Asymptotische Hyperfunktionen, temperierte Hyperfunktionen und asymptotische Entwicklungen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Andreas U. Schmidt
aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main
1998

(D F 1)

vom Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
als Dissertation angenommen

Dekan: Prof. Dr. L. Führer

Gutachter: Prof. Dr. F. Constantinescu (Frankfurt) und
Prof. Dr. E. Brüning (Durban, Südafrika).

Datum der Disputation: 17. Februar 1999

Zusammenfassung. Wir führen eine neue Unterklasse der Fourier Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen ein mit dem Ziel, asymptotische Entwicklungen von Hyperfunktionen studieren zu wollen, wie sie für gewisse Distributionenklassen bekannt sind. Wir entwickeln zuerst die Theorie analytischer Funktionale auf Räumen integrabler Funktionen bezüglich Maßen mit Wachstum $O(|\mathrm{Re}\, z|^\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, im Unendlichen. Ein an das berühmte Phragmén–Lindelöf-Prinzip erinnerndes, einfaches analytisches Resultat bildet die Basis der Dualitätstheorie dieser Räume zu Funktionen mit festgelegtem Wachstumstyp. Wir studieren diese Dualität analytischer Funktionale mit Wachstumsbedingungen und unbeschränkten Trägern gründlich in einer Dimension unter Verwendung des von den Fourier Hyperfunktionen her bekannten exponentiell abfallenden Cauchy–Hilbert-Kerns. Daraus ergeben sich Analoga zu den Theoremen von Runge und Mittag–Leffler, die die Grundlage für die Garbentheorie der Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen sind, die wir sodann entwickeln.

Die für uns wichtigsten neuen Klassen von Fourier Hyperfunktionen sind die von unendlichem Typ, das heißt solche, die wie eine beliebige Potenz wachsen beziehungsweise schneller als jede Potenz abfallen. In n Dimensionen benutzen wir die Fouriertransformation und Dualität um das Verhältnis dieser *temperierten* beziehungsweise *asymptotischen* Hyperfunktionen zu bekannten Distributionenräumen zu studieren. Wir leiten Theoreme vom Paley–Wiener-Typ her, die es uns erlauben, unsere Hyperfunktionen in ein Schema zu ordnen, das Wachstumsordnung und Singularität gegenüberstellt. Wir zeigen, daß dieses Schema eine sinvolle Erweiterung des von Gelfand und Shilow zur Charakterisierung von Testfunktionenräumen eingeführten Schemas der Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ um verallgemeinerte Funktionen ist. Schließlich zeigen wir die Nuklearität der temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen.

Wir zeigen, daß die asymptotischen Hyperfunktionen genau die Klasse bilden, die *Moment-asymptotische Entwicklungen* erlauben, wie sie von Estrada *et al.* für Distributionen betrachtet wurden. Estradas Theorie ist damit ein Spezialfall der unsrigen. Für Hyperfunktionen lassen sich aber dank des Konzeptes der standard definierenden Funktionen die Moment-asymptotischen Entwicklungen als klassische asymptotische Entwicklungen von analytischen Funktionen verstehen. Wir zeigen die einfache Beziehung zwischen der Moment-asymptotischen Entwicklung und der Taylorentwicklung der Fouriertransformierten und benutzen dann ein Resultat von Estrada, um die Vollständigkeit unseres Moment-asymptotischen Schemas abzuleiten. Wir geben genaue Bedingungen für die Moment-Folgen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger an, die kürzlich von Kim *et al.* gefunden wurden. Die asymptotischen Entwicklungen übertragen wir auf den höherdimensionalen Fall, indem wir die von Kaneko und Takiguchi eingeführte Radontransformation für Hyperfunktionen verwenden. Die wohlbekannte Beziehung zwischen Radon- und Fouriertransformation zeigt wiederum das enge Verhältnis von asymptotischer Entwicklung zur Taylorentwicklung der Fouriertransformierten. Wir benutzen Kims Resultate, um die Moment-Folgen von Hyperfunktionen zu charakterisieren, die von Kugeln mit endlichem Radius getragen werden. Schließlich verwenden wir das Träger-Theorem der Radontransformation, um ein Resultat über das Singularitätenspektrum aus Bedingungen an die Radontransformierte abzuleiten.

Abstract. We introduce new subclasses of Fourier hyperfunctions satisfying polynomial growth conditions at infinity with the intention to study asymptotic expansions in hyperfunction theory, which are known to hold in certain spaces of distributions. We begin by developing the theory of analytic functionals on spaces of integrable functions with respect to measures of growth $O(|\operatorname{Re} z|^\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, at infinity. A simple analytic result for these Hardy type spaces, reminiscent of the famous Phragmén–Lindelöf principle, prepares the ground for the duality of these functions to spaces of functions of fixed polynomial growth at real infinity. We study this duality theory for analytic funcionals with growth conditions and unbounded carriers in full detail in one dimension, utilizing the exponentially decreasing Cauchy–Hilbert kernel known from the theory of Fourier hyperfunctions. We derive theorems of Runge and Mittag–Leffler type and thereby lay the grounds for a theory of hyperfunctions of the namely growth types as a flabby sheaf theory on the compactified space $\mathbb{D} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$, which is then exhibited.

The most important new types of Fourier hyperfunctions are such with growth type $\pm\infty$, that is, growing with arbitrary polynomial type or decaying faster than any polynomial, respectively. In higher dimensions we use Fourier transformation and duality to examine relations of these *tempered* and *asymptotic* hyperfunctions to known classes of test functions, distributions and hyperfunctions. We identify the Fourier transforms of tempered and asymptotic hyperfunctions by theorems of Paley–Wiener type which allow us to order these spaces into a scheme relating growth type to singularity. This scheme is shown to be a sensible extension to generalized functions of the scheme of spaces $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ which was introduced by Gelfand and Shilov to classify the spaces of test functions for distributions. Finally, we show the nuclearity of the spaces of tempered and asymptotic hyperfunctions.

Further, it is shown in one dimension that the *asymptotic* hyperfunctions which decay faster than any negative power are precisely the class that allow *moment asymptotic expansions* at infinity, as were studied by Estrada *et al.* for distributions. We show that Estradas theory of asymptotic expansions is contained in ours. But for hyperfunctions, these asymptotic expansions can be related to the classical asymptotic expansions of analytic functions by the concept of standard defining functions. We show the simple relation of the moment asymptotic expansion of asymptotic hyperfunctions to the Taylor expansion of their Fourier transform, by which we can use a result of Estrada to show the completeness of the asymptotic scheme in our case. We cite the necessary and sufficient conditions for the moment sequences of hyperfunctions with compact support, which were recently found by Kim *et al.* These asymptotic expansions are carried over to the higher-dimensional case by apploying the Radon transformation for hyperfunctions, as introduced by Kaneko and Takiguchi. The well-known relation between Radon and Fourier transformation shows again the relation between the moment asymptotic expansion of hyperfunctions and the Taylor expansion of their Fourier transforms. We use Kim's result to characterize the moment sequences of hyperfunctions carried by balls with finite radius. Finally, we use the support theorem for the Radon transformation to derive a condition on the singularity spectrum of a hyperfunction by conditions on its Radon transform.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mathematics is that part of physics
where the experiments are very cheap.

V. I. Arnold

Das Motiv. Die Grundlage dieser Arbeit ist nicht die Absicht, ein konkretes Problem zu lösen, sondern die Überzeugung, daß Mikio Satos Theorie der Hyperfunktionen, die er Ende der fünfziger Jahre in den Arbeiten [**Sat59, Sat60**] entwickelt hat, eine wesentliche Bereicherung der angewandten Mathematik und insbesondere der mathematischen Physik ist. In diesem Sektor ist der Bekanntheitsgrad der Hyperfunktionen aber eher gering, sieht man von der von E. Brüning, S. Nagamachi und N. Mugibayashi untersuchten Quantenfeldtheorie mit Fourier Hyperfunktionen (HFQFT) ab. Diese stellt in der Tat den gegenwärtig wichtigsten Aspekt der angewandten Hyperfunktionentheorie dar, siehe [**NM76a, NM76b, NM77, NM79, NM86, BN89, BN98**].

Obwohl sie selbst keine Anwendung der Hyperfunktionen auf die Physik ist, soll diese Arbeit einen Beitrag dazu leisten, Hyperfunktionen „anwendbarer“ zu machen. Unsere Hoffnung und Überzeugung ist es, daß ihre Ergebnisse tatsächlich zum Beispiel in der HFQFT Verwendung finden können.

Das Instrument, um das wir die Hyperfunktionentheorie bereichern wollen, ist das der asymptotischen Analysis, insbesondere der *asymptotischen Entwicklungen*, die seit ihrer Erfindung durch Poincaré im Jahre 1886 mannigfache Anwendung in scheinbar weit voneinander entfernten Gebieten von Mathematik und Naturwissenschaft gefunden haben (siehe unten).

Doch beschreiben wir zunächst die Pole, von denen wir ausgehen.

Hyperfunktionen. Satos Idee, verallgemeinerte Funktionen als Randwerte holomorpher Funktionen darzustellen, erwies sich als äußerst fruchtbar. Wir wollen hier keinen Abriß der nun beinahe vierzigjährigen, lebhaften Geschichte der Hyperfunktionentheorie geben, sondern verweisen dafür auf die Einleitung von [**Ito88**], in der sie kurz dargestellt ist. Wichtiger ist es für uns, die drei großen Arten des Herangehens an Hyperfunktionen darzustellen, die sich im Laufe der Zeit herauskristallisiert haben:

Der *algebro-analytische Zugang* basiert auf den kohomologischen Methoden, die für die Begründung der Garbentheorie der Hyperfunktionen in mehr als einer Dimension nötig sind und mündet unmittelbar in die mikrolokale Analysis ein. Dieser Zugang ist sehr kompakt dargestellt in [**KKK86**]. Er ist wohl der zur Zeit lebendigste Teil der Hyperfunktionentheorie und wohl auch der „sauberste,“ beziehungsweise fundamentalste, denn keiner der anderen Zugänge kommt ganz ohne ihn aus.

Der ursprüngliche Zugang über *Randwerte holomorpher Funktionen* ist demgegenüber erheblich handwerklicher und basiert ausschließlich auf funktionentheoretischen Mitteln. Wer ihn verfolgt, steht in höheren Dimensionen vor dem Problem, den Randwerten eine sinnvolle, intrinsische Definition zu geben. Dies liegt natürlich am qualitativen Unterschied zwischen Funktionentheorie in einer und mehreren Dimensionen. Dennoch konnte Akira Kaneko in seinem Buch [**Kan88**] zeigen, daß auch dieser Weg mit Erfolg beschritten werden kann und zu kaum weniger starken Resultaten führt als der algebroanalytische. Sein Vorteil liegt in der Elementarität der verwendeten Methoden, sein Nachteil darin, daß er die Garbentheorie der Hyperfunktionen nicht ohne weiteres liefern kann.

Schließlich kann man Hyperfunktionen auch als *analytische Funktionale* auffassen in dem Zugang, den wir als *Dualitätsmethode* bezeichnen. Dies bedeutet eine Rückkehr zur Distributionentheorie, und daher eignet sich dieser Zugang besonders zum Vergleich von Hyperfunktionenklassen mit bekannten Distributionenräumen (durch Vergleich der Testfunktionenräume). Die Dualitätsmethode verwendet ziemlich ausgefeilte Methoden der topologischen Vektorräume und ist insbesondere in der Lage, die Garbentheorie der Hyperfunktionen unabhängig vom algebro-analytischen Zugang zu rekonstruieren. Die Methode geht auf Martineau und Shapira zurück, mit wichtigen Beiträgen von Junker und anderen. Konsequent zur Konstruktion welker Garben von Hyperfunktionen wurde sie von Y. Ito ausgenutzt, wie er es in [**Ito88**] dargestellt hat.

Abgesehen davon, daß Hyperfunktionen gegenüber Distributionen eine wesentliche Erweiterung darstellen, liegt ihre Attraktivität in der Art, wie in ihrer Theorie verschiedene Bereiche der Mathematik zusammenfließen, denn die drei Zugänge schließen sich nicht gegenseitig aus, sondern gehen vielmehr ineinander über.

Wir müssen noch auf eine wichtige Verallgemeinerung der ursprünglichen, Satoschen Hyperfunktionentheorie eingehen: Die sogenannten Fourier Hyperfunktionen (FHF), die T. Kawai in [**Kaw70**] vorgestellt hat. Wenn man die Fouriertransformation für Hyperfunktionen implementieren will, so muß man — im Randwertzugang — dafür sorgen, daß die Fouriertransformierte eines Randwertes wieder ein Randwert, das heißt eine holomorphe Funktion „abseits“ der reellen Achse, ist. Aussagen von der Art des Paley–Wiener-Theorems, das die Singularität einer Funktion dem asymptotischen Wachstum ihrer Fouriertransformierten gegenüberstellt, zeigen, daß man dazu an die Randwerte Wachstumsbedingungen im unendlichen stellen muß. Es zeigt sich, daß die allgemeinste zulässige Bedingung hierfür die des *infraexponentiellen* Wachstums ist. Stellt man diese Wachstumsbedingung im Unendlichen an die Randwerte, so erhält man eine Hyperfunktionentheorie, die abgeschlossen ist unter der Fouriertransformation.

Weitere Verallgemeinerungen der Hyperfunktionentheorie, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen, betreffen vektorwertige FHF, das heißt solche mit Werten in allgemeinen, topologischen Vektorräumen, vergleiche [**Ito92**] und die dortigen Literaturangaben. Auf die sogenannte *modifizierte* FHF-Theorie, werden wir in Abschnitt 3.6 noch zurückkommen. Sie sei hier deshalb nur am Rande erwähnt, vergleiche aber [**Sab85**].

Asymptotische Entwicklungen. Die Bedeutung der asymptotischen Analysis in vielen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik, wie etwa Zahlentheorie, komplexer Differentialgleichungen oder spezieller Funktionen zu schildern fehlt hier der Raum, siehe nur die klassischen Werke [**WW52, Was65, Olv97**]. Was uns interessiert und mit zu dieser Arbeit angeregt hat, ist vielmehr die Erweiterung des Begriffs der asymptotischen Entwicklung auf Distributionen, die auf Jochen Brüning zurückgeht und von R. Estrada *et al.*

entwickelt und angewendet wurde, vergleiche [**EK90, DE94, DEK96, EF97, EGBV98**]. Diese Autoren betrachten Entwicklungen von geeigneten Distributionen in Reihen von Ableitungen der im Ursprung konzentrierten δ-Funktion, wobei die Koeffizienten im wesentlichen bestimmt sind durch die Momente

$$\langle f(x), x^n \rangle$$

(in einer Dimension) der Distribution f. Diese sogenannte *Moment-asymptotische Entwicklung* erweist sich als asymptotische Entwicklung im schwachen Sinne, das heißt in Auswertung auf Testfunktionen $\phi(x/\lambda)$, wenn man den Skalenparameter λ gegen Unendlich gehen läßt. Die Distributionenklasse $\mathscr{K}'$, in der diese Moment-Asymptotik möglich ist, besteht aus Distributionen, die im sogenannten Cèsaro-Sinne schneller als jede Potenz abfallen, so daß die Momente gerade alle wohldefiniert sind. Gerade die letzten Arbeiten [**EF97, EGBV98**] zeigen das große Anwendungspotential dieser Technik in der mathematischen Physik, namentlich für die asymptotische Untersuchung von Integralkernen von Differentialoperatoren, und eventuell sogar in der nichtkommutativen Geometrie, vergleiche den Ausblick am Ende dieser Arbeit.

Das Ziel. Wir wollen Klassen von Hyperfunktionen definieren, für die die Moment-asymptotische Entwicklung ebenfalls möglich ist, und die damit deren Anwendungsbereich auf die Hyperfunktionen erweitert. Wir wollen zeigen, daß Estradas Moment-Asymptotik ein Spezialfall unserer ist und daß uns alle von ihm entwickelten Techniken damit prinzipiell auch für Hyperfunktionen zur Verfügung stehen. Bei der Verallgemeinerung der Moment-Asymptotik auf mehr als eine Dimension soll eine weitere Spezialität der Hyperfunktionen ins Spiel kommen: Die von Kaneko und Takiguchi in [**KT95**] definierte Radontransformation für Fourier Hyperfunktionen.

Unsere Absicht ist es, sozusagen ein Stück „gebrauchsfertige Mathematik" darzustellen. Wir glauben, daß diese Ideen gute Aussichten auf konkrete Anwendungen haben, wofür der bisherige Erfolg der asymptotischen Analysis ein starkes Indiz ist.

Der Plan. Wie sind nun die „richtigen" Hyperfunktionen, die eine gute Kontrolle über das asymptotische Verhalten erlauben, zu konstruieren? Das Rezept ist nach dem oben über Fourier Hyperfunktionen gesagten klar: Will man asymptotische Wachstumsbedingungen für eine Klasse von Hyperfunktionen implementieren, so muß man dies auf der Ebene der Randwerte tun. Das heißt, man hat konkrete Wachstumsbedingungen an holomorphe Funktionen zu stellen und es ist klar, daß die für die Moment-asymptotische Entwicklung geeigneten Bedingungen gerade solche polynomialer Art sind.

Damit sind die Leitlinien dieser Arbeit festgelegt: Wir definieren holomorphe Funktionen, die sich im Unendlichen wie Potenzen verhalten, bauen darauf eine Hyperfunktionentheorie und studieren dann die asymptotischen Entwicklungen der hyperfunktionentheoretischen Gegenstücke der Distributionenklasse $\mathscr{K}'$. Dies werden Hyperfunktionen sein, die im Sinne der Randwerte schneller als jede Potenz abfallen und die wir daher *asymptotische Hyperfunktionen* nennen. Von den drei oben beschriebenen Zugängen zu Hyperfunktionen benutzen wir dabei nur die beiden elementaren über Randwerte und Dualität und lassen die Kohomologietheorie — außer in einer Dimension — unbeachtet. Dies erlauben wir uns aus folgenden Gründen: Erstens wollen wir unsere asymptotischen Hyperfunktionen mit Distributionen vergleichen und dafür ist die Dualitätsmethode das Mittel der Wahl. Und zweitens ist die asymptotische Analyse eine *elementare Methode*, die ursprünglich im Rahmen analytischer Funktionen entwickelt wurde. Dies legt die Beziehung zu Randwerten nahe. Insgesamt würde eine allgemeine kohomologische Betrachtung nichts zu unserem Gegenstand beitragen, sondern eher vom wesentlichen ablenken.

Unser Programm zerfällt in drei Teile, entsprechend derer wir diese Arbeit gegliedert haben: Im ersten Teil entwickeln wir eine vollständige Theorie der Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen in einer Dimension. Damit zeigen wir die grundsätzliche Möglichkeit, diese *temperierten* und asymptotischen Hyperfunktionen sinnvoll zu definieren und legen die notwendigen Begriffe für später fest. Im zweiten Teil untersuchen wir unsere Hyperfunktionenklassen, die Unterklassen der Fourier Hyperfunktionen sind, mit der Dualitätsmethode und im Zusammenspiel mit der Fouriertransformation. Dabei steht das Aufzeigen der vielfältigen Beziehungen zu schon bekannten Distributionen und Hyperfunktionen im Vordergrund. Schließlich können wir mit diesen Ergebnissen im dritten Teil die Moment-asymptotischen Entwicklungen asymptotischer Hyperfunktionen betrachten. Nun zu den Teilen im einzelnen:

Teil I folgt im wesentlichen den Kapiteln 1, 2 und 3 in [**Mor93**]. In Kapitel 1 führen wir holomorphe Funktionen vom Typ γ, das heißt solche, die sich im Unendlichen wie $|\mathrm{Re}\, z|^\gamma$ verhalten, ein. Für die angestrebte Dualitätstheorie brauchen wir noch die sozusagen komplementäre Art von Funktionen, also solche, die gegen Funktionen vom Typ γ integrabel sind, da wir später die Dualität über Linienintegrale definieren werden. Wir zeigen ein Ergebnis, das an das berühmte Phragmén–Lindelöf-Prinzip erinnert und es uns ermöglicht, von Integrabilität über gewisse unbeschränkte Gebiete in der komplexen Ebene (bei uns sind dies im wesentlichen immer Streifen endlicher Breite parallel zur reellen Achse) auf Integrabilität über unendliche Wege zu schließen. Dies ist die Grundlage für die Dualität zwischen Funktionen vom Typ γ und den sogenannten γ-integrablen Funktionen. Man kann an dieser Stelle einen engen Zusammenhang zur Theorie der Hardyräume erkennen, vergleiche die Anmerkungen 1.1 und 1.2 auf den Seiten 19 und 20. Die Dualität, die wir zeigen, ist so etwas wie die zwischen H^1 und seinem Dualraum H^∞. Wir definieren im ersten Kapitel geeignete Räume als lokalkonvexe Räume mit der topologischen Struktur von Fréchet-Schwartz- beziehungsweise dualen Fréchet-Schwartz-Räumen. Dies tun wir auch für die Räume asymptotischer und temperierter Funktionen, die schneller als jede Potenz fallen beziehungsweise mit einer beliebigen Potenz steigen und die für uns am wichtigsten sein werden. Damit sind wir bereit, in Kapitel 2 die Dualitätsmethode auf analytische Funktionen vom Typ γ, auf asymptotische und temperierte, und auf zwei weitere Varianten, die wir *infra-*γ- und *sub-*γ-Funktionen genannt haben, anzuwenden. Wesentliches Hilfsmittel sind hierbei die sogenannten *reproduzierenden Kerne*, die zu einem analytischen Funktional einen Repräsentanten in Form einer holomorphen Funktion liefern. Da hier die Wachstumsordnung entscheidend ist, benutzen wir den exponentiell abfallenden Cauchy–Hilbert-Kern, der diese erhält. Aus den Dualitätssätzen ergeben sich Entsprechungen der Theoreme von Runge und Mittag–Leffler, die die Grundlage für die Garbentheorie der Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen sind, welche wir sodann in Kapitel 3 entwickeln. Dort zeigen wir, daß unsere Hyperfunktionen auf der Kompaktifizierung $\mathbb{D} = \mathbb{R} \sqcup \{\pm\infty\}$ eine welke Garbe bilden und somit eine lokale Theorie verallgemeinerter Funktionen darstellen. Schließlich vergleichen wir die temperierten Hyperfunktionen mit den Distributionenklassen

$\mathscr{S}'$ und $\mathscr{K}'$ unter Verwendung der bekannten Randwertdarstellung von Distributionen durch holomorphe Funktionen, vergleiche [**Bre65**], und des von Estrada verwendeten Begriffs der Cèsaro-Wachstumsordnung von Distributionen. Es zeigt sich, daß die temperierten Distributionen auf natürliche Weise stetig in die temperierten Hyperfunktionen eingebettet sind (was auch unsere Bezeichnung rechtfertigt). Für $\mathscr{K}'$ erweist sich das Verhältnis als nicht ganz so einfach. Dies führt uns direkt zu den *modifizierten* asymptotischen Hyperfunktionen, bei denen die Definitionsgebiete der Randwerte keine Streifen parallel zur reellen Achse mehr sind, sondern sich etwas von ihr „wegneigen" und einen endlichen Öffnungswinkel haben. In die modifizierten asymptotischen Hyperfunktionen läßt sich letztlich auch $\mathscr{K}'$ stetig einbetten.

Teil II ist der Strukturtheorie der temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen gewidmet, womit wir das Zusammenspiel von Wachstumsordnung und Dualität unter der Fouriertransformation meinen. In Kapitel 4 betrachten wir dieses Wechselspiel, das die Entsprechungen der wohlbekannten Paley–Wiener-Theoreme darstellt, qualitativ, das heißt über Kanekos Randwertzugang. Dementsprechend orientiert sich der Aufbau dieses Kapitels an Kapitel 7 von [**Kan88**]. Das Hauptergebnis ist, daß asymptotische Hyperfunktionen unter der Fouriertransformation zu (infra-exponentiellen) unendlich oft differenzierbaren Funktionen werden und umgekehrt. In Kapitel 5 schauen wir dann sehr viel genauer hin, indem wir die Topologien der Räume von Hyperfunktionen und analytischer Funktionen in die Wirkung der Fouriertransformation miteinbeziehen. Zieht man die bekannten Dualitäten in betracht, dann erhält man so eine ganze Menge Information über temperierte und asymptotische (Hyper)funktionen und ihre isomorphen Bilder unter der Fouriertransformation. Wir werden darin die Struktur des Gelfand–Schilow-Schemas der Testfunktionenräume $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ wiedererkennen, das Wachstumsordnung und Singularität gegenüberstellt. Wir sehen dadurch, daß unsere und die Fourier Hyperfunktionen das Schema in sinnvoller Weise um verallgemeinerte Funktionen erweitern. Schließlich zeigen wir die Nuklearität unserer Hyperfunktionenräume, wodurch wir in dem Ordnungsschema etliche Gelfand-Tripel finden, was für potentielle Anwendungen sehr interessant sein kann.

Im letzten Teil kommen wir schließlich zu den asymptotischen Entwicklungen asymptotischer Hyperfunktionen, zunächst in Kapitel 6 in einer und dann in Kapitel 7 in mehreren Dimensionen. Wir zeigen die abstrakte Form im Sinne verallgemeinerter Funktionen und die oben angedeutete Parameterform via Dualität der Moment-asymptotischen Entwicklung für die normalen und die modifizierten asymptotischen Hyperfunktionen, womit wir gezeigt haben, daß Estradas Asymptotiken in der Klasse $\mathscr{K}'$ in unseren enthalten sind. Über die Randwertdarstellung der Hyperfunktionen haben wir aber die Chance, die asymptotischen Entwicklungen wieder als das zu verstehen, was sie ursprünglich einmal waren: asymptotische Entwicklungen analytischer Funktionen in gewissen Sektoren der komplexen Ebene mit Vertex im Ursprung. Dies geht besonders einfach für Hyperfunktionen mit kompaktem Träger, für die die asymptotische Entwicklung einfach zur Laurentreihe wird, die in einem Annulus konvergiert. Wir zeigen die einfache Beziehung zwischen der Moment-asymptotischen Entwicklung einer asymptotischen Hyperfunktion im Unendlichen und der Taylorentwicklung der Fouriertransformierten um den Nullpunkt und benutzen dann ein Resultat von Estrada aus [**DE94**], das im wesentlichen besagt, daß das sogenannte *Moment-Problem* in der Klasse $\mathscr{S}$ lösbar ist, um die Vollständigkeit unseres Moment-asymptotischen Schemas abzuleiten. Das bedeutet, daß zu jeder Folge von komplexen Zahlen eine asymptotische Hyperfunktion mit genau dieser Folge als Moment-Folge existiert. Wir geben scharfe Bedingungen für die Moment-Folgen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger an, die kürzlich von Kim *et al.* gefunden wurden und auf einem anderen Zugang zu Fourier Hyperfunktionen über Randwerte von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung beruhen. Um im allgemeinen Fall den Zusammenhang zu asymptotischen Entwicklungen analytischer Funktionen zurückzugewinnen, führen wir den Begriff der *spektralen Asymptotik* ein, der mit der Aufteilung einer Hyperfunktion in Randwerte aus der oberen und unteren Halbebene zusammenhängt. Zum Schluß von Kapitel 6 bringen wir einige Beispiele, die zwar nicht als ernsthafte Anwendungen gedacht sind, aber sehr wohl das Potential illustrieren können, das in der Moment-Asymptotik für Hyperfunktionen liegt. Die asymptotischen Entwicklungen übertragen wir in Kapitel 7 auf den höherdimensionalen Fall, indem wir die von Kaneko und Takiguchi in [**KT95**] eingeführte Radontransformation für Hyperfunktionen verwenden. Diese Zerlegung einer Hyperfunktion in einen winkelabhängigen und einen eindimensionalen Anteil hat den Vorzug der sphärischen Symmetrie gegenüber der trivialen Übertragung der Entwicklungen auf kartesische Produkte. Weiter sind die Koeffizienten der Entwicklung im wesentlichen die *Helgason-Momente* der Radontransformierten und es gibt wieder einen eleganten Zusammenhang zur Taylorentwicklung der Fouriertransformierten. Kims oben erwähnte Resultate können wir dann auch auf höhere Dimensionen verallgemeinern, dank des *Satzes vom Träger* für die Radontransformation, mit dem man auf den Träger des Urbildes einer Radontransformierten schließen kann. Dies ergibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Helgason-Moment-Folgen der Radontransformierten von Hyperfunktionen, die von Kugeln mit endlichem Radius getragen werden. Wir beschließen unsere Untersuchungen mit einigen Bemerkungen zum Singularitätenspektrum.

In Anhang A stellen wir die asymptotischen Entwicklungen von Hyperfunktionen einer bestimmten Art von *konvergenten* Entwicklungen gegenüber, die in [**CCC85**] untersucht wurden: Den sogenannten *Störungsentwicklungen*, die eine Art von Taylorentwicklung im Sinne analytischer Funktionale von Hyperfunktionen mit einer Störung im Argument der Form $f(x + V(X))$ darstellen. Am Schluß der Arbeit haben wir zur Bequemlichkeit des Lesers einige bekannte Definitionen und Aussagen, die wir im Text verwenden, in Anhang B zusammengestellt.

Apologie. Aus den oben erwähnten Gründen haben wir den kohomologischen Aspekt der Hyperfunktionentheorie in vorliegender Arbeit — außer im eindimensionalen Fall, wo er aber fast trivial ist — weitgehend vernachlässigt. Unsere Behauptung ist aber, daß dies bei unserer Intention und unserer Wahl des Zugangs zu Hyperfunktionen kein Nachteil ist. Dies wird von all denen, die das „Wesen" der Hyperfunktionen in ihrer kohomologischen Natur sehen, sicher bestritten werden. Nun kann man natürlich stets, wenn zu einer mathematischen Theorie mehrere Zugänge bestehen, die gerade *nicht* gänzlich unabhängig voneinander sind, einen davon — in der Regel den axiomatischsten — herausheben und für das Fundament der Sache halten, die die anderen Zugänge bedingt. Für Hyperfunktionen ist dies zweifellos und unbestritten der kohomologische Zugang und dessen Verfechter müssen sein Fehlen hier als Unvollständigkeit wahrnehmen. Einzig mögliches Gegenargument — oder besser Gegenbeispiel, im Sinne einer Ausnahme, die die Regel bestätigt und nicht im mathematischen — kann es sein, wenn man auch über die anderen Zugänge unabhängig zu interessanten Ergebnissen gelangen kann. Die vorliegende Arbeit ist in ihren wesentlichen Teilen ein Indiz in dieser Richtung und damit zu ihrer eigenen Verteidigung: Abwechselnd verfolgen wir Kanekos Randwertzugang und den funktionalanalytischen um die oben dargestellten Ergebnisse in Teil II und III zu erzielen. Es bleibt uns nur noch, auf den Ausblick am Ende dieser Arbeit zu verweisen. Der Leser mag danach urteilen, für wie aussichtsreich er unseren Ansatz hält. Ich persönlich halte — mit obigem Zitat — Mathematik für eine zum guten Teil experimentelle Wissenschaft. Eines der Experimente findet auf den folgenden einhundertzwanzig Seiten statt.

Das vorliegende Buch ist eine leicht erweiterte und um Druckfehler korrigierte Version der Dissertation, die der Verfasser im Dezember 1998 beim Fachbereich Mathematik der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main vorgelegt hat und die im Februar 1999 angenommen wurde. Hinzugefügt wurde der Anhang A, sowie das Stichwortverzeichnis. Das Buch wurde mit Hilfe des Makropaketes $\mathcal{AMS}$-LaTeX gesetzt. Alle Grafiken sind mit Hilfe des Pakets PSTricks von T. Van Zandt erstellt worden.

Frankfurt am Main, den 25. Februar 1999.

Danksagung. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Florin Constantinescu für die kontinuierliche Unterstützung während der Erstellung dieser Arbeit und für viele wertvolle Anregungen. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Erwin Brüning (Durban-Westville) für sein Interesse und hilfreichen Gedankenaustausch. Weiterhin gilt mein Dank Prof. Dr. Shigeaki Nagamachi (Tokushima), sowie Georg Hoever (Regensburg) und HD Dr. Rudolf Rupp (Karlsruhe) für wertvolle Hinweise. Prof. Dohan Kim (Seoul) danke ich für die Zugänglichmachung seiner neuen Resultate.

Schließlich danke ich Reinhard Häring–Oldenburg sowie allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe 8:1 die sich stets geduldig meine (mathematischen) Probleme angehört haben: Holger Altenhofen, Dirk Buschmann, David Damanik, Frank Kleespies, Daniel Lenz, Bernd Metzger, Christian Nassau, Matthias Schork, HD Dr. Peter Stollman und Prof. Dr. Joachim Weidmann.

Frau Susanne Falk und dem Logos-Verlag danke ich für die freundliche Unterstützung bei der Veröffentlichung dieser Arbeit. Der Graduiertenförderungsstelle der Johann Wolfgang Goethe-Universität danke ich für die gewährte finanzielle Unterstützung.

Schließlich gebührt meiner Familie der größte Dank, denn ohne sie wäre diese Arbeit gewiß niemals entstanden.

Teil I

Eindimensionale Theorie

KAPITEL 1

Holomorphe Funktionen mit Wachstumsbedingungen

Überblick

In diesem Kapitel betrachten wir die Räume holomorpher Funktionen, die danach zur Konstruktion der *temperierten* und *asymptotischen* Hyperfunktionen nötig sind. Dies sind Räume von Funktionen, die gewissen polynomialen Wachstumsbedingungen für $|\mathrm{Re}\, z| \to \infty$ genügen. Der wesentliche Punkt bei der Einführung von Wachstumsbedingungen im reell Unendlichen ist nicht so sehr die Art der Bedingungen selbst, als vielmehr die Form der unbeschränkten Gebiete in $\mathbb{C}$, auf denen sie gelten werden. In einer Dimension läuft das auf die Forderung hinaus, daß die Gebiete eine feste Mindestausdehnung in imaginärer Richtung haben müssen. Um von vorneherein nur solche Gebiete zuzulassen, benutzen wir die von Kawai in [**Kaw70**] im Zusammenhang mit Fourier Hyperfunktionen definierte von $\mathbb{C}$, die wir in Abschnitt B.2 des Anhangs genau erläutern. In einer Dimension bedeutet sie nichts anderes, als zu $\mathbb{C}$ den „rechten" und „linken" Rand hinzuzunehmen.

In Abschnitt 1.1 definieren wir die für unsere Zwecke grundlegenden Funktionenräume: Holomorphe Funktionen, die für $|\mathrm{Re}\, z| \to \infty$ asymptotisch von der Ordnung $|\mathrm{Re}\, z|^{\gamma}$ sind beziehungsweise solche, die über die Fläche von Gebieten integrabel gegen Funktionen dieser Ordnung sind.

Ein einfaches, aber nicht unwichtiges technisches Hilfsmittel sind für uns die sogenannten *Multiplikatoren*, die wir in Abschnitt 1.2 einführen. Dies sind holomorphe Funktionen auf einem geeigneten festen Gebiet $\mathbb{I}$, die nirgends verschwinden und von genau kontrollierbarer Wachstumsordnung sind. Sie dienen uns im allgemeinen dazu, die Ordnung einer gegebenen Funktion (oder eines ganzen Funktionenraums) „verlustfrei" zu modifizieren, wie in Lemma 1.2.2 präzisiert wird.

Zunächst ist nicht klar, daß wir in unserem Rahmen das wichtigste Instrument der komplexen Analysis, nämlich das Linienintegral, verwenden können. Da die in Abschnitt 1.1 definierten *γ-integrablen* Funktionen zunächst nur über *Flächen* in $\mathbb{C}$ bezüglich der Wachstumsordnung $|\mathrm{Re}\, z|^{\gamma}$ integrabel sind, ist die Frage zu klären, ob und für welche Streckenzüge sie ebenfalls integrabel sind bezüglich derselben Ordnung. Mit dieser zentralen analytischen Frage beschäftigen sich die Abschnitte 1.3 und 1.4. Im ersten betrachten wir den einfachen Fall horizontaler Streifen und als Integrationswege horizontale Linien in ihrem Inneren und zeigen in Satz 1.3.3, daß γ-integrable Funktionen auf dem Streifen auch stets γ-integrabel längs solcher Linien sind. Diesen Satz beweisen wir zum einen elementar und zum anderen unter Verwendung *subharmonischer* Funktionen. Er und die einfachen Folgerungen, die wir in Korollar 1.3.4 aus ihm ziehen, können gut und gerne als die zentralen analytischen Ergebnisse des gesamten ersten Teils angesehen werden, wie ihre stete Verwendung in Kapitel 2 zeigt.

Ein zentrales Motiv in Abschnitt 1.3 ist das *Phragmén–Lindelöf-Prinzip*, das „Maximumprinzip für unbeschränkte Gebiete," wie es klassisch in [**Tit39**] diskutiert wird. Obwohl wir dies aus rein technischer Sicht nicht brauchen, ist die Frage, ob sich dieser Typ von *Konvexitätsaussagen* über die Suprema von Funktionen, das heißt über L^∞-Normen, auf L^1- oder allgemeiner L^p-Normen übertragen läßt, auch für sich genommen interessant. Dies führt uns auf einen Zusammenhang zur Theorie der Hardyräume, den wir in den Anmerkungen 1.1 und 1.2, sowie in Satz 1.3.5 und in Korollar 1.3.6 erläutern.

In Abschnitt 1.4 definieren wir einen Typ von Gebieten, die „gute" Ränder haben. Diese *Streifen* sind Verallgemeinerungen von *speziellen Polyedern* in der Topologie von $\mathbb{Q}$. Ihr wesentliches Charakteristikum ist, daß ihre Ränder außerhalb geeigneter beschränkter Gebiete nur noch aus endlich vielen horizontalen Linien bestehen. Damit lassen sich die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts auf solche Gebiete anwenden, und Streifen werden für uns zu *den* Gebieten, über deren Ränder wir integrieren können. Wir zeigen außerdem in Lemma 1.4.2, daß es ausreichend viele Streifen gibt und insbesondere, daß sich zwischen eine kompakte Menge und jede ihrer offenen Umgebungen dank der speziellen Topologie von $\mathbb{Q}$ stets ein Streifen, also ein Integrationsweg, „dazwischenschieben" läßt.

In Abschnitt 1.5 lassen wir die Ordnung γ unserer Funktionen gegen $\pm\infty$ gehen. Für diese Räume *unendlichen Typs* zeigt sich, wie man leicht vermuten kann, daß der Unterschied zwischen Wachstums- und Integrabilitätsordnung tatsächlich keine Rolle mehr spielt, ganz im Gegensatz zu den Räumen selbst, die zentrales Objekt unserer Untersuchung *temperierter* und *asymptotischer Hyperfunktionen* sein werden. Die Topologie dieser Funktionenräume ist die von *Fréchet-Schwartz-Räumen* (FS-Räumen) beziehungsweise *dualen Fréchet-Schwartz-Räumen* (DFS-Räumen) macht, je nachdem, ob sie auf offenen oder kompakten Mengen leben. Diese Räume haben besonders gute Eigenschaften, die uns später noch sehr nützlich sein werden, insbesondere sind sie reflexiv, vollständig und separabel, und außerdem stehen FS- und DFS-Räume in perfekter Dualität zueinander.

Zwei weitere Typen von Funktionen mit endlichen Wachstumsbedingungen, die sogenannten *infra*- und *sub*-γ-Funktionen führen wir in Abschnitt 1.6 ein. Diese Räume sind so konstruiert, daß sie ebenfalls die „schöne" Topologie von FS- und DFS-Räumen besitzen. Ihre Bedeutung wird in Kapitel 2 und 3 klar werden.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels dient der Einführung eines *reproduzierenden Kerns* für holomorphe Funktionen, des *exponentiell abfallenden Cauchy-Kerns*. Wir zeigen ein Analogon zu Cauchys Integralformel für diesen Kern, der die für uns wesentliche Eigenschaft hat, die Wachstumsordnung von Funktionen genau zu erhalten, anders als der gewöhnliche *Cauchy-Kern*. Der exponentiell abfallende Kern wird später sowohl im Dualitätstheorem in Kapitel 2 als auch für den Umgang mit Distributionen und Hyperfunktionen in Abschnitt 3.5 wichtig sein.

1.1. Holomorphe Funktionen vom Potenztyp

Wir beginnen mit der Definition holomorpher Funktionen auf unbeschränkten Gebieten, die polynomiale Wachstumsbedingungen im Unendlichen erfüllen. Wir ahmen dabei die gewöhnliche kompakt–offene Topologie holomorpher Funktionen nach und arbeiten wie oben erwähnt in der radialen Kompaktifizierung $\mathbb{Q} = \mathbb{D} + i\mathbb{R}$ von $\mathbb{C}$, für deren Definition wir auf Abschnitt B.2 im Anhang verweisen.

DEFINITION 1.1.1. Sei $K \subset \mathbb{Q}$ kompakt und $\gamma \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die Menge der holomorphen Funktionen auf $K_{\mathbb{C}}$, die auf dem Rand stetig sind, mit $\mathcal{O}^B(K)$, das heißt

$$\mathcal{O}^B(K) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}(K_{\mathbb{C}}^{\circ}) \cap C(K_{\mathbb{C}}).$$

Damit definieren wir

i) den Banachraum

$$\overline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K) \overset{\text{def}}{=} \Big\{ f \in \mathcal{O}^B(K) \;\Big|\; f(z) = O(|\mathrm{Re}\, z|^{\gamma}),\ |z| \to \infty \text{ in } K_{\mathbb{C}} \Big\},$$

bezüglich der Norm

$$\overline{\|f\|}_{\gamma,K} \overset{\text{def}}{=} \sup_{K_{\mathbb{C}}} \big| f(z)(1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{-\gamma} \big|,$$

und

ii) den Banachraum

$$\underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}^B(K) \cap L^1(K_{\mathbb{C}}, (1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{\gamma} \mathrm{d}\lambda(z)),$$

bezüglich der Norm

$$\underline{\|f\|}_{\gamma,K} \overset{\text{def}}{=} \int_{K_{\mathbb{C}}} |f(z)|(1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{\gamma} \mathrm{d}\lambda(z).$$

Dabei bezeichnet λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}$.

Funktionen, die die Bedingung unter i) erfüllen, heißen **vom Typ** γ, diejenigen, die die Bedingung ii) erfüllen, heißen γ**-integrabel**.

Die Topologie unserer holomorphen Funktionen auf offenen Mengen in $\mathbb{Q}$ wird nun wie üblich erzeugt durch die obigen Normen auf allen enthaltenen Kompakta. Dies wird dargestellt durch die folgende Definition.

DEFINITION 1.1.2. Sei $W \subset \mathbb{Q}$ offen und $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen, die W ausschöpft. Setze

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W) &\overset{\text{def}}{=} \varprojlim \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_j) \text{ und} \\ \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W) &\overset{\text{def}}{=} \varprojlim \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_j), \end{aligned}$$

wobei die projektiven Limiten bezüglich der natürlichen Restriktionen

$$\begin{aligned} &\overline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_{j+1}) \to \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_j) \text{ und} \\ &\underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_{j+1}) \to \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_j) \end{aligned}$$

genommen werden.

Wir bemerken, daß diese Restriktionen stetig sind aufgrund der trivialen Abschätzungen

$$\begin{aligned} \overline{\|f\|}_{\gamma,K_j} &\leq \overline{\|f\|}_{\gamma,K_{j+1}}, \text{ für alle } f \in \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_{j+1}), \text{ und} \\ \underline{\|g\|}_{\gamma,K_j} &\leq \underline{\|g\|}_{\gamma,K_{j+1}}, \text{ für alle } g \in \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K_{j+1}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Damit sind die projektiven Limiten in der Kategorie der lokalkonvexen Räume wohldefiniert.

Wir haben in obiger Definition eine wichtige Eigenschaft projektiver Limiten benutzt, vergleiche Abschnitt B.6 im Anhang: Es reicht, den Limes über eine *konfinale*, also insbesondere abzählbare Indexmenge zu nehmen. In unserem Fall verwenden wir ausschöpfende Folgen von Kompakta und erhalten denselben projektiven Limes, als hätten wir ihn über *alle* Kompakta in W genommen.

Wir kommen nun zu holomorphen Funktionen mit Wachstumsbedingungen auf kompakten Mengen. Als solche betrachtet man jede Funktion, die analytisch und unter Beibehaltung der Wachstumsbedingung in eine Umgebung des Kompaktums fortsetzbar ist. Dies macht die folgende Definition sinnvoll.

DEFINITION 1.1.3. Für $K \subset \mathbb{Q}$ kompakt definieren wir

$$\overline{\mathcal{O}}_\gamma(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \Big\{ \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W) \;\Big|\; W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(K) \Big\} \text{ und}$$
$$\underline{\mathcal{O}}_\gamma(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \Big\{ \underline{\mathcal{O}}_\gamma(W) \;\Big|\; W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(K) \Big\}.$$

Wie in Definition 1.1.2 reicht es im Prinzip auch hier, den induktiven Limes über eine abzählbare Indexmenge zu nehmen, insbesondere über ein Fundamentalsystem offener Umgebungen von K.

Das folgende Lemma steht an dieser Stelle etwas isoliert, ist aber fundamental für die in Kapitel 2 zu entwickelnde Dualitätstheorie von analytischen Funktionalen mit polynomialen Wachstumsbedingungen. Es wird dazu dienen, die in Abschnitt 1.6 definierten Funktionenräume als FS- beziehungsweise DFS-Räume zu identifizieren.

LEMMA 1.1.4. *Seien $K \Subset L \subset \mathbb{Q}$ kompakt und $\delta > 0$. Dann sind die natürlichen Einbettungen*

$$\rho\colon \overline{\mathcal{O}}^B_\gamma(L) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}^B_{\gamma+\delta}(K) \text{ und}$$
$$\sigma\colon \underline{\mathcal{O}}^B_\gamma(L) \hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}^B_{\gamma-\delta}(K)$$

kompakte Abbildungen.

Der Beweis ist eine abgewandelte Version des Beweises von Proposition 2.1.3 in [**Ito88**]. Er stellt eine ziemlich unvierselle Methode zum Beweis der Kompaktheit natürlicher Restriktionen obengenannter Art dar.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst die Abbildung σ. Sei $\{f_q\}_{q\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\underline{\mathcal{O}}^B_\gamma(L)$. Dann gilt für jedes Kompaktum S in $K^\circ_{\mathbb{C}}$ und jede offene Umgebung $U \Subset K_{\mathbb{C}}$ von S nach Satz B.5.3 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sup_{z\in S} |f_q(z)| &\le M_S \big\| f_q(1+|\operatorname{Re} z|)^{\gamma-\delta} \big\|_{L^1(U,\mathrm{d}\lambda(z))} \\ &\le N_S \underline{\|f_q\|}_{\gamma,L}\end{aligned}$$

für Konstanten M_S, $N_S > 0$, die von S abhängen und gleichmäßig in q nach Voraussetzung. Unter diesen Bedingungen folgt aus dem Stieltjes–Vitali-Theorem, siehe Satz B.5.4, daß eine Teilfolge f_{q_k} existiert, die gegen einen Grenzwert $f \in \mathcal{O}(K^\circ_{\mathbb{C}})$ gleichmäßig auf kompakten Untermengen von $K^\circ_{\mathbb{C}}$ konvergiert. Mit der zweiten Abschätzung von (1.1) folgt dann $f \in \underline{\mathcal{O}}^B_{\gamma-\delta}(K)$, womit $f_{q_k} \to f$ in $\underline{\mathcal{O}}^B_{\gamma-\delta}(K)$ bewiesen ist. Dies zeigt die Kompaktheit der Abbildung σ. Für ρ verläuft der Beweis ganz analog, nur die Verwendung von Satz B.5.3 kann entfallen. □

Man beachte, daß dieser Beweis für $\delta = 0$, also ohne Änderung des Gewichtsfaktors, nicht funktionieren würde. Zum Beispiel kann man für $\rho = \delta = 0$ eine Funktionenfolge konstruieren, die auf jedem Kompaktum in $\mathbb{C}$ gleichmäßig gegen null konvergiert, für die aber $\overline{\|f_q\|}_{0,K} > 0$ bleibt (die Funktion „konzentriert“ sich im Unendlichen.) Damit die Folge in der Topologie des Zielraums konvergiert, muß man den Gewichtsfaktor so verkleinern, daß er relativ zum ursprünglichen asymptotisch für $|\operatorname{Re} z| \to \infty$ verschwindet, was für $\delta > 0$ trivialerweise der Fall ist. Dies hindert uns daran, den Räumen $\overline{\mathcal{O}}_\gamma$

und $\underline{\mathcal{O}}_\gamma$ eine „schöne" topologische Struktur zu geben. Wir werden das Problem in Abschnitt 1.6 durch eine weitere Definition umgehen.

Wir bemerken noch, daß Satz B.5.4 auch in beliebiger höherer Dimension gilt, was die Übertragung dieses Ergebnisses nach $\mathbb{Q}^n$ ermöglicht, was uns in Kapitel 5 zugute kommen wird.

Wir zeigen noch ein Ergebnis, das uns später nützlich sein wird und ein wenig Licht auf das Verhältnis der Funktionen vom Typ γ und integrablen Funktionen bezüglich einer geeigneten anderen Ordnung wirft.

LEMMA 1.1.5. *Für $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\delta > 1$ sind die Inklusionen*

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{O}}^B_{-\gamma-\delta}(K) &\hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}^B_\gamma(K), \\ \overline{\mathcal{O}}_{-\gamma-\delta}(W) &\hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}_\gamma(W) \text{ und} \\ \overline{\mathcal{O}}_{-\gamma-\delta}(K) &\hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}_\gamma(K) \end{aligned}$$

stetige Einbettungen von Banach- beziehungsweise lokalkonvexen Räumen für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{Q}$ und jede offene Menge $W \subset \mathbb{Q}$.

BEWEIS. Sei $f \in \overline{\mathcal{O}}^B_{-\gamma-\delta}(K)$. Dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \underline{\|f\|}_{\gamma,K} &\le \sup_{K_\mathbb{C}} \left| f(z)(1+|\operatorname{Re} z|)^{\gamma+\delta} \right| \cdot \int_{K_\mathbb{C}} (1+|\operatorname{Re} z|)^{-\delta} \mathrm{d}\lambda(z) \\ &\le C \overline{\|f\|}_{-\gamma-\delta,K}, \end{aligned}$$

für eine von f unabhängige Konstante $C > 0$. Dies zeigt die Stetigkeit der ersten Inklusion. Die übrigen folgen daraus sofort nach Definitionen 1.1.2 und 1.1.3. □

1.2. Multiplikatoren

Von nun an und für den Rest des gesamten Teils I beschränken wir uns in allen Aussagen auf den offenen Streifen

$$\mathbb{I} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D} + i(-1,1)$$

in $\mathbb{Q}$. Dies ist jedoch, wie wir gleich sehen werden, keine wesentliche Einschränkung.

DEFINITION 1.2.1. Für $\gamma \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$j_\gamma(z) \stackrel{\text{def}}{=} (1+z^2)^{\gamma/2}.$$

und bezeichnen diese Funktion als **Multiplikator vom Typ** γ.

Die Multiplikatoren sind eines unserer wichtigsten technischen Hilfsmittel. Die Einschränkung auf $\mathbb{I}$ dient natürlich dazu, j_γ als holomorphe Funktion definieren zu können. Sammeln wir nun einige elementare Eigenschaften des Multiplikators j_γ.

LEMMA 1.2.2. *Für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ gelten folgende Aussagen:*

i) *Die Funktion j_γ ist Element von $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{I})$.*
ii) *Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{I}$ existieren Konstanten B, $C > 0$ so, daß*

$$B(1+|\operatorname{Re} z|)^\gamma \le |j_\gamma(z)| \le C(1+|\operatorname{Re} z|)^\gamma$$

gilt für alle $z \in K_\mathbb{C}$.

iii) *Die Multiplikation mit j_δ induziert lineare topologische Isomorphismen*

$$j_\delta\colon \overline{\mathcal{O}}_\gamma(S) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{O}}_{\gamma+\delta}(S) \text{ und}$$
$$j_\delta\colon \underline{\mathcal{O}}_\gamma(S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{O}}_{\gamma-\delta}(S),$$

für beliebige offene oder kompakte Mengen $S \subset \mathbb{I}$ und $\delta \in \mathbb{R}$. Die Inverse von j_δ ist die Multiplikation mit $j_{-\delta}$.

BEWEIS. Die Funktion

$$j_\gamma(z) = e^{\gamma/2 \ln(1+z^2)}$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus [\pm i, \pm i\infty)$, also insbesondere in $\mathbb{I}$. Damit wird i) aus ii) folgen. Die Abschätzung ii) ist äquivalent zu

$$B' \leq \frac{|1+z^2|}{(1+|\operatorname{Re} z|)^2} = \frac{|1 + (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 + 2i \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z|}{1 + 2|\operatorname{Re} z| + (\operatorname{Re} z)^2} \leq C',$$

für Konstanten B', $C' > 0$ und alle $z \in K_{\mathbb{C}}$. Offensichtlich kann man $C' = 1$ wählen. Da K in $\mathbb{I}$ kompakt ist gilt $1 - (\operatorname{Im} z)^2 \geq \delta > 0$ in $K_{\mathbb{C}}$ und damit

$$|1 + (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 + 2i \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z| \geq (\operatorname{Re} z)^2 + \delta.$$

Damit ist die Abschätzung nach unten erfüllt mit $B' = \delta/(\delta+1)$. iii) folgt aus ii) und den Definitionen 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 und der Tatsache, daß j_δ auf $\mathbb{I}$ nirgends verschwindet. □

Es ist nun klar, warum wir den Streifen $\mathbb{I}$ tatsächlich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auszeichnen können: Die polynomialen Wachstumsbedingungen aus Abschnitt 1.1 gelten lokal gleichmäßig auf Kompakta in $\mathbb{Q}$. Das heißt, aufgrund der radialen Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{Q}$ gelten sie auf Gebieten von beschränkter Ausdehnung in imaginärer Richtung, und somit sind solche Gebiete auch die einzigen, die uns im folgenden interessieren können. Ersetzt man aber zum Beispiel j_γ durch

$$j_\gamma(z)^{(\Delta)} \stackrel{\text{def}}{=} (\Delta^2 + z^2)^{\gamma/2},$$

so erhält man eine holomorphe Funktion auf dem Streifen $\mathbb{I}^\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D} + i(-\Delta, \Delta)$ mit denselben Eigenschaften wie j_γ, so daß im Prinzip einer Ausdehnung der Theorie auf Streifen beliebiger Breite nichts im Wege steht.

1.3. Dreiliniensatz und L^1-Schranken

Das berühmte Phragmén–Lindelöf-Prinzip, das als Ersatz für das Maximumprinzip für den Fall, daß das betrachtete Gebiet unbeschränkt ist, angesehen werden kann, hat Hadamards Dreiliniensatz als eine seiner vielen Konsequenzen. Wir wollen zunächst diesen Satz anwenden, um eine äquivalente Definition der Räume vom Typ γ zu erhalten.

Dazu legen wir uns zunächst auf einen kompakten Streifen

$$Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D} + i[y_1, y_2], \text{ mit } -1 < y_1 < y_2 < 1,$$

in $\mathbb{I}$ fest. Wir sagen, eine Funktion $f \in \mathcal{O}^B(Y)$ sei **schwach wachsend**, wenn sie die Abschätzung der Wachstumsordnung

$$f(x+iy) = O\big(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\varepsilon|x|}}\big)$$

erfüllt für alle $\varepsilon > 0$ und gleichmäßig in $y \in [y_1, y_2]$. Damit entnehmen wir nun Hadamards Dreiliniensatz aus [**Tit39**], Abschnitt 5.65, in einer an unsere Notation angepaßten Form

SATZ 1.3.1. *Für $\gamma \in \mathbb{R}$ sei $f \in \mathcal{O}^B(Y)$ schwach wachsend. Es gelte $f = O(|\operatorname{Re} z|^\gamma)$ beziehungsweise $f = o(|\operatorname{Re} z|^\gamma)$ für $|\operatorname{Re} z| \to \infty$ auf dem Rand $\partial Y_\mathbb{C}$. Dann ist f von derselben Wachstumsordnung gleichmäßig in $Y_\mathbb{C}$. Weiterhin ist die für $y \in [y_1, y_2]$ definierte Funktion*

$$M_\infty(y, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + iy)|$$

eine konvexe Funktion in y.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des Maximumprinzips auf geeignete, unbeschränkte Gebiete und hat unmittelbar zur Folge, daß wir die Definition der Räume vom Typ γ auch hätten formulieren können, indem wir uns die Funktionen nur am Rand der Definitionsgebiete anschauen.

KOROLLAR 1.3.2. *Der Raum $\overline{\mathcal{O}}^B_\gamma(K)$ läßt sich darstellen als Raum aller schwach wachsenden Funktionen $f \in \mathcal{O}^B(K)$, die die Wachstumsbedingung $f(z) = O(|\operatorname{Re} z|^\gamma)$, $|z| \to \infty$ auf $\partial K_\mathbb{C}$, erfüllen. Die Norm $\overline{\|\cdot\|}_{\gamma,K}$ auf $\overline{\mathcal{O}}^B_\gamma(K)$ hängt dabei nur von den Werten der Funktionen auf dem Rand ab, das heißt für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{I}$ gilt*

$$\overline{\|f\|}_{\gamma,K} = \sup_{\partial K_\mathbb{C}} \left| f(z)(1 + |\operatorname{Re} z|)^{-\gamma} \right|.$$

Wir möchten nun ähnliche Aussagen auch für den Fall γ-integrabler Funktionen herleiten. Insbesondere wollen wir aus der γ-Integrabilität, das heißt der absoluten Integrierbarkeit über eine Fläche, auf Integrierbarkeit bezüglich der Wachstumsordnung γ und des kanonischen Linienmaßes längs geeigneter Wege schließen.

