz nutzen, welche entweder aus  $\nabla_{\mathbf{h}} \cdot (4.54a)$  oder, aufgrund von (4.54d), aus  $-\partial(4.54b)/\partial z$  gebildet werden kann. Hier wird von Letzterem Gebrauch gemacht, da einfacher zu berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{\partial B_a}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_a}{\partial z^2} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla w_a \\ &= -\frac{\partial B_a}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_{aa}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_{ag}}{\partial z^2} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \nabla_{\mathbf{h}} w_a + \frac{\partial w_a}{\partial z} \frac{\partial w_a}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial B_a}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_{aa}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^{-2} (\nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \nabla_{\mathbf{h}} w_a + \delta^2, \end{aligned} \quad (4.58)$$

<sup>5</sup> Ist  $\mathbf{a}$  ein beliebiger Vektor und  $\mathbf{b}_h$  ein beliebiger Vektor in der Horizontalebene, so gilt  $\mathbf{a}\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a}\mathbf{b}_h = (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_h) = (\mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a}_h)(\mathbf{a}_h \cdot \mathbf{b}_h) = \mathbf{a}_h \mathbf{b}_h \cdot \mathbf{a}_h \mathbf{b}_h$ , worin  $\mathbf{a}_h$  die Horizontalkomponente von  $\mathbf{a}$  bezeichnet (siehe Anhang D.3). Demzufolge gilt  $\nabla \mathbf{u}_g \cdot \nabla \mathbf{u}_g = \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g \cdot \nabla_{\mathbf{h}} \mathbf{u}_g$ .



**Abbildung 4.12:** Geostrophischer Antrieb der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz  $\delta$ , (a) für die klassische Annuluskonfiguration in der Höhe  $z = 0,74 \cdot d = 10$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s, und (b) für die atmosphärenähnliche Konfiguration in der Höhe  $z = d/2 = 2$  cm und zum Zeitpunkt  $t = 3200$  s. (c) und (d) Druckfeld (Farbskala) und erneut geostrophischer Antrieb von  $\delta$  (schwarze Isolinien). Isolinienintervall für die klassische Konfiguration in (c)  $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-2}$ , und für die atmosphärenähnliche Konfiguration in (d)  $3 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-2}$ . Durchgezogene Linien repräsentieren positive Werte, gestrichelte Linien negative Werte. Die Nullisolinie ist nicht eingezeichnet.

wobei (4.54d) und (4.56b) verwendet wurden. Der Term  $-\partial^2 \nabla^{-2} (\nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g) / \partial z^2$  ist der einzige rein geostrophische und bildet damit den Antrieb von  $\delta$  durch den Gleichgewichtsanteil. Wir verwenden diesen Term als Indikator für den spontanen Schwerewellenantrieb. Für die klassische und atmosphärenähnliche Konfiguration ist der Antrieb in Abbildung 4.12 gezeigt. Die abgebildeten Zeitpunkte und die Höhen der Horizontalschnitte sind dieselben wie in den Abbildungen 4.5 bis 4.11. Seine größten Amplituden hat der geostrophische Antrieb von  $\delta$  nahe der inneren Zylinderwand in beiden Konfigurationen. Da die Viskosität, welche die Dynamik in diesem Bereich wesentlich beeinflussen sollte, in unserem Ansatz (4.54) unberücksichtigt bleibt, ist die Aussagekraft der in Grenzschichtnähe beobachteten Werte schwer einschätzbar. Im Gegensatz dazu dürften die Ergebnisse in der freien Flüssigkeit, wo die Reibung innerhalb der betrachteten Zeitspannen eine untergeordnete Rolle spielen sollte, belastbarer sein. In der atmosphärenähnlichen Konfiguration finden wir ein verhältnismäßig starkes Signal im Zentrum des Tiefdruckwirbels, ungefähr im selben Bereich, wie das Divergenzsignal (siehe Abbildung 4.5b). In der klassischen Konfiguration zeigt die Simulation eine erhöhte geostrophische Antriebstätigkeit entlang

des Strahlstroms, wie auch im Falle der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz (siehe Abbildung 4.5a). Diese Ergebnisse liefern erste Hinweise, dass spontane Schwerewellenabstrahlung auch im Annulus stattfindet, und zwar in beiden Konfigurationen. Demzufolge mögen beide Konfigurationen für weitergehende Untersuchungen geeignet sein. Allerdings propagieren die angeregten Schwerewellen in der atmosphärenähnlichen Konfiguration auf einem Hintergrund mit einem Wert für  $N/f$ , der näher an jenem der Atmosphäre liegt, sodass die Übertragbarkeit der Untersuchungsergebnisse auf die Atmosphäre bei Verwendung dieser Annuluskonfiguration eher gewährleistet sein dürfte, als bei Nutzung der klassischen Konfiguration. Im Unterschied zur Ausbreitung der Schwerewellen, hängt die spontane Anregung derselben jedoch nur geringfügig von  $N/f$  ab, wie neueste Untersuchungen von Dritschel & McKiver (2015) nahelegen.

Um den rein geostrophischen Antrieb im vollständigen Gleichungssystem (4.54) freizulegen, müssen wir die materielle Ableitung der geostrophischen Geschwindigkeit (4.43a) und des hydrostatischen Auftriebs (4.43c) genauer betrachten

$$\frac{d\mathbf{u}_g}{dt} = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\nabla_h \tilde{p}_g}{dt} = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \left( \nabla_h \frac{d\tilde{p}_g}{dt} - \nabla_h \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g \right), \quad (4.59a)$$

$$\frac{dB_g}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla \tilde{p}_g \quad (4.59b)$$

(vergleiche (B.11) und (B.31) in Anhang B). Die materielle Ableitung des (quasi)geostrophischen Drucks  $\tilde{p}_g$  können wir in Abhängigkeit von  $d\Pi/dt = d(f^{-1} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g)/dt$  und damit von (4.47) ausdrücken. Dazu wenden wir den Operator  $\nabla_{qg} = \nabla_h + \mathbf{e}_z(f/N)\partial/\partial z$  (siehe (3.86)) zweimal auf  $d\tilde{p}_g/dt$  an, das heißt  $\nabla_{qg} \cdot \nabla_{qg} d\tilde{p}_g/dt = \nabla_{qg}^2 d\tilde{p}_g/dt$ . Lösen wir nach  $d\tilde{p}_g/dt$  auf, so erhalten wir daraus (siehe Anhang C.5)

$$\frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \nabla_{qg}^{-2} \left( f \frac{d\Pi}{dt} + 2\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g \right). \quad (4.60)$$

Diesen Ausdruck spalten wir nun auf

$$\frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_g + \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_a, \quad (4.61)$$

mit dem rein geostrophischen Anteil

$$\left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_g = \nabla_{qg}^{-2} (\nabla_{qg}^2 \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \tilde{p}_g) = \nabla_{qg}^{-2} [\hat{\mathbf{f}} \cdot (\nabla_h \Pi) (\nabla_h \tilde{p}_g)] \quad (4.62)$$

und dem gemischten Anteil (jene Terme, die entweder geostrophische und ageostrophische oder ausschließlich ageostrophische Größen enthalten)

$$\left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_a = \nabla_{qg}^{-2} \left( f \frac{d\Pi}{dt} + 2\nabla_{qg} \mathbf{v}_a \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v}_a \cdot \nabla \tilde{p}_g \right). \quad (4.63)$$



$d\Pi/dt$  und  $2\nabla_{qg}\mathbf{v}\cdot\nabla\nabla_{qg}\tilde{p}_g$  liefern keinen Beitrag zu  $(d\tilde{p}_g/dt)_g$  (siehe Anhang C.5). Wir verfahren nun desgleichen mit (4.59)

$$\frac{d\mathbf{u}_g}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_g}{dt}\right)_g + \left(\frac{d\mathbf{u}_g}{dt}\right)_a, \quad (4.64a)$$

$$\frac{dB_g}{dt} = \left(\frac{dB_g}{dt}\right)_g + \left(\frac{dB_g}{dt}\right)_a, \quad (4.64b)$$

worin

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_g}{dt}\right)_g = \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}}\cdot\left[\nabla_h\left(\frac{d\tilde{p}_g}{dt}\right)_g - \nabla_h\mathbf{u}_g\cdot\nabla_h\tilde{p}_g\right], \quad (4.65a)$$

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_g}{dt}\right)_a = \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}}\cdot\left[\nabla_h\left(\frac{d\tilde{p}_g}{dt}\right)_a - \nabla_h\mathbf{v}_a\cdot\nabla\tilde{p}_g\right], \quad (4.65b)$$

$$\left(\frac{dB_g}{dt}\right)_g = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\tilde{p}_g}{dt}\right)_g - \frac{\partial\mathbf{u}_g}{\partial z}\cdot\nabla_h\tilde{p}_g, \quad (4.65c)$$

$$\left(\frac{dB_g}{dt}\right)_a = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\tilde{p}_g}{dt}\right)_a - \frac{\partial\mathbf{v}_a}{\partial z}\cdot\nabla\tilde{p}_g. \quad (4.65d)$$

Abschließend geben wir noch einmal das Gleichungssystem (4.54) an, dass die Entwicklung der Schwerewellen in unserem Modell beschreibt, wobei die Terme, die für die spontane Schwerewellenanregung verantwortlich sind, durch geschweifte Klammern hervorgehoben wurden

$$\frac{d\mathbf{u}_a}{dt} = -f\hat{\mathbf{f}}\cdot\mathbf{u}_a - \nabla_h\tilde{p}_{aa} - \left(\frac{d\mathbf{u}_g}{dt}\right)_a - \left\{\nabla_h\tilde{p}_{ag} + \left(\frac{d\mathbf{u}_g}{dt}\right)_g\right\}, \quad (4.66a)$$

$$\frac{dw_a}{dt} = B_a - \frac{\partial\tilde{p}_{aa}}{\partial z} - \left\{\frac{\partial\tilde{p}_{ag}}{\partial z}\right\}, \quad (4.66b)$$

$$\frac{dB_a}{dt} = -N^2w_a - \left(\frac{dB_g}{dt}\right)_a - \left\{\left(\frac{dB_g}{dt}\right)_g\right\}, \quad (4.66c)$$

$$0 = \nabla_h\cdot\mathbf{u}_a + \frac{\partial w_a}{\partial z}. \quad (4.66d)$$

Inwieweit jedoch der Antrieb der Schwerewellen durch den Gleichgewichtsanteil von der Definition des letzteren abhängt, können wir zum jetzigen Zeitpunkt nicht einschätzen. Dazu bedarf es wohl des Vergleichs mit einem anderen Gleichgewichtsmodell, das vorzugsweise eine höhere Genauigkeit besitzen sollte als unser derzeitiges Modell (4.66). Zeigt sich auch darin eine Antriebstätigkeit in ähnlichen Bereichen wie in Abbildung 4.12, so würde unser bisheriger Hinweis auf spontane Schwerewellenabstrahlung im Annulus bekräftigt. Mögliche Anwärter für Gleichgewichtsmodelle höherer Genauigkeit könnten auf der Grundlage der Hesselberg-Philipp'schen Reihenentwicklungen (4.42) durch Anwendung von Filterbedingungen höherer Ordnung als (4.43) entwickelt werden. Allerdings

ist die Verwendung der Hesselberg-Philipps'schen Reihen nicht notwendigerweise der effektivste Weg zur Herleitung von Gleichgewichtsbedingungen hoher Genauigkeit. Dazu könnten Filterbedingungen wie (4.31) besser geeignet sein. Auch die Leitgröße (4.45) mag in diesem Zusammenhang überdacht werden. Darüber hinaus gibt es in der einschlägigen Literatur eine Fülle von Vorschlägen für Gleichgewichtsmodelle mit einer höheren Genauigkeit als das quasigeostrophische Modell. Als Beispiele seien die Modelle von Muraki *et al.* (1999), Dritschel & Viúdez (2003) und Wang & Zhang (2010) genannt. In diesem Zusammenhang sind auch die allgemeinen Betrachtungen über Gleichgewichtsmodelle von Lynch (1989) und Warn *et al.* (1995) erwähnenswert. Die Zerlegung der Strömung in einen Gleichgewichts- und Ungleichgewichtsanteil, wobei ersterer mithilfe nichtlokaler diagnostischer Gleichungen ermittelt wird, ist in der einschlägigen Literatur zweifellos das vorherrschende Modell zur Untersuchung der spontanen Schwerewellenabstrahlung. Es gibt jedoch keinen Grund, anzunehmen, dass es das einzig mögliche ist. Andere Ansätze zur Beschreibung dieses Vorgangs könnten ebenso denkbar und erwägenswert sein. Der unverbindliche Umriss eines teilchenfesten (lokalen) Blickwinkels auf die spontane Schwerewellenabstrahlung wird in Anhang C.6 wiedergegeben.

Die Untersuchung des geostrophischen Antriebs selbst kann zwar anzeigen, ob spontane Schwerewellenabstrahlung stattfindet, nicht aber, wie wichtig der Beitrag dieses Antriebs zum Schwerewellenfeld ist. Um dieser Fragestellung nachzugehen, erscheint es zweckdienlich, den Ungleichgewichtsanteil gesondert in der Zeit zu integrieren, um durch „Abschaltung“ des Antriebs durch den Gleichgewichtsanteil die Auswirkung desselben auf den Ungleichgewichtsanteil zu untersuchen. Ein möglicher Ansatz wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

### 4.4.3 Ein tangential-lineares Modell

Beschreibt der gewählte Gleichgewichtsanteil die tatsächliche Strömung bereits sehr gut, so besitzt der Ungleichgewichtsanteil üblicherweise eine verhältnismäßig kleine Amplitude im Vergleich zum Gleichgewichtsanteil. In diesem Falle ist zu vermuten, dass nichtlineare Wechselwirkungen des Ungleichgewichtsanteils mit sich selbst eine untergeordnete Rolle in dessen Dynamik spielen, zumindest wenn eine begrenzte Zeitspanne betrachtet wird. Es liegt daher nahe, das Gleichungssystem des Ungleichgewichtsanteils zu linearisieren. Dies hat zudem den Vorteil, dass die Beiträge verschiedener Antriebe zur Lösung des linearen Gleichungssystems additiv sind. Ursache und Wirkung lassen sich somit leichter einander zuordnen. Da die Linearisierung des Ungleichgewichtsanteils um den sich in der Zeit entwickelnden Gleichgewichtsanteil erfolgt, nennt man das linearisierte Gleichungssystem ein tangential-lineares Modell. Solche Modelle wurden bereits von Snyder *et al.* (2009) und Wang & Zhang (2010) zur Untersuchung der spontanen Schwerewellenabstrahlung in der Simulation von Wirbeldipolen verwendet. In ersterer Arbeit wurde vom quasigeostrophischen Modell Gebrauch gemacht, um den Gleichgewichtsanteil festzulegen und auch, um diesen in der Zeit zu integrieren. Auf diesem veränderlichen Hintergrund wurde das tangential-lineare Modell des Ungleichgewichtsanteils integriert. Allerdings konnten mit diesem Modell nur innerhalb einer begrenzten Zeitspanne zuverlässige Ergebnisse gewonnen werden, da die Gleichgewichtsströmung aus der Integration des quasigeostrophischen

---

Modells im Laufe der Zeit immer stärker von der tatsächlichen Strömung abwich. Der spontane Antrieb des Ungleichgewichtsanteils erfolgte in diesem Modell durch die sogenannte verminderte Tendenz des Gleichgewichtsanteils (englisch: *residual tendency*). Lassen wir der Einfachheit halber den Antriebsbeitrag von  $\tilde{p}_a$  außer Acht, so besteht die verminderte Tendenz in unserem Gleichungssystem (4.54) aus dem Anteil  $\partial \mathbf{u}_g / \partial t + \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g$  in  $-\mathbf{d}\mathbf{u}_g / dt$  auf der rechten Seite von (4.54a) und  $\partial B_g / \partial t + \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h B_g$  in  $-dB_g / dt$  auf der rechten Seite von (4.54c). Der reine Gleichgewichtsanteil in der verminderten Tendenz (die Terme in geschweiften Klammern in (4.66)) wird im Modell von Snyder *et al.* (2009) nicht explizit abgesondert. Ein ähnlicher Weg wurde in den Untersuchungen zur spontanen Schwerewellenabstrahlung in Wirbeldipolen von Wang & Zhang (2010) eingeschlagen. Allerdings verwandten diese Autoren nicht die quasigeostrophische Näherung zur Definition des Gleichgewichtsanteils, sondern die Horizontaldivergenzfreiheit der Strömung zusammen mit der nichtlinearen Balancegleichung als Gleichgewichtsbedingungen (dies entspricht den beiden Filterbedingungen  $d^0 \delta / dt^0 = \delta \equiv 0$  und  $d\delta / dt \equiv 0$ , siehe (4.31)) sowie die Ertel'sche potentielle Vorticity als Leitgröße. Im Unterschied zu Snyder *et al.* (2009) nutzten Wang & Zhang (2010) nicht das schwerewellengefilterte Gleichungssystem, um den Gleichgewichtsanteil in der Zeit zu integrieren, sondern berechneten den Gleichgewichtsanteil zu den gewünschten Zeitpunkten aus der tatsächlichen Strömung mithilfe der diagnostischen Beziehungen, ebenso wie wir in unserem Modell. Diese Vorgehensweise vermeidet jene systematischen Fehler, welche dadurch entstehen, dass die Lösung des strengen Gleichgewichtsmodells und diejenige des vollständigen Modells im Laufe der Zeit divergieren, so wie im Falle von Snyder *et al.* (2009). Trotz dieser Unterschiede, gelangen beide Arbeiten zu ähnlichen Schlussfolgerungen: Die in den Simulationen der vollständigen Strömung beobachteten Schwerewellen lassen sich verhältnismäßig gut durch das tangential-lineare Modell reproduzieren, wobei die Ergebnisse nahe legen, dass der spontane Antrieb durch den Gleichgewichtsanteil wesentlich zum Schwerewellenfeld beiträgt. Andere Ursachen für das Vorhandensein der Schwerewellen, wie zum Beispiel Instabilitäten, konnten weitestgehend ausgeschlossen werden.

In Anlehnung an diese beiden Arbeiten haben wir das Gleichungssystem (4.66) linearisiert und als tangential-lineares Modell in `cylFloIt` implementiert. Die Linearisierung betrifft dabei fast ausschließlich die materiellen Ableitungen auf der linken Seite. Zum Beispiel

$$\left( \frac{d\mathbf{u}_a}{dt} \right)_{\text{lin.}} = \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} + \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_a. \quad (4.67)$$

Auf der rechten Seite sind  $(d\mathbf{u}_g / dt)_a$  und  $(dB_g / dt)_a$  nur mittelbar von der Linearisierung betroffen. Gemäß (4.65b) und (4.65d) ist ihre Struktur bereits tangential-linear

$$\left( \frac{d\mathbf{u}_g}{dt} \right)_a = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \left[ \nabla_h \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_a - \nabla_h \mathbf{v}_a \cdot \nabla \tilde{p}_g \right], \quad (4.68a)$$

$$\left( \frac{dB_g}{dt} \right)_a = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_a - \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial z} \cdot \nabla \tilde{p}_g, \quad (4.68b)$$

ebenso wie  $(d\tilde{p}_g / dt)_a$  laut (4.63)

$$\left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_a = \nabla_{qg}^{-2} \left[ f \left( \frac{d\Pi}{dt} \right)_{\text{lin.}} + 2 \nabla_{qg} \mathbf{v}_a \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v}_a \cdot \nabla \tilde{p}_g \right]. \quad (4.69)$$

Lediglich die materielle Ableitung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity ist zu linearisieren

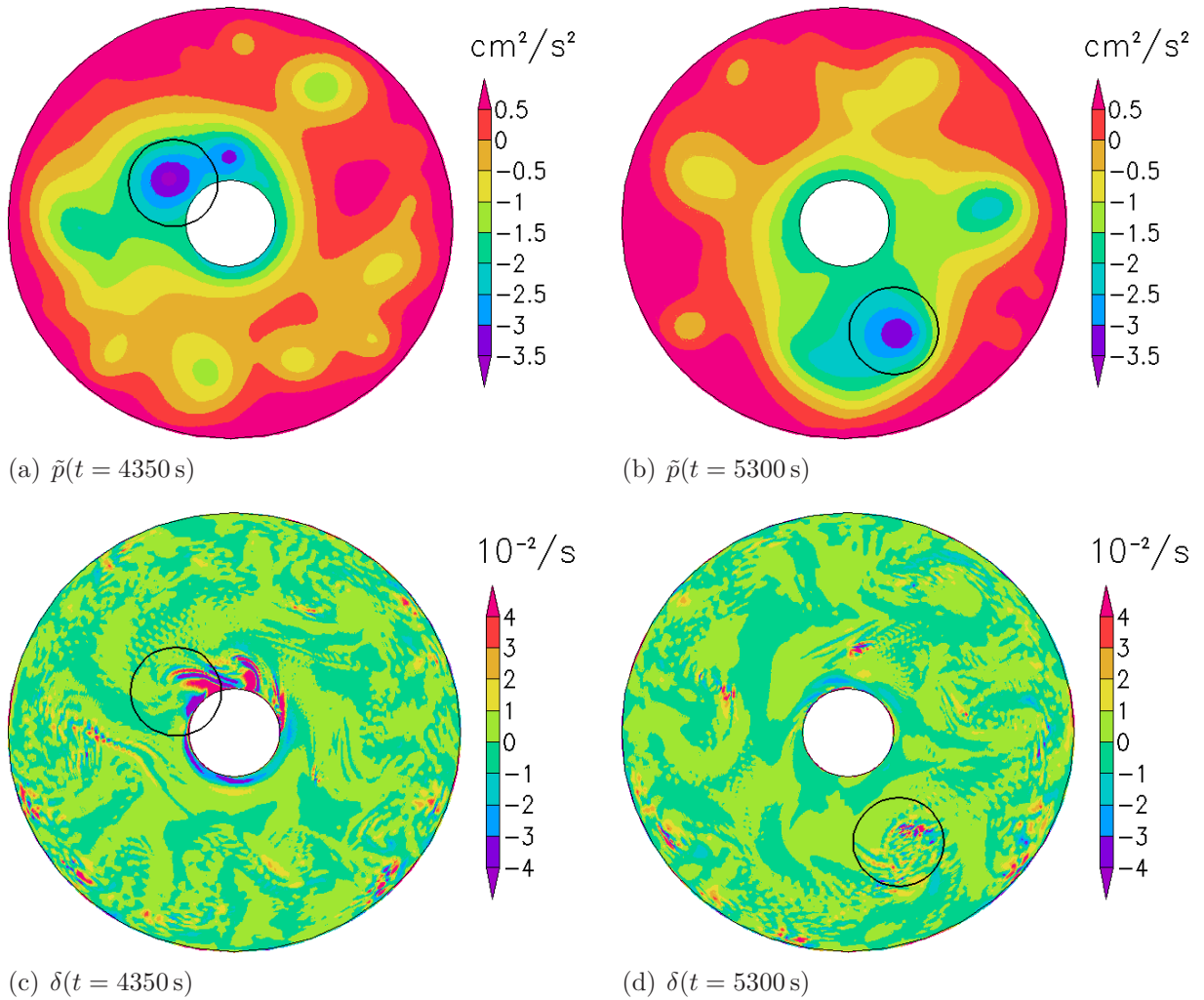
$$\begin{aligned} \left( \frac{d\Pi}{dt} \right)_{\text{lin.}} &= - \left( \zeta_g - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} \cdot \left( \mathbf{e}_z \times \nabla_{\mathbf{h}} w + \frac{f}{N^2} \nabla_{\mathbf{h}} B_a \right) \\ &\quad - \frac{f}{N^2} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial z} \cdot \nabla_{\mathbf{h}} B_g \end{aligned} \quad (4.70)$$

(vergleiche (4.47) und (C.75) in Anhang C.4). Der rein geostrophische Antrieb in geschweiften Klammern verbleibt im linearisierten Gleichungssystem, kann in unserer Implementierung jedoch auch auf Null gesetzt werden; entweder im gesamten Annulus oder mithilfe einer Fensterfunktion (vergleiche (4.25)) nur im Bereich der Annuluswände und des Annulusbodens. Dadurch können wir mögliche Antriebe in den Grenzschichten ausschalten und uns auf den spontanen Schwerewellenantrieb in der freien Flüssigkeit beschränken. Schließlich enthält das linearisierte Gleichungssystem noch die viskose Reibung und die Temperaturleitung der ursprünglichen Gleichungen (2.54) und (2.56). Der quasigeostrophische Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{z}_g$  wird zu jedem diskreten Zeitpunkt der numerischen Integration aus den Feldern der vollständigen Simulation berechnet und bildet den Hintergrund des tangential-linearen Modells. Überdies wird er für die Ermittlung des rein geostrophischen Antriebs benötigt. Der Ungleichgewichtsanteil wird zum Anfangszeitpunkt mit  $\mathbf{z}_a = \mathbf{0}$  initialisiert. In unseren bisherigen Simulationen mit dem tangential-linearen Modell divergiert der Ungleichgewichtsanteil jedoch bereits nach wenigen Minuten Integrationszeit. Bis zum jetzigen Zeitpunkt konnten wir die Ursache hierfür noch nicht ausfindig machen. Möglicherweise enthält das numerische Verfahren noch Fehler oder der angeregte Ungleichgewichtsanteil ist in Bezug auf den quasigeostrophischen Hintergrund tatsächlich instabil. Womöglich wird durch die Verwendung des quasigeostrophischen Gleichgewichtsanteils der spontane Schwerewellenantrieb im Annulus auch zu stark überschätzt.

#### 4.4.4 Die „Reinigung“ des Schwerewellenfeldes

Unsere bisherigen Bestrebungen in Bezug auf die Suche nach einer neuen Annuluskonfiguration waren von dem Wunsch geleitet, das Verhältnis  $N/f$  atmosphärenähnlicher zu machen. Dies ist mit der in Abschnitt 4.1 beschriebenen Annuluskonfiguration zu guten Teilen gelungen. Jedoch wurde an verschiedenen Stellen in dieser Arbeit bereits bemerkt, dass das Schwerewellenfeld zu einem vermutlich erheblichen Teil durch Schwerewellen „verunreinigt“ wird, die von Grenzschichtinstabilitäten herrühren, wie sie von Jacoby *et al.* (2011) und Randriamampianina (2013) beschrieben wurden. Es taucht daher die neue Fragestellung auf, ob der Annulus dergestalt verändert werden kann, dass eine Minderung der Verunreinigung erreicht wird. Wir vermuten, dass dies durch eine Vergrößerung der Spaltbreite gelingen könnte. Bleiben alle anderen Annulusparameter unangetastet, so sollte auch der interne Rossby-Deformationsradius  $L_d$  – die typische horizontale Längenskala der baroklinen Wellen – gemäß der Abschätzung (3.110) unverändert bleiben. Das heißt den baroklinen Wellen würde mehr Raum in radialer Richtung zur Verfügung gestellt, um sich von den Grenzschichten der Zylinderwände entfernen zu können.

Für einen ersten Test haben wir die Parameter der atmosphärenähnlichen Konfiguration aus Tabelle 4.1 verwendet. Lediglich der äußere Zylinderradius wurde von  $b = 70$  cm



**Abbildung 4.13:** Ergebnisse aus einer Simulation einer atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration mit größerer Spaltbreite ( $b - a = 80 \text{ cm}$ , statt  $b - a = 50 \text{ cm}$ ). (a) Druck  $\tilde{p}$  in der Höhe  $z = d/2 = 2 \text{ cm}$  und zum Zeitpunkt  $t = 4350 \text{ s}$  nach Beginn der 3D-Simulation. (b)  $\tilde{p}$  zum Zeitpunkt  $t = 5300 \text{ s}$ . (c) Horizontale Geschwindigkeitsdivergenz  $\delta$  zum Zeitpunkt  $t = 4350 \text{ s}$  und zum Zeitpunkt  $t = 5300 \text{ s}$  in (d). Der schwarze Kreis markiert den Aufenthaltsort ein und desselben Tiefdruckgebiets zu den verschiedenen Zeiten.

auf  $b = 100$  cm erhöht, sodass die Spaltbreite nun  $b - a = 80$  cm, statt  $b - a = 50$  cm beträgt. Für die Simulation haben wir eine Gitterauflösung von  $N_\theta \times N_r \times N_z = 200 \times 200 \times 90$  gewählt. Wir finden in dieser Simulation im Mittel  $N/f \approx 3,9$  (zum Vergleich:  $N/f \approx 3,6$  in der ursprünglichen atmosphärenähnlichen Konfiguration). Das Verhalten der Strömung in dieser neuen Konfiguration lässt sich folgendermaßen charakterisieren: Durch die Vergrößerung von  $b$  wird die Mantelfläche des äußeren Zylinders, über die Wärme in das System strömen kann, zunehmend größer im Vergleich zur Mantelfläche des inneren Zylinders, über welche die Wärme wieder abfließen kann. Begünstigt durch die Transportvorgänge der baroklinen Wellen, staut sich die Wärme daher anscheinend recht schnell, wodurch das radiale Temperaturgefälle in weiten Bereichen des Annulus abgebaut wird. In der Nähe des inneren Zylinders entsteht hingegen ein verhältnismäßig starker Temperaturgradient, sodass neue barokline Wellen bevorzugt in diesem Bereich entstehen. Nach ihrer Entstehung entfernen sie sich langsam von der inneren Zylinderwand. Während sie in den Innenbereich des Spalts driften, schwächen sie sich allmählich ab. Eine führende azimutale Wellenmode ist nicht mehr auszumachen. Vielmehr handelt es sich um einzelne Wirbel, die sich nach und nach wie Tropfen vom inneren Zylinder ablösen. Aus diesem Grunde war es erforderlich den gesamten Annulus zu simulieren. Horizontalschnitte des Drucks und der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz sind in Abbildung 4.13 zu den zwei Zeitpunkten  $t = 4350$  s und  $t = 5300$  s nach Beginn der 3D-Simulation abgebildet. Ein schwarzer Kreis markiert einen Tiefdruckwirbel der sich zum früheren der beiden Zeitpunkte gerade am inneren Zylinder ausgebildet hat. Zum späteren Zeitpunkt hat sich dieser Wirbel vom inneren Zylinder entfernt. Das Divergenzsignal zeigt Hinweise auf Schwerewellenaktivität innerhalb des Wirbels zu beiden Zeitpunkten. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Gitterauflösung geringer ist, als in den Simulationen eines Annulusausschnitts, die wir in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellt haben.

Folgende Fragen sind zum jetzigen Zeitpunkt noch offen: Können sich die Wirbel weit genug von den Zylinderwänden entfernen, um eine fortwährende Verunreinigung ihres Schwerewellenfeldes durch Grenzschichtinstabilitäten in ausreichendem Maße abzuschwächen? Leben die Wirbel lang genug, damit die anfängliche Verunreinigung während ihrer Entstehungszeit nahe der inneren Zylinderwand verschwindet? Nicht zuletzt stellt sich die Frage nach der experimentellen Umsetzbarkeit eines differentiell geheizten Annulus mit derart großer Spaltbreite.

## 4.5 Zusammenfassung der spontanen Schwerewellenabstrahlung im Annulus

Die Bedeutung der großskaligen Gleichgewichtsströmung als Quelle für Schwerewellen in der Atmosphäre ist eine wichtige Fragestellung im Rahmen der Parametrisierung nichtaufgelöster Schwerewellen in Wettervorhersage- und Klimamodellen, die bis zum heutigen Tage nicht zufriedenstellend beantwortet werden konnte. Angesichts der mannigfachen Hindernisse, die die Untersuchung dieses Phänomens in der Atmosphäre erschweren, wie zum Beispiel der messtechnische Aufwand, der erforderlich ist, um das Phänomen räumlich und zeitlich mit ausreichender Genauigkeit aufzulösen, wäre es vorteilhaft, wenn sich der

---

Prozess der spontanen Schwerewellenabstrahlung in einem kontrollierbaren Laborexperiment systematisch untersuchen ließe. Der differentiell geheizte rotierende Annulus (Hide, 1958) erscheint in diesem Zusammenhang besonders geeignet, da sich mit diesem Experiment die schwerewellenabstrahlende synoptischskalige, barokline Strömung in mittleren Breiten nachbilden lässt. Über Hinweise auf eine Schwerewellentätigkeit im rotierenden Annulus wurde in der einschlägigen Literatur bereits berichtet. Jedoch wurde entweder eine nicht thermisch, sondern mechanisch angetriebene Zweischichtenvariante des Experiments verwendet (Williams *et al.*, 2003, 2005, 2008) oder die beobachteten Schwerewellen wurden durch Grenzschichtinstabilitäten und nicht durch spontane Abstrahlung verursacht (Jacoby *et al.*, 2011; Randriamampianina, 2013). Ziel unserer Arbeit war es, zu untersuchen, wie ein Annulusexperiment aussehen könnte, in dem die spontane Schwerewellenabstrahlung stattfindet und das zugleich eine gute Übertragbarkeit der experimentell gewonnenen Erkenntnisse auf die atmosphärischen Gegebenheiten vermuten lässt. Ein numerisches Modell des rotierenden Annulus (cylFloit) diene uns als Werkzeug für unsere Untersuchungen.

In der klassischen Konfiguration des Annulusexperiments ist das Verhältnis der Auftriebschwingungsfrequenz  $N$  zur Trägheitsschwingungsfrequenz  $f$  kleiner als Eins (innerhalb des Bereiches barokliner Instabilität), während in mittleren Breiten ein typischer Wert von  $N/f \sim 100$  in der Atmosphäre beobachtet wird. Diese beiden Frequenzen spannen den Bereich auf, in dem die intrinsischen Frequenzen der Schwerewellen liegen können. Dabei besitzen Schwerewellen mit überwiegend horizontaler Ausbreitungsrichtung Frequenzen nahe  $N$ , während vertikal propagierende Wellen Frequenzen nahe  $f$  besitzen. Dass erstere hochfrequente und letztere niederfrequente Wellen sind, ist ausschlaggebend für ihren Einfluss auf die großskalige Zirkulation und die Schwierigkeiten, die sich bei ihrer Parametrisierung ergeben. Um das Annulusexperiment dahingehend atmosphärenähnlicher zu machen, muss es derart entworfen werden, dass zumindest  $N/f > 1$  gilt. Ohne eine differentielle Heizung der oberen und unteren Berandung des Annulus (so wie von Miller & Fowles (1986) vorgeschlagen), bleiben als Möglichkeiten, um den Wert von  $N/f$  zu erhöhen, die Erhöhung des Temperaturunterschieds zwischen innerer und äußerer Zylinderwand und die Verringerung der Füllhöhe sowie der Winkelgeschwindigkeit, mit der sich der Annulus dreht. Diese Veränderungen sind jedoch so aufeinander abzustimmen, dass die barokline Instabilität der Strömung erhalten bleibt. Dazu diene uns die Bedingung für barokline Instabilität aus dem quasigeostrophische Modell von Eady (1949) als Richtschnur. Ferner haben wir versucht, bei der Wahl neuer Parameter, die experimentelle Umsetzbarkeit zu berücksichtigen. Wir haben uns letztlich für einen, im Vergleich zur klassischen Konfiguration, verhältnismäßig breiten und seichten Annulus entschieden, der einen größeren Temperaturunterschied zwischen innerer und äußerer Zylinderwand besitzt und relativ langsam rotiert. In dieser Konfiguration, mit innerem und äußerem Radius  $a = 20$  cm und  $b = 70$  cm, einer Füllhöhe von lediglich  $d = 4$  cm, einem Temperaturunterschied von  $T_b - T_a = 30$  K und einer Winkelgeschwindigkeit von  $\Omega = 0,08$  rad/s (0,76 U/min), finden wir  $N/f \sim 4$  – ein etwas niedrigerer Wert als unsere theoretische Vorabschätzung. Neben dieser atmosphärenähnlicheren Annuluskonfiguration haben wir zum Vergleich eine klassische Konfiguration simuliert, die einen inneren und äußeren Radius von  $a = 4,5$  cm und  $b = 12$  cm, eine Füllhöhe von  $d = 13,5$  cm, einen Temperaturunterschied von  $T_b - T_a = 8$  K und eine Winkelgeschwindigkeit von  $\Omega = 0,63$  rad/s (6 U/min) besitzt. In dieser Konfiguration beobachten wir  $N/f \sim 0,3$ .

