

Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main  
Institut für Stochastik & Mathematische  
Informatik

Diplomarbeit

# **Gleichgewichte auf Überschussmärkten**

Theorie und Anwendbarkeit auf die  
Regelenergiezone der RWE

Thomas Rupp

9. Oktober 2003

Diese Version entspricht im wesentlichen der begutachteten Version bis auf die Kürzung von Satz 3.3.1 um einen für den Rest unbedeutenden Teil.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Aufgabenskizzierung . . . . .	1
1.2	Problematik . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Das Modell</b>	<b>3</b>
2.1	Ökonomische Modellspezifikation . . . . .	3
2.1.1	Schematischer Handelsablauf . . . . .	4
2.2	Das mathematische Modell . . . . .	5
2.3	Aufgabenstellung . . . . .	6
2.4	Vereinfachungen . . . . .	6
2.5	Ökonomische Interpretation . . . . .	7
2.5.1	Grundlegende Annahmen . . . . .	7
2.5.2	Aufgabe . . . . .	8
2.5.3	Ökonomische Intuition . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Resultate</b>	<b>10</b>
3.1	Allgemeiner Fall . . . . .	10
3.1.1	Homogenes $\mathfrak{X}$ . . . . .	12
3.2	Zweiwertiges $f$ . . . . .	13
3.2.1	Eindimensionaler Fall . . . . .	13
3.2.2	Zweidimensionaler Fall . . . . .	15
3.2.3	Höherdimensionaler Fall . . . . .	18
3.3	Normalverteilung mit Gauss'schem $f$ . . . . .	18
3.3.1	Zweiwertiges $f$ . . . . .	23
3.3.2	Überleitung . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Anwendung – Der Energiemarkt</b>	<b>27</b>
4.1	Aufgabenstellung . . . . .	27

4.2	Europäischer und deutscher Strommarkt . . . . .	28
4.2.1	Der Handelsablauf . . . . .	30
4.2.2	Die Spotmarktpreise . . . . .	31
4.3	Die Bilanzenergiezone der RWE . . . . .	33
4.4	Aufbereitung der Daten . . . . .	34
4.4.1	Die Preisfunktion . . . . .	34
4.4.2	Extraktion von $(V)$ . . . . .	35
4.4.3	Streuung der Residuen . . . . .	37
4.5	Modellkonformität . . . . .	38
4.5.1	Anpassung an reale Verhältnisse . . . . .	39
4.5.2	Zusammenfassung . . . . .	41
4.6	Reproduktion von $(\hat{V})$ . . . . .	42
4.6.1	Visualisierung . . . . .	43
4.7	Brachliegendes Gewinnpotential . . . . .	44
4.7.1	Datengrundlage . . . . .	44
4.7.2	Gewinnstrategien . . . . .	45
4.8	Fazit . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Offene Fragen und Sonstiges</b>	<b>48</b>
5.1	Lineare Preisfunktionen . . . . .	49
5.2	24h-Autokorrelation . . . . .	50
<b>A</b>	<b>Verifikationen</b>	<b>51</b>
A.1	Die Preisfunktion . . . . .	51
A.2	Streuung der Residuen . . . . .	53
A.3	Test auf normalverteilte Prognosefehler . . . . .	54
A.4	Kreuzvalidierung . . . . .	58
<b>B</b>	<b>Die lo(w)ess-Funktion</b>	<b>61</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>63</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>65</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>67</b>

# Kapitel 1

## Einführung

### 1.1 Aufgabenskizzierung

Das Ziel folgender Arbeit ist es, mit einem intuitiven Ansatz eine spezielle Wettbewerbsform zweier interagierender Märkte zu modellieren und anschließend zu analysieren.

Abschließend werden die theoretischen Ergebnisse mit den Beobachtungen an einem existierenden Markt – dem deutschen Energiemarkt – verglichen.

In dieser behandelten Wettbewerbsform wird ein nicht lagerbares Gut an zwei aneinander gekoppelten Märkten gehandelt. Während Handel und Preisfindung am ersten Markt den üblichen Gepflogenheiten folgen, müssen alle Teilnehmer sämtliche Güter, welche nicht unmittelbar nach Lieferung verbraucht werden, am zweiten Marktplatz (dem Überschussmarkt) gegen ein gewisses Entgelt zur Verfügung stellen. Alle Teilnehmer, welche nicht genügend Güter am ersten Markt geordert haben, werden auf dem Überschussmarkt zu einem gewissen Preis mit der noch benötigten Menge versorgt.

Einem Marketmaker auf dem zweiten Marktplatz fällt die Aufgabe zu, einen Preis festzustellen, zu dem diejenigen entschädigt werden, welche ihre Überschüsse zur Verfügung stellen müssen bzw. den diejenigen zu bezahlen haben, deren Gütermangel ausgeglichen wird. Weiterhin stellt dieser sicher, dass zu jedem Zeitpunkt genügend Güter vorhanden sind, so dass der Bedarf aller Teilnehmer zu jedem Zeitpunkt sichergestellt ist.

Ziel ist es nun herauszufinden, welche gewinnmaximierenden Einkaufsstrategien die Marktteilnehmer verfolgen sollten und welche Konsequenzen sich daraus auf

den deutschen Energiemarkt ableiten lassen.

## 1.2 Problematik

Durch die fehlende Lagerbarkeit<sup>1</sup> des Gutes und des unbekanntem Bedarfs an diesem Gut, ist die Auffindung von gewinnmaximierenden Handelsstrategien deutlich erschwert.

Die üblichen Wettbewerbsmodelle gehen, vereinfacht dargestellt, nur von einem Markt aus, an dem durch Angebot und Nachfrage der Marktteilnehmer ein Preis festgestellt wird und diese, anhand des jeweiligen Preisfindungsmechanismus, ihre gewinnoptimale Menge festlegen. Die Menge produzierter bzw. gekaufter Güter wird anschließend über einen längeren Zeitraum verkauft.

Nun ist es jedoch so, dass alle Marktteilnehmer überschüssige Güter nicht lagern können und es ihnen daher nicht möglich ist, diese zu einem späteren Zeitpunkt zu verkaufen. Eine nahe liegende Strategie ist es, die am ersten Markt gekaufte Menge dem eigenen erwarteten Bedarf möglichst gut anzupassen<sup>2</sup>. Diese mengenoptimierte Vorgehensweise muss jedoch keineswegs mit der gewinnoptimalen übereinstimmen.

Es wird sich herausstellen, dass eine am finanziellen Optimum ausgerichtete Einkaufsstrategie in diesem Modell nicht ausschließlich von dem Verhalten der Endkunden – und somit den Verteilungen der Bedarfsprognosen – sondern von je nach Fall unterschiedlichen Faktoren abhängt.

Neben allgemeinen Bedingungen für ein rationales Verhalten der Marktteilnehmer werden, im Falle einer sehr einfachen Preisfunktion auf dem Überschussmarkt, explizite Ausdrücke für rationales Marktverhalten aufgezeigt. Im allgemeinen Fall werden die Wettbewerbsformen Monopol (ein beteiligter Marktteilnehmer), Duopol (zwei Teilnehmer) und Oligopol (viele Teilnehmer) gesondert betrachtet.

---

<sup>1</sup>Dies bedeutet, dass jede Einheit des Gutes unmittelbar nach Lieferung entweder an den Endkunden geliefert wird oder verfällt.

<sup>2</sup>Also zu versuchen, die Differenz zwischen gekaufter und tatsächlich benötigter Menge zu minimieren.

# Kapitel 2

## Das Modell

Um ein besseres Verständnis zu gewährleisten, stellen wir in Abschnitt 2.1 erst das ökonomische Modell vor und skizzieren den schematischen Ablauf. Anschließend stellen wir in Abschnitt 2.2 das diesem zugrunde liegende mathematische Modell vor, bevor es dann in Kapitel 3 analysiert wird.

In dem hier vorgestellten Modell wird immer nur das Verhalten in einer Periode<sup>1</sup> untersucht.

### 2.1 Ökonomische Modellspezifikation

Neben den Modellparametern werden hier noch die im weiteren Verlauf verwendeten Begriffskürzel definiert.

- $G_Z$  zugrundeliegender Markt; Gütermarkt im Hintergrund
- $G_{\ddot{U}}$  Überschussmarkt; automatischer Handel der 'Fehlbeträge'
- zwei Handelsphasen
  1. Phase Eins: Einkauf auf  $G_Z$  zum Preis  $p_z$  pro Gütereinheit
  2. Phase Zwei: automatischer Handel auf  $G_{\ddot{U}}$  zum Preis  $p_{\ddot{u}}$  pro Gütereinheit
- $n$  Subjekte agieren auf  $G_Z$  und  $G_{\ddot{U}}$

---

<sup>1</sup>Im Folgenden sind die Begriffe Periode und Zeitpunkt äquivalent, da angenommen wird, dass die Zeitpunkte diskret sind.

- $\mu_i \in \mathbb{R}_+$  erwarteter Güterbedarf von Subjekt  $i$
- $(\mu_i + X_i) \in \mathbb{R}$  tatsächlicher Güterbedarf von Subjekt  $i$
- $v_i$  strategische Gütermenge von Subjekt  $i$ 
  - $\mu_i + v_i \in \mathbb{R}_+$  von Subjekt  $i$  auf  $G_Z$  gekaufte Gütermenge
  - $v = (v_1, \dots, v_n)$  Vektor aller strategischen Gütermengen
- $M := \sum_{i=1}^n [(\mu_i + X_i) - (\mu_i + v_i)] = \sum_{i=1}^n (X_i - v_i)$ , Gesamtbedarf auf  $G_{\check{U}}$
- $f$ , vom Marketmaker benutzte Preisfunktion zur Festlegung von  $p_{\check{u}} = f(M)$  auf  $G_{\check{U}}$
- $G_i(v) := [(\mu_i + v_i) - (\mu_i + X_i)]f(M) - (\mu_i + v_i)p_z = (v_i - X_i)f(M) - (\mu_i + v_i)p_z$ , Gewinnfunktion von Subjekt  $i$

Im weiteren setzen wir  $\mu_i = 0$  für alle  $i$ . Dies führt zu keinerlei Einschränkungen, da der erwartete Bedarf bei der Gewinnoptimierung keine Rolle spielt und Leerverkäufe über den erwarteten Bedarf hinaus zulässig sein sollen. Letzteres bedeutet insbesondere, dass externe Subjekte – also Subjekte  $i$  mit  $X_i = 0$  f.s. – am Überschussmarkt teilnehmen können, obwohl sie es nicht müssten.

Ob ein Subjekt als Erzeuger, Zwischenhändler oder unter Umständen selbst als Endkunde auftritt, spielt keine Rolle.

### 2.1.1 Schematischer Handelsablauf

1. Jedes Subjekt  $i$  ordert in der ersten Phase auf dem Markt  $G_Z$  eine Gütermenge  $\mu_i + v_i$  zum Preis  $p_z$ .
2. Jedes Subjekt erfährt seinen tatsächlichen Bedarf  $\mu_i + X_i$ .
3. Der Marketmaker setzt den Preis  $p_{\check{u}}$  gemäß  $f$  auf  $G_{\check{U}}$  fest.
  - Ist der Bedarf des gesamten Marktes nicht gedeckt ( $M > 0$ ), so stellt der Marketmaker die noch benötigte Menge auf  $G_{\check{U}}$  zu einem hohen Preis zur Verfügung.
  - Herrscht auf  $G_{\check{U}}$  ein Güterüberschuss ( $M < 0$ ), so wird  $p_{\check{u}}$  niedrig sein und der Marketmaker nimmt die überschüssige Menge auf.



4. Die Fehlmengen jedes Subjekts werden ausgeglichen.

- Alle Subjekte mit einem Güterüberschuss geben diesen an den Markt ab und werden dafür mit dem Preis  $p_{\bar{u}}$  pro Einheit entschädigt.
- Jeder Gütermangel eines Subjekts wird zum Preis  $p_{\bar{u}}$  pro Einheit ausgeglichen.

## 2.2 Das mathematische Modell

Im mathematischen Modell stellen sich die Modellparameter als eine überschaubare Menge von Einflussgrößen dar:

- $\mathfrak{X} := (X_1, \dots, X_n)$  ist eine  $\mathbb{R}^n$ -wertige Zufallsvariable mit

- $\sigma_i^2 := \text{Var}(X_i) < \infty$
- $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängig
- die  $X_i$  besitzen eine Dichte

- $v := (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

- $M = M(\mathfrak{X}, v) := \sum_{i=1}^n (X_i - v_i)$

- $p_z$  ist ein fester reeller Parameter

- $f = f(M)$  ist eine Funktion, die folgende Bedingungen erfüllt:

- $\exists \bar{M} \geq 0 : M \geq \bar{M} \Leftrightarrow f(M) \geq p_z$
- $f$  ist monoton steigend
- $f$  ist abschnittsweise stetig
- $f$  ist nicht negativ und beschränkt

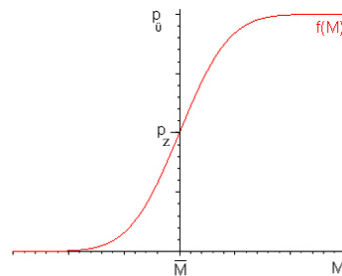


Abbildung 2.1: Zulässiges  $f$

- $G_i(v) = G_i(\mathfrak{X}, v) := (v_i - X_i)f(M) - v_i p_z$

## 2.3 Aufgabenstellung

Gesucht wird nun ein  $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ , so dass für alle  $i$  folgendes gilt:

$$\mathbb{E}[G_i(v^*)] \geq \mathbb{E}[G_i(v|v_j = v_j^* \quad \forall j \neq i)] \quad \forall v \quad (2.1)$$

Die ökonomische Bedeutung dieser Bedingung wird in Abschnitt 2.5.2 näher erläutert.

Die Bedingung (2.1) ist also genau dann erfüllt, wenn für alle  $i$  die Abbildung  $v_i \mapsto G_i(v_1^*, \dots, v_{i-1}^*, v_i, v_{i+1}^*, \dots, v_n^*)$  in  $v_i^*$  ihr *globales* Maximum annimmt.

Hinreichend für ein lokales Maximum dieser Abbildung sind die Bedingungen erster und zweiter Ordnung:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \frac{\partial \mathbb{E}[G_i(v^*)]}{\partial v_i^*} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbb{E}[G_i(v^*)]}{\partial v_i^{*2}} < 0.$$

Erfüllt ein  $v^*$  diese beiden Bedingungen, so muss noch geprüft werden, ob es sich für jedes  $i$  auch um ein globales Maximum handelt.

Existieren  $\bar{v}^*$  und  $\hat{v}^*$ , welche beide die Bedingung (2.1) erfüllen, jedoch auch  $\forall i : \mathbb{E}[G_i(\hat{v}^*)] \geq \mathbb{E}[G_i(\bar{v}^*)]$  gilt, so ist die Lösung  $\bar{v}^*$  für uns nicht interessant, da es dann eine Lösung  $\hat{v}^*$  gibt, bei der alle Marktteilnehmer einen höheren Gewinn erwarten und es somit keinen Grund gibt  $\bar{v}^*$  zu realisieren.

## 2.4 Vereinfachungen

Wir setzen o.B.d.A.  $\mathbb{E}[X_i] = 0$  für alle  $i$ . Denn angenommen  $\mathbb{E}[X_i] = \mu_i \neq 0$ , dann ist  $v_i - X_i$  genauso verteilt, wie  $v'_i - X'_i$  mit  $v'_i := v_i - \mu_i$ ,  $X'_i := X_i - \mu_i$  und es gilt  $\mathbb{E}[X'_i] = 0$ .

Weiterhin werden wir zu gegebener Zeit folgende Vereinfachungen verwenden:

- $f$  ist zweimal differenzierbar.
- Zweiwertige Funktionen als spezielle Klasse aller zulässigen Funktionen:

$$f(M) = \begin{cases} p_h & \text{wenn } M \geq 0, \\ p_n & \text{wenn } M < 0, \end{cases}$$

mit  $p_h > p_z > p_n$ .

- Funktionen  $f$  von der Form

$$f(M) = \frac{(p_h - p_n)}{2} (\operatorname{erf}(aM) + 1) + p_n, a \in \mathbb{R}_+, p_h > p_z > p_n.$$

Dabei ist  $\operatorname{erf}(\cdot)$  die Gauss'sche Fehlerfunktion.

- Die  $X_i$  sind alle normalverteilt.

## 2.5 Ökonomische Interpretation

Damit das Modell auch anwendbar ist, sind einige Annahmen über die Realität notwendig.

### 2.5.1 Grundlegende Annahmen

Um eine adäquate Handhabung des Modells zu gewährleisten, sind wie üblich einige grundlegende Annahmen über die reale Welt zu treffen, die in dieser Art und Weise in der Regel nicht anzutreffen sind.

Zum einen nehmen wir an, dass stets alle am Marktgeschehen Beteiligten über alle entscheidungsrelevanten Informationen verfügen (**vollständige Information**, [1]). Dies bedeutet insbesondere, dass jeder weiß, womit die anderen Marktteilnehmer rechnen (jeder kennt die relevanten Preise, die Preisfunktion und alle Gewinnfunktionen).

Zum anderen wollen wir die Interaktionen, verursacht durch die Handlungen der Marktteilnehmer, möglichst einfach beschreiben<sup>2</sup>. Dieses ermöglichen wir durch die Annahme, dass jeder Marktteilnehmer ohne Zeitverzögerung auf eine veränderte Situation reagieren kann (**unendlich hohe Reaktionsgeschwindigkeit**). Dies führt auch dazu, dass niemand kurzfristig Vorteile aus einer Handlung ziehen kann, die auf einer trägen Reaktion der restlichen Beteiligten beruht: es gibt keine Vorsprungsgewinne.

Weiterhin nehmen wir an, dass es den Marktteilnehmern nur auf den erwarteten Gewinn ankommt. Somit muss nur auf die Maximierung des jeweiligen erwarteten Gewinn geachtet werden und Unsicherheiten<sup>3</sup> (Varianzen) spielen keine Rolle (**Risikoneutralität**).

---

<sup>2</sup>Eine individuelle optimale Strategie wird auch von den Strategien der Anderen abhängen; diese muss daher auf Handlungsänderungen der Anderen reagieren.

<sup>3</sup>Somit ist ein erwarteter Gewinn unter hohem Risiko einem etwas kleineren erwarteten Gewinn ohne Risiko trotzdem vorzuziehen.

Letztendlich nennen wir das Marktsystem **abgeschlossen**, wenn ein Marktteilnehmer  $i$  ohne zufällige Bedarfsabweichung ( $X_i = 0$  f.s.) den Überschussmarkt  $G_{\bar{U}}$ , unabhängig von  $p_z$ , nicht in Anspruch nimmt; wenn also  $P(X_i \neq 0) > 0$  für  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  und  $X_n = 0$  f.s. und  $v^*$  eine Lösung für die  $n-1$  Subjekte ist, dann ist  $(v^*, 0)$  eine Lösung für die  $n$  Subjekte.

### 2.5.2 Aufgabe

Gesucht wird nun ein Strategievektor  $v$ , der die Bedingung (2.1) erfüllt.

Mit anderen Worten: es wird ein Zustand gesucht, in dem kein Marktteilnehmer seine Strategie  $v_i^*$  ändern wird (um einen höheren Gewinn zu erzielen), wenn alle anderen bei ihren Strategien bleiben (**Nashgleichgewicht**, [1])<sup>4</sup>.

Die unendlich hohe Reaktionsgeschwindigkeit gewährleistet, dass ein eindeutiges<sup>5</sup> Nashgleichgewicht auch sofort realisiert wird – alle Marktteilnehmer wählen von Anfang an ihre optimalen  $v_i^*$ .

### 2.5.3 Ökonomische Intuition

Auf den ersten Blick könnte man vermuten, dass eigentlich für (2.1) die Bedingung  $\mathbb{E}[p_{\bar{U}}] = \mathbb{E}[f(M)] = p_z$  ausreichend sein könnte.

Angenommen es gäbe ein Gleichgewicht auf dem Überschussmarkt  $G_{\bar{U}}$ , dann könnte man glauben, dass der erwartete Preis auf dem Überschussmarkt  $p_{\bar{U}}$  dem Preis  $p_z$  des zugrundeliegenden Marktes  $G_Z$  entspricht.

Denn im Falle  $\mathbb{E}[p_{\bar{U}}] > p_z$  wäre der Handel auf  $G_Z$  in Erwartung billiger und daher sollte es demnach mindestens ein Subjekt  $i$  geben, welches einen Anreiz besitzen würde, seine strategische Einkaufsmenge  $v_i$  auf  $G_Z$  zu erhöhen, da es diese Erhöhung in Erwartung noch zu einem höheren Preis auf  $G_{\bar{U}}$  verkaufen könnte. Somit könnte es kein Gleichgewicht mit  $\mathbb{E}[p_{\bar{U}}] > p_z$  geben.