SATZ 1.3.3. *Ist $f \in \underline{\mathcal{O}}^B_\gamma(Y)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$, dann gibt es für jedes kompakte Intervall $I \subset (y_1, y_2)$ eine Konstante $K_I > 0$ so, daß*

$$\int_{\Gamma(y)} |f(z)|(1 + |\operatorname{Re} z|)^\gamma |\mathrm{d}z| \leq K_I \cdot \underline{\|f\|}_{\gamma,Y} < \infty$$

ist für jede horizontale Linie $\Gamma(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = y\}$ mit $y \in I$. Das heißt, diese Integrale sind lokal gleichmäßig beschränkt im offenen Inneren $Y^\circ_\mathbb{C}$ des Gebiets $Y_\mathbb{C}$.

BEWEIS. Es reicht, den Fall $\gamma = 0$ zu betrachten, indem man, falls nötig, von f zu $j_\gamma f$ übergeht. Unterteile $\Gamma(y)$ in Einheitsintervalle

$$L_j = \left\{ x + iy \in \Gamma(y) \;\middle|\; x \in [j, j+1] \right\},$$

für $j \in \mathbb{Z}$. Wähle Umgebungen

$$W_j = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \operatorname{dist}(z, L_j) < \varepsilon \right\}$$

mit Abstand ε von L_j, wobei $\varepsilon < 1/2$ so gewählt wird, daß $W_j \subset \mathbb{R} + iI$ gilt. Wähle eine Funktion $\phi_0 \in C^\infty_c(W_0)$ so, daß $\phi_0 \equiv 1$ ist in einer Umgebung von L_0. Bezeichne mit $\phi_j(z) = \phi_0(z - j) \in C^\infty_c(W_j)$ die um $j \in \mathbb{Z}$ verschobene Funktion und setze

$$D_j = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < \phi_j(z) < 1 \right\}.$$

Dann ist $D_j = D_0 + j$ relativ kompakt in $W_j \setminus L_j$, und $\delta = \operatorname{dist}(D_j, L_j) > 0$ ist unabhängig von j. Diese Situation ist in Abbildung 1.1 skizziert. Dann gilt

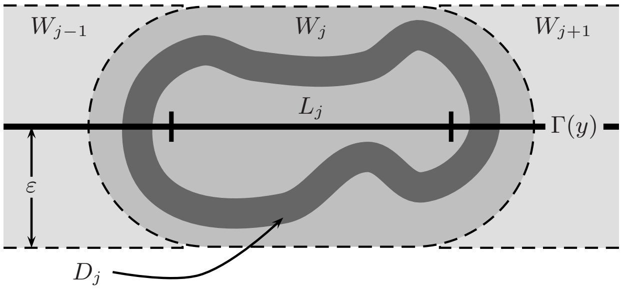

ABBILDUNG 1.1. Zum Beweis von Satz 1.3.3

nach der Integralformel von Cauchy–Stokes, siehe Satz B.5.2,

$$\begin{aligned}\sup_{z\in L_j}|f(z)| &= \sup_{z\in L_j}|(\phi_j f)(z)|\\ &= \sup_{z\in L_j}\left|\frac{1}{\pi}\int_{D_j}\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\overline{w}}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}\lambda(w)\right|\\ &\leq K\int_{W_j}|f(w)|\mathrm{d}\lambda(w),\end{aligned}$$

mit

$$K=\frac{1}{\pi\delta}\cdot\sup_{w\in D_j}\left|\frac{\mathrm{d}\phi_j}{\mathrm{d}\overline{w}}\right|.$$

Offensichtlich ist die Konstante K unabhängig von j, und wir können schließlich wiefolgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(y)}|f(z)||\mathrm{d}z| &\leq \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\sup_{z\in L_j}|f(z)|\\ &\leq K\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\int_{W_j}|f(w)|\mathrm{d}\lambda(w)\\ &\leq 2K\|f\|_{L^1(I)}\\ &\leq 2K\|f\|_{L^1(Y)}.\end{aligned}$$

Dabei taucht der Faktor 2 auf, da wir ε so gewählt haben, daß höchstens zwei der W_j nichtleeren Schnitt haben. Damit haben wir die Aussage mit der Konstante $K_I = 2K$ gezeigt. $\square$

Es ist anzumerken, daß wir Integrabilität nur längs Linien im Inneren von Y beweisen konnten und daß unsere Beweismethode auch nicht mehr erlaubt wegen des Auftretens des Faktors $1/\delta \geq 1/\operatorname{dist}(\Gamma(y), \partial Y_{\mathbb{C}})$ in der Abschätzung. Wir wollen noch eine Beweisvariante vorstellen, die subharmonische Funktionen benutzt.

ALTERNATIVER BEWEIS VON SATZ 1.3.3. Wir verwenden die Bezeichnungen des ursprünglichen Beweises und nehmen von vorneherein $\gamma = 0$ an. Setze $\varepsilon = \min\{1/2, \operatorname{dist}(y, \partial I)\}$ und bezeichne mit $D_\varepsilon(z)$ die offene Kreisscheibe vom Radius ε mit Mittelpunkt z. Da $|f|$ eine lokal in $Y_{\mathbb{C}}^\circ$, das heißt auf jedem in $Y_{\mathbb{C}}^\circ$ enthaltenen beschränkten Gebiet subharmonische Funktion ist, besitzt sie die *sub-Mittelwerteigenschaft*, siehe Satz B.5.5, und wir können sie folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned}\sup_{z\in L_j}|f(z)| &\le \sup_{z\in L_j}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int\limits_{D_\varepsilon(z)}|f(w)|\mathrm{d}\lambda(w)\\ &\le \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{W_j}|f(w)|\mathrm{d}\lambda(w).\end{aligned}$$

Dann können wir das Summationsargument von oben wiederholen, um die Aussage mit der neuen Konstante $K_I = 2/\pi\varepsilon^2$ zu zeigen. □

Tatsächlich haben wir in den beiden obigen Beweisen noch einiges mehr gezeigt. Diese technischen Kleinigkeiten werden uns später von Nutzen sein, wenn wir in Kapitel 2 die Dualität zwischen $\overline{\mathcal{O}}_\gamma$ und $\underline{\mathcal{O}}_\gamma$ untersuchen. Wir notieren sie deshalb gesondert.

KOROLLAR 1.3.4. *Es seien die Annahmen von Satz 1.3.3 erfüllt für $\gamma = 0$. Dann gelten folgende Aussagen:*

i) *Die Funktion $|f(z)|$ ist beschränkt auf jedem $\Gamma_y \subset Y_{\mathbb{C}}^\circ$ durch*

$$\sup_{z\in\Gamma(y)}|f(z)| \le \frac{2}{\pi\varepsilon^2}\cdot \underline{\|f\|}_{0,Y},$$

mit ε wie im Alternativbeweis von Satz 1.3.3.

ii) *Es gilt $f(z) = o(1)$ für $|\mathrm{Re}\, z| \to \infty$, lokal gleichmäßig in $Y_{\mathbb{C}}^\circ$.*

Ersetzt man darüberhinaus in den Bedingungen an f die Norm $\|f\|_{L^1(Y)}$ durch $\|f\|_{L^p(Y)}$ für $1 \le p < \infty$, dann sind die ***L^p-Mittel***

$$M_p(y,f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Bigg(\int\limits_{\mathrm{Im}\, z = y}|f(z)|^p|\mathrm{d}z|\Bigg)^{1/p},$$

lokal gleichmäßig in $Y_{\mathbb{C}}^\circ$ beschränkt.

BEWEIS. i) ist klar. ii) folgt aus der Tatsache, daß $\sup_{z\in L_j}|f(z)| \to 0$ für $j \to \infty$, da diese Zahlen eine summierbare Folge bilden. Für die letzte Aussage bemerke man, daß $|f|^p$ eine subharmonische Funktion und damit der Alternativbeweis von Satz 1.3.3 anwendbar ist. □

ANMERKUNG 1.1. Wir haben für die L^1-Normen $\underline{\|\cdot\|}_{\gamma,Y}$ keine Konvexitätsaussage wie in Hadamards Theorem gezeigt, aus demselben Grund, der es nötig machte, sich auf das Innere von $Y_{\mathbb{C}}$ zu beschränken. Eine solche Aussage würde es ermöglichen, die Räume $\underline{\mathcal{O}}_\gamma^B(K)$, wenigstens für K mit hinreichend „gutem" Rand, mit einer Definition zu versehen, die sich nur auf den Rand von K bezieht, wie in Korollar 1.3.2. Wir benötigen diese alternative Definition später nicht, sondern kommen mit den Ergebnissen von Satz 1.3.3 und Korollar 1.3.4 aus.

Andererseits gilt eine Konvexitätseigenschaft sehr wohl sogar für alle Integralmittel $M_p(r,\cdot)$ für $1 \le p \le \infty$, allerdings auf der offenen Einheitskreisscheibe. Die entsprechende Aussage ist bekannt als *Hardys Konvexitätssatz*, siehe [**Dur70**], Theorem 1.5. Und tatsächlich läßt sich dies auch auf horizontale Streifen übertragen: Zu der Aussage von Satz 1.3.3 paßt sehr gut ein Ergebnis, das auf Hardy, Ingham und Pólya zurückgeht und von Narasimhan in die Form gebracht wurde, nach der wir nun zitieren.

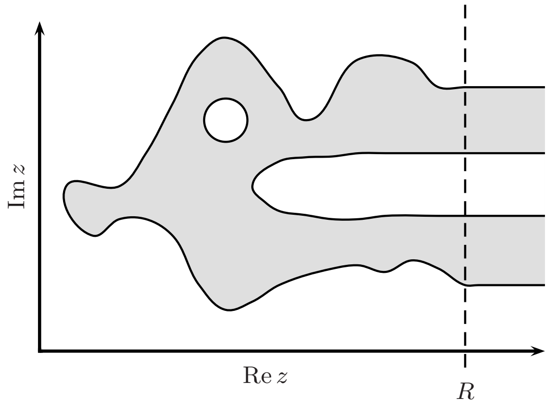

ABBILDUNG 1.2. Ein kompakter Streifen in $\mathbb{Q}$.

SATZ 1.3.5 ([**Nar85**], Seite 244, Proposition 4). *Es sei $f \in \mathcal{O}^B(Y)$. Angenommen, die L^p-Mittel $M_p(y, f)$ existieren gleichmäßig für $y \in I$, wobei $I \subset (y_1, y_2)$ ein beliebiges kompaktes Intervall ist. Dann ist $\log M_p(y, f)$ eine konvexe Funktion in (y_1, y_2).*

Daraus folgt zusammen mit Satz 1.3.3 sofort die zu Korollar 1.3.2 analoge, wenn auch deutlich schwächere Aussage.

KOROLLAR 1.3.6. *Der Raum $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(Y^\circ)$ trägt die von den Halbnormen*

$$\underline{\underline{\|f\|}}_{\gamma,K} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial K_{\mathbb{C}}} |f(z)|(1 + |\operatorname{Re} z|)^\gamma |\mathrm{d}z|$$

für alle $K = \mathbb{D} + iI$, mit $I \subset (y_1, y_2)$ kompakt, erzeugte Topologie.

ANMERKUNG 1.2. Dies alles und insbesondere die letzte Aussage von Korollar 1.3.4 deutet darauf hin, daß sich die weiter unten entwickelte Dualitätstheorie von der Paarung (L^1, L^∞) auf Paare (L^p, L^q) (oder besser Paare (H^p, H^q), denn womit wir hier umgehen, sind genau genommen Hardyräume) für konjugierte Exponenten p, q mit $1 \leq p < \infty$ ausdehnen läßt.

1.4. Streifen

Um die im letzten Abschnitt hergeleiteten Integrabilitätsaussagen wirksam werden zu lassen, müssen wir uns auf Gebiete mit hinreichend „gutem“ Rand beschränken. Dabei ist die Topologie von $\mathbb{Q}$ zu beachten, was für nichttriviale Gebiete, die sich ins reell Unendliche erstrecken, eine gewisse „Mindestausdehnung“ in imaginärer Richtung zur Folge hat. Wie sich zeigt, sind folgende Gebiete, die wir in leichtem Mißbrauch des Wortes als *Streifen* bezeichnen, für unsere Zwecke am besten geeignet.

DEFINITION UND BEMERKUNG 1.4.1. Eine lokal abgeschlossene und zusammenhängende Untermenge $L \Subset \mathbb{Q}$ heißt **Streifen**, falls $\partial L_{\mathbb{C}}$ stückweise glatt ist, endlich viele Zusammenhangskomponenten hat und ein $R > 0$ existiert so, daß $\partial L_{\mathbb{C}} \cap \{|\operatorname{Re} z| > R\}$ nur aus horizontalen Linien besteht.

Die offenen Streifen in einer offenen Untermenge W von $\mathbb{Q}$ bilden eine Basis für die von $\mathbb{Q}$ auf W induzierte Topologie. Ebenso findet man eine ausschöpfende Folge von Kompakta für W, die nur aus Streifen besteht.

Wir vereinbaren wie üblich, daß die Ränder von Streifen positiv orientiert sein sollen, das heißt so, daß bei positivem Durchlaufen des Randes das Innere des Streifens links liegt. Damit sind Streifen im allgemeinen unendlich ausgedehnte Gebiete, längs deren Ränder wir Konturintegrale führen können. Es stellt sich natürlich die Frage, ob es für unsere Zwecke hinreichend viele Streifen und damit hinreichend viele zulässige Integrationswege gibt. Die positive Antwort liefert folgendes Lemma.

LEMMA 1.4.2. *Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{Q}$ und jede offene Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(K)$ existiert ein kompakter Streifen L mit*

$$K \Subset L \Subset W.$$

Wir sagen in diesem Fall, daß L ***zwischen*** *K* ***und*** *W* ***liegt***.

BEWEIS. Da $K \setminus W$ in $\mathbb{Q}$ offen ist, existieren aufgrund der kompaktifizierten Topologie von $\mathbb{Q}$, siehe Abschnitt B.2 im Anhang, ein $R > 0$ und dazu ein $\delta > 0$ so, daß

$$\inf\{|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w| \mid z \in K_\infty,\ w \in \partial W_\infty\} \geq \operatorname{dist}(\partial W_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}) \geq \delta$$

gilt, wobei wir

$$K_\infty = K_{\mathbb{C}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \geq R\} \text{ und}$$
$$W_\infty = W_{\mathbb{C}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| > R - \delta\}$$

gesetzt haben. Setze weiter

$$K_0 = K_{\mathbb{C}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| \leq R\} \text{ und}$$
$$W_0 = W_{\mathbb{C}} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < R + \delta\}.$$

Dann existiert für das Paar $K_0 \Subset W_0$ nach Lemma B.5.1 ein spezieller Polyeder L_0, der zwischen K_0 und W_0 liegt. Dank obiger Abschätzung findet man ebenso eine Menge L_∞, die aus einer endlichen Vereinigung von Rechtecken der Form

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \pm \operatorname{Re} z \geq R - \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \in I\},$$

mit $0 < \varepsilon < \delta$ und $I \subset \mathbb{R}$ kompakt, besteht, so daß

$$\overline{\overline{K_\infty}} \Subset \overline{\overline{L_\infty}} \Subset \overline{\overline{W_\infty}}$$

gilt. Dann ist

$$L = \overline{\overline{L_0 \cup L_\infty}}$$

ein kompakter Streifen zwischen K und W. □

Mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts gewinnen wir sofort einige wichtige Folgerungen für Streifen, wobei wir uns auf Streifen in $\mathbb{I}$ beschränken. Zunächst gilt in Analogie zu Cauchys Integralsatz:

SATZ 1.4.3. *Sei $L \subset \mathbb{I}$ ein kompakter Streifen und $f \in \underline{\mathcal{O}}_0(L)$. Dann gilt*

$$\int_{\partial L_{\mathbb{C}}} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

BEWEIS. Nach der Definition von $\underline{\mathcal{O}}_0(L)$ gibt es eine offene Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(L)$ mit $f \in \underline{\mathcal{O}}_0(W)$. Nach Lemma 1.4.2 existiert ein kompakter Streifen K, der zwischen L und W liegt. Dann ist $f \in \underline{\mathcal{O}}_0^B(K)$, und nach Korollar 1.3.4.ii) folgt $f = o(1)$ für $|\operatorname{Re} z| \to \infty$ in L. Mit

$$L_R = L \cap \{z \mid |\operatorname{Re} z| \leq R\}$$

haben wir dann

$$\int_{\partial L_R} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

nach Cauchys Integralsatz für beschränkte Gebiete. Weiter gilt

$$\int_{\partial L_R - \partial L} |f(z)||\mathrm{d}z| \longrightarrow 0$$

für $R \to \infty$. Das zeigt die Behauptung. □

Als Korollar aus obigem Beweis und der entsprechenden Aussage für beschränkte Gebiete in Satz B.5.2 erhalten wir Cauchys Integralformel für Streifen.

KOROLLAR 1.4.4. *Sei $L \subset \mathbb{I}$ ein kompakter Streifen und $f \in \underline{\mathcal{O}}_0(L)$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \frac{f(w)}{z-w} \mathrm{d}w \tag{1.2}$$

für jedes $z \in L_{\mathbb{C}}^{\circ}$.

Zwei Abschätzungen werden im folgenden wesentlich sein. Die erste beschränkt Integrale über die Ränder von Streifen durch die Flächennorm $\underline{\|\cdot\|}$. Die zweite wird die Räume $\overline{\mathcal{O}}_{-\gamma}$ und $\underline{\mathcal{O}}_{\gamma}$ in Beziehung setzen.

SATZ 1.4.5. *Ist $L \subset \mathbb{I}$ ein kompakter Streifen und $f \in \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}(L)$. Dann folgt:*

i) *Für jeden kompakten Streifen $K \subset \mathbb{I}$ mit $K \Supset L$ und $f \in \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K)$, existiert eine Konstante $N_K > 0$ unabhängig von f so, daß*

$$\int_{\partial L_{\mathbb{C}}} |f(z)|(1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{\gamma} \mathrm{d}z \leq N_K \underline{\|f\|}_{\gamma,K} < \infty$$

gilt.

ii) *Für jedes K wie unter i) existiert eine Konstante $S_K > 0$ unabhängig von f so, daß*

$$\overline{\|f\|}_{-\gamma,L} \leq S_K \underline{\|f\|}_{\gamma,K}$$

gilt.

BEWEIS. Zu i) bemerken wir, daß nach Definition von $\underline{\mathcal{O}}_{\gamma}(L)$ ein $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(L)$ existiert so, daß $f \in \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W)$ und daher $f \in \underline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(K)$ ist für jeden kompakten Streifen, der zwischen L und W liegt. Also können wir Satz 1.3.3 anwenden, um die erste Ungleichung abzuleiten, und der Beweis desselben Satzes zeigt, daß N_K unabhängig von f gewählt werden kann. Aussage ii) folgt aus Korollar 1.3.4i). □

Als unmittelbare Folgerung von Aussage ii) erhalten wir ein Lemma, das in unserem Kontext die bestmögliche Umkehrung von Lemma 1.1.5 darstellt.

LEMMA 1.4.6. *Für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ sind die folgenden natürlichen Inklusionen für alle kompakten Streifen $H \Subset I \subset \mathbb{I}$, jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{I}$ und jede offene Menge $W \subset \mathbb{I}$*

$$\underline{\mathcal{O}}_{-\gamma}^{B}(I) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}^{B}(H),$$
$$\underline{\mathcal{O}}_{-\gamma}(W) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W) \text{ und}$$
$$\underline{\mathcal{O}}_{-\gamma}(K) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(K)$$

stetige Einbettungen von Banach- beziehungsweise lokalkonvexen Räumen.

BEWEIS. Die Stetigkeit der ersten Inklusion ist unmittelbar klar nach Satz 1.4.5ii). Für die Stetigkeit der zweiten benutzen wir die Bemerkung in Definiton 1.4.1 und wählen aus Streifen bestehende ausschöpfende Folgen $\{H_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ und $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ für W so, daß $H_j \Subset I_j$ gilt für alle j. Damit ist

$$\underline{\mathcal{O}}_{-\gamma}(W) \cong \varprojlim \underline{\mathcal{O}}^B_{-\gamma}(I_j) \text{ und } \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W) \cong \varprojlim \overline{\mathcal{O}}_\gamma(H_j),$$

und die Aussage folgt aus der Stetigkeit der ersten Inklusion. Die dritte Einbettung ist dann klar nach Definition 1.1.3. □

1.5. Funktionen von unendlichem Typ

Wir wollen nun die Grenzfälle unserer Definitionen für $\gamma \to \pm\infty$ betrachten. Diese beiden Grenzfälle werden die wichtigste Rolle in der Konstruktion und in der Anwendung spezieller Klassen von Hyperfunktionen in den folgenden Kapiteln spielen. Wir definieren die Funktionenräume unendlichen Typs, indem wir einen zusätzlichen projektiven, beziehungsweise induktiven Limes bezüglich des Typs und der Integrabilitätsordnung auf den Räumen $\overline{\mathcal{O}}_\gamma$ und $\underline{\mathcal{O}}_\gamma$ ausführen.

Für diesen Abschnitt seien K beziehungsweise W eine beliebige aber feste kompakte beziehungsweise offene Untermenge von $\mathbb{I}$. Wir betrachten ausschöpfende Folgen $\{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Kompakta für W und Fundamentalsysteme $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ offener Umgebungen von K, von denen wir nach Lemma 1.4.2 und dem was wir in Abschnitt B.6 zusammengetragen haben ohne Beschränkung der Allgemeinheit immer annehmen können, daß sie aus Streifen bestehen und daß die U_j relativ kompakt in $\mathbb{I}$ sind. Mit diesen Vereinbarungen treffen wir die

DEFINITION 1.5.1. Für K, W, $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{L_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ wie oben setze

A) Für Funktionen von endlichem Typ:

$$\overline{\mathcal{O}}_\infty(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}^B_j(\overline{\overline{U_j}}) \text{ und}$$
$$\overline{\mathcal{O}}_{-\infty}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \overline{\mathcal{O}}^B_{-j}(L_j).$$

B) Für gegen endlichen Index integrable Funktionen:

$$\underline{\mathcal{O}}_\infty(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \underline{\mathcal{O}}^B_{-j}(\overline{\overline{U_j}}) \text{ und}$$
$$\underline{\mathcal{O}}_{-\infty}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \underline{\mathcal{O}}^B_j(L_j),$$

als induktive beziehungsweise projektive Limiten von Banachräumen. Damit definiere weiter:

A) Für Funktionen von endlichem Typ:

$$\overline{\mathcal{O}}_\infty(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \overline{\mathcal{O}}_\infty(L_j) \text{ und}$$
$$\overline{\mathcal{O}}_{-\infty}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}_{-\infty}(U_j).$$

B) Für gegen endlichen Index integrable Funktionen:

$$\underline{\mathcal{O}}_\infty(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \underline{\mathcal{O}}_\infty(L_j) \text{ und}$$
$$\underline{\mathcal{O}}_{-\infty}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \underline{\mathcal{O}}_{-\infty}(U_j),$$

als projektive beziehungsweise induktive Limiten lokalkonvexer Räume.

Im ersten Teil obiger Definition haben wir eine wesentliche Vereinfachung gemacht, indem wir die doppelten induktiven beziehungsweise projektiven Limiten zu jeweils einem diagonalen zusammengefaßt haben, in dem bei jedem Schritt der Typ des Raums und das Definitionsgebiet gleichzeitig verändert werden. Dies ist gerechtfertigt durch allgemeine Ergebnisse über induktive und projektive Limiten, wie wir am Beispiel des Raums $\underline{\mathcal{O}}_{\infty}(K)$ illustrieren wollen. Zunächst bemerken wir, daß jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(\overline{\overline{U_{l+1}}}) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{O}}^B_{-m-1}(\overline{\overline{U_{l+1}}}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(\overline{\overline{U_l}}) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{O}}^B_{-m-1}(\overline{\overline{U_l}}) \end{array}$$

von stetigen Einbettungen kommutativ ist. Damit sind die bis auf topologische Isomorphismen eindeutigen kanonischen Einbettungen ebenfalls kommutativ nach Satz B.6.1. Das heißt, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(K) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{O}}_{\infty}(K) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(\overline{\overline{U_l}}) & \longrightarrow & \underline{\mathcal{O}}^B_{\infty}(\overline{\overline{U_l}}) \end{array}$$

kommutiert, wobei wir

$$\underline{\mathcal{O}}^B_{\infty}(L) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{m} \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(L)$$

gesetzt haben für jedes Kompaktum $L \subset \mathbb{I}$. Also sind die beiden induktiven Limiten vertauschbar und insbesondere äquivalent zum diagonalen Limes aus Definition 1.5.1, wenn man wieder Satz B.6.2 berücksichtigt. Analoge Aussagen gelten für die projektiven Limiten, und zusammenfassend machen wir die

BEMERKUNG 1.5.2. Der Raum $\underline{\mathcal{O}}_{\infty}(K)$ besitzt die folgenden äquivalenten Definitionen:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{O}}_{\infty}(K) &\cong \varinjlim_{m}\Big(\varinjlim_{l} \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(\overline{\overline{U_l}})\Big) \\ &\cong \varinjlim_{m} \underline{\mathcal{O}}_{-m}(K) \\ &\cong \varinjlim_{l}\Big(\varinjlim_{m} \underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(\overline{\overline{U_l}})\Big) \\ &\cong \varinjlim_{l} \underline{\mathcal{O}}^B_{\infty}(\overline{\overline{U_l}}). \end{aligned}$$

Analoge Isomophien gelten für die übrigen sieben Raumtypen.

Wir werden diese „Kommutativität" der Definition verschachtelter projektiver und induktiver Limiten von nun an bei Gelegenheit ohne weitere Erläuterung benutzen.

Klären wir nun zunächst die Topologie dieser Räume. Wir können hier zum ersten mal Lemma 1.1.4 anwenden, was uns erlaubt, die Räume unendlichern Typs als FS- und DFS-Räume zu identifizieren.

SATZ 1.5.3. *Die topologischen Typen der oben definierten Räume sind durch folgende Tabelle gegeben:*

	Fall A		*Fall B*	
	K	W	K	W
$\gamma = +\infty$	*DFS*	*FS*	*DFS*	*FS*
$\gamma = -\infty$	*DFS*	*FS*	*DFS*	*FS*

BEWEIS. Betrachten wir zunächst wieder den Raum $\underline{\mathcal{O}}_\infty(K)$. Hier ist die diagonale Einbettung

$$\underline{\mathcal{O}}^B_{-m}(\overline{\overline{U_m}}) \hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}^B_{-m-1}(\overline{\overline{U_{m+1}}})$$

kompakt nach Lemma 1.1.4. Also ist $\underline{\mathcal{O}}_\infty(K)$ ein DFS-Raum. Ganz analog zeigt man den Raumtyp für die übrigen Räume auf den beiden Diagonalen der Tabelle.

Um beispielsweise zu zeigen, daß $\overline{\mathcal{O}}_\infty(W)$ ein FS-Raum ist, verfahren wir wie im Beweis von [**Ito88**], Proposition 2.1.5: Sind $K \Subset L \Subset W$ zwei kompakte Mengen, die zu einer ausschöpfenden Folge für W gehören, die $\overline{\mathcal{O}}_\infty(W)$ definiert, so reicht es zu zeigen, daß die natürlichen Restriktion $\rho\colon \overline{\mathcal{O}}_\infty(L) \to \overline{\mathcal{O}}_\infty(K)$ kompakt ist. Seien $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ Umgebungssysteme von K beziehungsweise L mit $K \Subset U_{j+1} \Subset L \Subset V_j$. Da wir aus Lemma 1.1.4 wissen, daß die Abbildungen

$$\rho_j\colon \overline{\mathcal{O}}^B_j(\overline{\overline{V_j}}) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}^B_{j+1}(\overline{\overline{U_j+1}})$$

kompakt sind, können wir Lemma B.6.4 anwenden, um zu folgern, daß die induzierte Restriktion

$$\rho = \varinjlim \rho_j\colon \overline{\mathcal{O}}_\infty(L) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_\infty(K)$$

ebenfalls kompakt ist. Also ist $\overline{\mathcal{O}}_\infty(W)$ ein FS-Raum. Die drei übrigen Fälle folgen auf ganz ähnliche Weise. □

Nach ihrer Definition und nach Korollar 1.3.4 ist klar, daß die Räume unendlichen Typs zumindest als Mengen übereinstimmen, gleichgültig ob man sie wie in Fall A durch Funktionenräume endlichen Typs oder wie in Fall B durch die Räume endlicher Integrabilitätsordnung definiert. Wir zeigen nun, daß die zwei Fälle sich auch topologisch nicht unterscheiden, unsere Definitionen also redundant waren.

SATZ 1.5.4. *Es gibt lineare, topologische Isomorphismen*

$$\overline{\mathcal{O}}_\gamma(S) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{O}}_\gamma(S),$$

für $\gamma = \pm\infty$ *und* $S = W$ *oder* K.

BEWEIS. Sei $\delta > 1$ beliebig. Dann sind die Inklusionen

$$\overline{\mathcal{O}}^B_{-\gamma-\delta}(L) \hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}^B_\gamma(L)$$

stetig für jedes Kompaktum $L \subset \mathbb{I}$ nach Lemma 1.1.5. Damit erhalten wir stetige Einbettungen $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(S) \hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(S)$ für $S = W$ oder K nach Definition 1.5.1. Wir haben nur noch zu zeigen, daß auch die umgekehrten Inklusionen stetig sind. Um dies zu zeigen betrachten wir zum Beispiel den Fall $S = K$ und $\gamma = \infty$. Wir nehmen uns zwei Folgen von Umgebungen $\{U_j\}$, $\{V_j\}$ von K her, für die $U_j \Subset V_j \Subset \mathbb{I}$ gilt für alle j. Dann ist die Inklusion $\underline{\mathcal{O}}^B_{-j}(\overline{\overline{V_j}}) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}^B_j(\overline{\overline{U_j}})$ stetig nach Lemma 1.4.6. Also ist auch $\underline{\mathcal{O}}_\infty(K) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}_\infty(K)$ stetig und der Fall $S = W$ ist ähnlich zu behandeln. Damit folgen alle behaupteten Isomorphien nach Definition 1.5.1. □

Da die Räume aus Fall A und B isomorph sind, können wir die Über- und Unterstriche in den Bezeichnungen für die Räume unendlichen Typs weglassen, und wir verwenden nur noch die Notation

$$\mathcal{O}_{\pm\infty}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(S),$$

für $S = W$ oder K. Wir nennen die Elemente von $\mathcal{O}_\infty(S)$ **temperierte** Funktionen und die in $\mathcal{O}_{-\infty}(S)$ **asymptotische** Funktionen. Die etwas ungewöhnliche Verwendung des für Distributionen gebräuchlichen Begriffs *temperiert* für analytische Funktionen wird in den Kapiteln 3 und 5 klar werden, vergleiche Anmerkung 3.2.

1.6. Funktionen vom Typ infra- und sub-γ

Dem Beispiel des letzten Abschnittes folgend definieren wir nun auch noch Räume holomorpher Funktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen, die die angenehme topologische Struktur von FS- und DFS-Räumen besitzen. Aus der Bemerkung nach Lemma 1.1.4 folgt, daß dazu bei der Bildung der induktiven und projektiven Limiten auch die Gewichtsfunktion variiert werden muß. Dies führt uns auf die folgende

DEFINITION 1.6.1. Wir definieren für $K \subset \mathbb{I}$ kompakt, $W \subset \mathbb{I}$ offen, mit einer ausschöpfenden Folge $\{K_m\}$ von Kompakta für W und einem Fundamentalsystem $\{U_m\}$ von Umgebungen von K die folgenden projektiven Limiten von Banachräumen:

$$\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \overline{\mathcal{O}}^B_{\gamma+1/m}(K_m) \text{ und}$$
$$\underline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \underline{\mathcal{O}}^B_{\gamma-1/m}(K_m).$$

Die Funktionen in diesen Räumen nennen wir vom **Typ infra-γ** beziehungsweise **infra-γ-integrabel** auf W. Weiterhin setzen wir

$$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}^B_{\gamma-1/m}(\overline{\overline{U_m}}) \text{ und}$$
$$\underline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \underline{\mathcal{O}}^B_{\gamma+1/m}(\overline{\overline{U_m}}).$$

Die Funktionen in diesen Räumen nennen wir vom **Typ sub-γ** und **sub-γ-integrabel** auf K. Schließlich definieren wir damit die Räume der infra-γ-integrablen Funktionen auf K beziehungsweise Funktionen des Typs sub-γ auf W durch

$$\underline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \underline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(U_m) \text{ und}$$
$$\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(K_m)$$

als induktiven beziehungsweise projektiven Limes lokalkonvexer Räume.

ANMERKUNG 1.3. Die Wortwahl *infra-γ* mag im Gegensatz zu der einigermaßen natürlichen Benennung *sub-γ* etwas willkürlich erscheinen, da dieser Funktionentyp tatsächlich im allgemeinen stärker wächst als Funktionen des Typs oder der Integrabilitätsordnung γ. Sie ist angelehnt an die bei Fourier Hyperfunktionen übliche Sprechweise, siehe zum Beispiel [**Kan88**], Seite 371: Dort heißen analytische Funktionen, die Abschätzungen der Form $|f(z)| \leq C_\varepsilon \cdot \mathrm{e}^{\varepsilon|\mathrm{Re}(z)|}$ *für alle* $\varepsilon > 0$ erfüllen, **infra-exponentiell**.

Die topologische Struktur dieser Räume ist für uns, nach dem, was wir in Abschnitt 1.5 bewiesen haben, kein Geheimnis mehr, denn mit den gleichen Methoden wie dort sehen wir:

BEMERKUNG 1.6.2. Die oben definierten Räume auf kompakten Mengen in $\mathbb{I}$ sind DFS-Räume und die auf offenen Mengen in $\mathbb{I}$ sind FS-Räume.

Es ist nicht etwa so, daß ähnlich wie in Satz 1.5.4 die infra- und sub-γ-Räume unabhängig davon wären, ob man sie mit Funktionen vom Typ γ oder γ-integrablen definiert. Immerhin gilt aber die folgende Verschärfung von Lemma 1.1.5:

LEMMA 1.6.3. *Die natürliche Restriktion*

$$\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(W) \hookrightarrow \underline{\mathcal{O}}_{\overline{-1-\gamma}}(W)$$

ist eine stetige Einbettung für alle offenen Mengen $W \subset \mathbb{I}$.

BEWEIS. Es reicht zu zeigen, daß für eine ausschöpfende Folge $\{K_m\}$ von Kompakta für W die Inklusion

$$\overline{\mathcal{O}}^B_{\gamma+1/n}(K_n) \longrightarrow \underline{\mathcal{O}}^B_{-1-\gamma-1/m}(K_m)$$

stetig ist für $m < n$. Setzt man $\gamma' = -1 - \gamma - 1/m$, dann ist dies äquivalent zur Stetigkeit von

$$\overline{\mathcal{O}}^B_{-\gamma'-\delta}(K_n) \longrightarrow \underline{\mathcal{O}}^B_{\gamma'}(K_m)$$

mit $\delta = 1 + 1/m - 1/n > 1$. Dies gilt wegen $K_m \Subset K_n$ nach Lemma 1.1.5, womit die Aussage bewiesen ist. □

ANMERKUNG 1.4. Man beachte aber, daß wiederum alle infra- und sub-Räume für $\gamma \to \pm\infty$, das heißt $\underline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}$, $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}$, $\underline{\mathcal{O}}_{\overline{\pm\infty}}$ und $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\pm\infty}}$ übereinstimmen, wenn sie analog zu Definition 1.5.1 gebildet werden. Sie sind dann natürlich topologisch zu $\mathcal{O}_{\pm\infty}$ isomorph.

1.7. Reproduzierende Kerne

Eine wichtige Technik in der Theorie der analytischen Funktionale und Hyperfunktionen ist die der *reproduzierenden Kerne*. Es ist allgemein üblich, für eine außerhalb einer Kompakten Mnege $K \subset \mathbb{Q}$ holomorphe Funktion $f \in \overline{\mathcal{O}}_{-\gamma}(W \setminus K)$ und $\gamma > 0$ die sogenannte **Cauchy-Transformation**, gegeben durch

$$\mathbf{C}_f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \frac{f(w)}{z - w} \mathrm{d}w, \tag{1.3}$$

zu definieren. Diese Transformation hat für uns aber den großen Nachteil, daß sie im allgemeinen *die Wachstumsordnung von f nicht erhält*. Wir weichen daher auf den **exponentiell abfallenden Cauchy–Hilbert-Kern**, wie er zum Beispiel in [**Kan88**], Beweis von Theorem 8.4.1, eingeführt wird. Dieser ist gegeben durch

$$\frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z - w}$$

und wird in der Theorie der Fourier Hyperfunktionen häufig verwendet. Er stellt ebenso wie der in (1.3) verwendete gewöhnliche Cauchy-Kern einen **reproduzierenden Kern** für holomorphe Funktionen dar, das heißt, wir haben in Analogie zu Korollar 1.4.4 die

BEMERKUNG 1.7.1. Sei $L \subset \mathbb{I}$ ein kompakter Streifen und $f \in \mathcal{O}_\infty(L)$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z - w} f(w) \mathrm{d}w \tag{1.4}$$

für jedes $z \in L^\circ_{\mathbb{C}}$.

Dies sieht man leicht ein, wenn man sich die Taylorentwicklung der Funktion $\exp(-(z-w)^2)$ anschaut und den Residuensatz benutzt. Andererseits erhält dieser Kern wie erwähnt die Wachstumseigenschaften einer Funktion:

LEMMA 1.7.2. *Sei $K \subset \mathbb{I}$ kompakt und $f \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W \setminus K)$ für eine Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(K)$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Sei L ein Streifen, der zwischen K und W liegt. Wir definieren die* ***exponentielle Cauchy-Transformation*** *von f durch*

$$\mathbf{C}^*_f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z-w} f(w) \mathrm{d}w, \tag{1.5}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial L_{\mathbb{C}}$. Dann ist die Funktion $\mathbf{C}^*_f(z)$ ein Element von $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{Q} \setminus \partial L)$ und unabhängig von L.

BEWEIS. Daß das Integral existiert für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial L_{\mathbb{C}}$ und dort holomorph ist, ist klar wegen des exponentiell abfallenden Faktors (jede Riemann-Summe konvergiert absolut und die Folge der Riemann-Summen konvergiert gegen eine holomorphe Funktion). Daß es unabhängig ist von der Wahl des Streifens L folgt sofort aus Satz 1.4.3. Mit der Koordinatentransformation $w' = z - w$ erhalten wir für $z \in \mathbb{C} \setminus \partial L_{\mathbb{C}}$:

$$\mathbf{C}^*_f(z) = \int\limits_{-\partial L_{\mathbb{C}}+z} \frac{\mathrm{e}^{-w'^2}}{w'} f(z-w') \mathrm{d}w'.$$

Nun läßt sich $f(z-w')$ grob abschätzen durch

$$|f(z-w')| \le C \cdot h(z) \cdot k(w'),$$

mit einer geeigneten Konstante $C > 0$. Dabei sind

$$h(z) = \overline{\|f(z-\cdot)\|}_{\gamma,-S+z} \text{ und } k(w') = \overline{\|f(\cdot - w')\|}_{\gamma,S+w'},$$

für ein Kompaktum $S \Subset L \setminus K$, positive, stetige Funktionen, die die Abschätzungen $h(z) = O(|\mathrm{Re}\, z|^\gamma)$ und $k(w') = O(|\mathrm{Re}\, w'|^\gamma)$ für $|\mathrm{Re}\, w'| \to \infty$ erfüllen und unabhängig vom jeweils anderen Argument sind. Also ist

$$|\mathbf{C}^*_f(z)| \le h(z) \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\partial L_{\mathbb{C}}+z} \left| \frac{\mathrm{e}^{-w'^2}}{w'} \right| k(w') \mathrm{d}w'.$$

Wegen der Abfalleigenschaften des Integranden konvergiert das Integral für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \partial L_{\mathbb{C}}$, und $\mathbf{C}^*_f(z)$ ist beschränkt durch eine endliche Konstante. Daraus folgt insgesamt $\mathbf{C}^*_f(z) = O(|\mathrm{Re}\, z|^\gamma)$ in $\mathbb{C} \setminus \partial L_{\mathbb{C}}$ lokal gleichmäßig in $\mathrm{Im}\, z$. Also ist $\mathbf{C}^*_f(z) \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{Q} \setminus \partial L)$. □

KAPITEL 2

Dualität und analytische Theoreme

Überblick

Zu Hyperfunktionen gibt es im allgemeinen zwei Zugänge: Die Auffassung als *Distributionen*, wobei dann die Testfunktionen analytisch sind, oder aber das erheblich anspruchsvollere Verständnis von Hyperfunktionen als *verallgemeinerte Funktionen*. Letzteres bedeutet mathematisch, daß Hyperfunktionen als *welke Garbe* über $\mathbb{R}$ beziehungsweise $\mathbb{D}$, wenn es sich um Fourier Hyperfunktionen oder wie bei uns um solche mit polynomialen Wachstumsbedingungen handelt, erklärt werden. Dieser Zugang macht es (wenn auch nicht als einziger) möglich, Hyperfunktionen lokale und sogar punktweise Eigenschaften zuzusprechen und zum Beispiel ihren Träger und singulären Träger zu definieren.

Die beiden Aspekte werden dann üblicherweise durch einen Dualitätssatz verbunden, der die Dualräume gewisser analytischer Funktionen als *relative Kohomologiegruppen* geeigneter anderer holomorpher Funktionen identifiziert. Wir folgen [**Mor93**], Kapitel 2 und 3, indem wir dieses Dualitätstheorem der eigentlichen Hyperfunktionentheorie mit Wachstumsordnungen voranstellen und außerdem etwas allgemeiner formulieren. Dies hat den Vorteil, daß wir analytische Funktionale nicht nur auf $\mathbb{D}$ sondern auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{Q}$ betrachten können. Zudem ermöglicht es der Dualitätssatz, die Theoreme von Runge und Mittag–Leffler auf einfache Weise abzuleiten. Diese beiden klassischen Resultate in der Variante für Funktionen mit gegebener Wachstumsordnung sind dann in Kapitel 3 die zentralen Hilfsmittel bei der Konstruktion der entsprechenden Hyperfunktionen als welke Garbe.

In den Abschnitten 2.1 und 2.2 beweisen wir Dualitätstheoreme für analytische Funktionale auf Funktionenräumen fester Integrabilitätsordnung und den Räumen unendlichen Typs. Zwei Ideen sind dabei wichtig: Wir konstruieren die Bilinearform, die die Dualität erzeugt, als Linienintegral des Produkts von „Testfunktion" und verallgemeinerter „dualer" Funktion über geeignete Integrationswege, nämlich Ränder der in Abschnitt 1.4 eingeführten Streifen. In dieser Formulierung ist es dann ziemlich klar, daß eine Funktion des Typs γ ein Funktional auf den γ-integrablen Funktionen definieren kann, die, wie wir wissen, längs der Ränder von Streifen integrabel sind gegen Funktionen dieser Wachstumsordnung. Zweitens benutzen wir, um zu zeigen, daß alle Funktionale auf diese Weise entstehen, die exponentiell abfallende Variante der *Cauchy-Transformation*, mit deren Hilfe wir uns holomorphe Funktionen beschaffen, die ein gegebenes Funktional repräsentieren. Dabei geht wesentlich ein, daß L^∞ der Dualraum von L^1 ist, vergleiche Anmerkung 2.2. Den guten Eigenschaften von FS- und DFS-Räumen ist es zu verdanken, daß sich diese Dualität in Abschnitt 2.2 sehr leicht unter Verwendung der Aussage für festes γ auf die Grenzfälle $\gamma \to \pm\infty$ übertragen läßt.

In den letzten beiden Abschnitten dieses Kapitels beweisen wir Runges und Mittag–Lefflers Theoreme für unsere Funktionenklassen. Diese klassischen Ergebnisse mögen für sich selbst sprechen. Sie sind die wesentlichen Bedingungen, die es ermöglichen zu zeigen, daß die im folgnden Kapitel definierten Hyperfunktionenräume lokalisierbar sind, das heißt welke Garben bilden. In die Beweise von Runges und Mittag–Lefflers Theorem gehen die zuvor gezeigten Dualitäten wesentlich ein.

2.1. Analytische Funktionale und algebraische Dualität

In diesem Abschnitt beweisen wir das zentrale Theorem des ersten Teils dieser Arbeit: Den Dualitätssatz für analytische Funktionale auf γ-integrablen Funktionen. Resultate dieser Art — für beschränkte Gebiete — gehen zurück auf Grothendieck, Sebastião e Silva und Köthe.

Wir definieren zunächst den Dualraum γ-integrabler Funktionen auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{I}$, den wir dann als einen Raum holomorpher Funktionen identifizieren wollen.

DEFINITION 2.1.1. Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{I}$ bezeichne mit $\underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K)$ den Raum der stetigen linearen Funktionale lokalkonvexen Raum $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$.

Wir betrachten hier zunächst keine spezielle Topologie auf $\underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K)$, da der Raum $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$ selbst keine hinreichend gute topologische Struktur besitzt. Dies werden wir später bei der Behandlung von Räumen des unendlichen Typs sowie er infra- und sub-γ-Räume wiedergutmachen.

Allgemein lassen sich analytische Funktionale auf beschränkten Gebieten in $\mathbb{C}^n$ darstellen als *n-te relative Kohomologiegruppen* der Garbe der holomorphen Funktionskeime, siehe [**Mor93**], Kapitel 4, 5 und 6. Im eindimensionalen Fall werden diese Objekte zu einfachen Quotientenräumen, in unserem Fall gegeben durch die

DEFINITION 2.1.2. Für $K \subset \mathbb{Q}$ kompakt, $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(K)$, definiere die **erste relative Kohomologiegruppe von W mit Träger in K und Koeffizienten in $\overline{\mathcal{O}}_\gamma$** als

$$\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W \setminus K) \Big/ \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W).$$

Wir bezeichnen mit $[F]$ die Äquivalenzklasse der Funktion $F \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W \setminus K)$ in $\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_\gamma)$.

Nun sind wir soweit, unseren Dualitätssatz zu beweisen. Dabei halten wir uns in der groben Struktur ziemlich eng an den Beweis von Theorem 2.1 in [**Mor93**]. Die Änderungen, die wir vorzunehmen haben, betreffen natürlich die Wachstumsordnung und die Unbeschränktheit der Definitionsgebiete. Schließlich kann, da $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$ nicht die Struktur eines DFS-Raums trägt, der Isomorphismus zwischen $\underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K)$ und der oben definierten Kohomologiegruppe nur ein algebraischer und kein topologischer sein.

THEOREM 2.1.3. *Sei K kompakt in $\mathbb{I}$, und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$. Dann gibt es einen linearen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_\gamma) \cong \underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K).$$

Dieser Isomorphismus wird erzeugt durch die Bilinearform

$$\langle [F], f\rangle \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\partial L_{\mathbb{C}}} F(z) f_U(z)\mathrm{d}z, \tag{2.1}$$

wobei $U \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$*,* L *ein beliebiger Streifen zwischen* K *und* $U \cap W$ *ist und* F *und* f_U *Repräsentanten von*

$$([F], f) \in \mathrm{H}^1_K(W; \overline{\mathcal{O}}_\gamma) \times \underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$$

sind. Das heißt, $F \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W \setminus K)$ *und* $f_U \in \underline{\mathcal{O}}_\gamma(U)$*.*

BEWEIS. Wir unterteilen den Beweis in fünf Schritte. In den ersten zwei untersuchen wir die elementaren Eigenschaften der Bilinearform $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

1. WOHLDEFINIERTHEIT VON $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $U \subset W$ annehmen. Dann ist $F \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(U \setminus K)$ und es existiert nach Lemma 1.4.2 ein kompakter Streifen, der zwischen L und U liegt mit $F \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(S)$ und $f_U \in \underline{\mathcal{O}}_\gamma(S)$. Dann ist gewiss $F \cdot f_U \in \underline{\mathcal{O}}^B_0(S)$, und wir können somit Satz 1.4.5.i) anwenden um zu schließen, daß ein $N_S > 0$ existiert so, daß

$$\begin{aligned} |\langle [F] , f \rangle| &\leq \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} |F(z) f_U(z)| |\mathrm{d}z| \\ &\leq N_S \underline{\|F \cdot f_U\|}_{0,S}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dies zeigt zunächst, daß die Bilinearform endlich ist. Weiter ist $\langle \cdot , \cdot \rangle$ nach Definition unabhängig von der Wahl des Repräsentanten f_U. Daß sie auch unabhängig ist von der Wahl des Streifens L ist, folgt unmittelbar aus Cauchys Integralsatz 1.4.3 für Streifen.

2. $\langle [F] , \cdot \rangle$ DEFINIERT EIN STETIGES, LINEARES FUNKTIONAL. Für festes $[F]$ wie oben definieren wir eine Abbildung

$$T_{[F]} \colon f \longmapsto \langle [F] , f \rangle$$

für alle $f \in \underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$. Daß diese Abbildung stetig auf $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$ ist, kann aus der Definition der Topologie dieses Raums ersehen werden: Es reicht zu zeigen, daß für jede feste Menge $U \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$ die Abbildung

$$\underline{\mathcal{O}}_\gamma(U) \ni f_U \longmapsto \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} F(z) \cdot f_U(z) \mathrm{d}z$$

stetig ist. Wähle dazu S wie oben fest und wende die Abschätzung (2.2) an:

$$\begin{aligned} |T_{[F]}(f_U)| &\leq N_S \cdot \underline{\|F \cdot f_U\|}_{0,S} \\ &\leq N_S \cdot \overline{\|F\|}_{\gamma,S} \cdot \underline{\|f_U\|}_{\gamma,S}. \end{aligned}$$

Da die Topologie des lokalkonvexen Raums $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(U)$ definiert wird durch die Halbnormen $\underline{\|\cdot\|}_{\gamma,S}$ für alle kompakten Streifen S in U, zeigt dies die Stetigkeit der fraglichen Abbildung. Wir erhalten also insgesamt eine Abbildung

$$\begin{aligned} T\colon\ \mathrm{H}^1_K(W; \overline{\mathcal{O}}_\gamma) &\longrightarrow \underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K), \\ [F] &\longmapsto T_{[F]} \end{aligned}$$

von $\mathrm{H}^1_K(W; \overline{\mathcal{O}}_\gamma)$ in den Dualraum von $\underline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$. Wir untersuchen nun ihre Eigenschaften.

3. INJEKTIVITÄT VON T. Wir haben zu zeigen, daß F im Kern des Quotienten, der $\mathrm{H}^1_K(W; \overline{\mathcal{O}}_\gamma)$ definiert, liegt, falls $T_{[F]} = 0$ ist als Element von $\underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K)$. Wir müssen also in diesem Fall eine analytische Fortsetzung von F auf ganz W unter Beibehaltung des Typs γ finden. Wir nehmen ab jetzt $\gamma = 0$ an. Dies ist möglich, indem wir etwa das Paar $([j_{-\gamma} F], j_\gamma f)$ anstelle von $([F], f)$ betrachten, was offenbar die Bilinearform (2.1) unverändert läßt, unter Beachtung von Lemma 1.2.2.iii). Um F analytisch fortzusetzen, benutzen wir

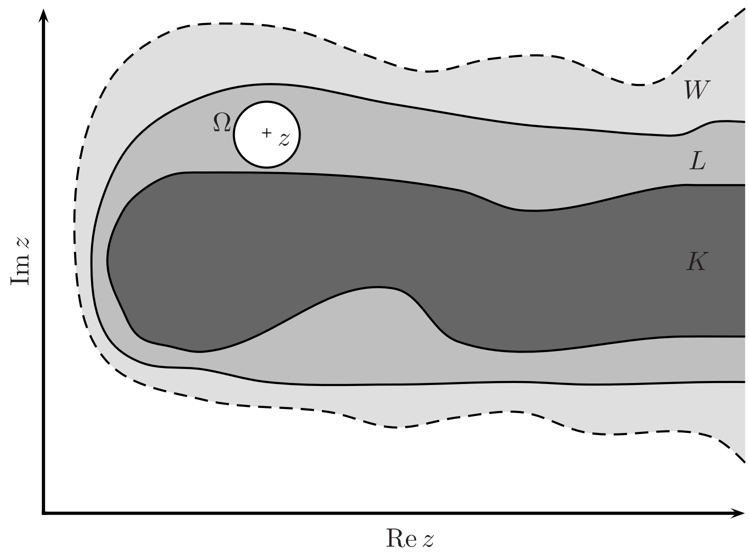

ABBILDUNG 2.1. Zu Teil 3 des Beweises.

die in (1.5) eingeführte exponentiell abfallende Cauchy-Transformation, das heißt, wir setzen für $F \in \overline{\mathcal{O}}_0(W \setminus K)$:

$$G(z) = \mathbf{C}^*_F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_\mathbb{C}} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z-w} F(w) \mathrm{d}w,$$

für einen beliebigen Streifen L zwischen K und W. Dieses Integral existiert nach Lemma 1.7.2 und es gilt $G \in \overline{\mathcal{O}}_0(L^\circ)$. Wir zeigen, daß $F \in \overline{\mathcal{O}}_0(W)$ ist, falls $\langle [F], f \rangle = 0$ gilt für alle $f \in \underline{\mathcal{O}}_0(K)$. Dazu reicht es zu zeigen, daß $F = G$ ist in $L^\circ_\mathbb{C} \setminus K$. Wähle ein $z \in L^\circ_\mathbb{C} \setminus K$ und eine kleine offene Kreisscheibe Ω mit Mittelpunkt z so, daß $\overline{\Omega} \subset L^\circ_\mathbb{C} \setminus K$ ist. Dann ist auch $L \setminus \Omega$ ein Streifen, der zwischen K und W liegt, siehe Abbildung 2.1. Daraus folgt

$$\begin{aligned} G(z) = {} & \frac{-1}{2\pi i} \Bigg[\underbrace{\int_{\partial L_\mathbb{C} - \partial\Omega}}_{\parallel} + \underbrace{\int_{\partial\Omega}}_{\parallel} \Bigg] \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z-w} F(w) \mathrm{d}w \\ = {} & \qquad\quad 0 \qquad + \quad F(z), \end{aligned}$$

nach Voraussetzung und Cauchys Integralformel in ihrer exponentiell abfallenden Version, siehe Bemerkung 1.7.1. Dies zeigt die Behauptung.

4. SURJEKTIVITÄT VON T. Wir müssen zeigen, daß ein Funktional $T \in \underline{\mathcal{O}}'_0(K)$ einen holomorphen Repräsentanten besitzt, das heißt, daß eine Funktion $\widetilde{T} \in \overline{\mathcal{O}}_0(W \setminus K)$ existiert mit

$$(T, f) = \left\langle \widetilde{T}, f \right\rangle$$

für alle $f \in \underline{\mathcal{O}}_0(K)$, wobei $(\cdot, \cdot)$ die Dualität bezeichnet. Um so eine Funktion mit den gewünschten Wachstumsbedingungen zu erhalten, benutzen wir das folgende Lemma.

LEMMA 2.1.4. *Für ein analytisches Funktional $T \in \underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K)$ auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{Q}$ ist die* ***exponentielle Cauchy–Hilbert-Transformation*** *definiert durch*

$$\mathbf{CH}^*_T(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \left(T_w, \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z-w} \right),$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus K_\mathbb{C}$. Es gilt $\mathbf{CH}^*_T \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{Q} \setminus K)$.

Wir zeigen die Eigenschaften von $\mathbf{CH}_T^*$ für unser $T \in \underline{\mathcal{O}}_0'(K)$, woraus der allgemeine Fall ohne weiteres folgt. $\mathbf{CH}_T^*(z)$ ist sicherlich wohldefiniert, da $\exp(-(z-w)^2)/(z-w)$ ein Element von $\underline{\mathcal{O}}_0(K)$ ist. Betrachte die Einschränkung von T auf den Unterraum $\underline{\mathcal{O}}_0(U)$ für ein $U \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$ und benutze das Hahn–Banach-Theorem B.6.9 für lokalkonvexe Räume, um diese Einschränkung nach ganz $L^1(U_{\mathbb{C}})$ fortzusetzen. Bekanntlich sind die stetigen, linearen Funktionale auf L^1 nichts anderes als L^∞-Funktionen. Wir können etwa Theorem 6.16 in [**Rud86**] anwenden, um zu sehen, daß eine Funktion $m \in L^\infty(U_{\mathbb{C}})$ mit in $U_{\mathbb{C}}$ enthaltenem Träger existiert, so daß gilt: Die Fortsetzung von T nach $L^1(U_{\mathbb{C}})$ kann dargestellt werden durch das reguläre Borelmaß $\mu = m \cdot \lambda$, wobei λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}$ bezeichnet. Insbesondere ist

$$\mathbf{CH}_T^*(z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{I}} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z-w} m(w) \mathrm{d}\lambda(w)$$

eine in $\mathbb{I}_{\mathbb{C}} \setminus \overline{U_{\mathbb{C}}}$ holomorphe Funktion nach [**Mor93**], Theorem 1.2.8. Da m in L^∞ ist, folgt aus der Translationsinvarianz dieses Integrals und wegen des exponentiellen Abfalls des verwendeten Kerns wie im Beweis von Lemma 1.7.2, daß $\mathbf{CH}_T^*(z) = O(|\mathrm{Re}\, z|^0)$ ist für $|z| \to \infty$ innerhalb des genannten Gebiets. Da nun aber $U \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$ beliebig gewählt war, können wir schließen, daß $\mathbf{CH}_T^*(z)$ ein Element von $\overline{\mathcal{O}}_0(\mathbb{I} \setminus K)$ ist, wie es gewünscht war.