Die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz als Indikator für Schwerewellen deutet auf das Vorhandensein derselben in beiden Konfigurationen hin. Eine verstärkte Schwerewellentätigkeit zeigt sich nahe der inneren Zylinderwand und innerhalb der baroklinen Welle. In der atmosphärenähnlichen Konfiguration bilden die Schwerewellen eine kleinskalige, spiralförmig gewundene Struktur in den Tiefdruckzentren der baroklinen Welle, während die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz in der klassischen Konfiguration längliche, zungenförmige Strukturen entlang des Strahlstroms anzeigt. Insbesondere in der atmosphärenähnlichen Konfiguration ähneln die Strukturen den spontan abgestrahlten Schwerewellen, die in den Simulationen einer baroklinen Welle in der Atmosphäre beobachtet wurden (zum Beispiel O’Sullivan & Dunkerton, 1995). Eine Modenzerlegung innerhalb der linearisierten Boussinesq-Gleichungen (zum Beispiel Achatz, 2007) deutet darauf hin, dass Schwerewellen wesentlich zur Energie der kleinskaligen Strukturen in Bereichen beitragen, in denen auch die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz Schwerewellenaktivität nahelegt. Ein nicht unerheblicher Teil der beobachteten Schwerewellen hat seinen Ursprung offenbar in Instabilitäten in der Grenzschicht an der inneren Zylinderwand, gleich denen, die von Jacoby *et al.* (2011) und Randriamampianina (2013) beschrieben wurden. Gleichwohl erscheint auch die spontane Schwerewellenabstrahlung zum Schwerewellenfeld beizutragen, wie Untersuchungen auf der Grundlage der Zerlegung der Strömung in einen Gleichgewichts- und Ungleichgewichtsanteil zeigen. Als Ausgang für unseren diesbezüglichen Ansatz verwenden wir die Hesselberg-Philipps’schen Reihen (Hesselberg, 1915; Philipps, 1939a), die aufgrund ihrer verhältnismäßigen Schlichtheit und Nachvollziehbarkeit in Herleitung und Gestalt besonders geeignet für den Einstieg in diese Thematik erscheinen. Sie lassen sich sowohl mit skalenanalytischen Ansätzen (zum Beispiel Vallis, 2006) als auch mit dem Filterungsverfahren nach Hinkelmann (1962, 1966) verknüpfen. Darauf aufbauend, haben wir von der quasigeostrophischen Näherung Gebrauch gemacht, um den Gleichgewichtsanteil der Annulusströmung zu definieren. Der Antrieb, den derselbe auf die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz – eine Größe, die in unserem Ansatz keinen Gleichgewichtsanteil enthält – ausübt, wurde als Indikator für die spontane Schwerewellenabstrahlung eingesetzt. Verhältnismäßig starke Signale dieses Indikators konnten in Bereichen innerhalb der baroklinen Wellen beobachtet werden, in denen bereits die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz und die Modenzerlegung eine erhöhte Schwerewellentätigkeit nahegelegt haben.

Unsere bisherigen Befunde deuten darauf hin, dass die spontane Anregung von Schwerewellen nicht nur eine wichtige Quelle derselben in der Atmosphäre ist, sondern auch im Annulusexperiment in Erscheinung tritt. Trotz einer erheblichen „Verunreinigung“ des Schwerewellenfeldes durch Grenzschichtinstabilitäten, selbst in der atmosphärenähnlichen Konfiguration, hoffen wir, dass unsere Ergebnisse möglicherweise dazu anregen, die spontane Schwerewellenabstrahlung in neuen Annuluskonfigurationen im Labor zu untersuchen.

---



# KAPITEL 5

---

## Zusammenfassung und Ausblick

---

Ein Finite-Volumen-Modell des differentiell geheizten rotierenden Annulus wurde verwendet, um die spontane Schwerewellenabstrahlung durch die von baroklinen Wellen beherrschte großskalige Strömung zu untersuchen. Bei diesem Vorgang bildet die großskalige Strömung, die häufig in guter Näherung ein Gleichgewicht wie beispielsweise das quasi-geostrophische erfüllt, in einigen Bereichen fortwährend Ungleichgewichte aus, die sich in Gestalt von Schwerewellen ausbreiten. Die spontane Schwerewellenabstrahlung ist vermutlich eine wichtige Quelle für Schwerewellen in der Atmosphäre, lässt sich dort aber nur mit verhältnismäßig großem Aufwand untersuchen (Fritts & Alexander, 2003; Plougonven & Zhang, 2014). Ein Laborexperiment, das im Vergleich zur Atmosphäre steuerbar und wiederholbar ist, könnte als Ergänzung zu Atmosphärenmessungen wertvolle Beiträge zur Erforschung der spontanen Schwerewellenabstrahlung leisten. Davon könnte zum Beispiel die Parametrisierung dieser Schwerewellenquelle in numerischen Wettervorhersage- und Klimamodelle, die diese Quelle nicht oder nur unzureichend auflösen, profitieren. Das Experiment des differentiell geheizten rotierenden Annulus (Hide, 1958), in welchem sich ähnliche dynamische Strukturen beobachten lassen, wie in der Atmosphäre in mittleren Breiten, erscheint in diesem Zusammenhang besonders geeignet. Erste Laborversuche zur spontanen Schwerewellenabstrahlung wurden bereits mit einem Zweischichtenannulus unternommen (Williams *et al.*, 2003, 2005, 2008). Das Hauptziel unserer Arbeit bestand darin, nach Hinweisen auf die spontane Schwerewellenabstrahlung im differentiell geheizten rotierenden Annulus mithilfe eines numerischen Modells (mit Namen *cylindrical flow solver with implicit turbulence model* – cylFloit) zu suchen, die dieses Experiment als Labormodell dieser Schwerewellenquelle infrage kommen lassen.

Auf dem Wege dorthin haben wir zunächst eine Validierung unseres numerischen Modells vorgenommen. Temperaturmessungen der Flüssigkeitsoberfläche, die uns von U. Harlander, M. Vincze und K. D. Alexandrov (BTU Cottbus-Senftenberg) zur Verfügung gestellt wurden, wurden dazu mit den entsprechenden Simulationen verglichen, und zwar in Bezug auf die azimutale Modenzahl der dominanten baroklinen Welle und in Bezug auf das führende Variabilitätsmuster des Temperaturfeldes, das mithilfe einer Hauptkomponentenanalyse ermittelt wurde. Die Ergebnisse zeigen, dass unser Modell insgesamt verhältnismäßig gut mit dem Experiment übereinstimmt beziehungsweise in vertretbarem Maße davon abweicht.

Die Untersuchung der Eigenschaften des Flüssigkeitshintergrundes, auf dem sich die Schwerewellen im Annulus ausbreiten, bildete den nächsten Schritt. Bei gegebener intrinsischer Frequenz einer Schwerewelle ist es das Verhältnis der Auftriebsschwingungsfrequenz (Brunt-Väisälä-Frequenz) zur Trägheitsschwingungsfrequenz (Coriolis-Parameter), das die vertikale Ausrichtung des Wellenzahlvektors, der (anti)parallel zum Phasengeschwindigkeitsvektor der Welle ist, bestimmt (Fritts & Alexander, 2003). In klassischen Annuluskonfigurationen ist dieses Verhältnis ungefähr drei Größenordnungen kleiner als in der Atmosphäre. Dies beeinträchtigt möglicherweise die Übertragbarkeit von Erkenntnissen über die Schwerewelldynamik, die im Annulusexperiment gewonnen werden, auf atmosphärische Bedingungen. Aus diesem Grunde wählten wir eine neue, atmosphärenähnliche Annuluskonfiguration als Umgebung für unsere Untersuchungen, in der das Verhältnis der Brunt-Väisälä-Frequenz zum Coriolis-Parameter soweit erhöht werden konnte, dass eine bessere Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die Atmosphäre vermutet werden darf.

In dieser atmosphärenähnlichen Konfiguration lieferten die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz und eine Normalmodenanalyse kleinskaliger Abweichungen von einem gleitenden Volumenmittel des Strömungszustandes Hinweise auf Schwerewellenaktivität im Annulus. Ein erheblicher Teil der beobachteten Schwerewellen rührt anscheinend von einer Instabilität in der Grenzschicht an der inneren Zylinderwand des Annulus her (Jacoby *et al.*, 2011; Randriamampianina, 2013). Dennoch legen unsere Untersuchungen nahe, dass auch die spontane Schwerewellenabstrahlung zum Schwerewellenfeld im Annulus beiträgt. Diese Untersuchungen beruhen auf einer Zerlegung der Strömung in einen schwerewellenfreien Gleichgewichtsanteil und einen schwerewellenenthaltenden Ungleichgewichtsanteil. Für die Definition des Gleichgewichtsanteils verwendeten wir das quasigeostrophische Gleichgewicht (zum Beispiel Vallis, 2006). Die Abweichung der tatsächlichen Strömung von diesem Gleichgewicht – der Ungleichgewichtsanteil – wird in unserem Modell definitionsgemäß durch Schwerewellen hervorgerufen. In diesem Modell bildet der Antrieb des Ungleichgewichtsanteils durch den Gleichgewichtsanteil die Ursache der spontanen Schwerewellenabstrahlung (Snyder *et al.*, 2009; Wang & Zhang, 2010). Der Antrieb der horizontalen Geschwindigkeitsdivergenz, die in unserem Modell keinen Gleichgewichtsanteil enthält, durch die quasigeostrophische Strömung diente uns als Indikator für spontane Schwerewellenabstrahlung. Ein verhältnismäßig starkes Signal dieses Indikators innerhalb der baroklinen Welle in der atmosphärenähnlichen Annuluskonfiguration deutet darauf hin, dass die spontane Schwerewellenabstrahlung im Annulus stattfindet. Schließlich wurde ein tangential-lineares Modell, in dem der Ungleichgewichtsanteil um den Gleichgewichtsanteil linearisiert ist, in das numerische Modell implementiert, um zu klären, wie wichtig diese Quelle für das Schwerewellenfeld im Annulus ist und welche Eigenschaften die spontan abgestrahlten Schwerewellen besitzen. Da der Ungleichgewichtsanteil im tangential-linearen Modell aus bisher unbekanntem Gründen divergiert, liegen uns derzeit noch keine brauchbaren Ergebnisse vor. Dessen ungeachtet denken wir, dass unsere bisherigen Ergebnisse die Schlussfolgerung rechtfertigen, dass das Annulusexperiment als Labormodell der spontanen Schwerewellenabstrahlung infrage kommt.

Eine mögliche Fortführung dieser Arbeit könnte darin bestehen, die offensichtlich noch vorhandenen Fehler im tangential-linearen Modell zu beheben. Fragen, die sich mit diesem Modell möglicherweise beantworten ließen, sind zum Beispiel: Kann der Gleichgewichtsanteil der Strömung in den Antriebstermen des Ungleichgewichtsanteils durch die

tatsächlich simulierte Strömung ersetzt werden, ohne einen größeren Fehler zu machen? Die Berechnung des Gleichgewichtsanteils erfolgt nämlich mithilfe nichtlokaler diagnostischer Gleichungen, deren numerische Lösung mit nicht unerheblichem Aufwand verbunden ist. Eine Parametrisierung der spontanen Schwerewellenabstrahlung, welche die Kenntnis des Gleichgewichtsanteils des Atmosphärenzustandes voraussetzt, wäre unökonomisch, sofern dieser Gleichgewichtsanteil nicht bereits standardmäßig im Modell berechnet würde. Es könnte somit von Vorteil sein, wenn sich zeigen ließe, dass die lokalen Eigenschaften der simulierten Strömung für eine Parametrisierung ausreichend sind. Eine denkbare Fragestellung, die sich daran anschließt, wäre, wie das tangential-lineare Modell auf eine Verringerung der Gitterauflösung reagiert. Können auch aus einer verhältnismäßig grob aufgelösten Strömung, wie man sie üblicherweise in Klimamodellen vorfindet, noch ausreichend Informationen gezogen werden, um die Eigenschaften der spontan abgestrahlten Schwerewellen abzuleiten, die für eine Parametrisierung derselben vonnöten sind? Üblicherweise sind die Amplitude, die (intrinsische) Frequenz und der Wellenzahlvektor einer abgestrahlten Schwerewelle (beziehungsweise eines abgestrahlten Schwerewellenpakets) im Rahmen der Quellparametrisierung vorzugeben (Fritts & Alexander, 2003). Die mathematischen Modelle und Verfahren, deren Einsatz möglicherweise notwendig sein wird, um die besagten Schwerwelleneigenschaften als Funktion der abstrahlenden Hintergrundströmung zu erhalten, gehen jedoch weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, sodass wir an dieser Stelle auf weitere Mutmaßungen verzichten möchten.

Über die Hürden, denen sich der Experimentator bei der Erforschung von Schwerewellen in einem atmosphärenähnlichen Annulus gegenübersehen, haben wir in dieser Arbeit mangels entsprechender Fachkenntnisse nicht gesprochen. In der Praxis mögen diese bereits bei der Konstruktion eines atmosphärenähnlichen Annulus beginnen, dessen horizontale Abmessungen wesentlich größer sind als jene einer klassischen Konfiguration. Die gleichmäßige Beheizung des äußeren Zylinders und die Handhabung der Massen-, Impuls- und Wärme-flüsse über eine verhältnismäßig große freie Flüssigkeitsoberfläche mögen nur einige der vielen Herausforderungen in diesem Zusammenhang sein. Auch aufseiten der Messtechnik dürften Weiterentwicklungen notwendig sein, damit die Vorgänge auf den verhältnismäßig kleinen Skalen der Schwerewellen vielleicht einmal mit ähnlicher Genauigkeit vermessen werden können, wie es heute mit den baroklinen Wellen möglich ist. Die Überlegungen in Richtung eines Annulus mit noch größerer Spaltbreite, die wir als mögliche Maßnahme zur Verminderung des Beitrags der Grenzschichtinstabilität an der inneren Zylinderwand zum Schwerwellenfeld in der baroklinen Welle in Betracht gezogen haben, erscheinen vor diesem Hintergrund erst in fernerer Zukunft umsetzbar, wenn möglicherweise bereits Erfahrungen mit der atmosphärenähnlichen Konfiguration vorliegen.



# ANHANG A

---

## Nebenrechnungen zum Modell

---

### A.1 Die Bilanzgleichung des äußeren Drehimpulses

In einem Inertialsystem lautet die allgemeine Bilanzgleichung des Schwerpunktsdrehimpulses eines Flüssigkeitsteilchens  $\mathbf{l}_a := \mathbf{r} \times \mathbf{v}$  gemäß (2.16)

$$\rho \frac{d\mathbf{l}_a}{dt} = \boldsymbol{\sigma}_{l_a} - \nabla \cdot \mathbb{J}_{l_a}. \quad (\text{A.1})$$

Verwenden wir

$$\frac{d\mathbf{l}_a}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v}}_{=\mathbf{v}} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad (\text{A.2})$$

so erhalten wir im rotierenden Bezugssystem aus  $\mathbf{r} \times$  (2.17) folgende Bilanzgleichung für  $\mathbf{l}_a$

$$\rho \frac{d\mathbf{l}_a}{dt} + \rho \mathbf{r} \times \left[ 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] = \rho(\mathbf{r} \times \mathbf{g}) \underbrace{-\mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbb{P}}_{=(\nabla \cdot \mathbb{P}) \times \mathbf{r}}. \quad (\text{A.3})$$

Zur Auswertung des zweiten Terms auf der rechten Seite betrachten wir

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbb{P} \times \mathbf{r}) &= \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbb{P}} \times \mathbf{r}) + \nabla \cdot (\mathbb{P} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{r}}) \\ &= (\nabla \cdot \mathbb{P}) \times \mathbf{r} + (\mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla) \times \mathbf{r} \\ &= (\nabla \cdot \mathbb{P}) \times \mathbf{r} + \mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \times \mathbf{r} \\ &= (\nabla \cdot \mathbb{P}) \times \mathbf{r} + (\mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \times \mathbf{r})_\times. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Dabei haben wir im ersten Schritt von der Produktregel Gebrauch gemacht, wobei der Pfeil  $\downarrow$  diejenige Größe markiert, auf welche die Ableitung des Nabla-Operators wirkt. In Bezug auf die jeweils andere Größe verhält sich der Nabla-Operator wie ein gewöhnlicher

Vektor. Im zweiten Schritt haben wir das Assoziativgesetz (D.36) sowie (D.1) verwendet, wobei mit dem hochgestellten  $\dagger$  die Transponierung eines Tensors gekennzeichnet wird. Im dritten Schritt haben wir (D.80) und (D.81) benutzt. Dabei bezeichnet  $\mathbb{P}^\dagger \cdot \times \nabla \mathbf{r}$  das Skalar-Kreuzprodukt des Tensors  $\mathbb{P}^\dagger$  mit dem Tensor  $\nabla \mathbf{r}$ , welches laut (D.78) als Vektor des Tensors  $\mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{r}$  gedeutet werden kann, welcher wiederum durch ein tiefgestelltes  $\times$  gekennzeichnet wird. Betrachten wir weiterhin die Taylor-Entwicklung eines beliebigen Vektors  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  am Ort  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}$  bis zur ersten Ordnung um den Ort  $\mathbf{r}_1$  (zum Beispiel Nolting, 2004)

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_2, t) = \mathbf{a}(\mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}, t) \approx \mathbf{a}(\mathbf{r}_1, t) + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{a}|_{\mathbf{r}_1}, \quad (\text{A.5})$$

setzen darin  $\mathbf{a} = \mathbf{r}$  und vergleichen mit der Identität  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \delta \mathbf{r}$ , so finden wir

$$\nabla \mathbf{r} = \mathbb{E}, \quad (\text{A.6})$$

wobei  $\mathbb{E}$  für den Einheitstensor steht. Damit folgt (Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\left( \mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{r} \right)_{\times} = \left( \mathbb{P}^\dagger \cdot \mathbb{E} \right)_{\times} = \left( \mathbb{P}^\dagger \right)_{\times} = -\mathbb{P}_{\times}, \quad (\text{A.7})$$

wobei (D.27) verwandt wurde. Setzen wir dies in (A.4) ein, so finden wir

$$\left( \nabla \cdot \mathbb{P} \right) \times \mathbf{r} = \nabla \cdot (\mathbb{P} \times \mathbf{r}) + \mathbb{P}_{\times} \quad (\text{A.8})$$

und damit schließlich (vergleiche Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\rho \frac{d\mathbf{l}_a}{dt} + \rho \mathbf{r} \times \left[ 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] = \underbrace{\rho(\mathbf{r} \times \mathbf{g})}_{=\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{l}_a}} + \mathbb{P}_{\times} - \nabla \cdot \underbrace{(-\mathbb{P} \times \mathbf{r})}_{=\mathbb{J}_{\mathbf{l}_a}}. \quad (\text{A.9})$$

## A.2 Ein kurzer Blick auf die Thermodynamik

Wir können die Thermodynamik in diesem Abschnitt aus Platzgründen lediglich grob anreißen, sodass viele wichtige Gesichtspunkte ungenannt bleiben müssen. Eingehendere Betrachtungen zur Thermodynamik finden sich in der Literatur, auf die in diesem Abschnitt verwiesen wird. Das thermodynamische System, das wir zunächst betrachten möchten, ist ein materielles Volumen  $V$ . Die innere Energie dieses Volumens bezeichnen wir mit  $E$ . In unserem System besteht diese aus der Energie, welche in den Bewegungen der Moleküle relativ zum Schwerpunkt der Flüssigkeits- oder Luftteilchen steckt (namentlich Translation, Rotation und Schwingung). Den Ausgangspunkt bildet die differentielle Formulierung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\frac{d(E)}{dt} = \frac{\bar{d}(A)}{dt} + \frac{\bar{d}(Q)}{dt}, \quad (\text{A.10})$$

worin  $\bar{d}$  ein unvollständiges Differential bezeichnet (zur Notation  $d(\cdot)$  beziehungsweise  $\bar{d}(\cdot)$  siehe (2.2)). Danach wird eine Änderung der inneren Energie  $d(E)$  einmal durch

eine am oder vom System geleistete Arbeit  $d(A)$  und zum anderen durch eine von der Umgebung des Systems aufgenommene oder daran abgegebene Wärmemenge  $d(Q)$  verursacht. Die innere Energie ist nach Carnot eine Zustandsgröße des Systems und besitzt damit ein vollständiges Differential. Arbeit und Wärmemenge sind hingegen Prozessgrößen, die eine Wechselwirkung beziehungsweise einen Austausch zwischen dem System und seiner Umgebung beschreiben. Sie sind keine Zustandsgrößen des Systems und besitzen im Allgemeinen kein vollständiges Differential.

Wir suchen nun zunächst einen Ausdruck für die Arbeitsleistung  $d(A)/dt$ . Da die Arbeit letztlich an oder von den Molekülen des Systems geleistet wird, ist es naheliegend, für die Modellierung der Arbeitsleistung auf den molekularen Impulsflusstensor  $\mathbb{P} = p\mathbb{E} + \mathbb{F}$  zurückzugreifen, der die Information über den Molekülimpuls relativ zum Schwerpunkt des Flüssigkeits- oder Luftteilchens enthält. Die Kraft, die durch die Molekülbewegung auf ein differentielles Flächenstück  $d\mathbf{S}$  der Systemberandung ausgeübt wird, lautet damit  $-d\mathbf{S} \cdot \mathbb{P}$  (auf das negative Vorzeichen kommen wir später zu sprechen). Die Arbeit (= Kraft  $\times$  Weg), die dabei geleistet wird, erhält man, indem man den vorigen Ausdruck mit dem Wegstück  $d\mathbf{r}$ , den das Flächenstück durch die Krafteinwirkung zurücklegt, skalar multipliziert,  $-d\mathbf{S} \cdot \mathbb{P} \cdot d\mathbf{r}$ . Schließlich folgt daraus die Leistung (= Arbeit/Zeit), indem wir durch die Zeitspanne  $dt$  teilen, in der das Wegstück zurückgelegt wurde,  $-(d\mathbf{S} \cdot \mathbb{P} \cdot d\mathbf{r})/dt = -d\mathbf{S} \cdot \mathbb{P} \cdot (d\mathbf{r}/dt) = -d\mathbf{S} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbf{v}$ . Durch Integration über die Oberfläche des materiellen Volumens erhält man die Gesamtarbeitsleistung (Herbert (2012b), vergleiche auch Jou *et al.* (2001); Zdunkowski & Bott (2004))

$$\left[ \frac{d(A)}{dt} \right]_{\text{ges.}} := - \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbf{v} = - \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot (\mathbb{P} \cdot \mathbf{v}) = - \int_V \nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \mathbf{v}) dV, \quad (\text{A.11})$$

wobei vom Gauß'schen Integralsatz Gebrauch gemacht wurde (zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001). Wir werten den Integranden des Volumenintegrals nun weiter aus (Pichler, 1984; Jou *et al.*, 2001; Zdunkowski & Bott, 2003, 2004; Altenbach, 2012)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}) \\ &= (\nabla \cdot \mathbb{P}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbb{P}) \cdot \overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \\ &= (\nabla \cdot \mathbb{P}) \cdot \mathbf{v} + (\mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} \\ &= (\nabla \cdot \mathbb{P}) \cdot \mathbf{v} + \mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Dabei wurde im ersten Schritt die Produktregel angewendet, wobei der Pfeil  $\downarrow$  diejenige Größe kennzeichnet, auf die die Ableitung des Nabla-Operators wirkt. Im dritten Schritt haben wir (D.1) benutzt und im vierten Schritt (D.45).  $\mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v}$  bezeichnet dabei das Doppelskalarprodukt des Tensors  $\mathbb{P}^\dagger$  mit dem Tensor  $\nabla \mathbf{v}$ , dessen Ergebnis ein Skalar ist (siehe Anhang D.3). Setzen wir (A.12) in (A.11) ein, so erhalten wir zwei Beiträge zur Gesamtarbeitsleistung (Herbert, 2012b)

$$\left[ \frac{d(A)}{dt} \right]_{\text{ges.}} = \underbrace{- \int_V (\nabla \cdot \mathbb{P}) \cdot \mathbf{v} dV}_{=:\left[ \frac{d(A)}{dt} \right]_{\text{mech.}}} - \underbrace{\int_V \mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} dV}_{=:\left[ \frac{d(A)}{dt} \right]_{\text{therm.}}}. \quad (\text{A.13})$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Arbeitsleistung der Molekülbewegungen auf den Schwerpunkt des Flüssigkeits- oder Luftteilchens. Dieser Beitrag wird bereits in der Impulsbilanz (2.17) berücksichtigt. Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt die Arbeitsleistung relativ zum Schwerpunkt und ist damit der für die Thermodynamik maßgebliche Anteil, den wir nun weiter aufschlüsseln

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} &= (p\mathbb{E}^\dagger + \mathbb{F}^\dagger) \cdot \nabla \mathbf{v} = p\mathbb{E} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &= p(\nabla \mathbf{v})_\bullet + \mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} = p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v}.\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Dabei haben wir die Symmetrie des Einheitstensors ( $\mathbb{E}^\dagger = \mathbb{E}$ ) sowie (D.47) und (D.18) ausgenutzt, wobei der tiefgestellte Punkt  $\bullet$  den Skalar eines Tensors bezeichnet (siehe Anhang D.1). Die Geschwindigkeitsdivergenz können wir mithilfe der Entwicklungsgleichung des massenspezifischen Volumens eines Flüssigkeits- oder Luftteilchens  $v := dV/dM = 1/\rho$  ersetzen

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = -\rho \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{A.15})$$

wobei die Kontinuitätsgleichung (2.13) verwendet wurde. Damit erhalten wir für die thermodynamische Arbeitsleistung (Herbert, 2012b)

$$\left[ \frac{d(A)}{dt} \right]_{\text{therm.}} = \frac{d(A)}{dt} = \int_V \rho \frac{da}{dt} dV := - \int_V \left( \rho p \frac{dv}{dt} + \mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} \right) dV \quad (\text{A.16})$$

$$\Rightarrow \rho \frac{da}{dt} = -\rho p \frac{dv}{dt} - \mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v}, \quad (\text{A.17})$$

wobei die massenspezifische thermodynamische Arbeitsleistung eines einzelnen Flüssigkeits- oder Luftteilchens  $da/dt$  eingeführt wurde. Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Volumenarbeit. Verrichtet das Teilchen Arbeit, um sein Volumen zu vergrößern ( $dv > 0$ ), so wird die dafür benötigte Energie dem eigenen Vorrat an innerer Energie entnommen ( $de < 0$ , mit  $E = \int_V \rho e dV$ ). Dieser Tatsache wird durch das in der ursprünglichen Definition (A.11) eingeführte negative Vorzeichen Rechnung getragen, da  $p > 0$ . Der zweite Term auf der rechten Seite ist die sogenannte Dissipationsrate oder Reibungswärme. Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass wir hier und im Folgenden annehmen, dass sich die einzelnen Flüssigkeits- oder Luftteilchen im oder nahe dem thermodynamischen Gleichgewicht befinden, sodass die Zustandsgrößen, die man ihnen zuweist, wie Druck  $p$  und absolute Temperatur  $T$ , wohldefiniert sind (Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdankowski & Bott, 2004).

Als nächstes betrachten wir den Austausch von Wärme zwischen dem System und seiner Umgebung. Für ein einkomponentiges System erfolgt die Wärmez- oder -abfuhr üblicherweise über die Oberfläche des Systems, sodass wir diese als Fluss über die Oberfläche modellieren können (Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdankowski & Bott, 2004)

$$\frac{d(Q)}{dt} = \int_V \rho \frac{dq}{dt} dV := - \oint_{\partial V} d\mathbf{S} \cdot \mathbf{J}_q = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_q dV \quad (\text{A.18})$$

$$\Rightarrow \rho \frac{dq}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q, \quad (\text{A.19})$$



worin  $\dot{dq}/dt$  den massenspezifischen Wärmeaustausch zwischen dem Fluidteilchen und seiner Umgebung bezeichnet. Damit erhalten wir aus (A.10) die teilchenfeste Bilanzgleichung der inneren Energie (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{da}{dt} + \rho \frac{dq}{dt} = -\rho p \frac{dv}{dt} - \underbrace{\mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q}_{=: \rho \frac{dq^*}{dt}}. \quad (\text{A.20})$$

Mithilfe der Legendre-Transformation (zum Beispiel Zdunkowski & Bott, 2004)

$$de + pdv = de + d(pv) - vdp = d \underbrace{(e + pv)}_{=: h} - vdp \quad (\text{A.21})$$

können wir (A.20) als Bilanzgleichung der in der Atmosphärendynamik bevorzugten Enthalpie  $h$  schreiben

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \rho \frac{dq^*}{dt}, \quad (\text{A.22})$$

wobei wir  $\rho v = 1$  benutzt haben.

Das thermodynamische System des Fluidteilchens wird bisher durch drei Zustandsgrößen beziehungsweise Freiheitsgrade charakterisiert, zum Beispiel durch die absolute Temperatur  $T$ , den Druck  $p$  und das spezifische Volumen  $v$ . Für gewöhnlich lässt sich jedoch auf empirischem Wege oder mithilfe anderer physikalischer Theorien eine Zustandsgleichung für das System finden (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\mathcal{Z}(T, p, v) = 0, \quad (\text{A.23})$$

die es ermöglicht eine der drei Zustandsgrößen durch die beiden anderen auszudrücken, sodass sich die Anzahl der thermodynamischen Freiheitsgrade von drei auf zwei verringert. Ein Beispiel ist die ideale Gasgleichung, die in der Atmosphärendynamik verwendet wird. Die innere Energie wird nun üblicherweise als Funktion der Temperatur und des spezifischen Volumens betrachtet,  $e = e(T, v)$ . Dieser funktionale Zusammenhang wird auch als kalorische Zustandsgleichung bezeichnet. Das Differential von  $e$  können wir damit wie folgt entwickeln (zum Beispiel Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004; Herbert, 2012b)

$$de(T, v) = \underbrace{\left( \frac{\partial e}{\partial T} \right)_v}_{=: c_v} dT + \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv. \quad (\text{A.24})$$

Wie in der Thermodynamik üblich, geben wir dabei an, welche Größe bei der Bildung der partiellen Ableitung festzuhalten ist. Ferner bezeichnet  $c_v = c_v(T, v)$  die massenspezifische Wärmekapazität bei festgehaltenem Volumen. Damit folgt aus (A.20)

$$\dot{dq}^* = de + pdv = c_v dT + \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] dv. \quad (\text{A.25})$$

Aufgrund von (A.23) kann das spezifische Volumen als Funktion von Temperatur und Druck betrachtet werden und wir erhalten für dessen Differential

$$dv(T, p) = \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp. \quad (\text{A.26})$$

Einsetzen in (A.25) liefert

$$\ddot{d}q^* = \left\{ c_v + \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right\} dT + \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T dp. \quad (\text{A.27})$$

Entsprechendes können wir für die Enthalpie  $h$  ableiten, die als Funktion der Temperatur und des Drucks betrachtet wird (ein Grund dafür, weshalb diese Zustandsgröße in der Atmosphärenphysik bevorzugt wird, denn Druck und Temperatur lassen sich verhältnismäßig einfach messen). Zunächst finden wir für das Differential der Enthalpie

$$dh(T, p) = \underbrace{\left( \frac{\partial h}{\partial T} \right)_p}_{=: c_p} dT + \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp, \quad (\text{A.28})$$

worin  $c_p = c_p(T, p)$  die massenspezifische Wärmekapazität bei festgehaltenem Druck bezeichnet. Hieraus folgt wiederum mittels (A.22)

$$\ddot{d}q^* = dh - v dp = c_p dT + \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] dp. \quad (\text{A.29})$$

Aus dem Koeffizientenvergleich von (A.29) mit (A.27) erhält man zwei wichtige Beziehungen der Thermodynamik. Die erste verknüpft die beiden spezifischen Wärmekapazitäten (zum Beispiel Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004; Herbert, 2012b)

$$c_p = c_v + \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.30})$$

und die zweite Beziehung lautet

$$\left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v = \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T. \quad (\text{A.31})$$

Setzen wir schließlich (A.25) in (A.20) und (A.29) in (A.22) ein, so finden wir die beiden folgenden gleichwertigen Formulierungen des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik für ein Flüssigkeits- oder Luftteilchen (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \left[ \left( \frac{\partial e}{\partial v} \right)_T + p \right] \frac{dv}{dt} = \rho \frac{\ddot{d}q^*}{dt}, \quad (\text{A.32a})$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + \rho \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial p} \right)_T - v \right] \frac{dp}{dt} = \rho \frac{\ddot{d}q^*}{dt}. \quad (\text{A.32b})$$

Auf dem Wege zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, möchten wir an dieser Stelle eine zentrale Zustandsgröße der Thermodynamik einführen, die Entropie  $S = \int_V \rho s \, dV$ . Den Ausgangspunkt bildet das unvollständige Differential (A.25). Die Methode des integrierenden Nenners ermöglicht es, ein unvollständiges Differential in ein vollständiges zu überführen (Päsler (1964), vergleiche auch Bronstein *et al.* (2001) zur Methode des integrierenden Faktors). Im Falle des idealen Gases lässt sich analytisch zeigen, dass die absolute Temperatur des Systems als ein möglicher integrierender Nenner in Bezug auf die rechte Seite von (A.25) infrage kommt

$$ds = \frac{1}{T}(de + pdv) = \frac{1}{T} \, dq^*. \quad (\text{A.33})$$

Die zum integrierenden Nenner  $T$  gehörige neue Zustandsgröße  $s$  wird nun definitionsgemäß als (massenspezifische) Entropie des Systems bezeichnet. Besteht das System nicht aus einem idealen Gas, so lässt sich ein integrierender Nenner im allgemeinen nicht analytisch bestimmen. Die Gültigkeit von (A.33) wird in einem solchen Falle gewissermaßen als Postulat gefordert, ist jedoch auch im Einklang mit der experimentellen Erfahrung. Die Gleichung

$$Tds = de + pdv = dh - vdp \quad (\text{A.34})$$

bezeichnet man auch als Gibbs'sche Fundamentalgleichung des Systems (zum Beispiel Jou *et al.*, 2001; Zdunkowski & Bott, 2004; Herbert, 2012b). Die Bedeutung der Entropie liegt darin, dass ihre Änderung ein Maß für die Irreversibilität (Unumkehrbarkeit) eines thermodynamischen Prozesses ist. Gemäß des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik sind nur solche Zustandsänderungen möglich, die zu einer Vermehrung der Entropie führen (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Zdunkowski & Bott, 2004; Herbert, 2012b)

$$ds \geq 0, \quad (\text{A.35})$$

wobei das Gleichheitszeichen für einen reversiblen (umkehrbaren) Prozess gilt. Diese Ungleichung ist so jedoch ausschließlich auf ein abgeschlossenes System anwendbar, das in keiner Weise mit seiner Umgebung wechselwirkt. Ein Flüssigkeits- beziehungsweise Luftteilchen ist hingegen ein geschlossenes System, das Energie mit seiner Umgebung austauschen kann. In einem solchen Falle bezieht sich der zweite Hauptsatz lediglich auf einen bestimmten Anteil der Entropieänderung des Systems, den es herauszulösen gilt. Zu diesem Zwecke betrachten wir die allgemeine Bilanzgleichung der Entropie gemäß (2.15)

$$\rho \frac{ds}{dt} = \sigma_s - \nabla \cdot \mathbf{J}_s. \quad (\text{A.36})$$

Der Fluss von Entropie beschreibt die Verlagerung derselben von einem System in ein anderes System. Dieser Vorgang ist dem zweiten Hauptsatz nicht unterworfen (zum Beispiel Pichler, 1984; Kluge & Neugebauer, 1994; Jou *et al.*, 2001; Zdunkowski & Bott, 2004)

$$\rho \frac{d_a s}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_s \geq 0. \quad (\text{A.37})$$

Die Änderung der Entropie, die im System selbst erfolgt, kann hingegen ausschließlich auf Zustandsänderungen irreversibler Natur zurückgehen, sodass

$$\rho \frac{d_i s}{dt} = \sigma_s \geq 0. \quad (\text{A.38})$$

Es wird nun angenommen, dass die irreversiblen Prozesse dergestalt ablaufen, dass sich das System nicht allzu weit vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt und die Gibbs'sche Fundamentalgleichung (A.34) in guter Näherung ihre Gültigkeit behält. Gelingt es nun, die Gibbs'sche Fundamentalgleichung der Flüssigkeits- und Luftteilchen in die Bilanzgleichungsgestalt (A.36) zu überführen, so erlangt man Zugriff auf die Entropieerzeugung (Meixner, 1943; Herbert, 1973; Kluge & Neugebauer, 1994; Jou *et al.*, 2001; Zdunkowski & Bott, 2004; Herbert, 2012b)

$$\begin{aligned} \rho \frac{ds}{dt} &= \frac{1}{T} \left( \rho \frac{de}{dt} + \rho p \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{T} \left( \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} \right) \\ &= \frac{\rho}{T} \frac{dq^*}{dt} = \frac{1}{T} \left( -\mathbb{F}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{J}_q \right) \\ &= \underbrace{\mathbb{F}^\dagger \cdot \left( -T^{-1} \nabla \mathbf{v} \right) + \mathbf{J}_q \cdot \left( -T^{-2} \nabla T \right)}_{=\sigma_s} - \underbrace{\nabla \cdot \left( T^{-1} \mathbf{J}_q \right)}_{=J_s}, \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

wobei

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (T^{-1} \mathbf{J}_q) &= \nabla \cdot (T^{-1} \overset{\downarrow}{\mathbf{J}}_q) + \nabla \cdot (T^{-1} \overset{\downarrow}{\mathbf{J}}_q) \\ &= \nabla(T^{-1}) \cdot \mathbf{J}_q + T^{-1} \nabla \cdot \mathbf{J}_q \\ &= \mathbf{J}_q \cdot (-T^{-2} \nabla T) + T^{-1} \nabla \cdot \mathbf{J}_q \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

verwendet wurde. Wir erhalten somit für die Entropiequellichte

$$\sigma_s = \mathbb{F}^\dagger \cdot \left( -T^{-1} \nabla \mathbf{v} \right) + \mathbf{J}_q \cdot \left( -T^{-2} \nabla T \right) \geq 0. \quad (\text{A.41})$$

Ist  $\sigma_s = 0$ , so befindet sich das System im strengen thermodynamischen Gleichgewicht. Die Ungleichung (A.41) ist ein zentrales Ergebnis der irreversiblen Thermodynamik, infolgedessen der Modellierung der nichtadvektiven Flüsse durch den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik Einschränkungen auferlegt werden. Sollen die Flüsse im Einklang mit demselben sein, so erreicht man dies am einfachsten durch folgende Ansätze, mit einer richtungsunabhängigen Gesetzmäßigkeit (Meixner, 1943; Herbert, 1973, 1978b; Kluge & Neugebauer, 1994; Jou *et al.*, 2001; Zdunkowski & Bott, 2004; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{F} = \mathbb{K} \cdot (\nabla \mathbf{v})^\dagger = -\varkappa \mathbb{E} \cdot (\nabla \mathbf{v})^\dagger = -\varkappa \nabla \mathbf{v}, \quad (\text{A.42a})$$

$$\mathbf{J}_q = \mathbb{L} \cdot \nabla T = -\lambda \mathbb{E} \cdot \nabla T = -\lambda \nabla T, \quad (\text{A.42b})$$

worin  $\mathbb{K}$  und  $\mathbb{E}$  Tensoren vierter Stufe bezeichnen, die eine lineare Abbildung zwischen zwei Tensoren zweiter Stufe ermöglichen (so wie ein Tensor zweiter Stufe eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektoren ermöglicht). Dabei sei  $\mathbb{E}$  der Einheitstensor vierter Stufe.