Wenn jedoch  $\mathbb{E}[p_{\bar{U}}] < p_z$  gelten würde, dann müsste es ganz analog mindestens ein Subjekt  $i$  geben, welches einen Anreiz besitzen müsste, seine strategische Einkaufsmenge  $v_i$  auf  $G_Z$  zu senken, da es diese Minderung erwartungsgemäß zu einem niedrigeren Preis auf  $G_{\bar{U}}$  bekommen könnte.

<sup>4</sup>Da im Modell ein Nashgleichgewicht für jeden Zeitpunkt gesucht wird und diese unabhängig sind, ist ein solches sogar teilspielperfekt (siehe [1]).

<sup>5</sup>Existieren mehrere Nashgleichgewichte, so wird, nach Ausschluss leerer Drohungen (siehe [1]), eines dieser realisiert.

Wie in (3.1), sowie in den Abschnitten 3.2 und 3.3 zu sehen sein wird, kann im Gleichgewicht  $\mathbb{E}[p_{\tilde{u}}] = p_z$  gelten, muss es aber nicht. Dies hängt zumindest auch von der Art der jeweiligen Preisfunktion ab.

Weiterhin ist es nicht nur interessant zu wissen, wie sich alle Subjekte zusammen verhalten; uns interessiert auch insbesondere das individuelle Verhalten jedes Subjekts.

# Kapitel 3

## Resultate

Im Folgenden werden Teillösungen für allgemeine, als auch explizite Lösungen für bestimmte Funktionen  $f$  und Verteilungen von  $\mathfrak{X}$  präsentiert.

### 3.1 Allgemeiner Fall

Ist die Verteilung von  $\mathfrak{X}$  und die Funktion  $f$  bis auf die an sie gestellten Forderungen unbekannt, so lassen sich hier nur Bedingungen für eine Lösung von (2.1), jedoch keine expliziten Ergebnisse herleiten.

Die erste Ableitung von  $v_i \mapsto \mathbb{E}[G_i(v_1^*, \dots, v_{i-1}^*, v_i, v_{i+1}^*, \dots, v_n^*)]$  muss notwendigerweise für jedes  $i$  gleich Null sein. Ist  $f$  mindestens einmal differenzierbar, so muss für jedes  $i$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v_i} \mathbb{E}[G_i(v)] &= 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbb{E} \left[ (v_i - X_i) \frac{\partial}{\partial v_i} f(M) \right] + \mathbb{E}[f(M)] - p_z &= 0 \\ \Leftrightarrow & \mathbb{E} \left[ (v_i - X_i) \frac{\partial}{\partial M} f(M) \right] &= \mathbb{E}[f(M)] - p_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

erfüllt sein.

Für jedes endliche  $n$  gilt der

**Satz 3.1.1** *Erfüllt  $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  die Bedingung (2.1) für  $n$  und ist  $X_{n+1} = 0$  f.s., dann gilt:*

$$\mathbb{E}[f(M)] = p_z \Leftrightarrow \bar{v}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*, 0) \text{ erfüllt (2.1) für } n+1.$$

**Beweis**

Zur Erinnerung:  $M = \sum_{i=1}^n (X_i - v_i)$ .

$\Rightarrow$ :

$\mathbb{E}[f(M)] = p_z$ . Da  $\mathbb{E}[f(M - v_{n+1})]$  in  $v_{n+1}$  monoton ist, gilt für alle  $w \in \mathbb{R}$

$$G_{n+1}((v_1^*, \dots, v_n^*, w)) = w(\mathbb{E}[f(M - w)] - p_z) \leq 0 = G_{n+1}((v_1^*, \dots, v_n^*, 0)).$$

$\Leftarrow$ :

Angenommen  $\mathbb{E}[f(M)] \neq p_z$ . Da  $\mathbb{E}[f(M - v_{n+1})]$  affin linear in  $v_{n+1}$  ist, existiert ein  $w \in \mathbb{R}, w \neq 0$ , so dass

$$G_{n+1}((v_1^*, \dots, v_n^*, w)) = w(\mathbb{E}[f(M - w)] - p_z) > 0 = G_{n+1}((v_1^*, \dots, v_n^*, 0)).$$

Also erfüllt  $\bar{v}^*$  die Bedingung (2.1) nicht.

□

**Ökonomische Interpretation**

Wird  $v_i$  um eine infinitesimale Einheit erhöht, so musste diese zum Preis  $p_z$  auf  $G_Z$  gekauft werden, lässt sich aber zum erwarteten Preis  $\mathbb{E}[f(M)] = \mathbb{E}[p_{\bar{u}}]$  verkaufen; dieser erwartete marginale Gewinnzuwachs entspricht der rechten Seite von (3.1).

In Erwartung ist jedoch nun auch folgendes der Fall: wird  $v_i$  erhöht, so ist der Preis pro Einheit für den gesamten Überschuss niedriger; er sinkt für alle und insbesondere für Subjekt  $i$  um  $\left| \frac{\partial f(M)}{\partial v_i} \right|$ . Diese Abnahme entspricht der linken Seite von (3.1).

Für Subjekt  $i$  gibt es also nur genau dann keinen Anreiz seine Strategie  $v_i$  zu erhöhen, wenn die dadurch verursachte 'allgemeine' Gewinnabnahme dem erwarteten marginalen Gewinnzuwachs entspricht.

Satz 3.1.1 bedeutet, dass das Marktsystem genau dann abgeschlossen ist, wenn der erwartete Preis  $\mathbb{E}[f(M)]$  auf  $G_{\bar{U}}$  dem zugrundeliegenden Preis  $p_z$  auf  $G_Z$  entspricht.

### Notwendige Bedingungen

Da  $\lim_{v_i \rightarrow -\infty} \mathbb{E}[G_i(v)] = \lim_{v_i \rightarrow -\infty} \mathbb{E}[(v_i - X_i)f(M) - v_i p_z] = -\infty = \lim_{v_i \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[G_i(v)]$  wegen  $p_n < p_z < p_h$ , und weil  $\mathbb{E}[G_i(0)]$  stets endlich ist, gibt es somit für jedes  $v = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$  mindestens ein  $\mathbb{E}[G_i]$  maximierendes  $v_i$ .

Notwendige Bedingungen<sup>1</sup> für das gesuchte  $v^*$  sind somit:

$$\mathbb{E}[(v_i - X_i)f'(M)] = \mathbb{E}[f(M)] - p_z \quad (3.2)$$

$$\mathbb{E}[(v_i - X_i)f'(M)] = \mathbb{E}[(v_j - X_j)f'(M)] \quad \forall i, j. \quad (3.3)$$

Wie in Abschnitt 3.3 noch besser zu sehen sein wird, ist es nicht notwendig, dass, wie in Abschnitt 2.5.3 vermutet,  $\mathbb{E}[f(M)] = p_z$  gelten muss.

Da sich ohne weitere Annahmen über die Verteilung von  $\mathfrak{X}$  bzw. die Funktion  $f$  kaum zusätzliche Erkenntnisse finden lassen werden, beschränken wir uns nun auf bestimmte Fallklassen.

#### 3.1.1 Homogenes $\mathfrak{X}$

Angenommen  $n$  ist groß, und es gibt kein  $X_i$ , welches maßgeblich zu  $M$  beiträgt<sup>2</sup>; dann lässt sich  $f(M) = f(M - X_i + X_i)$  gut durch die ersten beiden Taylorglieder in der Entwicklung um  $M_i := M - X_i$  approximieren.

Wenn (3.1) erfüllt ist, gilt somit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(v_i - X_i)f'(M_i + X_i)] = \mathbb{E}[f(M_i + X_i)] - p_z \\ \Rightarrow & v_i \mathbb{E}[f'(M_i)] + v_i \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[f''(M_i)] - \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[f'(M_i)] - \sigma_i^2 \mathbb{E}[f''(M_i)] \\ & + o(v_i \sigma_i^2 - \mathbb{E}[X_i^3]) \\ & = \mathbb{E}[f(M_i)] + \mathbb{E}[X_i] \mathbb{E}[f'(M_i)] + \frac{\sigma_i^2}{2} \mathbb{E}[f''(M_i)] + o(\mathbb{E}[X_i^3]) - p_z \\ \Leftrightarrow & v_i \mathbb{E}[f'(M_i)] - \frac{3\sigma_i^2}{2} \mathbb{E}[f''(M_i)] + o(v_i \sigma_i^2 - \mathbb{E}[X_i^3]) = \mathbb{E}[f(M_i)] - p_z \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass zur Auffindung eines optimalen  $v_i^*$  zwar Kenntnis über die Verteilung von  $\sum_{j=1, j \neq i}^n X_j$  von Bedeutung ist, nicht jedoch die Verteilung des  $X_i$  selbst; von diesem ist lediglich die Varianz ausschlaggebend.

<sup>1</sup>diese sind lediglich die Zusammenfassung der Bedingungen (3.1) für alle  $i$

<sup>2</sup>in dem Sinne, dass sich  $M$  nur geringfügig ändert, wenn  $X_i$  auf Null gesetzt wird



## 3.2 Zweiwertiges $f$

Im Folgenden wenden wir uns einem speziellen  $f$  zu: Funktionen, welche nur zwei Werte annehmen können – einen hohen Wert  $p_h$  oder einen niedrigen Wert  $p_n$ :

$$f(M) := \begin{cases} p_h > p_z & \text{wenn } M \geq 0, \\ p_n < p_z & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Diese erfüllt somit die in Abschnitt 2.2 an  $f$  gestellten Forderungen. Diese Funktion wird auch in Abschnitt 3.3.1 sehr nützlich sein.

Da jetzt Ableitung und Erwartungswert nicht vertauscht werden können (Bedingung (3.1) ist somit nicht direkt anwendbar), muss der Erwartungswert abgeleitet werden.

### 3.2.1 Eindimensionaler Fall

Im Falle  $n = 1$  ist  $G$  von der einfachen Gestalt

$$\mathbb{E}[G(v)] = \mathbb{E}[(v - X)f(X - v)] - vp_z.$$

**Lemma 3.2.1** *Ist  $X = 0$  f.s. und  $f$  von der Form (3.4), dann ist  $v^* = 0$ .*

**Beweis** Wegen  $X = 0$  f.s. ist  $M = -v$  f.s. und somit  $\mathbb{E}[G(v)] = v(f(-v) - p_z)$ . Daher ist  $\mathbb{E}[G(v)] < 0 \Leftrightarrow v \neq 0$  und es gilt  $\mathbb{E}[G(0)] = 0$ .

□

O.B.d.A. sei nun  $P(X \neq 0) > 0$ .

**Satz 3.2.2** *Wenn  $f$  wie in (3.4) ist und  $X$  eine Dichte besitzt, dann erfüllt ein  $v^*$  die Bedingung (2.1) genau dann, wenn*

$$P(M(\mathfrak{X}, v^*) \geq 0) = \frac{p_z - p_n}{p_h - p_n}$$

*gilt.*

**Beweis**

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G(v)] &= v\mathbb{E}[f(X-v)] - \mathbb{E}[Xf(X-v)] - vp_z \\
&= v[p_h P(X \geq v) + p_n(1 - P(X \geq v)) - p_z] - \mathbb{E}[Xf(X-v)] \\
&= v[(p_h - p_n)P(X \geq v) + p_n - p_z] - (p_n\mathbb{E}[X1_{(X < v)}] + p_h\mathbb{E}[X1_{(X \geq v)}])
\end{aligned}$$

Die erste Ableitung muss gleich Null sein:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}[G(v)]}{\partial v} &= p_n - p_z + (p_h - p_n) \left[ P(X \geq v) + v \frac{\partial P(X \geq v)}{\partial v} \right] \\
&\quad - \left( p_n \frac{\partial \mathbb{E}[X1_{(X < v)}]}{\partial v} + p_h \frac{\partial \mathbb{E}[X1_{(X \geq v)}]}{\partial v} \right) \\
&= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{p_z - p_n}{p_h - p_n} &= P(X \geq v) + vP'(X \geq v) - \frac{p_n \mathbb{E}'[X1_{(X < v)}] + p_h \mathbb{E}'[X1_{(X \geq v)}]}{p_h - p_n}
\end{aligned}$$

Zum einen ist  $\mathbb{E}'[X1_{(X < v)}] = -\mathbb{E}'[X1_{(X \geq v)}]$  wegen  $\frac{\partial \mathbb{E}[X]}{\partial v} = 0$ , zum anderen gilt  $vP'(X \geq v) = \mathbb{E}'[X1_{(X \geq v)}]$ . Daher ist die Ableitung genau dann Null, wenn

$$\begin{aligned}
\frac{p_z - p_n}{p_h - p_n} &= P(M \geq 0) + \mathbb{E}'[X1_{(X \geq v)}] - \frac{-p_n \mathbb{E}'[X1_{(X \geq v)}] + p_h \mathbb{E}'[X1_{(X \geq v)}]}{p_h - p_n} \\
&= P(M \geq 0). \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Da  $P(M \geq 0)$  in  $v$  monoton fallend und  $p_n < p_z$  ist, ist somit die zweite Ableitung  $\frac{\partial^2}{\partial v^2} \mathbb{E}[G(v)] = \frac{\partial}{\partial v} P(M \geq 0) + (p_n - p_z)$  kleiner Null, und da  $\lim_{v \rightarrow \pm\infty} \mathbb{E}[G(v)] = -\infty$ , ist jedes  $v$ , welches (3.5) erfüllt, ein globales Maximum. □

**Korollar 3.2.3** *Ist  $v \mapsto P(M(\mathfrak{X}, v) \geq 0)$  streng monoton, so ist  $v^*$  eindeutig.*

**Korollar 3.2.4 (Skalierung)** *Die absoluten Werte  $p_n, p_h$  sind nicht relevant. Das gesuchte  $v^*$  ist nur von der Verteilung von  $X$  und den Differenzen  $p_h - p_z$  und  $p_z - p_n$  abhängig.*

**Ökonomische Interpretation**

Aus den Ergebnissen für eine Preisfunktion gemäß (3.4) ergeben sich folgende ökonomischen Konsequenzen:

1. Aus Lemma 3.2.1 folgt, dass wenn nur ein Unternehmen am Marktsystem beteiligt ist, der Markt  $G_{\bar{v}}$  nur dann genutzt wird, wenn  $P(X = 0) > 0$  ist – im Falle von  $X = 0$  f.s. ist  $v = 0$ .
2. Nach Satz 3.2.2 ist der erwartete Preis auf dem Überschussmarkt, also  $\mathbb{E}[f(M)] = P(M \geq 0)(p_h - p_n) + p_n$  gleich  $p_z$ .
3. Daher handelt es sich wegen Satz 3.1.1 um ein abgeschlossenes Marktsystem.
4. Absolute Preise spielen keine Rolle – entscheidend sind die Preisdifferenzen.

### 3.2.2 Zweidimensionaler Fall

Im Folgenden besitzen die  $X_i$  eine Dichte  $g_i$ . Dann lassen sich auch ähnlich wie im eindimensionalen Fall detailliertere Bedingungen für  $v^*$  herleiten.

**Lemma 3.2.5 (L1)** *Wenn  $g$  abschnittsweise stetig und stetig in  $a + bv$  ist, dann gilt für  $c \in \mathbb{R}$*

$$\frac{\partial}{\partial v} \int_c^{a+bv} g(x) dx = bg(a + bv).$$

**Beweis** Die Behauptung folgt unmittelbar mittels der Kettenregel aus dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung.

□

**Satz 3.2.6** *Seien die Verteilungen von  $X_1$  und  $X_2$  beliebig mit Dichte  $g_1$  bzw.  $g_2$  und  $f$  gemäß (3.4).*

*Die Bedingung (2.1) kann von  $v^* = (v_1^*, v_2^*)$  nur dann erfüllt werden, wenn*

$$P(X_1 + X_2 \geq v_1^* + v_2^*) = \frac{p_z - p_n}{p_h - p_n} \quad (3.6)$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - v_1^*) g_1(x) g_2(v_1^* + v_2^* - x) dx \quad (3.7)$$

*gilt.*

Der Satz trifft keine Aussage über Existenz und Anzahl von Lösungen.

**Beweis**

1. Zuerst werden die Bedingungen für die Maxima hergeleitet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G_1(v)] &= \mathbb{E}[v_1 f(M)] - \mathbb{E}[X_1 f(M)] - v_1 p_z \\
&= v_1 [p_h P(M \geq 0) + p_n (1 - P(M \geq 0))] \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} x g_1(x) \left[ p_h P(X_2 \geq v_1 + v_2 - x) \right. \\
&\quad \left. + p_n (1 - P(X_2 \geq v_1 + v_2 - x)) \right] dx - v_1 p_z \\
&= (p_h - p_n) \left[ - \int_{-\infty}^{\infty} x P(X_2 \geq v_1 + v_2 - x) g_1(x) dx \right] \\
&\quad + (p_h - p_n) v_1 P(M \geq 0) - v_1 (p_z - p_n)
\end{aligned}$$

Notwendig für ein Maximum in  $\mathbb{E}[G_1(v)]$  ist eine Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbb{E}[G_1(v_1)]}{\partial v_1} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{p_z - p_n}{p_h - p_n} &= \frac{\partial v_1 P(M \geq 0)}{\partial v_1} - \frac{\partial}{\partial v_1} \int_{-\infty}^{\infty} x P(X_2 \geq v_1 + v_2 - x) g_1(x) dx \\
&= P(M \geq 0) + v_1 \frac{\partial}{\partial v_1} P(M \geq 0) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} x g_1(x) g_2(v_1 + v_2 - x) dx \\
&\stackrel{3.2.5}{=} P(M \geq 0) + \int_{-\infty}^{\infty} (x - v_1) g_1(x) g_2(v_1 + v_2 - x) dx \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Analog muss für ein Maximum von  $\mathbb{E}[G_2(v)]$  gleichermaßen

$$\frac{p_z - p_n}{p_h - p_n} = P(M \geq 0) + \int_{-\infty}^{\infty} (x - v_2) g_2(x) g_1(v_1 + v_2 - x) dx \quad (3.9)$$

gelten.

2. Wenn  $\int_{-\infty}^{\infty} (x-v_1)g_1(x)g_2(v_1+v_2-x)dx = 0$  ist, dann folgen die Bedingungen (3.6) und (3.7) aus (3.8).

Gleichsetzen von (3.8) und (3.9) führt auf

$$A := \int_{-\infty}^{\infty} (x-v_1)g_1(x)g_2(v_1+v_2-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-v_2)g_2(x)g_1(v_1+v_2-x)dx =: B.$$

Nun ist jedoch

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-v_1)g_1(x)g_2(v_1+v_2-x)dx \\ &= - \int_{-\infty}^{-\infty} (-y-v_1)g_1(-y)g_2(v_1+v_2+y)dy \\ &= - \int_{\infty}^{\infty} (y+v_1)g_1(-y)g_2(v_1+v_2+y)dy \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} (x-v_2)g_2(x)g_1(v_1+v_2-x)dx \\ &= -B \end{aligned}$$

Die Substitutionsregel  $\int_a^b f(h(x))h'(x)dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(z)dz$  wurde im zweiten Schritt mit  $h(x) = -x$  angewendet und in der vorletzten Zeile wurde  $x$  durch  $y + v_1 + v_2$  ersetzt.

Da nun  $B = A = -B$  gilt, muss  $A = B = 0$  sein, woraus (3.7) folgt und somit auch (3.6) gilt.

□

Die Anzahl der Lösungen von (3.7), wenn Lösungen existieren, ist nicht bekannt und somit auch nicht die von (3.6).

**Korollar 3.2.7 (Skalierung)** *Die absoluten Werte  $p_n, p_h$  sind nicht relevant. Das gesuchte  $v^*$  ist nur von den Verteilungen der  $X_i$  und den Differenzen  $p_h - p_z$  und  $p_z - p_n$  abhängig.*

### Ökonomische Folgerung

Wenn es eine Lösung gibt, dann folgt aus Satz 3.2.6, dass  $\mathbb{E}[p_{\bar{i}}] = p_z$  ist und damit gilt die Marktabgeschlossenheit auch für den Fall des Duopols. Wegen Korollar 3.2.7 sind nur die Preisdifferenzen ausschlaggebend.