Als fünfter Schritt bleibt $\langle [\mathbf{CH}_T^*], \cdot \rangle = T$ zu zeigen. Für $f \in \underline{\mathcal{O}}_0(K)$ mit Repräsentanten $f_U \in \underline{\mathcal{O}}_0(U)$ und jeden Streifen L zwischen K und U haben wir, da der exponentiell abfallende Cauchy–Hilbert-Kern ein reproduzierender Kern für holomorphe Funktionen mit Wachstumsbedingungen auf Streifen ist,

$$f_U(w) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2} f_U(z)}{w-z} \mathrm{d}z$$

für alle $w \in L_{\mathbb{C}}^\circ$, nach Bemerkung 1.7.1. Dieses Integral konvergiert in $\underline{\mathcal{O}}_0(K)$, und daher können wir wiefolgt rechnen:

$$\begin{aligned}
(T\,, f) &= \left(T_w\,, \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2} f_U(z)}{w-z} \mathrm{d}z \right) \\
&= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \left(T_w\,, \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{w-z} \right) f_U(z) \mathrm{d}z \\
&= -\int_{\partial L_{\mathbb{C}}} \mathbf{CH}_T^*(z) f_U(z) \mathrm{d}z \\
&= \langle [\mathbf{CH}_T^*]\,, f \rangle,
\end{aligned}$$

nach Definition (2.1). □

Einen, wie zum Beispiel in Teil 4 des obigen Beweises definierten, Repräsentanten $\mathbf{CH}_T^*$ für ein analytisches Funktional $T \in \underline{\mathcal{O}}_\gamma'(K)$ nennen wir eine **definierende Funktion** von T. Diese Funktionen sind die wesentlichen Objekte bei der Arbeit mit *Hyperfunktionen* und werden daher in den nachfolgenden Kapiteln eine wichtige Rolle spielen. Dazu auch folgende

ANMERKUNG 2.1. Normalerweise, das heißt bei beschränkten Gebieten und ohne Wachstumsbedingungen, hätte man in Teil 4 des obigen Beweises den gewöhnlichen Cauchy-Kern benutzt, um sich definierende Funktionen zu verschaffen, vergleiche auch [**Mor93**], Theorem 2.1.9. Dies ging hier nicht, weil dieser Kern nicht die nötige Wachstumsbedingung liefert: Integriert man $(z-w)^{-1}$ mit einer wesentlich beschränkten Funktion, so hat das Ergebnis im Allgemeinen eine logarithmische Singularität im Unendlichen. Wir werden dafür später noch ein typisches Beispiel geben. Das heißt, die gewöhnliche Cauchy-Transformation eines Funktionals $T \in \mathcal{O}_0'$ wäre bestenfalls zwar in $\overline{\mathcal{O}}_\varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$, nicht aber in $\overline{\mathcal{O}}_0$. Dies ist der Grund, warum man bei analytischen Funktionalen mit Wachstumsbeschränkungen und damit insbesondere bei *Fourier Hyperfunktionen* stets den exponentiell abfallenden Cauchy-Kern verwendet, siehe zum Beispiel [**Kan88**], Kapitel 8. Für die Anwendung, das heißt, um konkret definierende Funktionen auszurechnen, erweist sich aber der einfache Cauchy-Kern schon als kompliziert genug, vom exponentiell abfallenden ganz zu schweigen. Die infra- und sub-γ Funktionen, deren Dualität wir im nächsten Abschnitt betrachten, verhalten sich in dieser hinsicht besser, da zum Beispiel $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{0}}(W \setminus \mathbb{D})$, $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{D})$, gerade die obengenannten Funktionen mit logarithmischen Singularitäten enthält. Die infra-$gamma$-Räume verhalten sich also gegenüber dem gewöhnlichen Cauchy–Hilbert-Kern — wenigstens unter günstigen Umständen — besser als die fester Wachstumsordnung.

ANMERKUNG 2.2. Man könnte erwarten, daß auch eine zu Theorem 2.1.3 symmetrische Dualität $\overline{\mathcal{O}}_\gamma{}' \cong \underline{\mathcal{O}}_\gamma$ gelten würde. Dies kann aber nicht der Fall sein, da bekanntlich L^1 nicht groß genug ist, um alle Funktionale auf L^∞ zu enthalten, siehe zum Beispiel [**Rud86**], Seite 127. Symmetrie läßt sich in gewissem Maß wiederherstellen, wenn man die Struktur des Testfunktionenraums durch einen weiteren, induktiven Limesprozeß abschwächt. Dies wird das Thema der beiden folgenden Abschnitte sein.

2.2. Topologische Dualräume von $\underline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(K)$, $\underline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(K)$ und $\mathcal{O}_{\pm\infty}$

Unser grundlegendes Dualitätstheorem 2.1.3 erlaubt es uns, relativ einfach einen entsprechenden Satz für die in Abschnitt 1.5 eingeführten Funktionen unendlichen Typs herzuleiten. Diese Funktionen haben auf kompakten Mengen außerdem nach Satz 1.5.3 die Struktur von DFS-Räumen. Ihre mit der starken Topologie versehenen Dualräume lassen sich deshalb gemäß Satz B.6.6 — Lemma B.6.8 in Anhang B auf eindeutige Weise als FS-Räume identifizieren.

Wir machen zunächst in Analogie zu Definition 2.1.2 die

DEFINITION 2.2.1. Setze für $K \subset \mathbb{I}$ kompakt und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$:

$$\mathrm{H}^1_K(W; \mathcal{O}_\infty) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_\infty(W \setminus K) \Big/ \mathcal{O}_\infty(W) \text{ und}$$

$$\mathrm{H}^1_K(W; \mathcal{O}_{-\infty}) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_{-\infty}(W \setminus K) \Big/ \mathcal{O}_{-\infty}(W).$$

Man sieht nun leicht, daß diese Räume FS-Räume sind.

SATZ 2.2.2. *Die Räume* $\mathrm{H}^1_K(W; \overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty})$ *sind FS-Räume.*

BEWEIS. Zunächst ist $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W)$ injektiv eingebettet in $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W \setminus K)$ durch die natürliche Restriktion. Der Quotient eines FS-Raumes modulo eines abgeschlossenen Unterraumes ist wiederum ein FS-Raum nach dem Satz B.6.5. Wir haben also nur zu zeigen, daß $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W)$ abgeschlossen ist in $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W \setminus K)$. Dafür reicht es zu zeigen, daß die auf dem Unterraum $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W)$ von $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W \setminus K)$ induzierte Topologie stärker als die originale Topologie von $\overline{\mathcal{O}}_{\pm\infty}(W)$ ist. Wähle dazu zwei Folgen kompakter Mengen L_j und P_j in $\mathbb{I}$, die $W \setminus K$ beziehungsweise W ausschöpfen und so, daß $L_j \Subset P_j$ für alle j gilt. Dann gilt die Abschätzung $\overline{\|f\|}_{\pm j, P_j} \geq \overline{\|f\|}_{\pm j, L_j}$ nach Definition 1.1.1 für $f \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W)$. Dies, zusammen mit Definition 1.1.2, zeigt die Aussage. $\square$

Mit obiger Setzung wird die Verallgemeinerung von Theorem 2.1.3 auf den Fall $\gamma = \pm\infty$ zu einer einfachen Rechnung:

THEOREM 2.2.3. *Sei $K \subset \mathbb{I}$ kompakt und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$. Dann gibt es lineare, topologische Isomorphismen*

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^1_K(W;\mathcal{O}_\infty) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'_{-\infty}(K) \text{ und}\\ \mathrm{H}^1_K(W;\mathcal{O}_{-\infty}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'_{\infty}(K),\end{aligned}$$

die induziert werden von der Erweiterung beziehungsweise Einschränkung der Bilinearform (2.1) auf diese Räume. Hierbei bezeichnen $\mathcal{O}'_{-\infty}(K)$ und $\mathcal{O}'_{\infty}(K)$ die mit der starken Topologie versehenen Dualräume.

BEWEIS. Wir betrachten zuerst die zweite Dualität und benutzen dieselbe Argumentation, die zu Bemerkung 1.5.2 führte, um $\mathcal{O}'_\infty(K)$ anders hinzuschreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}'_\infty(K) &= \underline{\mathcal{O}}'_\infty(K)\\ &= \Big(\varinjlim \underline{\mathcal{O}}^B_{-j}(\overline{\overline{U_j}})\Big)'\\ &= \Big(\varinjlim \underline{\mathcal{O}}_{-j}(K)\Big)'\end{aligned}$$

Nun kann man die Abschätzung aus Satz 1.4.5ii) verwenden, um wie im Beweis von Satz 1.1.4 zu zeigen, daß auch die Inklusionen $\underline{\mathcal{O}}_{-j}(K) \to \underline{\mathcal{O}}_{-j-1}(K)$ kompakt sind. Dann ist nach Satz B.6.6 der induktive Limes regulär und es gilt nach Satz B.6.7:

$$\begin{aligned}&= \Big(\varinjlim \underline{\mathcal{O}}_{-j}(K)\Big)'\\ &= \varprojlim \underline{\mathcal{O}}'_{-j}(K)\end{aligned}$$

Wir rechnen weiter unter Verwendung des Dualitätstheorems 2.1.3 und Definition 2.1.2:

$$\begin{aligned}&= \varprojlim \mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{-j})\\ &= \varprojlim\Big(\overline{\mathcal{O}}_{-j}(W\setminus K)\Big/\overline{\mathcal{O}}_{-j}(W)\Big)\end{aligned}$$

Und schließlich nach Satz B.6.5:

$$= \varprojlim \overline{\mathcal{O}}_{-j}(W\setminus K)\Big/\varprojlim \overline{\mathcal{O}}_{-j}(W)$$

Dies ist wiederum nach Bemerkung 1.5.2:

$$\begin{aligned}&= \overline{\mathcal{O}}_{-\infty}(W\setminus K)\Big/\overline{\mathcal{O}}_{-\infty}(W)\\ &= \mathcal{O}_{-\infty}(W\setminus K)\Big/\mathcal{O}_{-\infty}(W)\\ &= \mathrm{H}^1_K(W;\mathcal{O}_{-\infty}),\end{aligned}$$

wobei wir zuletzt noch Satz 1.5.4 und die Definition 2.2.1 von $\mathrm{H}^1_K(W;\mathcal{O}_{-\infty})$ verwendet haben. Das Dualitätstheorem 2.1.3 liefert hier zunächst nur eine algebraische Dualität. Da wir aber wissen, daß $\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{-\infty})$ ein FS-Raum ist, folgt aus Lemma B.6.8, das sie die eindeutig bestimmten Dualräume in der starken Topologie sind. Der andere Fall läßt sich offenbar ganz ähnlich zeigen, wenn man die entsprechenden bekannten Ergebnisse für projektive Limiten verwendet. □

Die Unterteilung in infra- und sub-γ-Funktionen setzt nun auch Funktionen vom Typ γ in symmetrische Dualität zu γ-integrablen.

THEOREM 2.2.4. *Sei $K \subset \mathbb{I}$ kompakt und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$. Dann gibt es lineare, topologische Isomorphismen*

$$\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{O}}'_{\underline{\gamma}}(K) \text{ und}$$
$$\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{O}}'_{\overline{\gamma}}(K),$$

die induziert werden von der Erweiterung beziehungsweise Einschränkung der Bilinearform (2.1) *auf diese Räume. Dabei sind $\underline{\mathcal{O}}'_{\underline{\gamma}}(K)$ und $\underline{\mathcal{O}}'_{\overline{\gamma}}(K)$ die mit der starken Topologie versehenen Dualräume und die FS-Räume $\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}})$, und $\mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}})$ sind auf natürliche Weise gemäß Definition 2.2.1 zu definieren.*

BEWEIS. Die Topologie der Kohomologiegruppen sieht man genauso wie in Satz 2.2.2. Wir können die Dualitäten dann wie im Beweis von Theorem 2.2.3 nachrechnen. Als Beispiel betrachten wir die erste der beiden:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathcal{O}}'_{\underline{\gamma}}(K) &= \Big(\varinjlim \underline{\mathcal{O}}_{\gamma+1/m}(K)\Big)' \\
&= \varprojlim \underline{\mathcal{O}}'_{\gamma+1/m}(K) \\
&= \varprojlim \Big(\overline{\mathcal{O}}_{\gamma+1/m}(W\setminus K) \Big/ \overline{\mathcal{O}}_{\gamma+1/m}(W)\Big) \\
&= \overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(W\setminus K) \Big/ \overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(W) \\
&= \mathrm{H}^1_K(W;\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}).
\end{aligned}$$

Der andere Fall folgt wiederum genauso. □

2.3. Runges Theorem

Wir kommen nun in diesem und dem nächsten Abschnitt zu den zwei Theoremen, die die Grundlage der garbentheoretischen Auffassung von Hyperfunktionen bilden. Wir beginnen mit der Variante von Runges Approximationssatz für holomorphe Funktionen mit Wachstumsbedingungen und auf Mengen in $\mathbb{I}$. Dieser sagt uns genau, wann wir zum Beispiel Funktionen vom Typ infra-γ auf einem Kompaktum durch Folgen von Funktionen von demselben Typ auf einem größeren Kompaktum gleichmäßig annähern können.

THEOREM 2.3.1 (Runges Approximationssatz). *Seien $K \subset L$ kompakte Teilmengen von $\mathbb{I}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Genau dann ist $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(L)$ dicht in $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$, wenn jede Zusammenhangskomponente von $\mathbb{I}\setminus K$ die Menge $\mathbb{I}\setminus L$ schneidet. Ist darüberhinaus K relativ kompakt in L dann ist $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(L)$ folgendicht in $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$. Dieselben Aussagen gelten auch für die Paare $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(L)$ und $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(K)$, $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(L)$ und $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(K)$ sowie $\mathcal{O}_{\pm\infty}(L)$ und $\mathcal{O}_{\pm\infty}(K)$.*

BEWEIS. Wir beweisen zunächst die Dichtheitsaussage für $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(L)$ und $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$ mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Nach dem Hahn-Banach-Theorem B.6.9 ist die Aussage äquivalent zur Injektivität der natürlichen Abbildung

$$\overline{\mathcal{O}}'_\gamma(K) \to \overline{\mathcal{O}}'_\gamma(L)$$

unter den gegebenen Voraussetzungen. Sei $T \in \overline{\mathcal{O}}'_\gamma(K)$. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz existiert ein reguläres Borelmaß μ auf $\mathbb{I}$ mit kompaktem Träger in $U \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$, das die Einschränkung von T nach $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(U)$ repräsentiert. Weiterhin ist die Beschränkung von μ auf das Gebiet $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ absolutstetig bezüglich des Maßes $(1+|\operatorname{Re} z|)^\gamma\lambda$ und nach dem Radon-Nikodym-Theorem, siehe [**Rud86**], Theorem 6.10 (b), gilt $\|(1+|\operatorname{Re} z|)^\gamma\mu\| < \infty$, wobei $\|\cdot\|$ hier die totale Variation des Maßes bezeichnet.

Nun reicht es zu zeigen, daß für jedes solche Maß μ das zudem noch orthogonal zu $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(L)$ ist, das heißt für das $(\mu, f) = 0$ gilt für alle $f \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(L)$, folgt, daß auch $(\mu, g) = 0$ gilt für alle $g \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$. Wähle dazu $0 < \delta < 1$ und setze

$$F(w) \overset{\text{def}}{=} j_{-\gamma-\delta}(w) \cdot \int_{\mathbb{I}} \frac{j_{\gamma+\delta}(z)}{z-w} \mathrm{d}\mu(z),$$

für $w \in \mathbb{C} \setminus K_{\mathbb{C}}$. Das Integral existiert dank der Eigenschaften von μ und Lemma 1.2.2 ii). Dann ist $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K_{\mathbb{C}})$ und für $w \in \mathbb{C} \setminus L_{\mathbb{C}}$ gilt $k! j_{\gamma+\delta}(z)/(z-w)^{k+1} \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(L)$ und daher

$$F^{(k)}(w) = k! j_{-\gamma-\delta}(w) \cdot \int_{\mathbb{I}} \frac{j_{\gamma+\delta}(z)}{(z-w)^{k+1}} \mathrm{d}\mu(z) = 0$$

nach Voraussetzung. Damit folgt $F \equiv 0$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus K_{\mathbb{C}}$, die $\mathbb{C} \setminus L_{\mathbb{C}}$ schneidet. Das heißt $F \equiv 0$ auf $\mathbb{C} \setminus K_{\mathbb{C}}$, was nichts anderes bedeutet, als daß $F = 0$ ist als Element von $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{I} \setminus K)$.

Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $g \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(K)$ holomorph ist in $U_{\mathbb{C}}$ und weiterhin nach Lemma 1.4.2, daß U ein Streifen ist. Wähle eine Funktion $\psi \in C^\infty(U_{\mathbb{C}})$ so, daß: i) $\psi \equiv 1$ ist in einer Umgebung von $K_{\mathbb{C}}$, ii) $\operatorname{supp}\psi$ kompakt ist in U und iii) $|\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\overline{z}|$ beschränkt ist auf $U_{\mathbb{C}}$. Dann können wir Cauchys Integralformel für Streifen und Satz B.5.2 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} g(z) &= g(z)\psi(z) \\ &= j_{\gamma+\delta}(z) \cdot \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}} \frac{j_{-\gamma-\delta}(w) g(w)}{z-w} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\overline{w}} \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \end{aligned}$$

für $z \in K_{\mathbb{C}}$. Damit gilt, da $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}\overline{w} \equiv 0$ ist in der Einschränkung auf $\mathbb{C}$ einer Umgebung von K,

$$\begin{aligned} (\mu, g) &= \int_{\mathbb{I}} g(z) \mathrm{d}\mu(z) \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}} \left(j_{-\gamma-\delta}(w) \cdot \int_{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}} \frac{j_{\gamma+\delta}(z)}{z-w} \mathrm{d}\mu(z) \right) g(w) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\overline{w}} \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}} F(w) g(w) \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\overline{w}} \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w} = 0, \end{aligned}$$

durch Umkehrung der Integrationsordnung.

Die umgekehrte Implikation kann durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden genau wie im Beweis von [**Hör66**], Theorem 1.3.1. Siehe zum Beispiel auch [**Nar85**], Seiten 107 ff. Die zweite Aussage folgt ebenfalls mit Standardmethoden wie im Beweis von [**Mor93**], Theorem 2.2.1.

Der Fall $\gamma = \pm\infty$ ist noch wesentlich einfacher. Die Dichtheit von $\mathcal{O}_{\pm\infty}(L)$ in $\mathcal{O}_{\pm\infty}(K)$ ist äquivalent zur Injektivität der Abbildung

$$\mathrm{H}^1_K(W; \mathcal{O}_{\mp\infty}) \to \mathrm{H}^1_L(W; \mathcal{O}_{\mp\infty})$$

für eine gemeinsame Umgebung W von K und L, nach Theorem 2.2.3. Nach Definiton ist dies äquivalent zur Injektivität von

$$\mathcal{O}_{\mp\infty}(W \setminus K) \to \mathcal{O}_{\mp\infty}(W \setminus L),$$

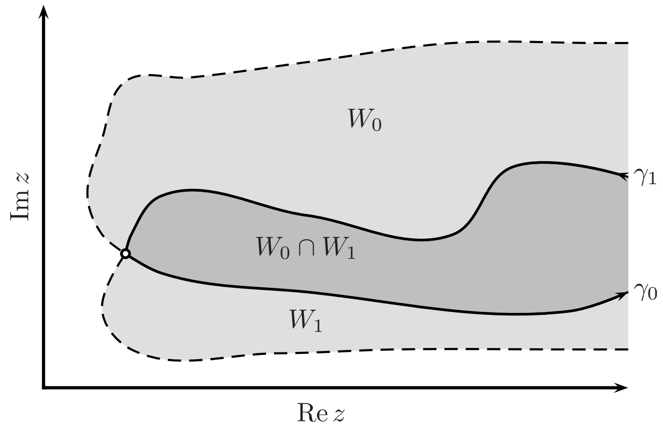

ABBILDUNG 2.2. Zum Beweis des Mittag–Leffler-Theorems.

was schließlich äquivalent zur geometrischen Bedingung unseres Theorems ist. Die Aussagen über $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}$ und $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}$ folgen genauso, unter Zuhilfenahme von Theorem 2.2.4 und Definition 1.6.1. □

THEOREM 2.3.2 (Runge). *Sei K kompakt in $\mathbb{I}$ und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$. Der Raum $\overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W)$ ist folgendicht in $\overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(K)$ genau dann, wenn $W \setminus K$ keine Zusammenhangskomponente hat, die relativ kompakt ist in W. Analoge Aussagen gelten für $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}$, $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}$ und $\mathcal{O}_{\pm\infty}$.*

BEWEIS. Wir verweisen auf den Beweis von [**Mor93**], Theorem 2.2.3, der nach Einsetzung der entsprechenden Räume wörtlich anwendbar ist. □

2.4. Das Mittag–Leffler-Theorem

Das nun folgende Mittag–Leffler-Theorem ist ein Zerlegungssatz für holomorphe Funktionen, den wir in Kapitel 3 als Aussage über das verschwinden von gewissen Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in der Garbe der Keime holomorpher Funktionen mit Wachstumsbedingungen identifizieren werden.

THEOREM 2.4.1 (Mittag–Leffler). *Sei $\{W_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $W \subset \mathbb{I}$. Angenommen $f_{\alpha,\beta} \in \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W_\alpha \cap W_\beta)$. Falls*

$$f_{\alpha,\beta} + f_{\beta,\gamma} + f_{\gamma,\alpha} = 0 \text{ auf } W_\alpha \cap W_\beta \cap W_\gamma$$

gilt für alle α, β, $\gamma \in A$, dann gibt es für alle $\alpha \in A$ ein $f_\alpha \in \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W_\alpha)$ so, daß

$$f_{\alpha,\beta} = f_\alpha - f_\beta$$

gilt auf $W_\alpha \cap W_\beta$. Analoge Aussagen gelten für $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}$, $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}$ und $\overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(\pm\infty)$.

BEWEIS. Zunächst können wir uns auf den Fall $A = \{0, 1\}$ zurückziehen, da damit der allgemeine Fall mit Standardmethoden bewiesen werden kann wie im Beweis von [**Mor93**], Theorem 2.3.1, wobei man nur noch von der Tatsache gebrauch macht, daß $\mathbb{I}$ ein lokalkompakter Raum ist. Zweitens können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Überdeckung aus Streifen besteht. Sei nun zuerst $\gamma \in \mathbb{R}$. Angenommen $f_{0,1} \in \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(W_0 \cap W_1)$ sei analytisch fortsetzbar in eine Umgebung U der abgeschlossenen Menge $\overline{\overline{W_0 \cap W_1}}$, das heißt es gilt $f_{0,1} \in \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(U)$. Wir müssen zeigen, daß Funktionen

$f_\alpha \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W_\alpha)$, $\alpha = 0, 1$, existieren mit $f_{0,1} = f_0 - f_1$ auf dem Schnitt $W_0 \cap W_1$. Setze dazu

$$f_\alpha(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_\alpha} \frac{\mathrm{e}^{-(z-w)^2}}{z-w} f_{0,1}(w) \mathrm{d}w,$$

wobei der Integrationsweg bestimmt ist als $\gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \partial W_{\alpha\mathbb{C}} \cap \overline{\overline{W_{1-\alpha}}}$ für $\alpha = 0$, 1. Diese f_α leisten nach Lemma 1.7.2 das gewünschte. Für ein allgemeines $f_{0,1} \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(W_0 \cap W_1)$ muß man Runges Theorem 2.3.2 anwenden um die Aussage zu zeigen, wie zum Beispiel im Beweis von Teorem 1.5.1 in [**Kan88**].

Für $\gamma = +\infty$ und ebenso für $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}$ und $\overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}$ folgt die Aussage aus der für festes $\gamma \in \mathbb{R}$. Für $\gamma = -\infty$ läßt sich obiger Beweis sogar ohne Zuhilfenahme eines exponentiell abfallenden Faktors durchführen. $\square$

KAPITEL 3

Asymptotische und temperierte Hyperfunktionen

Überblick

Nachdem alle Vorbereitungen getroffen sind, kommen wir jetzt zu den Objekten, um die es in dieser Arbeit eigentlich geht: *asymptotische* und *temperierte Hyperfunktionen* und allgemeiner Hyperfunktionen *vom Typ* γ. Vom Standpunkt der Dualitätstheoreme 2.1.3, 2.2.3 und 2.2.4 aus sind dies nichts anderes als analytische Funktionale bestimmten Typs auf der reellen Achse $\mathbb{D}$. Der große Vorteil von Hyperfunktionen ist aber, daß sie darüberhinaus auch noch *welke Garben* bilden. Das macht es möglich, diese Objekte tatsächlich als *verallgemeinerte Funktionen* aufzufassen und sie zu untersuchen, ohne immer auf die Dualität zurückzugreifen.

Wir benutzen in den ersten beiden Abschnitten die beiden Theoreme 2.3.2 und 2.4.1 von Runge und Mittag–Leffler, um die Garbentheorie der Hyperfunktionen der verschiedenen Typen γ, $\pm\infty$, $\overline{\gamma}$ und $\underline{\gamma}$ gemeinsam zu entwickeln. Dabei wiederholen wir zur Bequemlichkeit des Lesers ziemlich genau die Argumente von [**Mor93**], Kapitel 3, §§1 und 2. Zugleich führen wir noch einige im folgenden benötigte Begriffe ein.

Der dritte Abschnitt dient dazu zu zeigen, wie sich unsere Hyperfunktionen in den üblichen Rahmen der *Fourier Hyperfunktionen* einordnen. Diese können wir hier nicht ausführlich diskutieren und verweisen den interessierten Leser daher auf [**Kan88**], Kapitel 8.

Im vierten Abschnitt wenden wir uns der Frage zu, wie man „gute“ definierende Funktionen, das heißt holomorphe Repräsentanten für eine Hyperfunktion mit Wachstumsordnung, ausrechnet. In der Hyperfunktionentheorie ist es üblich, die sogenannte *standard definierende Funktion* einer Hyperfunktion mit kompaktem Träger zu benutzen. Diese wird erzeugt als *Cauchy–Hilbert-Transformierte* unter Verwendung des gewöhnlichen Cauchy-Kerns. Wir zeigen am Beispiel, daß dieser Kern die Wachstumsordnung nicht erhält und somit nur eine *temperierte* definierende Funktion liefert. Selbst in sehr günstigen Fällen kann man nicht mehr erwarten, als daß die standard definierende Funktion einer Hyperfunktion vom Typ γ vom Typ infra-γ sein wird, vergleiche Anmerkung 2.1.

Wir benutzen daher in Abschnitt 3.5 die schon in Lemma 2.1.4 eingeführte exponentiell abfallende Version der Cauchy–Hilbert-Transformation, wenn es darum geht, gewisse Distributionenklassen mit bestimmter Wachstumsordnung als Hyperfunktionen aufzufassen. Die exponentielle Cauchy–Hilbert-Transformation liefert für sie definierende Funktionen genau derselben Wachstumsordnung. Zwei Distributionenräumen schenken wir besondere

Beachtung: Den *temperierten* Distributionen $\mathscr{S}'$ und der von R. Estrada untersuchten Distributionenklasse $\mathscr{K}'$, siehe [**EK90, DEK96, EGBV98**]. Wir zeigen, daß diese beiden Klassen als distributionale Gegenstücke unserer temperierten beziehungsweise asymptotischen Hyperfunktionen angesehen werden können — was schließlich auch unsere Bezeichnungen rechtfertigt.

Im letzten Abschnitt weisen wir auf die Möglichkeit hin, unserer Hyperfunktionentheorie eine *modifizierte* Variante hinzuzufügen. Diese bei Fourier Hyperfunktionen schon bekannte Modifikation besteht im wesentlichen in einer Veränderung der Form der Gebiete, in denen die definierenden Funktionen holomorph sind und Wachstumsbedingungen erfüllen: Statt horizontaler Streifen verwendet man *kegelförmige* Gebiete mit gewissem Öffnungswinkel über der rellene Achse, siehe Abbildung 3.2. Wie sich zeigt, hat dies einige Vorteile. Da es andererseits aber auch technische Schwierigkeiten mit sich bringt und wir es im folgenden nicht benötigen, werden wir die modifizierte Theorie nicht weiter entwickeln.

3.1. Hyperfunktionen vom Typ $\bullet$ auf $\mathbb{D}$

Um ein Übermaß an Redundanz zu vermeiden, soll im folgenden das Symbol $\bullet$ für ein beliebiges Zeichen aus der Menge $\{\gamma,\ \overline{\gamma},\ \underline{\gamma},\ \pm\infty\}$ stehen. Wir verallgemeinern nun die Definitionen 2.1.2 und 2.2.1, wobei wir zur Wahl der Bezeichnungen auf Anmerkung 3.2 auf Seite 53 verweisen:

DEFINITION 3.1.1. Für eine lokal abgeschlossene Menge S in $\mathbb{I}$ und eine offene Umgebung W von S in $\mathbb{I}$ definieren wir die **erste relative Kohomologiegruppe von W mit Träger in S und Koeffizienten in $\overline{\mathcal{O}}_\bullet$** durch

$$\mathrm{H}^1_S(W;\overline{\mathcal{O}}_\bullet) \overset{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W \setminus S) \Big/ \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W).$$

Damit setzen wir für jede lokal abgeschlossene Menge $S \subset \mathbb{D}$:

$$\mathscr{Q}_\bullet[S] \overset{\text{def}}{=} \varinjlim \Big\{ \mathrm{H}^1_S(W;\overline{\mathcal{O}}_\bullet) \;\Big|\; W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(S) \Big\}.$$

Dieser Raum heißt der Raum der **Hyperfunktionen vom Typ $\bullet$** auf S. Ist speziell $\Omega \subset \mathbb{D}$ offen, so schreiben wir

$$\mathscr{Q}_\bullet(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \mathscr{Q}_\bullet[\Omega].$$

Weiterhin nennen wir für den Fall $\bullet = \pm\infty$ die Elemente von $\mathscr{Q}_\infty[S]$ **temperierte Hyperfunktionen** und die von $\mathscr{Q}_{-\infty}[S]$ **asymptotische Hyperfunktionen**.

ANMERKUNG 3.1. Ein Hinweis auf verwandte Arbeiten darf an dieser Stelle nicht fehlen. Analoga zu *temperierten Hyperfunktionen* in den *ganzen analytischen Funktionalen*, das heißt Funktionale auf $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit polynomialen Wachstumsbedingungen wurden schon von J. Sebastião e Silva in [**Seb58**] im eindimensionalen Fall studiert. Von Morisuke Hasumi wurde dies auf den n-dimensionalen Fall übertragen, siehe [**Has61**] und Young Sik Park und Mitsuo Morimoto haben sich ebenfalls mit diesen Funktionalen beschäftigt, was nachzulesen ist in [**PM73**]. Temperierte analytische Funktionale wurden dort *temperierte Ultradistributionen* und später *temperierte Ultra-Hyperfunktionen* genannt. Wir kommen später in Anmerkung 5.5 noch auf diese Klassen analytischer Funktionale zurück. Soweit wir wissen, sind aber *asymptotische* analytische Funktionale, das heißt solche, die schneller als jedes Polynom abfallen, bisher in der Literatur nicht aufgetaucht. Ebenso wurde die Garbentheorie solcher Funktionale auf $\mathbb{R}$, das heißt die Theorie temperierter und asymptotischer *Hyperfunktionen*, bisher nirgends entwickelt.

In obiger Definition haben wir $\mathscr{Q}_\bullet[S]$ „von Hand," das heißt durch den induktiven Limes, unabhängig von der Wahl der Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(S)$ gemacht. Der nächste Satz macht klar, daß die Hyperfunktionenräume schon *a priori* invariant definiert sind.

SATZ 3.1.2. *Für jede lokal abgeschlossene Menge $S \subset \mathbb{D}$ und jede Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(S)$ ist der kanonische Homomorphismus*

$$\mathrm{H}^1_S(W;\overline{\mathcal{O}}_\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathscr{Q}_\bullet[S]$$

ein topologischer Isomorphismus.

BEWEIS. Machen wir uns zunächst klar, was der genannte kanonische Homomorphismus ist, und fassen wir dies, weil wir es später noch brauchen werden, etwas allgemeiner. Seien $\mathbb{D} \supset S' \supset S$ zwei lokal abgeschlossene Mengen mit offenen Umgebungen $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(S)$ und $W' \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(S')$ so, daß $W' \subset W$ ist. Dann sind die beiden Zeilen des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W) \arrow[r, "\rho^W_{W\setminus S}"] \arrow[d, "\rho^W_{W'}"'] & \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W\setminus S) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^{W\setminus S}_{W'\setminus S'}"] & \mathrm{H}^1_S(W;\overline{\mathcal{O}}_\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W') \arrow[r, "\rho^{W'}_{W'\setminus S'}"] & \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W'\setminus S') \arrow[r] & \mathrm{H}^1_{S'}(W';\overline{\mathcal{O}}_\bullet) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

exakt nach Definition. Dabei ist $\rho^U_V\colon \overline{\mathcal{O}}_\bullet(U) \to \overline{\mathcal{O}}_\bullet(V)$ die natürliche Restriktion für beliebige offene Mengen $U \supset V$ in $\mathbb{I}$. Das heißt, diese natürlichen Restriktionen induzieren den stetigen kanonischen Homomorphismus

$$\rho\colon \mathrm{H}^1_S(W;\overline{\mathcal{O}}_\bullet) \longrightarrow \mathrm{H}^1_{S'}(W';\overline{\mathcal{O}}_\bullet)$$

auf eindeutige Weise so, daß das Diagramm kommutativ wird.

Nehmen wir nun $S = S'$ an. Wir haben nach Definition zu zeigen, daß dann

$$\rho\colon \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W\setminus S) \Big/ \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W) \longrightarrow \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W'\setminus S) \Big/ \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W')$$

bijektiv ist. Angenommen, für $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W\setminus S)$ ist $\rho(F) = 0$ in $\mathrm{H}^1_S(W';\overline{\mathcal{O}}_\bullet)$. Das heißt, die Restriktion von F nach $W'\setminus S$ kann analytisch fortgesetzt werden nach W' zu einem Element von $\overline{\mathcal{O}}_\bullet(W')$. Dann ist aber klar, daß F auch zu einem Element von $\overline{\mathcal{O}}_\bullet(W)$ fortgesetzt werden kann, was zeigt, daß die Äquivalenzklasse von F in $\mathrm{H}^1_S(W;\overline{\mathcal{O}}_\bullet)$ gleich null ist. Das zeigt, daß ρ injektiv ist. Zur Surjektivität: Angenommen $G \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W'\setminus S)$. Setzen wir $W_0 = W'$ und $W_1 = W\setminus S$ dann ist $W_0 \cap W_1 = W'\setminus S$. Nach dem Mittag–Leffler-Theorem 2.4.1 gibt es dann $H_0 \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W')$ und $H_1 \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W\setminus S)$ mit $G(z) = H_1(z) - H_0(z)$ für alle $z \in W'\setminus S$. Daraus folgt sofort die Surjektivität von ρ. □

DEFINITION UND BEMERKUNG 3.1.3. Sei $f = [F] \in \mathscr{Q}_\bullet[S]$ das Bild von $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W\setminus S)$ unter dem Homomorphismus aus Satz 3.1.2. Dann nennen wir F eine **definierende Funktion** der Hyperfunktion f. Weiter sagen wir, $f = [F]$ sei **gleich Null** als Hyperfunktion vom Typ • genau dann, wenn F analytisch fortsetzbar zu einem Element von $\overline{\mathcal{O}}_\bullet(W)$ ist. Sei $S \subset \mathbb{D}$ lokal abgeschlossen und $\Omega \in \mathfrak{N}_{\mathbb{D}}(S)$ eine offene Umgebung von S in $\mathbb{D}$. Dann ist die durch obiges Diagramm bestimmte **kanonische Einbettung**

$$\imath\colon \mathscr{Q}_\bullet[S] \longrightarrow \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$$

wie folgt definiert: Sei $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(S)$ so, daß $W \cap \mathbb{D} = \Omega$. Sei $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W\setminus S)$ eine definierende Funktion von $f \in \mathscr{Q}_\bullet[S]$. Dann ist $\imath f = [F|_{W\setminus\Omega}]$. Damit ist $\imath$ injektiv, und wir betrachten $\mathscr{Q}_\bullet[S]$ als Untermenge von $\mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$.

Sehr nützlich für den praktischen Umgang mit Hyperfunktionen sind ihre Darstellungen als *Randwerte* analytischer Funktionen. Um diesen Begriff zu präzisieren, nehmen wir wie üblich die Aufteilung von $\mathbb{Q}$ in **obere** und **untere Halbebene** vor:

$$\mathbb{Q}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D} + i\mathbb{R}_\pm$$

mit den Halbachsen $\mathbb{R}_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R} \mid \pm y > 0\}$. Damit setzen wir

$$W_\pm \stackrel{\text{def}}{=} W \cap \mathbb{Q}_\pm$$

für $W \subset \mathbb{Q}$ offen. Ist nun $\Omega \subset \mathbb{D}$ offen und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega)$ so, daß $W \cap \mathbb{D} = \Omega$ gilt, so ist offenbar

$$\overline{\mathcal{O}}_\bullet(W \setminus \Omega) = \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W_+) \oplus \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W_-).$$

Dann läßt sich jede Hyperfunktion $f = [F] \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ darstellen als Paar definierender Funktionen

$$f = [F] = [F_+, F_-], \text{ mit } F_\pm \stackrel{\text{def}}{=} F|_{W_\pm}.$$

Wir nennen F_+ und F_- den **oberen** beziehungsweise **unteren Teil** von F. Für dieses Paar benutzen wir die formale Schreibweise

$$\begin{aligned} f(x) &= [F(z)]_{z=x} \\ &= [F_+(x+iy), F_-(x-iy)]_{y=0} \\ &= F(x+i0) - F(x-i0) \end{aligned}$$

als **Randwerte** von $F_\pm$. Dabei bezeichnen wir die Hyperfunktionen

$$F(x+i0) \stackrel{\text{def}}{=} [F_+(z), 0]_{z=x} \text{ und } F(x-i0) \stackrel{\text{def}}{=} [0, -F_-(z)]_{z=x}$$

als **oberen** beziehungsweise **unteren Randwert** von F. Man beachte dabei die Vorzeichenkonvention.

DEFINITION UND BEMERKUNG 3.1.4. Wir bezeichnen mit

$$\mathscr{P}_\bullet(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \{\overline{\mathcal{O}}_\bullet(W) \bigm| W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega)\} \text{ und } \mathscr{P}_\bullet(K) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{O}}_\bullet(K)$$

die **reell analytischen Funktionen vom Typ** $\bullet$ für $\Omega \subset \mathbb{D}$ offen und $K \subset \mathbb{D}$ kompakt. Die Räume $\mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ und $\mathscr{Q}_\bullet[K]$ werden durch die Definition

$$\phi \cdot f \stackrel{\text{def}}{=} [\phi \cdot F]$$

zu $\mathscr{P}_\bullet(\Omega)$ beziehungsweise $\mathscr{P}_\bullet(K)$-Moduln. Mit $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega)$ beziehungsweise $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$ ist dabei $\phi \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W)$ und $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W \setminus \Omega)$ beziehungsweise $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W \setminus K)$ eine definierende Funktion von f. Die Definition ist offenbar unabhängig von der Wahl von F. Fassen wir ϕ als Randwert

$$\phi(x) = \phi(x+i0) = \phi(x-i0) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+i0) + \phi(x-i0)\right)$$

auf, so definiert dies eine stetige, injektive Einbettung

$$\mathscr{P}_\bullet(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{Q}_\bullet(\Omega) \text{ und } \mathscr{P}_\bullet(K) \hookrightarrow \mathscr{Q}_\bullet[K],$$

durch die $\mathscr{P}_\bullet(\Omega)$ zum $\mathscr{P}_\bullet(\Omega)$-Untermodul von $\mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ wird und analog für K. Eine Hyperfunktion f vom Typ $\bullet$ heißt **reell analytisch**, wenn sie Bild einer reell analytischen Funktion gleichen Typs unter der Einbettung ist.

Wir können nun die Dualitätstheoreme aus Kapitel 2 mit unseren Begriffen für Hyperfunktionen vom Typ $\bullet$ neu formulieren.

KOROLLAR 3.1.5. *Die Dualitäten*

$$\mathscr{Q}_\gamma[K] \cong \underline{\mathcal{O}}'_\gamma(K),$$
$$\mathscr{Q}_\infty[K] \cong \mathscr{P}'_{-\infty}(K) \text{ und } \mathscr{Q}_{-\infty}[K] \cong \mathscr{P}'_\infty(K),$$
$$\mathscr{Q}_{\overline{\gamma}}[K] \cong \underline{\mathcal{O}}'_{\underline{\gamma}}(K) \text{ und } \mathscr{Q}_{\underline{\gamma}}[K] \cong \underline{\mathcal{O}}'_{\overline{\gamma}}(K)$$

gelten für alle Kompakta $K \subset \mathbb{D}$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Die erste ist dabei nur algebraisch, alle übrigen sind topologische Isomorphismen zu den mit der starken Topologie versehenen Dualräumen.

3.2. Lokalität und Garbentheorie

Für zwei lokal abgeschlossene Mengen $S' \subset S$ in $\mathbb{D}$ bezeichnen wir mit

$$\rho^S_{S'} \colon \mathscr{Q}_\bullet[S] \longrightarrow \mathscr{Q}_\bullet[S']$$

die durch das kommutative Diagramm im Beweis von Satz 3.1.2 wohldefinierte **Restriktion** von Hyperfunktionen. Wir schreiben $f|_{S'}$ für $\rho^S_{S'}(f)$ und $f \in \mathscr{Q}_\bullet[S]$. Wir sagen, f sei **null** beziehungsweise **reell analytisch auf** S', falls $f|_{S'}$ dies ist.

DEFINITION 3.2.1. Der **Träger** $\operatorname{supp} f$ beziehungsweise **singuläre Träger** $\operatorname{sing\,supp} f$ von $f \in \mathscr{Q}_\bullet[S]$ ist definieret als Komplement der größten offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{D}$, auf der f null beziehungsweise reell analytisch ist.

THEOREM 3.2.2. *Die Zuordnung von DFS-Räumen*

$$\mathscr{Q}_\bullet \colon \Omega \longmapsto \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$$

zu offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{D}$ definiert eine welke Garbe auf $\mathbb{D}$.

BEWEIS. Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3$ offene Untermengen von $\mathbb{D}$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathscr{Q}_\bullet(\Omega_3) \arrow[rr, "\rho^{\Omega_3}_{\Omega_2}"] \arrow[dr, "\rho^{\Omega_3}_{\Omega_1}"'] & & \mathscr{Q}_\bullet(\Omega_2) \arrow[dl, "\rho^{\Omega_2}_{\Omega_1}"] \\ & \mathscr{Q}_\bullet(\Omega_1) & \end{tikzcd}$$

aus Restriktionen kommutativ, was zeigt, daß $\mathscr{Q}_\bullet$ eine **Prägarbe** auf $\mathbb{D}$ bildet. Wir zeigen die beiden definierenden Eigenschaften einer Garbe. Sei $\{\Omega_\alpha \mid \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{D}$. Die Elemente von $\mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ nennen wir auch **lokale Schnitte (in $\mathscr{Q}_\bullet$) über** Ω.

1. EINDEUTIGKEIT VON SCHNITTEN. Es ist zu zeigen, daß für jedes $f \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ aus $f|_{\Omega_\alpha} = 0$ für alle $\alpha \in A$ folgt, daß $f = 0$ ist. Sei $f = [F]$. Dann gibt es $U_\alpha \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega_\alpha)$ so, daß $F|_{U_\alpha} \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(U_\alpha)$ ist. Dann ist $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ eine Umgebung von Ω in $\mathbb{I}$, und es gilt $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(U)$. Also ist $f = 0$ in $\mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$.

2. EXISTENZ VON SCHNITTEN (KOMPATIBILITÄT). Wir haben zu zeigen, daß, falls für $f_\alpha \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega_\alpha)$ und alle $\alpha, \beta \in A$ die **Kompatibilitätsbedingung**

$$f_\alpha|_{\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta} = f_\beta|_{\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta}$$

gilt, ein lokaler Schnitt f in $\mathscr{Q}_\bullet$ über Ω existiert so, daß $f|_{\Omega_\alpha} = f_\alpha$ ist. Seien $U_\alpha \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega_\alpha)$ und damit $U = \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega)$ so, daß $U \cap \mathbb{D} = \Omega$. Weiter seien $F_\alpha \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(U_\alpha \setminus \Omega_\alpha)$ definierende Funktionen von f_α für alle $\alpha \in A$. Dann sind die Funktionen $F_{\alpha,\beta} = F_\beta - F_\alpha$ analytisch fortsetzbar zu Elementen von $\overline{\mathcal{O}}_\bullet(U_\alpha \cap U_\beta)$. Damit erfüllen die $F_{\alpha,\beta}$ die Voraussetzungen des Mittag–Leffler-Theorems 2.4.1, und somit existieren Funktionen $G_\alpha \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(U_\alpha)$ so, daß auf $U_\alpha \cap U_\beta$ $F_{\alpha,\beta} = G_\beta - G_\alpha$ gilt. Dann gilt

$$F_\alpha - G_\alpha = F_\beta - G_\beta \text{ auf } (U_\alpha \setminus \Omega_\alpha) \cap (U_\beta \setminus \Omega_\beta).$$

Also gibt es ein $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(U \setminus \Omega)$ so, daß $F|_{U_\alpha \setminus \Omega_\alpha} = F_\alpha - G_\alpha$ ist für alle α. Setze $f(x) = [F(z)]_{z=x} \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$. Dann ist

$$f|_{\Omega_\alpha} = [F_\alpha] - [G_\alpha] = [F_\alpha] - 0 = f_\alpha$$

wie gewünscht.

3. EXISTENZ GLOBALER SCHNITTE (WELKHEIT). Wir haben zu zeigen, daß die Restriktion

$$\rho_\Omega^{\mathbb{D}} \colon \mathscr{Q}_\bullet(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$$

surjektiv ist für alle offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{D}$. Das heißt, für jede Hyperfunktion f vom Typ $\bullet$ auf Ω existiert ein **globaler Schnitt** $f_0 \in \mathscr{Q}_\bullet(\mathbb{D})$ mit $f_0|_\Omega = f$ und $\operatorname{supp} f_0 \subset \overline{\overline{\Omega}}$ gilt. Setze dazu $W = \mathbb{I} \setminus \partial\Omega$ mit $\partial\Omega = \overline{\overline{\Omega}} \setminus \Omega$. Dann ist $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\Omega)$ und $W \Supset \mathbb{I} \setminus \mathbb{D}$. Sei $F \in \overline{\mathcal{O}}_\bullet(W \setminus \Omega) = \overline{\mathcal{O}}_\bullet(\mathbb{I} \setminus \overline{\overline{\Omega}})$ eine definierende Funktion von $f \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$, die nach 3.1.2 existiert. Setze $f_0 = [F|_{\mathbb{I}\setminus\mathbb{D}}] \in \mathscr{Q}_\bullet(\mathbb{D})$. Dieses f_0 leistet das Erforderliche. □

KOROLLAR 3.2.3. *Seien $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{D}$ offen. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathscr{Q}_\bullet[\Omega_2 \setminus \Omega_1] \xrightarrow{\imath} \mathscr{Q}_\bullet(\Omega_2) \xrightarrow{\rho_{\Omega_1}^{\Omega_2}} \mathscr{Q}_\bullet(\Omega_1) \longrightarrow 0$$

mit der kanonischen Einbettung $\imath$ aus Definition 3.1.3 und der Restriktion $\rho_{\Omega_1}^{\Omega_2}$ exakt. Insbesondere gilt

$$\mathscr{Q}_\bullet[S] = \{f \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega) \mid \operatorname{supp} f \subset S\}$$

für alle lokal abgeschlossenen Mengen $S \subset \mathbb{D}$ und $\Omega \subset \mathbb{I}$ offen so, daß S abgeschlossen ist in Ω.

Die in Abschnitt 3.1 eingeführte Aufteilung einer Hyperfunktion in obere und untere Randwerte macht eine entsprechende Aufteilung des singulären Trägers möglich, vergleiche [**Mor93**], Kapitel 3, §6.

DEFINITION UND BEMERKUNG 3.2.4. Sei $\Omega \subset \mathbb{D}$ offen. Eine Hyperfunktion $f = [F_+, F_-] \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ heißt **mikroanalytisch** in dem Punkt $(x_0, \pm i dx\infty)$ genau dann, wenn $F_\pm$ in eine Umgebung W von x_0 zu einem Element von $\overline{\mathcal{O}}_\bullet(W)$ analytisch fortgesetzt werden kann. Dabei bezeichnet $(x_0, \pm i dx\infty)$ ein Element der Menge

$$\Omega \times iS_\infty^{*0} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \sqcup \Omega,$$

die aus zwei identischen Kopien $\Omega_\pm$ von Ω besteht. Wir nennen die Menge aller Punkte in $iS_\infty^{*0}\Omega$, an denen f nicht mikroanalytisch ist, das **Singularitätenspektrum** von f und bezeichnen es mit S. S. f. Es gilt

$$\pi(\mathrm{S.\,S.}\, f) = \operatorname{sing\,supp} f,$$

wobei

$$\pi \colon \Omega \times iS_\infty^{*0} \longrightarrow \Omega,\ (x_0, \pm i dx\infty) \longmapsto x_0,$$

die natürliche Projektion bezeichnet. Eine Hyperfunktion f kann in einer Umgebung von $x \in \Omega$ genau dann als oberer beziehungsweise unterer Randwert von oben dargestellt werden, das heißt $f = F(x \pm i0)$ als Randwert, wenn $(x, \mp i dx\infty) \notin$ S. S. f ist.

Für die in dieser Definition verwendete Notation vergleiche [**Kan88**].

3.3. $\mathscr{Q}_\bullet$ als Fourier Hyperfunktionen

Wir wollen in diesem kurzen Abschnitt zeigen, wie die temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen mit Kawais *Fourier Hyperfunktionen* zusammenhängen. Für genaue Darstellungen deren Theorie verweisen wir auf die Originalarbeit [**Kaw70**] oder die umfassende Behandlung verschiedener Klassen von Fourier Hyperfunktionen in [**Ito88**]. Dort finden sich auch die in diesem Abschnitt verwendeten Ergebnisse. Für einen etwas handfesteren Zugang über Randwerte und die Fouriertransformation, auf den wir später noch zurückkommen werden, siehe [**Kan88**].

DEFINITION UND BEMERKUNG 3.3.1. Wir bezeichnen für alle offenen Mengen $W \subset \mathbb{Q}$ mit

$$\mathcal{O}^*(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{K \subset W \text{ kompakt}} \left\{ f \in \mathcal{O}^B(K) \;\middle|\; \forall \varepsilon > 0\colon f(z) \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon|\mathrm{Re}(z)|} \right\}$$

und

$$\mathcal{O}_*(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{K \subset W \text{ kompakt}} \left\{ f \in \mathcal{O}^B(K) \;\middle|\; \exists \delta > 0\colon f(z) \leq C_\delta \mathrm{e}^{-\delta|\mathrm{Re}(z)|} \right\}$$

die Räume der **infra-exponentiellen** (vergleiche Anmerkung 1.3) beziehungsweise der **exponentiell abfallenden** holomorphen Funktionen auf W. Sie werden analog zu Definition 1.5.1 mit der Topologie von DFS-Räumen versehen. Ebenso werden die Räume $\mathcal{O}^*(K)$ und $\mathcal{O}_*(K)$ auf Kompakta $K \subset \mathbb{Q}$ als induktive Limiten obiger Räume gebildet und tragen die Topologie von FS-Räumen.

Für lokal abgeschlossene Mengen $S \subset \mathbb{D}$ bilden wir die Räume der **Fourier Hyperfunktionen** beziehungsweise **exponentiell abfallenden Hyperfunktionen** gemäß

$$\mathscr{Q}[S] \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind\,lim}\left\{ \mathrm{H}^1_S(W; \mathcal{O}^*) \;\middle|\; W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(S) \right\},$$
$$\mathscr{Q}_*[S] \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind\,lim}\left\{ \mathrm{H}^1_S(W; \mathcal{O}_*) \;\middle|\; W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(S) \right\},$$

wobei die relativen Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathcal{O}^*$ beziehungsweise $\mathcal{O}_*$ genauso wie in Definition 3.1.1 als Quotientenräume erklärt werden. Damit werden die Zuordnungen

$$\mathscr{Q}\colon \Omega \longmapsto \mathscr{Q}(\Omega) \text{ und } \mathscr{Q}_*\colon \Omega \longmapsto \mathscr{Q}_*(\Omega) \text{ für } \Omega \subset \mathbb{D} \text{ offen}$$

zu welken Garben von DFS-Räumen auf $\mathbb{D}$. Die natürlichen Einbettungen $\mathcal{O}_*(W) \hookrightarrow \mathcal{O}^*(W)$ für $W \subset \mathbb{Q}$ offen erzeugen die stetigen Einbettungen

$$\mathscr{Q}_*(\Omega) \hookrightarrow \mathscr{Q}(\Omega)$$

für $\Omega \subset \mathbb{D}$ offen, und diese wiederum induzieren eine stetige Einbettung der entsprechenden welken Garben.

Wie üblich bezeichnen wir mit $\mathscr{P}(\Omega)$ und $\mathscr{P}_*(\Omega)$ die nach Definition 3.1.4 gebildeten Räume von **infra-exponentiellen** und **exponentiell abfallenden reell analytischen Funktionen**. Wie dort sind diese eingebettet in $\mathscr{Q}(\Omega)$ beziehungsweise $\mathscr{Q}_*(\Omega)$.

Wir tragen nun die offenkundigen Beziehungen zwischen allen von uns definierten und den schon bekannten Hyperfunktionen zusammen.

SATZ 3.3.2. *Sei $\delta \in \mathbb{R}$. Für jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$ sind alle Abbildungen in dem kommutativen Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{Q}_*(\Omega) \arrow[r, hook] & \mathscr{Q}_{-\infty}(\Omega) \arrow[r, hook] & \mathscr{Q}_{\underline{\delta}}(\Omega) \arrow[r, hook] & \mathscr{Q}_{\delta}(\Omega) \arrow[r, hook] & \mathscr{Q}_{\overline{\delta}}(\Omega) \arrow[r, hook] & \mathscr{Q}_{\infty}(\Omega) \arrow[r, hook] & \mathscr{Q}(\Omega) \\
\mathscr{P}_*(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \mathscr{P}_{-\infty}(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \mathscr{P}_{\underline{\delta}}(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \mathscr{P}_{\delta}(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \mathscr{P}_{\overline{\delta}}(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \mathscr{P}_{\infty}(\Omega) \arrow[r, hook] \arrow[u] & \mathscr{P}(\Omega) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

stetige Einbettungen. Diese Einbettungen induzieren in der oberen Zeile Einbettungen der entsprechenden Garben von lokalkonvexen Räumen.

3.4. Standard definierende Funktionen

Bei der praktischen Arbeit mit Hyperfunktionen spielt die geschickte Wahl der definierenden Funktionen eine entscheidende Rolle. Besonders gute Eigenschaften haben die sogenannten *standard definierenden Funktionen*. Diese sind ursprünglich für Hyperfunktionen mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}$ definiert, siehe zum Beispiel [**Kan88**], Definition 1.3.9. Sie lassen sich aber leicht für Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen anpassen. Insbesondere haben die standard definierenden Funktionen die schöne Eigenschaft, holomorph in ganz $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zu sein. Das heißt, für eine Hyperfunktion $f \in \mathscr{Q}_\bullet(\Omega)$ ist die standard definienerende Funktion tatsächlich eine definierende Funktion für die Fortsetzung $f \in \mathscr{Q}_\bullet(\mathbb{D})$, die stets existiert, weil $\mathscr{Q}_\bullet$ eine welke Garbe ist.

Zuerst müssen wir aber wissen, wie man Hyperfunktionen von geeignetem Typ integriert. Wir formulieren dies unter den schwächstmöglichen Bedingungen, die unsere Theorie erlaubt.

DEFINITION UND BEMERKUNG 3.4.1. Für eine Kompaktum $K \subset \mathbb{D}$ sei $f \in \mathscr{Q}_{\underline{\gamma}}[K]$ (beziehungsweise $f \in \mathscr{Q}_{\overline{\gamma}}[K]$) und $\phi \in \underline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(K)$ (beziehungsweise $\phi \in \underline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(K)$). Dann existiert das **bestimmte Integral**

$$\int_K \phi(x) \cdot f(x) \mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\partial L} \phi(z) F(z) \mathrm{d}z$$

der Hyperfunktion $\phi \cdot f \in \mathscr{Q}_\infty[K]$ und ist unabhängig von der Wahl der definierenden Funktion F von f. Insbesondere ist es gleich der durch die Dualitäten aus Korollar 3.1.5 gegebenen Bilinearform $\langle f, \phi \rangle$. Dabei seien $F \in \overline{\mathcal{O}}_{\overline{\gamma}}(W \setminus K)$ (beziehungsweise $F \in \overline{\mathcal{O}}_{\underline{\gamma}}(W \setminus K)$) für $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(K)$ und ϕ holomorph in einer Umgebung eines Streifens L zwischen K und W.

Damit können wir uns nun die standard definierende Funktion auf die Standard-Weise durch die einfache Cauchy-Transformation besorgen, falls die Hyperfunktion von einem Typ kleiner als null ist, denn der Cauchy-Kern $1/(z-w)$ ist gewiß infra-0-integrabel, vergleiche Definition 1.6.1.

DEFINITION 3.4.2. Für $K \subset \mathbb{D}$ kompakt und $f = [F] \in \mathscr{Q}_{\underline{0}}[K]$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widetilde{\mathbf{F}}_f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \int_K \frac{f(x)}{z-x} \mathrm{d}x = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial L} \frac{F(w)}{w-z} \mathrm{d}w$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ als **standard definierende Funktion**[*] von f. Dabei ist L gewählt wie in Definition 3.4.1.

[*] Dies ist im Deutschen eine denkbar unglückliche Übertragung des Begriffs *standard defining function*. Für Verbesserungsvorschläge wären wir dankbar.