Die Koeffizienten  $\varkappa$  und  $\lambda$  sind auf empirischem Wege oder durch andere physikalische Theorien zu bestimmen und können noch von Zustandsgrößen wie der Temperatur und dem Druck abhängen. Sie haben jedoch  $\varkappa, \lambda > 0$  zu erfüllen. Da es sich bei der Temperatur um die absolute handelt, gilt  $T > 0$  und wir erhalten

$$\mathbb{F}^\dagger \cdot (-T^{-1} \nabla \mathbf{v}) = (-\varkappa \nabla \mathbf{v})^\dagger \cdot (-T^{-1} \nabla \mathbf{v}) = \frac{\varkappa}{T} (\nabla \mathbf{v})^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} \geq 0 \quad (\text{A.43})$$

sowie

$$\mathbf{J}_q \cdot (-T^{-2} \nabla T) = (-\lambda \nabla T) \cdot (-T^{-2} \nabla T) = \frac{\lambda}{T^2} \nabla T \cdot \nabla T \geq 0. \quad (\text{A.44})$$

Dabei wurde verwendet, dass  $\mathbb{A}^\dagger \cdot \mathbb{A} \geq 0$  für einen beliebigen Tensor  $\mathbb{A}$  (siehe (D.65)). Da die Flussansätze (A.42) auf die Faktoren  $(-T^{-1} \nabla \mathbf{v})$  und  $(-T^{-2} \nabla T)$  zurückgehen, nennt man diese die thermodynamischen Kräfte oder Antriebe der zugehörigen Flüsse  $\mathbb{F}$  und  $\mathbf{J}_q$ . Der Ansatz für den viskosen Impulsflusstensor (A.42a) wird jedoch in dieser Gestalt nicht verwendet, da zum Beispiel die Schwerpunktsdrehimpulsbilanz des Fluidteilchens (2.19) von  $\mathbb{F}$  fordert, dass derselbe symmetrisch ist, damit  $\mathbb{F}_\times = 0$ . Um dies zu bewerkstelligen, wird der Geschwindigkeitsgradient  $\nabla \mathbf{v}$  gemäß der Orthogonalzerlegung (D.25) (siehe auch (D.69)) entwickelt. Da  $\nabla \mathbf{v}$  die Information über die Bewegung benachbarter Flüssigkeitsteilchen relativ zueinander enthält, beschreiben die drei Anteile aus der Zerlegung zugleich die sogenannten reinen Bewegungsarten (siehe Pichler, 1984; Zdunkowski & Bott, 2003). Der erste Anteil ist der Deviator von  $\nabla \mathbf{v}$ , der auch richtungsabhängiger Verzerrungsratentensor genannt wird

$$(\overset{\circ}{\nabla \mathbf{v}})_s := \frac{\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\dagger}{2} - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbb{E}. \quad (\text{A.45})$$

Er beschreibt eine volumentreue Dehnungs- oder Scherungsdeformation des Fluids am betrachteten Ort. Der zweite Anteil ist der Kugeltensor von  $\nabla \mathbf{v}$ , der auch richtungsunabhängiger Verzerrungsratentensor genannt wird

$$(\overset{\bullet}{\nabla \mathbf{v}})_s := \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbb{E}. \quad (\text{A.46})$$

Er beschreibt eine formtreue Dehnung oder Stauchung des Fluids. Der dritte, antisymmetrische Anteil wird als Drehungsratentensor bezeichnet

$$(\nabla \mathbf{v})_{as} := \frac{\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^\dagger}{2}. \quad (\text{A.47})$$

Dieser beschreibt schließlich eine form- und volumentreue Rotation des Fluids um den betrachteten Ort. Der Tensor  $\mathbb{K}$  in (A.42a) wird nun so gewählt, dass jeder reinen Bewegungsart ein eigenständiger, richtungsunabhängiger Beitrag zum Antrieb des viskosen Impulsflusstensors zugebilligt wird (zum Beispiel Pichler, 1984)

$$\mathbb{F} = -2\eta (\overset{\circ}{\nabla \mathbf{v}})_s - 3\mu (\overset{\bullet}{\nabla \mathbf{v}})_s - 2\varrho (\nabla \mathbf{v})_{as}. \quad (\text{A.48})$$

Darin bezeichnet  $\eta$  den dynamischen Viskositätskoeffizienten und  $\mu$  den Volumenviskositätskoeffizienten.  $\varrho$  trägt keinen besonderen Namen. Auch (A.48) ist im Einklang mit dem zweiten Hauptsatz, denn die Tensoren der reinen Bewegungsarten stehen in Bezug auf das Doppelskalarprodukt gemäß (D.69) senkrecht aufeinander. Es gelingt nun auch, den Anforderungen der Schwerpunktsdrehimpulsbilanz gerecht zu werden, indem  $\varrho \equiv 0$  gesetzt wird.

### A.3 Die Poisson-Gleichung des Drucks

Zur Poisson-Gleichung des Drucks gelangen wir durch die Bestimmung der Divergenz der Impulsbilanz (2.38)

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) \\ &= \nabla \cdot \left\{ \tilde{\rho} \mathbf{g} - \nabla \tilde{p} - \nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}} + \left\{ \begin{array}{l} -\tilde{\rho} [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})], \quad (\text{I}) \\ -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}, \quad (\text{II}) \end{array} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Für die Divergenz der materiellen Geschwindigkeitsableitung erhalten wir (Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}}_{=0} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \overset{\downarrow}{\nabla} \mathbf{v}) \\ &= \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \overset{\downarrow}{\mathbf{v}}] = \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{v}}_{=0} \\ &= \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

wobei wir (D.45) benutzt haben. Die Divergenz der Coriolis-Beschleunigung lautet

$$\nabla \cdot (2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) = -\nabla \cdot (\mathbf{v} \times 2\boldsymbol{\Omega}) = -2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = -2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A.51})$$

Dabei wurden die Vertauschungsregeln des Spatprodukts (Bronstein *et al.*, 2001)

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (\text{A.52})$$

für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  verwendet sowie die Ortsunabhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit,  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Omega}(t)$ , die sowohl im Annulus wie auch in der Atmosphäre gilt. Darüber hinaus bezeichnet  $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v}$  die Vorticity (zum Beispiel Zdunkowski & Bott, 2003). Weiterhin liefert die Divergenz des Auftriebs

$$\nabla \cdot (\tilde{\rho} \mathbf{g}) = (\nabla \tilde{\rho}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{g} \cdot (\nabla \tilde{\rho}). \quad (\text{A.53})$$

Im Unterschied zur Atmosphäre gilt im Annulus  $\mathbf{g} = \text{konst.}$  Für die Divergenz des Druckgradienten schreiben wir

$$\nabla \cdot \nabla \tilde{p} = \nabla^2 \tilde{p}, \quad (\text{A.54})$$

worin  $\nabla^2$  den Laplace-Operator bezeichnet, und für die Divergenz der Divergenz des viskosen Impulsflusses

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}}) = \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}}, \quad (\text{A.55})$$

worin  $\nabla \nabla$  die Hesse'sche Ortsableitung ist (zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001). Ferner finden wir im Falle I für die Divergenz der Zentrifugalbeschleunigung

$$\nabla \cdot \{ \tilde{\rho} [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \} = [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot \nabla \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \nabla \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})]. \quad (\text{A.56})$$

Zur Auswertung des zweiten Terms auf der rechten Seite machen wir vom Graßmann'schen Entwicklungssatz (Graßmann, 1862; Merz & Knabner, 2013)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{A.57})$$

Gebrauch und erhalten

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}, \quad (\text{A.58})$$

wobei wir die Symmetrie der Dyade  $\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}$  ausgenutzt haben und  $\boldsymbol{\Omega}^2 = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] &= \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{r}) = \nabla \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^2 \nabla \cdot \mathbf{r} \\ &= \mathbb{E} \cdot \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbb{E}_\bullet = \boldsymbol{\Omega}^2 - 3\boldsymbol{\Omega}^2 = -2\boldsymbol{\Omega}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

wobei wir (A.6),  $\nabla \cdot \mathbf{r} = (\nabla \mathbf{r})_\bullet = \mathbb{E}_\bullet = 3$  und  $\mathbb{E} \cdot \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega})_\bullet = \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega}$  verwendet haben (siehe (D.17) und (D.47)). Schließlich ist noch die Divergenz der Euler-Beschleunigung zu bestimmen

$$\nabla \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) = -\nabla \cdot \left( \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right) = -\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) = 0. \quad (\text{A.60})$$

Dabei wurde  $\nabla \times \mathbf{r} = (\nabla \mathbf{r})_\times = \mathbb{E}_\times = 0$  ausgenutzt (siehe (D.30)). Setzen wir alles in (A.49) ein, so erhalten wir abschließend (vergleiche Williams, 1969; James *et al.*, 1981; Hignett *et al.*, 1985)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{p} &= -\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{g} \cdot \nabla \tilde{\rho} - \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}} + \left\{ \begin{array}{l} 2\boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot \nabla \tilde{\rho} + 2\boldsymbol{\Omega}^2 \tilde{\rho}, \quad (\text{I}) \\ 2\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}), \quad (\text{II}) \end{array} \right\} \\ &\quad (\text{A.61}) \end{aligned}$$

## A.4 Die Gesamtenergiebilanz der Boussinesq-Gleichungen

Wir beginnen mit der Impulsbilanz (2.38) und multiplizieren diese skalar mit der Geschwindigkeit, um den Schwerpunktsanteil an der Gesamtenergie zu erhalten

$$\begin{aligned} &\left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v} \\ &= \left\{ \tilde{\rho} \mathbf{g} - \nabla \tilde{p} - \nabla \cdot \tilde{\mathbb{F}} + \left\{ \begin{array}{l} -\tilde{\rho} [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})], \quad (\text{I}) \\ -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}, \quad (\text{II}) \end{array} \right\} \cdot \mathbf{v} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Auf der linken Seite verwenden wir (zum Beispiel Zdunkowski & Bott, 2003; Vallis, 2006)

$$\left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \quad (\text{A.63})$$

und

$$(2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.64})$$

Für die weitere Auswertung benutzen wir, dass im Falle I ( $\boldsymbol{\Omega} = \text{konst.}$ ) Schwerkraft und Zentrifugalbeschleunigung durch zeitunabhängige Potentiale ausgedrückt werden können

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi_g(\mathbf{r}), \quad (\text{A.65a})$$

$$-\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = -\nabla\Phi_\Omega(\mathbf{r}). \quad (\text{A.65b})$$

Addieren wir beide Potentiale,  $\Phi = \Phi_g + \Phi_\Omega$ , so finden wir für die skalare Multiplikation mit  $\mathbf{v}$

$$\nabla\Phi \cdot \mathbf{v} = \frac{\nabla\Phi \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}. \quad (\text{A.66})$$

Ferner verwenden wir

$$\tilde{\rho} \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{\rho}\Phi) - \Phi \frac{d\tilde{\rho}}{dt}. \quad (\text{A.67})$$

Für die Euler-Beschleunigung findet man

$$\left( \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \left( \mathbf{r} \times \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right) = -\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot \mathbf{l}_a. \quad (\text{A.68})$$

Schließlich erhalten wir für den molekularen Impulsfluss  $\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\rho}\mathbb{E} + \tilde{\mathbb{F}}$  mittels (A.12) sowie (A.14) in Verbindung mit  $\tilde{\mathbb{F}}^\dagger = \tilde{\mathbb{F}}$  und  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$

$$(\nabla \cdot \tilde{\mathbb{P}}) \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v}) - \tilde{\mathbb{P}}^\dagger \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v}) - \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (\text{A.69})$$

Fügen wir alles zusammen, so finden wir folgende Bilanzgleichung für kinetische und potentielle Energie des Flüssigkeitsteilchenschwerpunktes

$$\left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \tilde{\rho}\Phi \right) = -\nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v}) + \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \Phi \frac{d\tilde{\rho}}{dt}, \quad (\text{I}) \right.$$

$$\left. \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \tilde{\rho}\Phi_g \right) = -\nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v}) + \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \Phi_g \frac{d\tilde{\rho}}{dt} - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot \mathbf{v} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot \mathbf{l}_a, \quad (\text{II}) \right. \right. \quad (\text{A.70})$$

Addieren wir zu dieser Gleichung noch die Bilanz der inneren Energie (2.40) in der Gestalt

$$c \frac{dT}{dt} = \frac{de}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{J}_q = -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}}_q, \quad (\text{A.71})$$

mit  $\tilde{\mathbf{J}}_q := \mathbf{J}_q/\rho_0 = -(\lambda/\rho_0)\nabla T$ , erhalten wir schließlich die Gesamtenergiebilanz

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \tilde{\rho}\Phi + e \right) &= -\nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{J}}_q) + \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \Phi \frac{d\tilde{\rho}}{dt}, & (\text{I}) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \tilde{\rho}\Phi_g + e \right) &= -\nabla \cdot (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{J}}_q) + \tilde{\mathbb{F}} \cdot \nabla \mathbf{v} + \Phi_g \frac{d\tilde{\rho}}{dt} \\ &\quad - [\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})] \cdot \mathbf{v} - \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \cdot \mathbf{l}_a & (\text{II}) \end{aligned} \right. \quad (\text{A.72})$$



# ANHANG B

---

## Nebenrechnungen zur Modellvalidierung

---

### B.1 Potenzen des normierten Coriolis-Tensors

Wir betrachten zunächst das Quadrat des Coriolis-Tensors  $\hat{\mathbb{f}} = \mathbb{f}/f = \mathbf{e}_z \times \mathbb{E}$

$$\hat{\mathbb{f}}^2 := \hat{\mathbb{f}} \cdot \hat{\mathbb{f}} = (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}), \quad (\text{B.1})$$

wobei (D.55) verwendet wurde. Weiterhin folgt aus (D.57)

$$\hat{\mathbb{f}}^2 = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) = \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{E} - \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z)}_{=1} \mathbb{E} = -(\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z). \quad (\text{B.2})$$

Als nächstes betrachten wir

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{f}}^3 &:= \hat{\mathbb{f}} \cdot \hat{\mathbb{f}}^2 = -\hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z) = -\hat{\mathbb{f}} + (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) \cdot \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ &= -\hat{\mathbb{f}} + \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z)}_{=0} \mathbf{e}_z = -\hat{\mathbb{f}}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Aus (B.2) und (B.3) folgt schließlich rekursiv (vergleiche Philipps, 1939a; Albert, 1980)

$$\hat{\mathbb{f}}^n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \hat{\mathbb{f}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} (\mathbb{E} - \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}. \quad (\text{B.4})$$

### B.2 Die Divergenz der geostrophischen Geschwindigkeit

Bilden wir von der geostrophischen Horizontalgeschwindigkeit (vergleiche (3.60), (3.83b) und Vallis (2006))

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbb{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g \quad (\text{B.5})$$

die Divergenz, so folgt

$$\begin{aligned}
\nabla_h \cdot \mathbf{u}_g &= \nabla_h \cdot \left[ \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \nabla_h \tilde{p}_g \right] = \nabla_h \cdot \left[ \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \nabla_h \tilde{p}_g \right] + \nabla_h \cdot \left[ \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \nabla_h^\downarrow \tilde{p}_g \right] \\
&= \underbrace{\left[ \nabla_h \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \right) \right]}_{=0} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g + \nabla_h \cdot \left[ \nabla_h^\downarrow \tilde{p}_g \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}}^\dagger \right) \right] \\
&= -\nabla_h \nabla_h \tilde{p}_g \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \right) = 0,
\end{aligned} \tag{B.6}$$

wobei neben (D.45) verwendet wurde, dass  $f = \text{konst.}$  und  $\hat{\mathbf{f}} = \text{konst.}$  Da  $\nabla_h \nabla_h \tilde{p}_g$  ein symmetrischer Tensor und  $\hat{\mathbf{f}}$  ein antisymmetrischer Tensor ist, verschwindet gemäß (D.53) das Doppelskalarprodukt von beiden.

### B.3 Die quasigeostrophische Vorticitygleichung

In der quasigeostrophischen Vorticitygleichung (vergleiche (3.84) und Ertel (1940b, 1941a))

$$\nabla_h \cdot \mathbf{u} = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_g + \nabla_h \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) \tag{B.7}$$

betrachten wir hier den zweiten Term auf der rechten Seite. Analog zu (B.6) können wir schreiben

$$\nabla_h \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) = -\nabla_h \left( \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) \cdot \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}}. \tag{B.8}$$

Für den Gradienten der geostrophisch genäherten materiellen Ableitung von  $\mathbf{u}_g$  erhalten wir

$$\nabla_h \left( \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \mathbf{u}_g + \nabla_h (\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g) \tag{B.9}$$

und mit

$$\begin{aligned}
\nabla_h (\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g) &= \nabla_h (\mathbf{u}_g^\downarrow \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g) + \nabla_h (\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h^\downarrow \mathbf{u}_g) \\
&= \nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g + \nabla_h [(\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h) \mathbf{u}_g^\downarrow] \\
&= \nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g + (\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h) \nabla_h \mathbf{u}_g
\end{aligned} \tag{B.10}$$

(vergleiche (D.46) und (D.49)) folgt daraus

$$\nabla_h \left( \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) = \frac{d_g}{dt} \nabla_h \mathbf{u}_g + \nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g. \tag{B.11}$$

In (B.8) eingesetzt, liefert dies

$$\nabla_h \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbb{f}} \cdot \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) = -\frac{1}{f} \frac{d_g}{dt} (\nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \hat{\mathbb{f}}) - \frac{1}{f} (\nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g) \cdot \hat{\mathbb{f}}, \quad (\text{B.12})$$

wobei  $\hat{\mathbb{f}} = \text{konst.}$  verwendet wurde. Da  $\hat{\mathbb{f}}$  ein antisymmetrischer Tensor ist, trägt zum ersten Doppelskalarprodukt auf der rechten Seite von (B.12) nur der antisymmetrische Anteil von  $\nabla_h \mathbf{u}_g$  bei (siehe (D.53)). Da  $\nabla_h$  und  $\mathbf{u}_g$  in der Horizontalebene liegen, ist der Vektor von  $\nabla_h \mathbf{u}_g$  (anti)parallel zur Vertikalrichtung

$$(\nabla_h \mathbf{u}_g)_\times = \nabla_h \times \mathbf{u}_g = \zeta_g \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.13})$$

mit der Vertikalkomponente der geostrophischen relativen Vorticity  $\zeta_g := \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \times \mathbf{u}_g)$  (zum Beispiel Vallis, 2006). Gemäß (D.39) lautet der Vektor von  $\hat{\mathbb{f}}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{f}} &= \mathbf{e}_z \times \mathbb{E} = -\frac{1}{2} \hat{\mathbb{f}}_\times \times \mathbb{E} \\ \Rightarrow \hat{\mathbb{f}}_\times &= -2\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Damit lautet nach (D.58) das Doppelskalarprodukt

$$\nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \hat{\mathbb{f}} = -\frac{1}{2} (\nabla_h \mathbf{u}_g)_\times \cdot \hat{\mathbb{f}}_\times = \zeta_g \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = \zeta_g. \quad (\text{B.15})$$

Die geostrophische Vorticity  $\zeta_g$  können wir mithilfe der Definition der geostrophischen Horizontalgeschwindigkeit (3.83b) als Funktion des quasigeostrophischen Drucks ausdrücken

$$\zeta_g = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \times \mathbf{u}_g) = -\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{u}_g^\downarrow \times \nabla_h) = -\nabla_h \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_g), \quad (\text{B.16})$$

wobei die Vertauschungsregeln des Spatprodukts (A.52) und  $\mathbf{e}_z = \text{konst.}$  verwendet wurden (der Pfeil  $\downarrow$  soll anzeigen, worauf die Ableitung durch  $\nabla_h$  zu wirken hat). Weiterhin gilt

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_g = \hat{\mathbb{f}} \cdot \mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbb{f}}^2 \cdot \nabla_h \tilde{p}_g = -\frac{1}{f} \nabla_h \tilde{p}_g \quad (\text{B.17})$$

(siehe Abschnitt B.1) und damit

$$\zeta_g = -\nabla_h \cdot \left( -\frac{1}{f} \nabla_h \tilde{p}_g \right) = \frac{1}{f} \nabla_h^2 \tilde{p}_g. \quad (\text{B.18})$$

Um das zweite Doppelskalarprodukt auf der rechten Seite von (B.12) zu berechnen, gebrauchen wir für eine bessere Übersichtlichkeit die Ersetzung  $\nabla_h \mathbf{u}_g \rightarrow \mathbb{A}$ , sodass

$$(\nabla_h \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \mathbf{u}_g) \cdot \hat{\mathbb{f}} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}) \cdot \hat{\mathbb{f}}. \quad (\text{B.19})$$

Zerlegen wir nun  $\mathbb{A}$  in seinen symmetrischen Anteil  $\mathbb{A}_s$  ( $\mathbb{A}_s^\dagger = \mathbb{A}_s$ ) und seinen antisymmetrischen Anteil  $\mathbb{A}_{as}$  ( $\mathbb{A}_{as}^\dagger = -\mathbb{A}_{as}$ , siehe (D.4), (D.5) und (D.6)), so folgt zunächst

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{as} + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_{as}. \quad (\text{B.20})$$

Wegen

$$(\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s)^\dagger = \mathbb{A}_s^\dagger \cdot \mathbb{A}_s^\dagger = \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s \quad (\text{B.21})$$

und

$$(\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_{as})^\dagger = \mathbb{A}_{as}^\dagger \cdot \mathbb{A}_{as}^\dagger = (-\mathbb{A}_{as}) \cdot (-\mathbb{A}_{as}) = \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_{as} \quad (\text{B.22})$$

(siehe (D.49)), gilt dann

$$\begin{aligned} (\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}) \cdot \hat{\mathbb{f}} &= (\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{as} + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) \cdot \hat{\mathbb{f}} \\ &= \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{as}) + \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) \\ &= \hat{\mathbb{f}}^\dagger \cdot (\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{as})^\dagger + \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) \\ &= \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) + \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) \\ &= 2 \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) = 2 \left[ \hat{\mathbb{f}} \cdot (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s) \right]_{\bullet} = 2 \left( \hat{\mathbb{f}} \cdot \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s \right)_{\bullet}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

wobei (D.6), (D.46), (D.48), (D.50) sowie das Assoziativgesetz (Wilson, 1929)

$$\mathbb{B} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbb{D} = (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C}) \cdot \mathbb{D} = \mathbb{B} \cdot (\mathbb{C} \cdot \mathbb{D}), \quad (\text{B.24})$$

für beliebige Tensoren  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$ , verwendet wurden. Mit (D.55) und (D.57) erhalten wir weiterhin

$$\begin{aligned} 2 \left( \hat{\mathbb{f}} \cdot \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s \right)_{\bullet} &= 2 \left[ (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) \cdot \left( -\frac{1}{2} \mathbb{A}_\times \times \mathbb{E} \right) \cdot \mathbb{A}_s \right]_{\bullet} = -[\mathbf{e}_z \times (\mathbb{A}_\times \times \mathbb{A}_s)]_{\bullet} \\ &= -[\mathbb{A}_\times \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{A}_s - (\mathbf{e}_z \cdot \mathbb{A}_\times) \mathbb{A}_s]_{\bullet} = (\mathbf{e}_z \cdot \mathbb{A}_\times) (\mathbb{A}_s)_{\bullet} - \mathbb{A}_\times \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{A}_s. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Nehmen wir die Ersetzung  $\nabla_h \mathbf{u}_g \rightarrow \mathbb{A}$  schließlich zurück, so folgt

$$\mathbb{A}_\times = \nabla_h \times \mathbf{u}_g = \zeta_g \mathbf{e}_z, \quad (\text{B.26})$$

$$(\mathbb{A}_s)_{\bullet} = (\mathbb{A})_{\bullet} = (\nabla_h \mathbf{u}_g)_{\bullet} = \nabla_h \cdot \mathbf{u}_g = 0, \quad (\text{B.27})$$

wobei (B.6) und (B.13) benutzt wurden. Somit haben wir

$$2 \left( \hat{\mathbb{f}} \cdot \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s \right)_{\bullet} = -\zeta_g \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \mathbf{u}_g)_s = 0, \quad (\text{B.28})$$

da  $(\nabla_h \mathbf{u}_g)_s$  als Tensor mit rein horizontaler Ausdehnung nicht auf die vertikale Einheitsdyade  $\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$  projiziert. Setzen wir (B.28) und (B.15) in den ursprünglichen Ausdruck (B.12) ein, so erhalten wir das abschließende Ergebnis

$$\nabla_h \cdot \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbb{f}} \cdot \frac{d_g \mathbf{u}_g}{dt} \right) = -\frac{1}{f} \frac{d_g \zeta_g}{dt}. \quad (\text{B.29})$$

## B.4 Die vertikale Ableitung der quasigeostrophischen Vertikalgeschwindigkeit

Wird die quasigeostrophisch genäherte Vertikalgeschwindigkeit (3.83c) nach  $z$  abgeleitet, ergibt dies zunächst

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{N^2} \frac{d_g B_g}{dt} \right) = -\frac{1}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{d_g B_g}{dt} \right) \quad (\text{B.30})$$

wobei  $N^2 = \text{konst.}$  ausgenutzt wurde. Die Vertikalableitung der geostrophisch genäherten materiellen Ableitung von  $B_g$  liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{d_g B_g}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h B_g) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} \cdot \nabla_h B_g + \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \frac{\partial B_g}{\partial z} \\ &= \frac{d_g}{dt} \left( \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} \cdot \nabla_h B_g. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Mit der Definition der geostrophischen Geschwindigkeit (3.83b) und des hydrostatischen Auftriebs (3.83d)

$$\mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g, \quad (\text{B.32})$$

$$B_g = \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z}, \quad (\text{B.33})$$

folgt die thermische Windbeziehung (zum Beispiel Pichler, 1984; Zdunkowski & Bott, 2003; Vallis, 2006)

$$\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h B_g. \quad (\text{B.34})$$

Dabei wurden  $f = \text{konst.}$  und  $\hat{\mathbf{f}} = \text{konst.}$  benutzt. Für den zweiten Term auf der rechten Seite von (B.31) bedeutet dies

$$\frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} \cdot \nabla_h B_g = \frac{1}{f} (\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h B_g) \cdot \nabla_h B_g = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot (\nabla_h B_g)(\nabla_h B_g) = 0, \quad (\text{B.35})$$

da das Doppelskalarprodukt des antisymmetrischen Tensors  $\hat{\mathbf{f}}$  mit der symmetrischen Dyade  $(\nabla_h B_g)(\nabla_h B_g)$  gemäß (D.53) verschwindet. Damit gilt schließlich (zum Beispiel Vallis, 2006)

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{N^2} \frac{d_g}{dt} \left( \frac{\partial B_g}{\partial z} \right). \quad (\text{B.36})$$



# ANHANG C

---

## Nebenrechnungen zur spontanen Schwerewellenabstrahlung

---

### C.1 Die Eigenmoden der linearisierten Boussinesq-Gleichungen

Ausgangspunkt sind die um einen orts- und zeitunabhängigen Grundzustand (Index 0) linearisierten und einer Fourier-Transformation unterzogenen Boussinesq-Gleichungen (siehe (4.10))

$$-i\hat{\omega}\hat{u} = -f\hat{v} - ik_x\hat{p}, \quad (\text{C.1a})$$

$$-i\hat{\omega}\hat{v} = f\hat{u} - ik_y\hat{p}, \quad (\text{C.1b})$$

$$-i\hat{\omega}\hat{w} = \hat{B} - ik_z\hat{p}, \quad (\text{C.1c})$$

$$-i\hat{\omega}\hat{B} = -N^2\hat{w}, \quad (\text{C.1d})$$

$$0 = i(k_x\hat{u} + k_y\hat{v} + k_z\hat{w}), \quad (\text{C.1e})$$

mit der intrinsischen Frequenz  $\hat{\omega} = \omega - k_x u_0 - k_y v_0$ .

#### C.1.1 Die Eigenfrequenzen

Um die Eigenfrequenzen  $\hat{\omega}_i$  des Systems (C.1) zu bestimmen, multiplizieren wir zunächst die Gleichungen (C.1a) bis (C.1d) mit  $-i\hat{\omega}$  und erhalten daraus

$$(\hat{\omega}^2 - f^2)\hat{u} = (\hat{\omega}k_x - ik_y f)\hat{p}, \quad (\text{C.2a})$$

$$(\hat{\omega}^2 - f^2)\hat{v} = (\hat{\omega}k_y + ik_x f)\hat{p}, \quad (\text{C.2b})$$

$$(\hat{\omega}^2 - N^2)\hat{w} = \hat{\omega}k_z\hat{p}, \quad (\text{C.2c})$$

$$(\hat{\omega}^2 - N^2)\hat{B} = -iN^2k_z\hat{p}. \quad (\text{C.2d})$$

Berechnen wir als nächstes  $(\hat{\omega}^2 - N^2)ik_x$  (C.2a) +  $(\hat{\omega}^2 - N^2)ik_y$  (C.2b) +  $(\hat{\omega}^2 - f^2)ik_z$  (C.2c), so folgt aus der Kontinuitätsgleichung (C.1e)

$$\begin{aligned} & \left[ (\hat{\omega}^2 - N^2)k_x(\hat{\omega}k_x - ik_y f) + (\hat{\omega}^2 - N^2)k_y(\hat{\omega}k_y + ik_x f) + (\hat{\omega}^2 - f^2)\hat{\omega}k_z^2 \right] i\hat{p} = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \left\{ \hat{\omega} \left[ (\hat{\omega}^2 - N^2)(k_x^2 + k_y^2) + (\hat{\omega}^2 - f^2)k_z^2 \right] \right\} i\hat{p} = 0 \\ \Rightarrow & \quad \hat{\omega} \left[ (\hat{\omega}^2 - N^2)(k_x^2 + k_y^2) + (\hat{\omega}^2 - f^2)k_z^2 \right] = 0, \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass im Allgemeinen  $\hat{p} \neq 0$ , sodass der Vorfaktor in geschweiften Klammern verschwinden muss. Diese kubische Gleichung in  $\hat{\omega}$  hat drei Lösungen. Die erste Nullstelle ist die Eigenfrequenz der geostrophischen Mode

$$\hat{\omega}_1 = 0. \quad (\text{C.4})$$

Entfernen wir die Lösung (C.4) aus (C.3) mittels Polynomdivision durch  $(\hat{\omega} - 0)$ , so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$\hat{\omega}^2 = \frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}. \quad (\text{C.5})$$

Die beiden zugehörigen Nullstellen sind die Eigenfrequenzen der Schwerewellenmoden

$$\hat{\omega}_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}. \quad (\text{C.6})$$

Für Schwerewellen können wir aus (C.5) die nützlichen Identitäten

$$(\hat{\omega}^2 - N^2) = -(N^2 - f^2) \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = -(\hat{\omega}^2 - f^2) \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2}, \quad (\text{C.7a})$$

$$(\hat{\omega}^2 - f^2) = (N^2 - f^2) \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = -(\hat{\omega}^2 - N^2) \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_z^2} \quad (\text{C.7b})$$

ableiten. Vergleiche Gill (1982); Fritts & Alexander (2003); Vallis (2006); Achatz (2007, 2010).

### C.1.2 Die Eigenmoden

**Die geostrophische Eigenmode** Setzen wir (C.4) in (C.2) ein, so erhalten wir für den Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{B})^\top$

$$\tilde{\mathbf{z}}_1 = \left( \frac{k_y}{f}, -\frac{k_x}{f}, 0, k_z \right)^\top i\hat{p}. \quad (\text{C.8})$$

Die Normierung von (C.8) soll in Bezug auf das Energieskalarprodukt

$$\langle \hat{\mathbf{z}}, \hat{\mathbf{z}} \rangle = \frac{1}{2} \left( \hat{u}\hat{u}^* + \hat{v}\hat{v}^* + \hat{w}\hat{w}^* + \frac{\hat{B}\hat{B}^*}{N^2} \right) \quad (\text{C.9})$$



erfolgen, wobei das Sternchen eine komplex konjugierte Größe kennzeichnet. Das heißt wir verwenden die Wurzel von

$$\langle \tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_1 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{k_x^2 + k_y^2}{f^2} + \frac{k_z^2}{N^2} \right) \hat{p} \hat{p}^* = \frac{1}{2} \left[ \frac{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}{f^2 N^2} \right] |\hat{p}|^2, \quad (\text{C.10})$$

wobei wir uns willkürlich für das positive Vorzeichen entscheiden, zur Normierung von (C.8)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}_1 &= \frac{\sqrt{2}fN}{\sqrt{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2} |\hat{p}|} \tilde{\mathbf{z}}_1 = \frac{\sqrt{2}fN}{\sqrt{N^2(k_x^2 + k_y^2) + f^2 k_z^2}} \left( \frac{k_y}{f}, -\frac{k_x}{f}, 0, k_z \right)^\top \frac{\hat{p}}{|\hat{p}|} \\ &=: \hat{\mathbf{g}}. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

**Die Schwerwelleneigenmoden** Um die Eigenmoden der Schwerwellen zu erhalten, schreiben wir zunächst (C.2) in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_{2,3} &= \left( \frac{\hat{\omega} k_x - i k_y f}{\hat{\omega}^2 - f^2}, \frac{\hat{\omega} k_y + i k_x f}{\hat{\omega}^2 - f^2}, \frac{\hat{\omega} k_z}{\hat{\omega}^2 - N^2}, -\frac{i N^2 k_z}{\hat{\omega}^2 - N^2} \right)^\top \hat{p} \\ &= \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{N^2 - f^2} \left( \frac{\hat{\omega} k_x - i k_y f}{k_x^2 + k_y^2}, \frac{\hat{\omega} k_y + i k_x f}{k_x^2 + k_y^2}, -\frac{\hat{\omega} k_z}{k_z^2}, \frac{i N^2 k_z}{k_z^2} \right)^\top \hat{p} \\ &= \frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{(N^2 - f^2) k_z} \left[ \frac{k_z (\hat{\omega} k_x - i k_y f)}{k_x^2 + k_y^2}, \frac{k_z (\hat{\omega} k_y + i k_x f)}{k_x^2 + k_y^2}, -\hat{\omega}, i N^2 \right]^\top \hat{p}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

wobei im zweiten Schritt (C.7) verwendet wurde. Das Energieskalarprodukt von (C.12) mit sich selbst liefert

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathbf{z}}_{2,3}, \tilde{\mathbf{z}}_{2,3} \rangle &= \frac{1}{2} \frac{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^2}{(N^2 - f^2)^2 k_z^2} \left[ \frac{k_z^2}{k_x^2 + k_y^2} (\hat{\omega}^2 + f^2) + \hat{\omega}^2 + N^2 \right] |\hat{p}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^2}{(N^2 - f^2)^2 k_z^2} \left[ \frac{\hat{\omega}^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + f^2 k_z^2 + N^2 (k_x^2 + k_y^2)}{k_x^2 + k_y^2} \right] |\hat{p}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^2}{(N^2 - f^2)^2 k_z^2} \frac{2 \hat{\omega}^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{k_x^2 + k_y^2} |\hat{p}|^2, \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

wobei wir im letzten Schritt von (C.5) Gebrauch gemacht haben. Mit der positiven Wurzel von (C.13) normieren wir nun (C.12)

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{z}}_{2,3} &= \frac{(N^2 - f^2)}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\hat{\omega} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} |\hat{p}|} \tilde{\mathbf{z}}_{2,3} \\
 &= \frac{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\hat{\omega} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \left[ \frac{k_z(\hat{\omega}k_x - ik_y f)}{k_x^2 + k_y^2}, \frac{k_z(\hat{\omega}k_y + ik_x f)}{k_x^2 + k_y^2}, -\hat{\omega}, iN^2 \right]^\top \frac{\hat{p}}{|\hat{p}|} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} \left[ \frac{k_z(k_x - ik_y \frac{f}{\hat{\omega}})}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \frac{k_z(k_y + ik_x \frac{f}{\hat{\omega}})}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, -\sqrt{k_x^2 + k_y^2}, i \frac{N^2}{\hat{\omega}} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \right]^\top \frac{\hat{p}}{|\hat{p}|} \\
 &=: \hat{\mathbf{s}}^\pm
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

wobei für  $\hat{\mathbf{s}}^+$ , von den beiden Schwerwelleneigenfrequenzen (C.6),  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_2 = +\dots$  einzusetzen ist und für  $\hat{\mathbf{s}}^-$   $\hat{\omega} = \hat{\omega}_3 = -\dots$ .