### 3.2.3 Höherdimensionaler Fall

**Satz 3.2.8** *Sei  $2 < n < \infty$  und die Verteilungen der  $X_i$  beliebig mit Dichte  $g_i$ . Sei  $g_{-i}$  die Dichte von  $\sum_{j=1, j \neq i}^n X_j$ , sei  $V := \sum_{j=1}^n v_j$  und  $f(M)$  wie in (3.4). Die Bedingung (2.1) kann nur dann erfüllt sein, wenn  $v^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$  den folgenden Bedingungen genügt:*

$$\begin{aligned} \frac{p_z - p_n}{p_h - p_n} &= P(M \geq 0) - \int_{-\infty}^{\infty} (x - v_i^*) g_i(x) g_{-i}(V^* - x) dx & \forall i \\ 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - v_i^*) g_i(x) g_{-i}(V^* - x) - (x - v_j^*) g_j(x) g_{-j}(V^* - x) dx & \forall i, j \end{aligned}$$

Dies sind die Bedingungen dafür, dass die Ableitungen der erwarteten Gewinne gleich Null sind (analog zu Satz 3.2.6).

**Korollar 3.2.9 (Skalierung)** *Die absoluten Werte  $p_n, p_h$  sind nicht relevant. Das gesuchte  $v^*$  ist nur von den einzelnen Verteilungen der  $X_i$  und den Differenzen  $p_h - p_z$  und  $p_z - p_n$  abhängig.*

Ob hier mit diesem  $v^*$  auch  $\mathbb{E}[f(M)] = p_z$  gilt und der Markt daher abgeschlossen wäre, ist unklar, da sich die notwendigen Bedingungen erster Ordnung nicht mehr einfach auflösen lassen.

Wegen der Zweiwertigkeit der Preisfunktion sind auch hier nur die Preisdifferenzen von Bedeutung.

## 3.3 Normalverteilung mit Gauss'schem $f$

In diesem Abschnitt seien die  $X_i$  normalverteilt mit Varianz  $\sigma_i^2$ ; also

$$X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2) \forall i, \quad M \sim \mathcal{N}\left(-\sum_{i=1}^n v_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen seien

$$V_i := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n v_k \text{ und } S_i^2 := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \sigma_k^2 \text{ bzw. } V := \sum_{k=1}^n v_k \text{ und } S^2 := \sum_{k=1}^n \sigma_k^2.$$

Somit ist  $\mathbb{E}[M] = -V$  und  $\text{Var}(M) = S^2$ , also

$$M \sim \mathcal{N}(-V, S^2).$$

In diesem Fall lassen sich auch mit einer allgemeineren Funktion  $f$  Ergebnisse finden. Sei  $f$  nun die Funktion gegeben durch

$$f(M) := \frac{(p_h - p_n)}{2} (\text{erf}(aM) + 1) + p_n. \quad (3.10)$$

Dabei ist  $\text{erf}(aM) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{aM} e^{-t^2} dt$  die Gauss'sche Fehlerfunktion und  $a > 0$  ein Parameter für deren Steigung.

Die folgenden Abbildungen zeigen  $f$  mit  $p_h = 9$ ,  $p_n = 1$  und unterschiedlichen Werten für  $a$ :

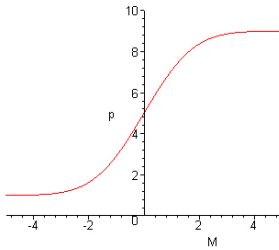


Abbildung 3.1:  $a = \frac{1}{2}$

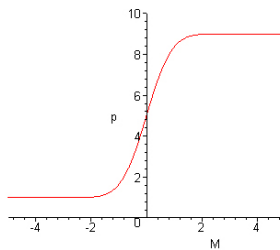


Abbildung 3.2:  $a = 1$

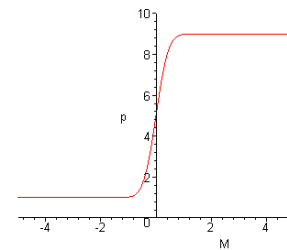


Abbildung 3.3:  $a = 2$

Offensichtlich erfüllt dieses  $f$  die in Abschnitt 2.2 an sie gestellten Bedingungen und ist zusätzlich unendlich oft differenzierbar. Daher sind die Bedingungen (3.2) und (3.3) anwendbar.

Nach Lemma 3.2.5 ist

$$\frac{\partial}{\partial M} f(M) = \frac{a(p_h - p_n)}{\sqrt{\pi}} e^{-(aM)^2} \text{ und } \frac{\partial^2}{\partial M^2} f(M) = \frac{-2a^3(p_h - p_n)M}{\sqrt{\pi}} e^{-(aM)^2}.$$

Daher schreibt sich (3.3) als

$$\begin{aligned}
\forall i, j : & \quad \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (v_i - x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(p_h - p_n)}{\sqrt{\pi}} e^{-(a(x+y-V))^2} \frac{e^{-\frac{y^2}{2S_i^2}}}{S_i \sqrt{2\pi}} dy dx \\
& = \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (v_j - x) e^{-\frac{x^2}{2\sigma_j^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(p_h - p_n)}{\sqrt{\pi}} e^{-(a(x+y-V))^2} \frac{e^{-\frac{y^2}{2S_j^2}}}{S_j \sqrt{2\pi}} dy dx \\
& \Leftrightarrow \frac{(p_h - p_n)(v_i + 2a^2 v_i S_i^2 + 2a^2 v_i \sigma_i^2 - 2a^2 \sigma_i^2 V) a e^{-\frac{V^2 a^2}{1+2a^2 S_i^2 + 2a^2 \sigma_i^2}}}{(1 + 2a^2 S_i^2 + 2a^2 \sigma_i^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} \\
& = \frac{(p_h - p_n)(v_j + 2a^2 v_j S_j^2 + 2a^2 v_j \sigma_j^2 - 2a^2 \sigma_j^2 V) a e^{-\frac{V^2 a^2}{1+2a^2 S_j^2 + 2a^2 \sigma_j^2}}}{(1 + 2a^2 S_j^2 + 2a^2 \sigma_j^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Da per Definition  $2a^2 S_k^2 + 2a^2 \sigma_k^2 = 2a^2 S^2$  für alle  $k$  ist, können wir diese Bedingung auch zu

$$\begin{aligned}
\forall i, j : \quad v_i + 2a^2 v_i S^2 - 2a^2 \sigma_i^2 (V_j + v_j) & = v_j + 2a^2 v_j S^2 - 2a^2 \sigma_j^2 (V_j + v_j) \\
\Leftrightarrow \forall i, j : \quad \frac{v_i + 2a^2 v_i S^2 - 2a^2 V_j (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} & = v_j \tag{3.11}
\end{aligned}$$

umformen.

**Satz 3.3.1** *Sind alle  $X_i$  normalverteilt und  $f$  von der Form (3.10), so kann die Bedingung (2.1) nur dann erfüllt sein, wenn  $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  den Forderungen*

$$v_j^* = \frac{2na^2 \sigma_j^2 + 1}{2na^2 \sigma_1^2 + 1} v_1^* \quad , j = 2, \dots, n$$

genügt.

### Beweis

Es ist zu zeigen, dass mit den obigen  $v_j$  die Gleichung (3.11) eindeutig erfüllt ist; also

$$\frac{v_i + 2a^2 v_i S^2 - 2a^2 V_j (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} = \frac{2na^2 \sigma_j^2 + 1}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} v_i$$

gilt:



$$\begin{aligned}
& \frac{v_i + 2a^2 v_i S^2 - 2a^2 V_j (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \\
&= \frac{v_i + 2a^2 v_i S^2}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} - \frac{\frac{2a^2 v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n 2na^2 \sigma_k^2 + 1 \right) (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \\
&= \frac{(v_i + 2a^2 v_i S^2)(2na^2 \sigma_i^2 + 1) - 2a^2 v_i (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)(2na^2 S^2 + n - 1)}{(1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 [\sigma_i^2 - \sigma_j^2])(2na^2 \sigma_i^2 + 1)} \\
&= \frac{v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} \left( \frac{(1 + 2a^2 S^2)(2na^2 \sigma_i^2 + 1) - 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)(2na^2 S^2 + n - 1)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \right) \\
&= \frac{v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} \left( \frac{2na^2 \sigma_i^2 + 1 + 4na^4 S^2 \sigma_i^2 + 2a^2 S^2}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \right) \\
&\quad - \frac{v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} \left( \frac{(\sigma_i^2 - \sigma_j^2)(4na^4 S^2 - 4na^4 \sigma_j^2 + 2na^2 - 2a^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \right) \\
&= \frac{v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} \left( \frac{(1 + 2a^2 S^2)(1 + 2na^2 \sigma_j^2) + (4na^4 \sigma_j^2 + 2a^2)(\sigma_i^2 - \sigma_j^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \right) \\
&= \frac{v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} \left( \frac{(1 + 2a^2 S^2)(1 + 2na^2 \sigma_j^2) + (1 + 2na^2 \sigma_j^2)2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)}{1 + 2a^2 S^2 + 2a^2 (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)} \right) \\
&= \frac{2na^2 \sigma_j^2 + 1}{2na^2 \sigma_i^2 + 1} v_i
\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Form des Gleichungssystems (3.11). Denn es gilt ein lineares Gleichungssystem mit  $n$  Unbekannten und  $n - 1$  linear unabhängigen Gleichungen zu lösen<sup>3</sup>.

Daher sind die Verhältnisse aller  $v_j^*$  zu  $v_i^*$  *eindeutig* bestimmt.

□

Aus Satz 3.3.1 folgen noch einige interessante Konsequenzen:

**Korollar 3.3.2 (Homogenität der  $v_i$ )**

1. Alle  $v_i$  besitzen dasselbe Vorzeichen.
2.  $\frac{v_j}{2na^2 \sigma_j^2 + 1} = \frac{v_i}{2na^2 \sigma_i^2 + 1}$ . Entsprechend normiert sind alle  $v_i$  gleich.

---

<sup>3</sup>Sollte es ein  $\sigma_i = \sigma_j$  für  $i \neq j$  geben, so muss  $v_i^* = v_j^*$  sein. Somit gäbe es nur noch  $n - 1$  Unbekannte und  $n - 2$  linear unabhängige Gleichungen.

3. Entweder sind alle  $v_i^* = 0$  oder keines.

Ähnlich zu Satz 3.1.1 ist das

**Korollar 3.3.3** Für festes  $a$  gilt

$$v^* = \vec{0} \Leftrightarrow \mathbb{E}[f(M)] = p_z = \frac{p_h + p_n}{2}.$$

Dies gilt auch im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ .

**Beweis**

Für endliches  $n$  und festes  $a$  gilt:

ist  $v^* = \vec{0}$ , so ist die linke Seite von (3.2) Null (und nur dann) und somit  $\mathbb{E}[f(M)] = p_z$ , was aber wiederum nur für  $p_z = \frac{p_h + p_n}{2}$  erfüllt ist.

Für  $n \rightarrow \infty$  ist die linke Seite von (3.2) stets gleich Null und daher  $\mathbb{E}[f(M)] = p_z$ .

Die rechte Seite von (3.2) ist Null, wenn

$$\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}S^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{erf}(ax)(p_h - p_n) + p_h + p_n) e^{-\frac{(2a^2(x\sigma_1^2 + v_1 S^2) + v_1)^2}{8a^4\sigma_1^2 S^2}} dx = p_z.$$

Für die obige (streng monotone) Funktion gibt es jedoch für jedes  $p_z \in (p_n, p_h)$  genau ein  $v_1$ , dasswelches diese Bedingung erfüllt. Für  $p_z = \frac{p_h + p_n}{2}$  ist dies  $v_1 = 0$  und somit ist dann  $v^* = \vec{0}$ .

□

## Ökonomische Interpretation

1. Aus der Homogenität der  $v_i^*$  (dem homogenen Verhalten der Marktteilnehmer) folgt, dass kein Marktteilnehmer gegen den Trend agiert. Entweder kaufen alle Marktteilnehmer mehr als eigentlich benötigt oder alle kaufen etwas weniger als der eigentlich geschätzte Bedarf vorgibt.
2. Das Marktsystem ist für endliche viele Teilnehmer nicht abgeschlossen, da für  $X_i = 0$  f.s.  $v_i^*$  nicht Null sein muss.
3. Es ist auch bei vollständiger Konkurrenz ( $n = \infty$ ) nicht abgeschlossen, da  $v_i^* = 0$  für  $X_i = 0$  f.s. nur dann eine Lösung ist, wenn  $p_z$  genau zwischen  $p_h$  und  $p_n$  liegt.

Das Marktsystem ist nicht abgeschlossen, weil im Falle  $p_z < \frac{p_h+p_n}{2}$  für  $M < 0$  der Preis  $p_{\ddot{u}}$  über  $p_z$  liegen kann (und wenn  $p_z > \frac{p_h+p_n}{2}$  ist, dann kann  $p_{\ddot{u}}$  für  $M > 0$  unter  $p_z$  liegen).

Generelle Abgeschlossenheit des Marktsystems lässt sich dann erreichen, wenn jeder Marktteilnehmer mit  $\sigma_i^2 = 0$  freiwillig  $v_i^* = 0$  wählt<sup>4</sup>. Denn dann wird kein Marktteilnehmer, der am Überschussmarkt nicht teilnehmen muss, sich an diesem Marktsystem beteiligen. Dies ist am einfachsten durch die Wahl von  $a = \infty$  zu bewerkstelligen, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

### 3.3.1 Zweiwertiges $f$

Wir betrachten nun (3.10) im Grenzwert  $a \rightarrow \infty$ . Dadurch entsteht eine zweiwertige Preisfunktion im Sinne von (3.4), welche den Modellanforderungen genügt (siehe rechtsstehende Abbildung). Mit Hilfe dieser Funktion werden sich konkrete, die Bedingung (2.1) erfüllende,  $v_i^*$  angeben lassen.

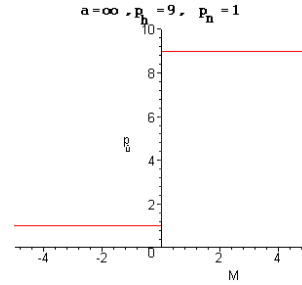


Abbildung 3.4: Zweiwertiges  $f$

Die Resultate lassen sich nun aus dem vorhergehenden Abschnitt ableiten.

Der wichtigste Satz dieser Arbeit ist der folgende

**Satz 3.3.4** *Seien alle  $X_i$  normalverteilt und daher  $M \sim \mathcal{N}(-V, S^2)$ , sowie  $f(M)$  eine zweiwertige Funktion nach (3.10) und  $\Phi^{-1}$  die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.*

*Die Bedingung (2.1) ist genau dann erfüllt, wenn  $v^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  gemäß*

$$v_i^* = \frac{\sigma_i^2}{S} \Phi^{-1} \left( \frac{p_h - p_z}{p_h - p_n} \right)$$

*gewählt ist.*

#### Beweis

1. Aus Satz 3.3.1 folgt unmittelbar, dass

$$v_j^* = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2na^2\sigma_j^2 + 1}{2na^2\sigma_i^2 + 1} v_i^* = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2} v_i^* \text{ und daher } V_i^* = \sum_{j=1, j \neq i}^n v_j^* = \frac{v_i^*}{\sigma_i^2} S_i^2.$$

<sup>4</sup>Es sei denn die Parameterkonstellation ergäbe  $v_i^* = 0$  für alle  $i$ .

2. Nun schreibt sich Bedingung (3.2) als

$$\begin{aligned}
& \lim_{a \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(v_i^* - X)f'(M)] = \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] - p_z \\
\Leftrightarrow & \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(p_h - p_n)(v_i^* + 2a^2 v_i^* S_i^2 - 2a^2 \sigma_i^2 V_i^*) a e^{-\frac{V_i^{*2} a^2}{1+2a^2 S^2}}}{(1 + 2a^2 S^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}} = \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] - p_z \\
\Leftrightarrow & \frac{(p_h - p_n)(v_i^* S_i^2 - \sigma_i^2 V_i^*) e^{-\frac{V_i^{*2}}{2S^2}}}{\sqrt{2\pi} S^3} = \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] - p_z \\
\Leftrightarrow & \frac{(p_h - p_n)(v_i^* S_i^2 - \sigma_i^2 \frac{v_i^*}{\sigma_i^2} S_i^2) e^{-\frac{V_i^{*2}}{2S^2}}}{\sqrt{2\pi} S^3} = \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] - p_z
\end{aligned}$$

Also gilt in diesem Fall  $\mathbb{E}[f(M)] = p_z$ .

3.  $V^* = v_i^* \frac{S^2}{\sigma_i^2}$ . Der Vektor  $v^*$  ist eindeutig, weil die einzige noch freie Variable  $v_i$  in (3.2) nur eine Lösung hat:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[f(M)] = p_z \\
\Leftrightarrow & P(M \geq 0)p_h + [1 - P(M \geq 0)]p_n = p_z \\
\Leftrightarrow & P(M \geq 0)(p_h - p_n) = (p_z - p_n) \\
\Leftrightarrow & P(X \geq V^*) = \frac{p_z - p_n}{p_h - p_n}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich nun mittels  $\Phi^{-1}$  sehr leicht nach  $v_i^*$  auflösen:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[f(M)] = p_z \\
\Leftrightarrow & P\left(X < v_i^* \frac{S^2}{\sigma_i^2}\right) = \frac{p_h - p_z}{p_h - p_n} \\
\Leftrightarrow & v_i^* \frac{S}{\sigma_i^2} = \Phi^{-1}\left(\frac{p_h - p_z}{p_h - p_n}\right) \\
\Leftrightarrow & v_i^* = \frac{\sigma_i^2}{S} \Phi^{-1}\left(\frac{p_h - p_z}{p_h - p_n}\right)
\end{aligned}$$

□

**Korollar 3.3.5 (Summation über  $i$ )** Mit  $\lambda := \Phi^{-1}([p_h - p_z]/[p_h - p_n])$  ergibt die Summation der  $v_i^*$ , dass  $V^* = \lambda S$ .

Daher besitzt  $V^*$  die Eigenschaften  $V^* = \lambda \sqrt{\text{Var}(M)}$  und somit

$$M = X - \lambda \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

**Korollar 3.3.6 (Skalierung)** *Die absoluten Werte  $p_n, p_h$  sind nicht relevant. Das gesuchte  $v^*$  ist nur von den einzelnen Varianzen und den Differenzen  $p_h - p_z$  und  $p_z - p_n$  abhängig.*

*O.B.d.A. lässt sich  $p_n$  auf Null setzen, wenn  $p_z$  und  $p_h$  entsprechend um  $p_n$  gesenkt werden.*

**Korollar 3.3.7 (Homogenität der  $v_i^*$ )**

1. *Alle  $v_i^*$  besitzen dasselbe Vorzeichen.*
2. *Normiert durch die eigene Varianz  $\sigma_i^2$  sind alle  $v_i^*$  gleich.*
3.  *$V^* \geq 0 \Leftrightarrow p_z \leq \frac{p_h - p_n}{2}$ , wobei  $V^*$  nur dann Null ist, wenn  $p_z$  genau zwischen  $p_h$  und  $p_n$  liegt.*

Bis jetzt wurde  $V^*$  nur als Lösung einer gegebenen Parameterkonstellation behandelt. Sind nun (nicht notwendigerweise verschiedene) Parameterkonstellationen zu Zeitpunkten  $t$  gegeben, werden die  $V_t^*$  (also  $V^*$  zum Zeitpunkt  $t$ ) jedesmal unabhängig neu berechnet. Daher lassen sich diese als Prozess  $(V_t^*)_{t \geq 1}$  auffassen. Der Proportionalitätsfaktor  $\lambda$  zwischen Mittelwert und Streuung des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses  $(M_t)_{t \geq 1}$  wird zu jedem Zeitpunkt durch die Parameter  $p_h, p_z$  und  $p_n$  bestimmt.

### Ökonomische Interpretation

1. Aus der Homogenität der  $v_i^*$  folgt, dass kein Marktteilnehmer gegen den Trend agiert. Entweder kaufen alle Marktteilnehmer mehr als eigentlich benötigt oder alle kaufen etwas weniger als den eigentlichen geschätzten Bedarf.
2. Entsprechend normiert sind alle Strategien gleich:  $\frac{v_i^*}{\sigma_i^2} = \frac{v_j^*}{\sigma_j^2}$ .
3. Es kommt auch wieder nur auf die Preisdifferenzen an.
4. Da  $\mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] = p_z$  ist das Marktsystem abgeschlossen.  
Dies gilt auch für vollständige Konkurrenz.

### 3.3.2 Überleitung

Im Falle von normalverteilten und unabhängigen Prognosefehlern und einer zweiwertigen Preisfunktion lässt sich nun durch Satz 3.3.4 genau beschreiben, wie jeder Marktteilnehmer in jeder Entscheidungsperiode seine gewinnoptimale Menge festlegt.