Ist $\gamma \geq 0$, so können wir nichtsdestotrotz ein Äquivalent obiger Formel hinschreiben, um eine definierende Funktion für $f \in \mathscr{Q}_\gamma(\mathbb{D})$ zu erhalten. Wähle nämlich $\delta > \gamma$ und definiere

$$\widetilde{\mathbf{F}}_f^\delta(z) \overset{\text{def}}{=} j_\delta(z)\widetilde{\mathbf{F}}_{j_{-\delta}f}(z) = \frac{-1}{2\pi i} j_\delta(z) \int_{\mathbb{D}} \frac{j_{-\delta}(x)f(x)}{z-x} \mathrm{d}x.$$

Diese definierende Funktion ist ein Element von $\mathcal{O}_\infty(\mathbb{I} \setminus \operatorname{supp} f)$, und wir nennen sie vom **standard-Typ** δ. Allgemeiner können wir uns eine Funktion ϕ hernehmen, die analytisch ist in $W_{\mathbb{C}}$ für eine Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{D})$ und keine Nullstellen in $\mathbb{D}$ hat. Wenn wir für $f \in \mathscr{Q}_\infty$ ein solches ϕ mit geeigneten Abfallbedingungen so finden, daß die standard definierende Funktion von f/ϕ existiert, dann erhalten wir eine definierende Funktion für f durch

$$\widetilde{\mathbf{F}}_f^\phi(z) \overset{\text{def}}{=} \phi(z)\widetilde{\mathbf{F}}_{f/\phi}(z).$$

Diese definierende Funktion nennen wir vom **standard-Typ** ϕ.

Problematisch an der Verwendung standard definierender Funktionen ist allerdings, daß die Cauchy-Transformation, wie schon in Anmerkung 2.1 und Abschnitt 1.7 ausgeführt, die Wachstumsordnung nicht erhält! Dies sieht man schon an einem der einfachsten Beispiele: Sei für $a < b$

$$\chi_{(a,b)}(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{für } a < x < b, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die **charakteristische Funktion** des Intervalls (a, b). Dies ist eine Hyperfunktion mit kompaktem Träger mit standard definierender Funktion

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{\chi_{(a,b)}}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \log \frac{a-z}{b-z},$$

siehe [**Kan88**], Beispiel 1.3.11, und vergleiche Beispiel 3.1. Nun sollte man erwarten, daß der Raum $\mathscr{B}_*$ der Hyperfunktionen mit kompaktem Träger eingebettet ist in die asymptotischen Hyperfunktionen, und tatsächlich findet man für $f \in \mathscr{B}_*$ sogar *exponentiell fallende* definierende Funktionen. Insbesondere ist die exponentielle Cauchy–Hilbert-Transformation $\mathbf{CH}_f^*$ für $f \in \mathscr{B}_*$ exponentiell abfallend mit beliebigem Typ, und somit erzeugt $\mathbf{CH}^*$ eine Einbettung

$$\mathbf{CH}^* \colon \mathscr{B}_*(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{Q}_*(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}).$$

Vergleiche dazu [**Kan88**], Theorem 8.4.1. Aber die standard definierende Funktion $\widetilde{\mathbf{F}}_{\chi_{(a,b)}}$ ist sicher nicht asymptotisch, geschweige denn exponentiell fallend. Dies zeigt, daß die gewöhnliche Cauchy-Transformation die Wachstumsordnung in unkontrollierbarer Weise verändert. Das Beste, was sich über sie sagen läßt, fassen wir zusammen in der

BEMERKUNG 3.4.3. Sei $f = [F] \in \mathscr{Q}_\gamma[K] \subset \mathscr{Q}_\infty[K]$ gegeben für ein Kompaktum $K \subset \mathbb{D}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann ist für alle $\delta > \gamma$ die standard definierende Funktion $\widetilde{\mathbf{F}}_f^\delta$ vom Typ δ von f wohldefiniert. $\widetilde{\mathbf{F}}_f^\delta \in \mathcal{O}_\infty(\mathbb{I} \setminus \mathbb{D})$ ist eine definierende Funktion für f als temperierte Hyperfunktion.

BEWEIS. Daß die Cauchy-Transformation aus einer temperierten Funktion wieder eine temperierte macht, ist klar. Daß $[\widetilde{\mathbf{F}}_f^\delta] = f$ ist in $\mathscr{Q}_\infty[K]$, kann man genauso beweisen wie in Teil 4 des Beweises von Theorem 2.1.3. □

Der folgende Satz, den wir nach [**Ima92**], Kapitel 10, Theorem 3 zitieren, charakterisiert die standard definierenden Funktionen:

SATZ 3.4.4. *Ist* $f = [F]$ *und* $F(z) = o(1)$ *für* $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ *in* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *dann ist* $F = \widetilde{\mathbf{F}}_f$ *tatsächlich die standard definierende Funktion von* f.

Wir geben nun ein typisches Beispiel dafür, was definierende Funktionen vom standard-Typ leisten können. Wir kommen damit zurück auf die in Anmerkung 2.1 angesprochene Frage, ob man unter geeigneten Umständen nicht doch den gewöhnlichen Cauchy-Kern statt seines exponentiell abfallenden Vetters benutzen kann, um definierende Funktionen zu erhalten. Dies zeigt zugleich die praktische Nützlichkeit der infra-γ Räume im konkreten Spezialfall.

BEISPIEL 3.1. Die **Heaviside-Funktion**

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist ein Funktional in $\underline{\mathcal{O}}'_0(\mathbb{D})$ und damit insbesondere auch in $\mathcal{O}'_{\underline{0}}(\mathbb{D})$. Es sollte also gelingen, Y als Hyperfunktion aus dem Raum $\mathcal{Q}_{\overline{0}}[[0,\infty]]$ mit einer definierenden Funktion vom Typ infra-0 darzustellen. Tatsächlich können wir mit $\phi(z) = z - c$ für eine Konstante c mit $\operatorname{Im} c \neq 0$ die definierende Funktion vom standard-Typ ϕ berechnen:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{F}}_Y^{z-c}(z) &= (z-c) \cdot \frac{-1}{2\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y(x)}{(x-c)(z-x)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{z-c}{2\pi i} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{(x-c)(x-z)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x-z} - \frac{1}{x-c} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi i} \cdot \log \frac{x-z}{x-c} \bigg|_0^{\infty} = \frac{-1}{2\pi i} \log(-z) + \frac{1}{2\pi i} \log(-c).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir wie üblich den auf $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}_-}$ definierten *Hauptwert* des natürlichen Logarithmus benutzt, um eine eindeutige Funktion zu erhalten. Diese definierende Funktion ist offensichtlich in $\overline{\mathcal{O}}_{\overline{0}}(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D})$, denn der Logarithmus ist ja geradezu das Paradebeispiel einer Funktion, die schwächer als jede Potenz wächst. Vernachlässigt man noch die Konstante, die im Sinne der Hyperfunktionen keine Rolle spielt, so erhält man die üblicherweise verwendete definierende Funktion

$$Y(x) = \left[\frac{-1}{2\pi i} \log(-z) \right]_{z=x}$$

von Y, die Y zu einem Element von $\mathcal{Q}_{\overline{0}}[[0,\infty]]$ macht.

Den folgenden Begriff des *formalen Produkts* werden wir später in der Diskussion asymptotischer Entwicklungen brauchen. Er ist [**Ima92**], Kapitel 3, §9 entnommen.

DEFINITION 3.4.5. Sei $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ eine asymptotische Hyperfunktion und ϕ eine rationale Funktion. Dann bezeichnen wir

$$\phi \circ f(x) \overset{\text{def}}{=} \left[\phi(z) \widetilde{\mathbf{F}}_f(z) \right]_{z=x} \in \mathcal{Q}_{\infty}(\mathbb{D}),$$

als **formales Produkt** von ϕ mit f. Dabei ist $\phi(z)$ die analytische Fortsetzung von ϕ in eine komplexe Umgebung von $\mathbb{R}$.

Offensichtlich ist $\phi \circ f$ wieder in $\mathcal{Q}_{-\infty}$. Das Produkt ist nur formal, da es ebenso offensichtlich von der Wahl der definierenden Funktion von f abhängt. Wir wählen die standard definierende Funktion, um eine wohldefinierte Operation zu erhalten.

3.5. Distributionen als temperierte Hyperfunktionen

Dieser Abschnitt kreist um die Frage, wie sich unsere Hyperfunktionen mit Wachstumsbedingungen mit gewissen Distributionenklassen vertragen. Neben den bekannten *temperierten Distributionen* aus $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ werden wir vor allem den von Grossman, Loupias und Stein in [**GLS68**] eingeführten Distributionenraum $\mathscr{K}'(\mathbb{R})$ betrachten. Dieser ist von R. Estrada genau untersucht worden, und wir entnehmen alle Ergebnisse über ihn aus [**EGBV98**].

Doch zunächst führen wir einen ebenfalls von Estrada stammenden, allgemeinen Begriff ein, mit dem sich die Wachstumsordnung von Distributionen aus $\mathscr{D}'$ klassifizieren läßt:

DEFINITION 3.5.1. Sei $f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ und $\beta \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-2,\ldots\}$. Wir sagen, f sei von der Ordnung β **im Cèsaro-Sinne** für $|x| \to \infty$, falls ein $N \in \mathbb{N}$, ein lokal integrabler Primitiv f_N der Ordnung N von f und ein Polynom p mit Ordnung $\leq N-1$ existieren so, daß

$$f_N(x) = p(x) + O(|x|^{N+\beta})$$

für $|x| \to \infty$ im gewöhnlichen Sinne gilt. Wir schreiben dann

$$f(x) = O(|x|^{\beta})\ (\mathrm{C})$$

oder (C, N), falls wir es genauer benötigen. Wir schreiben

$$f(x) = O(|x|^{-\infty})\ (\mathrm{C}),$$

falls $f(x) = O(|x|^{\beta})$ (C) gilt für alle β.

Mit dem Begriff der Cèsaro-Wachstumsordnung lassen sich insbesondere die temperierten Distributionen charakterisieren, denn es gilt der folgende Satz.

SATZ 3.5.2 ([**EGBV98**], Theorem 2.8). *Sei $f \in \mathscr{D}'$. Genau dann ist f eine temperierte Distribution in $\mathscr{S}'$, wenn ein $\beta \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = O(|x|^{\beta})$ (C) für $|x| \to \infty$.*

Temperierte Distributionen sind also gute Kandidaten für distibutionale Gegenstücke zu unseren temperierten Hyperfunktionen, wie wir unten noch präzisieren werden. Die Entsprechung von asymptotischen Hyperfunktionen bildet dagegen der Distributionenraum $\mathscr{K}'$, den wir nun einführen.

DEFINITION UND BEMERKUNG 3.5.3. Wir bezeichnen für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\mathscr{K}_\gamma(\mathbb{R})$ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$, für die für $|x| \to \infty$ und jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\phi^{(k)} = O(|x|^{\gamma-k})$$

gilt. Der Raum $\mathscr{K}_\gamma$ wird zum lokalkonvexen Raum, versehen mit dem System von Halbnormen

$$\|\phi\|_{K,\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in K} \left|(1+x)^{k-\gamma}\phi^{(k)}(x)\right|$$

für $K \subset \mathbb{R}$ kompakt. Damit gilt $\mathscr{K}_\gamma(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{K}_{\gamma'}(\mathbb{R})$ für $\gamma \leq \gamma'$, und wir definieren

$$\mathscr{K}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{\gamma\to\infty} \mathscr{K}_\gamma(\mathbb{R})$$

als induktiven Limes in der lokalkonvexen Kategorie. Die Funktionenalgebra $\mathscr{K}$ ist *normal*, das heißt $\mathscr{S}$ ist dicht in $\mathscr{K}$.

Offenbar ist $\mathscr{K}'$ ein Teilraum von $\mathscr{D}'$. In Analogie zu Satz 3.5.2 gilt:

SATZ 3.5.4 ([**EGBV98**], Theorem 2.5). *Genau dann ist eine Distribution $f \in \mathscr{D}'$ in $\mathscr{K}'$, wenn $f(x) = O(|x|^{-\infty})$ (C) für $|x| \to \infty$ gilt.*

Wir brauchen für das Folgende noch den Begriff des *Randwertes im Distributionensinne* für analytische Funktionen. Sei $F(z) \in \mathcal{O}(U \setminus \Omega)$ für eine rechteckförmige Umgebung U einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}$. Sei $\mathscr{A}$ eine gewisse Menge von Testfunktionen. Wir sagen, F habe den **Randwert** f **im Sinne von** $\mathscr{A}'(\Omega)$, falls

$$\lim_{y\to 0} \int_{\Omega} (F(x+iy) - F(x-iy))\,\phi(x)\mathrm{d}x = (f\,,\phi),\ z = x+iy \in U \setminus \Omega,$$

gilt für alle $\phi(x) \in \mathscr{A}$, das heißt im schwachen Sinne. Wie für Hyperfunktionen schreiben wir dann $f(x) = F(x+i0) - F(x-i0)$ für den Randwert.

Unser zentrales Ergebnis dieses Abschnittes wird nun eine Methode sein, mit der man für Distributionen mit Cèsaro-Ordnung $O(|x|^{\beta})$ (C, N) definierende Funktionen als Hyperfunktionen mit derselben Ordnung erhält. Wie oben gezeigt, eignet sich die gewöhnliche Cauchy–Hilbert-Transformation dafür nicht. Wir verwenden daher ihre exponentiell abfallende Verwandte, die wir in Lemma 2.1.4 eingeführt hatten.

SATZ 3.5.5. *Sei $f \in \mathscr{D}'$ und $f(x) = O(|x|^{\beta})$ (C, N) für ein $\beta \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist die exponentielle Cauchy–Hilbert-Transformierte $\mathbf{CH}^*_f$ in $\overline{\mathcal{O}}_{\beta+N}(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{D})$ und definiert damit ein Element von $\mathscr{Q}_{\beta+N}(\mathbb{D})$. Der Randwert von $\mathbf{CH}^*_f$ im Sinne von $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ ist gleich f.*

BEWEIS. Da der Kern $\exp(-(z-w)^2)/(z-w)$ in $\mathscr{S}$ ist für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, existiert $\mathbf{CH}^*_f(z)$ und ist holomorph in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, was man genauso wie in Teil 4 des Beweises von Theorem 2.1.3 sieht. Sei nun $f_N(x) = p(x) + O(|x|^{N+\beta})$ ein lokal integrabler Primitiv der Ordnung N von f und p ein Polynom mit Ordnung $\leq N-1$. Nun ist

$$\begin{aligned}\mathbf{CH}^*_f(z) = \mathbf{CH}^*_{f_N^{(N)}}(z) &= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} f_N(x)\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N}\frac{\mathrm{e}^{-(z-x)^2}}{z-x}\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_N(x)\sum_{j=0}^{N}\binom{N}{j}\frac{(-1)^{N-j}P_j(z-x)\mathrm{e}^{-(z-x)^2}}{(z-x)^{N-j+1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

mit Polynomen $P_j(z-x)$ der Ordnung j. Für jeden einzelnen Summanden in diesem Ausdruck zeigt man genau wie im Beweis von Lemma 1.7.2, daß er von der Ordnung $O(|\mathrm{Re}\,z|^{N+\beta})$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß der Randwert von $\mathbf{CH}^*_{f_N}$ im Sinne von $\mathscr{S}'$ gleich f ist. Da der exponentiell abfallende Cauchy-Kern nach Bemerkung 1.7.1 ein reproduzierender Kern für holomorphe Funktionen ist, folgt dies mit bekannten Methoden wie zum Beispiel in [**Bre65**], Seite 48f. □

Mit diesem Satz und Satz 3.5.2 können wir alle temperierten Distributionen via exponentieller Cauchy–Hilbert-Transformation als temperierte Hyperfunktionen auffassen. Dies sieht man auch an den Testfunktionenräumen, denn es gilt die

BEMERKUNG 3.5.6. Ist $\phi \in \mathscr{P}_{\gamma}(\mathbb{D})$, so gilt auch $\phi^{(k)} \in \mathscr{P}_{\gamma}(\mathbb{D})$. Insbesondere ist $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R})$ eine stetige Einbettung.

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus den Cauchyschen Abschätzungen: Sei $\phi \in \overline{\mathcal{O}}_{\gamma}(\mathbb{D}+iI)$, $I \ni 0$ ein Intervall, und Ω_j eine Folge von Kreisscheiben mit minimalem Radius ρ und Zentren z_j mit $\Omega_j \subset \mathbb{D} + iI$ für alle j und $|\mathrm{Re}\, z_j| \to \infty$ für $j \to \infty$. Dann gilt die Abschätzung

$$\left|\phi^{(k)}(z_j)\right| \leq \frac{k!}{\rho^k} \sup_{\zeta \in \partial\Omega_j} |\phi(\zeta)| = O(j^\gamma),$$

da die Suprema über die Ränder $\partial\Omega_j$ die Wachstumsordnung γ in j haben. Asymptotische analytische Funktionen in $\mathscr{P}_{-\infty}$ erfüllen also insbesondere die Bedingungen an die Ableitungen von Funktionen in $\mathscr{S}$, und die Topologie des Unterraums $\mathscr{P}_{-\infty}$ ist offenbar stärker als die von $\mathscr{S}$. Daher ist $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}) \hookrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R})$ eine stetige Einbettung. □

Damit können wir $\mathscr{S}'$ dank der Dualität zwischen $\mathscr{P}_{-\infty}$ und $\mathscr{Q}_\infty$ unmittelbar als Unterraum von $\mathscr{Q}_\infty$ auffassen:

KOROLLAR 3.5.7. *Die Einbettung $\mathscr{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D})$ wird von der exponentiell abfallenden Cauchy–Hilbert-Transformation induziert.*

Auf der anderen Seite liefert exponentielle Cauchy–Hilbert-Transformation nach den Sätzen 3.5.5 und 3.5.4 höchstens eine eine injektive Abbildung $\mathbf{CH}^*\colon \mathscr{K}'(\mathbb{R}) \to \mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D})$, denn insbesondere besitzt ein $f \in \mathscr{K}'(\mathbb{R})$ nicht etwa *einen einzigen* Primitiv f_N der Ordnung N, der von der Wachstumsordnung $O(x^{-\infty})$ wäre. Satz 3.5.4 besagt zusammen mit Definition 3.5.1 nur, daß zu jedem γ ein N existiert so, daß $f = O(|x|^{-\gamma})$ (C, N) ist. Wenn nun mit wachsendem γ das Verhältnis N/γ nicht beschränkt bleibt, so können wir aus Satz 3.5.5 eben *nicht* folgern, daß die exponentielle Cauchy–Hilbert-Transformation eine asymptotische definierende Funktion für f liefert.

Dies spiegelt sich darin wider, daß der Testfunktionenraum $\mathscr{P}_\infty$ der asymptotischen Hyperfunktionen nicht in $\mathscr{K}$ enthalten ist. Mit diesem Problem beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

ANMERKUNG 3.2. Einige Worte zu der von uns verwendeten Terminologie, die dem mit der Distributionentheorie vertrauten Leser möglicherweise irritierend erscheinen wird. Wir haben den Begriff *temperiert* sowohl für gewisse analytische Funktionale — die temperierten Hyperfunktionen — als auch für die Klasse $\mathscr{P}_\infty$ von reell analytischen „Testfunktionen“ für asymptotische Hyperfunktionen verwendet. In der Schwarzschen Theorie würde man aber nicht von Testfunktionen mit polynomialem Wachstum als „temperierten Funktionen“ reden (wohl aber spricht man von temperierten Maßen). Im Hyperfunktionensinne ist dies aber gerechtfertigt! Wie wir gesehen haben, sind die temperierten Hyperfunktionen $\mathscr{Q}_\infty$ tatsächlich das hyperfunktionentheoretische Gegenstück zu temperierten Distributionen. Andererseits besteht für Fourier Hyperfunktionen ein enger Zusammenhang zwischen analytischen Funktionen mit bestimmten Wachstumsbedingungen und den Hyperfunktionen, deren definierende Funktionen die gleichen Wachstumsbedingungen erfüllen, was sich in der natürlichen Einbettung $\mathscr{P}_\infty \hookrightarrow \mathscr{Q}_\infty$ ausdrückt. Das macht es sinnvoll, für $\mathscr{P}_\infty$ die gleiche Benennung zu verwenden wie für $\mathscr{Q}_\infty$.

Den Begriff *asymptotisch* für die Hyperfunktionen, die schneller als jedes Polynom fallen, haben wir im Hinblick auf die Anwendung auf asymptotische Entwicklungen in Teil 3 dieser Arbeit gewählt. An sich wäre eine Bezeichnung wie „schnellfallende Hyperfunktionen“ natürlicher gewesen, dieser Begriff wurde aber in [**Kan88**] schon für Hyperfunktionen mit exponentiellem Abfall gebraucht, so daß wir ihn hier vermieden haben.

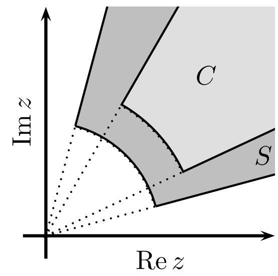

ABBILDUNG 3.1. Ringförmige Sektoren $C \subset S$ mit Vertex 0.

3.6. Modifizierte asymptotische Hyperfunktionen

Die Funktionen in $\mathscr{K}$ zeichnen sich nach Definition 3.5.3 dadurch aus, daß sie sich unter Ableitungen wie Polynome verhalten. Dies ist eine Eigenschaft, die man auch von holomorphen Funktionen erwarten würde, und tatsächlich ist sie unter geeigneten Umständen erfüllt:

THEOREM 3.6.1 ([**Olv97**], Kapitel 1, Theorem 4.2). *Sei $F(z)$ eine holomorphe Funktion in einem Gebiet, das einen abgeschlossenen,* ***ringförmigen Sektor*** *S enthält. Dies ist ein Schnitt eines Kegels in $\mathbb{C}$ mit dem Komplement einer Kreisscheibe mit demselben Vertex, wie in Abbildung 3.1 skizziert. Sei $F(z) = O(|z|^\gamma)$ für $|z| \to \infty$ in S und ein $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*

$$F^{(m)}(z) = O(z^{\gamma - m})$$

für $|z| \to \infty$ in jedem abgeschlossenen, ringförmigen Sektor C, der echt in S enthalten ist und denselben Vertex hat.

Für horizontale *Streifen* gilt diese Aussage nun gerade nicht, wie man sich leicht an dem Beispiel $F(z) = z^\gamma e^{iz}$ klarmacht. Das hindert uns daran, $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ direkt als stetig eingebettet in $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ aufzufassen und somit direkt $\mathscr{K}' \hookrightarrow \mathscr{Q}_{-\infty}$ zu folgern. Wir wollen nun eine aus der Theorie der Fourier Hyperfunktionen schon bekannte Möglichkeit aufzeigen, dies zu korrigieren. Wir stellen uns dabei auf den „dualen" Standpunkt, daß heißt wir verstehen asymptotische Hyperfunktionen einfach als analytische Funktionale auf $\mathbb{D}$.

Das obige Theorem legt es nahe, daß wir für eine einfache Einbettung von $\mathscr{K}$ die Form unserer Holomorphiegebiete verändern: Statt Streifen fester Breite in imaginärer Richtung sollten wir Kegelförmige Gebiete mit gewisser Mindestbreite *und* festem Öffnungswinkel über der rellen Achse betrachten, wie in Abbildung 3.2 gezeigt.

DEFINITION 3.6.2. Wir definieren offene Umgebungen V_m von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{Q}$ durch

$$V_m \stackrel{\text{def}}{=} \big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |\operatorname{Im} z| < (1 + |\operatorname{Re} z|)/m\big\} \sqcup (V_m)_\infty.$$

Der Raum der **modifizierten** temperierten analytischen Funktionen auf $\mathbb{D}$ wird damit durch

$$\widetilde{\mathscr{P}}_\infty(\mathbb{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}^B_m(\overline{\overline{V_m}})$$

als lokalkonvexer induktiver Limes von Banachräumen dargestellt. Dabei trägt $\overline{\mathcal{O}}^B_m(V_m)$ hier die Norm

$$\overline{\|f\|}_{m,K} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{V_{m\mathbb{C}}} \big|f(z)(1 + |z|)^{-m}\big|.$$

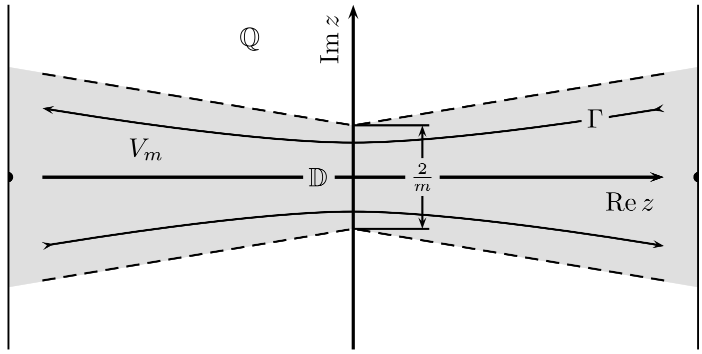

ABBILDUNG 3.2. Zu Definition 3.6.2.

Den Dualraum von $\widetilde{\mathscr{P}}_\infty(\mathbb{D})$ nennen wir den Raum der **modifizierten** asymptotischen Hyperfunktionen und bezeichnen ihn mit $\widetilde{\mathscr{Q}}_{-\infty}(\mathbb{D})$.

Es ist zu beachten, daß die neue Norm nicht mehr mit der ursprünglichen aus Definition 1.1.1 übereinstimmt, denn aufgrund der Form der Gebiete V_m wird nun der Unterschied zwischen $|\operatorname{Re} z|$ und $|z|$ wesentlich.

Man kann obige Modifikation als Veränderung der Topologie auffassen. Wir haben uns bisher in der radialen Kompaktifizierung $\mathbb{Q} = \mathbb{D} + i\mathbb{R}$ bewegt und könnten uns fragen, ob es nicht willkürlich war, nur die reelle Koordinate zu Kompaktifizieren. Betrachten wir andererseits die **Richtungskompaktifizierung** $\mathbb{E} = \mathbb{D} + i\mathbb{D}$, so stellt sich heraus, daß kompakte Umgebungen von $\mathbb{D}$ in $\mathbb{E}$ gerade von der Art der V_m sind, vergleiche [**Kan88**], Bemerkung 8.5.

Sicher ist $\widetilde{\mathscr{P}}_\infty(\mathbb{D}) \subset \mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$, und somit sind die modifizierten asymptotischen Hyperfunktionen eine größere Distributionenklasse als die gewöhnlichen. Die Gebiete V_m sind gerade so geformt, daß Theorem 3.6.1 auf die Funktionen in $\overline{\mathcal{O}}^B_m(\overline{\overline{V_m}})$ anwendbar ist. Wenn man die entsprechenden (Halb-)normen vergleicht, sieht man sofort, daß dann $\overline{\mathcal{O}}^B_m(\overline{\overline{V_m}})$ stetig in $\mathscr{K}_\gamma(\mathbb{R})$ für jedes $\gamma > m$ und somit auch in $\mathscr{K}(\mathbb{R})$ eingebettet ist. Damit haben wir

KOROLLAR 3.6.3. *Die natürliche Inklusion $\mathscr{K}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \widetilde{\mathscr{Q}}_{-\infty}(\mathbb{D})$ ist eine stetige Einbettung.*

BEISPIEL 3.2. Asymptotische Hyperfunktionen des modifizierten Typs können ebenfalls als Randwerte holomorpher Funktionen in der oberen und unteren Halbebene dargestellt werden. Die Dualität zu $\widetilde{\mathscr{P}}_\infty$ wird dann wieder durch Kurvenintegrale dargestellt, wobei aber die Integrationswege leicht gegenüber der reellen Achse geneigt sind. Um zum Beispiel den oszillierenden Kern e^{ix}, der insbesondere in $\mathscr{K}'(\mathbb{R})$ enthalten ist, als Element von $\widetilde{\mathscr{Q}}_{-\infty}(\mathbb{D})$ aufzufassen, stellen wir ihn als Randwert $e^{ix} = e^{i(x+i0)} = [e^{i(x+iy)}, 0]_{y=0}$ aus der oberen Halbebene dar. Will man diese Hyperfunktion zum Beispiel auf $\overline{\mathcal{O}}^B_m(\overline{\overline{V_m}})$ auswerten, so wählt man den Integrationsweg leicht geneigt, etwa als $\Gamma = \{z \mid |\operatorname{Im} z| = \delta(1 + |\operatorname{Re} z|)\}$ mit $0 < \delta < 1/m$, so daß Γ ganz in $V_{m\mathbb{C}}$ liegt, wie in Abbildung 3.2 gezeigt. Dann fällt e^{iz} längs Γ exponentiell ab, und die Form

$$\left\langle e^{i(x+i0)}, \phi(x) \right\rangle = -\int_\Gamma e^{iz}\phi(z)\mathrm{d}z$$

ist wohldefiniert für $\phi \in \overline{\mathcal{O}}^B_m(\overline{\overline{V_m}})$.

ANMERKUNG 3.3. Fourier Hyperfunktionen des beschriebenen modifizierten Typs wurden von Mikio Sato vorgeschlagen und zuerst in [**NM76b**] verwendet. Dort hießen sie Fourier Hyperfunktionen vom Typ II und wurden im Rahmen der Quantenfeldtheorie mit Fourier Hyperfunktionen gebraucht. Das Problem, zu dessen Lösung sie wesentlich beitrugen, war die *euklidische Rekonstruktion* von *Wightman-Funktionen* aus den euklidischen *Schwinger-Funktionen*. Wir haben in [**Sch97a**] genau beschrieben, warum dabei der Übergang von normalen zu modifizierten Hyperfunktionen nötig war. Es sei nur erwähnt, daß hier ein durchaus verwandtes Problem vorliegt.

Teil II

Mehrdimensionale Theorie

KAPITEL 4

Kanekos Zugang zu temperierten Hyperfunktionen

Überblick

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt die Garbentheorie für Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen ausgehend von der Theorie der entsprechenden holomorphen Funktionen und unserem Dualitätstheorem 2.1.3 entwickelt. In einer Dimension war das sehr einfach, weil sich hier die Räume der lokalen Schnitte der Garbe direkt als Quotient schreiben lassen. Insbesondere ist hier auch die Aufteilung in obere und untere Halbebene die einzig mögliche, so daß unsere Definitionen als intrinsisch gelten dürfen. In höheren Dimensionen lassen sich aber, grob gesprochen, Randwerte aus vielen verschiedenen Richtungen bilden und man wird schnell auf nichttriviale Kohomologieprobleme für holomorphe Funktionen mit Wachstumsbeschränkungen geführt. Die einzig sinnvolle Definition einer Garbentheorie für Hyperfunktionen vom Typ $\bullet$ in n Dimensionen ist dann durch die *n-te relative Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^n_{\mathbb{D}^n}(\mathbb{Q}^n; \overline{\mathcal{O}}_\bullet)$ mit Träger in $\mathbb{D}^n$ und Koeffizienten in $\overline{\mathcal{O}}_\bullet$* gegeben. Dieser Zugang wird ausführlich dargestellt in [**Mor93**] und Teil II von [**Kan88**] für gewöhnliche Hyperfunktionen, das heißt ohne Wachstumsbedingungen und schon sehr viel knapper in Kapitel 8, Seiten 412ff von [**Kan88**] für Fourier Hyperfunktionen, das heißt mit *infra-exponentiellen* Wachstumsbedingungen.

Für den Puristen ist dies der einzig mögliche Zugang: Die so aufgebaute Garbentheorie ist vollständig, bietet eine koordinatenunabhängige Definition der Hyperfunktionen und klärt ihre kohomologischen Eigenschaften. Aber sie bleibt in wesentlichen Teilen zu abstrakt, um dem Anwender hilfreich zu sein und in letzter Konsequenz wird man schließlich doch wieder auf Darstellungen von Hyperfunktionen als Randwerte geführt.

Kaneko hat es deshalb in den Kapiteln 3, 4 und 8 von [**Kan88**] unternommen, eine handwerkliche, nur auf Randwerten holomorpher Funktionen in *infinitesimalen Keilen* basierende Hyperfunktionentheorie so weit als irgend möglich auszubauen. Wir folgen seinen Gedankengängen und präsentieren eine qualitative Theorie der temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen als Randwerte, die wesentlich auf der *Fouriertransformation* basiert.

Im ersten Abschnitt rekapitulieren wir kurz die Randwerttheorie der Fourier Hyperfunktionen und erläutern *Martineaus edge-of-the-wedge-Theorem mit polynomialen Wachstumsbedingungen*, das den Begriff der Randwertdarstellung für Hyperfunktionen vom Typ γ erst sinnvoll macht. Weiter übertragen wir einige im folgenden wichtige Begriffe vom Fall der Fourier Hyperfunktionen auf unseren.

Im zweiten Abschnitt beginnen wir mit der Charakterisierung der Fouriertransformierten von Funktionen mit asymptotischem Abfall im einfachsten Fall analytischer Funktionen. Wir ignorieren dabei topologische fragen, die dem nächsten Kapitel überlassen bleiben. Schlüssel zum Verständnis der Fouriertransformation (verallgemeinerter) Funktionen sind Theoreme vom *Paley–Wiener-Typ*, die die Wachstumsordnung einer (verallgemeinerten) Funktion in Beziehung setzen zur Regularität ihrer *Fourier–Laplace-Transformierten*. Für Beispiele solcher Theoreme siehe [**Rud74**], Theoreme 7.22 und 7.23, [**RS72**], Theorem IX.16 und [**Kaw70**], Abschnitt 3.3, um nur einige zu nennen. Sehr grob und allgemein ergibt sich folgende Gegenüberstellung von Wachstumsverhalten und Regularität beziehungsweise Singularität der Fouriertransformierten:

Wachstum von f	Regularität von $\widehat{f}$
kompakter Träger	ganze Funktion
exponentieller Abfall	holomorph in Streifen
asymptotisch	C^∞-Funktion
temperiert	Distribution endlicher Ordnung
infra-exponentiell	Fourier Hyperfunktion

Unser gemäß der dritten Zeile dieser Tabelle erwartetes Ergebnis der Abschnitte 2 und 3 ist, daß asymptotische reell analytischen Funktionen und Hyperfunktionen unter der Fouriertransformation gewissen Räumen unendlich oft differenzierbarer Funktionen entsprechen. Diese Funktionen sind im ersten Fall exponentiell abfallend und im zweiten infra-exponentiell.

Im letzten Abschnitt wollen wir einen Struktursatz für asymptotische Hyperfunktionen herleiten, der dem schon bekannten für Fourier Hyperfunktionen, siehe [**Kan88**], Theorem 8.4.9, entspricht. Dieser besagt analog zu dem für Distributionen, vergleiche [**Rud74**], Theoreme 6.26–6.28, daß jede Fourier Hyperfunktion dargestellt werden kann durch einen *lokalen Operator* angewandt auf eine stetige Funktion mit infra-exponentiellem Wachstum. Dies sind Differentialoperatoren unendlicher Ordnung, die gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen. Wir wollen das Ergebnis für asymptotische Hyperfunktionen reproduzieren wobei der stetige Primitiv dann aber eine Funktion sein wird, die schneller als jedes Polynom fällt. Dabei benutzen wir die Charakterisierung der Fouriertransformierten asymptotischer Hyperfunktionen als C^∞-Funktionen aus dem vorhergehenden Abschnitt, was die praktische Bedeutung dieses Ergebnisses zeigt.

4.1. Hyperfunktionen in n Dimensionen als Randwerte

Zunächst führen wir noch einmal die *infra-exponentiellen* und *exponentiell abfallenden* Funktionenklassen ein, die wir im eindimensionalen Fall schon in Definition 3.3.1 betrachtet hatten. Zum Begriff der *infinitesimalen Keile* siehe Abschnitt B.4 in Anhang B.

DEFINITION 4.1.1. Sei Γ ein offener, konvexer Kegel im $\mathbb{R}^n$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir bezeichnen den Raum der **infra-exponentiellen**, holomorphen Funktionen in dem infinitesimalen Keil $\Omega + i\Gamma 0$ mit $\mathcal{O}^*(\Omega + i\Gamma 0)$. Das heißt $F(x+iy)$ ist in $\mathcal{O}^*(\Omega + i\Gamma 0)$ genau dann, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind. Erstens muß für jeden eigentlichen Unterkegel $\Gamma' \Subset \Gamma$ eine Konstante $C_{\Gamma'} > 0$ existieren so, daß $F(z)$ holomorph ist in $(\Omega + i\Gamma') \cap \{|\mathrm{Im}\, z| < C_{\Gamma'}\}$. Zweitens muß für alle $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$ existieren so, daß

$$|F(z)| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon|\mathrm{Re}\, z|}$$

gilt für alle $\delta > 0$ gleichmäßig in dem Gebiet $(\Omega + i\Gamma') \cap \{|\mathrm{Im}\, z| < \delta\}$ (mit anderen Worten: Die Abschätzung gilt lokal gleichmäßig in $\mathrm{Im}\, z$).

Die **exponentiell abfallenden** holomorphen Funktionen mit **Typ** $-\delta$ für $\delta > 0$ auf $\Omega + i\Gamma 0$ sind dementsprechend definiert als diejenige Funktionen

$F \in \mathcal{O}(\Omega + i\Gamma 0)$, die statt der obigen die Abschätzung

$$|F(z)| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{-(\delta-\varepsilon)|\mathrm{Re}\, z|}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ mit einer geeigneten Konstante C_ε lokal gleichmäßig in $\mathrm{Im}\, z$ erfüllen. Den Raum dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}^{-\delta}(\Omega + i\Gamma 0)$. Wir setzen

$$\mathcal{O}_*(\Omega + i\Gamma 0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\delta>0} \mathcal{O}^{-\delta}(\Omega + i\Gamma 0).$$

(Wir benutzen hier die Vereinigung statt des induktiven Limes, denn wir haben keine Topologie für $\mathcal{O}^{-\delta}(\Omega + i\Gamma 0)$ definiert. Siehe dafür [**Kan88**], Kapitel 8, §6) Wir nennen diesen Raum den Raum der **exponentiell abfallenden** holomorphen Funktionen auf $\Omega + i\Gamma 0$.

Damit können wir Fourier Hyperfunktionen als Randwerte holomorpher Funktionen definieren. Als solche bezeichnen wir jede formale Summe

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0),$$

wobei Γ_j konvexe offene Kegel und $F_j \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0)$ sind. Die Menge der Funktionen $\{F_j\}_{j=1}^N$ bezeichnen wir als Satz **definiernder Funktionen** der Hyperfunktion f. Wie in einer Dimension durch Bildung eines Quotienten, müssen wir auch hier die Redundanz, die in den formalen Summen steckt eliminieren, um zu entscheiden wann zwei Fourier Hyperfunktionen identisch sind. In Kanekos Zugang stellt sich dieses kohomologische Problem recht einfach dar, vergleiche [**Kan88**], Definition 3.1.1. Wenn für zwei Indizes j und k der Schnitt $\Gamma_j \cap \Gamma_k$ nichtleer ist, dann kann man die formale Summe reduzieren gemäß

$$F_j(x + i\Gamma_j 0) + F_k(x + i\Gamma_k 0) = (F_j + F_k)(x + i(\Gamma_j \cap \Gamma_k)0). \tag{4.1}$$

Kann andererseits ein $F_l \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma_l 0)$ in die Summe zweier infra-exponentieller holomorpher Funktionen auf grösseren infinitesimalen Keilen zerlegt werden, dann ist die umgekehrte Konversion zulässig. Eine Hyperfunktion ist dann gleich null, wenn eine endliche Folge solcher Reduktionen als Ergebnis keinen einzigen Term übrig läßt.

DEFINITION 4.1.2. Die Menge der obigen formalen Summen modulo der eben beschriebenen Äquivalenzrelation bezeichnen wir als Raum der **Fourier Hyperfunktionen** auf $\mathbb{D}^n$ und bezeichnen ihn mit $\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$. Besitzt eine Fourier Hyperfunktion einen Satz definierender Funktionen in $\mathcal{O}_*$, so bezeichnen wir sie als **exponentiell abfallende Hyperfunktion**. Den Raum dieser Hyperfunktionen modulo der (4.1) entsprechenden Äquivalenz für exponentiell abfallende Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)$.

Genauso können wir natürlich Hyperfunktionen mit polynomialen statt exponentiellen Bedingungen definieren. Dazu definieren wir wie oben zuerst die entsprechenden holomorphen Funktionen in infinitesimalen Keilen.

DEFINITION 4.1.3. Sei Γ ein offener, konvexer Kegel im $\mathbb{R}^n$ und Ω offen in $\mathbb{R}^n$. Sei $\gamma \in \mathbb{R}$. Wir sagen, eine in dem infinitesimalen Keil $\Omega + i\Gamma 0$ holomorphe Funktion F sei **vom Typ** γ, wenn sie die Abschätzung

$$|F(z)| \leq C \cdot (1 + |\mathrm{Re}\, z|)^\gamma$$

lokal gleichmäßig in $\operatorname{Im} z$ erfüllt. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(\Omega + i\Gamma 0)$ den Raum der holomorphen Funktionen vom Typ γ in $\Omega + i\Gamma 0$. Wir setzen

$$\mathcal{O}_\infty(\Omega + i\Gamma 0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}} \overline{\mathcal{O}}_\gamma(\Omega + i\Gamma 0) \text{ und}$$
$$\mathcal{O}_{-\infty}(\Omega + i\Gamma 0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\gamma\in\mathbb{R}} \overline{\mathcal{O}}_\gamma(\Omega + i\Gamma 0)$$

und nennen dies die Räume der **temperierten** beziehungsweise **asymptotischen** holomorphen Funktionen auf $\Omega + i\Gamma 0$.

Äquivalent zu obiger Definition von Funktionen vom Typ γ ist natürlich die Ordnungsrelation $F(z) = O(|\operatorname{Re} z|^\gamma)$. Um die Notation zu verkürzen, schreiben wir von nun ab $\gamma \in \mathbb{D} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ für beliebiges endliches oder unendliches γ. Die Funktionenräume $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(\Omega + i\Gamma 0)$ sind für beliebiges $\gamma \in \mathbb{D}$ offenbar Unterräume von $\mathcal{O}^*(\Omega + i\Gamma 0)$.

DEFINITION 4.1.4. Sei $\gamma \in \mathbb{D}$. Jede formale Summe $\sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$ mit definierenden Funktionen $\{F_j\}_{j=1}^N$ für die $F_j \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(\Omega + i\Gamma_j 0)$ gilt, nennen wir **Hyperfunktion vom Typ** γ auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{D}^n$. Für $\gamma = \infty$ beziehungsweise $\gamma = -\infty$, nennen wir sie **temperierte** beziehungsweiswe **asymptotische Hyperfunktion**.

Die Identifikation (4.1) wird nur sinnvoll sein, wenn sie „häufig genug“ anwendbar ist. Diese Auffassung wird präzisiert und bestätigt durch **Martineaus edge-of-the-wedge-Theorem mit polynomialen Wachstumsbedingungen**, das wir nun zitieren.

THEOREM 4.1.5 ([**KT95**], Theorem A.6). *Sei $f(x)$ eine Fourier Hyperfunktion mit einem Satz von definierenden Funktionen*

$$\left\{F_j(z) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0)\right\}_{j=1}^N$$

so, daß $F_j \in \overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0)$ gilt für ein $\gamma \in \mathbb{R}$ beziehungsweise für alle $\gamma \in \mathbb{R}$. Angenommen es gilt $f = 0$ in $\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$. Dann gibt es für jede Wahl von eigentlichen Unterkegeln $\Gamma_j' \Subset \Gamma_j$ Funktionen F_{jk}, j, $k = 1, \dots, N$, die in dem Raum $\overline{\mathcal{O}}_\gamma(\mathbb{D}^n + i(\Gamma_j' + \Gamma_k')0)$ sind für dasselbe $\gamma \in \mathbb{R}$ beziehungsweise für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ so, daß

$$F_{jk} = -F_{kj} \text{ und}$$
$$F_j(z) = \sum_{k=1}^N F_{jk}(z)$$

gilt in einem infinitesimalen Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0$.

Ein analoges Ergebnis gilt für gewöhnliche Hyperfunktionen, das heißt holomorphe Funktionen ohne Wachstumsbedingungen, und Fourier Hyperfunktionen, das heißt infra-exponentielle definierende Funktionen.

Damit es nicht ganz aus der Luft gegriffen scheint, wollen wir kurz diskutieren, wie man zu diesem Theorem kommt. Dabei können wir zudem das wichtigste Werkzeug in der Randwert-Theorie der Fourier Hyperfunktionen mit Wachstumsbedingungen erläutern. Dies ist die exponentiell abfallende Version der von Kashiwara eingeführten **getwisteten Radon Zerlegung**, die eine spezielle Randwertdarstellung der n-dimensionalen δ-Funktion darstellt:

$$\delta(x) = \int_{S^{n-1}} W_*(x, \omega)\mathrm{d}\omega,$$

mit dem Integralkern

$$W_*(x,\omega) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi i)^n} \cdot \frac{(1-ix\omega)^{n-1} - (1-ix\omega)^{n-2}(x^2-(x\omega)^2)}{(x\omega + i(x^2-(x\omega)^2)+i0)^n} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Der Integralkern $W_*(x,\omega)$ ist — mit oder ohne exponentiell abfallenden Faktor — fundamental für das richtige Verständnis von Hyperfunktionen als Randwerte holomorpher Funktionen in infinitesimalen Keilen. Die Entsprechung von $W_*(x,\omega)$ in einer Dimension ist der exponentiell abfallende Cauchy-Kern aus Lemma 1.7.2. Wie dieser besitzt $W_*(x,\omega)$ die wertvolle Eigenschaft, Wachstumsbedingungen genau zu erhalten und dies macht den Beweis von Theorem 4.1.5 erst möglich.

Wir wollen hier nicht genau darstellen, wie der Radon-Kern in der Hyperfunktionentheorie eingesetzt wird und verweisen den interessierten Leser dazu auf Kapitel 2 und 3 von [**Kan88**], sowie den Anhang von [**KT95**] für den Fall mit Wachstumsbedingungen. Es sei nur erwähnt, daß man ihn benutzen kann, um verschiedene Randwertdarstellungen einer Hyperfunktionen ineinander zu überführen. Setzt man

$$W_*(x,\Delta^\circ) = \int\limits_{S^{n-1}\setminus\Delta^\circ} W_*(x,\omega)\mathrm{d}\omega$$

für einen Kegel Δ, so ist dies der Randwert einer holomorphen Funktion in dem infinitesimalen Keil $\mathbb{D}^n + i\Delta^\circ 0$, die exponentiell abfällt, das heißt

$$W_*(z,\Delta^\circ) \in \mathcal{O}_*(\mathbb{D}^n + i\Delta 0).$$

Dann ist für eine Fourier Hyperfunktion mit einer Randwertdarstellung durch einen einzelnen Term $F(x+i\Gamma 0)$, $F \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma 0)$, die Faltung

$$F(x+i\Gamma 0) * W_*(z,\Delta^\circ)$$

definiert als Randwert

$$G(x+i(\Gamma+\Delta)0) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i(\Gamma+\Delta)0),$$

gegeben durch die Integrale

$$G(x+iy) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi+i\eta)W_*(x-\xi+i(y-\eta))\mathrm{d}\xi,$$

für $y-\eta \in \Delta$ und $x+iy$ in einem infinitesimalen Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i(\Gamma+\Delta)0$. Mit Martineaus Theorem für infra-exponentielle Funktionen läßt sich dann zeigen, daß die lineare Fortsetzung dieser Faltung auf eine beliebige Fourier Hyperfunktion $f(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j 0)$, gegeben durch

$$f * W_*(z,\Delta^\circ) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N F_j(x+i\Gamma_j 0) * W_*(z,\Delta^\circ),$$

nicht von der Wahl der speziellen Randwertdarstellung abhängt.

Martineaus Theorem beschreibt die nullte Kohomologieklasse von Funktionen vom Typ γ auf infinitesimalen Keilen über $\mathbb{D}^n$. Die in [**Kan88**, Kapitel 3] dargestellte lokale Theorie formaler Randwerte, die auf diesem Theorem basiert, erlaubt es uns, in sinnvoller Weise von *lokalem Verschwinden* und *reeller Analytizität* einer Hyperfunktion vom Typ γ zu sprechen:

DEFINITION 4.1.6. Eine Hyperfunktion vom Typ $\gamma \in \mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}^n$ ist **gleich Null** in einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{D}^n$, wenn die Einschränkung auf Ω einer ihrer Randwertdarstellungen gleich Null ist modulo der Reduktion (4.1). Sie heißt **reell analytisch** in Ω, wenn alle ihre definierenden Funktionen analytisch fortsetzbar sind in eine komplexe Umgebung von $\Omega_{\mathbb{R}^n}$ unter Beibehaltung der Wachstumsbedingung.

Das Komplement der größten offenen Menge, auf der $f \in \mathscr{Q}_\gamma(\mathbb{D}^n)$ verschwindet bezeichnen wir als ihren **Träger**, geschrieben $\operatorname{supp} f$. Analog bezeichnen wir als ihren **singulären Träger**, geschrieben $\operatorname{sing\,supp} f$ das Komplement der größten offenen Menge, auf der f reell analytisch ist.

4.2. Die Fouriertransformation auf $\mathscr{P}_{-\infty}$

Wir beginnen unsere Untersuchung der Fouriertransformation mit dem einfachsten Fall reell analytischer Funktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen.

DEFINITION UND BEMERKUNG 4.2.1. Sei $\gamma \in \mathbb{D}$. Wir definieren den Raum der **reell analytischen Funktionen vom Typ** γ durch

$$\mathscr{P}_\gamma(\mathbb{D}^n) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\varepsilon>0} \overline{\mathcal{O}}_\gamma\big(\mathbb{D}^n + i\{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}\big).$$

Offenbar ist $\mathscr{P}_\gamma(\mathbb{D}^n)$ gleich der Menge der Hyperfunktionen vom Typ γ, die auf ganz $\mathbb{D}^n$ reell analytisch sind. Analog bezeichnen wir mit $\mathscr{P}_*(\mathbb{D}^n)$ beziehungsweise $\mathscr{P}(\mathbb{D}^n)$ den Raum der exponentiell abfallenden beziehungsweise infra-exponentiellen analytischen Funktionen.

Und nun zum Zielraum der Fouriertransformation auf $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$:

DEFINITION 4.2.2. Wir bezeichnen für $\delta > 0$ mit $C^\infty_{-\delta}(\mathbb{D}^n)$ Raum der **mit Typ** $-\delta$ **exponentiell abfallenden**, unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Dies sind Funktionen $f(x) \in C^\infty(\mathbb{D}^n)$ für die gilt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C_{k,\varepsilon} > 0$ so, daß

$$\left|\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha}\right| \le C_{k,\varepsilon} \mathrm{e}^{-(\delta-\varepsilon)|x|}$$

gilt für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \le k$. Die Vereinigung $C^\infty_*(\mathbb{D}^n)$ aller $C^\infty_{-\delta}(\mathbb{D}^n)$ nennen wir Raum der **exponentiell abfallenden C^∞-Funktionen**.

Um uns auf eine Konvention festzulegen definieren wir die **Fouriertransformation** einer Funktion f als Abbildung

$$\mathcal{F}\colon f \longmapsto \widehat{f},$$

mit

$$\widehat{f}(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \int_D \mathrm{e}^{-iz\zeta} f(z)\mathrm{d}z,$$

für eventuell komplexe Argumente z, ζ, wann immer die Ausführung des Integrals über das Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ zulässig ist. Die **inverse Fouriertransformation** ist damit bestimmt durch

$$\mathcal{F}^{-1}\colon f(\zeta) \longmapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_D \mathrm{e}^{i\zeta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Sowohl auf $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ als auch auf $C^\infty_*(\mathbb{D}^n)$ ist die Fouriertransformation wohldefiniert. Das Hauptergebnis dieses Abschnittes entspricht [**Kan88**, Theorem 8.2.2] und charakterisiert die Fouriertransformation auf $\mathscr{P}_{-\infty}$.

SATZ 4.2.3. *Das Bild von $\mathcal{O}_{-\infty}\big(\mathbb{D}^n + i\{|\mathrm{Im}\, z| < \delta\}\big)$ unter der Fouriertransformation ist genau $C^\infty_{-\delta}(\mathbb{D}^n)$. Damit ist die durch die Fouriertransformation induzierte Abbildung*

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n) \longleftrightarrow C^\infty_*(\mathbb{D}^n)$$

ein algebraischer Isomorphismus mit Inverser $\mathcal{F}^{-1}$.

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{O}_{-\infty}\big(\mathbb{D}^n + i\{|\mathrm{Im}\, z| < \delta\}\big)$. Dann gilt für einen beliebigen Multiindex α:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi^\alpha} &= \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\alpha \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Da nun f asymptotisch ist, gibt es eine Konstante $K_k > 0$ so, daß insbesondere

$$|(-iz)^\alpha f(z)| \leq K_k (1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{-n-1}$$

gilt für alle α mit $|\alpha| \leq k$ und lokal gleichmäßig in $\mathrm{Im}\, z$ für $|\mathrm{Im}\, z| < \delta$. Das heißt, der obige Integrand ist insbesondere absolut integrabel über die Hyperebene $\mathbb{R}^n + iy$ für $|y| < \delta$. Da das Integrationsgebiet vom Typ eines kartesischen Produkts ist, können wir Cauchys Integralsatz in einer Dimension (Korollar 1.4.4) benutzen und schließen, daß

$$\frac{\partial^\alpha \widehat{f}(\xi)}{\partial \xi^\alpha} = \int\limits_{\mathrm{Im}\, z = y} (-iz)^\alpha \mathrm{e}^{-iz\xi} f(z) \mathrm{d}z$$

gilt für $|y| < \delta$. Sei nun ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $y = -(\delta - \varepsilon)\xi/|\xi|$. Dann können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}^{-iz\xi} (-iz)^\alpha f(z)| &\leq \mathrm{e}^{y\xi} K_{k,\varepsilon} (1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{-n-1} \\ &= \mathrm{e}^{-(\delta-\varepsilon)|\xi|} K_{k,\varepsilon} (1 + |\mathrm{Re}\, z|)^{-n-1} \end{aligned}$$

für $|\alpha| \leq k$. Dies zeigt, daß $\widehat{f}(\xi)$ gemäß Definition 4.2.2 ein Element des Raums $C^\infty_{-\delta}(\mathbb{D}^n)$ ist.

Sei umgekehrt $g(\xi) \in C^\infty_{-\delta}(\mathbb{D}^n)$. Dann ist wegen $|\mathrm{e}^{iz\xi}| = \mathrm{e}^{-y\xi}$ und mit $z = x + iy$ das Integral

$$(\mathcal{F}^{-1} g)(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{iz\xi} g(\xi) \mathrm{d}\xi$$

absolut konvergent für $|\mathrm{Im}\, z| = |y| < \delta$ und bestimmt in diesem Gebiet eine holomorphe Funktion. Da dasselbe für alle partiellen Ableitungen von g gilt folgt aus der Identität

$$\big|(-iz)^\alpha (\mathcal{F}^{-1} g)(z)\big| = \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i\xi z} \frac{\partial^\alpha g(\xi)}{\partial \xi^\alpha} \mathrm{d}\xi \right|, \tag{4.2}$$

daß $|z|^k (\mathcal{F}^{-1} g)(z)$ beschränkt bleibt für $|z| \to \infty$, lokal gleichmäßig im Imaginärteil $|\mathrm{Im}\, z| < \delta$ und für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, daß $\mathcal{F}^{-1} g$ eine asymptotische Funktion in ihrem Holomorphiegebiet ist und damit folgt $\mathcal{F}^{-1} g \in \mathcal{O}_{-\infty}\big(\mathbb{D}^n + i\{|\mathrm{Im}\, z| < \delta\}\big)$.

Zuletzt folgt aus dem klassischen Inversionssatz für die Fouriertransformation, siehe [**Kan88**], Lemma 8.2.2, daß $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) = f$ ist. Damit sind alle Behauptungen gezeigt. □

Dieses Ergebnis läßt sich natürlich noch verfeinern, wenn man statt asymptotischer reell analytischer Funktionen solche mit geeignetem endlichen Typ betrachtet. Der Bildraum der Fouriertransformation ist dann ein Raum C^k_* von k**-mal differenzierbaren** exponentiell abfallenden Funktionen, den man in natürlicher Weise analog zu Definition 4.2.2 konstruiert. Man kann dann alle Beweisschritte von Satz 4.2.3 bis zur k-ten Ableitung durchführen. Das ergibt das

KOROLLAR 4.2.4. *Aus* $\gamma < -k - n$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *folgt* $\mathcal{F}\mathscr{P}_\gamma(\mathbb{D}^n) \subset C_*^k(\mathbb{D}^n)$.

4.3. Fouriertransformation asymptotischer Hyperfunktionen

Wir wollen nun die Fouriertransformierten asymptotischer Hyperfunktionen klassifizieren. Dazu rekapitulieren wir kurz die Fouriertransformation auf Fourier Hyperfunktionen nach [**Kan88**], Kapitel 8, §§ 2, 3.

Für eine mit bestimmtem Typ $\delta > 0$ exponentiell abfallende Fourier Hyperfunktion, das heißt eine formale Summe von Randwerten

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0) \text{ mit } F_j \in \mathcal{O}^{-\delta}(\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0),$$

läßt sich die Fouriertransformation leicht definieren, da man auch das bestimmte Integral von f über ganz $\mathbb{R}^n$ auf natürliche Weise als Integral über die definierenden Funktionen einführen kann. Setze

$$\widehat{f}(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} \widehat{F}_j(\zeta)$$

mit

$$\widehat{F}_j(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i(x+iy_j)\zeta} F_j(x + iy_j)\mathrm{d}x,$$

wobei $y_j \in \Gamma_j$ geeignet zu wählen ist so, daß das Integrationsgebiet ganz im Holomorphiegebiet von F_j enthalten ist. Man findet, daß exponentieller Abfall unter der Fouriertransformation zu Analytizität korrespondiert:

SATZ 4.3.1 ([**Kan88**], Theorem 8.2.6). *Der Raum* $\mathscr{Q}^{-\delta}(\mathbb{D}^n)$ *der Fourier Hyperfunktionen, die mit Typ* $-\delta$ *exponentiell abfallende definierende Funktionen besitzen, wird durch die Fouriertransformation bijektiv abgebildet auf den Raum* $\mathcal{O}^*\big(\mathbb{D}^n + i\{|\operatorname{Im}\zeta| < \delta\}\big)$ *infra-exponentieller holomorpher Funktionen.*

Im Beweis dieses Satzes wird auch gezeigt, daß die Fouriertransformation nicht von der Wahl der Randwertdarstellung abhängt und die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}$ auf $\mathscr{Q}^{-\delta}(\mathbb{D}^n)$ erfüllt und somit einen algebraischen Isomorphismus

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n) \longleftrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{D}^n)$$

darstellt. Dazu muß man natürlich wissen, wie die Fouriertransformation auf infra-exponentiellen analytischen Funktionen wirkt. Dies führt uns direkt zum Problem der allgemeinen Fouriertransformation auf $\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$, da die Elemente dieses Raums gerade infra-exponentielle definierende Funktionen besitzen.