Der Grenzfall der Auftriebsschwingung,  $\hat{\omega}_{2,3} = \pm N$ ,  $k_z = 0$ ,  $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \neq 0$ , wird durch (C.14) abgedeckt, die Trägheitsschwingung,  $\hat{\omega}_{2,3} = \pm f$ ,  $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z \neq 0$ , hingegen nicht. Für diese ist eine gesonderte Eigenmode aufzustellen. Dazu betrachten wir das Gleichungssystem (C.1) für den Fall der Trägheitsschwingung

$$-i(\pm f)\hat{u} = -f\hat{v}, \tag{C.15a}$$

$$-i(\pm f)\hat{v} = f\hat{u}, \tag{C.15b}$$

$$-i(\pm f)\hat{w} = \hat{B} - ik_z\hat{p}, \tag{C.15c}$$

$$-i(\pm f)\hat{B} = -N^2\hat{w}, \tag{C.15d}$$

$$0 = ik_z\hat{w}. \tag{C.15e}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (C.15e) folgt dann  $\hat{w} = 0$  und daraus wiederum mittels (C.15d) und (C.15c)  $\hat{B} = 0$  sowie  $\hat{p} = 0$ . Es verbleiben lediglich die Gleichungen (C.15a) und (C.15b) der beiden horizontalen Impulskomponenten. Aus diesen kann folgender Zustandsvektor für die Trägheitsschwingung abgeleitet werden

$$\tilde{\mathbf{z}}_{2,3} = (1, \pm i, 0, 0)^\top \hat{u}. \tag{C.16}$$

Das Energieskalarprodukt von  $\tilde{\mathbf{z}}_{2,3}$  mit sich selbst lautet

$$\langle \tilde{\mathbf{z}}_{2,3}, \tilde{\mathbf{z}}_{2,3} \rangle = \frac{1}{2}(1 + 1)|\hat{u}|^2 = |\hat{u}|^2. \tag{C.17}$$

Damit erhalten wir für den Fall  $k_x = k_y = 0$ ,  $k_z \neq 0$  die normierte Eigenmode (für die positive Wurzel von (C.17))

$$\hat{\mathbf{z}}_{2,3} = \frac{1}{|\hat{u}|} \tilde{\mathbf{z}}_{2,3} = (1, \pm i, 0, 0)^\top \frac{\hat{u}}{|\hat{u}|} =: \hat{\mathbf{s}}^\pm. \tag{C.18}$$

**Der unphysikalische, divergente Basisvektor** Numerische Methoden zur Bestimmung von  $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{B})^\top$  können nicht immer gewährleisten, dass  $\hat{\mathbf{z}}$  die Kontinuitätsgleichung (C.1e) erfüllt. Um auch fehlerhafte Moden, für die  $i(k_x \hat{u} + k_y \hat{v} + k_z \hat{w}) \neq 0$  gilt, aufspannen zu können, wird ein vierter Basisvektor  $\hat{\mathbf{d}}$  eingeführt (wir bezeichnen  $\hat{\mathbf{d}}$  als Basisvektor, weil er keine Eigenmode des physikalischen Systems ist). Dieser Basisvektor soll in Bezug auf des Energieskalarprodukt senkrecht auf den drei Eigenmoden stehen und die Normierung erfüllen. Aus diesen Bedingungen ergeben sich die vier Gleichungen

$$\langle \hat{\mathbf{g}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0, \quad (\text{C.19a})$$

$$\langle \hat{\mathbf{s}}^+, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0, \quad (\text{C.19b})$$

$$\langle \hat{\mathbf{s}}^-, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 0, \quad (\text{C.19c})$$

$$\langle \hat{\mathbf{d}}, \hat{\mathbf{d}} \rangle = 1, \quad (\text{C.19d})$$

mit deren Hilfe sich  $\hat{\mathbf{d}}$ , bis auf das Vorzeichen, bestimmen lässt. Man erhält (für das positive Vorzeichen)

$$\hat{\mathbf{d}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}} (k_x, k_y, k_z, 0)^\top. \quad (\text{C.20})$$

Vergleiche Mohebalhojeh & Dritschel (2001); Smith & Waleffe (2002); Achatz (2007).

## C.2 Die Energie der Boussinesq-Gleichungen

Wir betrachten die Boussinesq-Gleichungen in der Gestalt

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbb{f} \cdot \mathbf{v} = B\mathbf{e}_z - \nabla \tilde{p}, \quad (\text{C.21a})$$

$$\frac{dB}{dt} = -N^2 w, \quad (\text{C.21b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{C.21c})$$

Aus (C.21a)  $\cdot \mathbf{v}$  und (C.21b)  $\cdot B/N^2$  erhalten wir dann

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) + \underbrace{(\mathbb{f} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}_{=\mathbb{f} \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}=0} = Bw - (\nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{C.22a})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{B^2}{2N^2} \right) = -Bw, \quad (\text{C.22b})$$

wobei  $w = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}$  und  $N = \text{konst.}$  verwendet wurden. Ferner verschwindet das Doppelskalarprodukt des antisymmetrischen Tensors  $\mathbb{f}$  und der symmetrischen Dyade  $\mathbf{v}\mathbf{v}$  (siehe (D.53)). Machen wir nun noch von

$$\nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{v}) = (\nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\tilde{p} \nabla \cdot \mathbf{v}}_{=0} = (\nabla \tilde{p}) \cdot \mathbf{v} \quad (\text{C.23})$$

Gebrauch und addieren (C.22a) und (C.22b), so erhalten wir schließlich die Energiegleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{B^2}{2N^2} \right) = \nabla \cdot (\tilde{p}\mathbf{v}). \quad (\text{C.24})$$

Dabei ist  $|\mathbf{v}|^2/2$  die massenspezifische kinetische Energie und  $B^2/(2N^2)$  kann als verfügbare massenspezifische potentielle Energie betrachtet werden (zum Beispiel Vallis, 2006).

### C.3 Die Anwendung des Hinkelmann'schen Filterungsverfahrens auf die linearisierten Boussinesq-Gleichungen

Die allgemeinen Hinkelmann'schen Filterbedingungen (Hinkelmann, 1962, 1966; Herbert, 1971, 1980, 2012a)

$$\frac{d^m \psi}{dt^m} \equiv 0, \quad (\text{C.25a})$$

$$\frac{d^n \varphi}{dt^n} \equiv 0 \quad (\text{C.25b})$$

( $m, n \in \mathbb{N}$ ), für zwei skalare Größen  $\psi = \psi(\mathbf{v}, B)$  und  $\varphi = \varphi(\mathbf{v}, B)$ , werden auf die linearisierten Boussinesq-Gleichungen (C.1) angewendet. Zu diesem Zweck linearisieren wir (C.25) und führen eine Fourier-Transformation durch

$$(-i\hat{\omega})^m \hat{\psi} \equiv 0, \quad (\text{C.26a})$$

$$(-i\hat{\omega})^n \hat{\varphi} \equiv 0, \quad (\text{C.26b})$$

mit  $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{B})$  und  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{B})$ . Für die nachfolgenden Betrachtungen ist es von Vorteil, wenn wir die Boussinesq-Gleichungen (C.1) in folgender Gestalt schreiben

$$(-i\hat{\omega}) \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{B} \end{pmatrix}}_{=\hat{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -f & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -N^2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\hat{\mathbf{A}}} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{B} \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{\delta}} \hat{p}, \quad (\text{C.27a})$$

$$\underbrace{(ik_x, ik_y, ik_z, 0)}_{=\hat{\delta}^\top} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{C.27b})$$

Bevor wir uns der Schwerewellenfilterung zuwenden, wollen wir zuerst die schallfilternde Kontinuitätsgleichung (C.27b) etwas genauer betrachten, denn diese liefert bereits erste

Einblicke in den allgemeinen Filtermechanismus. Gemäß (C.27b) ist durch den Vektor  $\hat{\delta}$  eine Richtung (beziehungsweise ein Freiheitsgrad) im Zustandsraum (der Raum in dem  $\hat{\mathbf{z}}$  sich „bewegen“ kann) vorgeben, die  $\hat{\mathbf{z}}$  nicht mehr erlaubt ist. Nun kann jedoch die lineare Abbildung  $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}}$  in (C.27a) sehr wohl auch auf die Richtung  $\hat{\delta}$  abbilden. Wir schreiben

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}}_{\perp} + \hat{\mathbf{y}}_{\parallel} = \hat{\mathbf{y}}_{\perp} + y_{\parallel}\hat{\delta}, \quad (\text{C.28})$$

wobei  $\hat{\mathbf{y}}_{\perp}$  für den Vektoranteil senkrecht auf  $\hat{\delta}$  und  $\hat{\mathbf{y}}_{\parallel} = y_{\parallel}\hat{\delta}$  für den Anteil (anti)parallel zu  $\hat{\delta}$  steht (der Koeffizient  $y_{\parallel}$  bezeichnet hier nicht den Betrag von  $\hat{\mathbf{y}}_{\parallel}$ ). Wir ergänzen (C.28) nun um den Druckterm

$$\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}} - \hat{p}\hat{\delta} = \hat{\mathbf{y}}_{\perp} + (y_{\parallel} - \hat{p})\hat{\delta}. \quad (\text{C.29})$$

Wählen wir  $\hat{p} = y_{\parallel}$ , so gelingt es uns, den Abbildungsanteil von  $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}}$  auf  $\hat{\delta}$  zu eliminieren. Das heißt der Druck  $\hat{p}$  kann in den Boussinesq-Gleichungen als ein Hilfsfeld betrachtet werden, durch das dem Gleichungssystem (C.27a) vermittelt wird, dass der Freiheitsgrad  $\hat{\delta}$  nicht mehr zur Verfügung steht. Den passenden Wert für  $\hat{p}$  erhalten wir, wenn wir (C.27a) skalar mit  $\hat{\delta}$  multiplizieren. Das Ergebnis ist die Poisson-Gleichung des Drucks

$$\begin{aligned} (-i\omega)\underbrace{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\mathbf{z}}}_{=0} &= \hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}} - \hat{p}\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta} \\ \Rightarrow \hat{p} &= \frac{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}}}{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta}}, \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

wobei  $\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta} \neq 0$  vorausgesetzt wird. (Es ist zu beachten, dass im Allgemeinen  $\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta} \neq \hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta}^* = |\hat{\delta}|^2$  gilt, da  $\hat{\delta} \in \mathbb{C}^{4 \times 1}$ .) Setzen wir (C.30) in (C.27a) ein, so erhalten wir

$$(-i\omega)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}} - \hat{\delta}\hat{p} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}} - \hat{\delta}\frac{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{z}}}{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta}} = \underbrace{\left(\hat{\mathbf{A}} - \frac{\hat{\delta}\hat{\delta}^{\text{T}}}{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta}}\hat{\mathbf{A}}\right)}_{=\hat{\mathbf{B}}}\hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{C.31})$$

Mit  $\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$  lautet das algebraische dyadische Produkt  $\hat{\delta}\hat{\delta}^{\text{T}}/\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta}$  ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\delta}\hat{\delta}^{\text{T}}}{\hat{\delta}^{\text{T}}\hat{\delta}} &= -\frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \\ 0 \end{pmatrix} (ik_x, ik_y, ik_z, 0) \\ &= \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z & 0 \\ k_y k_x & k_y^2 & k_y k_z & 0 \\ k_z k_x & k_z k_y & k_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Damit erhalten wir für  $\hat{\mathbf{B}}$

$$\hat{\mathbf{B}} = \left( \hat{\mathbf{A}} - \frac{\hat{\delta}\hat{\delta}^\top}{\hat{\delta}^\top\hat{\delta}} \hat{\mathbf{A}} \right) = \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \begin{pmatrix} -k_x k_y f & -(k_y^2 + k_z^2) f & 0 & -k_x k_z \\ (k_x^2 + k_z^2) f & k_x k_y f & 0 & -k_y k_z \\ -k_y k_z f & k_x k_z f & 0 & k_x^2 + k_y^2 \\ 0 & 0 & -N^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.33})$$

$\hat{\mathbf{B}}$  ist eine  $4 \times 4$ -Matrix. Eigenmoden besitzt das System jedoch lediglich drei; die geostrophische Eigenmode und die beiden Schwerwelleneigenmoden (siehe Anhang C.1). Aus diesem Grunde und auch Zwecks besserer Übersichtlichkeit überführen wir  $\hat{\mathbf{B}}$  in ein  $3 \times 3$ -Matrix, indem wir die Vertikalgeschwindigkeit  $\hat{w}$  mithilfe der Kontinuitätsgleichung (C.1e) eliminieren

$$\hat{w} = -\frac{k_x \hat{u} + k_z \hat{v}}{k_z}, \quad (\text{C.34})$$

wobei wir im Folgenden  $k_z \neq 0$  voraussetzen. Das Gleichungssystem (C.31) lautet dann

$$\underbrace{(-i\hat{\omega})}_{=\hat{\mathbf{z}}} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = \frac{1}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -k_x k_y f & -(k_y^2 + k_z^2) f & -k_x k_z \\ (k_x^2 + k_z^2) f & k_x k_y f & -k_y k_z \\ \frac{k_x(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)N^2}{k_z} & \frac{k_y(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)N^2}{k_z} & 0 \end{pmatrix}}_{=\hat{\mathbf{B}}} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{B} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.35})$$

Wir haben hier darauf verzichtet, den algebraischen Zustandsvektor und die Matrix erneut umzubenennen.

Im nächsten Schritt soll  $\hat{\mathbf{z}}$  in einen neuen Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  transformiert werden, der  $\hat{\psi}$  und  $\hat{\varphi}$  sowie die Leitgröße  $\hat{\Lambda}$  als Elemente enthält. Dazu führen wir eine invertierbare Transformationsmatrix  $\hat{\mathbf{C}}$  ein

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{C.36a})$$

$$\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{C.36b})$$

Für die Transformation des Gleichungssystems (C.35) schreiben wir

$$\begin{aligned} (-i\hat{\omega})\hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{x}} \quad | \hat{\mathbf{C}}. \\ \Rightarrow \quad (-i\hat{\omega})\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{z}} &= (-i\hat{\omega})\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}^{-1}}_{=\hat{\mathbf{D}}}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

wobei wir (C.36b) verwendet haben.  $\hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{C}}^{-1}$  ist eine sogenannte Ähnlichkeitstransformation von  $\hat{\mathbf{B}}$  (Bronstein *et al.*, 2001). Dies bedeutet, dass die drei Eigenwerte (Eigenfrequenzen) der Ursprungsgleichung (C.35),  $\hat{\omega}_1$ ,  $\hat{\omega}_2$  und  $\hat{\omega}_3$ , zugleich Eigenwerte der transformierten Gleichung (C.37) sind. Die zugehörigen Eigenvektoren (Eigenmoden) von

(C.37),  $\hat{\mathbf{x}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_2$  und  $\hat{\mathbf{x}}_3$ , folgen aus den Eigenvektoren des ursprünglichen Gleichungssystems (C.35),  $\hat{\mathbf{z}}_1$ ,  $\hat{\mathbf{z}}_2$  und  $\hat{\mathbf{z}}_3$ , durch die Transformation (C.36a), zum Beispiel  $\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{z}}_1$ . Führen wir als nächstes die Einheitsvektoren

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = (1, 0, 0)^\top, \quad (\text{C.38a})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_2 = (0, 1, 0)^\top, \quad (\text{C.38b})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 = (0, 0, 1)^\top \quad (\text{C.38c})$$

ein, so erlangen wir durch skalare Multiplikation des passenden Einheitsvektors mit  $\hat{\mathbf{x}}$  Zugriff auf  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{\varphi}$  und  $\hat{\Lambda}$ . Wir schreiben

$$\hat{\psi} = \hat{\mathbf{e}}_i^\top \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{C.39a})$$

$$\hat{\varphi} = \hat{\mathbf{e}}_j^\top \hat{\mathbf{x}}, \quad (\text{C.39b})$$

$$\hat{\Lambda} = \hat{\mathbf{e}}_k^\top \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{C.39c})$$

Wir haben nun das Werkzeug beisammen, um die schwerewellenfilternde Wirkung von (C.26) zu untersuchen. Dafür wenden wir (C.26a) auf (C.39a) an

$$\begin{aligned} (-i\hat{\omega})^m \hat{\psi} &= (-i\hat{\omega})^m \hat{\mathbf{e}}_i^\top \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_i^\top (-i\hat{\omega})^m \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_i^\top (-i\hat{\omega})^{m-1} (-i\hat{\omega}) \hat{\mathbf{x}} \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i^\top (-i\hat{\omega})^{m-1} \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_i^\top (-i\hat{\omega})^{m-2} \hat{\mathbf{D}}^2 (-i\hat{\omega}) \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_i^\top (-i\hat{\omega})^{m-2} \hat{\mathbf{D}}^2 \hat{\mathbf{x}} \\ &= \dots = \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_i^\top \hat{\mathbf{D}}^m}_{=:\hat{\mathbf{a}}_m^\top} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{a}}_m^\top \hat{\mathbf{x}} \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

wobei (C.37) benutzt wurde. Weiterhin ist  $\hat{\mathbf{D}}^2 := \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{D}}$ . Analog erhalten wir für (C.26b)

$$(-i\hat{\omega})^n \hat{\varphi} = \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_j^\top \hat{\mathbf{D}}^n}_{=:\hat{\mathbf{b}}_n^\top} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}_n^\top \hat{\mathbf{x}} \equiv 0. \quad (\text{C.41})$$

(C.40) und (C.41) sind die zu den Filterbedingungen (C.26) äquivalenten diagnostischen Gleichgewichtsbedingungen, wobei wir davon ausgehen, dass die beiden Vektoren  $\hat{\mathbf{a}}_m$  und  $\hat{\mathbf{b}}_n$  linear unabhängig voneinander sind. Hier zeigt sich nun die Parallele zur Kontinuitätsgleichung (C.27b). Durch  $\hat{\mathbf{a}}_m$  und  $\hat{\mathbf{b}}_n$  wird eine Ebene im Zustandsraum aufgespannt, auf die der Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  nicht länger projizieren darf. Von ursprünglich drei Freiheitsgraden, die  $\hat{\mathbf{x}}$  erlaubt waren, verbleibt nur noch einer, nämlich derjenige senkrecht auf  $\hat{\mathbf{a}}_m$  und  $\hat{\mathbf{b}}_n$ . Wir nennen den Vektor in Richtung des verbleibenden Freiheitsgrades  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$  und können diesen, bis auf einen konstanten Faktor, durch die Orthogonalitätsbedingungen

$$\hat{\mathbf{a}}_m^\top \hat{\mathbf{c}}_{m,n} \equiv 0, \quad (\text{C.42a})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_n^\top \hat{\mathbf{c}}_{m,n} \equiv 0 \quad (\text{C.42b})$$

bestimmen. Falls gewünscht, kann  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$  durch eine geeignete Normierung bis auf das Vorzeichen berechnet werden. Um  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$  schließlich verwenden zu können, ist der konstante Faktor beziehungsweise das Vorzeichen willkürlich festzulegen. Damit nun (C.40) und (C.41) erfüllt sind, muss für den Zustandsvektor gelten

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{c}}_{m,n}. \quad (\text{C.43})$$

Gemäß (C.39c) erhalten wir die prognostische Gleichung der Leitgröße aus  $\hat{\mathbf{e}}_k^T$ (C.37)

$$(-i\hat{\omega})\hat{\Lambda} = \hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}}. \quad (\text{C.44})$$

Diese Gleichung bildet zusammen mit (C.40) und (C.41) das neue, schwerewellengefilterte Modell. Um die Amplituden der Zustandsgrößen im gefilterten Modell zu bestimmen, wird zum Zeitpunkt  $t = 0$  das Feld der Leitgröße  $\Lambda$  im linearen Modell einer Fourier-Transformation unterzogen. Durch

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} &= \hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} &= \frac{\hat{\Lambda}}{\hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n}} \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

sind die Amplituden aller übrigen Zustandsgrößen festgelegt. Wir gehen davon aus, dass das gefilterte Modell derart entworfen wird, dass der Fall  $\hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n} = 0$  nicht eintritt. Setzen wir nun (C.45) in (C.44) ein, so erhalten wir für die intrinsische Frequenz des gefilterten Modells

$$\begin{aligned} (-i\hat{\omega})\hat{\Lambda} &= \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n} = \hat{\Lambda} \frac{\hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n}}{\hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n}} \\ \Rightarrow \hat{\omega} &= i \frac{\hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n}}{\hat{\mathbf{e}}_k^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n}} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

( $\hat{\Lambda} \neq 0$  vorausgesetzt). Eine gute Schwerewellenfilterung zeichnet sich dadurch aus, dass  $\hat{\omega} \approx \hat{\omega}_1$ , worin  $\hat{\omega}_1$  für die geostrophische Eigenfrequenz des ursprünglichen Systems (C.27) steht. Die Information über die gefilterten Freiheitsgrade  $\hat{\mathbf{a}}_m$  und  $\hat{\mathbf{b}}_n$  steckt dabei implizit in  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$ .

Werfen wir noch einmal einen Blick zurück auf die Art und Weise, wie mithilfe des Drucks in (C.27a) der Freiheitsgrad  $\hat{\delta}$  aus dem System entfernt wurde, so erscheint, ausgehen von (C.40) und (C.41), ein weiteres Verfahren denkbar, dass durch eine Modifikation des ursprünglichen Gleichungssystems (C.37) Schwerewellen filtert. Zu diesem Zweck führen wir zwei „Filterdrücke“  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\xi}$  ein, die dem Gleichungssystem (C.37) vermitteln sollen, dass zwei Freiheitsgrade nicht mehr zur Verfügung stehen<sup>1</sup>

$$(-i\hat{\omega})\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{D}}\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mu}\hat{\mathbf{a}}_m - \hat{\xi}\hat{\mathbf{b}}_n. \quad (\text{C.47})$$

---

<sup>1</sup> Wir haben hier aus Bequemlichkeit die Filterdrücke innerhalb des transformierten Gleichungssystems (C.37) eingeführt. Es wäre ebenso möglich die Filterdrücke im ursprünglichen Gleichungssystem (C.27) beziehungsweise (C.35) einzuführen, um  $\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_m$  und  $\hat{\mathbf{C}}^{-1}\hat{\mathbf{b}}_n$  daraus zu eliminieren.



Bestimmen lassen sich diese Filterdrücke, indem (C.47) einmal mit  $\hat{\mathbf{a}}_m$  und einmal mit  $\hat{\mathbf{b}}_n$  skalar multipliziert wird

$$(-i\hat{\omega}) \underbrace{\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{x}}}_{=0} = \hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mu} \hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{a}}_m - \hat{\xi} \hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{b}}_n, \quad (\text{C.48a})$$

$$(-i\hat{\omega}) \underbrace{\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{x}}}_{=0} = \hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mu} \hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{a}}_m - \hat{\xi} \hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{b}}_n. \quad (\text{C.48b})$$

Die Auflösung nach  $\hat{\mu}$  und  $\hat{\xi}$  ergibt

$$\hat{\mu} = \frac{(\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{b}}_n) + (\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{b}}_n)}{(\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{b}}_n)(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{a}}_m) - (\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{a}}_m)(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{b}}_n)}, \quad (\text{C.49a})$$

$$\hat{\xi} = \frac{(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{a}}_m) + (\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}})(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{a}}_m)}{(\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{a}}_m)(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{b}}_n) - (\hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{b}}_n)(\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{a}}_m)}. \quad (\text{C.49b})$$

Dabei setzen wir voraus, dass die Nenner nicht verschwinden. Mit diesen Filterdrücken sollte gewährleistet sein, dass der Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  (anti)parallel zum verbleibenden Freiheitsgrad  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$  ist. Die Initialisierung des Zustandsvektors kann zum Beispiel durch (C.45) erfolgen. Möchte man hingegen auf die explizite Festlegung einer Leitgröße verzichten, so könnte man auch alle Zustandsgrößen zum Zeitpunkt  $t = 0$  einer Fourier-Transformation unterziehen, den so gewonnenen Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  auf  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$  projizieren

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{x}}}{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n}} \quad (\text{C.50})$$

und schließlich den ursprünglichen Zustandsvektor durch  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n}$  ersetzen. Auch bei diesem zweiten Filterverfahren können wir das Gleichungssystem (C.47) auf die prognostische Gleichung nur einer skalaren Größe reduzieren. Dazu multiplizieren wir (C.47) skalar mit  $\hat{\mathbf{c}}_{m,n}$

$$\begin{aligned} (-i\hat{\omega}) \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n} &= \hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n} - \hat{\mu} \underbrace{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{a}}_m}_{=0} - \hat{\xi} \underbrace{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{b}}_n}_{=0} \\ \Rightarrow (-i\hat{\omega}) \hat{\mathbf{x}} &= \frac{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n}}{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n}} \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (\text{C.51})$$

wobei (C.42) verwendet wurde. Aus dieser Gleichung erhalten wir die intrinsische Frequenz

$$\hat{\omega} = i \frac{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{c}}_{m,n}}{\hat{\mathbf{c}}_{m,n}^T \hat{\mathbf{c}}_{m,n}}. \quad (\text{C.52})$$

Da (C.46) und (C.52) nicht identisch sind, unterscheidet sich die Dynamik des Gleichgewichtsanteils in diesem zweiten Filterverfahren anscheinend von derjenigen im ersten Verfahren, in dem die Leitgröße, bis zu einem gewissen Grad, ein frei wählbarer Modellparameter ist.

Zum Schluss möchten wir betrachten, wie sich die Filterordnungen  $m$  und  $n$  auf die Güte der Filterung im linearisierten Gleichungssystem auswirken. Dazu kehren wir zunächst zurück zum Gleichungssystem (C.37). Der Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  lässt sich generell durch die drei Eigenvektoren des Systems, die geostrophische Eigenmode  $\hat{\mathbf{x}}_1 (\propto \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{g}})$  und die beiden Schwerwelleneigenmoden  $\hat{\mathbf{x}}_2 (\propto \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{s}}^+)$  und  $\hat{\mathbf{x}}_3 (\propto \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{s}}^-)$ , darstellen (siehe Anhang C.1)<sup>2</sup>

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{x}_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{x}_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{x}_3 \hat{\mathbf{x}}_3. \quad (\text{C.53})$$

Die Gleichgewichtsbedingungen (C.40) und (C.41) lauten dann

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_m^T \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{D}}^m \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_i^T (\hat{x}_1 \hat{\mathbf{D}}^m \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{x}_2 \hat{\mathbf{D}}^m \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{x}_3 \hat{\mathbf{D}}^m \hat{\mathbf{x}}_3) \\ &= \hat{\mathbf{e}}_i^T [\hat{x}_1 (-i\hat{\omega}_1)^m \hat{\mathbf{x}}_1 + \hat{x}_2 (-i\hat{\omega}_2)^m \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{x}_3 (-i\hat{\omega}_3)^m \hat{\mathbf{x}}_3] \\ &= (-i\hat{\omega}_1)^m \hat{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_1 + (-i\hat{\omega}_2)^m \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2 + (-i\hat{\omega}_3)^m \hat{x}_3 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv 0, \end{aligned} \quad (\text{C.54a})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_n^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{D}}^n \hat{\mathbf{x}} = (-i\hat{\omega}_1)^n \hat{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_1 + (-i\hat{\omega}_2)^n \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_2 + (-i\hat{\omega}_3)^n \hat{x}_3 \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv 0. \quad (\text{C.54b})$$

Wir setzen nun  $n = m + l$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , wobei  $l$  fix ist. Stellen wir (C.54a) nach  $(-i\hat{\omega}_3)^m \hat{x}_3$  um und setzen das Ergebnis in (C.54b) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &(-i\hat{\omega}_1)^m \hat{x}_1 \left[ (-i\hat{\omega}_1)^l \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_1 - (-i\hat{\omega}_3)^l \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_1 \right] \\ &+ (-i\hat{\omega}_2)^m \hat{x}_2 \left[ (-i\hat{\omega}_2)^l \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_2 - (-i\hat{\omega}_3)^l \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2 \right] \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

Als nächstes teilen wir (C.54a) durch  $(-i\hat{\omega}_3)^m$  und (C.55) durch  $(-i\hat{\omega}_2)^m$

$$\left( \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_3} \right)^m \hat{x}_1 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_1 + \left( \frac{\hat{\omega}_2}{\hat{\omega}_3} \right)^m \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{x}_3 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv 0, \quad (\text{C.56a})$$

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_2} \right)^m \hat{x}_1 \left[ (-i\hat{\omega}_1)^l \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_1 - (-i\hat{\omega}_3)^l \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_1 \right] \\ &+ \hat{x}_2 \left[ (-i\hat{\omega}_2)^l \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_2 - (-i\hat{\omega}_3)^l \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2 \right] \equiv 0. \end{aligned} \quad (\text{C.56b})$$

Als ersten Fall betrachten wir die Eigenfrequenzen der linearisierten Boussinesq-Gleichungen (C.27), nämlich die geostrophische Eigenfrequenz  $\hat{\omega}_1 = 0$  (siehe (C.4)) und die beiden Schwerwelleneigenfrequenzen  $\hat{\omega}_2 \neq 0$  und  $\hat{\omega}_3 = -\hat{\omega}_2$  (siehe (C.6)). Damit folgt aus (C.56a)

$$\begin{aligned} &(-1)^m \hat{x}_2 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2 + \hat{x}_3 \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3 \equiv 0 \\ \Rightarrow \hat{x}_3 &= (-1)^{m+1} \hat{x}_2 \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

<sup>2</sup> Wobei die Vertikalgeschwindigkeit  $\hat{w}$  gemäß (C.34) in  $\hat{\mathbf{g}}$ ,  $\hat{\mathbf{s}}^+$  und  $\hat{\mathbf{s}}^-$  zu eliminieren ist.

und aus (C.56b)

$$\hat{\mathbf{x}}_2(-i\hat{\omega}_2)^l \left[ \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_2 + (-1)^{l+1} \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2 \right] \equiv 0. \quad (\text{C.58})$$

(C.58) kann im Allgemeinen nur erfüllt werden, falls  $\hat{\mathbf{x}}_2 = 0$ , was wiederum  $\hat{\mathbf{x}}_3 = 0$ , wegen (C.57) bedeutet. Das heißt die Schwerewellenfilterung ist vollkommen für jedes  $m$ , solange  $\hat{\mathbf{x}}$  nicht ausschließlich auf  $\hat{\mathbf{x}}_1$  projiziert. In gewisser Weise bilden die linearisierten Boussinesq-Gleichungen in der Form (C.27) eine triviale Umgebung für die Schwerewellenfilterung. Wir möchten daher noch einen zweiten, allgemeineren Fall betrachten, für den

$$|\hat{\omega}_1| < |\hat{\omega}_2| < |\hat{\omega}_3| \quad (\text{C.59})$$

gilt, wobei im Allgemeinen  $\hat{\omega}_1 \neq 0$ . Einen solchen Fall findet man beispielsweise bei der Linearisierung der Flachwassergleichungen um eine zonale Grundströmung vor (Hinkelmann, 1951a, 1962, 1966; Herbert, 1980, 2012a). Auch für die Boussinesq-Gleichungen mag der Fall (C.59) eintreten, falls man diese um eine Hintergrundströmung mit geeigneter, das heißt analytisch noch behandelbarer, Ortsabhängigkeit linearisiert. Betrachten wir den Grenzwert  $m \rightarrow \infty$  von (C.56a) und (C.56b) unter der Voraussetzung (C.59), so folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}_3 = -\hat{\mathbf{x}}_1 \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_1}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_3} \right)^m}_{=0} - \hat{\mathbf{x}}_2 \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_3} \right)^m}_{=0} = 0, \quad (\text{C.60a})$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{x}}_2 = -\hat{\mathbf{x}}_1 \frac{(-i\hat{\omega}_1)^l \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_1 - (-i\hat{\omega}_3)^l \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_1}{(-i\hat{\omega}_2)^l \hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_2 - (-i\hat{\omega}_3)^l \frac{\hat{\mathbf{e}}_j^T \hat{\mathbf{x}}_3}{\hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_3} \hat{\mathbf{e}}_i^T \hat{\mathbf{x}}_2} \underbrace{\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_2} \right)^m}_{=0} = 0, \quad (\text{C.60b})$$

vorausgesetzt, alle Nenner sind ungleich Null. Gehen wir mit diesem Ergebnis zurück zu (C.54), so können wir folgern, dass im Grenzwert  $m \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_1 \hat{\mathbf{x}}_1$  beziehungsweise gleichwertig dazu, dass  $\hat{\mathbf{a}}_m$  und  $\hat{\mathbf{b}}_n$  gänzlich in der durch die Schwerewellenmoden  $\hat{\mathbf{x}}_2$  und  $\hat{\mathbf{x}}_3$  aufgespannten Ebene liegen und die Schwerewellenfilterung damit vollkommen ist.<sup>3</sup> Darüber hinaus können wir aus (C.60) schließen, dass die Konvergenz beschleunigt werden kann, wenn  $\hat{\mathbf{x}}_1$  möglichst klein ist, das heißt wenn  $\hat{\psi}$  und  $\hat{\varphi}$  so gewählt werden, dass deren Projektion auf die geostrophische Mode gering ist im Vergleich zur Projektion auf die Schwerewellenmoden.

Im Rahmen der linearisierten Boussinesq-Gleichungen lässt sich der Wirkungsansatz der Hinkelmann'schen Schwerewellenfilterung verhältnismäßig gut nachvollziehen. Die Übertragung des ersten Filterungsverfahrens, in dem neben den Filterbedingungen eine Leitgröße festgelegt wird, auf die vollständig nichtlinearen Gleichungen wird in Abschnitt 4.4.1 vorgestellt. Das zweite Verfahren, das mit Filterdrücken arbeitet, dürfte hingegen schwieriger auf die vollständigen Gleichungen anwendbar sein. Als mögliches Werkzeug mag die

<sup>3</sup> Den Wirkungsmechanismus, der hier zum tragen kommt, macht man sich auch bei der Potenzmethode nach von Mises zur Auffindung des betragsmäßig größten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors einer Matrix zunutze (siehe Bronstein *et al.*, 2001).

Variationsrechnung infrage kommen. Wir möchten das mögliche Vorgehen jedoch an dieser Stelle nur kurz in Worten umreißen: Das Prinzip der stationären Wirkung (Hamilton'sches Prinzip) der klassischen Mechanik lässt sich auch auf die Fluiddynamik übertragen, gegebenenfalls erweitert um die Thermodynamik (zum Beispiel Ertel, 1933). Dazu wird aus kinetischer und potentieller Energie sowie einem geeigneten thermodynamischen Potential die Lagrangefunktion des Systems gebildet. Die Integration dieser Funktion über eine endliche Zeitspanne (und das Fluidvolumen) ergibt das sogenannte Wirkungsintegral. Nach dem Prinzip der stationären Wirkung entwickelt sich der Zustand des Systems derart, dass das Wirkungsintegral extremal wird. Die (lokalen) Grundgleichungen, welche die Zustandsänderung des Systems beschreiben, erhält man daher aus der Forderung nach dem Verschwinden der ersten Variation des Wirkungsintegrals. Zwangsbedingungen, denen das System während seiner Entwicklung zu gehorchen hat, können dem Wirkungsintegral mithilfe Lagrange'scher Multiplikatoren vermittelt werden. Solche Zwangsbedingungen sind zum Beispiel die Massenerhaltung und die Entropieungleichung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik (A.38). Vor diesem Hintergrund kann der Druck  $\tilde{p}$  in den Boussinesq-Gleichungen als Lagrange'scher Multiplikator gedeutet werden, mit dessen Hilfe dem Wirkungsintegral mitgeteilt wird, dass die Zustandsänderung die Zwangsbedingung  $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$  (Massenerhaltung) zu erfüllen hat (auch wenn diese Sichtweise der dynamischen Bedeutung des Drucks vielleicht nicht ganz gerecht wird). Das Nullsetzen der ersten Variation des dergestalt modifizierten Wirkungsintegrals ergibt dann die bekannten Bewegungsgleichungen mit dem Druckgradienten auf der rechten Seite (Lanczos, 1970; Ferziger & Perić, 2008). Diesem Vorbilde folgend, könnten die skalaren Felder  $\mu = \mu(\mathbf{r}, t)$  und  $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$  (die Filterdrücke, siehe (C.47)) als Lagrange'sche Multiplikatoren eingeführt werden, mit deren Hilfe die zwei Gleichgewichtsbedingungen  $\mathfrak{G}_m(\mathbf{v}, B) \equiv 0$  und  $\mathfrak{H}_n(\mathbf{v}, B) \equiv 0$  (siehe (4.36)) dem Wirkungsintegral vermittelt würden. Nach Möglichkeit sollten die Gleichgewichtsbedingungen nicht den Druck  $\tilde{p}$  enthalten, da ansonsten die Berechnung von  $d\tilde{p}/dt$  notwendig würde, was Schwierigkeiten bei der Herleitung von Bestimmungsgleichungen für  $\mu$  und  $\xi$  mit sich brächte (siehe weiter unten). Das Prinzip der stationären Wirkung ergäbe dann veränderte Bilanzgleichungen, die zusätzliche Terme auf der rechten Seite besäßen, die von  $\mu$  und  $\xi$  abhängen. Um eine Bestimmungsgleichung für die beiden Filterdrücke zu erhalten (die nichtlineare Entsprechung zu (C.49)), kann man sich an der Poisson-Gleichung des Drucks orientieren. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen müssen an jedem Ort innerhalb des Systems und zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Dies bedeutet, dass sie sowohl für den ortsfesten als auch für den teilchenfesten Blickwinkel gelten. Wie im Falle der Poisson-Gleichung, bildet man dann die materielle Ableitung der beiden Zwangsbedingungen. Als Beispiel

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{G}_m(\mathbf{v}, B) = \check{\mathfrak{G}}_{m+1}\left(\mathbf{v}, B, \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \frac{dB}{dt}\right) = \mathfrak{G}_{m+1}(\mathbf{v}, B, \tilde{p}, \mu, \xi) \equiv 0 \quad (\text{C.61})$$

(vergleiche (4.32)). Die materielle Ableitung muss die Gleichgewichtsbedingungen (trivialerweise) ebenfalls erfüllen. Dabei wurden im zweiten Schritt die materiellen Ableitungen  $d\mathbf{v}/dt$  und  $dB/dt$  mittels Impuls- und Auftriebsgleichung eliminiert.  $\mathfrak{G}_{m+1}(\mathbf{v}, B, \tilde{p}, \mu, \xi) \equiv 0$  und eine weitere Beziehung aus der zweiten Gleichgewichtsbedingung  $\mathfrak{H}_{n+1}(\mathbf{v}, B, \tilde{p}, \mu, \xi) \equiv 0$  bilden zusammen mit der Poisson-Gleichung für den Druck (die nun ebenfalls eine Abhängigkeit von  $\mu$  und  $\xi$  aufweisen sollte) ein System dreier gekoppelter diagnostischer Gleichungen, durch die  $\tilde{p}$ ,  $\mu$  und  $\xi$  zu bestimmen sind. Ausgehend von Anfangsfeldern,

welche die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, sollten diese Filterdrücke gewährleisten, dass die Felder im Laufe der Integration schwerewellenfrei bleiben.