Ein außenstehender Beobachter kann in jeder Periode  $t$  jedoch nur die zufällige Gesamtsumme  $M_t = (\sum X_i)_t - V_t$  auf dem Überschussmarkt feststellen.

Im nachfolgenden Kapitel wird die Analogie zwischen dem hier vorgestellten Modell im eben analysierten Spezialfall und dem deutschen Energiemarkt untersucht. Zuerst wird festgestellt, dass die Voraussetzungen des mathematischen Modells mit einigen Abstrichen (die Preisfunktion ist nur fast zweiwertig, die Prognosefehler sind nicht alle unabhängig<sup>5</sup>) auch im deutschen Energiemarkt gelten.

Anschliessend wird geprüft in wie weit sich die Modellergebnisse übertragen lassen – insbesondere, ob die zu beobachtenden  $V$  durch die im Modell berechneten  $V^*$  reproduziert werden können.

---

<sup>5</sup>Unkorreliertheit der  $X_i$  ist nicht zu erwarten, da es Störungen gibt, die auf mehrere Energielieferanten gleichermaßen wirken können, so dass deren Fehler dann positiv korreliert sind.

# Kapitel 4

## Anwendung – Der Energiemarkt

Eine reale Anwendung findet das Modell im Energiemarkt.

### 4.1 Aufgabenstellung

Da Energie im eigentlichen Sinn nicht lagerbar ist<sup>1</sup>, muss vom Markt stets soviel Energie zur Verfügung gestellt werden, wie der Bedarf vorgibt. Energiemangel ist unbedingt zu vermeiden, Energieüberschuss, der nicht anderweitig verkauft werden kann, verfällt ungenutzt.

Wie im nachfolgenden Abschnitt näher erläutert wird, gibt es daher zwei eng miteinander verknüpfte Energiemärkte: den Spotmarkt, an dem Energie wie Wertpapiere gehandelt wird und unserem  $G_Z$  entspricht, sowie dem Bilanzenergiemarkt, an dem die Differenzen zwischen benötigter und gekaufter Energie gehandelt werden (unserem  $G_{\ddot{U}}$ ).

Vereinfacht ausgedrückt wird zu jedem Zeitpunkt  $t$  die Summe aller dieser Differenzen ermittelt ( $M_t$ ) und daraus der Energiepreis  $p_{\ddot{u}}$  abgeleitet - ein hoher Preis, falls insgesamt zuwenig Energie zur Verfügung stand, sonst ein niedriger.

#### Ziel

Ziel ist es nun herauszufinden, ob die zu beobachtbare Zeitreihe ( $M_t$ ) durch die in unserem letzten Modell (Korollar 3.3.5) berechneten  $V_t$  erklärt werden kann.

Die Preise  $p_h$  und  $p_n$  werden veröffentlicht und stehen daher für jeden Zeitpunkt

---

<sup>1</sup>Wasserspeicherkraftwerke und ähnliche Einrichtungen werden hauptsächlich zum flexiblen Energieausgleich verwendet und spielen beim Stromhandel keine wesentliche Rolle.

zur Verfügung. Da diese nicht konstant sind, wir jedoch in unserem Modell von einer zweiwertigen Preisfunktion ausgehen, werden Zeiträume ermittelt, in denen die variablen Preise gut durch Konstanten ersetzt werden können. Als  $p_z$  wird der Spotmarktpreis benutzt.

Wir nehmen auch an, dass sich die Mittelwerte (also die Erwartungswerte  $\mathbb{E}[M_t]$ ) nicht sprunghaft ändern; dann können diese Mittelwerte gut aus der Zeitreihe extrahiert werden (dabei stellen wir noch sicher, dass die Residuen dieser Zeitreihe normalverteilt sind).

Weiterhin wird angenommen, dass sich die Streuungen der  $M_t$  ebenfalls nur langsam in der Zeit verändern und somit ebenfalls gut geschätzt werden können.

Somit stehen nun alle Daten zur Verfügung um zu prüfen, wie gut das Modell die Realität wiedergeben kann.

## 4.2 Hintergrund

### Europäischer und deutscher Strommarkt

Für weitergehende Informationen siehe auch [2], [4], [5], [6] und [7].

Mit der Verabschiedung der EU-Elektrizitätsrichtlinie vom 19.12.1996 begann die schrittweise Liberalisierung des europäischen Strommarkts.

In Deutschland wurde im Zuge der Liberalisierung der Elektrizitätsmarkt durch das Energiewirtschaftsgesetz (EnWG) zum 29.4.1998 in einem Schritt vollständig geöffnet. Dazu gehörten

- die Aufhebung der Gebietsmonopole und Demarkationsverträge
- die diskriminierungsfreie Verlegung und Nutzung der Stromleitungen der Gemeinden
- der freie Zugang zum Elektrizitätsversorgungsnetz ('verhandelte Netzzugang') und die Trennung in Stromerzeugung, -übertragung und -verteilung

Neben den bis dato bestehenden Energieerzeugern traten nun auch reine Zwischenhändler und kleine Energieproduzenten in den Markt ein.

Der 'verhandelte Netzzugang' wird durch eine am 22.5.1998 von der Stromwirtschaft und der Industrie geschlossenen Verbändervereinbarung geregelt, die am 13.12.1999 aktualisiert wurde. Sie ermöglicht jedem Stromverbraucher die freie



Wahl des Lieferanten und ermöglichen den freien Stromhandel an den betreffenden Börsen.

In Europa sind dies die Strombörsen European Energy Exchange (EEX) in Leipzig, die APX in Amsterdam, die NordPool in Oslo und die Powernext in Paris. Wir beschränken uns hier auf den Handel an der Leipziger Strombörse.

Der deutsche Energiemarkt teilt sich geographisch in vier Zonen (Regelenergiezonen, Bilanzmärkte) ein, welche jeweils von einem Verbundunternehmen (transmission system operator, TSO) verwaltet werden. Dies sind RWE, E.ON, EnBW und Vattenfall Europe (dazu gehören VEAG, BEWAG und HEW).

Die TSO sind dafür zuständig, dass stets genügend Energie in ihrer Zone zur Verfügung steht und auftretende Energieengpässe ausgeglichen werden. Sie müssen ebenfalls überschüssige Energie abnehmen und bestimmen deren Preis auf dem Bilanzenergiemarkt. Die TSO können diese Aufgabe auch an andere Unternehmen delegieren.

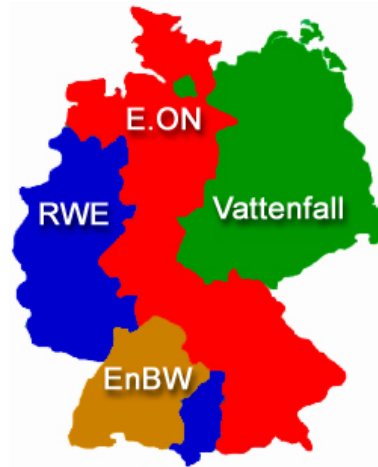


Abbildung 4.1: Karte der Regelenergiezonen der vier TSO in Deutschland

Ein TSO übernimmt in unserem Modell die Rolle des Marketmakers.

Diese Regelenergie wird in drei Bereiche untergliedert:

1. Primärregelenergie. Sie wird automatisch aus den bereit gehaltenen Leistungsreserven der Kraftwerke (ca. 2.5%) abgerufen und muss innerhalb von 30 Sekunden zur Verfügung stehen<sup>2</sup>.
2. Sekundärregelenergie. Sie wird ebenfalls automatisch abgerufen und muss innerhalb von fünf Minuten im vollen Umfang zur Verfügung stehen.
3. Minutenreserve. Sie wird manuell (Telefon, e-mail, etc.) geordert und wird meist von eigens dafür vorgesehenen Kraftwerken geliefert (z.B. Gasturbinen, Wasserspeicher, etc.), die eine schnelle Hochfahrzeit besitzen.

Ist weniger Energie vorhanden als benötigt, wird der Mangel durch die Regelenergie ausgeglichen. Bei einer Übereinspeisung werden die Unternehmen, welche die Regelenergie zur Verfügung stellen, ihre Kapazitäten zurückfahren.

<sup>2</sup>In der Regelenergiezone der RWE stehen ca. 2000 MW zur Verfügung.

Nach Auflagen des Kartellamtes

- wird die Primär- und Sekundärregelung von der RWE seit dem 1.2.2001 jeweils halbjährlich ausgeschrieben
- wurde die Minutenreserve
  - am 1.2.2002 für drei Monate,
  - am 1.5.2002 für zwei Monate,
  - am 1.7.2001 für einen Monat und
  - seit dem 1.8.2001 täglich ausgeschrieben

Die Ausschreibung wird getrennt für positive und negative Regelenergie getätigt.

### 4.2.1 Der Handelsablauf

Neben dem TSO sind i.d.R. noch zahlreiche weitere Unternehmen am Markt beteiligt. Dazu gehören nicht explizit die Energieerzeuger, sondern vielmehr die Unternehmen, die Energie an gewerbliche und private Endkunden liefern und mit diesen abrechnen.

#### Energieeinkauf

Jedem Unternehmen stehen mehrere Instrumente der Energiebeschaffung zur Verfügung:

- Langfristiger Einkauf einer Grundlast am Spotmarkt<sup>3</sup>. Dieser ist besonders günstig und wird i.d.R. 3 bis 6 Monate vorher getätigt.
- Mittel- und kurzfristiger Einkauf von Stundenkontingenten<sup>4</sup> am Spotmarkt. Diese können bis zu einem Tag vor dem tatsächlichen Bedarf getätigt werden.
- Die Differenzen zwischen eingekaufter Energiemenge und der tatsächlich benötigten Menge werden am Bilanzmarkt ausgeglichen.

Im Normalfall verfügt jedes Unternehmen über eine Prognose seiner Lastkurve. Schematisch ist solch eine Lastkurve sinusförmig<sup>5</sup> und sieht mit dem dazugehöri-

<sup>3</sup>Spot- und Terminmarkt werden hier nicht unterschieden.

<sup>4</sup>mittel- und kurzfristig ganze Tage sowie diverse Stundenblöcke, kurzfristig auch einzelne Stunden

<sup>5</sup>Niedriger und hoher Energiebedarf wechseln sich ab (Tageszeit, Jahreszeit, etc.)

gen Einkaufsverhalten so aus:

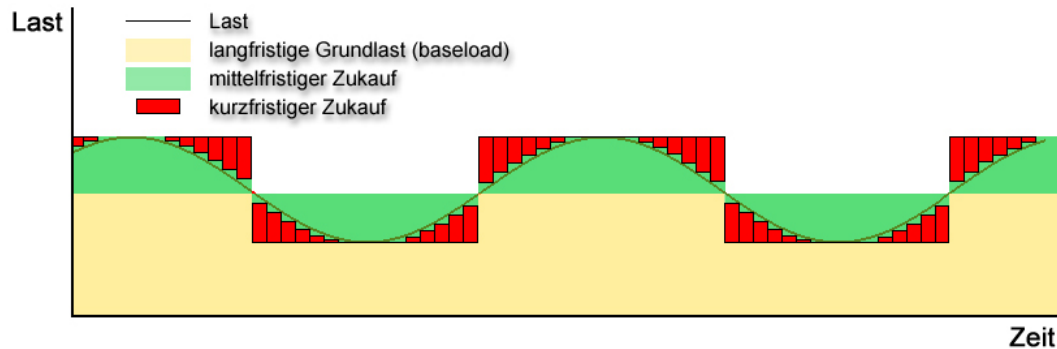


Abbildung 4.2: Schematische Lastkurve eines Unternehmens

Die anfangs übliche Methode war es, zu jedem Zeitpunkt mit der insgesamt am Spotmarkt gekauften Energiemenge möglichst nahe an dem eigenen Bedarf zu sein, also den Fehlbetrag der eigenen *Energiemenge* zu minimieren.

Ein typischer Einkauf eines Unternehmens sieht dann folgendermaßen aus:

1. Am Spotmarkt wird 3–12 Monate vorher eine Grundlast für ein ganzes Jahr geordert.
2. Diese Grundlast wird kontinuierlich durch Handel am Spotmarkt an den mittelfristig erwarteten Bedarf in der Zukunft angepasst.
3. Durch kurzfristige Informationszuflüsse (z.B. präzise Wetterprognosen oder kurzfristige Mitteilungen von Großkunden) kann die eigene Energiezusammenstellung noch kurzfristig (bis zu einem Tag vorher) angepasst werden.
4. Die Differenzen zwischen dem tatsächlichen Bedarf und der eingekauften Energiemenge werden am Bilanzmarkt ausgeglichen.

### 4.2.2 Die Spotmarktpreise

Da die Art und Weise der Preisfindung auf dem Spotmarkt in dieser Arbeit keine Rolle spielt – nur der Spotmarktpreis  $p_z$  selbst ist von Bedeutung – geben wir hier nur eine kurze Skizzierung nach [7].

Physischer Erfüllungstermin ist stets der folgende Kalendertag bzw. das darauf folgende Wochenende. Gebote können für alle 24 Stunden eines Tages (Baseload),

acht einzelne Stundenblöcke (die unterschiedlich genutzte Tageszeiten abdecken) oder für jede individuelle Stunde abgegeben werden.

Jeder Käufer und Verkäufer kann mittels diverser Ordermöglichkeiten<sup>6</sup> für jeden Block sein Gebot abgeben. Die EEX legt den Preis dann so fest, dass die Marktliquidität möglichst hoch ist<sup>7</sup>.

Zusätzlich können am Terminmarkt Futures der gerade genannten Blöcke gehandelt werden; die Lieferperiode ist entweder ein ganzer Monat (maximal 18 Monate im voraus), ein Quartal (maximal 8 Quartale im voraus) oder ein Jahr (maximal 10 Jahre im voraus).

Wir gehen hier davon aus, dass die letztendlich in unserem Modell ausschlaggebende Anpassung ausschließlich durch Stundenkontrakte erfolgt. Daher betrachten<sup>8</sup> wir nur die Stundenpreise der EEX:

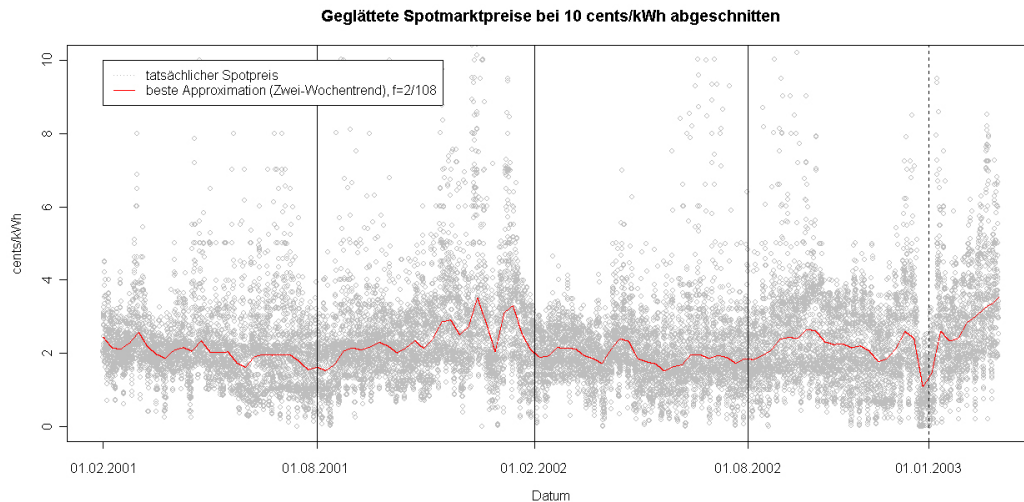


Abbildung 4.3: Spotmarktpreise der EEX pro Stunde

Die Spotmarktpreise liegen meist bei den Produktionskosten oder leicht darunter – im Schnitt bei 2.4 cents pro kWh. Es kommt jedoch manchmal auch zu Ausschlägen bis zu 1000 cents pro kWh, was am obigen Bild nicht zu sehen ist. Ausschläge über 10 cents pro kWh sind jedoch eher selten.

<sup>6</sup>market, limit, market-to-limit orders usw.

<sup>7</sup>Detaillierte Informationen sind im "EEX Spotmarktconcept" und "Kontraktsspezifikationen" nachzulesen.

<sup>8</sup>zur Wahl des Glättungsparameters siehe Anhang A.4 und B

## 4.3 Die Bilanzenergiezone der RWE

Als Überschussmarkt verwenden wir die Regelenenergiezone der RWE.

Zur Analyse stehen uns folgende Datensätze zur Verfügung:

- Die viertelstündlichen Preise (Regelenenergiepreise) auf dem Bilanzenergiemarkt der RWE

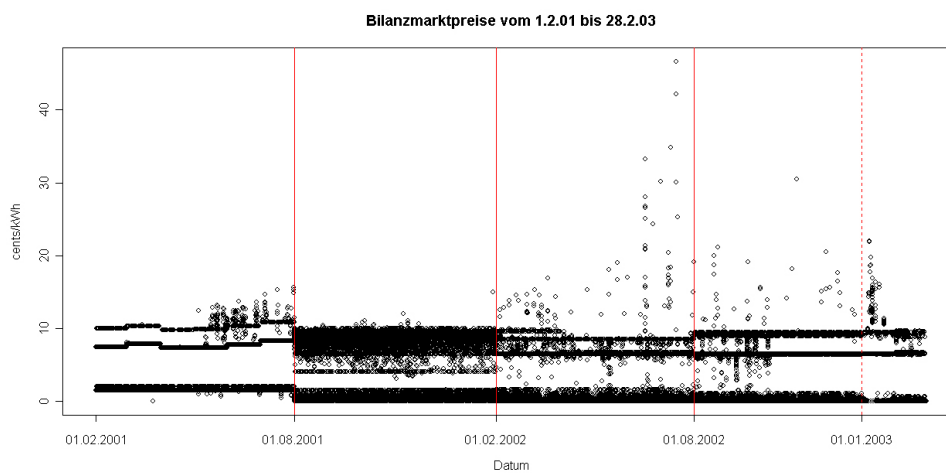


Abbildung 4.4: Die Bilanzmarktpreise

- Der Gesamtbedarf ( $M$ ) auf dem Bilanzenergiemarkt zu jeder Viertelstunde (zur Wahl des Glättungsparameters siehe Anhang A.4 und B)

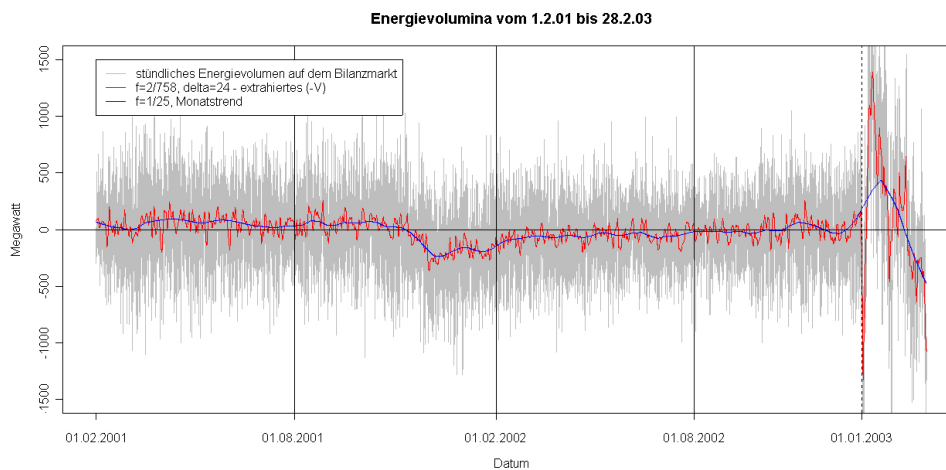


Abbildung 4.5: Energievolumina auf dem Bilanzenergiemarkt

- Die Preise der EEX für jede einzelne Stunde (0 bis 23), siehe Abbildung 4.3. Die Inkompatibilität der Erhebungsintervalle zu den viertelstündlichen Bilanzmarktpreisen wird später aufgehoben.

Zu jeder Viertelstunde  $t$  liegt somit ein Tupel  $(p_{\ddot{u}}, M, p_z)_t := (p_{\ddot{u}t}, M_t, p_{zt})$  vor.

### Unterteilung des Zeitraums

Da sich die Preisgebung auf diesem Bilanzenergiemarkt mehrmals signifikant geändert hat (vergleiche Abbildung 4.4), ist es angebracht, zumindest diese hervorzuheben und separiert zu betrachten.