Sei also nun eine Fourier Hyperfunktion f gegeben als

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0) \text{ mit } F_j \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0).$$

Dann führen wir die Fouriertransformation wie oben auf den Fall $N = 1$ eines einzelnen Randwerts zurück durch die lineare Fortsetzung

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \mathcal{F}(F(x + i\Gamma_j 0))(\xi) \tag{4.3}$$

der nun folgenden Definition. In dem einfachen Fall, daß die definierende Funktion F nicht nur global infra-exponentiell sondern in geeigneten Richtungen auch noch exponentiell abfallend ist, ist die Sache recht einfach:

SATZ 4.3.2 ([**Kan88**], Proposition 8.3.2). *Angenommen $F(x+i\Gamma 0)$ ist eine Fourier Hyperfunktion mit definierender Funktion $F \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma 0)$ so, daß F zudem noch exponentiell abfällt außerhalb eines abgeschlossenen, konvexen, eigentlichen Unterkegels Δ° von $\mathbb{R}^n$, das heißt F ist ein Element von $\mathcal{O}_*(\overline{\overline{\mathbb{R}^n \setminus \Delta^\circ}} + i\Gamma 0)$. Setze*

$$\widehat{F}(\zeta) = \int\limits_{\operatorname{Im} z = y} \mathrm{e}^{-iz\zeta} F(z) \mathrm{d}z \tag{4.4}$$

für geeignetes $y \in \Gamma$. Dann ist $\widehat{F}(\zeta) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n - i\Delta 0)$ und zudem ist $\widehat{F}$ exponentiell abfallend außerhalb des abgeschlossenen Kegels Γ°. Damit ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}F(\xi)$ durch

$$\mathcal{F}(F(x+i\Gamma 0))(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{F}(\xi - i\Delta 0)$$

wohldefiniert als Fourier Hyperfunktion.

Der wesentliche Punkt hierbei ist das Zusammenspiel des Faktors $\mathrm{e}^{-iz\zeta}$, der in gewissen imaginären Richtungen in ζ exponentiell abfallend ist für $y \in \Gamma$, mit dem exponentiellen Abfall der Funktion F außerhalb Δ°. Dies macht das Integral $\widehat{F}(\zeta)$ konvergent in dem bezeichneten Gebiet und die Definition des Randwertes sinnvoll.

Man kann nun aber immer erreichen, daß F außerhalb vorgegebener er Kegel exponentiell abfällt. Betrachten wir zum Beispiel die Funktionen

$$\chi_+(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} \text{ und } \chi_-(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}$$

und setzen

$$\chi_\sigma(z) = \chi_{\sigma_1}(z_1) \cdots \chi_{\sigma_n}(z_n)$$

für eine **Multisignatur** $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i = \pm 1$. Dann gilt

$$\sum_\sigma \chi_\sigma = 1$$

und χ_σ fällt exponentiell ab in reeller Richtung außerhalb des abgeschlossenen **σ-ten Orthanten**

$$\overline{\Gamma_\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sigma \cdot x \geq 0 \right\} \tag{4.5}$$

und lokal gleichmäßig in $\operatorname{Im} z$. Dann ist für $F \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Gamma 0)$

$$F(z) = \sum_\sigma F_\sigma(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_\sigma \chi_\sigma F(z)$$

eine Zerlegung von F in Terme F_σ, die die Voraussetzung von Satz 4.3.2 erfüllen mit $\Delta^\circ = \Delta = \Gamma_\sigma$. Diese Zerlegung nennt man auch die **Orthantenzerlegung**. Sie ist natürlich ein sehr spezieller Fall, denn durch Wahl anderer Faktoren als der χ_σ kann man zu jeder Überdeckung von $\mathbb{R}^n$ mit abgeschlossenen Kegeln eine Zerlegung finden, die außerhalb dieser Kegel exponentiell abfällt.

Die Fouriertransformation von F können wir dann durch

$$\mathcal{F}(F(x+i\Gamma 0))(\xi) = \sum_\sigma \widehat{F}_\sigma(\xi - i\Gamma_\sigma 0) \tag{4.6}$$

definieren, wobei $\widehat{F}_\sigma$ nach (4.4) aus F_σ berechnet wird. Damit haben wir die Definition der Fouriertransformation von Fourier Hyperfunktionen abgeschlossen. Es ist klar, wie die inverse Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ zu definieren ist und zusammenfassend erhält man das Ergebnis:

SATZ 4.3.3 ([**Kan88**], Theorem 8.3.4). *Die durch* (4.3), (4.4) *und* (4.6) *definierte Fouriertransformation ist ein linearer Automorphismus auf* $\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$ *und die Abbildung* $\mathcal{F}^{-1}$ *ist ihre Inverse.*

Insbesondere hängt das Ergebnis der Fouriertransformation nicht von der speziellen Wahl der Randwertdarstellung ab.

Kommen wir nun zu den Fouriertransformierten asymptotischer Hyperfunktionen. Nach unseren Erfahrungen aus Satz 4.2.3 würden wir erwarten, daß die Fouriertransformierten von Hyperfunktionen aus $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ unendlich oft differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sein werden. Damit umgekehrt die inverse Fouriertransformation aus Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ wieder Randwerte im Sinne von Fourier Hyperfunktionen machen kann, ist es nach dem was wir oben gesehen haben notwendig, daß sie infra-exponentiell sind. Genau so ist es, wie wir nun zeigen werden.

Wir setzen zunächst als Spezialfall von Definition 4.2.2 für $\delta = 0$ wie folgt:

DEFINITION 4.3.4. Wir bezeichnen mit $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ den Raum der **infra-exponentiellen**, unendlich oft differenzierbaren Funktionen. Dies sind solche $f \in C^\infty(\mathbb{D}^n)$ für die gilt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante $C_{k,\varepsilon} > 0$ mit

$$\left| \frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha} \right| \leq C_{k,\varepsilon} \mathrm{e}^{\varepsilon |\mathrm{Re}\, z|}$$

für alle Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \leq k$.

SATZ 4.3.5. *Die Fouriertransformation ist ein linearer Isomorphismus*

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n) \longleftrightarrow C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$$

mit Inverser $\mathcal{F}^{-1}$.

BEWEIS. Nach dem oben gesagten reicht es, den Beweis für einen einzelnen Randwert $F(x + i\Gamma 0)$ mit $F \in \mathcal{O}_{-\infty}(\mathbb{D}^n + i\Gamma 0)$ zu führen, der außerdem exponentiell außerhalb eines Kegels Δ° abfällt. Für ihn ist die nach 4.4 definierte Fouriertransformation $\widehat{F}(\zeta)$ ein Element von $\mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n - i\Delta 0)$. Wir haben dann wie im Beweis von Satz 4.2.3 mit $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \widehat{F}(\zeta) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{x\eta + y\xi} O(|y|^{|\alpha|}) O(|x|^{|\alpha|}) F(x + iy) \mathrm{d}x,$$

unabhängig von $y \in \Gamma$ mit hinreichend kleinem Imaginärteil. Da F lokal gleichmäßig in y asymptotisch ist, konvergiert das letzte Integral unabhängig von dem exponentiell abfallenden Faktor $\mathrm{e}^{x\eta}$ und daher insbesondere für $\eta = 0$ Dies zeigt, daß beliebige Ableitungen von $\widehat{F}(\xi)$ auf der reellen Achse existieren. Da das Resultat unabhängig von der Integrationsebene $\mathrm{Im}\, z = y$ ist, können wir y beliebig klein machen während $\eta = 0$ bleibt. Dies zeigt, daß $\widehat{F}(\xi)$ in jeder Ableitungsordnung infra-exponentiell auf der reellen Achse bleibt. Damit haben wir $\widehat{F}(\xi) \in C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ gezeigt.

Sei umgekehrt $\widehat{G}(\xi) \in C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$. Seien zudem ohne Beschränkung der Allgemeinheit alle partiellen Ableitungen von $\widehat{G}$ exponentiell abfallend außerhalb eines Kegels Δ°, was man wie oben durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren immer erreichen kann. Ihre inverse Fouriertransformation ist dann ein Randwert $G(z) \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + i\Delta 0)$. Beachten wir die Identität (4.2) so wird klar, daß $G(z)$ lokal gleichmäßig in $\operatorname{Im} z$ asymptotisch ist. Also ist $G(x + i\Delta 0) \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$.

Die Inversionsformel der Fouriertransformation für Fourier Hyperfunktionen zeigt dann, daß $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ auf $\mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ gilt. □

Analog zu Korollar 4.2.4 finden wir für k-mal stetig differenzierbare infraexponentielle Funktionen $C^{*k}(\mathbb{D}^n)$, die wir analog zu Definition 4.3.4 einführen können, wobei nur Ableitungen bis zur Ordnung k berücksichtigt werden, das folgende Ergebnis:

KOROLLAR 4.3.6. *Aus $\gamma < -k - n$ für $n \in \mathbb{N}$ folgt $\mathcal{F}\mathcal{Q}_\gamma(\mathbb{D}^n) \subset C^{*k}(\mathbb{D}^n)$.*

4.4. Der Struktursatz für asymptotische Hyperfunktionen

DEFINITION 4.4.1. Ein Differentialoperator $J(D)$ von unendlicher Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$J(D) = \sum_{\alpha_i \geq 0} b_\alpha D_x^\alpha \text{ mit } D_x^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

heißt **lokaler Operator**, wenn seine Koeffizienten die Abschätzung

$$\overline{\lim_{|\alpha| \to \infty}} \sqrt[|\alpha|]{|b_\alpha| \alpha!} = 0$$

erfüllen.

Lokale Operatoren verdanken ihren Namen ihrer Eigenschaft, den Träger einer Hyperfunktion zu erhalten. Das heißt insbesondere sind die lokalen Operatoren Endomorphismen der Räume $\mathscr{B}[K]$ der Hyperfunktionen mit Träger in einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$. Für Hyperfunktionen mit kompaktem Träger und gewöhnliche Hyperfunktionen gelten Struktursätze in Analogie zu den bekannten für Distributionen.

SATZ 4.4.2 ([**Kan72**], Theorem 1.3). *Jede Hyperfunktion mit Träger in einem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$ kann dargestellt werden als $J(D)f$ mit einem lokalen Operator $J(D)$ und einer C^∞-Funktion (oder einer stetigen Funktion oder einem Radonmaß) f.*

Beispielsweise ist der Raum der im Ursprung konzentrierten Hyperfunktionen als

$$\mathscr{B}[\{0\}] = \left\{ J(D)\delta(x) \;\middle|\; J(D) \text{ lokal} \right\}$$

darstellbar.

Lokale Operatoren operieren in natürlicher Weise auf Fourier Hyperfunktionen und ihre Wirkung verträgt sich mit der Fouriertransformation in der für Differentialoperatoren üblichen Weise.

SATZ 4.4.3 ([**Kan88**], Proposition 8.4.8). *Jeder lokale Operator $J(D)$ induziert eine Abbildung $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^n) \to \mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ und*

$$\mathcal{F}(J(D)f)(\xi) = J(\xi) \cdot (\mathcal{F}f)(\xi) \tag{4.7}$$

gilt für jede Fourier Hyperfunktion f. Insbesondere ist $J(\zeta)$ eine infra-exponentielle und in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion.

Dieser Satz ergibt zusammen mit Satz 4.3.5 den

KOROLLAR 4.4.4. *Jeder lokale Operator $J(D)$ induziert eine Abbildung von $\mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ nach $\mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und (4.7) gilt.*

Wir gehen nun daran, den Struktursatz für $\mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ zu beweisen. Wir wiederholen dabei der Deutlichkeit halber den Beweis des Struktursatzes für Fourier Hyperfunktionen, siehe [**Kan88**], Theorem 8.4.9, recht genau. Zunächst benötigen wir zwei Lemmata, die besonders wichtige Beispiele für Funktionen vom infra-exponentiellen Typ beschreiben.

LEMMA 4.4.5 ([**Kan88**], Proposition 8.1.6). *Sei $\phi(t)$ eine positive, monoton wachsende Funktion auf der Halbachse $t \geq 1$ mit $\phi(t) > 1$ und $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \infty$. Dann ist das unendliche Produkt*

$$J(\zeta) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta^2}{(k\phi(k))^2}\right),$$

mit $\zeta^2 \stackrel{\text{def}}{=} \zeta_1^2 + \ldots + \zeta_n^2$, eine infra-exponentielle, ganze Funktion und erfüllt die untere Abschätzung

$$|J(\zeta)| \geq C \exp\left(c\frac{|\zeta|}{\phi(|\zeta|+1)}\right)$$

für $|\mathrm{Im}\,\zeta| \leq \max\{(1/\sqrt{3})|\mathrm{Re}\,\zeta|, 1\}$ und Konstanten C, $c > 0$.

LEMMA 4.4.6 ([**Kan88**], Lemma 8.1.7). *Sei $\{f_k(t)\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver, stetiger Funktionen auf der Halbachse $t \geq 0$ mit infra-exponentieller Wachstumsordnung. Dann gibt es eine Funktion $\phi(t)$ wie oben und Konstanten C_k so, daß*

$$f_k(t) \leq C_k \exp\left(\frac{t}{\phi(t+1)}\right)$$

gilt für $t \geq 0$.

Der Beweis unseres Strukturtheorems verläuft nun genauso wie bei Kaneko, aber unter Zuhilfenahme unserer Charakterisierung der Fouriertransformierten asymptotischer Hyperfunktionen.

SATZ 4.4.7. *Jedes $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ kann dargestellt werden als $J(D)f_0(x)$ mit einem lokalen Operator $J(D)$ und einer stetigen Funktion $f_0(x)$ von asymptotischem Abfall, das heißt $f_0(x) = O(|x|^{-\infty})$.*

BEWEIS. Sei $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ mit Fouriertransformierter

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \widehat{F}_j(\xi + i\Gamma_j 0).$$

Dabei nehmen wir an, daß die Fouriertransformation mittels einer Zerlegung in Komponenten, die außerhalb geeigneter Kegel exponentiell abfallen, berechnet wurde. Dann können wir nach Satz 4.3.2 annehmen, daß die Funktionen $\widehat{F}_j \in \mathcal{O}^*(\mathbb{D}^n + L_j)$ exponentiell abfallend sind außerhalb von Kegeln Δ_j°. Dabei ist $L_j \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\mathbb{D}^n + iL_j$ ein infinitesimaler Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0$. Sei $\{K_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes j eine Folge von Kompakta, die L_j ausschöpft. Dann ist jede der Funktionen

$$h_{j,k} = \sup_{\eta\in K_{j,k}} \left|\widehat{F}_j(\xi + i\eta)\right|$$

infra-exponentiell und wir können die beiden Lemmata von oben wie folgt anwenden: Es gibt eine positive, infra-exponentielle ganze Funktion $J(\zeta)$ und Konstanten $\{C_{j,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ so, daß

$$\left|\widehat{F}_j(\xi + i\eta)\right| \leq C_{j,k}|J(\xi + i\eta)|$$

gilt für $\eta \in K_{j,k}$. Nun ist nach Satz 4.3.5 zudem auch $\widehat{F}_j(\xi)$ eine C^∞-Funktion auf der reellen Achse. Betrachte die Funktionen

$$\widehat{F}_{j0}(\zeta) = \frac{\widehat{F}_j(\zeta)}{J(\zeta)(1+\zeta^2)^n}.$$

Diese Funktionen sind für $\operatorname{Im}\zeta = \eta$ und $\eta \in L_j$ absolut integrabel in $\xi = \operatorname{Re}\zeta$ und ihre Restriktionen auf die reelle Achse sind C^∞-Funktionen. Die inversen Fouriertransformierten der $\widehat{F}_{j0}$ sind im Sinne der Fourier Hyperfunktionen wohldefiniert und $F_{j0} = \mathcal{F}^{-1}\widehat{F}_{j0}$ ist holomorph auf einem infinitesimalen Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i\Delta 0$ und exponentiell abfallend außerhalb $-\Gamma_j^\circ$. Außerdem ist F_{j0} fortsetzbar zu einer stetigen Funktion auf der reellen Achse, von der man wie im Beweis von Satz 4.3.5 zeigt, daß sie von asymptotischem Abfall ist. Setzen wir $f_0(x) = \sum_{j=1}^N F_{j0}(x)$ dann folgt aus (4.7)

$$\begin{aligned} f(x) &= J(D)\sum_{j=1}^N F_{j0}(x + i\Delta_j 0) \\ &= J(D) f_0(x), \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

KAPITEL 5

Strukturtheorie temperierter Hyperfunktionen

Überblick

Dieses zentrale Kapitel beschließt unsere Entwicklung der allgemeinen Theorie der Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen in Teil I und II dieser Arbeit. Wir wollen hier den Gedanken des letzten Kapitels weiterverfolgen, die temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen durch die Fouriertransformation zu charakterisieren. Speziell wollen wir die Fouriertransformation als *topologischen* Isomorphismus zwischen den asymptotischen beziehungsweise temperierten Hyperfunktionen und gewissen Räumen unendlich oft differenzierbarer Funktionen beziehungsweise gewissen Distributionenklassen beschreiben. Dazu müssen wir zu unserem Grundlagenkapitel 1 zurückkehren und die Räume von Randwerten holomorpher Funktionen auf infinitesimalen Keilen, die wir im letzten Kapitel eingeführt hatten, mit einer sinnvollen Topologie versehen. Wir betrachten dabei im ersten Abschnitt nur den temperierten und asymptotischen Fall, das heißt die Entsprechungen der in Abschnitt 1.5 definierten Topologien in n Dimensionen und können uns auch, wie wir im folgenden sehen werden auf *zylindrische* Mengen, das heißt solche von der Form eines kartesischen Produkts, beschränken.

Im zweiten Abschnitt werden die Ergebnisse von Kapitel 2 für $\mathscr{Q}_{-\infty}$ und $\mathscr{Q}_{\infty}$ auf höhere Dimensionen übertragen. Nach der Art, wie wir Hyperfunktionen im letzten Kapitel als Randwerte aus infinitesimalen Keilen definiert hatten, ist klar, daß ein entsprechendes Dualitätstheorem zwischen $\mathscr{Q}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$ und $\mathscr{P}_{\mp\infty}(\mathbb{D}^n)$ zunächst nur für eine beliebige aber feste Zerlegung von $\mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n$ in Keile bewiesen werden kann. Wir wählen speziell die in (4.5) auf Seite 67 eingeführte Orthantenzerlegung, für die wir noch eine andere Darstellung geben. Damit haben wir temperierte und asymptotische Hyperfunktionen in n Dimensionen topologisch als Randwerte und über die Dualität zu $\mathscr{P}_{\mp\infty}(\mathbb{D}^n)$, das heißt als analytische Funktionale charakterisiert. Was wir hier mit Absicht *nicht* unternehmen ist eine kohomologische Beschreibung, die uns analog zu Kapitel 3 die Garbentheorie für $\mathscr{Q}_{\pm\infty}$ liefern würde. Siehe dazu die in Anmerkung 5.1 und der Einleitung angeführten Gründe.

In Abschnitt 5.3 beschreiben wir ein Schema zur Klassifikation von Testfunktionenräumen, das von Gelfand und Schilow in [**GS69**] eingeführt wurde. Dieses Schema wird für uns eine wichtige Rolle spielen, denn es wird sich in Abschnitt 5.4 zeigen, daß wir mittels der Fouriertransformation die Testfunktionen $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ der temperierten Hyperfunktionen zwanglos in es einordnen können. Nach diesem Vorbild topologisieren wir auch die Fouriertransformation, die nach 4.3.5 zwischen den asymptotischen Hyperfunktionen $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und dem Raum $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ wirkt. Der folgende fünfte Abschnitt liefert als eine weitere wichtige strukturelle Eigenschaft von $\mathscr{Q}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$ die Nuklearität. Dank ihrer werden wir in unserem Schema zur Anordnung von verallgemeinerten Funktionen (siehe unten) etliche — für mögliche Anwendungen interessante — *Gelfand-Tripel* entdecken, insbesondere $\big(\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n), L^2(\mathbb{R}^n), \mathscr{Q}_{\infty}(\mathbb{D}^n)\big)$.

All unsere Vorbereitungen münden schließlich in Abschnitt 5.6. Wir lassen uns von der Symmetrie des Gelfand–Schilow-Schemas, siehe Abbildung 5.1 auf Seite 79 inspirieren, um unsere Räume $\mathscr{P}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$ und $\mathscr{Q}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$ von Funktionen und verallgemeinerten Funktionen und ihre Fouriertransformierten in eine einheitliche Anordnung zu bringen. Dazu tragen wir die Singularität einer (verallgemeinerten) Funktion gegen ihr Wachstumsverhalten im Unendlichen auf. Die im Überblick von Kapitel 4 angesprochenen Paley–Wiener-Theoreme, sowie unsere eigenen Ergebnisse hierzu zeigen dann, daß die Fouriertransformation diese beiden Qualitäten *vertauscht*. Das bedeutet, In unserem Raumdiagramm Abbildung 5.2 auf Seite 85 bewirkt die Fouriertransformation eine Spiegelung an der Diagonalen, ganz genau wie im Gelfand–Schilow-Schema. Unser Schema geht aber weit darüber hinaus, indem es die Dualräume der analytischen Testfunktionen als Räume verallgemeinerter Funktionen mit einbezieht und somit eine weitere Symmetrie hinzufügt: Die Dualität zwischen Test- und verallgemeinerten Funktionen ist nichts anderes als die Punktspiegelung am Zentrum des Diagramms.

Wir schließen den zweiten Teil dieser Arbeit in Anmerkung 5.5 auf Seite 89 mit einem Hinweis auf verwandte Arbeiten über *ganze analytische Funktionale* und darauf, wie sich auch diese in unser Ordnungsschema einpassen.

5.1. Topologien

Wir übertragen in diesem Abschnitt die Definition temperierter und asymptotischer holomorpher Funktionen auf kompakten und offenen Mengen aus Abschnitt 1.5 auf n Dimensionen. Wir beschränken uns dabei auf den einfachsten Fall *zylindrischer* Untermengen von $\mathbb{I}^n$, das heißt solchen von der Form eines kartesischen Produkts. Dies ist der einzige Fall, den wir im folgenden brauchen werden, denn insbesondere ist ja $\mathbb{D}^n$ eine kompakte Zylindermenge in $\mathbb{I}^n$. Weiter benutzen wir Bemerkung 1.5.2, um die für uns jeweils günstigste Form der Definition hinschreiben zu können und wählen ausschöpfende Folgen für Kompakta sowie Umgebungssysteme für offene Mengen jeweils als kartesische Produkte von Streifen. Unter Beachtung von Satz 1.5.4 ist damit folgende Definition kompatibel mit denen im eindimensionalen Fall:

DEFINITION 5.1.1. Sei $K \subset \mathbb{I}^n$ eine kompakte zylindrische Menge. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}^B(K)$ den Raum der in K holomorphen und auf dem Rand ∂K stetigen Funktionen und definieren damit für $\gamma \in \mathbb{R}$ den Raum

$$\overline{\mathcal{O}}^B_\gamma(K) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{O}^B(K) \mid f(z) = O(|\text{Re}\, z|^\gamma), |z| \to \infty \text{ in } K_{\mathbb{C}^n}\},$$

der zum Banachraum wird mit der Norm

$$\|f\|_{\gamma,K} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{K_{\mathbb{C}^n}} \left|f(z)(1 + |\text{Re}\, z|)^{-\gamma}\right|.$$

Sei $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ein Fundamentalsystem offener Umgebungen von K so, daß $\overline{\overline{U_m}}$ von der Form $\overline{\overline{U_m}} = L_1 \times \cdots \times L_n$ ist für alle m, wobei $L_i \subset \mathbb{I}$ kompakte Streifen sind für $i = 1, \ldots, n$. Damit definieren wir

$$\mathcal{O}_\infty(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}^B_m(\overline{\overline{U_m}}) \text{ und}$$
$$\mathcal{O}_{-\infty}(K) \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim \overline{\mathcal{O}}^B_{-\infty}(\overline{\overline{U_m}}),$$

als induktive Limiten lokalkonvexer Räume, wobei wir

$$\overline{\mathcal{O}}^B_{-\infty}(\overline{\overline{U_m}}) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_l \overline{\mathcal{O}}^B_{-l}(\overline{\overline{U_m}})$$

gesetzt haben. Damit setzen wir weiter

$$\mathcal{O}_{\pm\infty}(W) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim \mathcal{O}_{\pm\infty}(K_m)$$

wobei $\{K_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine ausschöpfende Folge von Kompakta für W ist so, daß K_m von der Form $K_m = L_1 \times \cdots \times L_n$ ist für alle m, wobei $L_i \subset \mathbb{I}$ kompakte Streifen sind für $i = 1, \ldots, n$.

Die Topologie dieser Räume ist damit dieselbe wie im Eindimensionalen.

SATZ 5.1.2. *Die Räume $\mathcal{O}_{\pm\infty}(K)$ sind DFS- und die Räume $\mathcal{O}_{\pm\infty}(W)$ sind FS-Räume für jede kompakte, zylindrische Menge $K \subset \mathbb{I}^n$ und jede offene, zylindrische Menge $W \subset \mathbb{I}^n$.*

BEWEIS. Wir bemerken, daß Lemma 1.1.4 in beliebiger Dimension gilt. Damit kann der Beweis von Satz 1.5.3 einfach übertragen werden. □

Insbesondere bezeichnen wir die DFS-Räume

$$\mathscr{P}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$$

im Fall $+\infty$ als **temperierte** und für $-\infty$ **asymptotische reell analytische Funktionen** auf $\mathbb{D}^n$.

5.2. Dualitäten

DEFINITION UND BEMERKUNG 5.2.1. Sei $W = W_1 \times \ldots \times W_n$ eine offene, zylindrische Menge in $\mathbb{Q}^n$ und $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ eine kompakte, zylindrische Untermenge von W. Dann definieren wir durch

$$W\#K \stackrel{\text{def}}{=} (W_1 \setminus K_1) \times \cdots \times (W_n \setminus K_n)$$

und

$$W\#_j K \stackrel{\text{def}}{=} (W_1 \setminus K_1) \times \cdots \times \underbrace{W_j}_{j} \times \cdots \times (W_n \setminus K_n)$$

offene, zylindrische Mengen in $\mathbb{Q}^n$.

Sei nun W eine offene, zylindrische Umgebung von $\mathbb{D}^n$ in $\mathbb{I}^n$. Damit definieren wir

$$\mathscr{Q}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{\pm\infty}(W\#\mathbb{D}^n) \Big/ \sum_{j=1}^{n} \mathcal{O}_{\pm\infty}(W\#_j\mathbb{D}^n)$$

als FS-Raum. Wir nennen $\mathscr{Q}_{\infty}(\mathbb{D}^n)$ den Raum der **temperierten** und $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ den Raum der **asymptotischen Hyperfunktionen** auf $\mathbb{D}^n$.

Wie in Satz 2.2.2 ist dies der Quotient eines FS-Raums durch einen abgeschlossenen Unterraum und damit selbst ein FS-Raum. Wie ist nun der Zusammenhang zwischen dieser Definition und der Auffassung von Hyperfunktionen als Randwert aus infinitesimalen Keilen des letzten Kapitels? Zunächst bemerken wir, daß obige Definition diejenige von $\mathrm{H}^1_{\mathbb{D}}(W; \mathcal{O}_{\pm\infty})$ in einer Dimension als Spezialfall umfaßt, siehe Definition 2.2.1, denn trivialerweise sind $W\#\mathbb{D} = W \setminus \mathbb{D}$ und $W\#_1\mathbb{D} = W$ für $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{I}}(\mathbb{D})$. Das heißt in einer Dimension ist Definition 5.2.1 kompatibel mit der Auffassung temperierter und asymptotischer Hyperfunktionen als Randwerte temperierter und asymptotischer Funktionen in der oberen und unteren Halbebene und die Definition hängt nach Satz 3.1.2 nicht von der Wahl der Umgebung W ab.

Allgemein in n Dimensionen zerfällt $W\#\mathbb{D}^n$ in 2^n Zusammenhangskomponenten: Diese sind gerade vom Typ der in (4.5) definierten Orthanten, das heißt $W\#\mathbb{D}^n = \bigcup_\sigma W_\sigma$, wobei W_σ ein infinitesimaler Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i\Gamma_\sigma 0$ ist.

Definierende Funktionen für Hyperfunktionen im Sinne von Definition 5.2.1 sind also spezielle Randwertdarstellungen im Sinne von Kapitel 4 für die dort eingeführte Orthantenzerlegung. Der nun folgende Dualitätssatz zeigt auch, daß Definition 5.2.1 nicht von der Wahl der Umgebung W abhängt und es somit sinnvoll ist von Randwerten aus *infinitesimalen* Keilen *vom Typ* Γ_σ zu sprechen. Insbesondere gilt also die Charakterisierung von $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ über die Fouriertransformation in Satz 4.3.5 weiter.

ANMERKUNG 5.1. An dieser Stelle wollen wir kurz den kohomologischen Zugang zu temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen beschreiben. Wir haben es bewußt unterlassen, die Garbentheorie temperierter und asymptotischer Fourier Hyperfunktionen in mehr als einer Dimension über diesen Weg aufzuzäumen, denn wir hätten sonst einige Abstraktionsschritte weitergehen müssen, vergleiche [**Kan88**], Kapitel 5—7 und §§5 und 6 in Kapitel 8, um unter anderem $\mathcal{O}_{\pm\infty}$ als Garbe auf $\mathbb{Q}^n$ darzustellen, bezüglich derer $\mathbb{D}^n \subset \mathbb{Q}^n$ *rein n-kodimensional* ist. Erst damit hätten wir zum Beispiel die temperierten Hyperfunktionen als *n-te derivierte Garbe* $\mathscr{Q}_\infty = \mathcal{H}^n_{\mathbb{D}^n}(\mathcal{O}_\infty)$ auf $\mathbb{D}^n$ darstellen und ihre Welkheit zeigen können. Die Schnitte von $\mathscr{Q}_\infty$ über einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{D}^n$ wären dann Elemente der *n-ten relativen Kohomologiegruppe* $\mathrm{H}^n_\Omega(W; \mathcal{O}_\infty)$ *mit Träger in* Ω für jede komplexe Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}^n}(\Omega)$. Die globalen Schnitte dieser Garbe, das heißt den Raum $\mathrm{H}^n_{\mathbb{D}^n}(\mathbb{Q}^n; \mathcal{O}_\infty)$ hätten wir dann als Quotientenraum wie in Definition 5.2.1 identifizieren können: Wir hätten dazu außerdem zeigen müssen, daß die Orthantenzerlegung $\{\mathbb{Q}^n \#_j \mathbb{D}^n\}_{j=1,\dots,n}$ eine *relative Leray-Überdeckung* des Paars $(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^n \setminus \mathbb{D}^n)$ bezüglich der Garbe $\mathcal{O}_\infty$ist.

All dies haben wir uns aus den in der Einleitung angegebenen Gründen gespart und folgen in diesem Teil lieber der Leitlinie, die Kaneko in seinen Arbeiten über Hyperfunktionentheorie stets verfolgt hat: Die Auffassung als Randwerte holomorpher Funktionen.

THEOREM 5.2.2. *Es gibt lineare, topologische Isomorphismen*

$$\mathscr{Q}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}'_{\mp\infty}(\mathbb{D}^n).$$

Diese werden erzeugt durch die natürliche Übertragung der Bilinearform (2.1) *auf kartesische Produkte von Streifen.*

Da ein ausführlicher Beweis genau dieselbe Struktur besitzen würde wie die der Theoreme 2.1.3 und 2.2.3, beschränken wir uns darauf, die Übertragung der einzelnen Argumente von einer nach n Dimensionen anzudeuten. Vergleiche auch den leicht verständlichen Beweis von [**BN89**, Proposition 2.4], der wiederum auf dem Originalbeweis in [**Kaw70**] beruht.

BEWEISSKIZZE. Betrachten wir zum Beispiel die Dualität von $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ zu $\mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D}^n)$. Für eine Äquivalenzklasse $[F] \in \mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D}^n)$ mit einem Repräsentanten F und eine Funktion $f \in \mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ sieht die Bilinearform (2.1) so aus:

$$\langle [F], f\rangle = -\int\limits_{\Gamma_1} \cdots \int\limits_{\Gamma_n} F(z_1, \dots, z_n) f(z_1, \dots, z_n) \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n,$$

wobei die Integrationswege im gemeinsamen Holomorphiegebiet von F und f gewählt werden müssen. Dazu reicht es wie in Definition 5.1.1 ein System $\{U_m\}$ von offenen Umgebungen von $\mathbb{D}^n$ zu wählen so, daß $\overline{\overline{U_m}}$ von der Form $\overline{\overline{U_m}} = L_1 \times \cdots \times L_n$ ist für alle m, wobei $L_i \subset \mathbb{I}$ kompakte Streifen sind für $i = 1, \dots, n$. Für hinreichend großes m können wir dann $\Gamma_i = \partial L_i$ setzen. Dann können wir Cauchys Integralsatz 1.4.3 direkt auf dieses Produkt von eindimensionalen Integralen anwenden, um Wegunabhängigkeit im gemeinsamen Holomorphiegebiet von f und F einzusehen. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Bilinearform und ebenso wie in Teil 2 des Beweises von Theorem 2.1.3 zeigt man die Stetigkeit des Funktionals $T_{[F]} = \langle [F], \cdot \rangle$.

Für den Rest des Beweises, das heißt für die Schritte 3 und 4 im Beweis von Theorem 2.1.3 benutzen wir wiederum die exponentiell abfallende Cauchy- beziehungsweise Cauchy–Hilbert-Transformation, die buchstabengenau wie in Lemma 1.7.2 beziehungsweise 2.1.4 zu definieren ist und deren Kern damit die Gestalt

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-(z_i - w_i)^2}}{z_i - w_i}$$

besitzt. In Schritt 3 ist dann insbesondere die Integrationsfläche wieder als kartesisches Produkt von Streifenrändern zu wählen und als Umgebung eines gewählten Punktes $z = (z_1, \dots, z_n)$ benutzt man ein Produkt von um z_i zentrierten, hinreichend kleinen Kreisscheiben Ω_i.

Bezüglich Schritt 4 sieht man leicht, daß $\mathbf{CH}_T^*$ für $T \in \mathscr{P}'_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ eine holomorphe Funktion in $\mathbb{Q}^n \# \mathbb{D}^n$ liefert, vergleiche auch [**BN89**], Lemma 2.5. Dann ist aber auch klar, daß diese Funktion nicht schneller als eine endliche Potenz in allen $\operatorname{Re} z_i$ und daher auch in $\operatorname{Re} z$ wachsen kann, das heißt wir haben einen Repräsentanten $\mathbf{CH}_T^* \in \mathcal{O}_\infty(\mathbb{Q}^n \# \mathbb{D}^n)$ für das Funktional T. Wiederum sieht man durch Darstellung einer beliebigen Testfunktion f über die exponentielle Cauchytransformation, daß $F = \mathbf{CH}_T^*$ das Funktional T mittels $([F], f)$ repräsentiert.

Damit kann schließlich der Beweis von Theorem 2.2.3 wörtlich übertragen werden. □

5.3. Gelfand–Schilow-Räume

In Kapitel IV des zweite Bandes [**GS69**] ihrer berühmten Reihe von Lehrbüchern über Distributionentheorie und Funktionalanalysis haben Gelfand und Shilow eine allgemeine Klassifikation von potentiellen Testfunktionenräumen für Distributionen eingeführt. Wie wollen dieses *Gelfand–Schilow-Schema* hier kurz beschreiben. Mit wenigen Ausnahmen stammen die hier zitierten Ergebnisse aus Kapitel IV von [**GS69**]. Zunächst die grundlegende Definition:

DEFINITION 5.3.1. Für α, $\beta \in \mathbb{R}_+$ setze

$$\mathscr{S}_\alpha(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \forall k, q \in \mathbb{N}_0 \colon \sup_{x, |\sigma| \le q} |x^k D_x^\sigma f(x)| \le C_q A^k k^{k\alpha} \Big\},$$

$$\mathscr{S}^\beta(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \forall k, q \in \mathbb{N}_0 \colon \sup_{x, |\sigma| \le q} |x^k D_x^\sigma f(x)| \le C_k B^q q^{q\beta} \Big\},$$

$$\mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \forall k, q \in \mathbb{N}_0 \colon \sup_{x, |\sigma| \le q} |x^k D_x^\sigma f(x)| \le C A^k B^q k^{k\alpha} q^{q\beta} \Big\},$$

wobei die Suprema jeweils über alle $x \in \mathbb{R}^n$ genommen werden. Die Konstanten A, B, C_k, C_q und C hängen dabei von der Funktion f ab.

Hier werden also Testfunktionen nach ihrem Wachstumsverhalten in der Koordinate x sowie in der Ableitungsordnung $|\sigma|$ klassifiziert. Die topologische Struktur der Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n)$ ist die abzählbar normierter Räume. Definiert man nämlich abzählbar normierte Räume

$$\mathscr{S}_{\alpha,A}^{\beta,B}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \|f\|_{\alpha,A;r}^{\beta,B;s} \le \infty \Big\},$$

für A, $B \in \mathbb{R}$, mit Normensystemen

$$\|f\|_{\alpha,A;r}^{\beta,B;s} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,k,q,|\sigma|\leq q} \frac{|x^k D_x^\sigma f(x)|}{(A+1/r)^k (B+1/s)^{|\sigma|} k^{k\alpha} q^{q\beta}},$$

wobei die Suprema über alle $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}_0$ genommen werden und r, $s \in \mathbb{N}$ sind, so sind die Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{k,l\to\infty} \mathscr{S}_{\alpha,k}^{\beta,l}(\mathbb{R}^n)$$

als topologische induktive Limiten vollständiger, abzählbar normierter Räume darstellbar. Es zeigt sich, daß die Räume $\mathscr{S}_\alpha$ und $\mathscr{S}^\beta$ Grenzfälle der $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ sind. Es gilt

$$\mathscr{S}_\alpha(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{\beta\to\infty} \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n) \text{ und}$$

$$\mathscr{S}^\beta(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{\alpha\to\infty} \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n).$$

Es gibt noch andere Charakterisierungen der Topologien auf $\mathscr{S}_\alpha^\beta$. Einen Spezialfall werden wir weiter unten brauchen und führen ihn deshalb als Beispiel an.

SATZ 5.3.2 ([**GS69**], Kapitel IV, §3). *Es gilt*

$$\mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n) = \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \exists \delta > 0, \forall \alpha : \sup_x |D_x^\alpha f(x)| e^{\delta|x|} < \infty \Big\}.$$

Die Topologie von $\mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n)$ ist die des induktiven Limes

$$\mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{A\to\infty} \mathscr{S}_{1,A}(\mathbb{R}^n),$$

wobei die Topologie des Raumes

$$\mathscr{S}_{1,A}(\mathbb{R}^n) = \varinjlim_{\beta\to\infty} \varinjlim_{B\to\infty} \mathscr{S}_{1,A}^{\beta,B}(\mathbb{R}^n)$$

erzeugt wird von dem abzählbaren System von Normen

$$\|f\|_{\mathscr{S}_1;m,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,|\alpha|\leq p} |D_x^\alpha f(x)| e^{m^{-1}(1-p^{-1})|x|},$$

für $f \in \mathscr{S}_{1,A}(\mathbb{R}^n)$, wobei $m = eA$, und $p = 2, 3, \ldots$ ist.

Das Gelfand–Schilow-Schema enthält viele bekannte Testfunktionenräume der Distributionentheorie. Insbesondere ist der vertraute **Schwartz-Raum** $\mathscr{S}$, das heißt der Raum der *schnellfallenden Funktionen*, die die Testfunktionen temperierter Distributionen sind, der Grenzfall $\alpha = \beta = \infty$:

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \cong \varinjlim_{\alpha,\beta\to\infty} \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n).$$

Man findet auch den Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ der **Testfunktionen mit kompaktem Träger** als Grenzfall $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \cong \mathscr{S}_0(\mathbb{R}^n)$.

Abbildung 5.1 zeigt eine schematische Darstellung der Gelfand–Schilow-Räume, die wir nun diskutieren wollen. Zunächst ist nach Definition 5.3.1 klar, daß die Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ stets kleiner werden, wenn einer der beiden Indizes abnimmt, da dann immer stärkere Bedingungen an die Funktionen gestellt werden. Insbesondere zeigt sich, daß die Räume für $\alpha + \beta < 1$ trivial werden, das heißt nur noch die Konstanten enthalten, ebenso wie $\mathscr{S}_1^0$ und $\mathscr{S}_0^1$. Weiter folgt aus der Definition, daß $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ im Schnitt der Räume $\mathscr{S}_\alpha$ und $\mathscr{S}^\beta$ enthalten ist. Die Umkehrung, das heißt $\mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n) = \mathscr{S}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{S}^\beta(\mathbb{R}^n)$, wurde erst recht spät in [**Kas78**] gezeigt.

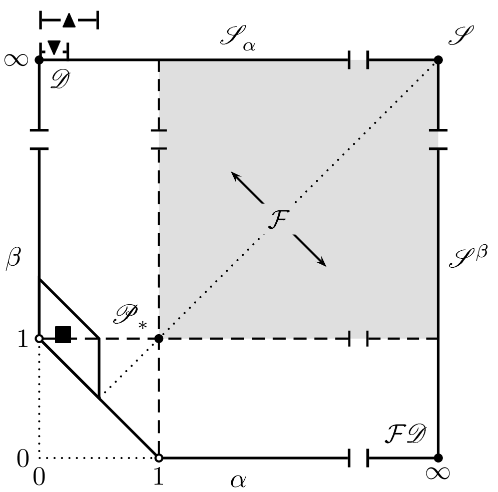

ABBILDUNG 5.1. Die Gelfand–Schilow-Räume.

Da der obere Index β das Wachstum der Ableitungen einer Funktion $f \in \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n)$ kontrolliert, kontrolliert er auch die mögliche Konvergenz ihrer Taylorreihe und damit auch die analytische Fortsetzung von f, falls sie existiert. In der Tat läßt sich für $\beta = 1$ jedes $f \in \mathscr{S}^{1,B}(\mathbb{R}^n)$ analytisch fortzsetzen zu einer holomorphen Funktion $f(x+iy)$ in dem Gebiet $\{x+iy \in \mathbb{C}^n \mid |y_i| < 1/(eB)\}$ und für $\beta < 1$ bestehen die Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ aus ganzen Funktionen. Der Grenzfall $\beta = 1$ ist durch die gestrichelte, horizontale Linie in Abbildung 5.1 angedeutet. Offenbar entspricht dieser Grenzfall von seiner Charakteristik her den uns vertrauten reell analytischen Funktionen vom Typ $\mathscr{P}$, was sich beispielsweise in folgendem Satz bestätigt und was auch wir weiter unten wiederfinden werden.

SATZ 5.3.3 ([**NM76a**], Proposition 2.1). *Der Raum der exponentiell abfallenden, reell analytischen Funktionen $\mathscr{P}_*(\mathbb{D}^n)$ ist topologisch isomorph zum Gelfand–Schilow-Raum $\mathscr{S}_1^1(\mathbb{R}^n)$.*

Am interessantesten ist das Verhalten der Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ unter der Fouriertransformation. Wie man nach den Beispielen $\mathscr{S}_\infty^\infty = \mathscr{S}$, $\mathscr{D} = \mathscr{S}_0$ und $\mathcal{F}\mathscr{D} = \mathscr{S}^0$ schon vermuten konnte, vertauscht die Fouriertransformation die Indizes α und β. Genauer gesagt ist

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\beta^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

ein linearer, topologischer Isomorphismus. Insbesondere sind also die Räume auf der Diagonalen des Schemas invariant unter der Fouriertransformation. Weiter bedeutet dies nach dem oben gesagten, daß die Räume für $\alpha < 1$, das heißt links von der senkrechten, gestrichelten Linie, Fouriertransformationen besitzen, die ganze Funktionen sind. Dies stimmt zum Beispiel mit dem Ergebnis des Paley–Wiener-Theorems für Funktionen mit kompaktem Träger, vergleiche [**Rud74**], Theorem 7.22, überein. Insbesondere findet man als Fouriertransformierte des Raums $\mathscr{D} = \mathscr{S}^0$ der Funktionen mit kompaktem Träger einen Raum schnellfallender ganzer Funktionen, der von Sebastião e Silva unter der Bezeichnung $\mathscr{Z}$ als Testfunktionenraum der klassischen *Ultradistributionen*, das heißt gewisser ganzer analytischer Funktionale, eingeführt wurde.

In [**CCK96**] wurde eine Charakterisierung der $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ über die Fouriertransformierten und ihre Wachstumsordnung gegeben:

SATZ 5.3.4. *Für $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ sind die beiden Bedingungen*

$$\sup_x |f(x)|\mathrm{e}^{k|x|^{1/\alpha}} < \infty \text{ und } \sup_x |(\mathcal{F}f)(\xi)|\mathrm{e}^{h|\xi|^{1/\beta}} < \infty$$

für geeignete Konstanten k, $h > 0$, äquivalent zu $f \in \mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^n)$.

ANMERKUNG 5.2. In der Quantenfeldtheorie wird schon lange über die Wahl der „richtigen" Testfunktionen für *wechselwirkende Qauntenfelder* diskutiert, siehe zum Beispiel [**Wig81, JS88, MS92, Str93**] und [**Sch97b**]. Es hat sich schon früh herausgestellt, daß die übliche axiomatische Formulierung der Quantenfeldtheorie, also ein Versuch zu ihrer Mathematisierung, große Probleme macht, wenn man versucht, Wechselwirkung miteinzubeziehen. In [**MS92**] wurde gezeigt, daß die Korrelationsfunktionen einfacher quantenfeldtheoretischer Modelle tatsächlich Objekte von größerer Singularität als temperierte Distributionen sind. Wir haben die geeigneten Testfunktionenräume für einige dieser Korrelationsfunktionen in das Gelfand–Schilow-Schema eingezeichnet:

- Das sogenannte *zweidimensionale Dipolfeld*, das eine Lösung der Gleichung $\Box^2\varphi = 0$ ist, hat eine *2-Punkt Funktion*, die eine Distribution auf $\mathscr{S}_\alpha(\mathbb{R}^2)$ für $\alpha < 1/2$ ist, Was wir in Abbildung 5.1 durch das Symbol ▲ angedeutet haben.
- Der *Vertexoperator* : $\exp(ig\varphi)$: dieses Feldes ist noch singulärer. Er ist eine operatorwertige Distribution auf $\mathscr{S}_\alpha(\mathbb{R}^2)$ für $\alpha < 1/4$, im Diagramm markiert mit ▼.
- Der entsprechende Vertexoperator des Dipolfeldes in der vierdimensionalen Raumzeit ist in der Zeitvariablen eine Distribution auf dem Raum $\mathscr{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}^4)$ für $\alpha+\beta < 3/2$ und $\alpha < 1/2$, was dem mit ■ markierten Gebiet entspricht.

Die singuläre Natur wechselwirkender Quantenfelder war auch einer der Gründe, die Nagamachi und Mugibayashi zur Entwicklung der axiomatischen Quantenfeldtheorie mit Fourier Hyperfunktionen geführt hat, siehe unter anderem [**NM76a, NM76b**] und [**BN89, BN98**]. Vom „dualen" Standpunkt aus ist dies eine Theorie operatorwertiger Distributionen auf dem Testfunktionenraum $\mathscr{P}_*$ der Fourier Hyperfunktionen beziehungsweise seines *modifizierten* Pendants $\mathscr{P}_{**}$, vergleiche Abschnitt 3.6 in Kapitel 3. Die Quantenfeldtheorie mit *modifizierten Fourier Hyperfunktionen* ist die einzige, für die eine vollständige *euklidische Rekonstruktion* gelungen ist, siehe [**NM76b**] und [**Sch97a**], für die man also eine vollständige Äquivalenz der Hierarchie der *Wightman-Funktionen* mit der der euklidischen *Schwinger-Funktionen* hat.

Kürzlich wurde von M. A. Soloviev in [**Sol97a**] eine noch weitergehende Verallgemeinerung von Hyperfunktionen vorgestellt, deren Testfunktionenräume $\mathscr{S}_\alpha^\beta(f)$ür $beta < 1$ aus ganzen Funktionen bestehen. Von diesen konnte er eine für quantenfeldtheoretische Anwendungen hinreichende Lokalisierbarkeit in Kegeln und in [**Sol97b**] ihre Anwendbarkeit in der axiomatischen Quantenfeldtheorie zeigen. Die Frage guter Testfunktionen für die Quantenfeldtheorie ist also ein aktueller Forschungsgegenstand.

5.4. Fouriertransformationen

Wir wollen nun die Ergebnisse der Abschnitte 4.2 und 4.3 topologisch fassen, indem wir die Fouriertransformation auf den asymptotischen, reell analytischen Funktionen und Hyperfunktionen topologisch beschreiben, unter Verwendung der in Definition 5.1.1 und 5.2.1 eingeführten Topologien auf den Räumen $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$. Gleichzeitig werden wir diese Räume dabei in das Gelfand–Schilow-Schema einpassen, beginnend mit $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$:

Nach Satz 4.2.3 ist das Bild von $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ unter der Fouriertransformation gerade der Raum $C^\infty_*(\mathbb{D}^n)$ der exponentiell abfallenden C^∞-Funktionen. Diese wiederum können wir nach Satz 5.3.2 als Menge mit dem Gelfand–Schilow-Raum $\mathscr{S}_1(\mathbb{D}^n)$ identifizieren. Es bietet sich daher an, den abzählbar normierten Raum $\mathscr{S}_1(\mathbb{D}^n)$ als Topologisierung von $C^\infty_*(\mathbb{D}^n)$ zu betrachten und wir finden dann:

SATZ 5.4.1. *Die Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n)$$

induziert einen linearen, topologischen Isomorphismus.

BEWEIS. Wir haben nur noch zu zeigen, daß $\mathcal{F}$ stetig ist, denn wir wissen ja schon, daß sie ein algebraischer Isomorphismus mit bekannter Inverser ist. Wir stellen $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ nach Definition 5.1.1 als induktiven Limes

$$\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n) \cong \varinjlim \overline{\mathcal{O}}^B_{-\infty}(\overline{\overline{U_m}}),$$

dar, wobei wir als spezielles Fundamentalsystem von Umgebungen von $\mathbb{D}^n$ das System $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$U_m = \mathbb{D}^n + i\bigl\{|\operatorname{Im} z| < 1/m\bigr\}$$

wählen (in diesem Fall brauchen wir keine zylindrischen Umgebungen). Wir bezeichnen abkürzend für $p \in \mathbb{N}$ die Norm $\|\cdot\|_{p,\overline{\overline{U_m}}}$ auf $\overline{\mathcal{O}}^B_{-\infty}(\overline{\overline{U_m}})$ mit $\|\cdot\|_{p,m}$. Sei $f \in \mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ mit $f \in \overline{\mathcal{O}}^B_{-\infty}(\overline{\overline{U_m}})$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\widehat{f}$ nach Satz 4.2.3 eine C^∞-Funktion, die mit der Ordnung $1/m$ exponentiell abfällt und wir können wie dort $\widehat{f}$ ausrechnen, indem wir den Integrationsweg Γ im Gebiet U_m geeignet verschieben, um abzuschätzen:

$$\begin{aligned}
|D^\alpha_\xi \widehat{f}(\xi)| &= \left|\int_\Gamma (-iz)^\alpha \mathrm{e}^{-iz\xi} f(z)\mathrm{d}z\right| \\
&\le \|f\|_{-|\alpha|-n-k,m} \left|\int_\Gamma \mathrm{e}^{-iz\xi}(1+|\operatorname{Re} z|)^{-n-k}\mathrm{d}z\right| \\
&\le C\cdot \|f\|_{-|\alpha|-n-k,m}\cdot \mathrm{e}^{-m^{-1}|\xi|},
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ mit geeignetem $C > 0$. Daher gilt für die Norm $\|\cdot\|_{\mathscr{S}_1;m,p}$ auf $\mathscr{S}_{1,A}(\mathbb{R}^n)$ mit $A = m/\mathrm{e}$ aus Satz 5.3.2 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\widehat{f}\|_{\mathscr{S}_1;m,p} &\le C\cdot \|f\|_{-p-n-k,m}\cdot \sup_\xi \mathrm{e}^{-m^{-1}|\xi|}\mathrm{e}^{m^{-1}(1-p^{-1})|\xi|} \\
&\le C\cdot \|f\|_{-p-n-k,m}\cdot \sup_\xi \mathrm{e}^{-(mp)^{-1}|\xi|} \le C\cdot \|f\|_{-p-n-k,m},
\end{aligned}$$

und eine ähnliche Abschätzung gilt auch für jedes $m' \ge m$. Dies zeigt die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ in den Topologien des induktiven Limes $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und des induktiven Limes $\mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n)$ abzählbar normierter Räume. $\square$

Da wir wissen, wie die Fouriertransformation auf den Indizes der Gelfand–Schilow Räume wirkt, können wir damit sofort auch $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ selbst in das Gelfand–Schilow-Schema einordnen.

KOROLLAR 5.4.2. *$\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ ist topologisch isomorph zu $\mathscr{S}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Als zweites wollen wir nun die Fouriertransformation zwischen den asymptotischen Hyperfunktionen $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und dem Raum $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ als topologischen Isomorphismus beschreiben. Dazu müssen wir zunächst eine sinnvolle Topologie auf $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ einführen. Die einfachste Möglichkeit ist, wenn man die Definition 4.1.1 der infra-exponentiellen Funktionen und Satz 5.3.2 in Betracht zieht, die folgende:

DEFINITION 5.4.3. Wir versehen $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ mit der durch das abzählbare Normensystem

$$\|f\|_{C^{\infty *};m,p} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,|\alpha|\leq p} |D_x^\alpha f(x)| \mathrm{e}^{-m^{-1}|x|}$$

für alle p, $m \in \mathbb{N}$, erzeugten Topologie. Wir bezeichnen die Vervollständigung von $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ bezüglich dieser Topologie wiederum mit $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$.

ANMERKUNG 5.3. Mit dieser Topologie ist $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ isomorph zu dem Testfunktionenraum, der zum Beispiel in [**EK90**] mit $\mathscr{P}$ bezeichnet wird. Um Verwechslungen mit unseren analytischen Funktionen auszuschließen, bleiben wir aber bei der Bezeichnung $C^{\infty *}$, die im Hinblick auf die Konvention für infra-exponentielle und exponentiell abfallende analytische Funktionen auch natürlich ist.

Damit können wir Satz 4.3.5 topologisieren. Dies gilt natürlich zunächst nur für die spezielle Randwertdarstellung, durch die wir in Definition 5.2.1 die asymptotischen Hyperfunktionen in n Dimensionen dargestellt haben, also die Orthantenzerlegung. Wie man sehen wird, läßt sich der Beweis aber auf jede beliebige Randwertdarstellung anwenden.

SATZ 5.4.4. *Die Fouriertransformation*

$$\mathcal{F}\colon \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{\sim} C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$$

induziert einen linearen, topologischen Isomorphismus.

BEWEIS. Da die Fouriertransformationen für allgemeines $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ durch die lineare Fortsetzung (4.3) entsteht, reicht es wieder, die Aussage für Randwerte aus einem einzelnen Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i\Gamma_\sigma 0$ mit einem Orthanten Γ_σ zu zeigen. Sei also $f(x) = F(x + i\Gamma_\sigma 0)$ mit $F(x+iy) \in \mathcal{O}_{-\infty}(W)$, wobei W ein infinitesimaler Keil vom Typ $\mathbb{D}^n + i\Gamma_\sigma 0$ ist. Für jedes Kompaktum $L \subset \mathbb{R}^n$ so, daß $K = \mathbb{D}^n + iL$ kompakt in W ist, können wir dann abschätzen:

$$\begin{aligned}|D_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\operatorname{Im} z = y} (-iz)^\alpha \mathrm{e}^{-iz\xi} F(z) \mathrm{d}z \right| \\ &\leq \|F\|_{-|\alpha|-n-l,K} \left| \int_{\operatorname{Im} z = y} \mathrm{e}^{-iz\xi} (1 + |\operatorname{Re} z|)^{-n-l} \mathrm{d}z \right|,\end{aligned}$$

mit $y \in L$ beliebig und alle $l \in \mathbb{N}$. Wählen wir eine spezielle ausschöpfende Folge $\{K_j = \mathbb{D}^n + iL_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ für W so, daß Punkte der Fläche $\{|\operatorname{Im} z| = |y| = 1/j\}$ eines Zylinders in $K_{j\mathbb{C}^n}$ enthalten sind, dann können wir y in obiger Abschätzung klein genug machen um

$$|D_\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)| \leq C \cdot \|F\|_{-|\alpha|-n-l,K_j} \cdot \mathrm{e}^{j^{-1}|\xi|}$$

zu folgern. Damit erhalten wir für alle $j \geq m$

$$\|\widehat{f}\|_{C^{\infty *};m,p} \leq C \cdot \|F\|_{-p-n-l,K_j} \sup_{\xi} \mathrm{e}^{(j^{-1}-m^{-1})|\xi|} \leq C \cdot \|F\|_{-p-n-l,K_j},$$

was die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ bezüglich der Topologie von $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und der oben definierten Topologie von $C^{\infty *}(\mathbb{D}^n)$ zeigt. $\square$

5.5. Nuklearitäten

Wir wollen für die Räume der temperierten und asymptotischen Hyperfunktionen die beliebte Eigenschaft der Nuklearität zeigen. Dazu bemerken wir wie in Abschnitt 5.2 zunächst, daß sich einige Ergebnisse aus Kapitel 1 wenigstens auf zylindrische Mengen in $\mathbb{Q}^n$ übertragen lassen. Insbesondere gelten die Abschätzungen von 1.4.5 für solche Mengen, wenn man überall kompakte Streifen in $\mathbb{Q}$ durch kartesische Produkte kompakter Streifen ersetzt.