Soviel zur Skizzierung des Vorgehens. Es darf jedoch vermutet werden, dass, je nach Komplexität der Gleichgewichtsbedingungen, sowohl die Berechnung der Variation des Wirkungsintegrals als auch die Berechnung von (C.61) mit erheblichem Aufwand verbunden wären. Auch der Anspruch an die Gleichgewichtsbedingungen  $\mathfrak{G}_m \equiv 0$  und  $\mathfrak{H}_n \equiv 0$  nicht den Druck  $\tilde{p}$  zu enthalten, dürfte nur durch wenige Filterbedingungen erfüllbar sein. Dieses Problem könnte möglicherweise dadurch vermieden werden, dass nicht die bereits schallgefilterten Boussinesq-Gleichungen den Ausgangspunkt bilden, sondern die vollständigen Bilanzgleichungen der Fluidodynamik. Würden dann Schall- und Schwerewellen zugleich gefiltert, sollten materielle Ableitungen der Lagrange'schen Multiplikatoren selbst (zum Beispiel  $d\tilde{p}/dt$ ) in Ausdrücken wie (C.61) nicht auftauchen. Nichtsdestotrotz erscheint die in Abschnitt 4.4.1 vorgestellte Modellvariante als gangbarere Alternative.

Für weitere Informationen zur Variationsrechnung und Anwendungsbereiche derselben in der Meteorologie, siehe zum Beispiel Nagel (1951); Haltiner & Williams (1980); Vallis (1992). Vergleiche auch Mohebalhojeh & McIntyre (2007a,b).

## C.4 Die prognostische Gleichung der quasigeostrophischen potentiellen Vorticity

Im ersten Schritt zur Herleitung der prognostischen Gleichung für  $\Pi = \zeta + (f/N^2)\partial B/\partial z$  betrachten wir die horizontale Rotation der Impulsgleichung (4.37a)

$$\nabla_h \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f\nabla_h \times (\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}) - \underbrace{\nabla_h \times \nabla_h \tilde{p}}_{=0}, \quad (\text{C.62})$$

wobei  $f = \text{konst.}$  verwendet wurde (siehe Bronstein *et al.* (2001) für die Identität des letzten Terms auf der rechten Seite). Die Rotation der materiellen Ableitung lässt sich weiter aufschlüsseln

$$\begin{aligned} \nabla_h \times \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \times \mathbf{u} + \nabla_h \times (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \times \mathbf{u} + \nabla_h \times (\mathbf{v}^\downarrow \cdot \nabla \mathbf{u}) + \nabla_h \times (\mathbf{v} \cdot \nabla^\downarrow \mathbf{u}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \times \mathbf{u} + \nabla_h \mathbf{v} \cdot \times \nabla \mathbf{u} + \nabla_h \times [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u}^\downarrow] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_h \times \mathbf{u} + \nabla_h \mathbf{v} \cdot \times \nabla \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla_h \times \mathbf{u} \\ &= \frac{d}{dt} \nabla_h \times \mathbf{u} + \nabla_h \mathbf{v} \cdot \times \nabla \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

worin  $\nabla_h \mathbf{v} \cdot \times \nabla \mathbf{u}$  das Skalar-Kreuzprodukt der Tensoren  $\nabla_h \mathbf{v}$  und  $\nabla \mathbf{u}$  bezeichnet (siehe Anhang D.4 und darin die Identität (D.77) für den Schritt von der zweiten zur dritten Zeile). Mittels (D.78) lässt sich dieses weiter auswerten

$$\begin{aligned}
 \nabla_h \mathbf{v} \cdot \times \nabla \mathbf{u} &= (\nabla_h \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u})_{\times} \\
 &= \left\{ [\nabla_h \mathbf{u} + \nabla_h(w \mathbf{e}_z)] \cdot \left( \nabla_h \mathbf{u} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) \right\}_{\times} \\
 &= \left[ \nabla_h \mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{u} + \underbrace{\nabla_h \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}_{=[\nabla_h(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z)] \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}=0} + \underbrace{\nabla_h(w \mathbf{e}_z) \cdot \nabla_h \mathbf{u}}_{=\nabla_h w(\mathbf{e}_z \cdot \nabla_h) \mathbf{u}=0} + \underbrace{\nabla_h(w \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}_{=\nabla_h w(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}} \right]_{\times} \\
 &= \underbrace{\nabla_h w(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}_{=(\nabla_h w) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}} \\
 &= (\nabla_h \mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{u})_{\times} + \nabla_h w \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \tag{C.64}
 \end{aligned}$$

wobei überdies  $\mathbf{e}_z = \text{konst.}$  und (D.26) benutzt wurden. Für den ersten Term auf der rechten Seite von (C.64) kann laut (D.87) geschrieben werden

$$\begin{aligned}
 (\nabla_h \mathbf{u} \cdot \nabla_h \mathbf{u})_{\times} &= (\nabla_h \mathbf{u})_{\bullet} (\nabla_h \mathbf{u})_{\times} - (\nabla_h \mathbf{u})_s \cdot (\nabla_h \mathbf{u})_{\times} \\
 &= (\nabla_h \cdot \mathbf{u})(\nabla_h \times \mathbf{u}) - (\nabla_h \mathbf{u})_s \cdot (\nabla_h \times \mathbf{u}) \\
 &= \delta \zeta \mathbf{e}_z - \underbrace{(\nabla_h \mathbf{u})_s \cdot \mathbf{e}_z \zeta}_{=0} = \delta \zeta \mathbf{e}_z, \tag{C.65}
 \end{aligned}$$

wobei neben (D.18) und (D.33),  $\delta = \nabla_h \cdot \mathbf{u}$  und  $\zeta \mathbf{e}_z = \nabla_h \times \mathbf{u}$  verwendet wurden. Ferner sind  $\nabla_h \mathbf{u}$  und damit auch dessen symmetrischer Anteil  $(\nabla_h \mathbf{u})_s$  rein horizontale Ausdehnungsgrößen, sodass die Multiplikation mit  $\mathbf{e}_z$  Null ergibt.

Betrachten wir als nächstes die Rotation der Coriolis-Beschleunigung in (C.62)

$$\begin{aligned}
 -f \nabla_h \times (\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}) &= -f \nabla_h \times (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{f}}^{\dagger}) = f \nabla_h \times (\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{f}}) = f \nabla_h \mathbf{u} \cdot \times \hat{\mathbf{f}} \\
 &= \frac{1}{2} f [(\nabla_h \mathbf{u})_{\bullet} \hat{\mathbf{f}}_{\times} - (\nabla_h \mathbf{u})^{\dagger} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{\times}] \\
 &= f \left[ -(\nabla_h \cdot \mathbf{u}) \mathbf{e}_z + \underbrace{(\nabla_h \mathbf{u})^{\dagger} \cdot \mathbf{e}_z}_{=\mathbf{e}_z \cdot (\nabla_h \mathbf{u})} \right] \\
 &= f \left[ -\delta \mathbf{e}_z + \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \nabla_h) \mathbf{u}}_{=0} \right] = -f \delta \mathbf{e}_z, \tag{C.66}
 \end{aligned}$$

wobei von (D.6), (D.86) und  $\hat{\mathbf{f}}_{\times} = -2\mathbf{e}_z$  (siehe (B.14)) Gebrauch gemacht wurde. Damit erhalten wir für (C.62)

$$\frac{d}{dt}(\zeta \mathbf{e}_z) + \delta \zeta \mathbf{e}_z + \nabla_h w \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = -f \delta \mathbf{e}_z. \tag{C.67}$$

Multiplizieren wir (C.67) skalar mit  $\mathbf{e}_z$  und verwenden ferner

$$\mathbf{e}_z \cdot \left( \nabla_h w \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot (\mathbf{e}_z \times \nabla_h w), \quad (\text{C.68})$$

so erhalten wir schließlich die prognostische Gleichung der Vertikalkomponente der relativen Vorticity (zum Beispiel Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(f + \zeta)\delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot (\mathbf{e}_z \times \nabla_h w). \quad (\text{C.69})$$

Im zweiten Schritt betrachten wir die Vertikalableitung der Auftriebsgleichung (4.37c)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{dB}{dt} \right) = -N^2 \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (\text{C.70})$$

wobei bereits  $N^2 = \text{konst.}$  benutzt wurde. Für die linke Seite können wir schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{dB}{dt} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{v} \cdot \nabla B) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla B + \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\partial B}{\partial z} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla B. \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

Der zweite Term auf der rechten Seite lässt sich weiter aufspalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \cdot \nabla B &= \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{e}_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \left( \nabla_h B + \mathbf{e}_z \frac{\partial B}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \nabla_h B + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_z}_{=0} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \nabla_h B}_{=0} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{C.72})$$

Verwenden wir nun noch die Kontinuitätsgleichung  $\delta + \partial w / \partial z = 0$ , so ergibt dies für (C.70)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial B}{\partial z} \right) = \left( N^2 + \frac{\partial B}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \nabla_h B. \quad (\text{C.73})$$

Aus (C.69) +  $f(\text{C.73})/N^2$  erhalten wir schließlich die prognostische Gleichung der quasi-geostrophischen potentiellen Vorticity

$$\frac{d\Pi}{dt} = - \left( \zeta - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B}{\partial z} \right) \delta - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \cdot \left( \mathbf{e}_z \times \nabla_h w + \frac{f}{N^2} \nabla_h B \right). \quad (\text{C.74})$$

Spalten wir alle Größen gemäß des Gleichgewichtsmodells (4.43) in ihren geostrophischen und ageostrophischen Anteil auf, so erhalten wir für (C.74)

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_g}{dt} = & - \left( \zeta_g - \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_g}{\partial z} \right) \delta + 2 \frac{f}{N^2} \frac{\partial B_a}{\partial z} \delta \\ & - \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} \cdot \left( \mathbf{e}_z \times \nabla_h w + \frac{f}{N^2} \nabla_h B_a \right) \\ & - \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial z} \cdot \left( \mathbf{e}_z \times \nabla_h w + \frac{f}{N^2} \nabla_h B_g + \frac{f}{N^2} \nabla_h B_a \right), \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

wobei  $\Pi_a = \zeta_a + (f/N^2)(\partial B_a/\partial z) = 0$  (siehe (4.46b)),  $\delta = \delta_a$  (siehe (B.6)) und  $w = w_a$  (siehe (4.44)) benutzt wurden. Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_g}{\partial z} \cdot \nabla_h B_g &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g \right) \cdot \nabla_h \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} = \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} \right) \cdot \nabla_h \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} \\ &= \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \left( \nabla_h \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} \right) \left( \nabla_h \frac{\partial \tilde{p}_g}{\partial z} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.76})$$

denn das Doppelskalarprodukt des antisymmetrischen Tensors  $\hat{\mathbf{f}}$  mit der symmetrischen Dyade  $\nabla_h(\partial \tilde{p}_g/\partial z) \nabla_h(\partial \tilde{p}_g/\partial z)$  verschwindet gemäß (D.53).

## C.5 Die materielle Ableitung des geostrophisch-hydrostatischen Drucks

Um die materielle Ableitung des geostrophisch-hydrostatischen Drucks  $d\tilde{p}_g/dt$  in Abhängigkeit von der materiellen Ableitung der Leitgröße  $d\Pi/dt = d(f^{-1}\nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g)/dt$  ausdrücken zu können, betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned} \nabla_{qg} \frac{d\tilde{p}_g}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} (\mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} (\mathbf{v}^\downarrow \cdot \nabla \tilde{p}_g) + \nabla_{qg} (\mathbf{v} \cdot \nabla^\downarrow \tilde{p}_g) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g + \nabla_{qg} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \tilde{p}_g^\downarrow] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla_{qg} \tilde{p}_g \\ &= \frac{d}{dt} \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g, \end{aligned} \quad (\text{C.77})$$

wobei wir verwendet haben, dass die Ableitungswirkungen von  $\nabla$  und  $\nabla_{qg} = \nabla_h + \mathbf{e}_z(f/N)\partial/\partial z$ , wegen  $f/N = \text{konst.}$ , kommutieren. Nun bilden wir  $\nabla_{qg} \cdot$  (C.77)

$$\nabla_{qg} \cdot \nabla_{qg} \frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \nabla_{qg}^2 \frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \nabla_{qg} \cdot \frac{d}{dt} \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \cdot (\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g). \quad (\text{C.78})$$



Für den ersten Term auf der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \nabla_{qg} \cdot \frac{d}{dt} \nabla_{qg} \tilde{p}_g &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{v}} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g) + \nabla_{qg} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg}^{\downarrow} \tilde{p}_g) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla_{qg}^{\downarrow} \tilde{p}_g] \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g \\
 &= \frac{d}{dt} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g
 \end{aligned} \tag{C.79}$$

(vergleiche (D.45)). Dabei ist  $\nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g$  der Tensor der Hesse'schen Ableitung des Drucks (Bronstein *et al.*, 2001). Der zweite Term auf der rechten Seite von (C.78) liefert

$$\begin{aligned}
 \nabla_{qg} \cdot (\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g) &= \nabla_{qg} \cdot (\nabla_{qg}^{\downarrow} \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g) + \nabla_{qg} \cdot (\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla^{\downarrow} \tilde{p}_g) \\
 &= \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g + (\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla^{\downarrow} \tilde{p}_g) \cdot \nabla_{qg} \\
 &= \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g + \nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g.
 \end{aligned} \tag{C.80}$$

Damit können wir schreiben

$$\nabla_{qg}^2 \frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g}_{=f\Pi} + 2\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g \tag{C.81a}$$

$$\Rightarrow \frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \nabla_{qg}^{-2} \left( f \frac{d\Pi}{dt} + 2\nabla_{qg} \mathbf{v} \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg}^2 \mathbf{v} \cdot \nabla \tilde{p}_g \right). \tag{C.81b}$$

Schließlich spalten wir den rein geostrophischen Anteil von  $d\tilde{p}_g/dt$  ab

$$\frac{d\tilde{p}_g}{dt} = \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_g + \left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_a, \tag{C.82}$$

mit

$$\left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_g = \nabla_{qg}^{-2} (2\nabla_{qg} \mathbf{u}_g \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g + \nabla_{qg}^2 \underbrace{\mathbf{u}_g \cdot \nabla}_{=\mathbf{u}_g \cdot \nabla_h} \tilde{p}_g). \tag{C.83}$$

$d\Pi/dt$  liefert keinen Beitrag (siehe (C.75)). Auch der erste Term auf der rechten Seite von (C.83) liefert keinen rein geostrophischen Beitrag, wie wir folgender Betrachtung entnehmen können: Mit  $\mathbf{u}_g = f^{-1} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g$  erhalten wir

$$\nabla_{qg} \mathbf{u}_g = \frac{1}{f} \nabla_{qg} (\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g) = \frac{1}{f} \nabla_{qg} (\nabla_h \tilde{p}_g \cdot \hat{\mathbf{f}}^\dagger) = -\frac{1}{f} \nabla_{qg} \nabla_h \tilde{p}_g \cdot \hat{\mathbf{f}}, \tag{C.84}$$

sodass

$$\begin{aligned}
 \nabla_{qg} \mathbf{u}_g \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g &= -\frac{1}{f} (\nabla_{qg} \nabla_h \tilde{p}_g \cdot \hat{\mathbf{f}}) \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g \\
 &= -\frac{1}{f} (\nabla_{qg} \nabla_h \tilde{p}_g \cdot \underbrace{\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla}_{=\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h} \nabla_{qg} \tilde{p}_g) \cdot \quad (C.85)
 \end{aligned}$$

Der Tensor in Klammern besitzt die Struktur  $\mathbb{A} \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{A}^\dagger$  und ist antisymmetrisch

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{A} \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{A}^\dagger)^\dagger &= [(\mathbb{A} \cdot \hat{\mathbf{f}}) \cdot \mathbb{A}^\dagger]^\dagger = \mathbb{A} \cdot (\mathbb{A} \cdot \hat{\mathbf{f}})^\dagger \\
 &= \mathbb{A} \cdot (\hat{\mathbf{f}}^\dagger \cdot \mathbb{A}^\dagger) = -(\mathbb{A} \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{A}^\dagger), \quad (C.86)
 \end{aligned}$$

wobei von (D.49) Gebrauch gemacht wurde. Infolgedessen besitzt er keinen Skalar (siehe (D.14)), sodass

$$\nabla_{qg} \mathbf{u}_g \cdot \nabla \nabla_{qg} \tilde{p}_g = 0 \quad (C.87)$$

und damit

$$\left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_g = \nabla_{qg}^{-2} (\nabla_{qg}^2 \mathbf{u}_g \cdot \nabla_h \tilde{p}_g). \quad (C.88)$$

Wir können (C.88) auch als Funktion von  $\tilde{p}_g$  und  $\Pi$  ausdrücken. Dazu verwenden wir

$$\nabla_{qg}^2 \mathbf{u}_g = \nabla_{qg}^2 \left( \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}_g \right) = \frac{1}{f} \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g = \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h (f^{-1} \nabla_{qg}^2 \tilde{p}_g) = \hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \Pi, \quad (C.89)$$

was in (C.88) eingesetzt, Folgendes liefert

$$\left( \frac{d\tilde{p}_g}{dt} \right)_g = \nabla_{qg}^{-2} [(\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \Pi) \cdot \nabla_h \tilde{p}_g] = \nabla_{qg}^{-2} [\hat{\mathbf{f}} \cdot (\nabla_h \Pi)(\nabla_h \tilde{p}_g)]. \quad (C.90)$$

## C.6 Die Schwerewellenabstrahlung vom teilchenfesten Blickwinkel

Ob wir zum Beispiel die Fourier-Entwicklung von Schwerewellen in linearisierten Modellen oder die Bestimmung eines Gleichgewichtsanteils aus einer Leitgröße mittels nichtlokaler diagnostischer Beziehungen betrachten; es ist die Deutung der Zustandsgrößen als globale Felder, die in der Untersuchung von Schwerewellen vorherrscht. Nichtsdestotrotz ist es die lokale Physik der Fluidteilchen, aus der alle globalen Strukturen, wie zum Beispiel Wellen, erwachsen. Möglicherweise lässt sich die spontane Schwerewellenabstrahlung beziehungsweise ein Teil dieses Vorgangs auch mithilfe eines teilchenfesten Modells nachvollziehen. Einen möglichen Ansatz möchten wir hier vorstellen.

Wir beginnen unsere Überlegungen mit der horizontalen Impulsgleichung (4.37a)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} = f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_g, \quad (\text{C.91})$$

worin  $\mathbf{u}_g = f^{-1}\hat{\mathbf{f}} \cdot \nabla_h \tilde{p}$ . Um diese Gleichung formal zu lösen, betrachten wir zunächst ihre homogene Form

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} = \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (\text{C.92})$$

Diese gleicht formal einer Eigenwertgleichung und wir können die Werkzeuge zur Lösung einer solchen auch auf diesen Fall übertragen. So erhalten wir aus der linksseitigen Multiplikation mit der Adjunkten von  $d/dt\mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}}$  gemäß (D.102) die Forderung nach dem Verschwinden der Determinante

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \left| \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right)^a \right. \\ \Rightarrow & \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right)^a \cdot \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right) \cdot \mathbf{u} = \det \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right) \underbrace{\mathbb{E} \cdot \mathbf{u}}_{=\mathbf{u}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.93})$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu (C.92) (vergleiche Ertel *et al.*, 1941; Bronstein *et al.*, 2001; Herbert, 2012a). Die Determinante eines Tensors der Gestalt  $\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}$  lautet

$$\det(\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) = \alpha^3 + \alpha\beta^2 \quad (\text{C.94})$$

(siehe (D.113)). Da  $\mathbb{E}, \hat{\mathbf{f}} = \text{konst.}$ , können wir dies auf (C.93) übertragen und finden

$$\det \left( \frac{d}{dt} \mathbb{E} + f\hat{\mathbf{f}} \right) = \frac{d^3}{dt^3} + f^2 \frac{d}{dt} \quad (\text{C.95a})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{d^2}{dt^2} + f^2 \right) \mathbf{u} = 0 \quad (\text{C.95b})$$

$$\Rightarrow \left( \frac{d^2}{dt^2} + f^2 \right) \mathbf{u} = \mathbf{c}, \quad (\text{C.95c})$$

mit  $\mathbf{c} = \text{konst.}$  Durch die Inhomogenität von (C.95c) wird der Fall berücksichtigt, dass  $\mathbf{u}$  einen Anteil enthält, der (anti)parallel zu  $\mathbf{e}_z$  ist. Da dies auf unser Problem nicht zutrifft, können wir  $\mathbf{c} = 0$  setzen

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + f^2 \right) \mathbf{u} = 0. \quad (\text{C.96})$$

Zu selbiger Gleichung gelangt man, wenn man  $d/dt$  auf (C.92) anwendet. Der Lösungsansatz

$$\mathbf{u}(t) = \cos(ft)\mathbf{u}_1 + \sin(ft)\mathbf{u}_2, \quad (\text{C.97})$$

mit der Schwingungsfrequenz  $f$  und  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 = \text{konst.}$ , ergibt zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}|_{t=0} =: \mathbf{u}_0, \quad (\text{C.98a})$$

$$\left. \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right|_{t=0} = -f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (\text{C.98b})$$

die Trägheitsschwingung (zum Beispiel Forsythe, 1949; Herbert, 1978a)<sup>4</sup>

$$\mathbf{u}(t) = \underbrace{\left[ \cos(ft)\mathbb{E} - \sin(ft)\hat{\mathbf{f}} \right]}_{=: \mathbb{T}(ft)} \cdot \mathbf{u}_0. \quad (\text{C.99})$$

Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung der Horizontalgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens bei Abwesenheit von Horizontalkräften beziehungsweise gegenseitiger Aufhebung derselben. Da  $\mathbf{u} = d\mathbf{r}_h/dt$ , wobei  $\mathbf{r}_h$  den Horizontalanteil des Ortsvektors  $\mathbf{r}$  eines Flüssigkeitsteilchens bezeichnet, erhalten wir durch Integration von (C.99)

$$\mathbf{r}_h(t) = \mathbf{r}_{h0} + \frac{1}{f} \left\{ \sin(ft)\mathbb{E} - [1 - \cos(ft)]\hat{\mathbf{f}} \right\} \cdot \mathbf{u}_0. \quad (\text{C.100})$$

Dies ist die Bahn des Trägheitskreises, der ein Teilchen folgt, dass sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  am horizontalen Ort  $\mathbf{r}_{h0} := \mathbf{r}_h|_{t=0}$  befindet (zum Beispiel Forsythe, 1949; Herbert, 1978a).

Um die inhomogenen Gleichung (C.91) zu lösen, verwenden wir die Variation der Konstanten und setzen in (C.99)  $\mathbf{u}_0 \rightarrow \mathbf{u}_3(t)$  (siehe zum Beispiel Bronstein *et al.*, 2001). Zunächst betrachten wir den zweiten Term auf der linken Seite von (C.91)

$$\begin{aligned} f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} &= f\hat{\mathbf{f}} \cdot \left[ \cos(ft)\mathbb{E} - \sin(ft)\hat{\mathbf{f}} \right] \cdot \mathbf{u}_3 = f \left[ \cos(ft)\hat{\mathbf{f}} - \sin(ft)\hat{\mathbf{f}}^2 \right] \cdot \mathbf{u}_3 \\ &= f \left[ \cos(ft)\hat{\mathbf{f}} + \sin(ft)\mathbb{E} \right] \cdot \mathbf{u}_3, \end{aligned} \quad (\text{C.101})$$

wobei wir  $\hat{\mathbf{f}}^2 = -(\mathbb{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z)$  (siehe (B.2)) und  $\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{e}_z(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}_3) = 0$  benutzt haben. Wir benötigen nun noch die materielle Ableitung von  $\mathbf{u}$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -f \left[ \sin(ft)\mathbb{E} + \cos(ft)\hat{\mathbf{f}} \right] \cdot \mathbf{u}_3 + \mathbb{T}(ft) \cdot \frac{d\mathbf{u}_3}{dt}. \quad (\text{C.102})$$

---

<sup>4</sup> In den genannten Arbeiten wird folgender Weg beschritten, um die homogene Gleichung (C.92) (in Bezug auf die Atmosphäre) zu lösen: Die Horizontalgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  wird in eine zonale Komponente  $u$  und eine meridionale  $v$  zerlegt. Mit  $U := u + iv$  wird nun eine komplexe Horizontalgeschwindigkeit eingeführt, mit deren Hilfe sich Gleichung (C.92) in der Gestalt  $dU/dt + ifU = 0$  schreiben lässt. Die Lösung dieser Gleichung lautet  $U(t) = U_0 \exp(-ift)$ , mit  $U_0 := U|_{t=0}$ . Wir haben diese Vorgehensweise nicht übernommen, um auf die Einführung eines willkürlichen horizontalen Koordinatensystems zu verzichten. Es sei jedoch erwähnt, dass der Lösungsausdruck (C.99) ebenfalls in der Form  $\mathbf{u}(t) = \exp(-\hat{\mathbf{f}}ft) \cdot \mathbf{u}_0$  dargestellt werden kann, wobei  $\exp(-\hat{\mathbf{f}}ft) = \mathbb{E}_h + \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n/n!](ft)^n \hat{\mathbf{f}}^n = \cos(ft)\mathbb{E}_h - \sin(ft)\hat{\mathbf{f}}$ , mit  $\mathbb{E}_h := \mathbb{E} - \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$  (siehe Bronstein *et al.* (2001) für die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und (B.4) für  $\hat{\mathbf{f}}^n$ ).

Setzen wir (C.101) und (C.102) in (C.91) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}(ft) \cdot \frac{d\mathbf{u}_3}{dt} &= f\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_g(t) \quad | \mathbb{T}^{-1}(ft) \cdot \\
 \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}_3}{dt} &= f\mathbb{T}^{-1}(ft) \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_g(t) \\
 \Rightarrow \mathbf{u}_3(t) &= \mathbf{u}_3|_{t=0} + f \int_0^t \mathbb{T}^{-1}(ft') \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_g(t') dt' \\
 \Rightarrow \mathbf{u}(t) &= \mathbb{T}(ft) \cdot \mathbf{u}_0 + f\mathbb{T}(ft) \cdot \int_0^t \mathbb{T}^{-1}(ft') \cdot \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}_g(t') dt', \quad (\text{C.103})
 \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{u}_3|_{t=0} = \mathbf{u}_0$ . Die Inverse des Trägheitsschwingungstensors  $\mathbb{T}$  lautet gemäß (D.114)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{T}^{-1} &= \frac{1}{\cos^3 + \cos \sin^2} \left( \cos^2 \mathbb{E} + \cos \sin \hat{\mathbf{f}} + \sin^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right) \\
 &= \frac{1}{\cos} \left( \cos^2 \mathbb{E} + \cos \sin \hat{\mathbf{f}} + \sin^2 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right) \\
 &= \cos \mathbb{E} + \sin \hat{\mathbf{f}} + \frac{\sin^2}{\cos} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z = \mathbb{T}^\dagger + \frac{\sin^2}{\cos} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z, \quad (\text{C.104})
 \end{aligned}$$

wobei wir von

$$\begin{aligned}
 \cos^2 + \sin^2 &= 1 \quad | \cos \cdot \\
 \Rightarrow \cos^3 + \cos \sin^2 &= \cos \quad (\text{C.105})
 \end{aligned}$$

(siehe Bronstein *et al.*, 2001) und

$$\mathbb{T}^\dagger = \cos \mathbb{E}^\dagger - \sin \hat{\mathbf{f}}^\dagger = \cos \mathbb{E} + \sin \hat{\mathbf{f}} \quad (\text{C.106})$$

Gebrauch gemacht haben. Die Inverse hat bei  $\cos(ft_{\text{krit.}}) = 0$  eine Definitionslücke, wobei die kritischen Zeiten die Gleichung

$$ft_{\text{krit.}} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{C.107})$$

erfüllen (Bronstein *et al.*, 2001). Der Grund dafür ist, dass  $\mathbb{T}$  zu diesen Zeitpunkten seine Vollständigkeit verliert und damit keine Inverse mehr besitzt (siehe Anhang D.5). Es ist nämlich

$$\mathbb{T}[ft_{\text{krit.}}(n)] = (-1)^{n+1} \hat{\mathbf{f}} \quad (\text{C.108})$$

und durch  $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}_z \neq 0$  ist eine Schar von Vektoren gegeben, für welche gilt

$$\hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{a} = \alpha (\mathbb{E} \times \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z = \alpha \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0. \quad (\text{C.109})$$

Das heißt, multipliziert man  $\hat{\mathbf{f}}$  mit einem Vektor, der eine Vertikalkomponente enthält, so geht die Information über diese Komponente in diesem Produkt verloren. Es kann daher

keine allgemeine Inverse von  $\hat{\mathbf{f}}$  geben, die in der Lage wäre, den ursprünglichen Vektor samt seiner Vertikalkomponente wiederherzustellen. Allerdings tritt die Singularität in unserem Problem nicht in Erscheinung, da wir horizontale Ausdehnungsgrößen betrachten. Ohnedies ist

$$\begin{aligned} \mathbb{T}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{f}} &= \left( \cos \mathbb{E} + \sin \hat{\mathbf{f}} + \frac{\sin^2}{\cos} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right) \cdot \hat{\mathbf{f}} = \cos \hat{\mathbf{f}} + \sin \hat{\mathbf{f}}^2 + \frac{\sin^2}{\cos} \mathbf{e}_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{f}})}_{=0} \\ &= \cos \hat{\mathbf{f}} - \sin \mathbb{E} + \sin \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{C.110})$$

Dem Integralausdruck auf der rechten Seite von (C.103) kann eine vorteilhaftere Gestalt gegeben werden. Dafür betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{T}(ft) \cdot \mathbb{T}^{-1}(ft') &= \left[ \cos(ft) \mathbb{E} - \sin(ft) \hat{\mathbf{f}} \right] \cdot \left[ \cos(ft') \mathbb{E} + \sin(ft') \hat{\mathbf{f}} + \frac{\sin^2(ft')}{\cos(ft')} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \right] \\ &= \cos(ft) \cos(ft') \mathbb{E} + \cos(ft) \sin(ft') \hat{\mathbf{f}} + \frac{\cos(ft) \sin^2(ft')}{\cos(ft')} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ &\quad - \sin(ft) \cos(ft') \hat{\mathbf{f}} - \sin(ft) \sin(ft') \hat{\mathbf{f}}^2 \\ &= [\cos(ft) \cos(ft') + \sin(ft) \sin(ft')] \mathbb{E} \\ &\quad + [\cos(ft) \sin(ft') - \sin(ft) \cos(ft')] \hat{\mathbf{f}} \\ &\quad + \left[ \frac{\cos(ft) \sin^2(ft')}{\cos(ft')} - \sin(ft) \cos(ft') \right] \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ &= \cos[f(t-t')] \mathbb{E} - \sin[f(t-t')] \hat{\mathbf{f}} \\ &\quad + \left[ \frac{\cos(ft) \sin^2(ft')}{\cos(ft')} - \sin(ft) \cos(ft') \right] \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \\ &= \mathbb{T}[f(t-t')] + \left[ \frac{\cos(ft) \sin^2(ft')}{\cos(ft')} - \sin(ft) \cos(ft') \right] \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (\text{C.111})$$

Dabei haben wir die trigonometrischen Additionstheoreme (Bronstein *et al.*, 2001)

$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \quad (\text{C.112a})$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \quad (\text{C.112b})$$

verwendet. Wir können für (C.103) somit schreiben

$$\mathbf{u}(t) = \mathbb{T}(ft) \cdot \mathbf{u}_0 + f \hat{\mathbf{f}} \cdot \int_0^t \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \mathbf{u}_g(t') dt', \quad (\text{C.113})$$

wobei (C.109) und  $\mathbb{T} \cdot \hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{T}$  ausgenutzt wurden.

Um das Integral auf der rechten Seite von (C.113) zumindest formal auszuwerten, nutzen wir die partielle Integration (Bronstein *et al.*, 2001)

$$\int_0^t \frac{da}{dt'} b dt' = [ab]_0^t - \int_0^t a \frac{db}{dt'} dt', \quad (\text{C.114})$$

mit

$$\frac{da}{dt'} \rightarrow \mathbb{T}[f(t-t')] = \cos[f(t-t')]\mathbb{E} - \sin[f(t-t')]\hat{\mathbf{f}} \quad (\text{C.115a})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a &\rightarrow -\frac{1}{f} \left\{ \sin[f(t-t')]\mathbb{E} + \cos[f(t-t')]\hat{\mathbf{f}} \right\} \\ &= -\frac{1}{f} \left\{ \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \hat{\mathbf{f}} + \sin[f(t-t')]\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.115b})$$

wobei wir

$$\mathbb{T} \cdot \hat{\mathbf{f}} = (\cos \mathbb{E} - \sin \hat{\mathbf{f}}) \cdot \hat{\mathbf{f}} = \cos \hat{\mathbf{f}} - \sin \hat{\mathbf{f}}^2 = \cos \hat{\mathbf{f}} + \sin \mathbb{E} - \sin \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \quad (\text{C.116})$$

verwendet haben. Damit folgt

$$\begin{aligned} &f\hat{\mathbf{f}} \cdot \left( -\frac{1}{f} \left\{ \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \hat{\mathbf{f}} + \sin[f(t-t')]\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \right\} \cdot \mathbf{u}_g(t') \right)_0^t \\ &= - \left\{ \hat{\mathbf{f}}^2 \cdot \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \mathbf{u}_g(t') \right\}_0^t = \left\{ \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \mathbf{u}_g(t') \right\}_0^t \\ &= \mathbf{u}_g(t) - \mathbb{T}(ft) \cdot \mathbf{u}_{g0}, \end{aligned} \quad (\text{C.117})$$

mit  $\mathbb{T}|_{t=0} = \mathbb{E}$  und  $\mathbf{u}_{g0} := \mathbf{u}_g|_{t=0}$ . Das Ergebnis der partiellen Integration lautet daher

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_g(t) + \mathbb{T}(ft) \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{g0}) + f\hat{\mathbf{f}} \cdot \int_0^t \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_g(t')}{dt'} dt'. \quad (\text{C.118})$$

Auf den Integralausdruck kann erneut die partielle Integration, in gleicher Weise wie zuvor, angewendet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \mathbf{u}_g(t) + \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_g(t)}{dt} \\ &\quad + \mathbb{T}(ft) \cdot \left( \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{g0} - \frac{1}{f}\hat{\mathbf{f}} \cdot \frac{d\mathbf{u}_{g0}}{dt} \right) \\ &\quad + f\hat{\mathbf{f}} \cdot \int_0^t \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \frac{1}{f^2}\hat{\mathbf{f}}^2 \cdot \frac{d^2\mathbf{u}_g(t')}{dt'^2} dt'. \end{aligned} \quad (\text{C.119})$$

Dieses Vorgehen lässt sich beliebig oft wiederholen und wir finden das allgemeine Ergebnis (Forsythe, 1949; Herbert, 1978a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(t) &= \underbrace{\mathbf{u}_g(t) + \sum_{j=1}^J \frac{1}{f^j} \hat{f}^j \cdot \frac{d^j \mathbf{u}_g(t)}{dt^j}}_{=: \mathbf{u}_{gJ}} \\
 &+ \mathbb{T}(ft) \cdot \underbrace{\left( \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{g0} - \sum_{j=1}^J \frac{1}{f^j} \hat{f}^j \cdot \frac{d^j \mathbf{u}_{g0}}{dt^j} \right)}_{=: \mathbf{u}_{aJ0}} \\
 &+ \underbrace{f \hat{f} \cdot \int_0^t \mathbb{T}[f(t-t')] \cdot \frac{1}{f^{J+1}} \hat{f}^{J+1} \cdot \frac{d^{J+1} \mathbf{u}_g(t')}{dt'^{J+1}} dt'}_{=: \Delta \mathbf{u}_{aJ}}. \tag{C.120}
 \end{aligned}$$

Einmal mehr begegnet uns die Hesselberg-Philipps'sche Reihe. Wir bezeichnen  $\mathbf{u}_{gJ}$ ,  $\mathbb{T}(ft) \cdot \mathbf{u}_{aJ0}$  und  $\Delta \mathbf{u}_{aJ}$  als Anteile an der Horizontalgeschwindigkeit aus der Fortbewegung, der verminderten Trägheitsschwingung und übrigen Schwankungen.