1. 01.02.2001 bis 31.07.2001 Beginn der Ausschreibung der Regelenergie
2. 01.08.2001 bis 31.12.2001 Neuausschreibung der Regelenergie, Minutenreserve wird täglich ausgeschrieben
3. 01.01.2002 bis 31.07.2002 Neuausschreibung der Regelenergie
4. 01.08.2002 bis 31.12.2002 Neuausschreibung der Regelenergie
5. 01.01.2003 bis 28.02.2003 Neuausschreibung der Regelenergie, stark signifikantes Marktverhalten

### Vernachlässigung

Eigentlich wird von der RWE vorgeschrieben, dass die Energieabweichungen jedes Marktteilnehmers dauerhaft nicht signifikant von Null verschieden sein dürfen. Da jedoch unklar ist, ab wann dieser Tatbestand erfüllt ist und dieser bisher auch nicht geahndet wurde, vernachlässigen wir diese Bedingung.

## 4.4 Aufbereitung der Daten

### 4.4.1 Die Preisfunktion

Nun sollen die tatsächlich vorgefundenen Preise auf dem Bilanzenergiemarkt durch eine zweiwertige Preisfunktion

$$\hat{f}(M_t) := p_n + (p_h - p_n) \cdot 1_{[M_t \geq 0]}$$

approximiert werden.

Die Preise  $p_h$  und  $p_n$  werden so gewählt, dass die Quadratsumme der Differenzen  $p_{üt} - \hat{f}(M_t)$  für den gesamten Zeitraum bzw. für die oben beschriebenen Abschnitte minimiert wird.

Dadurch ergeben sich folgende Preisfunktionen

$$\mathbf{01.02.2001 - 28.02.2003} \quad \hat{f}(M_t) = 0.530213 + 7.464452 \cdot 1(M_t \geq 0)$$

$$\mathbf{01.02.2001 - 31.07.2001} \quad \hat{f}_1(M_t) = 1.65048 + 7.01091 \cdot 1(M_t \geq 0)$$

$$\mathbf{01.08.2001 - 31.01.2002} \quad \hat{f}_2(M_t) = 0.430729 + 7.878446 \cdot 1(M_t \geq 0)$$

$$\mathbf{01.02.2002 - 31.07.2002} \quad \hat{f}_3(M_t) = 0.17313 + 7.20204 \cdot 1(M_t \geq 0)$$

$$\mathbf{01.08.2002 - 31.12.2002} \quad \hat{f}_4(M_t) = 0.15533 + 7.27553 \cdot 1(M_t \geq 0)$$

$$\mathbf{01.01.2003 - 28.02.2003} \quad \hat{f}_5(M_t) = 0.05106 + 7.8648 \cdot 1(M_t \geq 0)$$

Die Rechtfertigung dieser Zeiteinteilung wird bei Betrachtung der Residuen in Abschnitt A.1 noch einmal hervorgehoben.

Da die Preise auf dem Bilanzmarkt jede Viertelstunde, auf dem Spotmarkt jedoch nur jede Stunde festgestellt werden, fassen wir die viertelstündlichen Werte durch Mittelwertbildung zu stündlichen Werten zusammen. Somit rechnen wir ab nun nur noch mit den zur Stunde  $t$  gehörenden Tupeln  $(\hat{f}(M), M, p_z)_t$ .

Die Zusammenfassung von je vier  $M$ -Werten hat zu einem hat den Vorteil, dass die Auswirkungen von ausserordentlichen Einflüssen gemildert werden und somit einen glatteren Verlauf der Bedarfsmengen gewährleisten. Der Nachteil liegt darin, dass die approximierte Preisfunktion  $\hat{f}$  aus den viertelstündlichen Daten gebildet wurde, sonst aber nur stundenweise gerechnet wird – dies ist etwas untransparent.

#### 4.4.2 Extraktion von $(V)$

Als erstes soll zu jedem Zeitpunkt  $t$  die beobachtete Bedarfsmenge  $M_t$  in Prognosefehler  $X_t := \sum_{i=1}^n X_{i_t}$  und strategische Menge  $V_t := \sum_{i=1}^n v_{i_t}$  aufgeteilt werden. Einen ersten Eindruck des strategischen Verhaltens vermitteln die Häufigkeiten der Energieüberschüsse. Ohne strategisches Verhalten sollte die Anzahl der Zustände des Bilanzenergiemarktes mit Energieüberschuss und Energiemangel identisch um Null verteilt sein. Tatsächlich ergibt sich jedoch folgendes Bild:

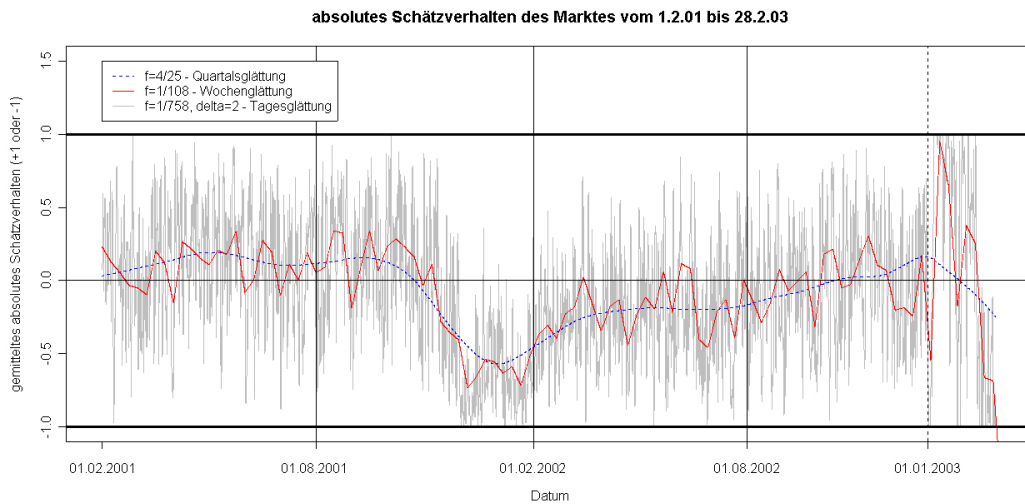


Abbildung 4.6: gemittelte Häufigkeiten der Überschüsse am Bilanzmarkt

Da augenscheinlich die Punkte nicht um Null verteilt sind, sollen die Mittelwerte der vorliegenden Folge  $(M) = M_1, \dots, M_{18192}$  möglichst gut geschätzt werden.

Nach Modellannahme wählt der Markt<sup>9</sup> für jede Stunde  $t$  ein  $V_t$ , welches nun anhand der Daten als  $\hat{V}_t$  geschätzt wird. Die Folge  $(\hat{V})$  ist somit das geschätzte strategische Verhalten  $(V) = (\mathbb{E}[-M])$  des Marktes.

Da wir annehmen, dass eventuell vorhandene Strategien sich nur langsam in der Zeit ändern<sup>10</sup> (also nicht jede Stunde neu berechnet wird), wird  $(\hat{V})$  durch die *lowess*-Funktion<sup>11</sup> als gemittelter Durchschnitt von  $(M)$  geschätzt, wobei der Parameter  $f$  so gewählt ist, dass hauptsächlich die Daten aus jeweils sechs Tagen eingehen (siehe die rote Linie in Abbildung 4.5).

Der Nachteil dieser Methode ist es, dass die dadurch entstehenden Residuen  $R_t := M_t + \hat{V}_t$  nicht unkorreliert und somit nicht unabhängig sein können, da  $(\hat{V})$  eine geglättete Folge ist und daher eine große Autokorrelation erster Ordnung<sup>12</sup> unvermeidbar ist, welche mit höherer Ordnung jedoch schnell kleiner wird (bereits nach zehn Stunden ist diese fast verschwunden, siehe hierzu auch Abbildung 5.1).

<sup>9</sup>Den Markt fassen wir immer als Summe aller beteiligten Unternehmen auf.

<sup>10</sup>Lokal ist  $V$  somit annähernd konstant und wird durch einen Mittelwert der umgebenden  $M$  geschätzt.

<sup>11</sup>Mehr zur *lowess*-Funktion unter B.

<sup>12</sup>Unkorreliertheit ist auch deswegen nicht zu erwarten, da durch die Annahme der langsamen Strategieänderung auf externe Schocks nur langsam reagiert werden kann und externe Einflüsse auf mehrere Subjekte gleichzeitig wirken können.



In Anhang A.4 wird gezeigt, dass die Wahl von sechs Tagen (entspricht der Wahl des Fensterparameters  $f = 6/758$ ) gerechtfertigt ist.

### 4.4.3 Streuung der Residuen

Da die Streuungen  $S_t$  zu jedem Zeitpunkt  $t$  in unserem Modell benötigt werden, müssen wir daher für jede Stunde eine Streuung ermitteln.

Die  $R_t$  sind die durch die Schätzung von  $V_t$  entstehenden Residuen. Wie in Anhang A.2 dargelegt stellt sich heraus, dass die Streuung zu jedem Zeitpunkt  $t$  sehr gut durch die statistische Streuung der  $t$  umgebenden 24 Stunden berechnet werden kann:

$$\hat{S}_t := \sqrt{\frac{1}{23} \sum_{k=t-11}^{t+12} \left( R_k - \sum_{l=t-11}^{t+12} \frac{R_l}{24} \right)^2}.$$

In dem auch zukünftige Daten in die Streuung  $\hat{S}_t$  eingehen, wird der Erwartungshaltung der Beteiligten Rechnung getragen.

Dies führt zu folgendem Bild der Streuungen des Marktes:

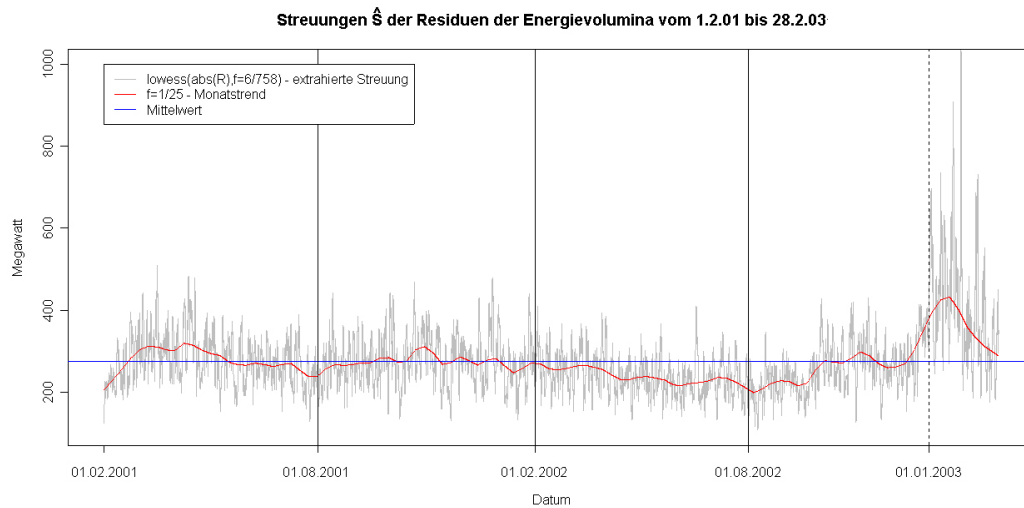


Abbildung 4.7: Streuungen  $\hat{S}_t$  der Residuen  $R_t$

Durch Division der Residuen  $R_t$  mit  $\hat{S}_t$  entstehen Residuen mit (annähernd) identischer Streuung. Die These, diese Residuen seien standardnormalverteilt, kann in den einzelnen Zeitabschnitten auch für sehr kleine Signifikanzniveaus nicht abgelehnt werden (siehe Anhang A.3).

## 4.5 Modellkonformität

Angenommen eine zweiwertige Preisfunktion spiegelt die Realität ausreichend wieder und die überschüssigen Energien sind normalverteilt (und die Korrelationen können vernachlässigt werden) – dann gilt nach Satz 3.3.4 bzw. Korollar 3.3.5:

$$V_t^* = \text{qnorm} \left( \frac{p_h - p_z}{p_h - p_n}, 0, 1 \right) \cdot S_t.$$

Dabei ist  $\text{qnorm}(\cdot, 0, 1)$  die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Seien nun  $S = \hat{S}$ ,  $p_h = \hat{p}_h$ ,  $p_n = \hat{p}_n$  und  $p_z$  der jeweilige aktuelle Spotmarktpreis. Wenn  $p_z \geq p_h$  bzw  $p_z \leq p_n$ , dann wird  $\lambda$  auf  $\pm 1.96$  festgesetzt<sup>13</sup>. Somit ergibt sich daraus folgendes modelliertes ( $V^*$ ):

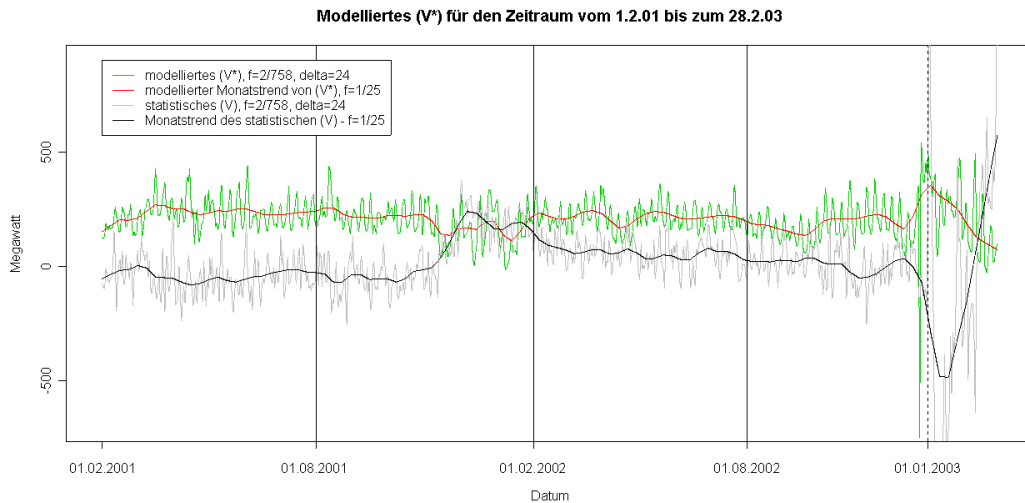


Abbildung 4.8: Gemäß Modellannahmen berechnetes ( $V^*$ )

Wie zu sehen ist, passt das Ergebnis in den meisten Bereichen entweder im lokalen oder im allgemeinen Verhalten nicht – oder in keinem von beiden. Lediglich zwischen dem 1.3.02 und dem 31.8.02 wird das allgemeine Verhalten einigermaßen und das lokale teilweise wiedergespiegelt.

Eine individuelle Berechnung (Benutzung von  $\hat{f}_k$  im  $k$ -ten Abschnitt anstatt  $\hat{f}$ ) innerhalb der einzelnen Zeitabschnitte ergibt auch kein besseres Bild. Die Werte verschieben sich leicht in die falsche Richtung:

<sup>13</sup>Denn für solche Werte wäre  $v^*$  nicht definiert – bei Gleichheit wäre  $v^* = \pm\infty$ . Deshalb werden diese Werte auf einen Wert gesetzt, der bei zufälligem  $p_z$  nur in 5% der Fälle überschritten (unterschritten) würde.

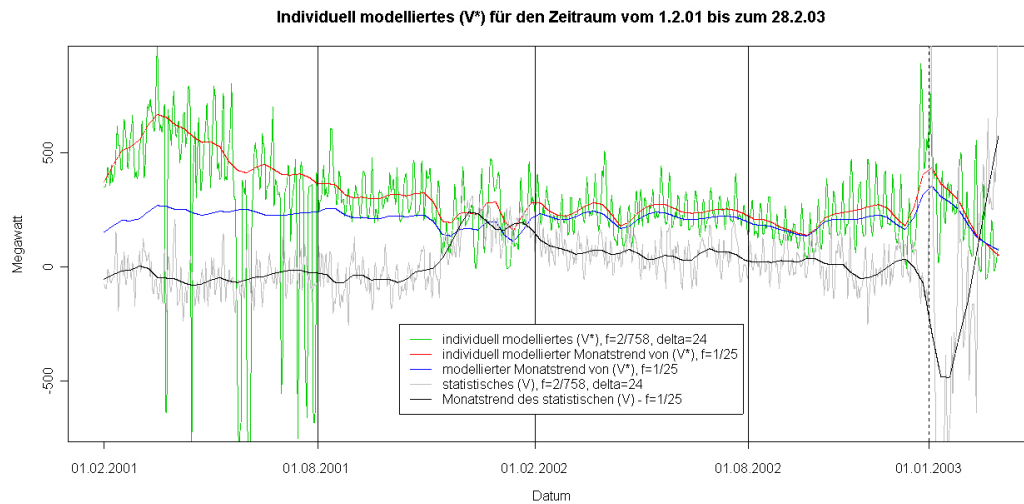


Abbildung 4.9: Gemäß Modellannahmen individuell berechnetes ( $V^*$ )

Die großen Schwankungen (grüne Linie) im ersten Zeitabschnitt resultieren daraus, dass  $p_z$  sehr oft auch unter  $\hat{f}_1(M)$  lag und daher  $\lambda$  in diesen Fällen auf 1.96 gesetzt wurde.

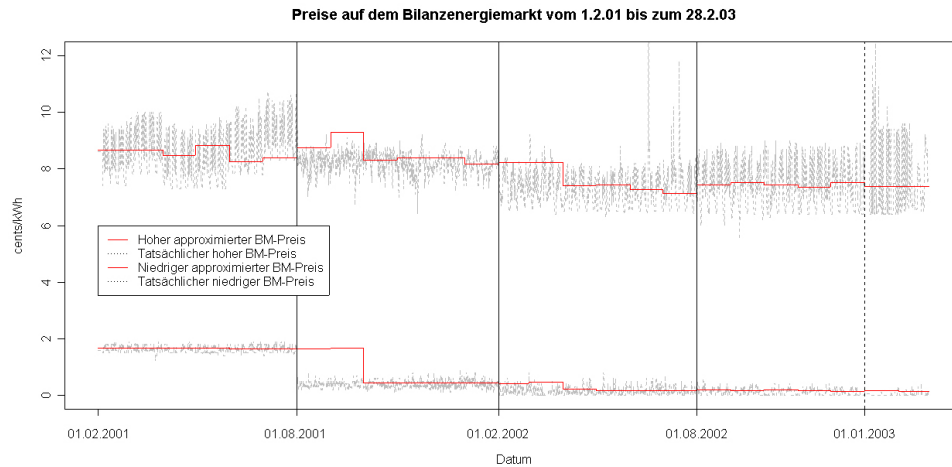
### 4.5.1 Anpassung an reale Verhältnisse

Bisher wurde angenommen, dass die Bilanzmarktpreise  $p_n$  und  $p_h$  zu jedem Zeitpunkt bekannt sind und es wurde vorausgesetzt, dass jedes Unternehmen die eigene strategische Menge anhand der aktuellen Daten- und Preislage in kurzen Zeitabständen neu anpasst.

Dies entspricht jedoch kaum den im Energiemarkt vorzufindenden Verhältnissen. Um realistische Verhältnisse zu schaffen, werden nun noch folgende Anpassungen durchgeführt:

**Bilanzmarktpreise** RWE veröffentlicht alle Bilanzmarktdaten mit etwa zwei Monaten Verzögerung<sup>14</sup>, welche dann rückwirkend bezahlt werden müssen. Um dieses zu berücksichtigen, werden nun die Preise  $p_h$  und  $p_n$  durch das Monatsmittel der hohen bzw. niedrigen Preise des Vormonats ersetzt. Das bedeutet, dass die Unternehmen mit den Preisen rechnen, die sie im Mittel zuletzt bezahlt haben.

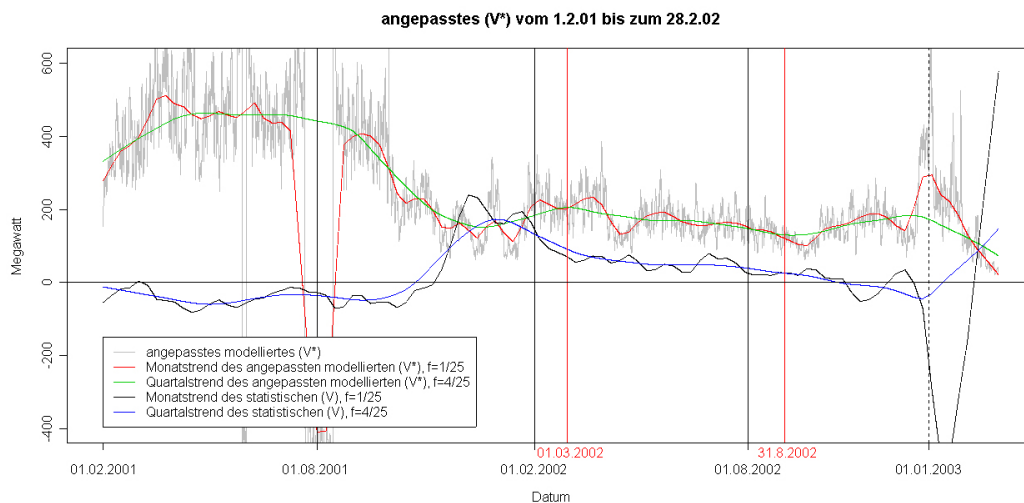
<sup>14</sup>Ein Monat nach Ablauf des relevanten Monats; also zum 1.8. die Daten vom 1.6. bis 30.6.