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes ist:

THEOREM 5.5.1. *Seien W, K eine offene beziehungsweise kompakte, zylindrische Untermenge von $\mathbb{I}^n$. Dann sind die Räume $\mathcal{O}_{\pm\infty}(S)$ nuklear für $S = W$ beziehungsweise K.*

Den Beweis, den wir nach [**Ito88**], Proposition 2.1.3 führen, unterteilen wir in zwei Lemmata. Doch zunächst führen wir als technisches Hilfsmittel einen weiteren Raum holomorpher Funktionen ein. Für $m \in \mathbb{Z}$ und $U \subset \mathbb{I}^n$ offen und zylindrisch definiere man einen lokalkonvexen Raum

$$\mathcal{O}_{\underline{m}}(U) \overset{\text{def}}{=} \Big\{ f \in \mathcal{O}(U_{\mathbb{C}^n}) \;\Big|\; \|f\|_{m,p,K} < \infty,\ K \subset U \text{ kompakt},\ p = 2, 3, \ldots \Big\},$$

wobei

$$\|f\|_{m,p,K} \overset{\text{def}}{=} \int_{K_{\mathbb{C}^n}} |f(z)| M_p(z) \mathrm{d}\lambda(z)$$

ist, mit

$$M_p(z) \overset{\text{def}}{=} (1 + |\operatorname{Re} z|)^{m(1-p^{-1})}.$$

Wähle ein Fundamentalsystem $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ von Umgebungen der kompakten, zylindrischen Menge K mit $U_{m+1} \Subset U_m \Subset \mathbb{I}^n$ und $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ mit $V_m \Subset V_{m+1} \Subset W$ offen und so, daß $\{\overline{\overline{V_m}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ ausschöpfend ist für die offene Zylindermenge W. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß U_m und V_m aus kartesischen Produkten von Streifen bestehen. Damit stellen wir zunächst $\mathcal{O}_\infty(K)$ und $\mathcal{O}_{-\infty}(W)$ anders dar.

LEMMA 5.5.2. *Es gibt lineare, topologische Isomorphismen*

$$\mathcal{O}_\infty(K) \cong \varinjlim \mathcal{O}_{\underline{-m}}(U_m) \text{ und}$$
$$\mathcal{O}_{-\infty}(W) \cong \varprojlim \mathcal{O}_{\underline{m}}(V_m).$$

BEWEIS. Wir können die Lemmata 1.1.5 und 1.4.6 auf den Fall kartesischer Produkte von Streifen übertragen und haben damit stetige Einbettungen

$$\overline{\mathcal{O}}^B_{s-n-\varepsilon}(\overline{\overline{U_s}}) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\underline{-s}}(U_s) \hookrightarrow \overline{\mathcal{O}}^B_s(\overline{\overline{U_{s+l}}}),$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, s, $l \in \mathbb{N}$ und jedes Paar $U_{s+l} \Subset U_s \Subset \mathbb{I}^n$ wie oben. Daraus sieht man, daß man aus den $\mathcal{O}_{\underline{-s}}(U_s)$ eine zu der definierenden induktiven Folge von $\mathcal{O}_\infty(K)$ äquivalente Folge konstruieren kann. Dies zeigt die Aussage über $\mathcal{O}_\infty(K)$. Die andere folgt genauso. $\square$

LEMMA 5.5.3. *Der Raum $\mathcal{O}_{\underline{m}}(U)$ ist ein nuklearer Raum für jede offene zylindrische Unermenge U von $\mathbb{I}^n$.*

BEWEIS. Seien K und L kartesische Produkte kompakter Streifen in U so, daß $K \subset L^\circ$ ist. Definiere eine Umgebung der Null in dem Raum $\mathcal{O}_{\underline{m}}(U)$ durch

$$\Omega = \big\{ f \in \mathcal{O}_{\underline{m}}(U) \;\big|\; \|f\|_{m,p,K} \leq 1 \big\}.$$

Nach Satz 1.4.5ii) finden wir ein $S_L > 0$ mit

$$\sup_{z \in K_{\mathbb{C}^n}} |f(z) M_p(z)| \leq S_L$$

für alle $f \in \mathcal{O}_{\underline{m}}(U)$. Definiere eine weitere Nullumgebung in $\mathcal{O}_{\underline{m}}(U)$ durch

$$\widetilde{\Omega} = \big\{ f \in \mathcal{O}_{\underline{m}}(U) \;\big|\; \|f\|_{m,p,L} \leq S_L^{-1} \big\}.$$

Wenn wir ein Funktional $\varepsilon_z \in \mathcal{O}'_{\underline{m}}(U)$ für $z \in K_{\mathbb{C}^n}$ durch

$$\varepsilon_z(f) = (f\,, \varepsilon_z) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) M_p(z),$$

für alle $f \in \mathcal{O}_{\underline{m}}(U)$, einführen, dann gilt für alle $f \in \widetilde{\Omega}$:

$$|(f\,, \varepsilon_z)| = |f(z) M_p(z)| \leq S_L \|f\|_{m,p,L} \leq 1.$$

Das heißt nichts anderes, als daß ε_z in der **polaren Menge** $\widetilde{\Omega}^\circ$ von $\widetilde{\Omega}$ liegt. Dann definiert schließlich

$$\int_{\widetilde{\Omega}^\circ} \varphi(a) \mathrm{d}\mu(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{K_{\mathbb{C}^n}} \varphi(\varepsilon_z) \mathrm{d}\lambda(z),$$

für alle $\varphi \in C^0(\widetilde{\Omega}^\circ)$, ein Radonmaß auf $\widetilde{\Omega}^\circ$, für das trivialerweise

$$\|f\|_{K,m,p} \leq \int_{\widetilde{\Omega}^\circ} |(f\,, a)| \mathrm{d}\mu(a)$$

gilt. Damit können wir das Nuklearitätskriterium aus Satz B.6.11 anwenden um die Behauptung herzuleiten. □

BEWEIS VON THEOREM 5.5.1. Aus den Permanenzeigenschaften der Nuklearität, siehe Satz B.6.12iv), und dem Lemma 5.5.2 folgt sofort, daß $\mathcal{O}_\infty(K)$ und $\mathcal{O}_{-\infty}(W)$ nuklear sind. Dann sind nach denselben Eigenschaften und Definition 5.1.1 auch $\mathcal{O}_\infty(W)$ und $\mathcal{O}_{-\infty}(K)$ nuklear. □

Mit Satz B.6.12iii) folgt daraus sofort das

KOROLLAR 5.5.4. *Die Räume $\mathscr{P}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$ und $\mathscr{Q}_{\pm\infty}(\mathbb{D}^n)$ sind nuklear.*

5.6. Ein Ordnungsschema für verallgemeinerte Funktionen

Wir wollen an diesem Punkt eine weniger formale Diskussion unserer Ergebnisse beginnen, um die asymptotischen und temperierten (Hyper-) Funktionen in einen größeren Zusammenhang zu stellen. Wir folgen dabei der Philosophie der Paley–Wiener-Theoreme, vergleiche den Überblick zu Kapitel 4, das heißt wir stellen das Wachstumsverhalten einer verallgemeinerten Funktion der Regularität beziehungsweise Singularität ihrer Fouriertransformierten gegenüber. Diese zwei Qualitäten bestimmen die beiden Achsen eines Diagramms, das wir in Abbildung 5.2 aufgezeichnet haben.

Auf der Ordinate sind von unten nach oben vier Klassen verallgemeinerter Funktionen mit wachsender Singularität aufgetragen, in der ersten Zeile beginnend mit dem speziellen Typ $\mathscr{P}$ reell analytischer Funktionen, die holomorph in Streifen gewisser Breite um die reelle Achse herum sind. Als

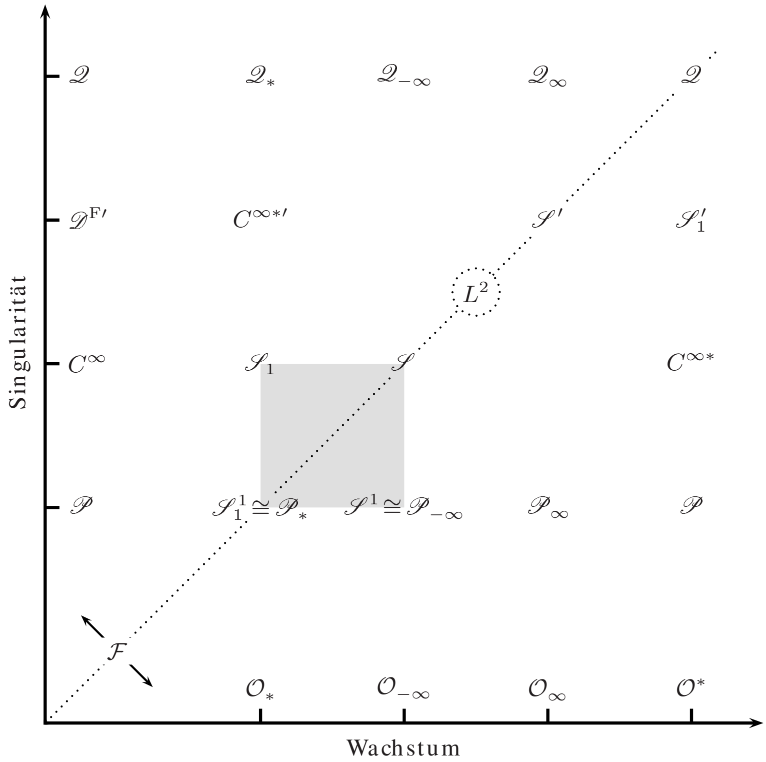

ABBILDUNG 5.2. Ein Diagramm verallgemeinerter Funktionen.

nächstes setzen wir in die zweiten Zeile von unten die unendlich oft differenzierbaren Funktionen gefolgt von ihren Dualräumen, das heißt gewöhnlichen Distributionen, in der dritten Zeile. Dabei sind alle Distributionen die wir betrachten Unterräume von $\mathscr{D}'$ bestehend aus Distributionen *endlicher Ordnung*, angedeutet durch das Symbol $\mathscr{D}^{\mathrm{F}\prime}$. Dies gilt aufgrund der Wachstumsbedingungen im Unendlichen, die sie zusätzlich erfüllen. Wir kommen später noch darauf zurück. In der obersten Zeile finden sich die Fourier Hyperfunktionen als die singulärsten Objekte, die wir betrachtet haben.

Entlang der Abszisse haben wir die vier Typen von Wachstumsbedingungen im Unendlichen, für die wir uns interssieren, aufgetragen. Von links nach rechts stehen die Symbole $\mathcal{O}_*$ für exponentiellen Abfall, $\mathcal{O}_{-\infty}$ für asymptotischen Abfall, $\mathcal{O}_\infty$ für temperiertes, das heißt höchstens polynomiales Wachstum und $\mathcal{O}^*$ für infra-exponentielles Wachstum. Für die Räume von C^∞-Funktionen soll dabei die Wachstumsordnung in sinnvoller Weise für alle Ableitungen „gleichmäßig" gelten, wie wir dies für die Gelfand–Schilow-Räume in Definition 5.3.1 und für $C^{\infty*}$ in Definition 5.4.3 festgelegt haben. Für die Distributionen in der zweitobersten Zeile bestimmen wir die Wachstumsordnung über die Dualität zu ihren jeweiligen Testfunktionenräumen, wie zum Beispiel für das Paar $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$.

Die Verwendung des Symbols $\mathcal{O}$ ist zunächst nur für die oberste und unterste Zeile einleuchtend, da dort die (verallgemeinerten) Funktionen ja tatsächlich darstellbar sind durch holomorphe Funktionen (beziehungsweise ihre Randwerte). Aber die Funktionen beziehungsweise Distributionen in der zweiten beziehungsweise dritten Zeile von unten lassen sich allesamt auf natürliche Weise als Fourier Hyperfunktionen auffassen, indem man beispielsweise definierende Funktionen mit der exponentiellen Cauchy–Hilbert-Transformation wie in Abschnitt 3.5 beziehungsweise in n Dimensionen mit dem getwisteten, exponentiell abfallenden Radon-Kern aus Abschnitt 4.1 berechnet. Dies steht im Einklang mit der Tatsache, daß jede Distribution endlicher Ordnung eine Darstellung als Randwert holomorpher Funktionen besitzt, siehe Bemerkung 5.6.1iv) weiter unten. Die auf diese Weise berechneten definierenden Funktionen sind dann von derselben Wachstumsordnung wie die ursprüngliche Funktion beziehungsweise Distribution.

In der unteren, linken Ecke finden wir den schattierten Teil des Gelfand–Schilow-Schemas aus Abbildung 5.1 wieder. Wir wollen Abbildung 5.2 als Erweiterung des Gelfand–Schilow-Schemas verstehen, die zu den Räumen gewöhnlicher Funktionen in den zwei unteren Reihen auch deren Dualräume als *verallgemeinerte* Funktionen in den zwei oberen enthält. Das Diagramm behält die Symmetrieeigenschaft der Gelfand–Schilow-Räume unter der Fouriertransformation und gewinnt noch eine weitere durch hinzunahme der Dualräume und unsere Hauptaussage lautet:

I *Die Fouriertransformation ist die Spiegelung an der Diagonalen.*
II *Dualität entspricht der Punktspiegelung am Zentrum des Diagramms.*

Zu diesen Aussagen im einzelnen: Bekannt ist, daß alle Räume auf der Diagonalen abgeschlossen sind unter der Fouriertransformation. Für die Gelfand–Schilow-Räume $\mathscr{S}_1^1$ und $\mathscr{S}$ haben wir dies in Abschnitt 5.3 bemerkt, woraus bekanntlich dasselbe auch für die temperierten Distributionen $\mathscr{S}'$ folgt. Der Raum $\mathscr{S}_1^1$ ist nach Satz 5.3.3 topologisch isomorph zum Testfunktionenraum $\mathscr{P}_*$ der Fourier Hyperfunktionen $\mathscr{Q}$, vergleiche [**Kan88**], Theorem 8.6.2, von denen wir aus Abschnitt 4.3 schon wissen, daß sie unter der Fouriertransformation wieder in Fourier Hyperfunktionen übergehen. Nach Satz 5.4.1 ist $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus von $\mathscr{P}_{-\infty}$ nach $\mathscr{S}_1$ und die Isomorphie $\mathscr{S}^1 \cong \mathscr{P}_{-\infty}$ haben wir aus Korollar 5.4.2. Aus dem Dualitätstheorem 5.2.2 folgt damit, daß das Bild von $\mathscr{Q}_\infty$ unter $\mathcal{F}$ topologisch isomorph zum Dualraum $\mathscr{S}_1'$ sein muß und damit ist auch $\mathcal{F}\colon \mathscr{Q}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_1'$ ein topologischer Isomorphismus. Analog korrespondiert $\mathscr{Q}_{-\infty}$ via Fouriertransformation zu $C^{\infty *}$ und ist zugleich der Dualraum von $\mathscr{P}_\infty$. Daher haben wir einen weiteren topologischen Isomorphismus von $\mathscr{P}_\infty$ zum Dualraum $C^{\infty *\prime}$ von $C^{\infty *}$ induziert durch die Fouriertransformation.

Eine kleine Unwahrheit hat sich allerdings in die Gegendiagonale im Diagramm eingeschlichen, vergleiche Anmerkung 8.3, Seite 411, in [**Kan88**]: Zwar können wir den Raum der exponentiell abfallenden Fourier Hyperfunktionen als relative Kohomologiegruppe

$$\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{H}^n_{\mathbb{D}^n}(\mathbb{Q}^n; \mathcal{O}_*)$$

definieren, das heißt effektiv als Quotientenraum analog Definition 5.2.1. Dieser Raum ist dann tatsächlich dual zu $\mathscr{P}(\mathbb{D}^n)$. Aber die Fouriertransformierten dieser Hyperfunktionen sind von etwas anderer Charakteristik als die Funktionen in $\mathscr{P}$, siehe [**Kan88**], Anmerkung 8.2 auf Seite 407. Um $\mathscr{P}$ als Bild unter der Fouriertransformation exponentiell abfallender Hyperfunktionen zu bekommen, definiert Kaneko diese etwas anders durch

$$\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\varepsilon>0} \mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{1+x^2}}\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n),$$

vergleiche [**KT95**], Formel (1.3).

Nun können wir auch die Frage beantworten, warum die Räume in der zweiten Zeile von oben Distributionen *von endlicher Ordnung* sind. Zunächst sind sie alle im Raum $\mathscr{D}'$ der Distributionen auf Testfunktionen mit kompaktem Träger enthalten. Erinnern wir uns, was für diese der Begriff der endlichen Ordnung bedeutet. Die verschiedenen alternativen Charakterisierungen haben wir [**Bre65, Hör83, Rud74**] und [**Tre67**] entnommen.

DEFINITION UND BEMERKUNG 5.6.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Distribution $F \in \mathscr{D}'(\Omega)$ heißt **von der Ordnung** $\leq N$, wenn für alle Kompakta $K \subset \Omega$ ein $C_K > 0$ existiert so, daß

$$|F(\phi)| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K} |D_x^\alpha \phi(x)|$$

gilt für alle Testfunktionen $\phi \in \mathscr{D}(K)$ mit Träger in K. F heißt **von der Ordnung** N, wenn F von der Ordnung $\leq N$ aber nicht von der Ordnung $\leq N-1$ ist. Wir bezeichnen den Raum der Distributionen der Ordnung N mit $\mathscr{D}^{N\prime}(\Omega)$ und nennen

$$\mathscr{D}^{\mathrm{F}\prime}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_N \mathscr{D}^{N\prime}(\Omega)$$

den Raum der **Distributionen endlicher Ordnung**. Jede Distribution ist lokal, das heißt nach Einschränkung auf relativ kompakte Teilmengen von Ω von endlicher Ordnung. Daher sind auch Distributionen mit kompaktem Träger von endlicher Ordnung. Äquivalent dazu, daß $F \in \mathscr{D}^{\mathrm{F}\prime}(\Omega)$ von der Ordnung $\leq N$ ist, sind die folgenden Bedingungen

i) F ist darstellbar als Summe von Ableitungen der Ordnung $\leq N$ von **Radonmaßen** $\mu_i \in (C_c^0(\Omega))'$, wobei C_c^0 den Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in Ω bezeichnet.
ii) F ist darstellbar als Summe von Ableitungen der Ordnung $\leq N+n$ von lokal integrierbaren Funktion $g_i \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.
iii) F ist ist darstellbar als Summe von Ableitungen der Ordnung $\leq N + 2n$ von stetigen Funktionen $h_i \in C^0(\Omega)$.

Für $n = 1$, das heißt $\Omega \subset \mathbb{R}$, gilt zusätzlich

iv) F ist ist darstellbar im Sinne von $\mathscr{D}^{N\prime}$ als Randwert

$$F(x) = G(x + i0) - G(x - i0)$$

einer holomorphen Funktion $G \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \Omega)$, wobei G die Abschätzung

$$|G(z)| \leq C_K |\mathrm{Im}\, z|^{-N-1}, \ \mathrm{Re}\, z \in K,$$

erfüllt für alle Kompakta $K \subset \Omega$ und lokal gleichmäßig in $\mathrm{Im}\, z$.

Für $F \in \mathscr{D}^{N\prime}(\Omega)$ heißt jede stetige Funktion h so, daß

$$F = \sum_{|\alpha| = N+2n} D_x^\alpha h(x)$$

ist, **stetiger Primitiv** von F. Alle Distributionen endlicher Ordnung besitzen stetige Primitive.

Betrachten wir den Distributionenraum $\mathscr{S}_1'$ ganz rechts in der zweiten Zeile von Abbildung 5.2. Wir wissen, daß jedes $F \in \mathscr{S}_1'$ darstellbar ist als Fouriertransformierte einer temperierten Hyperfunktion $g \in \mathscr{Q}_\infty$. Eine solche Hyperfunktion besitzt definierende Funktionen $F_i(z)$, die von der Wachstumsordnung $O(|\mathrm{Re}\, z|^k)$ sind für $|\mathrm{Re}\, z| \to \infty$ und lokal gleichmäßig in $\mathrm{Im}\, z$. Teilt man durch den Faktor z^{k+n+1}, der außerhalb der reellen Achse nicht verschwindet, so lassen sich die definierenden Funktionen von g darstellen als

$$F_i(z) = z^{k+n+1} \cdot H_i(z)$$

mit holomorphen Funktionen $H_i(x+iy)$, die absolut integrabel sind in x und zwar lokal gleichmäßig in y. Berechnet man ihre Fouriertransformierten $\widehat{H_i}$, so erhält man nach Korollar 4.3.6 eine stetige, infra-exponentielle Funktion auf der reellen Achse. Diese läßt sich in natürlicher Weise als Fourier Hyperfunktion auffassen und nach (4.7) ist dann das ursprüngliche f eine Summe von Ableitungen der Ordnung $k+n+1$ der $\widehat{H_i}$. Also haben wir einen stetigen Primitiv für f gefunden und damit ist f eine Distribution endlicher Ordnung. Wir fassen zusammen:

KOROLLAR 5.6.2. *Es gilt* $(C^{\infty *}(\mathbb{D}^n))' \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}_1'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}^{\mathrm{F}\prime}(\mathbb{R}^n)$.

In die Mitte des Diagramms haben wir den Raum L^2 der quadratintegrablen Funktionen gesetzt, was nicht ganz sinnlos ist, da L^2 ein selbstdualer Hilbertraum und nach Plancherels Theorem, siehe zum Beispiel Theorem 9.13 in [**Rud86**], auch abgeschlossen unter der Fouriertransformation ist. L^2 dort einzufügen, ist aber mehr als eine ästhetische Entscheidung. Wir rufen uns folgende Definition in Erinnerung:

DEFINITION 5.6.3 ([**GW64**], Kapitel I, §4). Sei E ein abzählbar normierter, nuklearer Raum und E' sein Dualraum in der starken Topologie. Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ so, daß

$$E \subset H \subset E'$$

gilt und H die Vervollständigung von E bezüglich der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ erzeugten Metrik ist. Dann nennt man (E, H, E') ein **Gelfandsches Raumtripel**.

Betrachten wir nun die vier Gelfand–Schilow-Räume in der linken, unteren Ecke unseres Diagramms. Sie sind — wie alle Räume $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ — nuklear und dicht in L^2. Für $\mathscr{P}_{-\infty}$ haben wir die Nuklearität in Abschnitt 5.5 gezeigt, für $\mathscr{P}_*$ verweisen wir wieder auf Proposition 2.1.3 in [**Ito88**] und für die übrigen auf [**GW64**] selbst. Daß sogar schon $\mathscr{P}_*$ dicht ist in L^2 kann man wie üblich sehen, indem man eine L^2-Funktion f mit geeigneten ganzen, in reeller Richtung exponentiell abfallenden Funktionen „verschmiert," das heißt faltet. Durch die Ergebnisse solcher Faltungen, die exponentiell abfallende, ganze Funktionen sind, läßt sich dann f im L^2-Sinne approximieren. Insgesamt haben wir:

KOROLLAR 5.6.4. *Die Tripel*

$$\begin{gathered}\big(\mathscr{P}_*(\mathbb{D}^n), L^2(\mathbb{R}^n), \mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)\big),\\ \big(\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n), L^2(\mathbb{R}^n), \mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D}^n)\big),\\ \big(\mathscr{S}_1(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}_1'(\mathbb{R}^n)\big) \text{ und}\\ \big(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n), \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\big)\end{gathered}$$

sind Gelfand-Tripel.

Wir erinnern an die Anwendung der Gelfandschen Raumtripel in der Spektralanlyse selbstadjungierter Operatoren, siehe [**GW64**], Kapitel I, §4. Wir betrachten das Gelfand-Tripel $\big(\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n), L^2(\mathbb{R}^n), \mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D}^n)\big)$ als spezielles Beispiel, da die anderen drei schon mehr oder minder „alte Bekannte" sind.

KOROLLAR 5.6.5. *Jeder symmetrische Operator A auf $\mathscr{P}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$, der zu einem selbstadjungierten Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden kann, das heißt dessen Abschluß $\overline{A}$ in der Topologie von L^2 selbstadjungiert ist, besitzt in $\mathscr{Q}_\infty(\mathbb{D}^n)$ ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten.*

Ein **verallgemeinerter Eigenvektor** von A zum **verallgemeinerten Eigenwert** $\lambda \in \mathbb{R}$ in einem beliebigen Gelfand-Tripel (E, H, E') ist dabei ein $T_\lambda \in E'$ mit $T_\lambda(A\phi) = \lambda T_\lambda(\phi)$ für alle $\phi \in E$, so daß also die Eigenwertgleichung $AT_\lambda = \lambda T_\lambda$ im Distributionensinne erfüllt ist. Ein System verallgemeinerter Eigenvektoren heißt **vollständig**, wenn für jedes $\phi \in E$ aus $T_\lambda(\phi) = 0$ für alle λ im Spektrum $\phi = 0$ folgt, das heißt, wenn die *Spektralzerlegung* von ϕ in verallgemeinerte Eigenvektoren *vollständig* ist.

Sätze dieser Art liefern insbesondere die mathematische Rechtfertigung des *Dirac-Formalismus* der Quantemechanik, in der jeder hermiteschen Observable ein vollständiges System von *„Eigenkets"*, das heißt verallgemeinerter Eigenzustände, zugeschrieben wird, vergleiche [**BG89**].

ANMERKUNG 5.4. Es wäre schön gewesen, wenn das Paar $(\mathscr{K}, \mathscr{K}')$ der in 3.5 eingeführten Testfunktionen und schnellfallenden Distributionen die Lücke auf der Gegendiagonalen zu $(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$ in unserem Diagramm schließen würde. Die in Definition 3.5.3 eingeführten Testfunktionen $\mathscr{K}$ passen sich aber nicht genau in unsere Klassifikation ein, wie wir in Abschnitt 3.6 festgestellt haben. Insbesondere korrespondiert $\mathscr{K}'$ nicht zu $\mathscr{K}$ via Fouriertransformation. Vielmehr sind die Fouriertransformierten der Distributionen in $\mathscr{K}'$ keine C^∞-Funktionen sondern sie lassen sich als diejenigen temperierten Distributionen identifizieren, die *im Distributionensinne glatt* am Ursprung sind, siehe [**EF97**]. Dabei heißt eine Distribution $f \in \mathscr{S}'$ **glatt im Distributionensinne** am Punkt x_0, wenn alle ihre distributionalen Ableitungen am Punkt x_0 **im Distributionensinne** existieren, das heißt für alle p existiert ein $\gamma_p \in \mathbb{R}$ so, daß

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big(f^{(p)}(x_0 + \varepsilon x)\,, \phi(x) \Big) = \gamma_p \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^p \phi^{(p)}(x) \mathrm{d}x$$

gilt für alle Testfunktionen $\phi \in \mathscr{S}$.

ANMERKUNG 5.5. Klarerweise läßt sich das Schema aus Abbildung 5.2 in alle Richtungen erweitern beziehungsweise genauer differenzieren. Als ein ausgewähltes Beispiel, und um unsere Ergebnisse noch etwas besser in die Literatur einzubetten, betrachten wir die in [**Seb58, Has61**] und [**PM73**] untersuchten *temperierten Ultra-Hyperfunktionen*, vergleiche Anmerkung 3.1.

Zu den vier schon bekannten Funktionenklassen fügen wir in der Abbildung 5.3, wo das ursprüngliche Schema als umrahmte Fläche angedeutet ist, auf der Ordinate des Diagramms zwei weitere hinzu: Zuunterst Räume ganzer Funktionen, bezeichnet durch das Symbol Ent, und für die wir in unserer Notation auch $\mathcal{O}(\mathbb{Q}^n)$ schreiben könnten. Zuoberst ihre Dualräume, das heißt Räume **ganz analytischer Funktionale**. Auf der Abszisse kommen dementsprechend zwei Wachstumsordnungen dazu: Das Symbol $\mathcal{O}^{-\infty}$ bezeichnet Räume von Funktionen, die von exponentiellem Abfall mit beliebigem Typ sind, das heißt, die schneller fallen als $\mathrm{e}^{-\gamma|x|}$ für alle γ. Dagegen steht $\mathcal{O}^\infty$ für Funktionen von beliebigem **exponentiellem Wachstum**, das heißt solchen die gleich $O(\mathrm{e}^{\gamma|x|})$ sind für ein γ. Wir definieren nun die vier Räume aus [**Seb58**] und [**Has61**], wobei wir die Definition an unsere Schreibweisen anpassen.

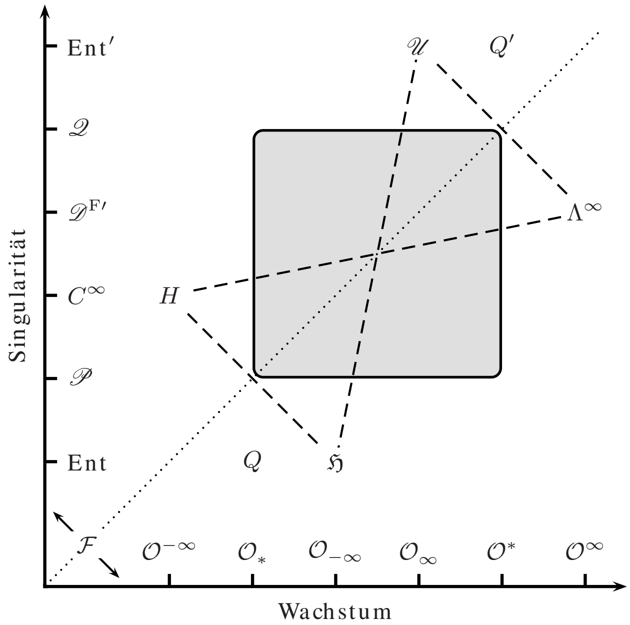

ABBILDUNG 5.3. Eine Erweiterung von Abbildung 5.2.

Zunächst bezeichnen wir mit H den Raum der schneller als exponentiell abfallenden C^∞-Funktionen:

$$H(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Big|\; \forall k,q \in \mathbb{N} \colon \sup_{x,|\sigma|\le q} |\mathrm{e}^{k|x|} D_x^\sigma f(x)| \le \infty \Big\}.$$

Diesen Raum versehen wir mit dem abzählbaren Normensystem

$$\|f\|_{H;k,q} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x,|\sigma|\le q} |\mathrm{e}^{k|x|} D_x^\sigma f(x)|.$$

Es zeigt sich, daß damit H ein nuklearer, vollständiger lokalkonvexer Hausdorffraum ist und daß $\mathscr{D}$ dicht ist in H. Der Dualraum von H ist der Raum der **Distributionen von exponentiellem Wachstum**, bezeichnet mit $\Lambda^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nach Bemerkung 5.6.1 läßt sich dieser Unterraum von $\mathscr{D}^{\mathrm{F}\prime}(\mathbb{R}^n)$ dadurch charakterisieren, daß eine Distribution T genau dann in $\Lambda^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, wenn sie sich darstellen läßt als

$$T = \sum_{|\sigma|\le k} D_x^\sigma \left(\mathrm{e}^{k|x|} f(x) \right)$$

mit einer geeigneten, stetigen Funktion f, die beschränkt ist auf $\mathbb{R}^n$ und für ein $k \in \mathbb{N}$. Der exponentielle Abfall mit beliebigem Typ wird nun ähnlich wie in Satz 4.3.1 unter der Fouriertransformation zu Analytizität in Streifen beliebiger Breite. Das Bild von H unter der Fouriertransformation ist deshalb ein Raum von ganzen Funktionen, und zwar gerade solchen, die von asymptotischem Abfall sind: Die Fouriertransformation

$$\mathcal{F} \colon H(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{H}(\mathbb{C}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_{-\infty}(\mathbb{Q}^n)$$

ist ein topologischer Isomorphismus. Es bleibt noch, den Dualraum $\mathscr{U}(\mathbb{C}^n)$ von $\mathfrak{H}(\mathbb{C}^n)$, den Raum der sogenannten **temperierten Ultra-Hyperfunktionen** zu beschreiben. Man findet, daß sich jedes stetige, lineare Funktional auf

$\mathfrak{H}(\mathbb{C}^n)$ darstellen läßt durch ein Element des Raumes

$$\mathfrak{A}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \varinjlim_{r>0} \overline{\mathcal{O}}_r(\mathbb{Q}^n \setminus S_r),$$

wobei S_r das Gebiet

$$S_r = \mathbb{D}^n + i\big\{|\operatorname{Im} z_i| \leq r,\ i = 1, \ldots, n\big\}$$

ist. Dies ist der Raum von Funktionen, die *außerhalb* genügend großer, zylindrischer Umgebungen von $\mathbb{D}^n$ analytisch und dort von beliebig großer aber endlicher polynomialer Wachstumsordnung, das heißt eben von temperiertem Wachstum sind. Es zeigt sich dann, daß $\mathcal{F} : \mathfrak{A}_\omega \to \Lambda^\infty$ surjektiv ist und daß der Kern Π von $\mathcal{F}$ erzeugt wird durch die Polynome in z. Der Quotient

$$\mathscr{U}(\mathbb{C}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{A}_\omega \,/\, \Pi$$

ist der Dualraum von $\mathfrak{H}$ und via $\mathcal{F}$ Isomorph zu Λ^∞. Die Beschreibung der Ultra-Hyperfunktionen durch diesen Quotienten ist sozusagen eine „ausgeartete" Version der Darstellung der Fourier Hyperunktionen als Quotientenraum in der Orthantenzerlegung, siehe Definition 5.2.1.

In [**PM73**] wurden dem Schema noch zwei weitere Räume hinzugefügt: Die sogenannten **Fourier Ultra-Hyperfunktionen** $Q'(\mathbb{C}^n)$ sind Elemente des Dualraums der ganzen Funktionen mit exponentiellem Abfall $Q(\mathbb{C}^n)$, den wir in unserer Notation mit $\mathcal{O}_*(\mathbb{Q}^n)$ bezeichnen würden.

Teil III

Asymptotische Entwicklungen

KAPITEL 6

Asymptotische Theorie in einer Dimension

Überblick

Wir beginnen nun mit der Vorstellung der Anwendung der asymptotischen Hyperfunktionen, die von Anfang an intendiert war: Den asymptotischen Entwicklungen. Dies ist zum einen eine Verallgemeinerung der von R. Estrada für die Distributionenklasse $\mathscr{K}'$ vorgestellten *Moment-asymptotischen Entwicklungen*, siehe wieder [**EK90, DE94, DEK96, EGBV98**], auf asymptotische Fourier Hyperfunktionen. Zum anderen stehen im Rahmen der Hyperfunktionentheorie nun auch zusätzlich die Methoden der komplexen Analysis zur Verfügung, so daß es uns insbesondere möglich sein wird, die Moment-asymptotische Entwicklung einer asymptotischen Hyperfunktion mit der *asymptotischen Entwicklung* einer definierenden Funktion für $z \to \infty$ als holomorphe Funktion in gewissen Gebieten in $\mathbb{C}$ zu identifizieren. Diese komplexanalytischen Methoden, bringen damit die asymptotischen Entwicklungen verallgemeinerter Funktionen aus der Domäne der Distributionentheorie dorthin zurück, wo sie ursprünglich herkommen: in die komplexe Ebene, vergleiche [**Olv97**].

In Abschnitt 6.1 definieren wir zunächst die für die Moment-asymptotische Entwicklung asymptotischer Hyperfunktionen wesentlichen Begriffe und zeigen, in welchem Sinne sie eine asymptotische Entwicklung einer Hyperfunktion darstellt. Außerdem stellen wir den Zusammenhang zur Moment-asymptotischen Entwicklung in der Distributionentheorie her, indem wir die Darstellung der Entwicklung in *Parameterform* angeben.

Sodann untersuchen wir im zweiten Abschnitt den Zusammenhang zu asymptotischen Entwicklungen holomorpher Funktionen im einfachsten Fall von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger. Es zeigt sich, daß in diesem Fall die Moment-asymptotische Entwicklung genau der *Laurent-Entwicklung* der standard definierenden Funktion entspricht. Als einfache Anwendung geben wir ein Kriterium an, wann eine Folge von Momenten zu einer Hyperfunktion mit kompaktem Träger in einem Intervall gehört. Weiterhin können wir bei dieser Gelgenheit unsere Arbeit in den Kontext neuerer Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten Hyperfunktionentheorie einordnen. Als Beispiel dienen uns hier Ergebnisse, die von D. Kim auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1998 in Berlin vorgestellt wurden, siehe [**YCK98**]. Es geht hier um ein weiteres Kriterium für die Moment-Folgen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger, das aber wesentlich schärfer ist als unser einfaches aus Satz 6.2.5. Dieses Ergebnis wird durch eine wesentlich andere Herangehensweise an Fourier Hyperfunktionen erzielt, die wir so nebenbei vorstellen können.

Im dritten Abschnitt zeigen wir den Zusammenhang zwischen der Moment-Asymptotik einer asymptotischen Hyperfunktion, die eine Entwicklung für große Argumente ist, zu der asymptotischen Entwicklung ihrer Fouriertransformierten um den Nullpunkt, die durch die *Taylorreihe* gegeben ist. Dieses Ergebnis benutzen wir, um die *Vollständigkeit* des *Moment-asymptotischen Schemas*, das heißt die Lösbarkeit des *Momentproblems* im Rahmen der asymptotischen Hyperfunktionen zu zeigen.

In Abschnitt 6.4 wollen wir sehen, wie sich auch für allgemeine asymptotische Hyperfunktionen die Moment-Asymptotik mit der Asymptotik definierender Funktionen verknüpfen läßt. Der wesentliche Punkt dabei ist, daß man es hier mit *zwei* asymptotischen Entwicklungen in den beiden Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ zu tun hat. Über die — in gewissem Maße willkürliche — Aufteilung einer Hyperfunktion in *oberen* und *unteren* Anteil führt uns dies zu der Verfeinerung der Begriffe aus Abschnitt 6.1, die wir *spektrale asymptotische Entwicklung* nennen.

Abschnitt 6.5 ist einigen wenigen Beispielen gewidmet, die der Motivation asymptotischer Entwicklungen in der angewandten Hyperfunktionentheorie dienen sollen. Neben der asymptotischen Berechnung der Hyperfunktionenlösung einer *irregulär-singulären* Differentialgleichung stellen wir die aus der statistischen Mechanik bekannte *Sommerfeld-Entwicklung* als Beispiel der Entwicklung einer analytischen Funktion im Distributionensinne vor.

6.1. Moment-asymptotische Entwicklungen in $\mathscr{Q}_{-\infty}$

Wir wollen die *Moment-asymptotische Entwicklung* asymptotischer Hyperfunktionen definieren. Diese wurde von R. Estrada und R. P. Kanwal für die Klasse $\mathscr{K}'(\mathbb{R})$ schnellfallender Distributionen, die wir in Abschnitt 3.5 betrachtet haben, in [**EK90**] vorgestellt. Dazu führen wir zunächst den Begriff der *Momente* einer asymptotischen Hyperfunktion ein.

DEFINITION 6.1.1. Für eine asymptotische Hyperfunktion f definieren wir für $n = 0, 1, \dots$ durch

$$\mu^n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{D}} x^n \cdot f(x)\mathrm{d}x$$

ihr **n-tes Moment**. Wir schreiben μ^n, falls keine Verwechslungsgefahr besteht. Die Folge $\{\mu^n(f)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die **Moment-Folge** von f. Setze

$$\mathscr{Q}_{[N]}(\mathbb{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{ f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}) \;\Big|\; \mu^n(f) = 0,\ n = 0, \dots, N-1 \Big\}.$$

Diesen Raum nennen wir den **Restraum der Ordnung** N.

Die asymptotische Entwicklung bezüglich dieser Momente ist dann eine Entwicklung in Ableitungen der Deltafunktion. Vom Standpunkt der Hyperfunktionen aus ist dies nichts anderes als eine asymptotische Potenzreihenentwicklung in Potenzen von z^{-1}, das heißt eine Art — nicht notwendig konvergente — Laurentreihe, wie wir weiter unten noch sehen werden. Zunächst betrachten wir die asymptotischen Entwicklung aber rein Hyperfunktionentheoretisch.

THEOREM 6.1.2. *Die* ***Moment-asymptotische Entwicklung***

$$f(x) = S_f^N(x) \mod \mathscr{Q}_{[N+1]}(\mathbb{D}),$$

mit der ***Summe der Ordnung*** N

$$S_f^N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!} \mu^n(f) \delta^{(n)}(x),$$

gilt für jede asymptotische Hyperfunktion f. Das heißt, der ***Rest N-ter Ordnung*** *ist im Restraum der Ordnung $N+1$:*

$$R_f^N(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - S_f^N(x) \in \mathscr{Q}_{[N+1]}(\mathbb{D}),$$

für jede ganze Zahl $N \geq 0$.

BEWEIS. Die Summe N-ter Ordnung S_f^N ist eine Hyperfunktion mit kompaktem Träger in $\{0\}$. Da die von der exponentiellen Cauchy–Hilbert-Transformation erzeugte Abbildung $\mathscr{B}_*(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ eine stetige Einbettung ist, vergleiche Abschnitt 3.4, können wir S_f^N als asymptotische Hyperfunktion auffassen und die Differenz $R_f^N = f - S_f^N$ ist wieder asymptotisch. Damit folgt $R_f^N \in \mathscr{Q}_{[N+1]}(\mathbb{D})$ unmittelbar aus der Definition des Restes. □

In der Distributionentheorie ist es üblich und natürlich, asymptotische Entwicklungen über die Dualität zu Testfunktionen und in *parametrischer Form* zu betrachten, das heißt im Argument von f einen Parameter λ einzuführen, den man gegen Unendlich streben läßt. Wir stellen nun diesen Zusammenhang wieder her. Wir beginnnen mit einem elementaren Lemma, das dasselbe leistet wie Lemma 1 in [**EK90**].

LEMMA 6.1.3. *Für jede stetige Halbnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ und jede Funktion $\phi \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ mit $\phi^{(n)}(0) = 0$ für $n = 0, \ldots, N$ gilt*

$$\|\phi(z/\lambda)\| = O(|\lambda|^{-N-1}),$$

für $|\lambda| \to \infty$.

BEWEIS. Ähnlich wie im Beweis von Satz 5.4.1 stellen wir $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ als induktiven Limes $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D}) \cong \varinjlim \overline{\mathcal{O}}_m^B(\overline{\overline{U_m}})$, $m \in \mathbb{N}$, dar, wobei wir die Umgebungen U_m wieder als Streifen $U_m = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < 1/m\}$ wählen. Wir betrachten $\overline{\mathcal{O}}_m^B(\overline{\overline{U_m}})$ aber nicht als Banachraum mit der üblichen Norm $\overline{\|\cdot\|}_{m,\overline{\overline{U_m}}}$, sondern bemerken, daß seine Topologie auch von dem Halbnormensystem

$$\|\phi(z)\|_{m,R} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{|\phi(z)(1+|\operatorname{Re} z|^{-m})| \;\middle|\; z \in \overline{U_m},\ |\operatorname{Re} z| \leq R\right\},$$

für $R > 0$ erzeugt wird. Sei nun $\phi \in \overline{\mathcal{O}}_m^B(\overline{\overline{U_m}})$ und gelte $\phi^{(n)}(0) = 0$ für $n = 0, \ldots, N$. Dann gibt es eine Konstante $K > 0$ für die

$$|\phi(z)| \leq K|\operatorname{Re} z|^{N+1},\ z \in U_m,\ |\operatorname{Re} z| \leq 1,$$

gilt. Für $\lambda > R$ bedeutet dies $\|\phi(z/\lambda)\|_{m,R} \leq K/\lambda^{N+1}$, das heißt wir haben

$$\|\phi(z/\lambda)\|_{m,R} = O(|\lambda^{-N-1}|)$$

für alle R. Da die Topologie von $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ erzeugt wird von allen stetigen Halbnormen, deren Einschränkung auf jedes $\overline{\mathcal{O}}_m^B(\overline{\overline{U_m}})$ dort eine stetige Halbnorm ist, folgt die Behauptung. □

Dies stellt die Grundlage für jeden Beweis der Parameterform Moment-asymptotischer Entwicklungen dar, wie die folgende allgemeine Argumentation zeigt.

THEOREM 6.1.4. *Für jedes $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ gilt die Moment-asymptotische Entwicklung in* ***Parameterform***

$$f(\lambda x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu^n(f) \delta^{(n)}(x)}{n! \lambda^{n+1}},$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \to \infty$. *Diese Formel gilt im dualen Sinne auf* $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$, *das heißt für alle* $\phi \in \mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ *gilt*

$$\langle f(\lambda x), \phi(x)\rangle = \sum_{n=0}^{N} \frac{\mu^n(f)\phi^{(n)}(0)}{n!\lambda^{n+1}} + O\left(|\lambda|^{-N-2}\right),$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \to \infty$.

BEWEIS. Seien f und ϕ wie oben. Dann gilt zunächst ganz allgemein

$$\langle f(\lambda x), \phi(x)\rangle = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\langle f(x), \phi(\lambda^{-1}x)\right\rangle.$$

Wir schreiben die Taylorentwicklung von $\phi(\lambda^{-1}x)$ im Argument x um den Punkt 0 mit Restglied in der Form

$$\phi(\lambda^{-1}x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!\lambda^n} \cdot x^n + T_N(\lambda; x).$$

Damit ist wegen $R_f^N \in \mathscr{Q}_{[N+1]}(\mathbb{D})$ offensichtlich

$$\begin{aligned}\langle f(\lambda x), \phi(x)\rangle &= \left\langle S_f^N(\lambda x) + R_f^N(\lambda x), \phi(x)\right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\mu^n(f)\phi^{(n)}(0)}{n!\lambda^{n+1}} + \lambda^{-1}\left\langle R_f^N(x), T_N(\lambda; x)\right\rangle.\end{aligned}$$

Nun ist $T_N(\lambda; x)$ ein Element von $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ und es gilt $D_x^n T_N(\lambda; 0) = 0$ für $n = 0, \ldots N$. Damit folgt die Aussage aus obigem Lemma, der Definition von T_N und weil R_f^N ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathscr{P}_\infty(\mathbb{D})$ darstellt. □

ANMERKUNG 6.1. Das Argument von Lemma 6.1.3 läßt sich zwanglos auch auf die in Abschnitt 3.6 eingeführten modifizierten temperierten analytischen Funktionen $\widetilde{\mathscr{P}}_\infty(\mathbb{D})$ übertragen. Damit bekommen wir sofort das

KOROLLAR 6.1.5. *Die Moment-asymptotische Entwicklung in Parameterform aus Theorem 6.1.4 gilt ebenfalls für die modifizierten asymptotischen Hyperfunktionen* $\widetilde{\mathscr{Q}}_{-\infty}(\mathbb{D})$.

Da nach Korollar 3.6.3 der Distributionenraum $\mathscr{K}'(\mathbb{R})$ stetig in $\widetilde{\mathscr{Q}}_{-\infty}(\mathbb{D})$ eingebettet ist, finden wir schließlich, daß die Moment-asymptotische Entwicklung in $\widetilde{\mathscr{Q}}_{-\infty}(\mathbb{D})$ eine Erweiterung derer in $\mathscr{K}'(\mathbb{R})$ darstellt. Unsere Theorie umfaßt somit die in [**EK90**] vorgestellten Methoden für Distributionen als Spezialfall.

6.2. Hyperfunktionen mit kompaktem Träger

Vergleichen wir nun den Begriff der Moment-asymptotischen Entwicklung verallgemeinerter Funktionen mit dem üblichen Begriff asymptotischer Entwicklungen holomorpher Funktionen, siehe [**Olv97**], Kapitel 1, §7. Sei F eine Funktion der komplexen Variable z und $\sum a_i z^{-i}$ eine formale Potenzreihe. Bezeichne mit R^N die Differenz zwischen F und der N-ten Partialsumme dieser Reihe, das heißt

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{z^{N-1}} + R^N(z).$$

Angenommen es gilt für jedes N die Abschätzung

$$R^N(z) = O(z^{-N})$$

für $z \to \infty$ in einem gewissen, unbeschränkten Gebiet S in $\mathbb{C}$, das üblicherweise als abgeschlossener ringförmiger Sektor mit dem Ursprung als Vertex gewählt wird, vergleiche Abschnitt 3.6. Dann sagt man, die — möglicherweise divergente — Reihe $\sum a_i z^{-i}$ sei eine **asymptotische Entwicklung** von F in S und benutzt die Schreibweise

$$F(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \quad (z \to \infty \text{ in } S),$$

die 1886 von Poincaré eingeführt wurde. Asymptotische Entwicklungen lassen sich wie folgt charakterisieren:

SATZ 6.2.1 ([**Olv97**], Kapitel 1, Theorem 7.1). *Dafür, daß eine Funktion $F(z)$, die holomorph ist in einem Gebiet $S \subset \mathbb{C}$, eine asymptotische Entwicklung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$z^n \left(F(z) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{z^i} \right) \longrightarrow a_n \tag{6.1}$$

gilt, wenn $z \to \infty$ geht in S. Insbesondere ist die asymptotische Entwicklung von F eindeutig bestimmt.

Betrachten wir nun eine Hyperfunktion $f \in \mathscr{B}_*(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$. Ihre standard definierende Funktion $\widetilde{\mathbf{F}}_f$ ist nach Definition holomorph in $\mathbb{C} \setminus [-R, R]$ und hat die schöne Eigenschaft, im Unendlichen zu verschwinden:

SATZ 6.2.2 ([**Mor93**], Theorem 2.1.9). *Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und bezeichne mit $\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K)$ den Raum von Funktionen $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus K)$, die **im Unendlichen verschwinden**, das heißt für die $F(z) = o(1)$ gilt für $z \to \infty$. Die von der gewöhnlichen Cauchy–Hilbert-Transformation erzeugte Abbildung*

$$\mathbf{CH} : \mathscr{B}[K] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus K), \; f(x) \longmapsto \widetilde{\mathbf{F}}_f(z),$$

die jeder Hyperfunktion mit Träger in K ihre standard definierende Funktion zuordnet, ist ein linearer, topologischer Isomorphismus.

Dies sieht man sehr leicht aus der Definition 3.4.2 der standard Definierenden Funktion. Eine ähnliche aber schwächere Aussage dieses Typs haben wir schon in Satz 3.4.4 kennengelernt.

Unsere standard definierende Funktion $\widetilde{\mathbf{F}}_f \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus [-R, R])$ wird nun in dem Ringgebiet $A_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ dargestellt durch die konvergente Laurentreihe

$$\widetilde{\mathbf{F}}_f(z) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{b_s}{z^s}$$

mit den Laurentkoeffizienten

$$b_s = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=\rho} \widetilde{\mathbf{F}}_f(w) w^{s-1} \mathrm{d}w,$$

wobei das Integral über jeden Kreis mit Radius $\rho > R$ geführt werden kann. Da nun $\widetilde{\mathbf{F}}_f(w)$ für $w \to \infty$ in A_R verschwindet sehen wir sofort, daß b_s für $s < 1$ verschwindet. Aus der Definition der Momente $\mu^n(f)$ durch Integrale von $x^n f$ und der Definition 3.4.1 von Integralen einer Hyperfunktion durch Konturintegrale ersehen wir weiter den Zusammenhang zwischen den Laurentkoeffizienten von $\widetilde{\mathbf{F}}_f$ und den Momenten. Insgesamt gilt

$$b_s = \begin{cases} \frac{-1}{2\pi i} \mu^{s-1}(f) & \text{für } s > 0, \\ 0 & \text{für } s \leq 0. \end{cases}$$

Nun gilt für konvergente Potenzreihen eine asymptotische Abschätzung des Restgliedes:

SATZ 6.2.3 ([**Olv97**], Kapitel 1, Theorem 3.1). *Sei $\sum_{s=n}^{\infty} b_s z^{-s}$ eine in A_R konvergente Potenzreihe. Dann gilt*

$$\sum_{s=n}^{\infty} \frac{b_s}{z^s} = O(z^{-n})$$

für $z \to \infty$ in $\overline{A_\rho} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \rho\}$ für jedes $\rho > R$.

Dies zeigt nach obiger Definition der asymptotischen Entwicklungen, daß

$$\widetilde{\mathbf{F}}_f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{\mu^n(f)}{z^{n+1}} \quad (z \to \infty \text{ in } A_\rho)$$

die eindeutig bestimmte asymptotische Entwicklung von $\widetilde{\mathbf{F}}_f$ in jedem A_ρ, $\rho > R$ ist. In der Tat ist, wenn man die standard definierende Funktion der Ableitungen der δ-Funktion,

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{\delta^{(n)}}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}, \tag{6.2}$$

in die Defintion der N-ten Partialsumme S_f^N der Moment-asymptotischen Entwicklung einsetzt, diese gerade die N-te Partialsumme der asymptotischen Entwicklung von $\widetilde{\mathbf{F}}_f$. Damit können wir auch eine explizite Form des Restes R_f^N der Moment-asymptotischen Entwicklung als Hyperfunktion berechnen. Sei wieder $f = [F(z)] \in \mathscr{B}[[-R, R]]$ mit irgendeiner definierenden Funktion $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus [-R, R])$. Es gilt wegen der Linearität der Definition 3.4.2 der standard definierenden Funktion:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{F}}_{R^N}(z) &= \widetilde{\mathbf{F}}_f(z) - \widetilde{\mathbf{F}}_{S^N}(z)\\ &= \frac{-1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} F(w) \cdot \frac{1}{z} \left(\frac{1}{wz^{-1} - 1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{w^n}{z^n} \right) \mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Setzen wir die N-te Partialsumme

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \frac{1 - (w/z)^{N+1}}{1 - (w/z)}$$

der geometrischen Reihe ein, so erhalten wir

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{R^N}(z) = \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z^{N+1}} \oint_{|z|=\rho} \frac{F(w) w^{N+1}}{w - z} \mathrm{d}w. \tag{6.3}$$

In dieser Darstellung der Funktion $R_f^N(z)$ sieht man sofort, daß sie von der Ordnung $O(|z|^{-N-2})$ für $|z| \to \infty$ in A_ρ ist. Damit hat der Rest als Hyperfunktion die Gestalt

$$R_f^N(x) = \frac{1}{x^{N+1}} \circ \{x^{N+1} f(x)\} = \left[\frac{1}{z^{N+1}} \cdot \widetilde{\mathbf{F}}_{x^{N+1}f}(z) \right], \tag{6.4}$$

wobei $\circ$ das in Definition 3.4.5 eingeführte formale Produkt meint. Diese explizite Form ist zugleich die standard definierende Funktion von R_f^N. Dies paßt auch mit Satz 6.2.2 zusammen, denn wie wir oben gesehen haben, ist $\widetilde{\mathbf{F}}_{x^{N+1}f} \in \mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$ durch eine bei unendlich konvergente Potenzreihe darstellbar, deren konstanter Term verschwindet. Nach Satz 6.2.3 gilt also $\widetilde{\mathbf{F}}_{x^{N+1}f} = O(|z|^{-1})$, für $z \to \infty$ in $\overline{A_\rho}$.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:

SATZ 6.2.4. *Die Moment-asymptotische Entwicklung einer Hyperfunktion f mit kompaktem Träger in $[-R, R]$ liefert eine asypmtotische Entwicklung ihrer standard definierenden Funktion in $\overline{A_\rho}$, $\rho > R$, die nichts anderes ist, als die in diesem Gebiet konvergente Laurentreihe von $\widetilde{\mathbf{F}}_f$. Die Koeffizienten dieser Entwicklung können gemäß* (6.1) *berechnet werden und stehen über die Beziehung $\mu^n(f) = -2\pi i a_{n+1}$ mit den Momenten in Verbindung. Der Rest R_f^N der Ordnung N hat die Gestalt* (6.4).

Durch die Darstellung von Hyperfunktionen durch holomorphe Funktionen ist es nun zum Beispiel möglich, die asymptotischen Entwicklungen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger auf einfachste Weise zu charakterisieren.

SATZ 6.2.5. *die Moment-Folge $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ von $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ genügen der Abschätzung*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mu^n(f)|} \leq R, \tag{6.5}$$

für $R > 0$, falls $f \in \mathscr{B}[[-R, R]]$ ist.

BEWEIS. Wie wir gesehen haben, konvergiert die Laurentreihe von $\widetilde{\mathbf{F}}_f$ für $|z| > R$, falls $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$ ist. Die Abschätzung (6.5) ist dann nichts anderes als die Cauchy–Hadamardsche Formel für diese Reihe, siehe [**Rem89**], Seite 87. □

Dieses Ergebnis bedeutet natürlich nicht, daß zu einer asymptotischen Entwicklung mit Momenten, die die obige Abschätzung erfüllen, *nur* Hyperfunktionen mit Träger in $[-R, R]$ gehören würden. Tatsächlich gibt es im allgemeinen viele Hyperfunktionen mit einer vorgegebenen Moment-Asymptotik. Wir werden gleich noch eine schärfere Charakterisierung der Momente von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger angeben, für die insbesondere auch der Umkehrschluß gilt. Dies ist hier nicht der Fall, da die Laurentreihe mit Koeffizienten, die (6.5) erfüllen im allgemeinen nur in A_R konvergiert, nicht aber in $\mathbb{C} \setminus [-R, R]$ wie es für die definierende Funktion einer Hyperfunktion mit Träger in diesem Intervall notwendig wäre. Dies zeigt auch folgendes einfache Gegenbeispiel, das wir [**EK87**] entnehmen.

BEISPIEL 6.1. Es gibt keine Hyperfunktion mit kompaktem Träger, die die Momente $\mu^{2n} = 0$ und $\mu^{2n+1} = (-1)^n$ besitzt, denn in diesem Fall konvergiert die Reihe

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{z^{n+1}} = \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z^2 + 1}$$

gegen eine Funktion mit einfachen Polen in $\pm i$, die keine standard definierende Funktion irgendeiner Hyperfunktion mit kompaktem Träger sein kann.

Man kann in diesem Beispiel die asymptotische Reihe höchstens als analytisches Funktional in $\mathcal{O}'(\overline{D_1(0)})$ auffassen. Allgemein gilt:

BEMERKUNG 6.2.6. Eine Moment-asymptotische Reihe mit Koeffizienten $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, die (6.5) für ein $R > 0$ erfüllen, konvergiert in $\mathcal{O}'(\overline{D_R(0)})$.