Bevor wir (C.120) genauer beleuchten, möchten wir den entsprechenden Ausdruck für den Vertikalimpuls und den Auftrieb herleiten. Betrachten wir  $w$  und  $B/N$  ( $N^2 > 0$  vorausgesetzt) als Einträge eines algebraischen Vektors, so können wir die Bilanzgleichungen (4.37b) und (4.37c)

$$\frac{dw}{dt} = B - B_g, \tag{C.121a}$$

$$\frac{dB}{dt} = -N^2 w, \tag{C.121b}$$

mit  $B_g = \partial \tilde{p} / \partial z$  in folgende Gestalt überführen

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} w \\ B/N \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}} + N \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \hat{\mathbf{N}}} \begin{pmatrix} w \\ B/N \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ B_g/N \end{pmatrix}}_{=: \check{\mathbf{a}}_g}. \tag{C.122}$$

Würden wir (C.91) in einem Koordinatensystem vermessen und die Koeffizienten ebenfalls in algebraische Vektoren und Matrizen anordnen, so wäre das Gleichungssystem strukturell identisch mit (C.122). Wir können daher die zuvor gewonnenen Ergebnisse auf (C.122) übertragen und finden zunächst für die homogene Gleichung

$$\left( \frac{d}{dt} \mathbf{E} + N \hat{\mathbf{N}} \right) \mathbf{a} = 0 \tag{C.123a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \mathbf{a}}{dt^2} + N^2 \mathbf{a} = 0 \tag{C.123b}$$

die Lösung der Auftriebsschwingung

$$\mathbf{a}(t) = \underbrace{\left[ \cos(Nt) \mathbf{E} - \sin(Nt) \hat{\mathbf{N}} \right]}_{=: \mathbf{A}(Nt)} \mathbf{a}_0, \tag{C.124}$$



worin  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix bezeichnet und  $\mathbf{a}_0 = (w_0, B_0/N)^\top := (w, B/N)^\top|_{t=0}$  (um nicht ständig neuen Bezeichnungen einführen zu müssen, lässt es sich an dieser Stelle nicht vermeiden, dass die Bezeichnung des Anfangswertes des Auftriebs,  $B_0$ , mit der Bezeichnung für den großskaligen Auftrieb in (4.7) zusammenfällt). Die Schwingungsfrequenz ist  $N$ . Weiterhin erhalten wir für die inhomogene Gleichung

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} + N\hat{\mathbf{N}}\mathbf{a} = N\hat{\mathbf{N}}\check{\mathbf{a}}_g \quad (\text{C.125})$$

die Lösung

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{A}(Nt)\mathbf{a}_0 + N\hat{\mathbf{N}} \int_0^t \mathbf{A}[N(t-t')]\check{\mathbf{a}}_g(t') dt'. \quad (\text{C.126})$$

Wenden wir auf den Integralausdruck in (C.126) die partielle Integration an, so erhalten wir

$$\mathbf{a}(t) = \check{\mathbf{a}}_g(t) + \mathbf{A}(Nt)(\mathbf{a}_0 - \check{\mathbf{a}}_{g0}) + N\hat{\mathbf{N}} \int_0^t \mathbf{A}[N(t-t')] \frac{1}{N} \hat{\mathbf{N}} \frac{d\check{\mathbf{a}}_g(t')}{dt'} dt'. \quad (\text{C.127})$$

mit  $\check{\mathbf{a}}_{g0} := \check{\mathbf{a}}_g|_{t=0}$ . Abermalige partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \check{\mathbf{a}}_g(t) + \frac{1}{N} \hat{\mathbf{N}} \frac{d\check{\mathbf{a}}_g(t)}{dt} + \mathbf{A}(Nt) \left( \mathbf{a}_0 - \check{\mathbf{a}}_{g0} - \frac{1}{N} \hat{\mathbf{N}} \frac{d\check{\mathbf{a}}_{g0}}{dt} \right) \\ &\quad + N\hat{\mathbf{N}} \int_0^t \mathbf{A}[N(t-t')] \frac{1}{N^2} \hat{\mathbf{N}}^2 \frac{d^2\check{\mathbf{a}}_g(t')}{dt'^2} dt', \end{aligned} \quad (\text{C.128})$$

worin

$$\hat{\mathbf{N}}^2 = \hat{\mathbf{N}}\hat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{E}. \quad (\text{C.129})$$

Allgemein gilt

$$\hat{\mathbf{N}}^n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \hat{\mathbf{N}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} \mathbf{E}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{C.130})$$

(vergleiche (B.4)). Ferner finden wir, dass

$$\check{\mathbf{a}}_g + \frac{1}{N} \hat{\mathbf{N}} \frac{d\check{\mathbf{a}}_g}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ B_g/N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} \frac{dB_g}{dt} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_g \\ B_g/N \end{pmatrix} =: \mathbf{a}_g. \quad (\text{C.131})$$

(vergleiche (3.83c)). Die weiteren partiellen Integrationen tragen nun zyklisch einmal zur Hesselberg-Philipps'schen Reihe von  $B$  und das andere Mal zu jener von  $w$  bei. Mithilfe

von (C.131) können wir dies zusammenfassen

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) = & \underbrace{\mathbf{a}_g(t) + \sum_{j=1}^J (-1)^j \frac{1}{N^{2j}} \frac{d^{2j} \mathbf{a}_g(t)}{dt^{2j}}}_{=:\mathbf{a}_{gJ}(t)} + \mathbf{A}(Nt) \underbrace{\left[ \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_{g0} - \sum_{j=1}^J (-1)^j \frac{1}{N^{2j}} \frac{d^{2j} \mathbf{a}_{g0}}{dt^{2j}} \right]}_{=:\mathbf{a}_{aJ0}} \\ & + \underbrace{N \hat{\mathbf{N}} \int_0^t \mathbf{A}[N(t-t')] (-1)^{J+1} \frac{1}{N^{2(J+1)}} \frac{d^{2(J+1)} \mathbf{a}_g(t')}{dt'^{2(J+1)}} dt'}_{=:\Delta \mathbf{a}_{aJ}(t)}. \end{aligned} \quad (\text{C.132})$$

Wir untersuchen nun (C.120)

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{gJ}(t) + \mathbb{T}(ft) \cdot \mathbf{u}_{aJ0} + \Delta \mathbf{u}_{aJ}(t), \quad (\text{C.133})$$

stellvertretend auch für (C.132), etwas genauer. Dabei deuten wir  $\mathbf{u}_{gJ}(t)$  als Geschwindigkeit, mit der sich das Flüssigkeitsteilchen fortbewegt. Dieser Bewegung überlagert ist die verminderte Trägheitsschwingung mit der Geschwindigkeit  $\mathbb{T}(ft) \cdot \mathbf{u}_{aJ0}$ . Schließlich beschreibt  $\Delta \mathbf{u}_{aJ}(t)$  die übrigen Schwankungen der Bewegung. Die Amplitude der Trägheitsschwingung,  $\mathbf{u}_{aJ0}$ , ist gleich der Abweichung der tatsächlichen Geschwindigkeit,  $\mathbf{u}$ , von der Fortbewegungsgeschwindigkeit,  $\mathbf{u}_{gJ}$ , zum gewählten Anfangszeitpunkt,  $t = 0$ . Damit gehört die Trägheitsschwingung zum Ungleichgewichtsanteil der Strömung (Forsythe, 1949). Relativ zum gewählten Anfangszeitpunkt hängt deren Schwingungsamplitude nicht von der Zeit ab. Mittels (4.42a) können wir für die Amplitude schreiben

$$\mathbf{u}_{aJ0} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_{g0} - \sum_{j=1}^J \frac{1}{f^j} \hat{\mathbb{f}}^j \cdot \frac{d^j \mathbf{u}_{g0}}{dt^j} = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{gJ})_{t=0} = \frac{1}{f^{J+1}} \hat{\mathbb{f}}^{J+1} \cdot \left. \frac{d^{J+1} \mathbf{u}}{dt^{J+1}} \right|_{t=0}. \quad (\text{C.134})$$

Wegen

$$(\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}_{aJ0}) \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}_{aJ0}) = (\mathbf{u}_{aJ0} \cdot \mathbb{T}^\dagger) \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}_{aJ0}) = \mathbf{u}_{aJ0} \cdot (\mathbb{T}^\dagger \cdot \mathbb{T}) \cdot \mathbf{u}_{aJ0} = \mathbf{u}_{aJ0} \cdot \mathbf{u}_{aJ0}, \quad (\text{C.135})$$

wobei (C.104) verwandt wurde, hat der Trägheitsschwingungstensor keinen Einfluss auf die Amplitude (ebenso wie der Tensor  $\hat{\mathbb{f}}$ ). Nehmen wir weiterhin an, dass die Hesselberg-Philipps'sche Reihe (3.62) konvergiert, so dürfte

$$\left| \frac{d^{J+1} \mathbf{u}}{dt^{J+1}} \right| \sim \left| \frac{d^{J+1} \mathbf{u}_g}{dt^{J+1}} \right| \quad (\text{C.136})$$

gelten und für  $ft > 1$ , das heißt nach ungefähr einem Sechstel der Trägheitsschwingungsperiode  $T_f = 2\pi/f$ , ist damit zu rechnen, dass  $|\Delta \mathbf{u}_{aJ}| \gtrsim |\mathbf{u}_{aJ0}|$ . In der Zeit davor ( $ft < 1$ ) ist die Trägheitsschwingung vermutlich die vorherrschende Ungleichgewichtsbewegung.

Die Entwicklungsordnung  $J$  wird durch die Theorie nicht vorgegeben und ist damit freier Parameter. Entweder ist deren Wert im Rahmen einer Modellannahme schlicht festzulegen oder er wird auf empirischem Wege bestimmt. Letzteres wäre wohl am einfachsten zu bewerkstelligen, indem man ein numerisches Modell verwendet, dass in der Lage ist,

die Bahnen einzelner Flüssigkeitsteilchen näherungsweise zu verfolgen. Damit ließe sich zunächst untersuchen, ob in der Teilchenbewegung überhaupt eine Schwingung mit der Frequenz  $f$  auszumachen ist und falls dem so ist, für welches  $J$  die größte Korrelation zwischen der beobachteten Schwingungsamplitude und  $\mathbf{u}_{aJ0}$  erzielt wird. Die im Vergleich zur Trägheitsschwingungsperiode verhältnismäßig kurze Zeitspanne, in der die Amplitude von  $\mathbf{u}_{aJ0}$  vermutlich größer ist als jene von  $\Delta\mathbf{u}_{aJ}$ , dürfte jedoch eine Hürde bei der empirischen Bestimmung von  $J$  sein. Zum jetzigen Zeitpunkt steht uns kein numerisches Modell zur Verfügung, mit dessen Hilfe wir die Bahnen von Flüssigkeitsteilchen im Annulus berechnen könnten. Daher können wir die Frage nach einem geeigneten Wert für  $J$  nicht beantworten.

Ob die verminderte Trägheitsschwingung tatsächlich in Erscheinung tritt, könnte angesichts der Hesselberg-Philipps'schen Reihe (3.62) durchaus fragwürdig sein. Setzen wir voraus, dass (3.62) konvergiert und in diesem Falle mit dem Ausdruck (C.120) identisch ist (wofür wir jedoch keinen Beweis angeben können), so folgt daraus

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{g\infty 0}(t), \quad (\text{C.137a})$$

$$\mathbf{u}_{a\infty 0} = 0, \quad (\text{C.137b})$$

$$\Delta\mathbf{u}_{a\infty}(t) = 0. \quad (\text{C.137c})$$

Dies kann entweder bedeuten, dass eine etwaige verminderte Trägheitsschwingung für  $J \rightarrow \infty$  gänzlich in  $\mathbf{u}_{g\infty 0}$  aufgeht oder aber, dass, wenn (3.62) konvergiert, keine verminderte Trägheitsschwingung vorhanden ist und womöglich erst in Erscheinung tritt, wenn letztgenannte Reihe divergiert. Auch auf diese Frage können wir zum jetzigen Zeitpunkt keine Antwort geben. Es muss daher vorläufig Mutmaßung beziehungsweise Modellannahme bleiben, dass eine solche existiert.

Wir möchten noch einmal hervorheben, dass dieses Modell ein lokaler Ansatz ist, denn  $\mathbf{u}_{gJ}$  kann, gleich der Vorgehensweise in (4.32), grundsätzlich in einen diagnostischen Ausdruck übersetzt werden, in den die tatsächlichen Größen  $\mathbf{v}$ ,  $B$  und  $\tilde{p}$  und Ableitungen derselben an Ort und Stelle des Flüssigkeitsteilchens einzusetzen sind (in den Boussinesq-Gleichungen mag die Poisson-Gleichung des Drucks jedoch auch zu Volumenintegralausdrücken in  $\mathbf{u}_{gJ}$  führen). Im Folgenden werden wir aus Bequemlichkeit die Teilchenfortbewegung  $\mathbf{u}_{gJ}$  auch als lokalen Gleichgewichtsanteil, die Trägheitsschwingung  $\mathbb{T} \cdot \mathbf{u}_{aJ0}$  und die übrigen Schwankungen  $\Delta\mathbf{u}_{aJ}$  als lokalen Ungleichgewichtsanteil bezeichnen, auch wenn diese Benennung etwas unglücklich sein mag, da  $\mathbf{u}_{gJ}$  im Allgemeinen von dem aus nichtlokalen diagnostischen Beziehungen berechneten Gleichgewichtsanteil, wie er in Abschnitt 4.4 verwendet wurde, abweichen wird.

Wie ließen sich nun die verminderte Trägheits- und Auftriebsschwingung mit der spontanen Schwerewellenabstrahlung in Verbindung bringen? Als Anknüpfungspunkt dient uns hierzu, dass in einer ruhenden, geschichteten Flüssigkeit mithilfe einer Kugel, die in vertikaler Richtung mit einer Frequenz von  $\omega < N$  oszilliert, Schwerewellen mit derselben Frequenz angeregt werden können (Flynn *et al.*, 2003). Darüber hinaus gibt es Modelle, welche die Anregung von Schwerewellen durch Konvektion mit einer oszillatorischen Bewegung in Verbindung bringen (Fritts & Alexander, 2003). Voraussetzung für die Schwerewellenanregung durch eine Oszillation in einer geschichteten und rotierenden Flüssigkeit ist, dass

die Schwingungsfrequenz des Oszillators im Schwerewellenfrequenzbereich  $f < \hat{\omega} < N$  liegt. Dies trifft auf die verminderte Trägheits- und die Auftriebsschwingung für sich genommen nicht zu, da sie mit den Schwingungsfrequenzen  $f$  und  $N$  gerade außerhalb des eigentlichen Schwerewellenfrequenzspektrums liegen. Denkbar wäre aber möglicherweise Folgendes: Wir gehen der Einfachheit halber davon aus, dass für Zeiten  $t < t_0$  die Flüssigkeit im gesamten betrachteten Bereich  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{gJ}$  und  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{gJ}$  erfülle (für verminderte Trägheits- und Auftriebsschwingung sei dieselbe Entwicklungsordnung  $J$  gewählt). Zum Zeitpunkt  $t = t_0$  haben die Flüssigkeitsteilchen innerhalb eines (kleinen) materiellen Volumens  $V$  nun ein Ungleichgewicht,  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{gJ})_{t=t_0} \neq 0$  und  $(\mathbf{a} - \mathbf{a}_{gJ})_{t=t_0} \neq 0$ , entwickelt. Gemäß (C.120) und (C.132) vollführt das materielle Volumen für  $t > t_0$  zwangsläufig in der Horizontalen die verminderte Trägheitsschwingung und in der Vertikalen die verminderte Auftriebsschwingung. Die Überlagerung beider Schwingungen, möglicherweise in Verbindung mit der Fortbewegung,  $\mathbf{u}_{gJ}$  und  $w_{gJ}$ , ist nun womöglich in der Lage, außerhalb (und innerhalb) von  $V$  Schwerewellen, mit einer intrinsischen Frequenz  $f < \hat{\omega} < N$ , anzuregen. Wir nehmen der Einfachheit halber weiterhin an, dass die Schwerewellen sich in  $\Delta\mathbf{u}_{aJ}$  und  $\Delta\mathbf{a}_{aJ}$  niederschlagen. Wählen wir einen Zeitpunkt  $t_1 > t_0$ , da sich auch Schwerewellen in  $V$  befinden, so lautet zum Beispiel die neue Trägheitsschwingungsamplitude eines Flüssigkeitsteilchens in  $V$

$$\mathbf{u}_{aJ}(t_1) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{gJ})_{t=t_1} = \mathbb{T}(ft_1) \cdot \mathbf{u}_{aJ0} + \Delta\mathbf{u}_{aJ}(t_1). \quad (\text{C.138})$$

Das heißt verminderte Trägheits- und Auftriebsschwingung sowie Schwerewellen – die verschiedenen Ausprägungen des Ungleichgewichts – würden einander wechselseitig bedingen und beeinflussen. Ließe sich die anfängliche Gesamtschwingung (verminderte Trägheits- und Auftriebsschwingung) des materiellen Volumens tatsächlich als mitursächlich für die spontane Schwerewellenabstrahlung betrachten, so böte dieses Modell möglicherweise einen Erklärungsansatz, warum in Simulationen spontaner Schwerewellenabstrahlung überwiegend Schwerewellen mit intrinsischen Frequenzen  $\hat{\omega} \sim f$  beobachtet wurden (O’Sullivan & Dunkerton, 1995; Plougonven & Snyder, 2007; Wang *et al.*, 2009; Plougonven & Zhang, 2014). Sollte nämlich die Amplitude der verminderten Auftriebsschwingung gegenüber derjenigen der Trägheitsschwingung verhältnismäßig klein sein, was angesichts der höheren Genauigkeit des hydrostatischen Gleichgewichts verglichen, beispielsweise, mit dem geostrophischen Gleichgewicht vermutet werden kann (vergleiche Abschnitt 3.6.2), so dürfte die intrinsische Frequenz der angeregten Schwerewellen,  $\hat{\omega}$ , im Verhältnis näher bei  $f$  als bei  $N$  liegen. Vorausgesetzt, wir würden unterstellen, dass sich  $\hat{\omega}$  als eine Art amplitudengewichtetes Mittel aus  $f$  und  $N$  ergibt.

Das Modell der spontanen Schwerewellenabstrahlung, das wir in Abschnitt 4.4.2 vorgestellt haben, ist durch seine stärkere Gewichtung des Euler’schen (ortsfesten) Blickwinkels für die numerische Untersuchung dieses Vorgangs gewiss besser geeignet. Sollte die Deutung der spontanen Schwerewellenabstrahlung oder eines Teils dieses Prozesses, welche wir in diesem Abschnitt umrissen haben, jedoch zulässig sein, so könnte diese vielleicht einmal als Ausgangspunkt eines einfachen Anschauungsmodells der spontanen Schwerewellenabstrahlung dienen, denn die Anregung von Schwerewellen durch schwingende materielle Volumina in der Flüssigkeit oder Atmosphäre dürfte der Vorstellung zugänglicher sein als die Quellterme in (4.66), denen eine anschauliche Deutung vermutlich mühsamer abzurufen ist. Da wir das hier vorgestellte teilchenfeste Modell indes weder durch theoretische oder numerische Untersuchungen stützen können noch in der Literatur eine Verbindung

zwischen verminderter Trägheits- und Auftriebsschwingung und spontaner Schwerewellenabstrahlung ausfindig machen konnten, haben wir darauf verzichtet, diesen Abschnitt in den Hauptteil der Arbeit aufzunehmen.



# ANHANG D

---

## Nützliche Elemente der Tensorrechnung

---

Dieses Kapitel enthält einen kurzen Überblick der wichtigsten Tensoroperationen, die an verschiedenen Stellen innerhalb dieser Arbeit benötigt werden. Wir betrachten dabei fast ausschließlich Tensoren zweiter Stufe, wie sie beispielsweise für die lineare Abbildung eines Vektors auf einen anderen Vektor im dreidimensionalen physikalischen Raum benötigt werden (Wilson, 1929; Pichler, 1984)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbb{A}^\dagger = \mathbf{b}, \quad (\text{D.1})$$

wobei  $\mathbb{A}^\dagger$  für die Transponierte von  $\mathbb{A}$  steht. Ein Tensor zweiter Stufe lässt sich als Summe aus Dyaden darstellen (Wilson, 1929; Pichler, 1984; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A} = \sum_i \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i, \quad (\text{D.2})$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{a}_i$  und  $\mathbf{b}_i$  zum Beispiel durch die Physik gegeben sein können oder die Einheitsvektoren (multipliziert mit einem entsprechenden Koeffizienten) eines Koordinatensystems sind, das für die Vermessung des Tensors ausgewählt wurde. Die Darstellung (D.2) ist deshalb vorteilhaft, weil für die meisten nachfolgenden Operationen das Distributivgesetz gilt, sodass es genügt, wenn ihre Gültigkeit für Dyaden gezeigt wird. In einigen Fällen werden die Operationen anhand der Darstellung der Tensoren in einem Koordinatensystem demonstriert. Da alle Operationen koordinatenunabhängig<sup>1</sup> sind, verwenden wir dafür, ohne Einschränkung der Allgemeinheit, das kartesische Koordinatensystem mit Einstein'scher Summenkonvention (Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = A_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k, \quad (\text{D.3})$$

---

<sup>1</sup> Der Hinweis auf die Koordinatenunabhängigkeit der Ergebnisse der im Folgenden vorgestellten Tensoroperationen mag notwendig sein, falls die Einführung eines Koordinatensystems zur Vermessung der Ausdehnungsgrößen gewünscht ist. Genau genommen ist jedoch die Definition eines Koordinatensystems hier unerheblich, da weder die Ausdehnungsgrößen selbst, noch die verschiedenen Verknüpfungen derselben untereinander, zur Beschreibung ihrer Physik, Bezug auf ein solches nehmen. (Diese Aussage bezieht sich jedoch nicht auf das Bezugssystem, in dem das Koordinatensystem aufgespannt wird).

wobei  $\mathbf{e}_1 := \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_2 := \mathbf{e}_y$  und  $\mathbf{e}_3 := \mathbf{e}_z$ . Die  $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k$  sind die Einheitsdyaden des kartesischen Koordinatensystems.

Überdies wird sich die Zerlegung eines Tensors in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil als hilfreich erweisen (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_{as}, \quad (\text{D.4})$$

mit dem symmetrischen Anteil

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_s &:= \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^\dagger) \\ \Rightarrow (\mathbb{A}_s)^\dagger &= \frac{1}{2}[\mathbb{A}^\dagger + \underbrace{(\mathbb{A}^\dagger)^\dagger}_{=\mathbb{A}}] = \mathbb{A}_s \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

und dem antisymmetrischen Anteil

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{as} &:= \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^\dagger) \\ \Rightarrow (\mathbb{A}_{as})^\dagger &= \frac{1}{2}(\mathbb{A}^\dagger - \mathbb{A}) = -\mathbb{A}_{as}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Die Transponierte von  $\mathbb{A}$  in der Darstellung (D.2) lautet

$$\mathbb{A}^\dagger = \sum_i (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i)^\dagger = \sum_i \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i \quad (\text{D.7})$$

und für eine einzelne Dyade wird (D.4) zu

$$\mathbf{a} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \mathbf{b} + (\mathbf{a} \mathbf{b})^\dagger}{2} + \frac{\mathbf{a} \mathbf{b} - (\mathbf{a} \mathbf{b})^\dagger}{2} = \frac{\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a}}{2}. \quad (\text{D.8})$$

Bevor die einzelnen Tensoroperationen in den nachfolgenden Abschnitten vorgestellt werden, sei an dieser Stelle noch auf zwei Assoziativgesetze, das dyadische Produkt betreffend, hingewiesen, von denen im Folgenden häufig Gebrauch gemacht wird (Wilson, 1929)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \mathbf{c}), \quad (\text{D.9})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \mathbf{c}), \quad (\text{D.10})$$

für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$ .

## D.1 Der Skalar eines Tensors

Der Skalar eines Tensors wird hier durch einen tiefgestellten Punkt gekennzeichnet (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A}_\bullet = \sum_i (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i)_\bullet := \sum_i \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i, \quad (\text{D.11})$$



und ist eine Invariante des Tensors, das heißt der Wert von (D.11) ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems für die Vermessung von  $\mathbb{A}$ . Anhand von (D.11) erkennt man, dass

$$\mathbb{A}_\bullet = (\mathbb{A}^\dagger)_\bullet. \quad (\text{D.12})$$

Wird  $\mathbb{A}$  in kartesischen Koordinaten dargestellt, so lautet die Rechenvorschrift für den Skalar

$$\mathbb{A}_\bullet = A_{jk}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k)_\bullet = A_{jk} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = A_{jj} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j = A_{jj}. \quad (\text{D.13})$$

Zum Skalar eines Tensors trägt allein dessen symmetrischer Anteil bei

$$(\mathbb{A}_{as})_\bullet = (\mathbb{A}_{as}^\dagger)_\bullet = -(\mathbb{A}_{as})_\bullet = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_\bullet = (\mathbb{A}_s)_\bullet. \quad (\text{D.15})$$

Um den Skalar des Einheitstensors zu bestimmen, nutzen wir (D.98) für die Darstellung von  $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} (\mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \mathbf{b}), \quad (\text{D.16})$$

wobei  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  drei linear unabhängige, ansonsten aber beliebige Vektoren sind. Wir finden damit für den Skalar des Einheitstensors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\bullet &= \frac{1}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \{[(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c}]_\bullet + [(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{a}]_\bullet + [(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \mathbf{b}]_\bullet\} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \left[ \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}_{=\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} + \underbrace{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}}_{=\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} + \underbrace{(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}}_{=\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \right] = 3, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

wobei die Vertauschungsregeln des Spatprodukts (A.52) eingesetzt wurden. Da auch der Nabla-Operator eine vektorielle Größe ist, gilt für den Skalar eines Vektorgradienten

$$(\nabla \mathbf{a})_\bullet = \nabla \cdot \mathbf{a}. \quad (\text{D.18})$$

Die Ableitungswirkung von  $\nabla$  ist für die Bildung des Skalars unerheblich (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012).

Mit dem Skalar des Tensors haben wir ein Werkzeug, mit dem wir eine weitere Zerlegung des symmetrischen Tensors vornehmen können, die manchmal hilfreich ist. Es ist dies die Zerlegung in den richtungsabhängigen (anisotropen) Anteil, Deviator genannt, und den richtungsunabhängigen (isotropen) Anteil, Kugeltensor genannt (Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A}_s = \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s. \quad (\text{D.19})$$

Der Kugeltensor muss von der Gestalt

$$\overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s = \alpha \mathbb{E} \quad (\text{D.20})$$

sein, damit gewährleistet ist, dass seine Wirkung auf einen Vektor unabhängig von dessen Richtung ist

$$\dot{\mathbb{A}}_s \cdot \mathbf{b} = \alpha \mathbb{E} \cdot \mathbf{b} = \alpha \mathbf{b}. \quad (\text{D.21})$$

Geschlossen wird die Definition dieser Zerlegung durch die Forderung nach der Skalarfreiheit (Spurfreiheit) des Deviators

$$(\overset{\circ}{\mathbb{A}}_s)_\bullet \equiv 0 \quad (\text{D.22})$$

$$\Rightarrow (\dot{\mathbb{A}}_s)_\bullet = \mathbb{A}_\bullet = \alpha \mathbb{E}_\bullet = 3\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{\mathbb{A}}_s = \frac{1}{3} \mathbb{A}_\bullet \mathbb{E} \quad (\text{D.23})$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s = \mathbb{A}_s - \frac{1}{3} \mathbb{A}_\bullet \mathbb{E}. \quad (\text{D.24})$$

Wir können somit einen beliebigen Tensor in drei Anteile zerlegen

$$\mathbb{A} = \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \dot{\mathbb{A}}_s + \mathbb{A}_{as}. \quad (\text{D.25})$$

## D.2 Der Vektor eines Tensors

Der Vektor eines Tensors wird hier durch ein tiefgestelltes Kreuz gekennzeichnet (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A}_\times = \sum_i (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i)_\times := \sum_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i. \quad (\text{D.26})$$

$\mathbb{A}_\times$  ist eine vektorielle Invariante des Tensors, da Richtung und Betrag von  $\mathbb{A}_\times$  nicht von der gewählten Koordinatendarstellung des Tensors abhängen. Aus (D.26) lässt sich weiterhin ableiten

$$\mathbb{A}_\times = \sum_i \mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i = - \sum_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{a}_i = - \sum_i (\mathbf{b}_i \mathbf{a}_i)_\times = -(\mathbb{A}^\dagger)_\times. \quad (\text{D.27})$$

Demzufolge trägt nur der antisymmetrische Anteil eines Tensors zu dessen Vektor bei

$$(\mathbb{A}_s)_\times = -(\mathbb{A}_s^\dagger)_\times = -(\mathbb{A}_s)_\times = 0 \quad (\text{D.28})$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}_\times = (\mathbb{A}_{as})_\times. \quad (\text{D.29})$$

Der Einheitstensor besitzt somit keinen Vektor

$$\mathbb{E}_\times = 0. \quad (\text{D.30})$$

In kartesischen Koordinaten ergibt die Berechnung des Vektors von  $\mathbb{A}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_\times &= A_{11}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 \\
 &+ A_{21}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 \\
 &+ A_{31}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 \\
 &= (A_{23} - A_{32})\mathbf{e}_1 + (A_{31} - A_{13})\mathbf{e}_2 + (A_{12} - A_{21})\mathbf{e}_3
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

oder verkürzt (siehe (D.74))

$$\mathbb{A}_\times = A_{ij}\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = A_{ij}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k. \tag{D.32}$$

Der Vektor eines Vektorgradienten ist gleich der Rotation des Vektors

$$(\nabla \mathbf{a})_\times = \nabla \times \mathbf{a} \tag{D.33}$$

(Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012). Ein antisymmetrischer Tensor kann mittels seines Vektors dargestellt werden. Aus dem Graßmann'schen Entwicklungssatz (Graßmann, 1862; Merz & Knabner, 2013)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}
 \end{aligned} \tag{D.34}$$

erhält man durch Äquivalenzumformungen (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) \\
 \Leftrightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbb{E}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \cdot [-(\mathbf{bc} - \mathbf{cb})] \\
 \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \left[ \mathbb{E} \times \underbrace{(\mathbf{b} \times \mathbf{c})}_{=(\mathbf{bc})_\times} \right] &= \mathbf{a} \cdot [-(\mathbf{bc} - \mathbf{cb})] \quad \left| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right. \\
 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \left[ -\mathbb{E} \times \frac{1}{2}(\mathbf{bc})_\times \right] &= \mathbf{a} \cdot \left( \frac{\mathbf{bc} - \mathbf{cb}}{2} \right),
 \end{aligned} \tag{D.35}$$

wobei das Assoziativgesetz (Wilson, 1929)

$$\mathbf{d} \cdot \mathbb{B} \times \mathbf{e} = (\mathbf{d} \cdot \mathbb{B}) \times \mathbf{e} = \mathbf{d} \cdot (\mathbb{B} \times \mathbf{e}), \tag{D.36}$$

für beliebige Vektoren  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{e}$  und einen beliebigen Tensor  $\mathbb{B}$ , verwendet wurde. Entsprechend folgt aus  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$  und  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{cb} - \mathbf{bc}) = (\mathbf{cb} - \mathbf{bc})^\dagger \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{bc} - \mathbf{cb}) \cdot \mathbf{a}$

$$\left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{bc})_\times \times \mathbb{E} \right] \cdot \mathbf{a} = \left( \frac{\mathbf{bc} - \mathbf{cb}}{2} \right) \cdot \mathbf{a} \tag{D.37}$$

und damit schließlich

$$\left( \frac{\mathbf{bc} - \mathbf{cb}}{2} \right) = -\mathbb{E} \times \frac{1}{2}(\mathbf{bc})_\times = -\frac{1}{2}(\mathbf{bc})_\times \times \mathbb{E}. \tag{D.38}$$

Dies bedeutet für den antisymmetrischen Anteil eines Tensors (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A}_{as} = -\mathbb{E} \times \frac{1}{2}\mathbb{A}_\times = -\frac{1}{2}\mathbb{A}_\times \times \mathbb{E} \quad (\text{D.39})$$

und für das Produkt mit einem Vektor  $\mathbf{b}$

$$\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}(\mathbb{A}_\times \times \mathbb{E}) \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbb{A}_\times \times \mathbf{b}, \quad (\text{D.40})$$

wobei (D.36) benutzt wurde.