Abbildung 4.10: Approximierte  $p_h$  und  $p_n$  des Bilanzmarktes

**Spotmarktpreise** Da die Kalkulation nur auf Änderungen des Trends und der Erwartungshaltung reagieren soll, und  $p_z$  bei Gebotsabgabe unbekannt ist, wird mit den gewichteten Mitteln der Strompreise gerechnet.

Die Wahl des Fensterparameters  $f = 2/108$  führt dazu, dass jeweils die Daten der beiden umgebenden Wochen maßgeblich sind (siehe Anhang A.4 und B). Dies bildet einen guten Kompromiss aus Trendverhalten des Preises und Erwartungshaltung der Marktteilnehmer (rote Linie in Abbildung 4.3).

Mit diesen Anpassungen ergibt sich für die trendbezogen modellierten  $V_t^*$ :

Abbildung 4.11: Berechnung von ( $V^*$ ) unter realen Bedingungen

In der Zeit vom 1.3.2002 bis 31.8.2002 ist der Verlauf der Trendgrößen (Quartals-trend – grüne und blaue Linie) einigermaßen parallel, wenn auch etwas verschoben. Der Einbruch um den 1.8.2002 herum liegt an der verzögerten Reaktion auf die deutlich veränderten Bilanzmarktpreise.

## 4.5.2 Zusammenfassung

Auch wenn der ähnliche Verlauf zwischen dem 01.03.2002 und 31.08.2002 eventuell noch durch die nicht berücksichtigte Randbedingung der nichtsignifikanten Abweichung von der Null noch erklärt werden könnte, so lässt sich letztendlich doch feststellen, dass das mathematische Modell nicht dazu ausreicht, um den gegebenen Sachverhalt befriedigend zu beschreiben.

Dies liegt daran, dass die durch das Modell implizierte Bedingung  $\mathbb{E}[p_{\tilde{u}}] = p_z$  nur selten erfüllt ist (die Preise liegen oft weit auseinander und sind nicht oder sogar negativ korreliert)<sup>15</sup>:

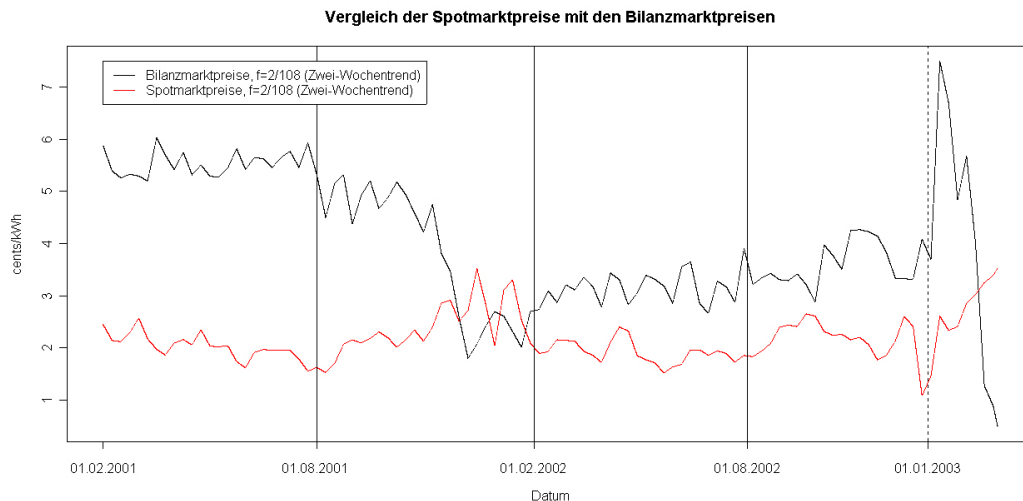


Abbildung 4.12: Gegenüberstellung der Bilanz- und Spotmarktpreise

Das selbst bei starker Glättung die Diskrepanz von modellierter und beobachteter Strategie so groß ist, mag zum einen daran liegen, dass sich der Markt auch nach zwei Jahren immer noch nicht beruhigt und sein Gleichgewicht immer noch nicht gefunden hat. Insbesondere kann dies für den ersten oder die ersten beiden

<sup>15</sup>Korrelationskoeffizient ungeglättet: 0.063, Korrelationskoeffizient geglättet:  $-0.3355$

Zeitbereiche gelten, da durch langfristige Kontrakte die Unternehmen sich erst mit einer größeren Verzögerung auf die neue Situation einstellen konnten. Angesichts der anhaltenden deutlichen Differenz erscheint diese Erklärung aber kaum ausreichend zu sein.

Zum anderen mag es noch entscheidende Einflussgrößen geben, die hier entweder zu sehr vernachlässigt oder garnicht berücksichtigt wurden.

## 4.6 Reproduktion von $(\hat{V})$

Fassen wir  $V^* = V(p_z)$  als Funktion in  $p_z$  auf, so stellt sich die Frage, welches  $p_z$  das Richtige gewesen wäre, um die beobachtete Strategie zu reproduzieren.

Es ergibt sich, dass der mittlere Bilanzmarktpreis in natürlicher Weise genau das zutreffende Argument für  $V(\cdot)$  ist.

Zum einen benutzen wir die aus dem mathematischen Modell stammende Formel

$$V(x) = S\lambda(x) = S\Phi^{-1}\left(\frac{p_h - x}{p_h - p_n}\right) \text{ für } x \in (p_n, p_h).$$

Zum anderen bilden wir  $\mathbb{E}[p_{\hat{u}}]_t$  – um die Erwartungshaltung gegenüber den Bilanzmarktpreisen zu berücksichtigen – durch das gewichtete<sup>16</sup> Mittel der den Zeitpunkt  $t$  umgebenden Bilanzmarktpreise.

Die Ergebnisse unterscheiden sich auch dann kaum, wenn die  $\mathbb{E}[p_{\hat{u}}]$  rein adaptiv – also nur aus vergangenen Werten – gebildet werden. Selbst wenn die approximierten Bilanzmarktpreise  $p_n$  und  $p_h$  erst zwei Monate später bekannt werden, hat dies nur dann Auswirkungen, wenn sich  $p_n$  und  $p_h$  deutlich verändert haben (hier beim Übergang vom ersten in den zweiten Zeitabschnitt – siehe auch Abbildung 4.10).

Da im Gleichgewicht innerhalb des Modells  $\mathbb{E}[p_{\hat{u}}] = p_z$  impliziert wird, gilt dann dort natürlich auch  $V(p_z) = V(\mathbb{E}[p_{\hat{u}}])$ .

Es ist nun ganz natürlich, dass  $V(\mathbb{E}[p_{\hat{u}}])$ , unter der Annahme normalverteilter Abweichungen, ein adäquates Mittel ist, um die beobachteten  $\hat{V}$  aus den Streuungen und den Bilanzmarktpreisen zu reproduzieren, da per Definition des Erwartungswerts für Indikatorpreisfunktionen

<sup>16</sup>lowess-Funktion mit  $f = 2/108$ ; siehe auch Anhang A.4

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] &= [1 - P(X < V(\mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]))]p_h + P(X < V(\mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]))p_n \\
&= P\left(X < S\Phi^{-1}\left(\frac{p_h - \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]}{p_h - p_n}\right)\right)(p_n - p_h) + p_h \\
&= \frac{p_h - \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]}{p_h - p_n}(p_n - p_h) + p_h \\
&= \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]
\end{aligned}$$

die Identität ist.

Dieses Prinzip gilt natürlich unabhängig von der Verteilung von  $X$ . Denn ist  $X$ , also pro Zeitpunkt die Summe der einzelnen  $X_i$ , nicht normalverteilt, sondern gemäß der Verteilungsfunktion  $F$ , dann gilt  $V^* = F^{-1}\left(\frac{p_h - \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]}{p_h - p_n}\right)$ .

Das  $V(\mathbb{E}[p_{\ddot{u}}])$  auch empirisch passt und in diesem Fall auch eine einfache lineare Approximation von  $\Phi^{-1}\left(\frac{p_h - x}{p_h - p_n}\right)$  ausreicht, zeigt das folgende Bild.

### 4.6.1 Visualisierung

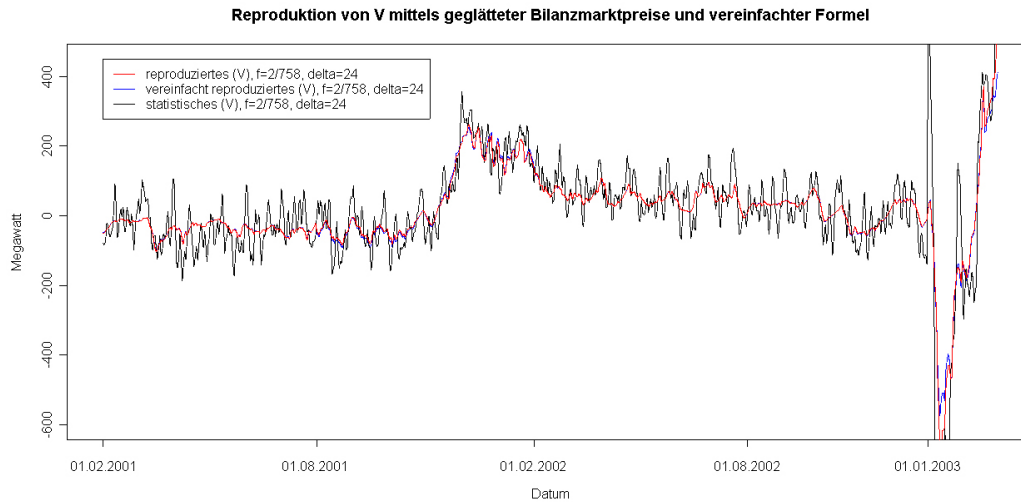


Abbildung 4.13: Reproduktion von  $(\hat{V})$  durch gemittelte Bilanzmarktpreise

Die Übereinstimmung ist auch dann immer noch nahezu perfekt (blaue Linie in Abbildung 4.13), wenn die Berechnung der  $V_t^*$  einfach ersetzt wird durch  $V_t^* = S_t \frac{1}{\sqrt{8}} \left( \frac{p_h + p_n}{2} - \mathbb{E}[p_{\tilde{u}}]_t \right)$ .

Denn  $\Phi^{-1} \left( \frac{p_h - x}{p_h - p_n} \right)$  wird solange ausreichend gut durch  $\frac{1}{\sqrt{8}} \left( \frac{p_h + p_n}{2} - x \right)$  approximiert, wie  $x$  nicht zu extreme Werte annimmt (siehe Abbildung rechts) und  $p_n \in (0, 2)$ , sowie  $p_h \in (7, 11)$  ist.

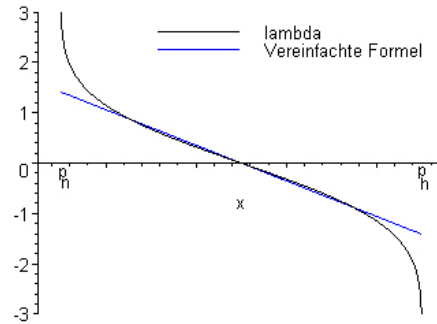


Abbildung 4.14: Approximiertes  $\lambda$

## 4.7 Brachliegendes Gewinnpotential

Durch die vorliegende Diskrepanz zwischen den Spot- und mittleren Bilanzmarktpreisen ergeben sich auch, retrospektiv, deutliche und nicht genutzte Gewinnmöglichkeiten, deren Potential wir hier noch kurz betrachten.

### 4.7.1 Datengrundlage

Um möglichst realistische Verhältnisse zu gewährleisten, können wir die Daten (analog zu Abschnitt 4.5.1) nur mit einer zeitlichen Verzögerung benutzen. Da die Bilanzmarktdaten zwei Monate verzögert und die zukünftigen Spotmarktpreise unbekannt sind, verwenden wir folgende konservative Anpassung:

- Als erwarteten Spotpreis  $\mathbb{E}[p_z]_t$  für jede Stunde  $t$ , verwenden wir das arithmetische Mittel aller Stundenpreise der vorhergehenden sechs Tage. In Erwartung verhält sich somit der siebte Tag in etwa so, wie das Mittel der sechs Tage zuvor.
- Der erwartete Bilanzmarktpreis  $\mathbb{E}[p_{\tilde{u}}]_t$  ist zu jeder Stunde das arithmetische Monatsmittel des zuletzt veröffentlichten Monats – also ergibt sich, je nach Zeitpunkt innerhalb des Monats, eine Verzögerung zwischen einem und zwei Monaten.
- Die zu jeder Stunde auf dem Bilanzmarkt erwartete Streuung  $\mathbb{E}[S]_t$  wird aus der statistischen Streuung des zuletzt veröffentlichten Monats berechnet.



Die einzige hier getroffene Einschränkung ist wiederum die Vernachlässigung der Forderung, dass die mittleren Abweichungen eines Teilnehmers am Bilanzenergiemarkt nicht signifikant von Null abweichen sollen.

## 4.7.2 Gewinnstrategien

Sei  $\Delta_t := \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]_t - \mathbb{E}[p_z]_t$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  und  $\sigma(\cdot)$  die Signum-Funktion.

Als mögliche Strategiekategorie betrachten wir zu jeder Stunde  $t$  folgendes Handlungsmuster:

*Kaufe, wenn  $|\Delta_t| > x$  ist,  $\sigma(\Delta_t)\alpha\mathbb{E}[S]_t$  Megawatt auf dem Spotmarkt.*

Je höher  $x$  ist, desto risikoärmer ist die Strategie, je kleiner  $\alpha$ , desto weniger auffallend sind die Transaktionen. Daraus ergibt sich für die jeweilige Strategie folgendes Bild der Gewinne (in Euro):

$\alpha \backslash x$	2	1	0
0.01	506770	650751	733769
0.05	2429001	3038529	3375125
0.1	4564805	5575117	6054585
0.25	9295322	10414107	10252180
0.5	12092851	9904483	5523954

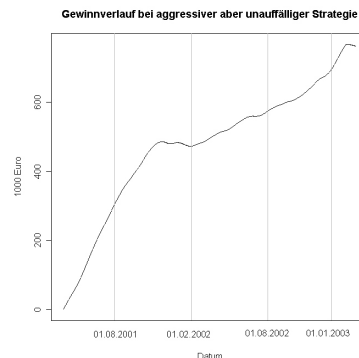


Abbildung 4.15:  $\alpha = 0.01$ ,  $x = 0$

Wie in Abbildung 4.12 zu sehen, ist im ersten Zeitabschnitt der Unterschied zwischen Spot- und Bilanzmarktpreis besonders groß und daher auch der Gewinnzuwachs. Aber selbst in den 'kritischeren' Zeiträumen, also in den Zeiten, in denen Spot- und Bilanzmarktpreis nahe beieinander liegen, ist der Gewinnzuwachs immernoch deutlich. Nur wenn sich beide Preise kreuzen, wurde aufgrund des verzögerten Wissens um den tatsächlichen mittleren Bilanzmarktpreis, tendenziell die falsche Entscheidung getroffen.

Dabei ist natürlich anzumerken, dass bei dieser retrospektiven Betrachtung große  $\alpha$  weniger sinnvoll sind, da die anderen Teilnehmer nicht reagieren können. Daher sind vor allem die ersten beiden Zeilen interessant.

Der Bilanzenergiemarkt barg also in dem Zeitraum von April (bzw. Februar) 2001 bis Februar 2003 genügend Möglichkeiten im Mittel deutliche Gewinne zu erzielen.

Selbst wenn die Bedingung, dass die Abweichungen nicht deutlich von der Null zu unterscheiden sein dürfen, sehr ernst zu nehmen wäre, so folgt doch, dass in der Tendenz stets zu viel Energie gekauft werden sollte, solange deren Einkaufspreis unter dem mittleren Bilanzenergiepreis liegt (und zu wenig, wenn er über ihm liegt).

Da in den Jahren 2001 und 2002 die mittlere Energiemenge in der Regelenergiezone der RWE oft deutlich und dauerhaft von Null verschieden war, deswegen jedoch keine Strafen ausgesprochen wurden, wären die hier beschriebenen Ertragsmöglichkeiten zumindest teilweise auch realisierbar gewesen.

## 4.8 Fazit

Obwohl das mathematische Modell, durch das unerklärte Verhalten des Marktes, nicht ausgereicht hat, um alle an es gestellten ökonomischen Erwartungen zu erfüllen, so hat es, neben seiner interessanten mathematischen Struktur

$$M = X + \lambda(p_z, p_h - p_n)\sqrt{\text{Var}X},$$

doch zu einigen Resultaten geführt:

- Es gibt nun eine sehr einfache Formel, mit der sich aus den Bilanzmarktpreisen und der Variabilität des Bilanzenergiemarktes die zugrundeliegenden, nicht zufälligen Energieüberschüsse berechnen lassen:

$$V(x) = S\Phi^{-1}\left(\frac{p_h - \mathbb{E}[p_{\ddot{u}}]}{p_h - p_n}\right).$$

- Es gibt ein großes ungenutztes Gewinnpotential. Dies folgt insbesondere daraus, dass durch die große Spreizung zwischen den Preisen auf dem Spotmarkt und dem Bilanzenergiemarkt der RWE, fast die ganze Zeit in Erwartung deutliche Gewinne hätten erzielt werden können. Dies gilt zumindest für die Zeit, in der sich der mittlere Bilanzenergiepreis nicht sprunghaft ändert und nicht mit dem Spotmarktpreis übereinstimmt (siehe auch Abbildung 4.12).

Eine mögliche Erklärung der Diskrepanz zwischen Spot- und Bilanzmarktpreis wäre die, dass immernoch große Teile des Energiebedarfs nicht an der Börse, sondern direkt bei Erzeugern gekauft wurde. Jedoch reicht dies kaum aus, um dieses ungenutzte Ertragspotential zu erklären.

- Bei niedrigen Spotmarktpreisen sind Energiemängel aus finanzieller Sicht deutlich zu meiden. Soweit es geht ist antizyklisches Verhalten anzuraten: kaufe mehr Energie als nötig, wenn der mittlere Bilanzmarktpreis über dem Spotmarktpreis liegt, sonst weniger – oder mit anderen Worten: kaufe mehr Energie als nötig, wenn der Markt tendenziell über zu wenig Energie verfügt, sonst weniger.
- Soll dieses ohne ein kompliziertes Bestrafungssystem für dauerhafte Abweichungen vermieden werden, müssten die Preise auf dem Bilanzenergiemarkt entsprechend angepasst werden: also so, dass im Mittel  $p_z = \frac{p_h + p_n}{2}$  gilt.

Wenn, wie in den letzten Monaten,  $p_n$  praktisch Null ist und  $p_z$  im Mittel bei 2.5 cents/kWh liegt, würde ein hoher Bilanzmarktpreis von 5 cents/kWh die Beteiligten dazu veranlassen, freiwillig auf finanziell motivierte Energiekäufe zu verzichten (der Markt würde dann auch ohne Strafandrohung von sich aus ein  $V^* = 0$  wählen).

# Kapitel 5

## Offene Fragen und Sonstiges

Folgendes sind weitergehende Frage- und Problemstellungen, die entweder noch offen sind oder nur angeschnitten wurden.

- Die Strombörsen gewinnen immer mehr an Bedeutung, da die auf ihnen gehandelten Strommengen ständig steigen – jedoch wird längst nicht der ganze Strom der öffentlichen Netze an ihnen gehandelt. In wie weit wirkt sich dies auf die Beurteilung der bisher beobachteten Daten aus ?
- Es wurden nur die Stundenpreise am Spotmarkt mit einbezogen. Welchen Einfluss Strategien haben, die sich durch unterschiedliche Stromeinheiten zusammensetzen, bleibt offen.
- Es bleibt offen, wie sich eine Implementierung des Spotpreises als stochastischer Prozess (also die Modellierung von  $p_z$  als stochastischer Prozess anstatt eines gegebenen Wertes) auf die Strategie auswirken würde.
- Es ist ungeklärt, wie sich die Einhaltung der Randbedingung der nichtsignifikanten Abweichung von der Null auf eine Gleichgewichtssituation im Detail auswirken würde; auch deswegen, weil nicht klar ist, wie ein Verstoß genau ermittelt und gehandhabt wird.
- Wie sieht ein Gleichgewicht in gemischten Strategien aus ? Was passiert also, wenn jedes Subjekt zufällig aus einem Set von Strategien auswählt ? In so einem Fall gibt es immer ein Gleichgewicht (siehe [13]), das sich jedoch nicht von dem Gleichgewicht in reinen Strategien, falls ein solches existiert, unterscheiden muss.