Die Beziehung zwischen der Moment-Asymptotik von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger und den asymptotischen Entwicklungen holomorpher Funktionen ist damit geklärt. Gleiches ist für allgemeine asymptotische Hyperfunktionen nicht ohne weiteres möglich, denn der Definitonsbereich $W \setminus \mathbb{D}$, $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{D})$, einer asymptotischen definierenden Funktion $F \in \mathcal{O}_{-\infty}(W \setminus \mathbb{D})$

zerfällt in die zwei Komponenten W_+ und W_- in der oberen und unteren Halbebene, siehe Abschnitt 3.1. Der obere F_+ und der untere Teil F_- werden nun im allgemeinen verschiedene asymptotische Entwicklungen besitzen! Wir werden daher nicht mit dem einzigen Satz von Momenten $\{\mu^n\}$ auskommen, wenn wir die Moment-Asymptotik als Asymptotik definierender Funktionen verstehen wollen. Wir kommen in Abschnitt 6.4 darauf zurück.

Kürzlich haben D. Kim *et al.* ein Ergebnis bewiesen, daß im Gegensatz zur Cauchy–Hadamard-Formel eine *scharfe* Charakterisierung der Moment-Folgen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger darstellt und das wir nun vorstellen wollen:

THEOREM 6.2.7 ([**YCK98**], Theorem 3.1). *Genau dann ist eine Folge $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Moment-Folge einer Hyperfunktion $f \in \mathscr{B}_*(\mathbb{R})$ mit Träger im Intervall $[-R, R]$, falls für jedes $S > R$ und $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ existiert so, daß die μ^n die Abschätzung*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \frac{1}{2S} \left(-\frac{\pi i k}{S}\right)^n\right| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon|k|}$$

erfüllen für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Um dieses Ergebnis zu erzielen, benutzen die Autoren insbesondere die Tatsache, daß die Fouriertransformation von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger analytisch und infra-exponentiell ist, also ein Paley–Wiener Theorem, siehe [**Kan88**], Theorem 8.1.1 und vergleiche Kapitel 4. Sie verwenden aber einen von unserem wesentlich verschiedenen Zugang zu Fourier Hyperfunktionen, den wir hier kurz vorstellen wollen.

ANMERKUNG 6.2. Wir beschränken uns in der Diskussion der Einfachheit halber auf eine Dimension, obwohl die unten zitierten Ergebnisse auch in höheren Dimensionen gelten. Wir haben bisher Hyperfunktionen stets als *zweiseitige* Randwerte *holomorpher* Funktionen, das heißt Lösungen der **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\overline{\partial} F(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(x+iy)}{\partial x} - \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial F(x+iy)}{\partial y}\right) = 0$$

in der oberen und unteren Halbene $\mathbb{R} + i\mathbb{R}_\pm = \{x + iy \mid y \gtrless 0\}$ aufgefaßt. Von H. Komatsu wurde in [**Kom89**] zuerst die Möglichkeit gezeigt, die Theorie der gewöhnlichen Hyperfunktionen auf den Randwerten von Lösungen einer anderen, elliptischen Differentialgleichung aufzubauen. Sie sind dort *einseitige* Randwerte von Lösungen der **Poisson-Gleichung**

$$\Delta_x F(x,t) + \partial_t^2 F(x,t) = 0$$

das heißt von **harmonischen** Funktionen im Halbraum $\{(x,t) \mid t > 0\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Dies geht zurück auf die bekannte Darstellungsmöglichkeit von Distributionen als harmonische Randwerte, siehe [**Bre65**]. In diesem Fall übernimmt der **Poisson-Kern**

$$P_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$$

die Rolle des Cauchy–Hilbert-Kerns $(2\pi i(z-x))^{-1}$ für die Berechnung definierender Funktionen für Hyperfunktionen $f \in \mathscr{B}$. Komatsu hat gezeigt, daß die so definierte Hyperfunktionentheorie mit Satos ursprünglicher übereinstimmt. Für eine Verallgemeinerung auf Fourier Hyperfunktionen würde es reichen, an die Randwerte die Forderung des infra-exponentiellen Wachstums in x, lokal gleichmäßig in t zu stellen.

In [**KCK93**] haben nun D. Kim *et al.* eine weitere Möglichkeit der Darstellung von Fourier Hyperfunktionen angegeben. Sie benutzen einseitige Randwerte der **Wärmeleitungsgleichung**

$$\Delta_x F(x,t) - \partial_t F(x,t) = 0$$

in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ und der Kern, der die definierenden Funktionen liefert ist hier der **Wärmekern**

$$E_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/(4t)}.$$

Über diesen Kern, insbesondere seine Taylorentwicklung und sein Verhalten unter der Fouriertransformation ist nun etliches bekannt, siehe [**Wid75**], was im Beweis von Theorem 6.2.7 nützlich wird.

Wir sehen also, daß der Zugang zu Hyperfunktionen über Randwerte holomorpher Funktionen keineswegs der einzig mögliche ist. Es wäre reizvoll, die Theorie der verallgemeinerten Funktionen als Theorie der Randwerte von Lösungen „geeigneter" Differentialgleichungen einer vereinheitlichenden Betrachtung zu unterziehen.

6.3. Asymptotik und Fouriertransformation

Die Moment-asymptotische Entwicklung einer asymptotischen Hyperfunktion im Unendlichen hängt eng zusammen mit der Taylorentwicklung ihrer Fouriertransformierten um den Nullpunkt. Wir drücken das so aus:

SATZ 6.3.1. *Für $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ erfüllt ihre Fouriertransformierte $\widehat{f}$ die asymptotische Entwicklung*

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-i\xi)^n}{n!} \mu^n(f) \mod \widehat{\mathscr{Q}}_{[N+1]}(\mathbb{D})$$

um den Ursprung, das heißt für $|x| \to 0$. Hierbei ist

$$\widehat{\mathscr{Q}}_{[N+1]}(\mathbb{D}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ g \in C^{\infty *}(\mathbb{D}) \;\middle|\; g^{(n)}(0) = 0,\ n = 0, \dots, N \right\}$$

das Bild des Restraums der Ordnung $N+1$ unter der Fouriertransformation.

BEWEIS. Nach Satz 4.3.5 können wir jede Ableitung von $\widehat{f}$ an der Stelle 0 explizit ausrechnen

$$\begin{aligned} i^k \widehat{f}^{(k)}(0) &= \left(i^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\xi^k} \int_{\mathbb{D}} \mathrm{e}^{-ix\xi} f(x) \mathrm{d}x \right) \Bigg|_{\xi=0} \\ &= i^k \int_{\mathbb{D}} (-ix)^k f(x) \mathrm{d}x \\ &= \mu^k(f). \end{aligned}$$

Das heißt die angegebene asymptotische Entwicklung ist nichts anderes als die Taylorentwicklung der C^∞-Funktion $\widehat{f}$ um 0 und $\widehat{R}_N^{(n)}(0) = 0$ für $n \leq N$ gilt nach Definition des Restraums $\mathscr{Q}_{[N+1]}(\mathbb{D})$. $\square$

Alternativ hätten wir auch die Fouriertransformation der Moment-asymptotischen Entwicklung direkt ausrechnen können mit den bekannten Formeln $\widehat{\delta}(\xi) = 1$ und $\mathscr{F}(D_x^n f)(\xi) = (i\xi)^n \widehat{f}(\xi)$.

Die Moment-asymptotische Entwicklung einer asymptotischen Hyperfunktion ist nach Definition eindeutig bestimmt, so, wie auch analytische Funktionen nur eine einzige asymptotische Entwicklung besitzen. Umgekehrt gibt es aber im allgemeinen zu einer formalen Potenzreihe $\sum a_i z^{-i}$ mehrere Funktionen, deren asymptotische Entwicklung sie ist. Genauer gesagt gibt es für jede Zahlenfolge $\{a_i\}$ eine analytische Funktion in einem vorgegebenen ringförmigen Sektor S mit Vertex 0 so, daß $f \sim \sum a_i z^{-i}$ gilt. Siehe wieder [**Olv97**], Kapitel 1, §9, für eine explizite Konstruktion.

Wir nennen nach [**DEK96**] einen Raum verallgemeinerter Funktionen zusammen mit einer Vorschrift für eine asymptotische Entwicklung so, daß zu jeder Folge komplexer Zahlen wenigstens ein Element des Raumes existiert welches diese Zahlen als Koeffizienten seiner asymptotischen Entwicklung besitzt, ein **vollständiges asymptotisches Schema**. Wie zu erwarten war, erfüllt das durch Theorem 6.1.2 definierte asymptotische Schema für asymptotische Hyperfunktionen diese Bedingung.

SATZ 6.3.2. *Die Moment-asymptotische Entwicklung asymptotischer Hyperfunktionen bildet ein vollständiges asymptotisches Schema. Das heißt, für jede Folge* $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ *existiert ein* $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ *mit* $\mu^n(f) = \mu^n$.

Wir benutzen im Beweis folgendes

THEOREM 6.3.3 (Durán, Estrada, [**DE94**]). *Zu* $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ *wie oben und einem vorgegebenen Sektor* S *mit Vertex* 0 *existiert eine Funktion* $\psi(\zeta)$*, die holomorph in* S *und beschränkt in* $\overline{S}$ *ist, für die*

$$\psi(\zeta) = O(|\zeta|^{-\infty})$$

gilt für $\zeta \to \infty$ *in* S *und weiter*

$$\psi(\zeta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\zeta)^n}{n!}\mu^n$$

gilt für $\zeta \to 0$ *in* S.

Dies basiert auf dem klassischen Theorem von Ritt, siehe [**Rem89**], Kapitel 9, §6 oder [**Olv97**], Seiten 22ff, mit dem man auch schon die oben erwähnten analytischen Funktionen mit vorgeschriebener asymptotischer Entwicklung konstruiert hat.

BEWEIS VON SATZ 6.3.2. Wir benutzen Satz 6.3.1 und 4.3.5, um die Aussage auf eine über C^∞-Funktionen zurückzuführen. Die Behauptung ist dann offenbar äquivalent zu: Es existiert eine Funktion $\widehat{f} \in C^{\infty *}(\mathbb{D})$ so, daß $\widehat{f}^{(n)}(0) = (-i)^n\mu^n$ ist, denn dann erfüllt $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f} \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ die gewünschte Bedingung. Wähle nun den Sektor S in Theorem 6.3.3 so groß, daß $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ in S enthalten ist und dazu eine Funktion ψ wie dort. Diese Funktion ist sogar analytisch und damit C^∞ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und besitzt eine C^∞-Fortsetzung in den Punkt 0. Außerdem ist sie asymptotisch längs der reellen Achse und damit insbesondere infra-exponentiell, daß heißt $\widehat{f} = \psi \in C^{\infty *}(\mathbb{R})$ leistet das gewünschte. □

Wir bemerken, daß $\widehat{f}(\xi)$ sogar analytisch außerhalb des Ursprungs gewählt werden kann. Weiterhin kann man aufgrund der Abfallbedingungen, die $\widehat{f}(\xi)$ erfüllt, f noch spezieller wählen: Es existiert ein $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, daß die obigen Bedingungen an die Moment-asymptotische Entwicklung erfüllt.

ANMERKUNG 6.3. Dies liefert die in [**DE94**] gegebene Lösung des **Hamburger Momentproblems** in der Funktionenklasse $\mathscr{S}$: Gegeben eine Folge $\{\mu^n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen, wann existiert ein Maß $\mathrm{d}\rho$ auf $I = (-\infty, \infty)$ mit

$$\int_I x^n \mathrm{d}\rho = \mu^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und wenn es existiert, wann ist es eindeutig bestimmt? Sein Vetter, das auf Arbeiten von Stieltjes aus dem Jahre 1894 zurückgehende **Stieltjessche Momentproblem** behandelt dieselbe Frage auf der Halbachse $I = [0, \infty)$ und schließlich beschäftigt sich man im **Hausdorffschen Momentproblem** mit endlichen Intervallen $I = [a, b]$. Diese klassischen Probleme haben über ein halbes Jahrhundert lang großen Einfluß auf die Entwicklung der gesamten Analysis gehabt, siehe dazu das Standardwerk [**Akh65**]. Wir haben gesehen, daß die Momentprobleme in enger Beziehung zu dem Problem der Bestimmung analytischer Funktionen mit vorgegebenen asymptotischen Entwicklungen stehen, das heißt zu Ritts Theorem, vergleiche [**Was65, Olv97, DE94**]. Insbesondere für die Klasse $\mathscr{S}$ schnellfallender Funktionen wurde es von R. Estrada und A. L. Durán, ebenfalls unter Verwendung von Ritts Theorem in [**DE94, Est98**] gelöst und auf Funktionen mit Werten in Frécheträumen verallgemeinert. Für einen funktionalanalytischen Zugang über unendliche *Jacobimatrizen* siehe [**Sim97**].

Für Klassen verallgemeinerter Funktionen wurden die Momentprobleme von verschiedenen Autoren untersucht: I. Cioranescu betrachtete in [**Cio90**] das Hausdorffsche Problem für *Ultradistributionen* (siehe [**Kom73**] für diese). In Klassen gewöhnlicher Distributionen wurde es von R. Estrada und R. P. Kanwal in [**EK87**] angegangen. Die kürzlich von Y. Yeom, S.-Y. Chung und D. Kim gefundene Lösung des Hausdorffschen Problems im Raum der Fourier Hyperfunktionen haben wir am Ende von Abschnitt 6.2 schon erwähnt.

6.4. Spektrale asymptotische Entwicklungen

Wir kommen nun auf das am Ende von Abschnitt 6.1 angesprochene Problem zurück, auch die Moment-Asymptotik einer asymptotischen Hyperfunktion als asymptotische Entwicklung einer holomorphen Funktion in einem geeigneten Gebiet zu verstehen. Wie schon erwähnt, reicht dazu die einfache Moment-Entwicklung nicht aus, da der obere und der untere Teil einer definierenden Funktion getrennt entwickelt werden müssen. Wir lösen das Problem, indem wir *a priori* die Aufteilung in oberen und unteren Teil vornehmen.

DEFINITION 6.4.1. Für jede Fourier Hyperfunktion $f \in \mathscr{Q}(\mathbb{D})$, die gegeben ist durch definierende Funktionen $f = [F_+, F_-]$, $F_\pm \in \mathcal{O}^*(\mathbb{Q}_\pm)$, nennen wir

$$\check{f}(x) \stackrel{\text{def}}{=} [F_+, -F_-]$$

eine zu f **spektral konjugierte** Hyperfunktion. Wir definieren den **oberen** und **unteren Teil** von $f = [F_+, F_-]$ durch

$$f_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{c} [F_+, 0] \\ [0, -F_-] \end{array} \right\} = \pm\frac{1}{2}\left(f \pm \check{f}\right) = F_\pm(x \pm i0),$$

das heißt durch die in Abschnitt 3.1 eingeführten Randwerte. Ist weiterhin sogar $f = [F_+, F_-] \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$, mit $F_\pm \in \mathcal{O}_{-\infty}(W_\pm)$ für eine Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{D})$, so nennen wir

$$\check{\mu}^n(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mu^n(\check{f}),$$

$$\mu^n_\pm(f) \stackrel{\text{def}}{=} \pm\frac{1}{2}\left(\mu^n(f) \pm \check{\mu}^n(f)\right) = \mu^n(f_\pm),$$

die **konjugierten** beziehungsweise **oberen** und **unteren Momente** von f.

Offensichtlich sind weder die konjugierte Hyperfunktion noch die konjugierten Momente eindeutig definiert oder gar invariant unter einem Wechsel der definierenden Funktion. Wir wollen diesmal diese Mehrdeutigkeit so belassen wie sie ist, weil das insbesondere die Aufteilung

$$\mu^n(f) = \mu_+^n(f) - \mu_-^n(f)$$

erst interessant macht. Denn wie jeder Willkürakt eröffnet auch dieser neue Freiheiten — jedenfalls für den, der ihn ausführt.

BEISPIEL 6.2. Vier altbekannte Distributionen liefern das Paradigma für die Aufteilung einer Hpyerfunktion in oberen und unteren Teil und die Definition der konjugierten Hyperfunktion, vergleiche [**Ima92**], Kapitel 7. Die Ableitungen der Deltafunktion lassen sich gemäß (6.2) schreiben als

$$\delta^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{2\pi i}\left(\frac{1}{(x+i0)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i0)^{n+1}}\right).$$

Sei Ψ eine meromorphe Funktion, die Pole ausschließlich auf der reellen Achse hat. Dann nennt man die Hyperfunktion

$$\text{f. p. }\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\Psi(x+i0) + \Psi(x-i0)\right)$$

den **finite part** von Ψ. Er wurde von Hadamard zur Regularisierung divergenter Integrale mit algebraischen Singularitäten eingeführt, siehe [**Sch66**]. Im Falle von Potenzen, das heißt für $\Psi(x) = x^{-(n+1)}$ ist er identisch mit dem bekannten *Cauchyschen Hauptwert*. In diesem Fall ist die Ähnlichkeit mit der Distribution $\delta^{(n)}$ frappant: Eine zu $\delta^{(n)}$ konjugierte Hyperfunktion ist offensichtlich

$$\check{\delta}^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}n!}{\pi i}\cdot \text{f. p. }\frac{1}{x^{n+1}}.$$

Weiterhin werden die Formeln, die den oberen und unteren Teil mit der Hyperfunktion und ihrer Konjugierten verbinden zu

$$\frac{1}{(x\pm i0)^{n+1}} = \text{f. p. }\frac{1}{x^{n+1}} \pm \frac{(-1)^{n+1}i\pi}{n!}\delta^{(n)}(x).$$

Dies sind die wohlbekannten und in der Quantenphysik häufig verwendeten **Sokhotsky–Plemelj-Relationen**, vergleiche [**BLOT90**], Kapitel 2.

Sei nun $f = [F_+, F_-]$ eine asymptotische Hyperfunktion. Ihre standard definierende Funktion fällt zwar nicht wie die einer Hyperfunktion mit kompaktem Träger in jede Richtung ab, wohl aber, wie aus Satz 3.4.4 folgt, in *imaginärer* Richtung, was wir auch so formulieren können:

BEMERKUNG 6.4.2. Ist $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$, so gilt $\widetilde{\mathbf{F}}_f(z) = O(|z|^{-1})$, $z \to \infty$ in jedem abgeschlossenen ringförmigen Sektor S in $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Betrachten wir jetzt nur den oberen Teil $f_+ = [F_+, 0]$, $F_+ \in \mathcal{O}_{-\infty}(W_+)$, so folgt aus dieser Bemerkung, daß dessen standard definierende Funktion $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}$ von der Ordnung $O(|z|^{-1})$ ist für $z \to \infty$ in jedem abgeschlossenen ringförmigen Sektor S_+ in der oberen Halbebene.

Wir machen den Ansatz

$$\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2\pi i}\frac{\mu_+^n}{z^{n+1}}$$

für eine asymptotische Entwicklung von $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}$, die in jedem S_+ wie oben gelten soll. Dann können wir die Rechnung, die zu (6.3) geführt hat, wiederholen, wobei wir den Integrationsweg durch einen Weg $\Gamma_+ \subset W_+$ parallel zur reellen Achse ersetzen und erhalten

$$R^N(z) = \frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{z^{N+1}} \int_{\Gamma_+} \frac{F_+(w)w^{N+1}}{w-z} dw$$

für das Restglied der Ordnung N dieser Entwicklung in S_+. Wieder sehen wir, daß das Restglied in S_+ wie $|z|^{-N-2}$ abfällt, was bedeutet, daß unser Ansatz tatsächlich eine asymptotische Entwicklung von $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}$ in S_+ darstellt.

THEOREM 6.4.3. *Für $f = [F_+, F_-] \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ sind die* ***spektralen asymptotischen Entwicklungen***

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2\pi i} \left(\mu_+^n \frac{1}{(x+i0)^{n+1}} + \mu_-^n \frac{1}{(x-i0)^{n+1}} \right)$$

und

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} d_n \delta^{(n)}(x) + h_n \,\mathrm{f.\,p.}\, \frac{1}{x^{n+1}}$$

gleichzeitige asymptotische Entwicklungen der standard definiernden Funktionen $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_\pm}$ des oberen und unteren Teils $f_\pm$ von f in beliebigen ringförmigen Sektoren $S_\pm$ in der oberen beziehungsweise unteren Halbebene. Hierbei sind

$$d_n \overset{\text{def}}{=} \frac{(-1)^n}{2\,n!} \mu^n \text{ und } h_n \overset{\text{def}}{=} \frac{-1}{4\pi i} \breve{\mu}^n$$

die ***Dirac-*** *beziehungsweise* ***Hadamard-Momente*** *von f.*

BEWEIS. Es bleibt nur noch zu zeigen, wie man von der ersten Form der Entwicklung zur zweiten Form übergeht, was man leicht mit den Sokhotsky–Plemelj-Relationen nachrechnet:

$$\begin{aligned} d_n \delta^{(n)}(x) &+ h_n \,\mathrm{f.\,p.}\, \frac{1}{x^{n+1}} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \left\{ \frac{\mu^n}{2} \left(\frac{1}{(x+i0)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i0)^{n+1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\breve{\mu}^n}{2} \left(\frac{1}{(x+i0)^{n+1}} + \frac{1}{(x-i0)^{n+1}} \right) \right\} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \left\{ \frac{\mu^n + \breve{\mu}^n}{2} \frac{1}{(x+i0)^{n+1}} + \frac{-\mu^n + \breve{\mu}^n}{2} \frac{1}{(x+i0)^{n+1}} \right\}, \end{aligned}$$

was zusammen mit der Definition der oberen und unteren Momente die Behauptung ergibt. □

Natürlich kann man die oberen und unteren Momente bei Kenntnis der standard definierenden Funktionen des oberen beziehungsweise unteren Teils wieder nach (6.1) berechnen. Man beachte, daß es zunächst gar nicht klar war, daß eine asymptotischen Hyperfunktion überhaupt eine definierende Funktion hat, die in irgendeinem Gebiet eine asymptotische Entwicklung besitzt. Das dies gerade für die standard definierenden Funktionen des oberen und unteren Teils gilt, ist ein wichtiger Aspekt unserer Ergebnisse.

Man könnte hoffen, von der spektralen asymptotischen Entwicklung einer Hyperfunktion auf ihr Singularitätenspektrum schließen zu können. Das ist aber nicht so einfach: Erfüllt beispielsweise die Folge $\{\mu_+^n(f)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ der oberen Momente eines $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ die Bedingung (6.5), so konvergiert zwar die asymptotische Entwicklung der standard definierenden Funktion $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}$ des oberen Teils von f im Annulus A_R. Da sie aber nur eine asymptotische Entwicklung in jedem ringförmigen Sektor *in der oberen Halbebene* ist, ist keineswegs klar, daß sie gegen $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}$ konvergiert, vergleiche [**Olv97**], Seite 18f. Das heißt, wir können nicht annehmen, daß die in A_R konvergente asymptotische Reihe eine analytische Fortsetzung von $\widetilde{\mathbf{F}}_{f_+}$ in die untere Halbebene darstellt, was zeigen würde, daß f mikroanalytisch ist in $\{|x| > R\} \times idx\infty$. Was uns bleibt sind die folgenden wesentlich schwächeren Aussagen:

SATZ 6.4.4. *i) Gegeben eine Folge von Paaren* $\{(\mu_+^n, \mu_-^n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Erfüllen die* μ_+^n *die Abschätzung von Theorem 6.2.7, dann existiert eine Hyperfunktion* $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ *mit einer geeigneten Darstellung* $f = [F_+, F_-]$, *für die*

$$(\mu_+^n, \mu_-^n) = (\mu_+^n(f), \mu_-^n(f))$$

ist und für deren Singularitätenspektrum die Einschränkung

$$\mathrm{S.S.}\, f \cap \{|x| > R\} \times idx\infty = \varnothing$$

gilt.

ii) Gilt umgekehrt für ein $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ *die obige Beschränkung von* S.S. f, *so existiert eine Zerlegung* $f = g + h$ *so, daß die Momente* $\mu^n(h)$ *die Abschätzung von Theorem 6.2.7 und* (6.5) *erfüllen und daß die oberen Momente von* g *identisch verschwinden.*

Analoge Aussagen gelten für μ_-^n.

BEWEIS. i) Angenommen, die μ_+^n erfüllen die Voraussetzung von Theorem 6.2.7. Dann finden wir dank der in Satz 6.3.2 gezeigten Vollständigkeit des Moment-asymptotischen Schemas eine Hyperfunktion h mit kompaktem Träger in $[-R, R]$ so, daß ihr oberer Teil die Momente $\mu_+^n(h) = \mu_+^n$ hat. Weiterhin finden wir ein $g = [0, G_-] \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$ mit Momenten $\mu_-^n(g) = \mu_-^n$. Dann ist das Singularitätenspektrum der asymptotischen Hyperfunktion $h - g$ in dem bezeichneten Gebiet enthalten.

ii) Umgekehrt läßt sich jede Hyperfunktion f, die die Bedingung an S.S. f erfüllt, zerlegen in ein $h \in \mathscr{B}[[-R, R]]$ und eine Hyperfunktion g vom unteren Typ, das heißt mit einer Darstellung $g = [0, G_-]$. Diese Zerlegung leistet das gewünschte. □

6.5. Beispiele

Wir wollen nun an einigen Beispielen die die oben theoretisch erarbeiteten Prinzipien der asymptotischen Entwicklung von Hyperfunktionen anschaulich machen. Unsere Beispiele stellen keine ernsthaften Anwendungen der Theorie dar, aber sie belegen ihre „potentielle Anwendbarkeit“ in mehreren Bereichen.

BEISPIEL 6.3. Betrachten wir als besonders einfache Hyperfunktion mit kompaktem Träger die um $a > 0$ verschobene δ-Hyperfunktion

$$\delta(x-a) = \left[\widetilde{\mathbf{F}}_{\delta(x-a)}(z)\right] = \left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}\right].$$

Ihre Momente sind offensichtlich $\mu^n = a^n$ und damit erhalten wir die asymptotische Entwicklung

$$\delta(x-a) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \cdot \delta^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{a^n}{z^{n+1}}\right].$$

Man sieht, daß die unendliche Summe definierender Funktionen im Annulus $A_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > a\}$ gegen die standard definierende Funktion von $\delta(x-a)$

konvergiert. Die Summe ist also nach $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ fortsetzbar und definiert somit die Hyperfunktion $\delta(x-a) \in \mathscr{B}[\{a\}]$. In Übereinstimmung damit erfüllen die Momente die Voraussetzungen von Satz 6.2.5 und Theorem 6.2.7 für die Moment-Folge einer Hyperfunktion mit Träger in $[-a, a]$. Formal können wir die obige asymptotische Reihe auch zur Wirkung eines *nichtlokalen Differentialoperators*

$$\delta(x-a) = \mathrm{e}^{a \cdot D}\delta(x)$$

auf δ aufsummieren. Da nach dem Struktursatz 4.4.2 für Hyperfunktionen mit kompaktem Träger jede in $\{0\}$ konzentrierte Hyperfunktion darstellbar ist als $J(D)\delta(x)$ mit einem lokalen Operator $J(D)$, folgt aus unserem Beispiel, daß dieser nichtlokale Operator einen algebraischen Isomorphismus

$$\mathrm{e}^{a \cdot D} \colon \mathscr{B}[\{0\}] \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}[\{a\}]$$

mit Inverser $\mathrm{e}^{-a \cdot D}$ induziert. Dies kann kein topologischer Isomorphismus sein, da die topologischen Endomorphismen der Garbe $\mathscr{B}$ ausschließlich von den lokalen Operatoren erzeugt werden — außer natürlich im trivialen Fall $a = 0$, in dem $\mathrm{e}^{a \cdot D}$ selbst die Bedingung aus Definition 4.4.1 erfüllt und ein lokaler Operator ist.

BEISPIEL 6.4. Wir demonstrieren nun das in Abschnitt 6.3 aufgezeigte Verhältnis von asymptotischer Entwicklung einer Hyperfunktion und der Taylorentwicklung ihrer (inversen) Fouriertransformierten. Wir berechnen unter Verwendung des letzten Beispiels:

$$\mathcal{F}^{-1}\Big\{2\pi(\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0))\Big\} \sim \mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_0^{2n}}{(2n)!} \cdot \delta^{(2n)}(k)\right\},$$

wobei sich die Terme ungerader Ordnung weggehoben haben. Dies ist weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{D}} \mathrm{e}^{ikx} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_0^{2n}}{(2n)!} \cdot \delta^{(2n)}(k) \mathrm{d}k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (k_0 x)^{2n}}{(2n)!} = \cos(k_0 x). \end{aligned}$$

In diesem Fall konvergiert die Taylorreihe in ganz $\mathbb{C}$ gegen eine holomorphe Funktion. Dies können wir so verstehen, daß die asymptotische Reihe der ursprünglichen Hyperfunktion $2\pi(\delta(k-k_0) + \delta(k+k_0))$ in Anwendung auf die spezielle Testfunktion $e_x(k) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (2\pi)^{-1}\mathrm{e}^{ikx}$, die eine Testfunktion für jede Hyperfunktion mit kompaktem Träger ist, konvergiert.

BEISPIEL 6.5. Ein weiteres Beispiel derselben Art wie die letzten zwei führt uns in das klassische Gebiet der speziellen Funktionen. Betrachte die Hyperfunktion auf $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \delta(x-1)\delta(y-1)$$

mit Träger im Punkt $\{(1,1)\}$. Da sie vom Typ eines kartesischen Produkts ist können wir ihre asymptotische Entwicklung in zwei Variablen einfach als das Produkt zweier Entwicklungen in einer Variablen schreiben:

$$f(x,y) \sim \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!s!} \delta^{(r)}(x)\delta^{(s)}(y).$$

Werten wir diese Summe auf der Funktion

$$\mu(x,y;t;z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}z(xt - y/t)},$$

die als ganze Funktion in allen Variablen eine Testfunktion für Hyperfunktionen mit kompaktem Träger ist, aus, so erhalten wir eine asymptotische Reihe

$$\langle f(x,y)\,, \mu(x,y;t;z)\rangle \sim \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!s!} \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{r+s} t^{r-s}$$

in z und t. Ihr Koeffizient in t für festes $n = r - s \in \mathbb{Z}$ ist eine absolut konvergente Potenzreihe in z für alle $z \in \mathbb{C}$. Sie definiert also eine ganze Funktion

$$J_n(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(n+s)!s!} \left(\tfrac{1}{2}z\right)^{n+2s}.$$

Dies ist die Potenzreihendarstellung der **n-ten Besselfunktion** im Argument z, vergleiche [**Olv97**], Seiten 55ff und [**WW52**], Kapitel XVII. Die Funktion μ korrespondiert zur Erzeugenden Funktion

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}z(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n,$$

aus der man die Besselfunktionen als Koeffizienten ihrer Laurentreihe erhält.

ANMERKUNG 6.4. Diese beiden Beispiele stellen zunächst nur eine etwas andere Art dar, Taylorentwicklungen klassischer Funktionen zu generieren, eine Methode, die aus der asymptotischen Analysis wohlbekannt ist. Insbesondere ist zu beachten, daß wir eine Aussage über die Konvergenz der entstehenden Reihe erst *a posteriori* treffen können. Um zu verstehen warum diese Entwicklungen konvergieren, sollte man sie nicht als asymptotische, sondern als *Störungsentwicklungen* auffassen, die in geeigneten Räumen analytischer Funktionale konvergieren können, wenn die Störung klein genug ist. Das einfachste Beispiel ist die obige Entwicklung von $\delta(x-a)$. Sie stellt offenbar eine in $\mathcal{O}_0(\mathbb{C} \setminus \overline{A_a})$ konvergente Taylorreihe dar, wie wir in Abschnitt 6.2 gesehen haben. Ihre Summe definiert damit ein analytisches Funktional auf $\mathcal{O}(\overline{D_a(0)})$ und es ist kein Wunder, daß dessen Auswertung auf ganzen Funktionen, wie zum Beispiel auf dem Kern der Fouriertransformation in Beispiel 6.4 oder dem von Beispiel 6.5, konvergiert. Die Möglichkeit solcher Störungsentwicklungen von δ-Funktionen wurde von F. Constantinescu *et al.* in [**CCC85**] aufgezeigt, wobei als Störungen auch gewisse analytische Funktionen ϕ zugelassen wurden, so daß die Störungsreihe die Gestalt

$$\delta(x+\phi(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\phi(x))^n}{n!} \cdot \delta^{(n)}(x)$$

annimmt und in einem Raum analytischer Funktionale konvergiert, der durch die absolute Größe von ϕ bestimmt wird. Die allgemeine Theorie dieser Störungsentwicklungen im Rahmen der analytischen Funktionale werden wir in Anhang A entwickeln.

BEISPIEL 6.6. Wir betrachten als eines der einfachsten Beispiele einer Differentialgleichung mit einer irregulären Singularität im Ursprung die Gleichung

$$\left(x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right) f(x) = 0$$

und versuchen sie durch den Ansatz der spektralen asymptotischen Entwicklung aus Theorem 6.4.3 zu lösen. Für den δ-Anteil berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta^{(n)}(x) &= \left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{z^2(-1)^{n+1}(n+1)!}{z^{n+1}}\right] = (n+1)n\left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^{n-1}}\right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \le 1, \\ (n+1)n \cdot \delta^{(n-1)}(x) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit wird die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} \left(x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)\sum_{n=0}^{\infty} d_n\delta^{(n)}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} d_n(n+1)n\delta^{(n-1)}(x) - \sum_{n=0}^{\infty} d_n\delta^{(n)}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(d_n(n+1)n - d_{n-1}\right)\delta^{(n-1)}(x) = 0. \end{aligned}$$

Dies führt auf die Rekursionsvorschrift $d_n = d_{n-1}/(n(n+1))$ für die Koeffizienten, die mit der Anfangsbedingung $d_0 = 1$ gelöst wird durch

$$d_n = \frac{1}{(n+1)!n!},\ n = 0, 1, \ldots.$$

Man sieht, daß hier die Koeffizienten so schnell abfallen, daß $J = \sum_{n=0}^{\infty} d_n D_x^n$ ein lokaler Operator im Sinne von Definition 4.4.1 ist. Solche Differentialoperatoren erhalten insbesondere den Träger von Hyperfunktionen, vergleiche [**Kan88**], Korollar 1.8.3. Das heißt, die asymptotische Reihe wird in diesem Fall gegen eine Hyperfunktion mit Träger in $\{0\}$ konvergieren. Damit können wir eine asymptotische Lösung $f_1(x)$ explizit berechnen:

$$\begin{aligned} f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n\delta^{(n)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)!n!z^{n+1}}\right]_{z=x} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!z^{n+1}}\right]_{z=x} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\mathrm{e}^{-1/z} - 1\right]_{z=x} = \frac{1}{2\pi i}\left[\mathrm{e}^{-1/z}\right]_{z=x}. \end{aligned}$$

Die definierenden Funktionen dieser Hyperfunktion zeigen eine wesentliche Singularität im Ursprung, das heißt diese Hyperfunktion ist keine Distribution. Man beachte, daß die erste der beiden definierenden Funktionen in der unteren Zeile tatsächlich die im Unendlichen verschwindende standard definierende Funktion unserer Lösung ist.

Für den Hadamard-Anteil erhalten wir mit

$$x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{f.\,p.}\,\frac{1}{x^{n+1}} = -(n+1)\,\mathrm{f.\,p.}\,\frac{1}{x^n}$$

die Gleichung

$$\left(x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 1\right)\sum_{n=0}^{\infty} h_n\,\mathrm{f.\,p.}\,\frac{1}{x^{n+1}} = -h_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n(n+1) + h_{n-1}\right)\mathrm{f.\,p.}\,\frac{1}{x^n} = 0.$$

Setzt man als Anfangswert $h_0 = 1$ an, so führt dies auf

$$h_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!},\ n = 0, 1, \ldots.$$

Subtrahieren wir noch die konstante Hyperfunktion 1, um den Term h_0 zu kompensieren, so ergibt sich die zweite asymptotische Lösung

$$f_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \,\mathrm{f.\,p.}\, \frac{1}{x^n} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-1/(x+i0)} + \mathrm{e}^{-1/(x-i0)}\right).$$

Wie man sieht, ist dies eine temperierte Hyperfunktion in $\mathscr{Q}_0(\mathbb{D})$.

Diese beiden Hyperfunktionenlösungen bilden zusammen mit der C^∞-Lösung

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \mathrm{e}^{-1/x} & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

eine Basis des Lösungsraums für diese Differentialgleichung in den Hyperfunktionen. Wir erhalten in diesem Fall also beide reinen Hyperfunktionenlösungen $f_{1/2}$ mit Hilfe konvergenter, asymptotischer Reihen in $\mathscr{Q}_0(\mathbb{D})$.

BEISPIEL 6.7. Wir kommen zu einem Beispiel aus der Physik, genauer der statistischen Mechanik, das zeigt, daß es in Anwendungen durchaus sinnvoll sein kann, sogar eine glatte Funktion als Distribution aufzufassen und ihre Moment-asymptotische Entwicklung zu betrachten. Betrachten wir die Funktion

$$\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1},$$

die exponentiell gegen 1 beziehungsweise 0 strebt für $x \to -\infty$ beziehungsweise $x \to +\infty$. Um sie als asymptotische Hyperfunktion aufzufassen, ziehen wir zuerst die „Konstanten im Unendlichen" ab und betrachten

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} - Y(-x)$$

als Element von $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D})$. Die Funktion g ist ungerade, so daß die geraden Momente $\mu^{2k}(g)$, $k = 0, 1, \ldots$, verschwinden. Für $l = 1, 2, \ldots$ berechnen wir die ungeraden Momente so:

$$\begin{aligned}
\mu^{2l-1}(g) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l-1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} - Y(-x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} x^{2l-1} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^x + 1} - 1\right) \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{x^{2l-1}}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{2l-1}}{\mathrm{e}^{-x} + 1} \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} \frac{x^{2l-1}}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{x^{2l-1}}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der bekannten Formeln

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{t-1}}{\mathrm{e}^x + 1} \mathrm{d}x = \left(1 - 2^{-t+1}\right) \Gamma(t)\zeta(t),$$

$$\zeta(2l) = (-1)^{l-1} \frac{(2\pi)^{2l} B_{2l}}{2(2l)!}, \; l \geq 1$$

siehe [**Olv97**], Seite 283, wobei $\zeta(t)$ die *Riemannsche Zetafunktion* und B_{2l} die *Bernoullischen Zahlen*, zum Beispiel

$$B_2 = \tfrac{1}{6},\; B_4 = -\tfrac{1}{30},\; B_6 = \tfrac{1}{42},\; B_8 = -\tfrac{1}{30},\; B_{10} = \tfrac{5}{66},$$

sind, finden wir schließlich

$$\mu^{2l-1}(g) = (-1)^{l-1}\left(2^{2l} - 2\right) \frac{\pi^{2l} B_{2l}}{2l}.$$

Also hat g die Moment-asymptotische Entwicklung

$$g(x) = \sum_{l=1}^{N} (-1)^l \left(2^{2l} - 2\right) \frac{\pi^{2l} B_{2l}}{(2l)!} \delta^{(2l-1)}(x) \mod \mathscr{Q}_{[2N]}(\mathbb{D}).$$

Die Funktion g oder vielmehr die ursprüngliche Funktion $g(x)+Y(-x)$ ist eine alte Bekannte aus der Theorie der idealen Gase. Setzt man für die Koordinate $x = \frac{E-\mu}{kT}$ ein, so ist

$$f(E) = \frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/kT} + 1}$$

nichts anderes als die *Besetzungszahl* eines *idealen Fermionengases*, der sogenannte **Fermi-Faktor**, vergleiche [**Bal92**], Abschnitt 10.4. Dabei bedeuten E die *Energie*, μ das *chemische Potential*, k die *Boltzmannkonstante* und schließlich T die *Temperatur*. Wir können für den Fermi-Faktor also die asymptotische Entwicklung

$$f(E) \sim Y(\mu - E) - \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(2^{2l} - 2\right) \frac{B_{2l}}{(2l)!} (\pi k T)^{2l} \delta^{(2l-1)}(E - \mu)$$

im Distributionensinne angeben, wobei wir noch die Regel für das Verhalten der δ-Funktion unter linearen Transformationen

$$\delta^{(k)}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha^{k+1}} \delta^{(k)}(x)$$

benutzt haben, die unmittelbar aus (6.2) zu ersehen ist.

Aus dem Fermi-Faktor lassen sich die Erwartungswerte aller *thermodynamischen Zustandsgrößen* des Fermionengases berechnen, indem man die entsprechende *Zustandsfunktion* mit der Dichte $f(E)$ mittelt, was nichts anderes heißt, als daß er wie eine Distribution „benutzt“ wird. Das macht die obige Entwicklung praktisch und sinnvoll für niedrige Temperaturen $kT \ll |E - \mu|$ und in diesem Regime ist sie unter dem Namen **Sommerfeld-Entwicklung** bekannt.

KAPITEL 7

Asymptotische Theorie in n Dimensionen

Überblick

Die von J. Radon 1917 eingeführte und später nach ihm benannte *Radontransformation* ist eine Methode zur sphärischen Zerlegung einer Funktion durch Integration über affine Hyperebenen. Sie hat viele sehr konkrete Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik, als bekannteste wohl die Computertomographie, wo sie — besser gesagt ihre Umkehrung — zur Rekonstruktion der dreidimensionalen Struktur eines Körpers aus den Daten seiner schichtweisen Durchleuchtung benutzt wird. In ähnlicher Weise wird sie in der Astronomie, der Geophysik und der Optik verwendet. Für eine Einführung mit Betonung der Anwendungen siehe [**Dea83**]; einen umfassenden Zugang zu der dahinterstehenden Mathematik liefert [**Hel84**]. Die Radontransformation wurde in [**GGV66**] via Dualität auf Distributionen verallgemeinert.

Die letzte bekannte Verallgemeinerung der Radontransformation — ihre Definition für eine bestimmte Unterklasse der Fourier Hyperfunktionen durch A. Kaneko und T. Takiguchi in [**KT95**] findet in diesem Kapitel eine Anwendung. Wir benutzen sie, um die im vorigen Kapitel untersuchten asymptotischen Entwicklungen asymptotischer Hyperfunktionen in nichttrivialer Weise auf $n > 1$ Dimensionen zu übertragen. Der Adjektiv „nichttrivial" meint hierbei etwas, das von der Bildung asymptotischer Entwicklungen in höheren Dimensionen durch Übergang zum kartesischen Produkt abweicht. Die Radontransformation tut dies: Sie zerlegt eine asymptotische Hyperfunktion auf $\mathbb{D}^n$ in eine Schar winkelabhängiger, eindimensionaler Hyperfunktionen, das heißt eine verallgemeinerte Funktion auf $S^{n-1} \times \mathbb{D}$. Wir betrachten für jede Komponente dieser Zerlegung die entsprechende eindimensionale asymptotsiche Entwicklung und erhalten so eine asymptotische Entwicklung der ursprünglichen Hyperfunktion auf $\mathbb{D}^n$. Dies hat gegenüber dem „kartesischen" Ansatz wesentliche Vorteile:

i) Die *sphärische Symmetrie* einer asymptotischen Entwicklung um den Ursprung bleibt erhalten, was sich ausdrückt darin, daß
ii) die Terme der Entwicklung in Produkte *stetiger Funktionen* in der Winkelvariablen und eindimensionaler Deltafunktionen zerfallen.
iii) Man findet den Zusammenhang zu kartesischen Entwicklungen auf natürliche Weise über die Fouriertransformation, da sich die Radontransformation durch sie ausdrücken läßt.

Es ist mir nicht bekannt, ob die Radontransformation in der Literatur schon für n-dimensionale Moment-asymptotische Entwicklungen eingesetzt worden ist.

In Abschnitt 7.1 führen wir die Radontransformation asymptotischer Hyperfunktionen ein, wobei wir wie bei der Fouriertransformation in Kapitel 4 Kanekos Zugang über Randwerte holomorpher Funktionen in Keilen verfolgen und uns an [**KT95**] halten. Die wesentlichen Ergebnisse sind dabei, daß

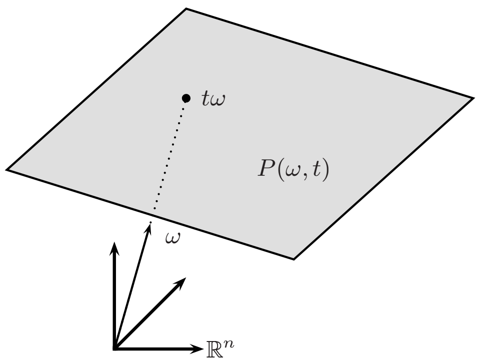

ABBILDUNG 7.1. Die Geometrie der Radontransformation.

die Radontransformierte wie eine C^∞-Funktion von der Winkelvariablen abhängt und die Radontransformation die Wachstumsordnung erhält.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir die Momente der Radontransformierten, die sogenannten *Helgasonmomente*. Diese lassen sich genau über den Zusammenhang zwischen Radontransformation und Fouriertransformation beschreiben, in Analogie zu Abschnitt 6.3. Es zeigt sich, daß sie homogene Polynome in der Winkelvariablen sind, eine Eigenschaft, die man als *Helgasons Momentbedingung* bezeichnet.

Diese Ergebnisse benutzen wir schließlich, um in den letzten beiden Abschnitten die Moment-asymptotische Entwicklung, wie wir sie in den Abschnitten 6.1 und 6.4 dargestellt haben, auf den n-dimensionalen Raum zu übertragen.

7.1. Die Radontransformation für Hyperfunktionen

Wir beginnen unser Studium der Radontransformation mit dem einfachsten Fall einer gewöhnlichen, zum Beispiel schnellfallenden, Funktion $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ihre **Radontransformation** ist definiert durch die Integrale über die affinen Ebenen

$$P(\omega,t) \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| \omega x = t\bigr\}$$

für $\omega \in S^{n-1}$ und $t \in \mathbb{R}$, wie in Abbildung 7.1 dargestellt. Das heißt, es gilt

$$\mathcal{R}f(\omega,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t-\omega x) f(x)\mathrm{d}x.$$

Dies liefert eine winkelabhängige Zerlegung $\mathcal{R}f(\omega,\cdot)$ von f in eine Funktionenschar in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Diese Schar hängt stetig im Sinne der Topologie von $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ von dem Parameter ω ab und dasselbe gilt für alle Richtungsableitungen bezüglich der Komponenten von ω, die ebenfalls schnellfallende Funktionen in t sind. Das heißt, $\mathcal{R}f$ ist eine C^∞-Funktion auf S^{n-1} mit Werten in $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, also ein Element des topologischen Vektorraums $C^\infty(S^{n-1};\mathscr{S}(\mathbb{R}))$ in der Notation von [**Tre67**], Kapitel 40–44. Dieser Raum ist in natürlicher Weise isomorph zur Vervollständigung $C^\infty(S^{n-1}) \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} \mathscr{S}(\mathbb{R})$ des dort eingeführten, injektiven Tensorprodukts, siehe [**Tre67**], Theorem 44.1. Glücklicherweise ist der Faktor $\mathscr{S}$ in dem Tensorprodukt nuklear, das heißt nach Satz B.6.13 stimmen die beiden wesentlichen Topologien auf dem Tensorprodukt überein. Also gilt

$$\mathcal{R}f \in C^\infty(S^{n-1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Dies wird auch später bei den Hyperfunktionen, die wir betrachten, der Fall sein, denn für sie haben wir in Abschnitt 5.5 die Nuklearität gezeigt. Wir werden also von nun ab einfach $\widehat{\otimes}$ für das vervollständigte, topologische Tensorprodukt schreiben.

Geometrisch ist klar, daß $\mathcal{R}f$ eine **gerade Funktion in** (ω, t) ist, das heißt

$$\mathcal{R}f(-\omega, -t) = \mathcal{R}f(\omega, t).$$

ANMERKUNG 7.1. Dies bedeutet, daß $\mathcal{R}f$ tatsächlich nur von der *projektiven Ebene* $\xi = P(\omega, t) \in \mathbb{P}^n$ abhängt, wobei $\mathbb{P}^n$ den projektiven Raum über $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Daher kann man $\mathcal{R}$ auch als Abbildung von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathscr{S}(\mathbb{P}^n)$ verstehen, das heißt als Transformation des kartesischen in den projektiven Koordinatenraum. Dieser Standpunkt wird in [**Hel84**] eingenommen. Wir bleiben hier aber bei unserer — zweideutigen — Parametrisierung von $\mathbb{P}^n$ durch $(\omega, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Für eine Hyperfunktion f ist nun weder die Restriktion auf die Hyperebene $P(\omega, t)$ noch ihr Produkt mit $\delta(t - \omega x)$ oder insbesondere das Integral über die Faser $P(\omega, t)$ im allgemeinen wohldefiniert, vergleiche [**Kan88**], Kapitel 3, §4. In [**KT95**] definieren Kaneko und Takiguchi die Radontransformation für eine gewisse Klasse von *Radon Hyperfunktionen* über Dualität, das heißt durch Bildung der zu $\mathcal{R}$ formal dualen Transformation und damit Abwälzen der Transformation auf die Testfunktion. Diese Radon Hyperfunktionen sind keine Unterklasse der Fourier Hyperfunktionen. Für geeignete Unterklassen der Radon Hyperfunktionen, die zugleich in den Fourier Hyperfunktionen liegen, läßt sich die Radontransformation aber wie in Kapitel 4 explizit mit Hilfe der Randwertdarstellung sinnvoll — das heißt insbesondere invariant unter einem Wechsel der Darstellung — definieren.

Wir spezialisieren uns von nun an auf die Klasse der Hyperfunktionen vom Typ $-n-\varepsilon$ für $\varepsilon > 0$, siehe Definition 4.1.4, deren definierende Funktionen insbesondere über Hyperebenen $\mathbb{R}^n + i\xi$ mit $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ in ihrem Definitionsgebiet absolut integrabel sind. Die natürliche Wahl zur Interpretation der obigen Formel ist dann, die Randwertdarstellung der δ-Funktion

$$\delta(t - \omega x) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\frac{1}{(t + i0) - \omega x} - \frac{1}{(t - i0) - \omega x}\right)$$

einzusetzen. Dies führt auf

$$\mathcal{R}f(\omega, t) \stackrel{\text{def}}{=} G(\omega, t + i0) - G(\omega, t - i0),$$

mit

$$G(\omega, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i}\int_{\mathbb{D}^n} \frac{f(x)}{\tau - \omega x}\mathrm{d}x,$$

für $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, als formale Definition der Radontransformation auf $\mathscr{Q}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{D}^n)$, wobei wir das Ergebnis als hyperfunktionswertige gewöhnliche Funktion in ω verstehen möchten.

In einer speziellen Randwertdarstellung $f(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$, wobei jeder Term F_j in $\overline{\mathcal{O}}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{D}^n + i\Gamma_j 0)$ ist für ein $\varepsilon > 0$ wird dies zu

$$\mathcal{R}f(\omega, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^N G_j(\omega, t + i0) - G_j(\omega, t - i0),$$

mit definierenden Funktionen G_j, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} G_j(\omega, \tau_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Im} z_j = y_j} \frac{F_j(z_j)}{\tau_j - \omega z_j} \mathrm{d}z_j \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F_j(x + iy_j)}{t + is_j - \omega(x + iy_j)} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

wobei $\tau_j = t + is_j$ und $z_j = x + iy_j$ sind und für $y_j \in \Gamma_j$. In dieser Darstellung erkennt man, daß die Integrale absolut konvergieren und unabhängig von dem Dämpfungsfaktor $(\tau_j - \omega z_j)^{-1}$ eine definierende Funktion für $\mathcal{R}f$ liefern. Wir sehen außerdem, daß die Definition unahängig ist von der Wahl der Integrationsebenen $\operatorname{Im} z_j = y_j$, weil sie Gebiete von der Form kartesischer Produkte sind und wir somit Cauchys Integralsatz 1.4.3 auf sie anwenden können, vergleiche die Beweisskizze zu Theorem 5.2.2.

Darüberhinaus ist $\mathcal{R}f(\omega, t)$ eine stetige Funktion in $\omega \in S^{n-1}$ in dem Sinne, daß für $\omega \to \omega_0 \in S^{n-1}$ die definierenden Funktionen $G_j(\omega, \tau_j)$ gegen $G_j(\omega_0, \tau_j)$ konvergieren in der durch Definition 1.1.2 gegebenen Topologie von $\overline{\mathcal{O}}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D})$ — auf die Wachstumsordnung kommen wir gleich noch zurück. Das heißt, daß dann $\mathcal{R}f(\omega, t) \to \mathcal{R}f(\omega_0, t)$ in der natürlichen Topologie der Fourier Hyperfunktionen gilt. Wie oben im Fall gewöhnlicher Funktionen können wir dies schreiben als

$$\mathcal{R}f \in C(S^{n-1}; \mathscr{Q}(\mathbb{D}_t)) \cong C(S^{n-1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{Q}(\mathbb{D}_t)),$$

wobei $\mathbb{D}_t$ die Menge $\mathbb{D}$ mit der Koordinate t bezeichnet.

Machen wir uns klar, daß in der Definition der G_j für festes ω Integrale über — zu komplexen Argumenten verschobene — δ-Funktionen stecken, die mit den F_j integriert werden, so gewinnen wir die ursprüngliche Definition der Radontransformation als Flächenintegral zurück:

$$\begin{aligned} G_j(\omega, \tau_j) &= \int_{\mathbb{R}^n} \delta(t + is_j - \omega(x + iy_j)) F_j(x + iy_j) \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{P(\omega, \tau_j)} F_j(x + iy_j) \mathrm{d}S. \end{aligned}$$

Dabei ist $P(\omega, \tau_j)$ die $n-1$-dimensionale reell affine Ebene

$$P(\omega, \tau_j) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{ z_j = x + iy_j \bigm| t + is_j = \omega(x + iy_j) \big\}$$

in $\mathbb{C}^n$. Nun gilt auf $P(\omega, \tau_j)$ die Abschätzung $|x| = O(|t|)$ lokal gleichmäßig in s_j und y_j. Damit wird klar, daß wir in der Darstellung von G_j als Flächenintegral einen Faktor der Wachstumsordnung $O(|t|^{-n-\varepsilon})$ aus F_j extrahieren können, wobei das Integral konvergent bleibt. Diese Abschätzung der Wachstumsordnung von G_j in t gilt lokal gleichmäßig in y_j, was zeigt, daß tatsächlich

$$\mathcal{R}f(\omega, \cdot) \in \mathscr{Q}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{D}_t)$$

gilt für alle $\omega \in S^{n-1}$. Das heißt, die Radontransformierte von f ist von demselben Typ wie f selbst.

Es gibt eine enge Verbindung zwischen der Radontransformation und der Fouriertransformation, die gegeben ist durch die Formel

$$\mathcal{R}f(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\rho\omega) \mathrm{e}^{it\rho} \mathrm{d}\rho.$$

Für $f \in \mathscr{Q}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{D}^n)$ ist nach Korollar 4.3.6 $\widehat{f} \in C^{0*}(\mathbb{R}^n)$, das heißt $\widehat{f}(\xi)$ stellt eine stetige, infra-exponentielle Funktion auf $\mathbb{R}^n$ dar, die wir in natürlicher

Weise als Fourier Hyperfunktion auffassen können. Ihre partielle Rücktransformation längs der Faser $\xi = \rho\omega$ können wir zwar mit einem Integrationsweg im Reellen berechnen, müssen aber das Ergebnis im Sinne der Fourier Hyperfunktionen interpretieren. Dies geht, ähnlich wie in Abschnitt 4.3, so: Wir teilen den Integrationsweg am Ursprung auf und berechnen die zwei Komponenten

$$G_\pm(\omega,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pm\infty} \widehat{f}(\rho\omega)\mathrm{e}^{i\tau\rho}\mathrm{d}\rho$$

der definierenden Funktion von $\mathcal{R}f$ für $\pm\operatorname{Im}\tau > 0$ getrennt. Wir sehen leicht, daß dies dasselbe Ergebnis liefert wie unsere ursprüngliche Formel für $G(\omega,\tau)$:

$$G_\pm(\omega,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pm\infty} \mathrm{e}^{i\tau\rho}\left(\int_{\mathbb{D}^n} f(x)\mathrm{e}^{i\rho\omega x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\rho,$$

für $\pm\operatorname{Im}\tau > 0$. Das innere Integral ist wie in Abschnitt 4.3 als absolut konvergentes Integral über definierende Funktionen zu verstehen und kann daher mit dem äußeren vertauscht werden, was auf

$$\begin{aligned} G_\pm(\omega,\tau) &= \int_{\mathbb{D}^n} f(x)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pm\infty} \mathrm{e}^{i\rho(\tau-\omega x)}\mathrm{d}\rho\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{D}^n} \frac{-1}{2\pi i}\frac{f(x)}{\tau-\omega x}\mathrm{d}x \\ &= G(\omega,\tau) \end{aligned}$$

führt, was zu zeigen war. Dies zeigt außerdem die Invarianz der Definition von $\mathcal{R}f$ unter einem Wechsel der Randwertdarstellung von f, da die Fouriertransformation dies ist. Wir fassen dies zusammen in der

DEFINITION 7.1.1. Für $f(x) \in \mathscr{Q}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{D}^n)$, $\varepsilon > 0$, definieren wir ihre **Radontransformierte** $\mathcal{R}f(\omega,\cdot)$ als Fourier Hyperfunktion durch die **kanonischen definierenden Funktionen** $G_\pm(\omega,\tau_\pm) \in C^\infty(S^{n-1};\overline{\mathcal{O}}_{-n-\varepsilon}(\mathbb{Q}_\pm))$. Das heißt, wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{R}f(\omega,t) &= [G(\omega,\tau)]_{\tau=t} \\ &= [G_+(\omega,t+is), G_-(\omega,t-is)]_{s=0} \end{aligned}$$

als Randwert.