### D.3 Das Doppelskalarprodukt zweier Tensoren

Neben dem Tensor  $\mathbb{A}$  (siehe (D.2)) verwenden wir hier einen zweiten Tensor

$$\mathbb{B} = \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j. \quad (\text{D.41})$$

In der Literatur findet man zwei Arten von Doppelprodukten zweier Tensoren (Wilson, 1929; Pichler, 1984; Sihvola, 1999; Zdunkowski & Bott, 2003; Lebedev *et al.*, 2010; Altenbach, 2012)

$$\mathbb{A} \otimes \otimes \mathbb{B} = \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \otimes \otimes \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j := \sum_i \sum_j (\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{c}_j) (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{d}_j), \quad (\text{D.42})$$

$$\mathbb{A} \otimes \otimes \mathbb{B} = \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \otimes \otimes \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j := \sum_i \sum_j (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{c}_j) (\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{d}_j), \quad (\text{D.43})$$

mit  $\otimes, \otimes \in \{\cdot, \times\}$ . Je nach Zusammenstellung von Skalar- und Kreuzprodukt, ist das Ergebnis von (D.42) oder (D.43) entweder ein Skalar (für  $\otimes = \cdot$  und  $\otimes = \cdot$ ), ein Vektor (für  $\otimes = \cdot$  und  $\otimes = \times$  oder  $\otimes = \times$  und  $\otimes = \cdot$ ) oder ein Tensor (für  $\otimes = \times$  und  $\otimes = \times$ ). Von diesen Möglichkeiten interessieren wir uns hier für das Doppelskalarprodukt erster Art

$$\mathbb{A} \cdot \cdot \mathbb{B} = \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \cdot \cdot \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j := \sum_i \sum_j (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{c}_j) (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{d}_j). \quad (\text{D.44})$$

Wir nutzen im Folgenden die Distributivität des Doppelskalarproduktes, indem wir der Übersichtlichkeit halber für die Herleitung einiger Rechenregeln die Stellvertreter  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbf{ab}$  und  $\mathbb{B} \rightarrow \mathbf{cd}$  verwenden. Das heißt

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \cdot \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{ab} \cdot \cdot \mathbf{cd} &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{cd}) \\ &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{cd}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{cd} \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{cd} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

Eine hilfreiche Identität lautet

$$\mathbb{A} \cdot \cdot \mathbb{B} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \rightarrow (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd}) \cdot = [\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}] \cdot = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{ad}) \cdot = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}), \quad (\text{D.46})$$

woraus für den Skalar eines Tensors folgt (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\mathbb{A}_\bullet = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{E})_\bullet = \mathbb{A} \cdot \mathbb{E} = \mathbb{E} \cdot \mathbb{A}. \quad (\text{D.47})$$

Weiterhin gilt Kommutativität für das Doppelskalarprodukt (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{cd} \cdot \mathbf{ab} \rightarrow \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}. \quad (\text{D.48})$$

Verwenden wir für die Transponierung des einfachen Produktes zweier Tensoren (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\begin{aligned} (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^\dagger &\rightarrow (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd})^\dagger = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{ad})^\dagger = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{da} = \mathbf{d}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} \\ &= \mathbf{dc} \cdot \mathbf{ba} = (\mathbf{cd})^\dagger \cdot (\mathbf{ab})^\dagger \rightarrow \mathbb{B}^\dagger \cdot \mathbb{A}^\dagger, \end{aligned} \quad (\text{D.49})$$

so folgt aus (D.12), (D.46) und (D.48)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})_\bullet = [(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^\dagger]_\bullet = (\mathbb{B}^\dagger \cdot \mathbb{A}^\dagger)_\bullet = \mathbb{B}^\dagger \cdot \mathbb{A}^\dagger \quad (\text{D.50})$$

$$= \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger \cdot \mathbb{B}^\dagger. \quad (\text{D.51})$$

Betrachten wir als nächstes die Zerlegung beider Tensoren in ihre jeweiligen symmetrischen und antisymmetrischen Anteile

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (\mathbb{A}_s + \mathbb{A}_{as}) \cdot (\mathbb{B}_s + \mathbb{B}_{as}) = \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{B}_s + \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{B}_{as} + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{B}_s + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{B}_{as}, \quad (\text{D.52})$$

so verschwinden die beiden gemischten Produkte. Als Beispiel

$$\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{B}_{as} = \mathbb{A}_s^\dagger \cdot \mathbb{B}_{as}^\dagger = \mathbb{A}_s \cdot (-\mathbb{B}_{as}) = -\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{B}_{as} = 0. \quad (\text{D.53})$$

Das Produkt der antisymmetrischen Tensoren lässt sich mittels (D.39) weiter umformen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{B}_{as} &= \left(-\frac{1}{2}\mathbb{A}_\times \times \mathbb{E}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\mathbb{B}_\times \times \mathbb{E}\right) = \frac{1}{4}[(\mathbb{A}_\times \times \mathbb{E}) \cdot (\mathbb{B}_\times \times \mathbb{E})]_\bullet \\ &= \frac{1}{4}[\mathbb{A}_\times \times (\mathbb{B}_\times \times \mathbb{E})]_\bullet, \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

wobei das Assoziativgesetz (Wilson, 1929)

$$\mathbf{e} \times \mathbb{C} \cdot \mathbb{D} = (\mathbf{e} \times \mathbb{C}) \cdot \mathbb{D} = \mathbf{e} \times (\mathbb{C} \cdot \mathbb{D}), \quad (\text{D.55})$$

für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{e}$  und beliebige Tensoren  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$ , verwendet wurde. Zwecks besserer Übersichtlichkeit setzen wir nun  $\mathbb{A}_\times \rightarrow \mathbf{a}$ ,  $\mathbb{B}_\times \rightarrow \mathbf{b}$  und  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbf{cd}$ . Aus dem Graßmann'schen Entwicklungssatz (D.34)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \quad (\text{D.56})$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{cd}) &= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{d} = [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]\mathbf{d} \\ &= [\mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}]\mathbf{d} = \mathbf{ba} \cdot \mathbf{cd} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{cd} \end{aligned} \quad (\text{D.57})$$

und daraus wiederum

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{B}_{as} &= \frac{1}{4} [\mathbb{B}_\times \mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{E} - (\mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{B}_\times) \mathbb{E}]_\bullet = \frac{1}{4} [\mathbb{B}_\times \mathbb{A}_\times - (\mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{B}_\times) \mathbb{E}]_\bullet \\ &= \frac{1}{4} [\mathbb{B}_\times \cdot \mathbb{A}_\times - (\mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{B}_\times) \underbrace{\mathbb{E}_\bullet}_{=3}] = -\frac{1}{2} \mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{B}_\times.\end{aligned}\quad (\text{D.58})$$

Das Doppelskalarprodukt zweier antisymmetrischer Tensoren ist somit proportional zum Skalarprodukt ihrer Vektoren. Damit können wir für das Doppelskalarprodukt schreiben (Wilson, 1929; Zdunkowski & Bott, 2003)

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{B}_s + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{B}_{as} = \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{B}_s - \frac{1}{2} \mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{B}_\times.\quad (\text{D.59})$$

Einen Sonderfall stellt das Doppelskalarprodukt eines Tensors mit seiner Transponierten dar

$$\mathbb{A}^\dagger \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}_s^\dagger \cdot \mathbb{A}_s - \frac{1}{2} (\mathbb{A}^\dagger)_\times \cdot \mathbb{A}_\times = \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s + \frac{1}{2} \mathbb{A}_\times \cdot \mathbb{A}_\times\quad (\text{D.60})$$

wobei (D.27) verwendet wurde. In Bezug auf die Eigenwertgleichung

$$\mathbb{A}_s \cdot \mathbf{q} = l \mathbf{q}\quad (\text{D.61})$$

besitzt ein symmetrischer Tensor maximal drei reelle Eigenwerte mit den zugehörigen aufeinander senkrechten Eigenvektoren, die üblicherweise mit ihrem Betrage normiert werden. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass wir drei verschiedene Eigenwerte finden. Der Tensor kann nun mithilfe seiner Eigenwerte und Eigenvektoren in der sogenannten Hauptachsentransformation (oder auch Spektralzerlegung) dargestellt werden

$$\mathbb{A}_s = l_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1 + l_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2 + l_3 \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_3.\quad (\text{D.62})$$

Diese Darstellung erfüllt die Symmetrie des Tensors und auch die Eigenwertgleichung selbst, zum Beispiel

$$\mathbb{A}_s \cdot \mathbf{q}_1 = l_1 \mathbf{q}_1 \underbrace{(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_1)}_{=1} + l_2 \mathbf{q}_2 \underbrace{(\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{q}_1)}_{=0} + l_3 \mathbf{q}_3 \underbrace{(\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{q}_1)}_{=0} = l_1 \mathbf{q}_1\quad (\text{D.63})$$

(Wilson, 1929; Bronstein *et al.*, 2001; Altenbach, 2012). Daraus folgt für das Doppelskalarprodukt eines symmetrischen Tensors mit sich selbst

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s &= \sum_i \sum_j l_i l_j \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j \mathbf{q}_j = \sum_i \sum_j l_i l_j (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j) (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j) \\ &= \sum_i l_i l_i (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i) (\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_i) \geq 0.\end{aligned}\quad (\text{D.64})$$

Dieses Ergebnis bedeutet schließlich für (D.60)

$$\mathbb{A}^\dagger \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^\dagger \geq 0.\quad (\text{D.65})$$

In Bezug auf dieses Produkt kann die Zerlegung (D.25) ebenfalls hilfreich sein

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^\dagger \cdot \mathbb{A} &= \left( \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s + \mathbb{A}_{as} \right)^\dagger \cdot \left( \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s + \mathbb{A}_{as} \right) \\ &= \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s + \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s + \mathbb{A}_{as}^\dagger \cdot \mathbb{A}_{as}, \end{aligned} \quad (\text{D.66})$$

wobei (D.53) bereits berücksichtigt wurde. Für die gemischten Produkte zwischen Deviator  $\overset{\circ}{\mathbb{A}}_s$  und Kugeltensor  $\overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s$  gilt

$$\overset{\circ}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s = \frac{1}{3} \mathbb{A}_\bullet \cdot \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{3} \mathbb{A}_\bullet \cdot (\overset{\circ}{\mathbb{A}}_s)_\bullet = 0, \quad (\text{D.67})$$

wobei die Symmetrie des Deviators und (D.22) benutzt wurden. Selbiges gilt für das andere gemischte Produkt. Für das Doppelskalarprodukt des Kugeltensors mit sich selbst erhält man

$$\overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s = \frac{1}{9} (\mathbb{A}_\bullet)^2 \mathbb{E}^\dagger \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{9} (\mathbb{A}_\bullet)^2 \mathbb{E}_\bullet = \frac{1}{3} (\mathbb{A}_\bullet)^2. \quad (\text{D.68})$$

Dabei wurde die Symmetrie von  $\mathbb{E}$  sowie (D.17) verwendet. Wir finden schließlich

$$\mathbb{A}^\dagger \cdot \mathbb{A} = \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\circ}{\mathbb{A}}_s + \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s^\dagger \cdot \overset{\bullet}{\mathbb{A}}_s + \mathbb{A}_{as}^\dagger \cdot \mathbb{A}_{as}. \quad (\text{D.69})$$

Deviator, Kugeltensor und antisymmetrischer Tensor stehen bezüglich des Doppelskalarproduktes senkrecht aufeinander.

Abschließend möchten wir das Doppelskalarprodukt für eine Umformulierung des Kreuzproduktes verwenden, die für die Darstellung desselben in kartesischer Indexnotation gebraucht wird

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \mathbf{a} \times (\mathbb{E} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbb{E}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbb{E})^\dagger = -\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbb{E}) \\ &= -\mathbf{b} \cdot [(\mathbf{a} \cdot \mathbb{E}) \times \mathbb{E}] = -\mathbf{b} \cdot [\mathbf{a} \cdot (\mathbb{E} \times \mathbb{E})] = -\mathbf{b} \mathbf{a} \cdot (\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \\ &= (\mathbf{a} \mathbf{b})^\dagger \cdot (-\mathbb{E} \times \mathbb{E}), \end{aligned} \quad (\text{D.70})$$

wobei vom Assoziativgesetz (Wilson, 1929)

$$\mathbf{e} \cdot \mathbb{C} \times \mathbb{D} = (\mathbf{e} \cdot \mathbb{C}) \times \mathbb{D} = \mathbf{e} \cdot (\mathbb{C} \times \mathbb{D}), \quad (\text{D.71})$$

für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{e}$  und beliebige Tensoren  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{D}$ , Gebrauch gemacht wurde. Mittels (D.70) lässt sich das Kreuzprodukt in den sogenannten total antisymmetrischen Epsilontensor dritter Stufe verschieben (Lebedev *et al.*, 2010)

$$\mathbb{E} := -\mathbb{E} \times \mathbb{E}. \quad (\text{D.72})$$

In kartesischen Koordinaten haben wir

$$\mathbb{E} = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k, \quad (\text{D.73})$$

wobei die Einheitstriaden  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k$  die kartesische Basis der Tensoren dritter Stufe bilden (vergleiche Altenbach, 2012). Aus (D.73) folgt die übliche Darstellung des Kreuzproduktes in kartesischen Koordinaten (zum Beispiel Pichler, 1984; Altenbach, 2012)<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\mathbf{ab})^\dagger \cdot \mathbb{E} = a_i b_j (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)^\dagger \cdot \varepsilon_{klm} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m \\ &= a_i b_j \varepsilon_{klm} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \mathbf{e}_m = a_i b_j \varepsilon_{klm} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_l) \mathbf{e}_m \\ &= a_i b_j \varepsilon_{ijm} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_m = a_i b_j \varepsilon_{ijm} \mathbf{e}_m.\end{aligned}\tag{D.74}$$

## D.4 Das Skalar-Kreuzprodukt zweier Tensoren

In diesem Abschnitt betrachten wir einige Eigenschaften des Skalar-Kreuzproduktes erster Art (siehe (D.42) und Altenbach (2012))

$$\mathbb{A} \cdot \times \mathbb{B} = \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \cdot \times \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j := \sum_i \sum_j (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{c}_j) (\mathbf{a}_i \times \mathbf{d}_j).\tag{D.75}$$

Benutzen wir erneut aus Bequemlichkeitsgründen die Stellvertreter  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbf{ab}$  und  $\mathbb{B} \rightarrow \mathbf{cd}$ , so können wir zunächst folgende Identitäten für (D.75) finden

$$\mathbb{A} \cdot \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{ab} \cdot \times \mathbf{cd} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{ca} \times \mathbf{d}\tag{D.76}$$

$$= \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{cd})\tag{D.77}$$

$$= (\mathbf{ab} \cdot \mathbf{cd})_\times \rightarrow (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})_\times\tag{D.78}$$

$$= -\mathbf{c} \cdot \mathbf{bd} \times \mathbf{a}\tag{D.79}$$

$$= -(\mathbf{dc} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{a}\tag{D.80}$$

$$= -\mathbf{dc} \cdot \times \mathbf{ba} \rightarrow -\mathbb{B}^\dagger \cdot \times \mathbb{A}^\dagger.\tag{D.81}$$

Mit diesen Hilfsmitteln möchten wir nun das Skalar-Kreuzprodukt eines Tensors mit sich selbst untersuchen

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \cdot \times \mathbb{A} &= (\mathbb{A} \cdot \mathbb{A})_\times = [(\mathbb{A}_s + \mathbb{A}_{as}) \cdot (\mathbb{A}_s + \mathbb{A}_{as})]_\times \\ &= (\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{as} + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s + \mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_{as})_\times \\ &= (\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{as})_\times + (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s)_\times = -\underbrace{(\mathbb{A}_{as}^\dagger \cdot \mathbb{A}_s^\dagger)}_{=-\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s} \times + (\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s)_\times \\ &= 2(\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_s)_\times,\end{aligned}\tag{D.82}$$

<sup>2</sup> Das Kreuzprodukt erscheint in seiner Definition eng an den dreidimensionalen Raum geknüpft, da eine Verallgemeinerung auf beliebige Dimensionen zumindest nicht ohne Weiteres ersichtlich ist. Als Alternative zur hier verwendeten Vektor- und Tensorrechnung sei daher auf die Graßmann'sche Ausdehnungslehre (1844; 1862) hingewiesen. In ihr tritt die Beziehung zwischen Skalar- und Kreuzprodukt deutlich hervor und beide sind dort für Hauptgebiete beliebiger Stufe (Dimension) definiert (der Raum erscheint in der Ausdehnungslehre als Hauptgebiet vierter Stufe).



wobei wir davon Gebrauch gemacht haben, dass  $\mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_s$  und  $\mathbb{A}_{as} \cdot \mathbb{A}_{as}$  symmetrische Tensoren sind, die keinen Vektor besitzen (siehe (B.21), (B.22) und (D.28)). Darüber hinaus haben wir (D.78) und (D.81) verwendet. Für das Skalar-Kreuzprodukt eines antisymmetrischen Tensors  $\mathbb{B}_{as}$  mit einem beliebigen Tensor  $\mathbb{C}$  gilt

$$\mathbb{B}_{as} \cdot \times \mathbb{C} = (\mathbb{B}_{as} \cdot \mathbb{C})_{\times} = \left\{ \left[ -\frac{1}{2} (\mathbb{B}_{as})_{\times} \times \mathbb{E} \right] \cdot \mathbb{C} \right\}_{\times} = -\frac{1}{2} [(\mathbb{B}_{as})_{\times} \times \mathbb{C}]_{\times}, \quad (\text{D.83})$$

siehe (D.39) und (D.40). Benutzen wir die Stellvertreter  $(\mathbb{B}_{as})_{\times} \rightarrow \mathbf{a}$  und  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbf{bc}$ , so können wir weiterhin ableiten

$$\begin{aligned} [(\mathbb{B}_{as})_{\times} \times \mathbb{C}]_{\times} &\rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{bc})_{\times} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{ab} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{ba} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb} - \mathbf{ac} \cdot \mathbf{b} \\ &\rightarrow (\mathbb{B}_{as})_{\times} \cdot \mathbb{C}^{\dagger} - (\mathbb{B}_{as})_{\times} (\mathbb{C}^{\dagger})_{\bullet} \\ &= \mathbb{C} \cdot (\mathbb{B}_{as})_{\times} - \mathbb{C}_{\bullet} (\mathbb{B}_{as})_{\times}, \end{aligned} \quad (\text{D.84})$$

wobei wir (D.34) und (D.12) verwendet haben. Somit erhalten wir für (D.83)

$$\mathbb{B}_{as} \cdot \times \mathbb{C} = \frac{1}{2} [\mathbb{C}_{\bullet} (\mathbb{B}_{as})_{\times} - \mathbb{C} \cdot (\mathbb{B}_{as})_{\times}] \quad (\text{D.85})$$

und auf gleichem Wege

$$\mathbb{C} \cdot \times \mathbb{B}_{as} = \frac{1}{2} [\mathbb{C}_{\bullet} (\mathbb{B}_{as})_{\times} - \mathbb{C}^{\dagger} \cdot (\mathbb{B}_{as})_{\times}]. \quad (\text{D.86})$$

Dies bedeutet schließlich für (D.82)

$$\mathbb{A} \cdot \times \mathbb{A} = \mathbb{A}_{\bullet} \mathbb{A}_{\times} - \mathbb{A}_s \cdot \mathbb{A}_{\times}. \quad (\text{D.87})$$

## D.5 Die Inverse eines Tensors

Die Betrachtungen in diesem Abschnitt sind sämtlich den entsprechenden Ausführungen in Wilson (1929) entnommen oder daran angelehnt.

Wir betrachten im Folgenden einen sogenannten vollständigen Tensor, das heißt einen Tensor, der sich als Summe von nicht weniger als drei Dyaden (im dreidimensionalen physikalischen Raum) darstellen lässt

$$\mathbb{A} = \mathbf{al} + \mathbf{bm} + \mathbf{cn}, \quad (\text{D.88})$$

wobei die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  linear unabhängig voneinander sind. Gleiches gilt für  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{n}$ . Ein solcher Tensor besitzt die Eigenschaft, dass die Produkte  $\mathbb{A} \cdot \mathbf{d}$  und  $\mathbf{d} \cdot \mathbb{A}$  nur dann verschwinden, falls  $\mathbf{d} = 0$ . Man kann dies folgendermaßen zeigen: Da  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{n}$  voraussetzungsgemäß linear unabhängig voneinander sind, besitzen auch die Vektoren

$\mathbf{l} \times \mathbf{m}$ ,  $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$  und  $\mathbf{n} \times \mathbf{l}$  diese Eigenschaft und können als Basis verwendet werden. Stellt man einen allgemeinen Vektor  $\mathbf{d}$  in dieser Basis dar

$$\mathbf{d} = \alpha(\mathbf{l} \times \mathbf{m}) + \beta(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + \gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{l}), \quad (\text{D.89})$$

so erhält man aus der Forderung nach dem Verschwinden des Produktes  $\mathbb{A} \cdot \mathbf{d}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \cdot \mathbf{d} &= (\mathbf{a}\mathbf{l} + \mathbf{b}\mathbf{m} + \mathbf{c}\mathbf{n}) \cdot [\alpha(\mathbf{l} \times \mathbf{m}) + \beta(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + \gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{l})] \\ &= \alpha \underbrace{\mathbf{a}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}_{=0} + \beta \mathbf{a}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + \gamma \underbrace{\mathbf{a}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}_{=0} \\ &\quad + \alpha \underbrace{\mathbf{b}\mathbf{m} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}_{=0} + \beta \underbrace{\mathbf{b}\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})}_{=0} + \gamma \underbrace{\mathbf{b}\mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}_{=\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} \\ &\quad + \alpha \underbrace{\mathbf{c}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}_{=\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} + \beta \underbrace{\mathbf{c}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})}_{=0} + \gamma \underbrace{\mathbf{c}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}_{=0} \\ &= \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})(\beta\mathbf{a} + \gamma\mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.90})$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{n}$  besitzt der von ihnen aufgespannte Spat ein nichtverschwindendes Volumen, das heißt  $\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \neq 0$ . Wären nun  $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ , so würde aus (D.90) folgen, dass  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  linear abhängig voneinander sind, was im Widerspruch zu den Voraussetzungen steht. Allein  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , sprich  $\mathbf{d} = 0$  ist mit diesen vereinbar. Wählt man als Basis für  $\mathbf{d}$  die Vektoren  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$  und  $\mathbf{c} \times \mathbf{a}$  und betrachtet das Produkt  $\mathbf{d} \cdot \mathbb{A} = 0$ , so lässt sich selbiges in Bezug auf  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{n}$  ableiten. Betrachten wir die Darstellung von  $\mathbb{A}$  in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= A_{11}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 \\ &\quad + A_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ &\quad + A_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_1(A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + \mathbf{e}_2(A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_3) \\ &\quad + \mathbf{e}_3(A_{31}\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (\text{D.91})$$

so liegt Vollständigkeit vor, falls die Vektoren  $\mathbf{l} = A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{m} = A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_3$  und  $\mathbf{n} = A_{31}\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3$  linear unabhängig voneinander sind.<sup>3</sup>

Zur Bestimmung der Inversen  $\mathbb{A}^{-1}$  des Tensors  $\mathbb{A}$  – definiert als derjenige Tensor, der die Eigenschaft

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{E} \quad (\text{D.92})$$

<sup>3</sup> Ordnet man die Koeffizienten  $A_{ij}$  aus der Vermessung von  $\mathbb{A}$  in kartesischen Koordinaten in einer Matrix  $\mathbf{A}$  an, so ist diese Matrix im Falle der Vollständigkeit von  $\mathbb{A}$  regulär (siehe Bronstein *et al.*, 2001).

besitzt – benötigt man das kommutative Doppelkreuzprodukt zweiter Art nach (D.43)

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \times \mathbb{B} &= \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j := \sum_i \sum_j (\mathbf{a}_i \times \mathbf{c}_j) (\mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_j) \\ &= \sum_i \sum_j (-\mathbf{c}_j \times \mathbf{a}_i) (-\mathbf{d}_j \times \mathbf{b}_i) = \sum_i \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j \times \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = \mathbb{B} \times \mathbb{A},\end{aligned}\quad (\text{D.93})$$

denn der erste Schritt zur Bestimmung von  $\mathbb{A}^{-1}$  besteht aus der Berechnung von

$$\begin{aligned}\mathbb{A} \times \mathbb{A} &= (\mathbf{a} \mathbf{l} + \mathbf{b} \mathbf{m} + \mathbf{c} \mathbf{n}) \times (\mathbf{a} \mathbf{l} + \mathbf{b} \mathbf{m} + \mathbf{c} \mathbf{n}) \\ &= \underbrace{\mathbf{a} \times \mathbf{a} \mathbf{l} \times \mathbf{l}}_{=0} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{l} \times \mathbf{m} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \mathbf{l} \times \mathbf{n} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{a} \mathbf{m} \times \mathbf{l}}_{=-\mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{l} \times \mathbf{m}} + \underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{b} \mathbf{m} \times \mathbf{m}}_{=0} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mathbf{m} \times \mathbf{n} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{c} \times \mathbf{a} \mathbf{n} \times \mathbf{l}}_{=-\mathbf{a} \times \mathbf{c} \mathbf{l} \times \mathbf{n}} + \underbrace{\mathbf{c} \times \mathbf{b} \mathbf{n} \times \mathbf{m}}_{=-\mathbf{b} \times \mathbf{c} \mathbf{m} \times \mathbf{n}} + \underbrace{\mathbf{c} \times \mathbf{c} \mathbf{n} \times \mathbf{n}}_{=0} \\ &= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \mathbf{l} \times \mathbf{m} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \mathbf{l} \times \mathbf{n} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \mathbf{m} \times \mathbf{n}).\end{aligned}\quad (\text{D.94})$$

Daraus kann der Tensor

$$\mathbb{A}^a := \frac{1}{2}(\mathbb{A} \times \mathbb{A})^\dagger = \mathbf{l} \times \mathbf{m} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{l} \times \mathbf{n} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (\text{D.95})$$

gebildet werden, den man als Adjunkte von  $\mathbb{A}$  bezeichnet.

Als nächstes betrachten wir das Produkt

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^a \cdot \mathbb{A} &= (\mathbf{l} \times \mathbf{m} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{l} \times \mathbf{n} \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} \mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \mathbf{l} + \mathbf{b} \mathbf{m} + \mathbf{c} \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{l} \times \mathbf{m} \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} \mathbf{l}}_{=0} + \mathbf{l} \times \mathbf{m} \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \mathbf{m}}_{=0} + \mathbf{l} \times \mathbf{m} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \mathbf{n} \\ &\quad + \mathbf{l} \times \mathbf{n} \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \mathbf{l}}_{=0} + \mathbf{l} \times \mathbf{n} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \mathbf{m} + \mathbf{l} \times \mathbf{n} \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} \mathbf{n}}_{=0} \\ &\quad + \mathbf{m} \times \mathbf{n} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} \mathbf{l} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} \underbrace{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} \mathbf{m}}_{=0} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} \underbrace{(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} \mathbf{n}}_{=0} \\ &= \underbrace{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{l}}_{=-\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \times \mathbf{m} \mathbf{n} + \underbrace{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \mathbf{l}}_{=-\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})} \times \underbrace{\mathbf{n} \mathbf{m}}_{=-\mathbf{n} \times \mathbf{l} \mathbf{m}} + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{m} \times \mathbf{n} \mathbf{l} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=-\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \\ &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) [\mathbf{l} \times \mathbf{m} \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l} \mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{n} \mathbf{l}].\end{aligned}\quad (\text{D.96})$$

Um über das Wesen des Tensors in eckigen Klammern Genaueres zu erfahren, multipli-

zieren wir diesen von rechts mit dem allgemeinen Vektor (D.89)

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{l} \times \mathbf{m}\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{n}\mathbf{l}) \cdot [\alpha(\mathbf{l} \times \mathbf{m}) + \beta(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + \gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{l})] \\
&= \alpha \underbrace{\mathbf{l} \times \mathbf{m}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}_{=\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} + \beta \underbrace{\mathbf{l} \times \mathbf{m}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})}_{=0} + \gamma \underbrace{\mathbf{l} \times \mathbf{m}\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}_{=0} \\
&+ \alpha \underbrace{\mathbf{n} \times \mathbf{l}\mathbf{m} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}_{=0} + \beta \underbrace{\mathbf{n} \times \mathbf{l}\mathbf{m} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})}_{=0} + \gamma \underbrace{\mathbf{n} \times \mathbf{l}\mathbf{m} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}_{=\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} \\
&+ \alpha \underbrace{\mathbf{m} \times \mathbf{n}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{m})}_{=0} + \beta \mathbf{m} \times \mathbf{n}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + \gamma \underbrace{\mathbf{m} \times \mathbf{n}\mathbf{l} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{l})}_{=0} \\
&= \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) [\alpha(\mathbf{l} \times \mathbf{m}) + \beta(\mathbf{m} \times \mathbf{n}) + \gamma(\mathbf{n} \times \mathbf{l})] = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \mathbf{d}. \tag{D.97}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist proportional zu  $\mathbf{d}$  selbst, woraus wir schlussfolgern können, dass

$$\mathbf{l} \times \mathbf{m}\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{n}\mathbf{l} = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \mathbb{E}. \tag{D.98}$$

(D.96) und (D.98) ergeben zusammen

$$\mathbb{A}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbb{A} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \mathbb{E}. \tag{D.99}$$

Durch die Bestimmung des Skalars von (D.99), erhalten wir die letzte Hilfsgröße zur Berechnung der Inversen von  $\mathbb{A}$

$$(\mathbb{A}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbb{A})_{\bullet} = \mathbb{A}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbb{A} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \mathbb{E}_{\bullet} = 3\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}), \tag{D.100}$$

wobei (D.46) und (D.17) verwendet wurden. Die Größe

$$\det(\mathbb{A}) := \frac{1}{3} \mathbb{A}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbb{A} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \tag{D.101}$$

ist die Determinante von  $\mathbb{A}$ . Damit sind wir schließlich in die Lage versetzt, aus (D.99) einen Ausdruck für  $\mathbb{A}^{-1}$  abzuleiten

$$\begin{aligned}
& \mathbb{A}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbb{A} = \det(\mathbb{A}) \mathbb{E} \quad \Big| \cdot \mathbb{A}^{-1} \\
\Rightarrow & \underbrace{\mathbb{A}^{\mathbf{a}} \cdot \underbrace{\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1}}_{=\mathbb{E}}}_{=\mathbb{A}^{\mathbf{a}}} = \det(\mathbb{A}) \underbrace{\mathbb{E} \cdot \mathbb{A}^{-1}}_{=\mathbb{A}^{-1}} \\
\Rightarrow & \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \mathbb{A}^{\mathbf{a}}. \tag{D.102}
\end{aligned}$$

Ein vollständiger Tensor besitzt stets eine Inverse, da für einen solchen  $\det(\mathbb{A}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \neq 0$  gilt.

### D.5.1 Die Inverse eines Tensors der Gestalt $\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}$

Um  $(\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}})^{-1}$  zu bestimmen, berechnen wir zunächst gemäß (D.94)

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) \times (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) &= \alpha^2\mathbb{E} \times \mathbb{E} + \underbrace{\alpha\beta\mathbb{E} \times \hat{\mathbf{f}}}_{=\hat{\mathbf{f}} \times \mathbb{E}} + \alpha\beta\hat{\mathbf{f}} \times \mathbb{E} + \beta^2\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}} \\ &= \alpha^2\mathbb{E} \times \mathbb{E} + 2\alpha\beta\hat{\mathbf{f}} \times \mathbb{E} + \beta^2\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (\text{D.103})$$

wobei wir (D.93) verwendet haben. Den ersten Term auf der rechten Seite können wir mittels (D.102) auswerten

$$\frac{1}{2}(\mathbb{E} \times \mathbb{E})^\dagger \cdot \mathbb{E} = \det(\mathbb{E})\mathbb{E}. \quad (\text{D.104})$$

Da  $\mathbb{E}$  symmetrisch ist, gilt für die linke Seite

$$\frac{1}{2}(\mathbb{E} \times \mathbb{E})^\dagger \cdot \mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbb{E} \times \mathbb{E})^\dagger = \frac{1}{2}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}). \quad (\text{D.105})$$

Zufolge von (D.98) lässt sich der Einheitstensor durch

$$\mathbb{E} = \frac{1}{\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} (\mathbf{l} \times \mathbf{m}\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \mathbf{l}\mathbf{m} + \mathbf{m} \times \mathbf{n}\mathbf{l}) \quad (\text{D.106})$$

ausdrücken. Daher lautet die Determinante von  $\mathbb{E}$  gemäß (D.101)

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{E}) &= \frac{1}{[\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})]^3} \{ (\mathbf{l} \times \mathbf{m}) \cdot [(\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \times (\mathbf{m} \times \mathbf{n})] \underbrace{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{l})}_{=-\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} \} \\ &= -\frac{1}{[\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})]^2} \{ (\mathbf{l} \times \mathbf{m}) \cdot [\underbrace{\mathbf{m}(\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{n}}_{=0} - \underbrace{\mathbf{n}(\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{m}}_{=-\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})}] \} \\ &= \frac{1}{[\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})]^2} \underbrace{[(\mathbf{l} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})]}_{=-\mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n})} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (\text{D.107})$$

wobei vom Graßmann'schen Entwicklungssatz (D.34) Gebrauch gemacht wurde. Aus (D.104), (D.105) und (D.107) folgt schließlich

$$\mathbb{E} \times \mathbb{E} = 2\mathbb{E}. \quad (\text{D.108})$$

Zur Auswertung des zweiten Terms auf der rechten Seite von (D.103) betrachten wir das Doppelkreuzprodukt eines beliebigen Tensors  $\mathbb{A} = \sum_i \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i$  mit dem Einheitstensor

$$\mathbb{E} = \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \times \mathbb{E} &= \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \times \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j = \sum_i \sum_j (\mathbf{a}_i \times \mathbf{c}_j) (\mathbf{b}_i \times \mathbf{d}_j) \\ &= - \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \times \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j \times \mathbf{b}_i = - \sum_i \mathbf{a}_i \times \left( \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j \right) \times \mathbf{b}_i \\ &= - \sum_i \mathbf{a}_i \times \mathbb{E} \times \mathbf{b}_i = - \sum_i \mathbf{a}_i \times (\mathbb{E} \cdot \mathbb{E}) \times \mathbf{b}_i = - \sum_i (\mathbf{a}_i \times \mathbb{E}) \cdot (\mathbb{E} \times \mathbf{b}_i) \\ &= - \sum_i (\mathbf{a}_i \times \mathbb{E}) \cdot (\mathbf{b}_i \times \mathbb{E}) = - \sum_i \mathbf{a}_i \times (\mathbf{b}_i \times \mathbb{E}) = - \sum_i \mathbf{b}_i \mathbf{a}_i + \sum_i (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i) \mathbb{E} \\ &= \mathbb{A}_\bullet \mathbb{E} - \mathbb{A}^\dagger, \end{aligned} \tag{D.109}$$

wobei wir (D.39) und (D.54) bis (D.58) verwendet haben. Damit erhalten wir

$$\hat{\mathbf{f}} \times \mathbb{E} = \underbrace{\hat{\mathbf{f}}_\bullet}_{=0} \mathbb{E} - \underbrace{\hat{\mathbf{f}}^\dagger}_{=-\hat{\mathbf{f}}} = \hat{\mathbf{f}}, \tag{D.110}$$

denn  $\hat{\mathbf{f}}$  besitzt als antisymmetrischer Tensor keinen Skalar (siehe (D.14)). Für die Berechnung des dritten Beitrags auf der rechten Seite von (D.103) benutzen wir schließlich

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}} &= (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) \times (\mathbf{e}_z \times \mathbb{E}) = \left( \mathbf{e}_z \times \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{d}_i \right) \times \left( \mathbf{e}_z \times \sum_j \mathbf{c}_j \mathbf{d}_j \right) \\ &= \sum_i \sum_j [(\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_i) \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_j) \mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j] \\ &= \sum_i \sum_j \left[ \mathbf{e}_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{c}_j}_{=\mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{c}_i \times \mathbf{c}_j)} \mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j - \mathbf{c}_j \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{c}_i) \cdot \mathbf{e}_z}_{=0} \mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j \right] \\ &= \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \sum_i \sum_j (\mathbf{c}_i \times \mathbf{c}_j) (\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j) = \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbb{E} \times \mathbb{E} = \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \cdot 2\mathbb{E} \\ &= 2\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{D.111}$$

Dabei wurden der Graßmann'sche Entwicklungssatz (A.57) und (D.108) verwandt. Mit (D.108), (D.110) und (D.111) erhalten wir für die Adjunkte von  $\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}$  laut (D.95)

$$(\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}})^\mathbf{a} = \frac{1}{2} \left( 2\alpha^2\mathbb{E} + 2\alpha\beta\hat{\mathbf{f}} + 2\beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \right)^\dagger = \alpha^2\mathbb{E} - \alpha\beta\hat{\mathbf{f}} + \beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z. \tag{D.112}$$

Dies liefert gemäß (D.101) für die Determinante

$$\begin{aligned}
 \det(\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) &= \frac{1}{3}(\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) \cdot (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) \\
 &= \frac{1}{3}(\alpha^2\mathbb{E} - \alpha\beta\hat{\mathbf{f}} + \beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) \\
 &= \frac{1}{3}(\alpha^3\mathbb{E} + \beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot \alpha\mathbb{E} - \frac{1}{3}\alpha\beta^2\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{f}} \\
 &= \frac{1}{3}(\alpha^3\mathbb{E} + \alpha\beta^2\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z) + \frac{1}{3}\alpha\beta^2\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z \\
 &= \alpha^3 + \alpha\beta^2,
 \end{aligned} \tag{D.113}$$

wobei (B.14), (D.17), (D.47) und (D.59) verwendet wurden. Damit sind wir am Ziel und finden für die Inverse gemäß (D.102)

$$(\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}})^{-1} = \frac{1}{\alpha^3 + \alpha\beta^2} (\alpha^2\mathbb{E} - \alpha\beta\hat{\mathbf{f}} + \beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z). \tag{D.114}$$

Die Probe ergibt

$$\begin{aligned}
 (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}})^{-1} \cdot (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) &= \frac{1}{\alpha^3 + \alpha\beta^2} (\alpha^2\mathbb{E} - \alpha\beta\hat{\mathbf{f}} + \beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \cdot (\alpha\mathbb{E} + \beta\hat{\mathbf{f}}) \\
 &= \frac{1}{\alpha^3 + \alpha\beta^2} (\alpha^3\mathbb{E} + \alpha^2\beta\hat{\mathbf{f}} - \alpha^2\beta\hat{\mathbf{f}} - \alpha\beta^2\hat{\mathbf{f}}^2 + \alpha\beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) \\
 &= \frac{1}{\alpha^3 + \alpha\beta^2} (\alpha^3\mathbb{E} + \alpha\beta^2\mathbb{E} - \alpha\beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z + \alpha\beta^2\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z) = \mathbb{E},
 \end{aligned} \tag{D.115}$$

wobei von  $\mathbf{e}_z\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{e}_z(\mathbf{e}_z \cdot \hat{\mathbf{f}}) = 0$  und  $\hat{\mathbf{f}}^2 = -\mathbb{E} + \mathbf{e}_z\mathbf{e}_z$  Gebrauch gemacht wurde.





---

## Literaturverzeichnis

---

- Achatz, U. 2007. Modal and nonmodal perturbations of monochromatic high-frequency gravity waves: primary nonlinear dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 1977–1994.
- Achatz, U. 2010. *Einführung in die Dynamik der Atmosphäre*. Manuskript zur Vorlesung, Institut für Atmosphäre und Umwelt der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Frankfurt am Main. Unveröffentlicht.
- Achatz, U., & Schmitz, G. 1997. On the closure problem in the reduction of complex atmospheric models by PIPs and EOFs: a comparison for the case of a two-layer model with zonally symmetric forcing. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 2452–2474.
- Achatz, U., Klein, R., & Senf, F. 2010. Gravity waves, scale asymptotics and the pseudo-incompressible equations. *J. Fluid Mech.*, **663**, 120–147.
- Afanasyev, Y. 2003. Spontaneous emission of gravity waves by interacting vortex dipoles in a stratified fluid: laboratory experiments. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **97**, 79–95.
- Albert, H.-F. 1980. Zur Hesselberg-Philipps’schen Reihe. *Z. Meteorologie*, **30**, 45–52.
- Alexander, M. J., Geller, M., McLandress, C., Polavarapu, S., Preusse, P., Sassi, F., Sato, K., Eckermann, S., Ern, M., Hertzog, A., Kawatani, Y., Pulido, M., Shaw, T. A., Sigmond, M., Vincent, R., & Watanabe, S. 2010. Recent developments in gravity-wave effects in climate models and the global distribution of gravity-wave momentum flux from observations and models. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **136**, 1103–1124.
- Allen, J. S. 1972. Upwelling of a stratified fluid in a rotating annulus: steady state. Part 1. Linear theory. *J. Fluid Mech.*, **56**, 429–445.
- Altenbach, H. 2012. *Kontinuumsmechanik: Einführung in die materialunabhängigen und materialabhängigen Gleichungen*. 2. Aufl. Heidelberg: Springer Vieweg.
- Arakawa, A., & Lamb, V. R. 1977. Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Methods in Computational Physics*, **17**, 173–265.
- Baer, F. 1977. Adjustment of initial conditions required to suppress gravity oscillations in nonlinear flows. *Contr. Atmos. Phys.*, **50**, 350–366.
- Baer, F., & Tribbia, J. J. 1977. On complete filtering of gravity modes through nonlinear initialization. *Mon. Weather Rev.*, **105**, 1536–1539.