- Bei Indikatorpreisfunktionen sollte immer  $\mathbb{E}[p_{\ddot{u}}] = p_z$  gelten, unabhängig von  $n$  und den Verteilungen der  $X_i$ .
- Wie könnten die Korrelationen  $\text{Cor}(X_i, X_j)$  in jeder Periode modelliert werden (bisher waren die  $X_i$  unabhängig, was eine starke Einschränkung ist) und welche Auswirkungen hätte dies auf die bisherigen Ergebnisse ?
- Gibt es Verteilungen, so dass es in einem Gleichgewicht geschehen kann, dass es ein  $v_i^* > 0$  und ein  $v_j^* < 0$  gibt ? Kann es überhaupt passieren, dass sich zwei Subjekte in einem Gleichgewicht entgegengesetzt verhalten ?
- Es bleiben viele denkbare Klassen von Preisfunktionen, die eventuell zu anderen Resultaten führen.

## 5.1 Lineare Preisfunktionen

Lineare Preisfunktionen sind nicht sinnvoll, selbst wenn man davon absieht, dass sie weder beschränkt noch nicht-negativ sind (dies könnte man vernachlässigen, wenn diese Regionen entsprechend unwahrscheinlich sind).

Denn angenommen  $f$  wäre von der Form  $f(M) = aM + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$ , dann würde gelten:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[G_i(v)] &= \mathbb{E}[(v_i - X_i)(aM + b)] - v_i p_z \\
 &= av_i \mathbb{E}[M] + v_i b - a \mathbb{E}[X_i M] - b \mathbb{E}[X_i] - v_i p_z \\
 &= -av_i^2 - av_i V_i + v_i(b - p_z) - a\sigma_i^2 \\
 \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{E}[G_i(v)]}{\partial v_i} &= -2av_i - aV_i + b - p_z = 0 \\
 \Leftrightarrow v_i &= \frac{b - p_z - aV_i}{2a} \\
 \Rightarrow v_i^* &= \frac{b - p_z}{a(n+1)} \quad \forall i
 \end{aligned}$$

Somit würde dann eine den Gewinn optimierende Strategie unabhängig von der Art der Marktteilnehmer sein – also unabhängig von den Verteilungen der Bedarfprognosen der Beteiligten, und dieses ist nicht plausibel.

## 5.2 24h-Autokorrelation

Interessant ist die in Abbildung 5.1 aufzufindende hohe Autokorrelation der zufälligen Abweichungen bei einem lag von 24 Stunden.

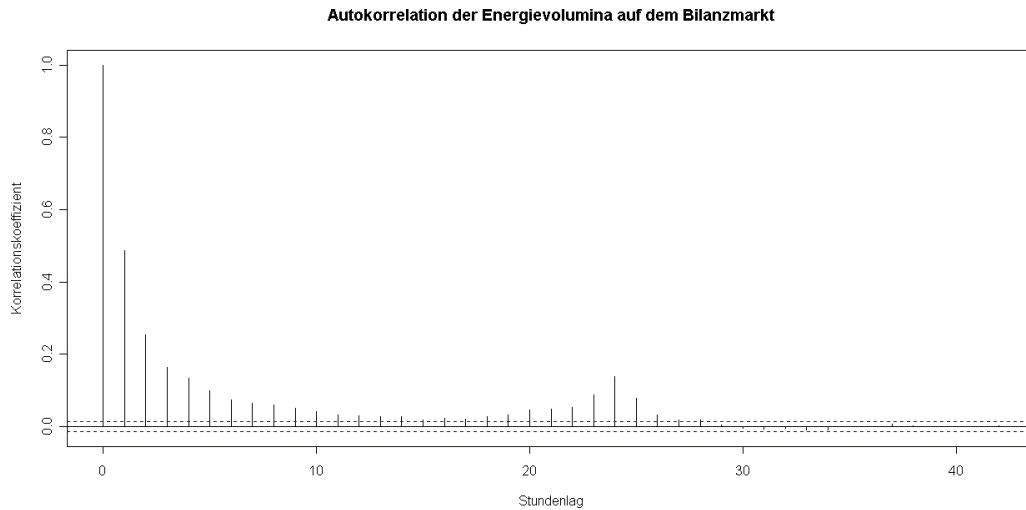


Abbildung 5.1: Autokorrelation von  $(\hat{V})$  auf dem Bilanzenergiemarkt

Dieser markante Zusammenhang könnte Rückschlüsse auf die Verhaltensweise des Marktes zulassen; zuerst müsste jedoch noch der Einfluss des Glättungsverfahrens eliminiert werden.

# Anhang A

## Verifikationen

Hier sind die Nachweise diverser Annahmen der statistischen Analyse zusammengefasst.

### A.1 Die Preisfunktion

Ein Blick auf die durch Subtraktion der geschätzten Preise von den tatsächlichen Preisen  $p_{\hat{u}}$  entstehenden Residuen  $r_t := p_{\hat{u}t} - \hat{f}(M_t)$  rechtfertigt die Einteilung der ersten vier Zeitabschnitte.

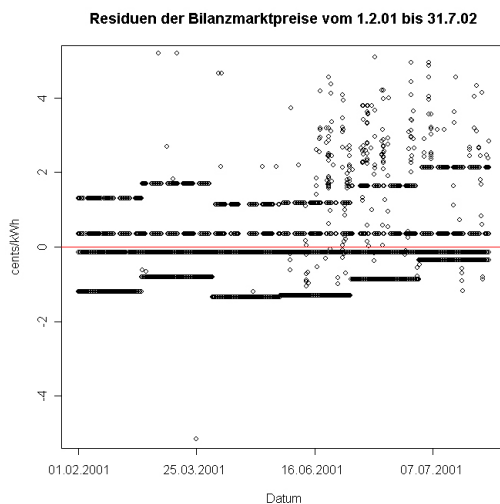


Abbildung A.1: Preis-Residuen im Abschnitt 1

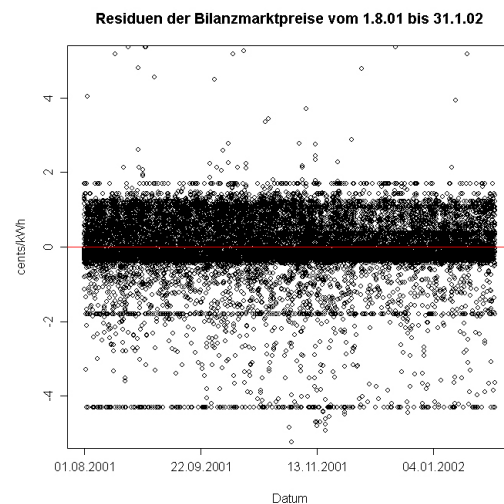


Abbildung A.2: Preis-Residuen im Abschnitt 2

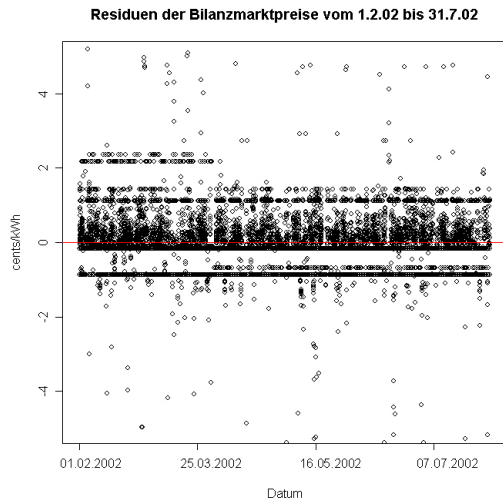


Abbildung A.3: Preis-Residuen im Abschnitt 3

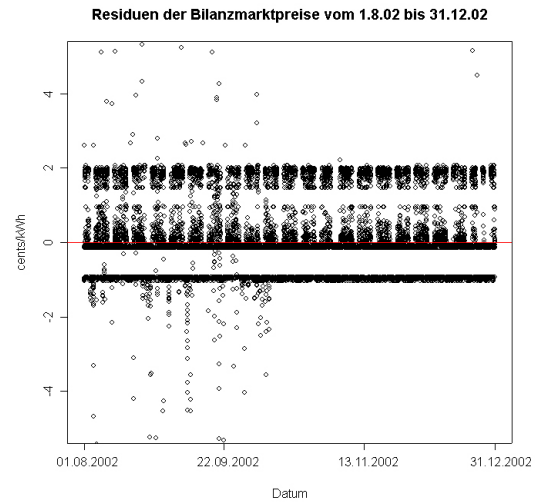


Abbildung A.4: Preis-Residuen im Abschnitt 4

Der fünfte Abschnitt wird trotz eines zum vierten Abschnitt ähnlichen Musters durch seinen wesentlich niedrigeren Preis  $p_n$  und höheren Preis  $p_h$ , sowie durch das in Abbildung 4.5 dargestellten, außergewöhnlich auffällige Marktverhalten legitimiert.

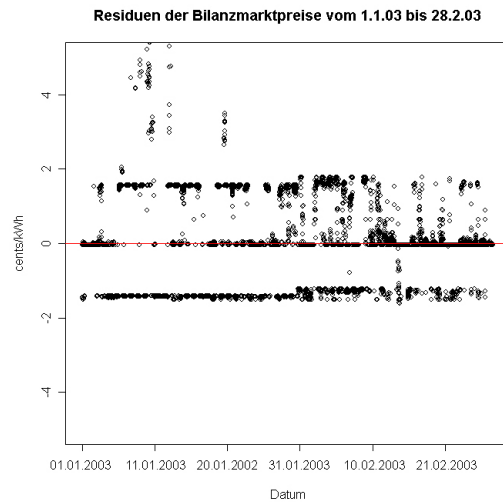


Abbildung A.5: Preis-Residuen im Abschnitt 5

Obwohl die tatsächliche Preisfunktion nicht durch eine simple Funktion dargestellt werden kann, da jegliche Faktoren die zur Preisfindung beitragen hier keine Rolle spielen, spiegelt eine simple zweiwertige Preisfunktion den gegebenen Sachverhalt doch recht zufriedenstellend wieder.



## A.2 Streuung der Residuen

Da die Standardabweichungen der  $M_t$  in Abhängigkeit der Zeit nicht konstant sind, wird für jede Stunde  $t$  – durch die statistische Standardabweichung der sie umgebenden  $x$  Stunden – eine Standardabweichung festgelegt<sup>1</sup>.

Zur Erinnerung:  $R_t := M_t + \hat{V}_t$ .

Dadurch entsteht eine Folge der geschätzten Streuungen

$$(\hat{S}) = \hat{S}_1, \dots, \hat{S}_{18192} \text{ mit } \hat{S}_t := \sqrt{\frac{1}{x-1} \sum_{k=t-\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + 1}^{t+\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \left( R_k - \sum_{l=t-\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + 1}^{t+\lfloor \frac{x}{2} \rfloor} \frac{R_l}{x} \right)^2}.$$

Wie soll nun  $x$  gewählt werden ?

Aus praktischen Gründen sollen die Daten aus einem Quartal, einem Monat, zwei Wochen, einer Woche, einer halben Woche, einem Tag oder einem halben Tag kommen; also  $x \in \{2880, 720, 336, 168, 24, 12\}$ .

Einerseits soll  $x$  möglichst groß sein um eine stabile Datenbasis zu besitzen um nicht einzelne Ausschläge überzubewerten, andererseits sollen sich je zwei benachbarte Streuungen  $\hat{S}_t, \hat{S}_{t+1}$  nicht signifikant unterscheiden, da sich die Streuungen in der Zeit nur langsam ändern sollen.

Hier machen wir uns folgendes zunutze (siehe [9]): wenn die Residuen  $R_1, \dots, R_n$  unabhängig, identisch und normalverteilt sind, dann ist für alle  $1 \leq i < n$  die Statistik

$$F = \frac{\text{Var}(R_1, \dots, R_i)}{\text{Var}(R_{i+1}, \dots, R_n)}$$

$F$ -verteilt mit Freiheitsgraden  $i$  und  $n - i$ . O.B.d.A. sei  $F \geq 1$ .

Ist  $F$  signifikant groß (auf einem 5%-Niveau), so wird die Streuung in den beiden Gruppen als verschieden angenommen; die Wahrscheinlichkeit, die Streuungen in beiden Gruppen als verschieden zu deklarieren, obwohl sie gleich sind, ist daher maximal 0.05.

Unter der Annahme, dass die Residuen normalverteilt sind und unter der Vernachlässigung der Korrelationen, ermitteln wir für jedes  $x$  den Anteil der Paare  $\hat{S}_t, \hat{S}_{t+1}$ , für die sich die Streuungen signifikant unterscheiden. Dasjenige  $x$ , für das sich dieser Anteil nicht mehr stark verringert und möglichst klein ist, wird als bestes  $x$  akzeptiert:

<sup>1</sup>Für die ersten und letzten  $x$  Stunden werden, um die Größe des Datensatzes konstant zu lassen, die fehlenden Daten durch die kommenden bzw. vergangenen Stunden ersetzt.

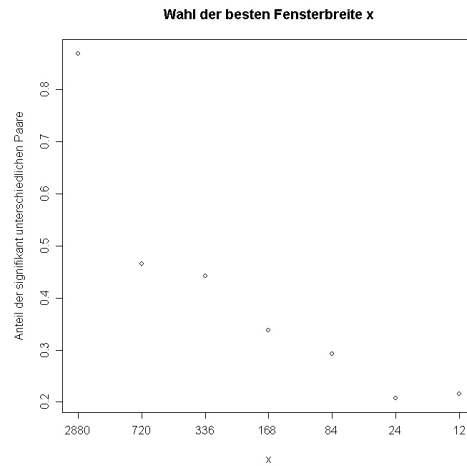


Abbildung A.6: Wahl der Zeitfenstergröße der Streuungen

Die Streuungen werden somit aus den umgebenden 24 Werten ermittelt.

### A.3 Test auf normalverteilte Prognosefehler

Zur Verifikation der Standardnormalverteilung der Residuen  $\frac{R_t}{\hat{S}_t}$  nutzen wir die Q-Q-Plots, sowie die Skewness (Schiefelage), Kurtosis (Wölbung) und die BJ-Statistik (siehe [10]).

Ist die Skewness kleiner als Null (größer Null), so ist die Verteilung zu linkslastig (rechtslastig). Ist die Kurtosis kleiner (größer) als Drei, so ist die Verteilung zu flach und hat zu große Schwänze (zu steil und hat zu kleine Schwänze). Ist die BJ-Statistik zu groß, so kann die Annahme der Normalverteilung abgelehnt werden. Die Konfidenzintervalle KI beziehen sich jeweils auf 95%.

Für die gesamte Zeitreihe ergeben sich dann folgende Statistiken:

**Skewness**  $-0.034386$ , KI:  $[-0.0356, 0.0356]$

**Kurtosis**  $3.02364$ , KI:  $[2.9288, 3.0712]$

**BJ-Statistik**  $4.0086$ , KI:  $[0, 5.99]$

Die Werte sind bis auf die t-Statistik auf dem 5%-Signifikanzniveau nicht auffällig jedoch zeigt die statistische Dichte (im Vergleich zur Dichte der Standardnormalverteilung) sowie der Q-Q-Plot, dass die Werte doch nahezu standardnormalverteilt sind:

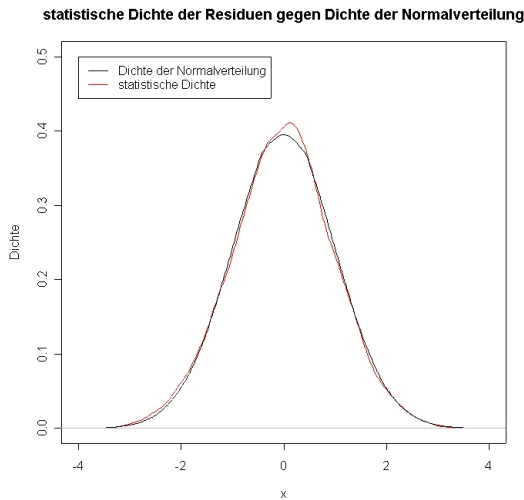


Abbildung A.7: Residuendichte

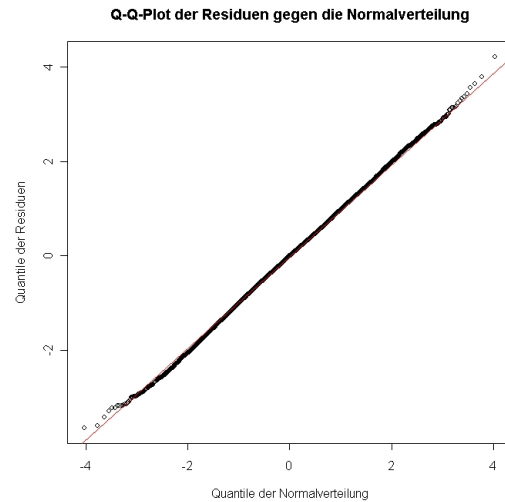


Abbildung A.8: Residuen-Q-Q-Plot

Die individuelle Optimierung innerhalb der fünf Zeitbereiche ergibt ein besseres Bild; ( $\hat{V}$ ) wird in jedem Zeitabschnitt individuell bestimmt, wobei  $\hat{S}$  übernommen wird, da die Überschneidungsbereiche sehr klein sind:

#### 1.2.2001 bis 31.7.2001

**Skewness**  $-0.03547$ , KI:  $[-0.0728, 0.0728]$  Keine Auffälligkeit.

**Kurtosis**  $2.9442$ , KI:  $[2.8543, 3.1457]$  Keine Auffälligkeit.

**BJ-Statistik**  $1.47414$ , KI:  $[0, 5.99]$  Keine Auffälligkeit.

Die Standardnormalverteilung im ersten Abschnitt wird akzeptiert. Dies wird auch durch den Q-Q-Plot in Abbildung A.10 bestätigt.

#### 1.8.2001 bis 31.12.2001

**Skewness**  $-0.05822$ , KI:  $[-0.0723, 0.0723]$  Keine Auffälligkeit.

**Kurtosis**  $3.018476$ , KI:  $[2.8555, 3.1445]$  Keine Auffälligkeit.

**BJ-Statistik**  $2.5559$ , KI:  $[0, 5.99]$  Keine Auffälligkeit.

Die Standardnormalverteilung im zweiten Abschnitt wird akzeptiert. Dies wird auch durch den Q-Q-Plot in Abbildung A.11 bestätigt.

**1.1.2002 bis 31.7.2002**

**Skewness** 0.022645, KI:  $[-0.0728, 0.0728]$  Keine Auffälligkeit.

**Kurtosis** 3.1757, KI:  $[2.8544, 3.1456]$  Auffällig hoch.

**BJ-Statistik** 5.964, KI:  $[0, 5.99]$  Gerade noch nicht signifikant.

Die Standardnormalverteilung wird noch akzeptiert, da zwei der drei Statistiken nicht dagegen und der Q-Q-Plot (Abbildung A.12) dafür sprechen.

**1.8.2002 bis 31.12.2002**

**Skewness**  $-0.06428$ , KI:  $[-0.0793, 0.0793]$  Nicht Signifikant.

**Kurtosis** 2.99648, KI:  $[2.8415, 3.1585]$  Keine Auffälligkeit.

**BJ-Statistik** 2.5292, KI:  $[0, 5.99]$  Keine Auffälligkeit.

Die Standardnormalverteilung wird auch im vierten Abschnitt akzeptiert.

Dies wird auch durch den Q-Q-Plot in Abbildung A.13 gerechtfertigt.

Im fünften Zeitabschnitt ist der Q-Q-Plot nicht ganz so gut, aber angesichts der hohen Schwankungen dennoch erstaunlich gut.

**1.1.2003 bis 28.2.2003**

**Skewness**  $-0.01296$ , KI:  $[-0.1276, 0.1276]$

Trotz des Schocks im fünften Abschnitt ist hier keine Auffälligkeit zu sehen.

**Kurtosis** 2.77855, KI:  $[2.745, 3.255]$

Die Kurtosis ist ebenfalls im Rahmen.

**BJ-Statistik** 2.933, KI:  $[0, 5.99]$

Keine Abweichung erkennbar.

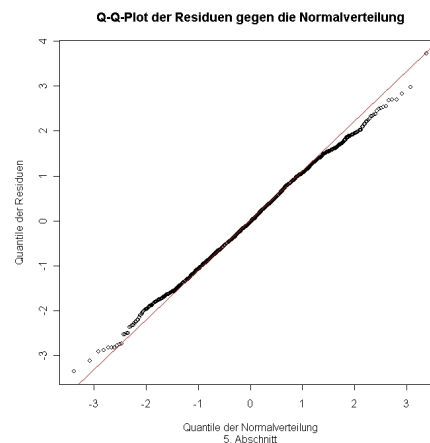
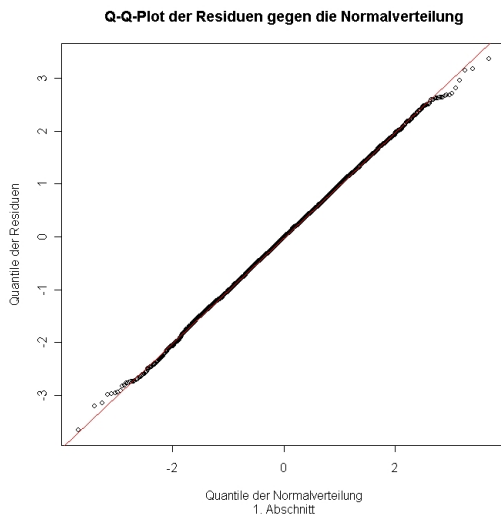
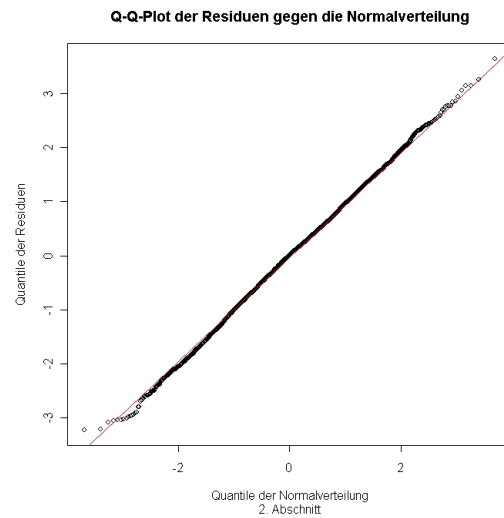
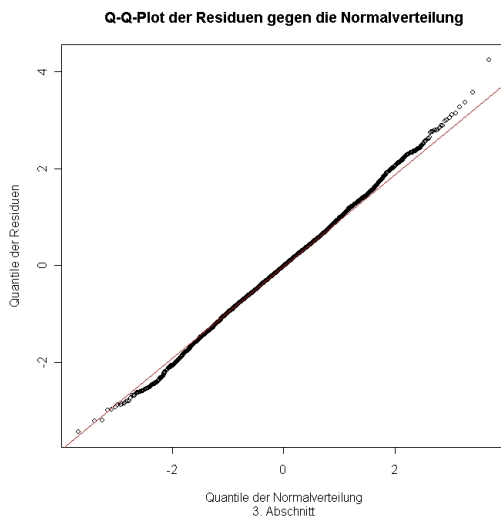
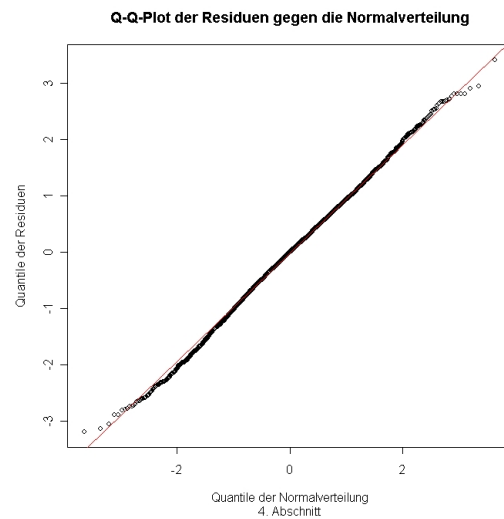


Abbildung A.9: Q-Q-Plot 5

Da die Q-Q-Plots der ersten vier Zeitabschnitte alle sehr ähnlich sind und keine signifikanten Auffälligkeiten zeigen, sind sie hier zusammengefasst.

Abbildung A.10: Q-Q-Plot im ersten  
ZeitabschnittAbbildung A.11: Q-Q-Plot im zweiten  
ZeitabschnittAbbildung A.12: Q-Q-Plot im dritten  
ZeitabschnittAbbildung A.13: Q-Q-Plot im vierten  
Zeitabschnitt

Wie gut zu erkennen ist, gibt es vom 01.02.2001 bis zum 31.12.2002 keine signifikanten Auffälligkeiten, die darauf hindeuten würden, dass keine Standardnormalverteilung vorliegt.

Auf den Vergleich der statistischen Dichte mit der tatsächlichen Dichte der Standardnormalverteilung haben wir verzichtet. In den ersten vier Zeitabschnitten sind kaum Unterschiede zu sehen. Selbst im fünften Abschnitt, in dem die schlechteste Übereinstimmung der statistischen Dichte vorliegt, gibt es keinen Anlass an

der Standardnormalverteilung zu zweifeln.

Insgesamt spricht nichts gegen eine generelle Standardnormalverteilung.

Hervorzuheben ist, dass auch im fünften Abschnitt trotz der heftigen Ausschläge auf dem Bilanzmarkt nichts gegen eine Normalverteilung spricht.

## A.4 Kreuzvalidierung

Bei der Glättung einer Zeitreihe ( $Z$ ) mit der *lowess*-Funktion kommt es vor allem auf die Wahl des Fensterparameters  $f$  an. Das von uns verwendete Auswahlkriterium ist Folgendes:

für  $1 < s < n$  sei  $(Z)_{(s)}$  die Zeitreihe  $Z_1, \dots, Z_{s-1}, Z_{s+1}, \dots, Z_n$  und die mit dem Parameter  $f$  geglättete Zeitreihe  $(Z)_{(s)}$  sei  $(\hat{Z})_{(s)}^f = \hat{Z}_1^f, \dots, \hat{Z}_{s-1}^f, \hat{Z}_{s+1}^f, \dots, \hat{Z}_n^f$ .

Ziel ist es nun das  $f$  so zu wählen, dass das prognostizierte  $\hat{Z}_s^f := \frac{\hat{Z}_{s-1}^f + \hat{Z}_{s+1}^f}{2}$  möglichst gut das tatsächliche  $Z_s$  wiedergibt.

$f$  wird also so gewählt, dass  $\sum_{s=2}^{n-1} (Z_s - \hat{Z}_s^f)^2$  minimiert wird. Aus praktischen Gründen wollen wir  $f$  so wählen, dass Daten entweder aus ein bis vier Monaten, ein bis drei Wochen oder ein bis sieben Tagen eingehen:

also  $f \in \left\{ \frac{4}{25}, \frac{3}{25}, \frac{2}{25}, \frac{1}{25}, \frac{3}{108}, \frac{2}{108}, \frac{1}{108}, \frac{6}{758}, \frac{5}{758}, \frac{4}{758}, \frac{3}{758}, \frac{2}{758}, \frac{1}{758} \right\}$

### Glättung der Energieüberschüsse

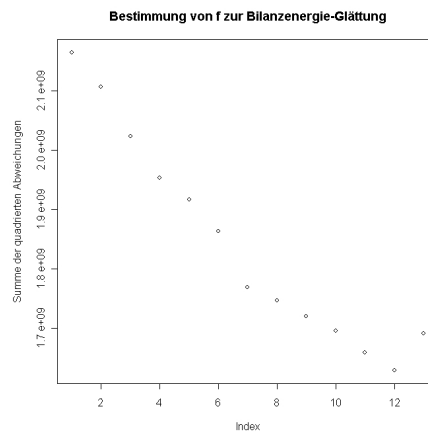


Abbildung A.14: Bestimmung des  $f$  zur Glättung der Energieüberschüsse

Da wir uns hier eine größere Detailfülle wünschen, setzen wir  $\delta$  auf 24 (vergleiche Anhang B); dadurch werden weniger Punkte zusammengefasst. Die beste Wahl

von  $f$  fällt somit auf  $\frac{2}{758}$ . Somit gehen maßgeblich jeweils die Daten aus zwei Tagen in die Glättung ein.

### Glättung der Spotmarktpreise

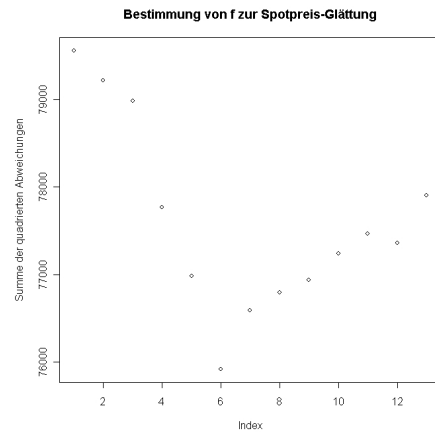


Abbildung A.15: Bestimmung des  $f$  zur Spotpreisglättung

Die obige Abbildung lässt die Wahl von  $f$  auf  $\frac{2}{108}$  fallen. Dadurch entsteht das Bild eines zweiwöchigen Trendes, da zur Glättung die gewichteten Daten aus zwei Wochen eingehen.

### Glättung der Bilanzmarktpreise

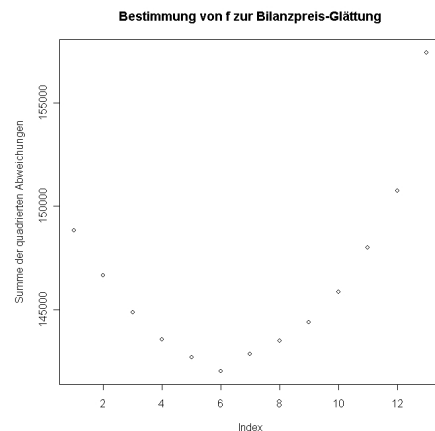


Abbildung A.16: Bestimmung des  $f$  zur Bilanzpreisglättung

Auch hier fällt die Wahl von  $f$  auf  $\frac{2}{108}$ . Dadurch entsteht wiederum das Bild eines zweiwöchigen Trendes.

Die Herleitung der Werte für die Fensterparameter  $f$  beruht somit auf einer nachvollziehbaren Grundlage, gibt jedoch keine Garantie, dass andere Kombinationen von  $f$  und  $\delta$  keine geeigneteren Ergebnisse liefern könnten.



# Anhang B

## Die lo(w)ess-Funktion

Die Lowessfunktion (lowess, locally weighted scatterplot smoothing) wurde von William S. Cleveland entwickelt (siehe [11]) und dient zur Glättung von insbesondere nicht-linearen Datensätzen in Scatterplots.

In dieser Arbeit benutzen wir die ursprüngliche Version mit der Implementierung in der Statistiksoftware **R**. Sie eignet sich sehr gut dazu, nicht-lineare Datensätze zu glätten, da sie sehr gut globale als auch lokale Veränderungen wiedergeben kann.

In erster Linie wird sie von zwei Parametern (siehe [12]) gesteuert. Der Fensterparameter  $f \in (0, 1]$  gibt an, welcher Anteil der umliegenden Datensätze bei der Berechnung eines Punktes einfließen soll – dabei werden naheliegende Werte stärker gewichtet. Je größer also  $f$  ist, desto glatter wird die Ausgabe.

Der zweite Parameter  $\delta$  gibt an, wie viele Punkte bei der Ausgabe zu einem Punkt zusammengefasst werden. Wurde keine Angabe gemacht, so wurde der Standardwert von 1% der Datensatzgröße verwendet. Ein hoher Anteil führt zu einer gröberen Auflösung des Ergebnisses und verdeckt lokale Veränderungen, während ein kleiner Anteil zu einer sehr feinen Auflösung führt.

Die richtige Wahl der Parameter hängt immer von dem angestrebten Ziel und den Umständen ab. Hier wurde die Wahl von  $f$  in erster Linie nach vorgegebenen Zeitintervallen ausgesucht und  $\delta$  nur dann verkleinert, wenn hauptsächlich lokale Veränderungen von Interesse waren.

Dabei ist immer zu berücksichtigen, dass eine große Detailfülle unter Umständen auch irreführend sein kann; nämlich dann, wenn sie zufällige Streuungen zu sehr gewichtet.

Die folgenden beiden Beispiele dienen zur Verdeutlichung des Nutzens der lowess-Funktion. Als Datensatz wurde die Funktion  $0.1x^4 + 0.8x^3 - 0.8x^2 + 2x$  an 110 Stellen in  $(-3, 8)$  ausgewertet und mittels unabhängigen  $\mathcal{N}(0, 5)$  verteilten Werten verzerrt.

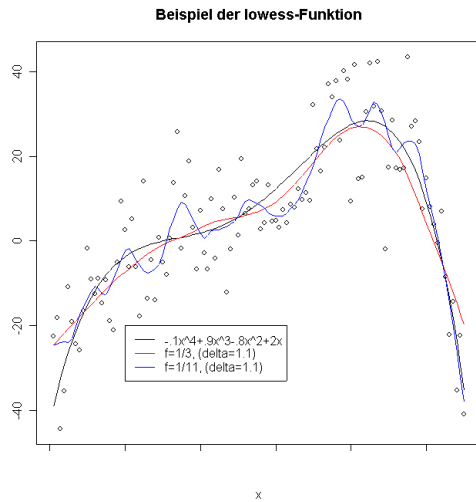


Abbildung B.1: lowess Beispiel 1

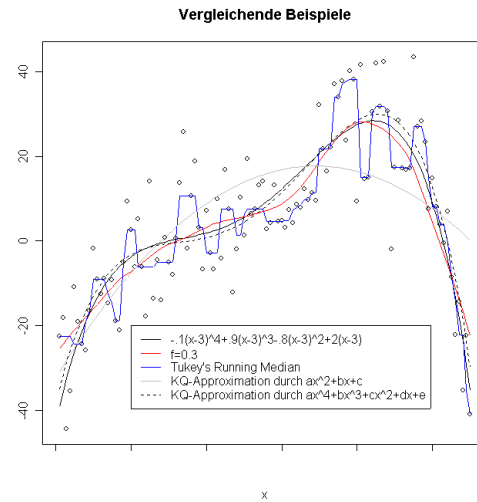


Abbildung B.2: lowess Beispiel 2

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die zu der Anfertigung dieser Diplomarbeit beigetragen haben.

Vor allem möchte ich mich bei Dr. Brooks Ferebee für seine konstruktiven Anregungen und stete Hilfsbereitschaft bedanken. Durch seine Vermittlung wurde der Grundstein dieser Arbeit gelegt.

Mein Dank gilt auch meinem Betreuer und Gutachter Prof. Dr. Anton Wakolbinger, der die Arbeit unterstützt hat.

Für Anregungen und der kritischen Durchsicht danke ich auch Dipl.-Math. Angelika Esser. Auch bedanke ich mich bei Prof. Dr. Hermann Dinges für seine kritischen Anmerkungen und der Bereitschaft, sich als Zweitgutachter zur Verfügung zu stellen.

Letzendlich bedanke ich mich bei Susanne Griebisch und meiner Mutter für die Korrekturlesung der Arbeit.

An dieser Stelle sei auch die deutsche Niederlassung der *endesa energia* erwähnt, welche die Motivation zu dieser Arbeit geliefert hat, in dem sie Kontakt zu Dr. Ferebee aufnahm, um die Eigenheiten des deutschen Energiemarktes zu untersuchen.

# Literaturverzeichnis

- [1] Eberhard Feess, *Mikroökonomie – Eine spieltheoretische- und anwendungsorientierte Einführung*. Grundlagen der Wissenschaft Band 6, Metropolis-Verlag, zweite Auflage, 2000
- [2] www.rwe.com, *Internetpräsenz der RWE AG*. Allgemeine Einstiegsseite für Kunden und Interessenten, April 2003
- [3] www.rwenet.com, *Internetpräsenz der RWE NET*. Einstiegsseite der RWE AG für Geschäfts- und Industriekunden, sowie Versorger und Kommunen, April 2003
- [4] www.eon.com, *Internetpräsenz der E.ON AG*. Allgemeine Einstiegsseite für Kunden und Interessenten, April 2003
- [5] www.rag-verkauf.de, *Internetpräsenz der RAG-Verkauf*. Allgemeine Einstiegsseite für Kunden und Interessenten, April 2003
- [6] www.bundeskartellamt.de, *Internetpräsenz des Bundeskartellamtes*. Allgemeine Einstiegsseite Interessenten, April 2003
- [7] www.eex.de, *Internetpräsenz der European Energy Exchange*. Allgemeine Einstiegsseite für Kunden und Interessenten, April 2003
- [8] Jan Hummel, *Realisierung eines Marktplatzes für Regelenergie*. eBusiness in der Energiewirtschaft, ABB-Utilities, 23.04.2002
- [9] John A. Rice, *Mathematical Statistic and Data Analysis*. Duxbury Press, Second Edition, 1995
- [10] Dong W. Cho, Kyung So Im, *A Test of Normality Using Gearys Skewness and Kurtosis Statistics*, paper published in November 19, 2002

- [11] William S. Cleveland, *Robust locally weighted regression and smoothing scatterplots*, J. Amer. Statist. Assoc. 74, 1979
- [12] The R Development Core Team, *The R Environment for Statistical Computing and Graphics*, Version 1.6.2 (Januar 2003)
- [13] Drew Fudenberg and Jean Tirole, *Game Theory*. The MIT-Press, fifth printing, 1996

# Abbildungsverzeichnis

2.1 Zulässiges $f$ . . . . .	5
3.1 $a = \frac{1}{2}$ . . . . .	19
3.2 $a = 1$ . . . . .	19
3.3 $a = 2$ . . . . .	19
3.4 Zweiwertiges $f$ . . . . .	23
4.1 Karte der Regelenergiezonen der vier TSO in Deutschland . . . . .	29
4.2 Schematische Lastkurve eines Unternehmens . . . . .	31
4.3 Spotmarktpreise der EEX pro Stunde . . . . .	32
4.4 Die Bilanzmarktpreise . . . . .	33
4.5 Energievolumina auf dem Bilanzenergiemarkt . . . . .	33
4.6 gemittelte Häufigkeiten der Überschüsse am Bilanzmarkt . . . . .	36
4.7 Streuungen $\hat{S}_t$ der Residuen $R_t$ . . . . .	37
4.8 Gemäß Modellannahmen berechnetes ( $V^*$ ) . . . . .	38
4.9 Gemäß Modellannahmen individuell berechnetes ( $V^*$ ) . . . . .	39
4.10 Approximierte $p_h$ und $p_n$ des Bilanzmarktes . . . . .	40
4.11 Berechnung von ( $V^*$ ) unter realen Bedingungen . . . . .	40
4.12 Gegenüberstellung der Bilanz- und Spotmarktpreise . . . . .	41
4.13 Reproduktion von ( $\hat{V}$ ) durch gemittelte Bilanzmarktpreise . . . . .	43
4.14 Approximiertes $\lambda$ . . . . .	44
4.15 $\alpha = 0.01, x = 0$ . . . . .	45
5.1 Autokorrelation von ( $\hat{V}$ ) auf dem Bilanzenergiemarkt . . . . .	50
A.1 Preis-Residuen im Abschnitt 1 . . . . .	51
A.2 Preis-Residuen im Abschnitt 2 . . . . .	51
A.3 Preis-Residuen im Abschnitt 3 . . . . .	52

A.4 Preis-Residuen im Abschnitt 4 . . . . .	52
A.5 Preis-Residuen im Abschnitt 5 . . . . .	52
A.6 Wahl der Zeitfenstergröße der Streuungen . . . . .	54
A.7 Residuendichte . . . . .	55
A.8 Residuen-Q-Q-Plot . . . . .	55
A.9 Q-Q-Plot 5 . . . . .	56
A.10 Q-Q-Plot im ersten Zeitabschnitt . . . . .	57
A.11 Q-Q-Plot im zweiten Zeitabschnitt . . . . .	57
A.12 Q-Q-Plot im dritten Zeitabschnitt . . . . .	57
A.13 Q-Q-Plot im vierten Zeitabschnitt . . . . .	57
A.14 Bestimmung des $f$ zur Glättung der Energieüberschüsse . . . . .	58
A.15 Bestimmung des $f$ zur Spotpreisglättung . . . . .	59
A.16 Bestimmung des $f$ zur Bilanzpreisglättung . . . . .	59
B.1 lowess Beispiel 1 . . . . .	62
B.2 lowess Beispiel 2 . . . . .	62