- Barcilon, V., & Pedlosky, J. 1967a. Linear theory of rotating stratified fluid motions. *J. Fluid Mech.*, **29**, 1–16.
- Barcilon, V., & Pedlosky, J. 1967b. A unified linear theory of homogeneous and stratified rotating fluids. *J. Fluid Mech.*, **29**, 609–621.
- Bastin, M. E., & Read, P. L. 1998. Experiments on the structure of baroclinic waves and zonal jets in an internally heated, rotating, cylinder of fluid. *Phys. Fluids*, **10**(2), 374–389.
- Beres, J. H., Alexander, M. J., & Holton, J. R. 2004. A method of specifying the gravity wave spectrum above convection based on latent heating properties and background wind. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 324–337.
- Beres, J. H., Garcia, R. R., Boville, B. A., & Sassi, F. 2005. Implementation of a gravity wave source spectrum parameterization dependent on the properties of convection in the Whole Atmosphere Community Climate Model (WACCM). *J. Geophys. Res.*, **110**, D10108.
- Besthorn, M. 2006. *Hydrodynamik und Strukturbildung*. Berlin: Springer-Verlag.
- Borchert, S. 2010. *Ein Finite-Volumen-Modell des rotierenden Annulus*. Diplomarbeit, Institut für Atmosphäre und Umwelt der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Frankfurt am Main.
- Borchert, S., Achatz, U., & Fruman, M. D. 2014. Gravity wave emission in an atmosphere-like configuration of the differentially heated rotating annulus experiment. *J. Fluid Mech.*, **758**, 287–311.
- Borchert, S., Achatz, U., Remmler, S., Hickel, S., Harlander, U., Vincze, M., Alexandrov, K. D., Rieper, F., Heppelmann, T., & Dolaptchiev, S. I. 2015. Finite-volume models with implicit subgrid-scale parameterization for the differentially heated rotating annulus. *Meteorol. Z.*, **23**(6), 561–580.
- Boussinesq, J. V. 1903. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Gauthier-Villars.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G., & Mühlig, H. 2001. *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Aufl. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Bühler, O., & McIntyre, M. E. 2005. Wave capture and wave-vortex duality. *J. Fluid Mech.*, **534**, 67–95.
- Burg, K., Haf, H., & Wille, F. 2006. *Vektoranalysis*. 1. Aufl. Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag.
- Charney, J. G. 1948. On the scale of atmospheric motions. *Geofys. Publ. Oslo*, **17**, 1–17.
- Charney, J. G., & Eliassen, A. 1949. A numerical method for predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus*, **1**, 38–54.
- Charney, J. G., Fjørtoft, R., & von Neumann, J. 1950. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus*, **2**, 237–254.
-

- Chorin, A. J. 1968. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comp.*, **22**, 745–762.
- Chun, H.-Y., & Baik, J.-J. 1998. Momentum flux by thermally induced internal gravity waves and its approximation for large-scale models. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 3299–3310.
- Chun, H.-Y., Song, I.-S., Baik, J.-J., & Kim, Y.-J. 2004. Impact of a convectively forced gravity wave drag parameterization in NCAR CCM3. *J. Climate*, **17**, 3530–3547.
- Czermak, P. 1893. Ueber warme Luft- und Flüssigkeitsströmungen. *Ann. Phys.*, **286**(10), 329–334.
- Danioux, E., Vanneste, J., Klein, P., & Sasaki, H. 2012. Spontaneous inertia-gravity-wave generation by surface-intensified turbulence. *J. Fluid Mech.*, **699**, 153–173.
- Davis, C. A., & Emanuel, K. A. 1991. Potential vorticity diagnostics of cyclogenesis. *Mon. Weather Rev.*, **119**, 1929–1953.
- Diekmann, Ch. J. 2014. *Erweiterung eines numerischen Modells des rotierenden Annulus um die Wärmeübertragung zwischen Flüssigkeit und Umgebung*. Bachelorarbeit, Institut für Atmosphäre und Umwelt der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Frankfurt am Main.
- Douglas, H. A., & Mason, P. J. 1973. Thermal convection in a large rotating fluid annulus: some effects of varying the aspect ratio. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1124–1134.
- Dove, H. W. 1857. Einige Bemerkungen über die meteorologischen Aufsätze des Hrn. Vettin. *Ann. Phys.*, **178**(12), 607–613.
- Dritschel, D. G., & McKiver, W. J. 2015. Effect of Prandtl’s ratio on balance in geophysical turbulence. *J. Fluid Mech.*, **777**, 569–590.
- Dritschel, D. G., & Viúdez, Á. 2003. A balanced approach to modelling rotating stably stratified geophysical flows. *J. Fluid Mech.*, **488**, 123–150.
- Durrán, D. R. 1989. Improving the anelastic approximation. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1453–1461.
- Durrán, D. R. 1999. *Numerical methods for wave equations in geophysical fluid dynamics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Eady, E. T. 1949. Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52.
- Ebel, H. F., Bliefert, C., & Greulich, W. 2006. *Schreiben und Publizieren in den Naturwissenschaften*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag.
- Ertel, H. 1933. Das Variationsprinzip der atmosphärischen Dynamik. *Sitz.-Ber. Preuß. Akad. D. Wiss., Phys.-math. Klasse., Berlin*, **XII**, 461–464.
- Ertel, H. 1936. Advektiv-dynamische Theorie der Luftdruckschwankungen und ihrer Periodizitäten. *Veröff. Meteorol. Inst. Univ. Berlin*, **1**(1), 1–31.
- Ertel, H. 1940a. *Elemente der Operatorenrechnung mit geophysikalischen Anwendungen*. Berlin: Springer-Verlag.
-

- Ertel, H. 1940b. Neue atmosphärische Bewegungsgleichungen und ihre Anwendung auf die Theorie der Zyklonenbewegung. *Ann. Hydrographie. marit. Meteorologie*, **68**, 421–431.
- Ertel, H. 1941a. Über neue atmosphärische Bewegungsgleichungen und eine Differentialgleichung des Luftdruckfeldes. *Meteorol. Z.*, **58**(3), 77–78.
- Ertel, H. 1941b. Die Unmöglichkeit einer exakten Wetterprognose auf Grund synoptischer Luftdruckkarten von Teilgebieten der Erde. *Meteorol. Z.*, **58**(9), 309–313.
- Ertel, H. 1942. Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz. *Meteorol. Z.*, **59**, 277–281.
- Ertel, H. 1944. Wettervorhersage als Randwertproblem. *Meteorol. Z.*, **61**(6), 181–190.
- Ertel, H., Jaw, J.-J., & Li, S.-Z. 1941. Tensorielle Theorie der Stabilität. *Meteorol. Z.*, **58**(11), 389–392.
- Esler, J.G., & Polvani, L.M. 2004. Kelvin-Helmholtz instability of potential vorticity layers: a route to mixing. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 1392–1405.
- Etling, D. 2002. *Theoretische Meteorologie: Eine Einführung*. 2. Aufl. Berlin: Springer-Verlag.
- Exner, F. M. 1923. Über die Bildung von Windhosen und Zyklonen. *Sitzungsbericht der Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Abteilung IIa*, **132**, 1–14.
- Farnell, L., & Plumb, R. A. 1975. *Numerical integration of flow in a rotating annulus I: axisymmetric model*. Tech. rept. Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, UK, Meteorological Office.
- Farnell, L., & Plumb, R. A. 1976. *Numerical integration of flow in a rotating annulus II: three dimensional model*. Tech. rept. Geophysical Fluid Dynamics Laboratory, UK, Meteorological Office.
- Ferziger, J. H., & Perić, M. 2008. *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin: Springer-Verlag.
- Flór, J.-B., Scolan, H., & Gula, J. 2011. Frontal instabilities and waves in a differentially rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **685**, 532–542.
- Flynn, M. R., Onu, K., & Sutherland, B. R. 2003. Internal wave excitation by a vertically oscillating sphere. *J. Fluid Mech.*, **494**, 65–93.
- Ford, R. 1994a. Gravity wave radiation from vortex trains in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **281**, 81–118.
- Ford, R. 1994b. The instability of an axisymmetric vortex with monotonic potential vorticity in rotating shallow water. *J. Fluid Mech.*, **280**, 303–334.
- Ford, R. 1994c. The response of a rotating ellipse of uniform potential vorticity to gravity wave radiation. *Phys. Fluids*, **6**, 3694–3704.
- Ford, R., McIntyre, M. E., & Norton, W. A. 2000. Balance and the slow quasimanifold: some explicit results. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1236–1254.
-

- Forsythe, G. E. 1949. Exact particle trajectories for nonviscous flow in a plane with a constant Coriolis parameter. *J. Meteor.*, **6**, 337–346.
- Fritts, D. C., & Alexander, M. J. 2003. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Rev. Geophys.*, **41**(1), 1003.
- Fritts, D. C., & Luo, Z. 1992. Gravity wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part I: two-dimensional forcing. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 681–697.
- Garner, E., Adams, N., & Sagaut, P. 2009. *Large eddy simulation for compressible flows*. Springer Science + Business Media B.V.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., & Cabot, W. H. 1991. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, **A3**(7), 1760–1765.
- Ghil, M., Read, P. L., & Smith, L. A. 2010. Geophysical flows as dynamical systems: the influence of Hide’s experiments. *Astronomy & Geophysics*, **51**(4), 4.28–4.35.
- Gill, A. E. 1982. *Atmosphere-ocean dynamics*. New York: Academic Press, Inc.
- Graßmann, H. 1844. *Die Wissenschaft der extensiven Größen oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin. 1. Teil: Die lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: O. Wigand.
- Graßmann, H. 1862. *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet*. Berlin: Verlag von Th. Chr. Fr. Enslin.
- Graßmann, H. 1911. Theorie der Ebbe und Flut. Prüfungsarbeit 1840. *Seiten 8–203 in: Graßmann, J., & Engel, F. (Hrsg.), Hermann Grassmanns gesammelte mathematische und physikalische Werke.*, Bd. 3, 1. Teil. B.G. Teubner Verlag.
- Greenspan, H. P. 1990. *The theory of rotating fluids*. Brookline, MA: Breukelen Press.
- Gresho, Ph. M., & Sani, R. L. 1987. On pressure boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **7**, 1111–1145.
- Grilli, M., Schmid, P. J., Hickel, S., & Adams, N. A. 2012. Analysis of unsteady behaviour in shockwave turbulent boundary layer interaction. *J. Fluid Mech.*, **700**, 16–28.
- Grimshaw, R. 1975. Internal gravity waves: critical layer absorption in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.*, **70**, 287–304.
- Guest, F. M., Reeder, M. J., Marks, C. J., & Karoly, D. J. 2000. Inertia-gravity waves observed in the lower stratosphere over Macquarie Island. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 737–752.
- Gula, J., Zeitlin, V., & Plougonven, R. 2009. Instabilities of two-layer shallow-water flows with vertical shear in the rotating annulus. *J. Fluid Mech.*, **638**, 27–47.
- Haltiner, G. J., & Williams, R. T. 1980. *Numerical prediction and dynamic meteorology*. 2. Aufl. New York: John Wiley & Sons.
- Hannachi, A., & O’Neill, A. 2001. Atmospheric multiple equilibria and non-Gaussian behaviour in model simulations. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **127**, 939–958.
-

- Harlander, U., von Larcher, Th., Wang, Y., & Egbers, Ch. 2011. PIV- and LDV-measurements of baroclinic wave interactions in a thermally driven rotating annulus. *Exp. Fluids*, **51**(1), 37–49.
- Harlander, U., Wenzel, J., Alexandrov, K., Wang, Y., & Egbers, Ch. 2012. Simultaneous PIV and thermography measurements of partially blocked flow in a differentially heated rotating annulus. *Exp. Fluids*, **52**, 1077–1087.
- Harris, F. J. 1978. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. *Proceedings of the IEEE*, **66**, 51–83.
- Hathaway, D. H., & Fowles, W. W. 1986. Flow regimes in a shallow rotating cylindrical annulus with temperature gradients imposed on the horizontal boundaries. *J. Fluid Mech.*, **172**, 401–418.
- Heaviside, O. 1893. *Electromagnetic theory*. Bd. 1. London: The Electrician Printing and Publishing Co.
- Heppelmann, T. 2011. *Wellenregime im rotierenden Annulus: Ein Vergleich zwischen Modell und Experiment*. Bachelorarbeit, Institut für Atmosphäre und Umwelt der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Frankfurt am Main.
- Herbert, F. 1971. Statische und quasistatische Bewegungen in der Atmosphäre. *Contr. Atmos. Phys.*, **44**, 17–52.
- Herbert, F. 1973. Irreversible Prozesse der Atmosphäre – 1. Teil. *Contr. Atmos. Phys.*, **46**, 119–136.
- Herbert, F. 1978a. An analytical study of the ageostrophic motion of an air parcel. *Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A*, **27**, 87–93.
- Herbert, F. 1978b. The tensor structure of constitutive equations for linear atmospheric heat and momentum exchange with axisymmetric coefficients. *Berichte des Deutschen Wetterdienstes*, **145**.
- Herbert, F. 1980. Die Erschließung der numerischen Wetterprognose durch die Hypothese der lärmfreien Atmosphäre. *Pure Appl. Geophys.*, **118**, 880–912.
- Herbert, F. 2007. The physics of potential vorticity. *Meteorol. Z.*, **16**, 243–254.
- Herbert, F. 2012a. Die Erschließung der Rossby-Welle durch Lärmfilterung. *Berichte des deutschen Wetterdienstes*, **239**.
- Herbert, F. 2012b. *Meteorologische Energetik und der Entropiesatz*. Manuskript zur Vorlesung, Institut für Atmosphäre und Umwelt der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, Frankfurt am Main. Unveröffentlicht.
- Hesselberg, Th. 1915. Über eine Beziehung zwischen Druckgradient, Wind und Gradientenänderung. *Veröff. des Geoph. Inst. der Univ. Leipzig, Ser. 2*, **1**(7), 880–912.
- Hickel, S., & Adams, N. A. 2007. On implicit subgrid-scale modeling in wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, **19**, 105106.
-

- Hickel, S., & Adams, N. A. 2008. Implicit LES applied to zero-pressure-gradient and adverse-pressure-gradient boundary-layer turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **29**, 626–639.
- Hickel, S., Adams, N. A., & Domaradzki, J. A. 2006. An adaptive local deconvolution method for implicit LES. *J. Comp. Phys.*, **213**, 413–436.
- Hickel, S., Adams, N. A., & Mansour, N. N. 2007. Implicit subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of passive-scalar mixing. *Phys. Fluids*, **19**, 095102.
- Hickel, S., Kempe, T., & Adams, N. A. 2008. Implicit large-eddy simulation applied to turbulent channel flow with periodic constrictions. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **22**, 227–242.
- Hide, R. 1958. An experimental study of thermal convection in a rotating liquid. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A250**, 441–478.
- Hide, R. 1967a. On the vertical stability of a rotating fluid subject to a horizontal temperature gradient. *J. Atmos. Sci.*, **24**, 6–9.
- Hide, R. 1967b. Theory of axisymmetric thermal convection in a rotating fluid annulus. *Phys. Fluids*, **10**(1), 56–68.
- Hide, R. 1977. Experiment with rotating fluids. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **103**, 1–28.
- Hide, R., & Mason, P. J. 1975. Sloping convection in a rotating fluid. *Adv. Phys.*, **24**(1), 47–100.
- Hignett, P., White, A. A., Carter, R. D., Jackson, W. D. N., & Small, R. M. 1985. A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **111**, 131–154.
- Hinkelmann, K. 1951a. Der Mechanismus des meteorologischen Lärms. *Tellus*, **3**, 285–296.
- Hinkelmann, K. 1951b. Horizontale Massendivergenz als Funktion des Luftdruckfeldes. *Meteor. Rundsch.*, **4**, 53–55.
- Hinkelmann, K. 1962. Noncharacteristic filtering of meteorological noise waves. *Contr. Atmos. Phys.*, **35**, 252–276.
- Hinkelmann, K. 1966. Das Filterproblem in der numerischen Wettervorhersage. *Arch. Meteor. Geoph. Biokl., Ser. A, Suppl. 1*, 74–87.
- Holton, J. R. 2004. *An introduction to dynamic meteorology*. 4. Aufl. Oxford UK: Elsevier Academic Press.
- Hoskins, B. J., McIntyre, M. E., & Robertson, A. W. 1985. On the use and significance of isentropic potential vorticity maps. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **111**, 877–946.
- Jacoby, T. N. L., Read, P. L., Williams, P. D., & Young, R. M. B. 2011. Generation of inertia-gravity waves in the rotating thermal annulus by a localised boundary layer instability. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **105**, 161–181.
-

- James, I. N., Jonas, P. R., & Farnell, L. 1981. A combined laboratory and numerical study of fully developed steady baroclinic waves in a cylindrical annulus. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **107**, 51–78.
- Johnson, R. W. 1998. *The handbook of fluid dynamics*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Jolliffe, I. T. 2002. *Principal component analysis*. 2. Aufl. New York: Springer-Verlag.
- Jou, D., Casas-Vázquez, J., & Lebon, G. 2001. *Extended irreversible thermodynamics*. 3. Aufl. Berlin: Springer-Verlag.
- Kim, Y.-J., Eckermann, S. D., & Chun, H.-Y. 2003. An overview of the past, present and future of gravity-wave drag parametrization for numerical climate and weather prediction models. *Atmos.-Ocean*, **41**, 65–98.
- Klein, R. 2000. Asymptotic analyses for atmospheric flows and the construction of asymptotically adaptive numerical methods. *Z. angew. Math. Mech.*, **80**, 765–785.
- Klein, R. 2004. An applied mathematical view of theoretical meteorology. In: Hill, J., & Moore, R. (Hrsg.), *Applied Mathematics Entering the 21st Century, invited talks at the ICIAM 2003 Conference*, Bd. 116. SIAM proceedings in Applied Mathematic.
- Klein, R. 2008. An unified approach to meteorological modelling based on multiple-scales asymptotics. *Adv. Geosci.*, **15**, 23–33.
- Kleinschmidt, E. 1950. Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen. 1. und 2. Teil. *Meteor. Rundsch.*, **3**, 1–6 und 54–61.
- Kleinschmidt, E. 1951. Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen. 3. Teil. *Meteor. Rundsch.*, **4**, 89–96.
- Kleinschmidt, E. 1955. Die Entstehung einer Höhenzyklone über Nordamerika. *Tellus*, **7**, 96–110.
- Kluge, G., & Neugebauer, G. 1994. *Grundlagen der Thermodynamik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.
- Knox, J. A. 1997. Possible mechanisms of Clear-Air Turbulence in strongly anticyclonic flows. *Mon. Weather Rev.*, **125**, 1251–1259.
- Kwak, H. S., & Hyun, J. M. 1992. Baroclinic waves in a shallow rotating annulus with temperature gradients imposed on the horizontal boundaries. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **66**, 1–23.
- Lanczos, C. 1970. *The variational principles of mechanics*. 4. Aufl. Toronto: University of Toronto Press.
- Lebedev, L. P., Cloud, M. J., & Eremeyev, V. A. 2010. *Tensor Analysis with Applications in Mechanics*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Lighthill, M. J. 1952. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **211**, 564–587.
- Lin, Y.-L. 2007. *Mesoscale dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press.
-



- Lovegrove, A. F., Read, P. L., & Richards, C. J. 1999. Generation of inertia-gravity waves by a time-dependent baroclinic wave in the laboratory. *Phys. Chem. Earth (B)*, **24**, 455–460.
- Lovegrove, A. F., Read, P. L., & Richards, C. J. 2000. Generation of inertia-gravity waves in a baroclinically unstable fluid. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **126**, 3233–3254.
- Luo, Z., & Fritts, D. C. 1993. Gravity-wave excitation by geostrophic adjustment of the jet stream. Part II: three-dimensional forcing. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 104–115.
- Lynch, P. 1989. The slow equations. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **115**, 201–219.
- Machenhauer, B. 1977. On the dynamics of gravity oscillations in a shallow water model, with applications to normal mode initialization. *Contr. Atmos. Phys.*, **50**, 253–271.
- Marsden, J. E., & Ratiu, T. S. 1999. *Introduction to mechanics and symmetry*. New York: Springer Science + Business Media Inc.
- McFarlane, N. A. 1987. The effect of orographically excited gravity wave drag on the general circulation of the lower stratosphere and troposphere. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1775–1800.
- McIntyre, M. E. 2009. Spontaneous imbalance and hybrid vortex-gravity structures. *J. Atmos. Sci.*, **66**, 1315–1326.
- McIntyre, M. E. 2014a. Balanced flow. *Seiten 298–303 in: North, G. R., Pyle, J., & Zhang, F. (Hrsg.), Encyclopedia of Atmospheric Sciences, 2. Aufl., Bd. 2. Elsevier.*
- McIntyre, M. E. 2014b. Potential vorticity. *Seiten 375–383 in: North, G. R., Pyle, J., & Zhang, F. (Hrsg.), Encyclopedia of Atmospheric Sciences, 2. Aufl., Bd. 2. Elsevier.*
- McIntyre, M. E., & Norton, W. A. 2000. Potential vorticity inversion on a hemisphere. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 1214–1235.
- Medvedev, A. S., & Gavrilov, N. M. 1995. The nonlinear mechanism of gravity wave generation by meteorological motions in the atmosphere. *J. Atmos. Terr. Phys.*, **57**, 1221–1231.
- Meister, A. 2011. *Numerik linearer Gleichungssysteme. Eine Einführung in moderne Verfahren*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.
- Meixner, J. 1943. Zur Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in Gasen mit chemisch reagierenden, dissoziierenden und anregbaren Komponenten. *Ann. Phys.*, **43**, 244–270.
- Meixner, J. 1961. Der Drehimpulssatz in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse. *Zeitschr. Phys.*, **164**, 145–155.
- Merz, W., & Knabner, P. 2013. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler: Lineare Algebra in R*. Berlin: Springer-Verlag.
- Miller, T. L., & Fowles, W. W. 1986. Laboratory experiments in a baroclinic annulus with heating and cooling on the horizontal boundaries. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **34**, 283–300.
-

- Mirzaei, M., Zülicke, Ch., Mohebalhojeh, A. R., Ahmadi-Givi, F., & Plougonven, R. 2014. Structure, energy and parameterization of inertia-gravity waves in dry and moist simulations of a baroclinic wave life cycle. *J. Atmos. Sci.*, **71**, 2390–2414.
- Mohebalhojeh, A. R., & Dritschel, D. G. 2000. On the representation of gravity waves in numerical models of the shallow water equations. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **126**, 669–688.
- Mohebalhojeh, A. R., & Dritschel, D. G. 2001. Hierarchies of balance conditions for the f-plane shallow-water equations. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 2411–2426.
- Mohebalhojeh, A. R., & McIntyre, M. E. 2007a. Local mass conservation and velocity splitting in PV-based balanced models. Part I: the hyperbalance equations. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 1782–1793.
- Mohebalhojeh, A. R., & McIntyre, M. E. 2007b. Local mass conservation and velocity splitting in PV-based balanced models. Part II: numerical results. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 1794–1810.
- Müller, P., Holloway, G., Henyey, F., & Pomphrey, N. 1986. Nonlinear interactions among internal gravity waves. *Rev. Geophys.*, **24**, 493–536.
- Muraki, D. J., Snyder, C., & Rotunno, R. 1999. The next-order corrections to quasi-geostrophic theory. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1547–1560.
- Nagel, H. 1951. Zur Stabilitäts-Theorie des geostrophischen Windes. *Arch. Met. Geoph. Biokl., Ser. A*, **3**(3-4), 229–267.
- Nolting, W. 2004. *Grundkurs theoretische Physik 3: Elektrodynamik*. Berlin: Springer-Verlag.
- Oberbeck, A. 1879. Ueber die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen. *Ann. Phys.*, **243**(6), 271–292.
- O’Sullivan, D., & Dunkerton, T. J. 1995. Generation of inertia-gravity waves in a simulated life cycle of baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3695–3716.
- Palmer, T. N., Shutts, G. J., & Swinbank, R. 1986. Alleviation of a systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **112**, 1001–1039.
- Pavelin, E., Whiteway, J. A., & Vaughan, G. 2001. Observation of gravity wave generation and breaking in the lowermost stratosphere. *J. Geophys. Res.*, **106**, 5173–5179.
- Pedlosky, J. 1987. *Geophysical fluid dynamics*. 2. Aufl. New York: Springer-Verlag.
- Philipps, H. 1939a. Die Abweichung vom geostrophischen Wind. *Meteorol. Z.*, **56**, 460–483.
- Philipps, H. 1939b. Die Hauptprobleme der theoretischen Meteorologie. *Die Naturwissenschaften*, **27**, 442–450.
- Phillips, N. A. 1963. Geostrophic motion. *Rev. Geophys.*, **1**(2), 123–176.
- Pichler, H. 1984. *Dynamik der Atmosphäre*. Zürich: Bibliographisches Institut.
-

- Plougonven, R., & Snyder, C. 2005. Gravity waves excited by jets: propagation versus generation. *Geophys. Res. Lett.*, **32**, L18802.
- Plougonven, R., & Snyder, C. 2007. Inertia-gravity waves spontaneously generated by jets and fronts. Part I: different baroclinic life cycles. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 2502–2520.
- Plougonven, R., & Zhang, F. 2007. On the forcing of inertia-gravity waves by synoptic-scale flows. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 1737–1742.
- Plougonven, R., & Zhang, F. 2014. Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts. *Rev. Geophys.*, **52**, 33–76.
- Plougonven, R., Teitelbaum, H., & Zeitlin, V. 2003. Inertia gravity wave generation by the tropospheric midlatitude jet as given by the Fronts and Atlantic Storm-Track Experiment radio soundings. *J. Geophys. Res.*, **108**, 4686.
- Plougonven, R., Snyder, C., & Zhang, F. 2009. Comments on “Application of the Lighthill–Ford theory of spontaneous imbalance to clear-air turbulence forecasting”. *J. Atmos. Sci.*, **66**, 2506–2510.
- Prandtl, L. 1904. Über Flüssigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses 1904*. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 1905, 484–491.
- Preisendorfer, R. W. 1988. *Principal component analysis in meteorology and oceanography*. Elsevier. 425 Seiten.
- Päsler, M. (Hrsg.). 1964. *Vorlesung über Thermodynamik von Max Planck*. 11. Aufl. Berlin: De Gruyter.
- Randriamampianina, A. 2013. Caractéristiques d’ondes d’inertie gravité dans une cavité barocline (Inertia gravity waves characteristics within a baroclinic cavity). *C. R. Mecanique*, **341**, 547–552.
- Read, P. L. 2001. Transition to geostrophic turbulence in the laboratory, and as a paradigm in atmospheres and oceans. *Surveys in Geophysics*, **22**, 265–317.
- Read, P. L., Lewis, S. R., & Hide, R. 1997. Laboratory and numerical studies of baroclinic waves in an internally heated rotating fluid annulus: a case of wave/vortex duality? *J. Fluid Mech.*, **337**, 155–191.
- Read, P. L., Thomas, N. P. J., & Risch, S. H. 2000. An evaluation of Eulerian and semi-Lagrangian advection schemes in simulations of rotating, stratified flows in the laboratory. Part I: axisymmetric flow. *Mon. Weather Rev.*, **128**, 2835–2852.
- Remmler, S., & Hickel, S. 2012. Direct and large eddy simulation of stratified turbulence. *Int. J. Heat Fluid Flow*, **35**, 13–24.
- Remmler, S., & Hickel, S. 2013. Spectral structure of stratified turbulence: direct numerical simulations and predictions by large eddy simulation. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, **27**, 319–336.
- Richter, J. H., Sassi, F., & Garcia, R. R. 2010. Toward a physically based gravity wave source parameterization in a general circulation model. *J. Atmos. Sci.*, **67**, 136–156.
-

- Riehl, H., & Fultz, D. 1957. Jet stream and long waves in a steady rotating-dishpan experiment: structure of the circulation. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **83**, 215–231.
- Riehl, H., & Fultz, D. 1958. The general circulation in a steady rotating-dishpan experiment. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **84**, 389–417.
- Rieper, F., Hickel, S., & Achatz, U. 2013. A conservative integration of the pseudo-incompressible equations with implicit turbulence parameterization. *Mon. Weather Rev.*, **141**, 861–886.
- Rossby, C.-G. 1926. On the solution of problems of atmospheric motion by means of model experiments. *Mon. Weather Rev.*, **54**(6), 237–240.
- Rossby, C.-G. 1938. On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, II. *J. Mar. Res.*, **2**, 239–263.
- Rossby, C.-G., & Mitarbeiter. 1939. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semipermanent centres of action. *J. Mar. Res.*, **2**, 38–55.
- Sagaut, P. 2006. *Large eddy simulation for incompressible flows: an introduction*. 3. Aufl. Berlin: Springer-Verlag.
- Sato, K., Watanabe, S., Kawatani, Y., Tomikawa, Y., Miyazaki, K., & Takahashi, M. 2009. On the origins of mesospheric gravity waves. *Geophys. Res. Lett.*, **36**, L19801.
- Sihvola, A. 1999. *Electromagnetic mixing formulas and applications*. London: The Institution of Electrical Engineers.
- Simmons, A. J., & Hoskins, B. J. 1975. A comparison of spectral and finite-difference simulations of a growing baroclinic wave. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **101**, 551–565.
- Smagorinsky, J. 1963. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weather Rev.*, **91**, 99–164.
- Smith, L. M., & Waleffe, F. 2002. Generation of slow large scales in forced rotating stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, **451**, 145–168.
- Snyder, C., Muraki, D. J., Plougonven, R., & Zhang, F. 2007. Inertia-gravity waves generated within a dipole vortex. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 4417–4431.
- Snyder, C., Plougonven, R., & Muraki, D. J. 2009. Mechanisms for spontaneous gravity wave generation within a dipole vortex. *J. Atmos. Sci.*, **66**, 3464–3478.
- Song, I.-S., & Chun, H.-Y. 2008. A Lagrangian spectral parameterization of gravity wave drag induced by cumulus convection. *J. Atmos. Sci.*, **65**, 1204–1224.
- Stöcker, H. 2005. *Taschenbuch der Physik*. 5. Aufl. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Tailleux, R. 2012. Thermodynamics/dynamics coupling in weakly compressible turbulent stratified fluids. *ISRN Thermodynamics*, 15 Seiten. DOI: 10.5402/2012/609701.
- Tribbia, J. J. 1984. A simple scheme for high-order nonlinear normal mode initialization. *Mon. Weather Rev.*, **112**, 278–284.
-

- Uccellini, L. W., & Koch, S. E. 1987. The synoptic setting and possible energy sources for mesoscale wave disturbances. *Mon. Weather Rev.*, **115**, 721–729.
- Vallis, G. K. 1992. Mechanisms and parameterizations of geostrophic adjustment and a variational approach to balanced flow. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 1144–1160.
- Vallis, G. K. 2006. *Atmospheric and oceanic fluid dynamics: fundamentals and large-scale circulation*. New York: Cambridge University Press.
- Vanneste, J. 2013. Balance and spontaneous wave generation in geophysical flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **45**, 147–172.
- Vanneste, J., & Yavneh, I. 2004. Exponentially small inertia-gravity waves and the breakdown of quasigeostrophic balance. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 211–223.
- Verein Deutscher Ingenieure, VDI-Gesellschaft Verfahrenstechnik, & Chemieingenieurwesen (GVC) (Hrsg.). 2006. *VDI-Wärmeatlas*. 10. Aufl. Berlin: Springer-Verlag.
- Verkley, W. T. M. 2009. A balanced approximation of the one-layer shallow-water equations on a sphere. *J. Atmos. Sci.*, **66**, 1735–1748.
- Vettin, F. 1857. Ueber den aufsteigenden Luftstrom, die Entstehung des Hagels und der Wirbel-Stürme. *Ann. Physik Chemie*, **102**, 246–255.
- Vincze, M., Borchert, S., Achatz, U., von Larcher, Th., Baumann, M., Liersch, C., Remmler, S., Beck, T., Alexandrov, K. D., Egbers, Ch., Fröhlich, J., Heuveline, V., Hickel, S., & Harlander, U. 2015. Benchmarking in a rotating annulus: a comparative experimental and numerical study of baroclinic wave dynamics. *Meteorol. Z.*, **23**(6), 611–635.
- Viúdez, Á., & Dritschel, D. G. 2006. Spontaneous generation of inertia-gravity wave packets by balanced geophysical flows. *J. Fluid Mech.*, **553**, 107–117.
- von Larcher, Th., & Egbers, Ch. 2005. Experiments on transitions of baroclinic waves in a differentially heated rotating annulus. *Nonlin. Processes Geophys.*, **12**, 1033–1041.
- Wang, S., & Zhang, F. 2010. Source of gravity waves within a vortex-dipole jet revealed by a linear model. *J. Atmos. Sci.*, **67**, 1438–1455.
- Wang, S., Zhang, F., & Snyder, C. 2009. Generation and propagation of inertia-gravity waves from vortex dipoles and jets. *J. Atmos. Sci.*, **66**, 1294–1314.
- Warn, T., Bokhove, O., Shepherd, T. G., & Vallis, G. K. 1995. Rossby number expansions, slaving principles, and balance dynamics. *Quart. J. R. Met. Soc.*, **121**, 723–739.
- Williams, G. P. 1967. Thermal convection in a rotating fluid annulus: part 1. The basic axisymmetric flow. *J. Atmos. Sci.*, **24**, 144–161.
- Williams, G. P. 1969. Numerical integration of the three-dimensional Navier-Stokes equations for incompressible flow. *J. Fluid Mech.*, **37**, 727–750.
- Williams, G. P. 1971. Baroclinic annulus waves. *J. Fluid Mech.*, **49**, 417–449.
- Williams, P. D., Read, P. L., & Haine, T. W. N. 2003. Spontaneous generation and impact of inertia-gravity waves in a stratified, two-layer shear flow. *Geophys. Res. Lett.*, **30**, 2255.
-

- Williams, P. D., Haine, T. W. N., & Read, P. L. 2005. On the generation mechanisms of short-scale unbalanced modes in rotating two-layer flows with vertical shear. *J. Fluid Mech.*, **528**, 1–22.
- Williams, P. D., Haine, T. W. N., & Read, P. L. 2008. Inertia-gravity waves emitted from balanced flow: observations, properties, and consequences. *J. Atmos. Sci.*, **65**, 3543–3556.
- Williamson, J. H. 1980. Low-storage Runge-Kutta schemes. *J. Comp. Phys.*, **35**, 48–56.
- Wilson, E. B. 1929. *Vector analysis, a text-book for the use of students of mathematics and physics, founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*. New Haven: Yale University Press.
- Zdunkowski, W., & Bott, A. 2003. *Dynamics of the atmosphere: a course in theoretical meteorology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Zdunkowski, W., & Bott, A. 2004. *Thermodynamics of the atmosphere: a course in theoretical meteorology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Zhang, F. 2004. Generation of mesoscale gravity waves in upper-tropospheric jet-front systems. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 440–457.
- Zhang, F., Koch, S. E., Davis, C. A., & Kaplan, M. L. 2000. A survey of unbalanced flow diagnostics and their application. *Adv. Atmos. Sci.*, **17**(2), 165–183.
- Zülicke, Ch., & Peters, D. 2008. Parameterization of strong stratospheric inertia-gravity waves forced by poleward-breaking Rossby waves. *Mon. Weather Rev.*, **136**, 98–119.
-

---

## Danksagung

---

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Ulrich Achatz dafür, dass er mir die Arbeit an diesem spannenden Thema ermöglicht hat, für die tolle Betreuung, die stete Unterstützung und Geduld bei all meinen Fragen und Problemen und für die anregenden Diskussionen.

Ich danke Dr. Mark D. Fruman für die vielfältige Unterstützung, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat und Dr. Felix Rieper, der mir sein Programm pincFloit, auf dem cylFloit basiert, zur Verfügung gestellt und geduldig erklärt hat.

Danke auch an Dr. Jewgenija Muraschko, Dr. Stamen I. Dolaptchiev, Dr. Bruno Ribstein, Dr. Christian Böinghoff, Matthias Zacharuk, Dr. Gergely Bölöni, Dr. Joran Rolland, Thomas Kessemeier und Dr. Fabian Senf für ihre Hilfsbereitschaft, die nette Gesellschaft und anregende Gespräche sowie das angenehme Klima in der Arbeitsgruppe. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch bei Tobias Heppelmann und Christopher J. Diekmann dafür bedanken, dass sie sich im Rahmen ihrer Bachelorarbeit für den Annulus begeistern konnten und wichtige Beiträge zur Erweiterung unseres Modells geleistet haben. Ich danke allen Mitarbeitern des Instituts für Atmosphäre und Umwelt der Goethe-Universität Frankfurt für ihre Hilfsbereitschaft, nette Gespräche und eine angenehme Atmosphäre.

Ein herzliches Dankeschön geht an Apl. Prof. Dr. Uwe Harlander, Dr. Miklos Vincze und Kiril D. Alexandrov von der BTU Cottbus-Senftenberg, die uns die Messdaten ihres Annulusexperiments zur Verfügung gestellt und meine zahlreichen Fragen zum Experiment umfassend beantwortet haben. Ohne sie wäre ein wichtiger Teil dieser Arbeit nicht möglich gewesen.

Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung meiner Arbeit im Rahmen des Schwerpunktprogramms 1276 MetStröm. Für den anregenden Austausch in unserer MetStröm-Projektgruppe danke ich Dr. Stefan Hickel und Sebastian Remmler von der TU München. Dem MetStröm-Koordinator Prof. Dr. Rupert Klein und dem Wissenschaftlichen Manager Dr. Thomas von Larcher sei für Förderungen und die anregenden und informativen Jahrestreffen an der Freien Universität Berlin herzlich gedankt. Dieser Dank gilt natürlich auch allen anderen Beteiligten des MetStröm-Projekts.

Schließlich geht ein großes Dankeschön an meine Familie, die mich in all den Jahren immer unterstützt hat.

Allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, sei herzlichst gedankt!