Unter Verwendung von Korollar 4.3.6 formulieren wir damit unsere Ergebnisse spezieller für Hyperfunktionen vom Typ $-n-k-\varepsilon$ mit $k \geq 0$:

THEOREM 7.1.2. *Sei $f \in \mathscr{Q}_{-n-k-\varepsilon}(\mathbb{D}^n)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mathcal{R}f$ eine Funktion in $C^k(S^{n-1})$ mit Werten in $\mathscr{Q}_{-n-k-\varepsilon}(\mathbb{D}_t)$, das heißt*

$$\mathcal{R}f \in C^k(S^{n-1}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{Q}_{-n-k-\varepsilon}(\mathbb{D}_t).$$

$\mathcal{R}f$ ist eine gerade Funktion in (ω,t) und ihre kanonische definierende Funktion $G(\omega,\tau)$ genügt den Abschätzungen

$$|D^\alpha_\omega G(\omega,\tau)| \leq C\frac{(|\alpha|!)^2}{\nu^{|\alpha|}},$$

für $|\alpha| \leq k$ und mit Konstanten ν, $C > 0$.

BEWEIS. Es bleiben nur noch, die Abschätzungen der Ableitungen von G zu zeigen. Dafür können wir wie in Satz 4.3.5 annehmen, daß f eine Darstellung durch einen einzelnen Randwert $f = F(x + i\Gamma 0)$ besitzt mit $F \in$

$\overline{\mathcal{O}}_{-n-k-\varepsilon}(\mathbb{D}^n + i\Gamma 0)$ und so, daß F außerhalb eines Kegels Δ° exponentiell abfällt. Wir schätzen zunächst einmal die Fouriertransformation von F grob ab durch

$$\begin{aligned}|D_\xi^\alpha \widehat{F}(\zeta)| &\le \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-iz\zeta}(-iz)^\alpha F(z)\mathrm{d}x \right| \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{x\eta + y\xi}|x^\alpha||F(x+iy)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

mit $\zeta = \xi + i\eta$ und $z = x + iy$. Nun gibt es für jedes Kompaktum $L \subset -\Delta$ und $\eta \in L$ eine Konstante $\delta_L > 0$, mit der die weitere Abschätzung

$$\begin{aligned}&\le C'\mathrm{e}^{y\xi} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\delta_L|x|}|x^\alpha||F(x+iy)|\mathrm{d}x \\ &\le C'' \cdot \frac{|\alpha|!}{\delta_L^{|\alpha|}} \cdot \mathrm{e}^{y\xi}\end{aligned}$$

zulässig ist, vergleiche den Beweis von Theorem 8.3.2 in [**Kan88**]. Nun existieren nach Korollar 4.3.6 die Ableitungen $D_\omega^\alpha \widehat{f}(\rho\omega)$ für $|\alpha| \le k$ und daher können wir zum Beispiel die von G_+ so ausrechnen:

$$|D_\omega^\alpha G_+(\omega, t+is)| = \left| \frac{1}{2\pi} D_\omega^\alpha \int_0^\infty \mathrm{e}^{i(\rho+i\sigma)(t+is)} \widehat{F}((\rho+i\sigma)\omega)\mathrm{d}\rho \right|,$$

wobei $\omega \in -\Delta$ ist, wenn wir $\sigma > 0$ wählen. Dies läßt sich abschätzen durch

$$|D_\omega^\alpha G_+(\omega, t+is)| \le \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\rho s - \sigma t} \rho^{|\alpha|} (D_\xi^\alpha \widehat{F})((\rho+i\sigma)\omega)\mathrm{d}\rho \right|.$$

Mit der obigen Abschätzung erhalten wir für jedes $\kappa > 0$ weiter

$$\begin{aligned}&\le C \int_0^\infty \rho^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\delta_\sigma^{|\alpha|}} \mathrm{e}^{\kappa\rho}\mathrm{e}^{-\rho s - \sigma t}\mathrm{d}\rho \\ &\le C' \frac{(|\alpha|!)^2}{(\delta_\sigma(s-\kappa))^{|\alpha|}} \mathrm{e}^{-\sigma t}.\end{aligned}$$

Da das Endresultat tatsächlich endlich ist für jedes σ, können wir den Nenner durch $\nu^{|\alpha|}$ für eine geeignete Konstante $\nu > 0$ ersetzen. Dies zeigt die Behauptung. □

Wir kommen am Ende dieses Abschnittes zu dem Fall asymptotischer Hyperfunktionen $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$, der im Hinblick auf die asymptotischen Entwicklungen der interessanteste für uns ist. In diesem Fall erhalten wir eine recht genaue Klassifikation der Regularität von $\mathcal{R}f$ in ω als **ultradifferenzierbare Funktion**, vergleiche [**Kom89**].

DEFINITION 7.1.3. Ein $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt der **Gevrey-Klasse der Ordnung** s für $s > 1$ zugehörig genau dann, wenn für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ Konstanten h und $C > 0$ existieren so, daß

$$\|D^\alpha g\|_{C^0(K)} \le Ch^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s$$

gilt für $|\alpha| = 0, 1, 2, \ldots$.

Für $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ ist diese Abschätzung nach Theorem 7.1.2 für alle Ableitungen von $\mathcal{R}f(\omega, \cdot)$ bezüglich $\omega \in S^{n-1}$ für $h = \nu^{-1}$ und mit $s = 2$ erfüllt. Damit finden wir

KOROLLAR 7.1.4. *Sei $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$. Dann ist $\mathcal{R}f(\omega, t)$ eine gerade Funktion in (ω, t) in der Gevrey-Klasse der Ordnung 2 auf S^{n-1} mit Werten in $\mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}_t)$.*

Dieses Resultat steht in Analogie zu Proposition 2.8 in [**KT95**], wo die gleiche Regularität für die Radontransformierte exponentiell abfallender Hyperfunktionen gezeigt wird. Kaneko und Takiguchi zeigen am Beispiel, daß selbst in diesem Fall Gevrey-Klasse 2 die bestmögliche Regularität ist.

7.2. Die Helgason-Momente

Bevor wir darangehen, die asymptotischen Entwicklungen der Radontransformierten einer asymptotsichen Hyperfunktion zu untersuchen, betrachten wir zunächst einmal die Momente von $\mathcal{R}f$, die unter dem Namen **Helgason-Momente** bekannt sind. Sie sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p^k_{\mathcal{R}f}(\omega) &\overset{\text{def}}{=} \mu^k(\mathcal{R}f(\omega,\cdot)) \\ &= \int_{\mathbb{D}_t} t^k \cdot \mathcal{R}f(\omega,t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

für $k = 0, 1, 2, \ldots$. Die $p^k_{\mathcal{R}f}(\omega)$ erfüllen die sogenannte **Helgasonsche Moment-Bedingung**, siehe zum Beispiel [**Hel84**], S. 100, die besagt, daß die Helgason-Momente Polynome in ω sind und gleichzeitig ihre Verbindung zu den Taylorkoeffizienten von $\widehat{f}$ aufzeigt.

SATZ 7.2.1. *Das Helgason-Moment $p^k_{\mathcal{R}f}(\omega)$ ist ein homogenes Polynom vom Grad k in ω für jedes $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

BEWEIS. Berechnen wir zunächst die Helgason-Momente wie im Beweis von Satz 6.3.1, so erhalten wir die wichtige Formel

$$\begin{aligned} p^k_{\mathcal{R}f}(\omega) &= \left(\int_{\mathbb{D}_t} \mathcal{R}f(\omega,t)t^k \mathrm{e}^{-it\rho}\right)\Bigg|_{\rho=0} \\ &= \left(i^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\rho^k}\int_{\mathbb{D}_t} \mathcal{R}f(\omega,t)\mathrm{e}^{-it\rho}\right)\Bigg|_{\rho=0} \\ &= \left(i^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\rho^k}\widehat{f}(\rho\omega)\right)\Bigg|_{\rho=0}. \end{aligned}$$

Da die Fouriertransformation $\widehat{f}$ eine C^∞-Funktion ist, können wir ihre Taylorreihe mit Rest bis zur Ordnung k um 0 als

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha \xi^\alpha + R_{k+1}(\xi)$$

schreiben, mit $a_\alpha = D^\alpha_\xi \widehat{f}(0)/\alpha!$ und

$$R_{k+1}(\xi) = \sum_{|\beta|=k+1} \frac{D^\beta_\xi \widehat{f}(\Theta\xi)}{\beta!}\xi^\beta$$

für ein geeignetes $\Theta \in [0,1]$. Setzen wir dies in obige Formel ein, so erhalten wir wegen $D^k_\rho R_{k+1}(\rho\omega) = O(|\rho|)$ für $|\rho| \to 0$ die genaue Form des k-ten Helgason-Moments:

$$p^k_{\mathcal{R}f}(\omega) = i^k k! \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \omega^\alpha,$$

die unsere Behauptung zeigt. □

Wir wollen nun das Bild dreier Unterklassen von Fourier Hyperfunktionen unter der Radontransformation klassifizieren: Der Hyperfunktionen $\mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$

mit kompaktem Träger, der exponentiell abfallenden Fourier Hyperfunktionen $\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)$ und der asymptotischen Hyperfunktionen $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$.

Es zeigt sich, daß im ersten Fall die Helgason-Bedingung zusammen mit der Regularität in der Winkelvariablen ausreicht, um $\mathcal{R}\mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$ *genau* zu charakterisieren, das heißt $\mathcal{R}$ als algebraischen Isomorphismus darzustellen.

SATZ 7.2.2 ([**KT95**], Theorem 2.4). *Bezeichne mit $\mathscr{B}_{*H}(S^{n-1}\times\mathbb{R})$ den Raum der geraden Hyperfunktionen $g(\omega,t)$ mit kompaktem Träger, für die ω ein reell analytischer Parameter ist und die Helgasonsche Moment-Bedingung erfüllen. Dann induziert die Radontransformation einen Isomorphismus von $\mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$ auf $\mathscr{B}_{*H}(S^{n-1}\times\mathbb{R})$. Zusätzlich gilt die Abschätzung*

$$S_{\mathcal{R}f} \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sup_{\omega\in S^{n-1}} |p^k_{\mathcal{R}f}(\omega)|} < \infty$$

für $f\in\mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$.

Die Winkelvariable heißt hier **reell analytischer Parameter** in demselben Sinne, in dem sie für die Radontransformierte einer asymptotischen Hyperfunktion ein C^∞-Parameter ist, wie wir im letzten Abschnitt gezeigt hatten: Das heißt, für $f\in\mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$ ist die definierende Funktion $G(\omega,\tau)$ von $\mathcal{R}f$ analytisch fortsetzbar in eine komplexe Umgebung von S^{n-1} lokal gleichmäßig in $\tau\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Genaueres zu Hyperfunktionen mit reell analytischen beziehungsweise *holomorphen* Parametern findet sich in [**Kan88**], Kapitel 3 und 4.

Für die beiden anderen Hyperfunktionenklassen ist eine ebenso starke Aussage bisher nicht erzielt worden. Das Hindernis ist hier die Regularität von $\mathcal{R}f$ in ω, für die man bestenfalls Gevrey-Klasse der Ordnung 2 erwarten kann, denn auch im exponentiell abfallenden Fall gilt:

SATZ 7.2.3 ([**KT95**], Proposition 2.8). *Ist $f\in\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)$, so ist $\mathcal{R}f$ eine Funktion in der Gevrey-Klasse der Ordnung 2 mit Werten in $\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}_t)$**. *Sie ist gerade Funktion in (ω,t) und erfüllt Helgasons Moment-Bedingung. Zusätzlich gilt die Abschätzung*

$$R_{\mathcal{R}f} \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sup_{\omega\in S^{n-1}} |p^k_{\mathcal{R}f}(\omega)/k!|} < \infty.$$

In [**KT95**] war die Frage offengeblieben, ob durch Satz 7.2.3 das Bild von $\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)$ unter der Radontransformation *scharf* charakterisiert wird, in dem Sinne, daß $\mathcal{R}$ auf dem Bildbereich invertierbar ist. Dies liegt daran, daß es unklar ist, ob die Gevrey-2-Regularität ausreicht, um das Urbild der Radontransformierten als exponentiell abfallende Hyperfunktion rekonstruieren zu können. Dieselbe Situation hat sich durch Korollar 7.1.4 und 7.2.1 für die asymptotischen Hyperfunktionen ergeben. Die Bildräume dieser Hyperfunktionenklassen genau zu beschreiben und damit $\mathcal{R}$ eindeutig umkehrbar zu machen, bleibt also ein offenes Problem.

Die Radontransformierten der drei Hyperfunktionenklassen lassen sich aber immerhin durch die beiden Größen $S_{\mathcal{R}f}$ und $R_{\mathcal{R}f}$ unterscheiden. Es ergibt sich folgende Tabelle:

f	$R_{\mathcal{R}f}$	$S_{\mathcal{R}f}$
$\mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$	0	$<\infty$
$\mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)$	$<\infty$	$[0,\infty]$
$\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$	$[0,\infty]$	$[0,\infty]$

*Die Formulierung dieses Satzes in [**KT95**] enthält an dieser Stelle einen Schreibfehler.

In der ersten Zeile ist klarerweise $R_{\mathcal{R}f} = 0$, wenn $S_{\mathcal{R}f}$ endlich ist. In der zweiten wird im allgemeinen $S_{\mathcal{R}f}$ für endliches $R_{\mathcal{R}f}$ auch den Wert ∞ annehmen können. In der dritten Zeile sehen wir den Zusammenhang zu den eindimensionalen asymptotischen Entwicklungen des letzten Kapitels: In Abschnitt 6.3 haben wir gesehen, daß *jede* Folge komplexer Zahlen die Moment-Folge einer asymptotischen Hyperfunktion ist. Übertragen auf die Helgason-Momente und im Hinblick auf ihren Zusammenhang mit den Taylorkoeffizienten von $\widehat{f}$ bedeutet dies nichts anderes, als daß hier *jedes* homogene Polynom vom Grad k als $p^k_{\mathcal{R}f}(\omega)$ auftauchen kann. Sowohl $S_{\mathcal{R}f}$ als auch $R_{\mathcal{R}f}$ können in diesem Fall unendlich sein.

7.3. Asymptotische Entwicklung der Radontransformierten

Mit dem, was wir über die Radontransformation asymptotischer Hyperfunktionen, ihre Halgason-Momente und deren Beziehung zur Fouriertransformation wissen, ist es nun ein leichtes, die asymptotische Entwicklung aus Theorem 6.1.2 und Satz 6.3.1 auf $n > 1$ Dimensionen zu übertragen.

KOROLLAR 7.3.1. *Für $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ gilt die **Radon-asymptotische Entwicklung***

$$\mathcal{R}f(\omega, t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} p^k_{\mathcal{R}f}(\omega) \cdot \delta^{(k)}(t) \mod \mathcal{R}\mathcal{Q}_{[N+1]}(S^{n-1} \times \mathbb{D}_t).$$

Hierbei ist

$$\mathcal{R}\mathcal{Q}_{[N+1]}(S^{n-1} \times \mathbb{D}_t) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \mathcal{R}g \in \mathcal{R}\mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n) \;\middle|\; p^k_{\mathcal{R}g} \equiv 0,\ k = 0, \ldots, N \right\}$$

*der zugehörige **Radon-Restraum der Ordnung** $N+1$. Sie steht in folgender Beziehung zur Taylorentwicklung von $\widehat{f}$ im Ursprung:*

$$\mathcal{R}f(\omega, t) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{|\alpha|=k} (-i)^k a_\alpha \omega^\alpha \cdot \delta^{(k)}(t) \mod \mathcal{R}\mathcal{Q}_{[N+1]}(S^{n-1} \times \mathbb{D}_t),$$

wobei wieder $a_\alpha = D^\alpha_\xi \widehat{f}(0)/\alpha!$ ist.

Daß hier der Restraum im Bild der asymptotischen Hyperfunktionen unter $\mathcal{R}$ liegt, sieht man analog zum Beweis von Theorem 6.1.2, denn nach Satz 7.2.2 ist das eindeutig bestimmte Radon-Urbild der N-ten asymptotischen Partialsumme $S^N_{\mathcal{R}f}$ eine Hyperfunktion mit kompaktem Träger und damit insbesondere eine asymptotische Hyperfunktion. Das heißt, $f - \mathcal{R}^{-1} S^N_{\mathcal{R}f}$ ist eine asymptotische Hyperfunktion, deren Bild unter $\mathcal{R}$ gerade der Rest der Radon-asymptotischen Entwicklung bis zur Ordnung N ist. Daß dessen Helgason-Momente bis zur Ordnung N identisch verschwinden, folgt unmittelbar aus der Definition der Entwicklung. Man beachte auch, daß jede Partialsumme $S^N_{\mathcal{R}f}$ eine gerade Funktion in (ω, t) wird, da beim Übergang zu $(-\omega, -t)$ das Vorzeichen von $\delta^{(k)}$ genau von dem von $p^k_{\mathcal{R}f}$ weggehoben wird. Die Radon-asymptotische Entwicklung kann man natürlich ebenfalls wie in Theorem 6.1.4 in parametrischer Form schreiben. Wir verzichten hier darauf.

BEISPIEL 7.1. Sei $f(x) = J(D)\delta(x - a)$, mit $a \in \mathbb{R}^n$ und einem lokalen Operator $J(D) = \sum_{|\alpha| \geq 0} b_\alpha D^\alpha_x$. Die Radontransformierte von f ist

$$\mathcal{R}f(\omega, t) = J(\omega D_t)\delta(t - a\omega),$$

vergleiche [**KT95**], Beispiel 3.3. Damit lassen sich leicht die Helgasonmomente berechnen. Die Radon-Asymptotik von $\mathcal{R}f$ ist dann

$$\mathcal{R}f(\omega,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{(-1)^{k-|\alpha|}}{|\alpha|!} \cdot (b_\alpha \omega^\alpha)(a\omega)^{k-|\alpha|} \cdot \delta^{(k)}(t).$$

Man sieht hier sehr schön, wie alle Terme im Summanden der Ordnung k homogene Polynome vom Grad k werden.

Zum Abschluß unserer Untersuchungen kehren wir zurück zu den asymptotischen Entwicklungen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger aus Abschnitt 6.2. Die in Satz 7.2.2 angegebene Bedingung für die Helgason-Momente erinnert stark an die Bedingung für die Moment-Folge einer Hyperfunktion mit Träger in einem endlichen Intervall aus Satz 6.2.5. Um diese Bedingung mit Hilfe der Radon-asymptotischen Entwicklung auf n Dimensionen zu übertragen, brauchen wir ein weiteres Ergebnis aus [**KT95**], mit dem man vom Träger der Radontransformierten auf den Träger der ursprünglichen Hyperfunktion schließen kann. Dieser sogenannte *Satz vom Träger* geht ursprünglich auf Helgason zurück, vergleiche [**Hel84**], Seiten 105ff, wo er für Funktionen aus $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ bewiesen wird.

THEOREM 7.3.2 ([**KT95**], Theorem 4.1). *Ist $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ und verschwindet $\mathcal{R}f(\omega,t)$ für $|t| \geq R$, dann verschwindet $f(x)$ für $|x| \geq R$.*

Damit können wir jede Charakterisierung der Moment-Folgen von Hyperfunktionen mit kompaktem Träger auf n Dimensionen verallgemeinern, insbesondere die uns bekannte aus Theorem 6.2.7.

THEOREM 7.3.3. *Genau dann ist eine Folge $\{\alpha^k(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Polynomen auf S^{n-1}, die die Helgasonbedingung erfüllen, die Folge der Helgasonmomente der Radontransformierten $\mathcal{R}f$ einer Hyperfunktion $f \in \mathscr{B}_*(\mathbb{R}^n)$ mit Träger in der Vollkugel $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq R\}$ mit Radius R um den Ursprung, falls gilt: Für jedes $S > R$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $C_\varepsilon > 0$ so, daß die α^k die Abschätzung*

$$\sup_{\omega\in S^{n-1}} \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k(\omega)}{k!} \frac{1}{2S} \left(-\frac{\pi i q}{S}\right)^k \right| \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon|q|}$$

erfüllen für alle $q \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Hat $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ Träger in $B_R(0)$, so verschwindet $\mathcal{R}f(\omega,t)$ für $|t| > R$ und alle ω. Die Abschätzung folgt dann unmittelbar aus Theorem 6.2.7. Sei umgekehrt eine beliebige Folge von Polynomen $\alpha^k(\omega)$, die die Helgasonbedingung und obige Abschätzung erfüllen, vorgegeben. Aus der Vollständigkeit des Moment-asymptotischen Schemas in einer Dimension, siehe Satz 6.3.2, ergibt sich zusammen mit der Formel für die Helgasonmomente, die wir im Beweis von Satz 7.2.1 gefunden haben, daß auch das Radon-asymptotische Schema vollständig ist. Das heißt wir finden eine asymptotische Hyperfunktion $g \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ so, daß $p^k_{\mathcal{R}g}(\omega) = \alpha^k$ ist. Dabei kann nach Voraussetzung und Theorem 6.2.7 die Hyperfunktion g so gewählt werden, daß jede Komponente $\mathcal{R}g(\omega,\cdot)$ kompakten Träger in $[-R,R]$ hat. Dann folgt aus Theorem 7.3.2, daß g selbst für $|x| > R$ verschwindet. □

Anders als die direkte Übertragung von Theorem 6.2.7 auf das kartesische Produkt von Intervallen, die in [**YCK98**] formuliert wurde, erlaubt es unser Ergebnis, den Träger in sphärischen Gebieten zu beschränken.

7.4. Radon-Asymptotik und Singularitätenspektrum

Wir kommen zuletzt zur Übertragung der Diskussion der spektralen asymptotischen Entwicklung aus Abschnitt 6.4 auf die Radon-Asymptotik. Dazu erweitern wir zunächst den Begriff des Singularitätenspektrums aus Definition 3.2.4 auf n Dimensionen. Wir bezeichnen entsprechend die Menge $\mathbb{D}^n \times S^{n-1}$ mit $\mathbb{D}^n \times iS_\infty^{*n-1}$.

DEFINITION 7.4.1. Eine Fourier Hyperfunktion $f \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$ heißt **mikroanalytisch** im Punkt $(x, i\xi \mathrm{d}x\infty) \in \mathbb{D}^n \times iS_\infty^{*n-1}$, falls für eine geeignete Randwertdarstellung $f(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$ von f in einer Umgebung von x gilt, daß $\Gamma_j \cap \{y \in \mathbb{D}^n \mid \langle \xi\, , y\rangle < 0\} \neq \varnothing$ ist für alle j. Die Punkte, an denen f nicht mikroanalytisch ist, bezeichnen wir als **Singularitätenspektrum** $\mathrm{S.S.}\, f$ von f.

Die folgende Definition macht wesentlichen Gebrauch von der Tatsache, daß sowohl die Fourier Hyperfunktionen $\mathscr{Q}$ als auch die exponentiell abfallenden Hyperfunktionen $\mathscr{Q}_*$ eine welke Garbe auf $\mathbb{D}^n$ bilden, vergleiche [**Kan88**], Kaptiel 8, §5.

DEFINITION 7.4.2. Der Träger einer Fourier Hyperfunktion $f \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$ in der Quotientengarbe $\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n) \big/ \mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)$, das heißt die Menge

$$\operatorname{supp}_\infty f \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{supp}\Big(f \mod \mathscr{Q}_*(\mathbb{D}^n)\Big),$$

bezeichnen wir als den **wesentlichen Träger** von f.

Mit dieser Definition, die sozusagen aus einer Fourier Hyperfunktion das exponentielle Wachstum extrahiert, erhält man eine Charakterisierung des Singularitätenspektrums über die Wachstumsordnung ihrer Fouriertransformierten in bestimmten Richtungen. Diese Formulierung macht übrigens die Äquivalenz des Singularitätenspektrums von Hyperfunktionen zu Hörmanders analytischer Wellenfrontmenge WF_A manifest, vergleiche [**Hör83**], Abschnitt 9.3.

SATZ 7.4.3 ([**Kan88**], Theorem 8.5.5). *Für $f \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$ und jeden abgeschlossenen, konvexen Kegel Γ° sind äquivalent:*

i) $\mathrm{S.S.}\, f(x) \subset \mathbb{D}^n \times i\Gamma^\circ \mathrm{d}x\infty$.
ii) $\operatorname{supp}_\infty \widehat{f}(\xi) \subset \Gamma^\circ$.

Wir leiten nun eine elementare Abschätzung des Singularitätenspektrums einer asymptotischen Hyperfunktion aus dem ihrer Radontransformierten her, die — obwohl wir sie nachher nur als Hilfssatz benutzen — für sich genommen ganz interessant ist. Es sei darauf hingewiesen, daß wir zur Herleitung dieses Ergebnisses keine Garbentheorie für asymptotische Hyperfunktionen in n Dimensionen benötigen. Uns reichen die bekannten Tatsachen für Fourier Hyperfunktionen, die in Kapitel 3 dargestellte Garbentheorie asymptotischer Hyperfunktionen in einer Dimension und der Satz vom Träger für die Radontransformation.

THEOREM 7.4.4. *Sei $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$. Gilt für eine offene Untermenge $\Omega \subset S^{n-1}$ und ein $R > 0$*

$$\mathrm{S.S.}\, \mathcal{R}f(\omega, t) \cap \big\{|t| > R\big\} \times \pm i\mathrm{d}t\infty = \varnothing,$$

für alle $\omega \in \Omega$, dann gilt die Abschätzung

$$\mathrm{S.S.}\, f(x) \cap \big\{|x| > R\big\} \times \pm i\Omega \mathrm{d}x\infty = \varnothing$$

des Singularitätenspektrums von f.

BEWEIS. Setze $g = \mathcal{R}f$, wähle $\varepsilon > 0$ und zerlege g in zwei Anteile $g(\omega, t) = g_R(\omega, t) + g_\infty(\omega, t)$ mit Hilfe der Welkheit der Garbe $\mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}_t)$, siehe Theorem 3.2.2, so daß für alle $\omega \in S^{n-1}$ gilt: $g_R(\omega, t) = 0$ für $|t| \geq R + \varepsilon$ und es gibt ein $0 < \delta < \varepsilon$ so, daß $g_\infty(\omega, t) = 0$ für $|t| \leq R + \delta$. Aus Theorem 7.3.2 und Satz 7.2.2 folgt, daß g_R die Radontransformierte einer eindeutig bestimmten Hyperfunktion mit kompaktem Träger $f_R \in \mathscr{B}[\overline{B_{R+\varepsilon}(0)}]$ ist, wobei $B_{R+\varepsilon}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R+\varepsilon\}$ die Kugel mit Radius $R+\varepsilon$ um den Ursprung bezeichnet. Setzen wir $f_\infty = f - f_R \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$, so gilt

$$\mathcal{R}f_\infty = \mathcal{R}f - \mathcal{R}f_R = g - g_r = g_\infty$$

und die Singularitätenspektren von f für $|x| \geq R + \varepsilon$ beziehungsweise g für $|t| \geq R + \varepsilon$ sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} \mathrm{S.\,S.}\, f|_{\mathbb{D}^n \setminus \overline{B_{R+\varepsilon}}} &= \mathrm{S.\,S.}\, f_\infty|_{\mathbb{D}^n \setminus \overline{B_{R+\varepsilon}}}, \\ \mathrm{S.\,S.}\, g|_{|t|>R+\varepsilon} &= \mathrm{S.\,S.}\, g_\infty|_{|t|>R+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Das heißt, sie hängen nur von f_∞ beziehungsweise g_∞ ab. Dabei bedeuten $f|_{\mathbb{D}^n \setminus \overline{B_{R+\varepsilon}}}$ und $g|_{|t|>R+\varepsilon}$ die Einschränkungen von $f \in \mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)$ und $g \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}_t)$ als Elemente welker Garben auf die bezeichneten Mengen. Dies zeigt, daß es reicht, die Aussage für das Radon-Paar $\mathcal{R}f_\infty = g_\infty$ zu zeigen, da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann.

Wir betrachten nur den Fall $\mathrm{S.\,S.}\, g_\infty(\omega, t) \subset \mathbb{D}_t \times -i\mathrm{d}t\infty$ für alle $\omega \in \Omega$, das heißt das *positive* Vorzeichen in der obigen Annahme, da der andere Fall genauso bewiesen wird. Dann können wir mit einer geeigneten Wahl der definierenden Funktion erreichen, daß g_∞ die Darstellung $g_\infty(\omega, t) = [0, H_-(\omega, \tau)]$ hat, wobei $H_- \in \mathcal{O}_{-\infty}(\{0 < \operatorname{Im}\tau < \kappa_\omega\})$ ist und $\kappa_\omega > 0$ in Ω stetig von ω abhängt. Mit diesen definierenden Funktionen berechnen wir nun die Fouriertransformierte $\widehat{f_\infty}(\rho\omega)$ für $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} \widehat{f_\infty}(\rho\omega) &= \int_{\mathbb{D}_t} g_\infty(\omega, t) \mathrm{e}^{-it\rho} \mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_-(\omega, t - is) \mathrm{e}^{-i(t-is)\rho} \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{-s\rho} \int_{\mathbb{R}} H_-(\omega, t - is) \mathrm{e}^{-it\rho} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß $\widehat{f_\infty}(\rho\omega) = O(\mathrm{e}^{-s\rho})$ gilt für $\rho \to +\infty$, jedes $0 < s < \kappa_\omega$ und $\omega \in \Omega$. Das heißt, $\widehat{f_\infty}(\rho\omega)|_{\rho>0}$ ist eine exponentiell abfallende Hyperfunktion in der Variable ρ für alle $\omega \in \Omega$. Damit folgt $\operatorname{supp}_\infty \widehat{f_\infty} \cap \Gamma^\circ = \varnothing$ für eine hinreichend kleine, abgeschlossene, konvexe Kegelumgebung Γ° eines beliebigen Punktes $\omega \in \Omega$. Aus Satz 7.4.3 folgt dann, daß f_∞ mikroanalytisch ist an jedem Punkt in $\mathbb{D}^n \times +i\Omega\mathrm{d}x\infty$, was unsere Behauptung zeigt. □

Dieser Satz dient uns dazu, die spektrale asymptotische Entwicklung aus Abschnitt 6.4 und Satz 6.4.4 mittels der Radontransformation auf n Dimensionen zu übertragen. Zunächst definieren wir wieder eine Zerlegung der Radontransformierten einer asymptotischen Hyperfunktion in *oberen* und *unteren* Anteil. Anders als im eindimensionalen Fall ist hier durch die Radontransformation eine kanonische Wahl vorgegeben:

DEFINITION 7.4.5. Für $f \in \mathscr{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ definieren wir die **spektral konjugierte** Hyperfunktion ihrer Radontransformierten durch

$$\check{\mathcal{R}}f(\omega, t) \stackrel{\text{def}}{=} [G_+(\omega, \tau), -G_-(\omega, \tau)],$$

wobei $G_{\pm}(\omega, \tau)$ die kanonische definierende Funktion aus Definition 7.1.1 ist. Damit definieren wir weiter durch

$$\check{p}^k_{\mathcal{R}f}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} p^k_{\check{\mathcal{R}}f} \text{ und } p^k_{\mathcal{R}f\pm}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \pm\frac{1}{2}\left(p^k_{\mathcal{R}f}(\omega) \pm \check{p}^k_{\mathcal{R}f}(\omega)\right)$$

die **konjugierten, oberen** und **unteren Helgasonmomente** von $\mathcal{R}f$.

Damit ergibt sich folgendes Korollar als Folgerung aus Satz 6.2.5, Theorem 6.2.7 und Satz 7.4.3.

KOROLLAR 7.4.6. *Sei* $\{(\alpha^k_+(\omega), \alpha^k_-(\omega)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ *eine Folge von Polynomen auf* S^{n-1}*, die die Helgasonbedingung erfüllen. Gilt für die* $\alpha^k_{\pm}(\omega)$ *die Voraussetzung von Theorem 7.3.3, wobei das Supremum über eine offene Untermenge* $\Omega \subset S^{n-1}$ *genommen wird, so existiert ein* $f \in \mathcal{Q}_{-\infty}(\mathbb{D}^n)$ *so, daß* $p^k_{\mathcal{R}f\pm}(\omega) = \alpha^k_{\pm}$ *ist und die Abschätzung aus Theorem 7.4.4 für das Singularitätenspektrum von* f *gilt.*

Ausblick

Wie in der Einleitung erwähnt, ist unser Leitgedanke die Anwendung von Hyperfunktionen. An diesem Maßstab sollen sich auch die in Teil I und II untersuchten Klassen der asymptotischen Hyperfunktionen und die auf ihnen basierenden Techniken asymptotischer Entwicklungen in Teil III messen lassen. Deshalb wollen wir in diesem Ausblick einige Ideen zur Anwendung dieser Hyperfunktionentheorie vorstellen, die natürlich den persönlichen Geschmack des Autors (insbesondere sein Interesse an der Quantenfeldtheorie) wiedergeben. Doch dazu weiter unten mehr. Zunächst beschäftigen wir uns mit einigen innermathematischen Fragestellungen, die sich aus vorliegender Arbeit ergeben.

Mathematische Fragen und Verallgemeinerungen. Zwei prinzipielle Verallgemeinerungsmöglichkeiten der Theorie der Hyperfunktionen mit polynomialen Wachstumsbedingungen haben sich in deren Entwicklung in Teil I gezeigt. Zum einen wissen wir aus Abschnitt 1.3, vergleiche auch Anmerkungen 1.1 und 1.2, daß sowohl unsere Räume definierender Funktionen für Hyperfunktionen in $\mathscr{Q}_\gamma(\mathbb{D})$ als auch die reell analytischen Funktionen $\underline{\mathscr{O}}_\gamma(\mathbb{D})$ mit L^1-Bedingungen, zu denen sie nach Theorem 2.1.3 in Dualität stehen, im wesentlichen aus Hardyräumen H^p auf unbeschränkten Gebieten aufgebaut sind. Wir haben hier speziell den Fall $p = \infty$ beziehungsweise $p = 1$ betrachtet, aber es scheint durchaus möglich, die Grundlagen aus Abschnitt 1.3 für die Dualitätssätze aus Kapitel 2 auch für beliebige konjugierte Exponenten p und q zu zeigen. Damit wäre der Weg offen zu einer Theorie der allgemeinen „Hardy-Hyperfunktionen“ mit polynomialen Wachstumsbedingungen im unendlichen, die zum Beispiel auch Hyperfunktionenräume ähnlicher Art wie die *Sobolevräume* umfassen würde.

Die zweite, grundsätzliche Möglichkeit der Verallgemeinerung ist, die Entsprechungen obiger Klassen des *modifizierten Typs* [**Sab85**] zu betrachten, die sich in der Geometrie der Definitionsgebiete der definierenden Funktionen unterscheiden, wie wir es in Abschnitt 3.6 dargestellt haben. Diese *modifizierten Fourier Hyperfunktionen* sind wie wir gesehen haben — trotz ihres Namens — in mancher Hinsicht natürlicher als ihre unmodifizierten Verwandten. Sie fanden in der HFQFT eine wichtige Anwendung bei der euklidischen Rekonstruktion, siehe [**OS72, OS75, Sch97a**], die dort mit genau diesen Hyperfunktionen ohne zusätzliche Wachstumsbedingungen an die n-Punkt Funktionen möglich ist, siehe [**NM76b**] und vergleiche Anmerkung 3.3. Auch im Hinblick auf die asymptotische Theorie könnte die modifizierte Klasse nützlich sein, enthält sie doch Estradas Distributionenklasse $\mathscr{K}'$. Die natürlichen Definitionsgebiete der definierenden Funktionen des modifizierten Typs sind, einfach gesagt, Sektoren mit endlichem Öffnungswinkel, also genau die natürlichen Gebiete, in denen asymptotische Entwicklungen analytischer Funktionen gelten, was diesen Zusammenhang viel offensichtlicher macht als im unmodifizierten Fall, vergleiche die Abschnitte 6.2 und 6.4.

Alle eben genannten Verallgemeinerungen kann man hoffen, „in einem Aufwasch“ erledigen zu können über die allgemeine Prozedur, mit der Ito in [**Ito88**] alle bis dahin bekannten Hyperfunktionen behandelt. Dabei würde sich darüberhinaus auch ohne weiteres die Verallgemeinerung der Garbentheorie auf höhere Dimensionen ergeben. Itos Zugang ist die in der Einleitung angesprochene Dualitätsmethode. Er benutzt wie schon erwähnt ein sehr allgemeines Theorem, daß auf Schapira und Junker zurückgeht, zur Konstruktion welker Garben von Hyperfunktionen. Dieses Theorem 1.2.1 in [**Ito88**] sichert die Existenz und Eindeutigkeit einer lokalkonvexen, welken Garbe auf einem σ-kompakten, lokalkompakten topologischen Raum unter allgemeinen Bedingungen, von denen die wichtigsten abstrakte Formulierungen des Rungeschen und des Mittag–Leffler-Theorems sind. Man muß „nur“ diese Theoreme 2.3.2 und 2.4.1 — mit einer n-Dimensionalen Dualität wie in Theorem 5.2.2 und den entsprechenden funktionentheoretischen Hilfsmitteln in n Dimensionen — herzeigen, um die Garben- und Dualitätstheorie aller obengenannten Verallgemeinerungen in den Griff zu bekommen.

Ein Punkt, der längerfristig der Betrachtung wert ist und der eng mit der Asymptotik von Hyperfunktionen zusammenhängt ist die Frage des „Wertes einer Fourier Hyperfunktion im Unendlichen.“ Man kann, wie wir in Abschnitt 3.4 erwähnt haben, jede gewöhnliche Hyperfunktion auf viele Weisen als Fourier Hyperfunktion, das heißt als solche mit *infra-exponentieller* definierender Funktion auffassen, was bedeutet, daß die Restriktionsabbildung $\mathscr{Q}(\mathbb{D}^n) \longrightarrow \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ surjektiv ist. Dabei bekommt man eine infra-exponentielle, definierende Funktion für ein $f \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ über die sogenannte Mittag–Leffler-Prozedur, siehe den Beweis von Theorem 8.4.4 in [**Kan88**]. Dies ist eine seit längerem bekannte Methode, um zum Beispiel Distributionen aus $\mathscr{D}'$, die ja auch keine vernünftigen Wachstumsbedingungen erfüllen, als Randwerte analytischer Funktionen darzustellen, vergleiche [**Bre65**]. Die Methode basiert bei Hyperfunktionen auf der Welkheit der Garbe $\mathscr{B}$, die es erlaubt, f in Teile f_k, $k \in \mathbb{Z}$, etwa mit $\operatorname{supp} f_k \in [k, k+1]$, zu zerlegen. Für die einzelnen Teile findet man definierende Funktionen F_k so, daß sie sich zu einer infra-exponentiellen, definierenden Funktion für f auf ganz $\mathbb{R}^n$ aufsummieren lassen. Diese Prozedur liefert natürlich kein eindeutiges Ergebnis und die verschiedenen Möglichkeiten unterscheiden sich durch das Wachstumsverhalten der definierenden Funktion für $|\mathrm{Re}\, z| \to \infty$, was effektiv verschiedene Werte der entstehenden Fourier Hyperfunktion in den unendlich fernen Punkten zur Folge hat. In der Tat lassen sich die gewöhnlichen Hyperfunktionen als Quotient der Fourier Hyperfunktionen modulo solcher mit Träger im Unendlichen beschreiben, das heißt $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) = \mathscr{Q}(\mathbb{D}^n)/\mathscr{Q}[S_\infty^{n-1}]$. Diese Uneindeutigkeit und damit das Verhältnis der Fourier Hyperfunktionen auf der Kompaktifizierung $\mathbb{D}^n$ zu den gewöhnlichen auf $\mathbb{R}^n$ — abgesehen von obiger Quotientendarstellung — qualitativ besser zu verstehen, ist eine große Herausforderung.

Anwendungen I: Asymptotik von Kernen. R. Estrada, R. P. Kanwal *et al.* haben vor gut zehn Jahren die Technik der distributionalen, asymptotischen Entwicklungen eingeführt und verschiedene Anwendungen, zum Beispiel in der Zahlentheorie, aufgezeigt, siehe [**EK87, EK90, DEK96**]. Eine neuere Anwendungsmöglichkeit haben diese Autoren kürzlich in [**EF97, EGBV98**] vorgestellt: Die asymptotische Analyse von Greenschen Kernen und Spektraldichten elliptischer Differentialoperatoren. Sei H ein positiver, elliptischer (Pseudo)differentialoperator auf den Hilbertraum $\mathscr{H} = L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{M}, E)$, wobei $\mathcal{M}$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und E ein endlichdimensionales

Vektorbündel über $\mathcal{M}$ ist. Bezeichne mit $\mathcal{X}_\infty \subset \mathscr{H}$ den gemeinsamen Definitionsbereich aller Potenzen H^n, $n \in \mathbb{N}$, von dem wir annehmen, daß er dicht in $\mathscr{H}$ ist. Sei $E_H(\lambda)$ das zu H gehörige *Spektralmaß*, daß wir als operatorwertige Distribution auffassen. Man verwendet die *Spektraldichte*, also die Distributionsableitung

$$d_H(\lambda) = \frac{\mathrm{d}E_H(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$$

mit der symbolischen Schreibweise

$$d_H(\lambda) = \delta(\lambda - H),$$

um den Funktionalkalkül von H zu konstruieren. Insbesondere sind die Momente

$$H^n = \langle \delta(\lambda - H)\,, \lambda^n \rangle$$

definiert, was zeigt, daß $\delta(\lambda - H)$ eine Distribution in $\mathscr{K}'(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{X}_\infty, H))$ und damit die Moment-Asymptotik auf sie anwendbar ist. Dies führt auf Entwicklungen der Form

$$d_H(x, y; \lambda\sigma) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (H^n \delta)(x-y)\delta^{(n)}(\lambda\sigma)}{n!\sigma^{n+1}},$$

für $\sigma \to \infty$, des zu $d_H(\lambda)$ assoziierten *Greenschen Kerns*, der ein Element von $\mathscr{D}'(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \otimes E)$ ist. Die Autoren zeigen, daß solche asymptotischen Entwicklungen ein vielversprechendes Instrument in A. Connes *nichtkommutativer Geometrie*, vergleiche [**Con95, Con96**], sein können.

Die Verallgemeinerung der Moment-Asymptotik auf Hyperfunktionen, die wir in dieser Arbeit untersucht haben, bietet prinzipiell die Möglichkeit, dieses Instrument in ähnlicher Art auf singulärere, nicht elliptische *Pseudodifferential-* beziehungsweise *Fourierintegraloperatoren*, siehe zum Beispiel [**Tre80a, Tre80b, Tay91**], anzuwenden.

Anwendungen II: HFQFT. Das Hauptproblem, das alle Versuche einer mathematisch rigorosen Formulierung der QFT wie insbeondere die axiomatische [**SW64**], mit sich bringen, liegt in der Einbeziehung von Wechselwirkungen. Man kann dies als ein Problem der Singularität der Quantenfelder als operatorwertige, verallgemeinerte Funktionen auffassen, beziehungsweise als Frage der „richtigen" Testfunktionenräume für sie, siehe [**Wig81, MS92**]. Über Ansätze mit *Ultradistributionen* in [**CT74, CT79, Pie88**] gelangte man zur Hyperfunktionen-QFT (HFQFT, siehe [**NM76a, NM76b, NM77, NM79, BN89**]). Weitere Vorschläge benutzen sogar noch singulärere Klassen von Objekten, siehe [**Sol97a, Sol97b**]. Wir haben in Anmerkung 5.2 einige Beispiele für Quantenfelder in Modellen mit Wechselwirkung dargestellt, die stärkere als distributionale Singularitäten haben und zu deren Beschreibung sich deshalb die HFQFT eignen kann.

Die Methode, aus den singulären Quantenfeldern und ihren n-Punkt Korrelationsfunktionen verwertbare physikalische Information abzuleiten, besteht in einer ganzen Reihe von *Renormierungsvorschriften* [**'t 94**]. Viele dieser Vorschriften können aus mathematischer Sicht als asymptotische Entwicklungen von *Feynman-Diagrammen*, beziehungsweise der zugehörigen Korrelationsfunktionen in geeigneten Limiten aufgefaßt werden, wie V. A. Smirnov in [**Smi91, Smi95**] gezeigt hat. Renormierung wurde in [**NM86**] auch in der HFQFT untersucht.

Schematisch geht es bei solchen Entwicklungen um die Aufteilung der in einem Feynmann-Diagramm Γ (dies stellt im wesentlichen eine graphische

Vorschrift zur Berechnung einer bestimmten Korrelationsfunktion dar) vorkommenden Impluse und Massen in große $\underline{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_m\}$, beziehungsweise $\underline{M} = \{M_1, \ldots, M_n\}$ und kleine $q = \{q_1, \ldots, q_l\}$, $\underline{m} = \{m_1, \ldots, m_k\}$. Das Problem ist dann, das Verhalten des zugehörigen Feynman-Integrals (der Korrelationsfunktion) $F_\Gamma(\underline{Q}, \underline{q}, \underline{M}, \underline{m})$ im Limes $F_\Gamma(\underline{Q}/\rho, \underline{q}, \underline{M}/\rho, \underline{m})$, $\rho \to 0$, zu verstehen. Siehe [**Smi91, Smi95**] für die Details.

Es scheint gut möglich, die Ergebnisse vorliegender Arbeit zu benutzen, um asymptotische Entwicklungen von Korrelationsfunktionen konkreter Modelle der HFQFT zu untersuchen. Damit könnte man dann eventuell strukturelle Fragen beantworten:

i) Wie wirkt die asymptotische Entwicklung allgemein als Renormierungsvorschrift? Hierbei spielt die Auffassung von Hyperfunktionen als Randwerte holomorpher Funktionen und die daraus folgende Möglichkeit des Verständnisses ihrer asymptotischen Entwicklungen als solche analytischer Funktionen die Hauptrolle. Dies wird vermutlich zurückführen auf klassische Fragen der asymptotischen Analysis [**WW52, Olv97**], wie zum Beispiel der Darstellbarkeit des Restgliedes.

ii) Wie weit trägt das Konzept der Renormierung mittels asymptotischer Entwicklungen in den verschiedenen Distributionen- und Hyperfunktionenversionen der axiomatischen QFT? Welche Singularitäten lassen sich damit behandeln?

Ein wichtiges Instrument für das oben skizzierte Projekt wird — physikalisch gesprochen — die Verbindung von Asymptotik im Impulsraum zu der im Ortsraum sein. Mathematisch gesehen wird dies durch *Taubersche Sätze* erreicht, wie sie für Distributionen in [**VDZ90**] aufgeführt sind und im Rahmen der axiomatischen Quantenfeldtheorie in [**BS74, BS75**] gezeigt wurden. Solche Ergebnisse für verschiedene Klassen von Hyperfunktionen zu erzielen wird unabdingbar sein, um die oben dargestellten Ideen zu realisieren. Vorstufen davon — Sätze vom Paley–Wiener-Typ für asymptotische Hyperfunktionen — finden sich in Kapitel 4 und 5. Interessant wäre auch, diese Frage für die *Radon-Transformation* und deren in Kapitel 7 dargestellte Moment-Asymptotik zu untersuchen.

Anhänge

ANHANG A

Asymptotische *versus* Störungsentwicklungen

A.1. Einleitung

Wir kommen in diesem Anhang auf ein Thema zurück, das wir in Anmerkung 6.4 angesprochen hatten: Die *Störungsentwicklungen* von Hyperfunktionen, die wir unseren asymptotischen Entwicklungen gegenüberstellen wollen. Dies soll zeigen, in welchem Sinne und unter welchen Bedingungen die asymptotischen Entwicklungen von Kapitel 6 und 7 als *konvergente* Reihenentwicklungen von Hyperfunktionen verstanden werden können.

Die Idee dieser Störungsentwicklungen tauchte zuerst in [**GS64**], Kapitel III, auf. Dort wurde gezeigt, daß eine Entwicklung der Diracschen δ-Funktion der Form

$$\delta(x+V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V^n}{n!}\delta^{(n)}(x)$$

gilt, falls man den Testfunktionenraum auf solche Funktionen einschränkt, die analytisch fortsetzbar sind in eine Kreisscheibe $D_{V+\varepsilon}(0)$ für ein $\varepsilon>0$. In der Sprechweise der analytischen Funktionale heißt dies nichts anderes, als daß die Entwicklung in der Topologie des Raumes $\mathcal{O}'(\overline{D_V(0)})$ konvergiert.

R. Caboz, J.–P. Codaccioni und F. Constantinescu verallgemeinerten diesen Ansatz in [**CCC85**]. Sie zeigten, daß eine Entwicklung

$$\delta(H_0-E+V)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{V^n}{n!}\delta^{(n)}(H_0-E)$$

mit *nichtkonstanter* Störung $V(x)$ gilt unter den folgenden Annahmen: H_0 sei eine positiv definite quadratische Form auf $\mathbb{R}^n$ und die Flächen $H_0=E$ und $H\overset{\text{def}}{=}H_0+V=E$ seien nichtausgeartet und in einem Kompaktum K enthalten. Diese letzte Bedingung ist, wie wir sehen werden, eine notwendige Bedingung dafür, daß man konvergente statt asymptotischer Entwicklungen erhält. Die wichtigste Bedingung betrifft aber das Verhältnis der Größe der Störung V zur Größe ihres Analytizitätsgebietes. Grob gesprochen lautet sie: falls $|V(x)|$ für $x\in K$ beschränkt ist durch eine Konstante M, dann muß die Funktion V analytisch fortsetzbar sein in eine Kreisscheibe mit Radius echt größer als M (in der radialen Koordinate des durch die Form H_0 induzierten Koordinatensystems) unter Beibehaltung der Beschränkung.

Wendet man die rechte Seite der Entwicklung auf eine Testfunktion ϕ an, die analytisch ist in demselben Gebiet, und verwendet die Randwertdarstellung

$$\delta^{(n)}(H_0-E)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2\pi i}\left(\frac{1}{(H_0-E+i0)^{n+1}}-\frac{1}{(H_0-E-i0)^{n+1}}\right)$$

der δ-Funktion, vergleiche (6.2), so kann man folgenden Trick anwenden: Man deformiert den Integrationsweg in der Auswertung $\left\langle\delta^{(n)}(H_0-E),\phi\right\rangle$, so daß er einen Abstand η vom Punkt $H_0=E$ einhält, der größer ist als M. Setzt man die Randwertdarstellung in die Entwicklung ein, so findet man, daß ihr n-ter Term beschränkt ist durch

$$C \cdot \left| \frac{M^n}{\eta^{n+1}} \right| \leq C' \cdot q^n,$$

mit einer Konstante $0 < q < 1$. Dies zeigt, daß die Reihe in Anwendung auf solche Testfunktionen majorisiert wird durch eine geometrische Reihe und somit lokal gleichmäßig außerhalb der reellen Achse konvergiert. Ihre Summe ist

$$\frac{-1}{2\pi i} \frac{1}{H - z} = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n V^n}{(H_0 - z)^{n+1}},$$

in dem Gebiet $|z| > M$. Dies zeigt die Gültigkeit der Entwicklung in Anwendung auf Testfunktionen, die holomorph sind in dem genannten Gebiet.

Es ist klar, daß hier eine Konvergenz im Sinne analytischer Funktionale vorliegt. Wir werden im folgenden zeigen, daß solche Störungsentwicklungen im Rahmen der Hyperfunktionen und analytischen Funktionale (mit kompakten Trägern) sehr einfach zu verstehen ist — und dies nicht nur im Falle der δ-Funktion.

A.2. Zulässige Störungen

Gegeben ein offenes Gebiet $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$ und eine Hyperfunktion dargestellt als Summe von Randwerten $f(x) = \sum_{j=1}^{N} F_j(x + i\Gamma_j 0) \in \mathscr{B}[\widetilde{K}]$ mit Träger in einem Kompaktum $\widetilde{K} \subset \widetilde{\Omega}$. Wir nehmen im folgenden, um die Diskussion zu vereinfachen, immer an, daß $\widetilde{K}$ eine Zylindermenge ist.

Um die Klasse der Störungen $V(x)$, die wir betrachten können, festzulegen, müssen wir zunächst wissen, wann die *Substitution* $f(x+V(x))$ der neuen Koordinate $x + V(x)$ in f möglich ist. Dies wird in Kapitel 3, §4 von [**Kan88**] ausführlich beschrieben und wir geben hier nur die für uns wesentlichen Ergebnisse wieder. Sei also $\Phi\colon \Omega \to \widetilde{\Omega}$ eine reell analytische Abbildung zwischen offenen, zylindrischen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^m$. Wir wollen die **Substitution** $\Phi^* f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\Phi(x))$ durch die Randwertdarstellung

$$f(\Phi(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{N} F_j(\Phi(x + i\Gamma_j 0)),$$

das heißt durch die definierenden Funktionen $F_j(\Phi(z))$, definieren. Dies ist möglich unter folgender Bedingung:

THEOREM A.2.1 ([**Kan88**], Theorem 3.4.8). *Das* ***konormale Sphärenbündel*** *der Abbildung* Φ *wird definiert als die Untermenge*

$$(\operatorname{Im} \mathrm{d}\Phi)^{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (\widetilde{x}, i\widetilde{\xi} \mathrm{d}\widetilde{x}\infty) \;\middle|\; \widetilde{x} = \Phi(x),\ x \in \Omega,\ \widetilde{\xi} \perp \operatorname{Im} \mathrm{d}\Phi) \right\}$$

von $\widetilde{\Omega} \times iS_{\infty}^{*m-1}$. *Dabei ist*

$$\mathrm{d}\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} : T_x(\Omega) \longrightarrow T_{\Phi(x)}(\widetilde{\Omega})$$

die ***Tangentialabbildung*** *von* Φ, *dargestellt durch ihre* ***Jacobimatrix*** *und* $\operatorname{Im} \mathrm{d}\Phi$ *ihr Bild. Die Substitution* $\Phi^* f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(\Phi(x))$ *ist möglich, falls die Bedingung* $\mathrm{S.S.}\, f \cap (\operatorname{Im} \mathrm{d}\Phi)^{\perp} = \varnothing$ *erfüllt ist. Dann gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp} \Phi^* f(x) \subset \Phi^{-1}(\operatorname{supp} f(x)), \\ &\mathrm{S.S.}\, \Phi^* f(x) \subset \left(\Phi^{-1} \times {}^t(\mathrm{d}\Phi) \right) \mathrm{S.S.}\, f(x). \end{aligned}$$

Unter den Begriff der Substitution fallen also insbesondere auch Projektionen und Einbettungen. Wir betrachten von nun an aber nur noch den Spezialfall $n = m$.

BEISPIEL A.1. Für die δ-Funktion ist die obige Bedingung nicht nur hinreichend sondern auch notwendig. Sie lautet dann

$$\det \mathrm{d}\Phi(z) \neq 0, \text{ falls } \Phi(z) = 0,$$

für $z \in W$, mit einer Umgebung $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}^m}(\Omega)$ von Ω. Dann ist die definierende Funktion

$$F(z) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^m \frac{1}{\Phi_1(z) \cdots \Phi_m(z)}$$

von $\Phi^*\delta(x) = \delta(\Phi(x))$ holomorph in $W\#\Omega$ und definiert damit eine Hyperfunktion in $\mathscr{B}[N_{\mathbb{R}}(\Phi)]$, wobei $N_{\mathbb{R}}(\Phi)$ die Menge der reellen Nullstellen von Φ in Ω bezeichnet.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ kann man damit zum Beispiel folgende Rechnung im Sinne der Hyperfunktionen verstehen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2a}\big(\delta(x-a) - \delta(x+a)\big) &= \left[\frac{-1}{4a\pi i}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a}\right)\right] \\
&= \left[\frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z-a)(z+a)}\right] \\
&= \delta\big((x-a)(x+a)\big).
\end{aligned}$$

Die neue Koordinate $\Phi(x) = x^2 - a^2$ erfüllt offensichtlich die Bedingung von Theorem A.2.1. Lassen wir andererseits den Punkt 0 im Urbildbereich Ω weg, so können wir auch die Transformation

$$\delta\left(\frac{1}{x}(x-a)(x+a)\right) = \left[\frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{z}{(z^2 - a^2)}\right] = \frac{1}{2}\big(\delta(x-a) + \delta(x+a)\big)$$

als Koordinatensubstitution der δ-Funktion verstehen. Ist allgemeiner Φ eine meromorphe Funktion mit endlich vielen reellen Polen $P_{\mathbb{R}}(\Phi)$ und Nullstellen $N_{\mathbb{R}}(\Phi)$ so ist Φ eine zulässige Substitution für δ in dem Gebiet $\Omega = \mathbb{R} \setminus P_{\mathbb{R}}(\Phi)$. Die transformierte definierende Funktion F besitzt in diesem Fall eine *Partialbruchzerlegung* der Form

$$F(z) = \frac{-1}{2\pi i} \cdot \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{z - q_i} + G(z),$$

mit Koeffizienten $A_i \in \mathbb{C}$, einer ganzen Funktion $G(z)$ und den reellen Nullstellen $\{q_1, \dots, q_M\}$ von Φ, wobei zu beachten ist, daß die Nullstellen von Φ aufgrund der Bedingung von Theorem A.2.1 alle einfach sind. Geht man zu den Äquivalenzklassen im Sinne der Hyperfunktionen über, so erhält man die Identität

$$\delta(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{M} A_i \delta(x - q_i).$$

Diese Zerlegung ist natürlich nur dann möglich, falls man die Wurzeln des Zählers von Φ explizit kennt.

BEISPIEL A.2. Wir wollen versuchen, die auf dem **zweidimensionalen Lichtkegel** $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \langle x\,, x\rangle = 0\}$, mit $x = (x^0, x^1)$, $\langle x\,, y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} x^0 y^0 - x^1 y^1$, konzentrierte δ-Funktion

$$\delta\big(\langle x\,, x\rangle\big) = \delta\Big((x^0)^2 - (x^1)^2\Big)$$

zu definieren. Dazu gehen wir zu **Lichtkegelkoordinaten** $x_\pm \stackrel{\text{def}}{=} x^0 \pm x^1$ über und sehen sofort, daß die Abbildung $(x_+, x_-) \mapsto x_+ x_-$ nichtsingulär ist auf $\mathbb{R}^2_* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, das heißt $\delta(x_+x_-)$ ist wohldefiniert in $\mathbb{R}^2_*$. Man erkennt, wenn man die Randwertdarstellung von $\delta(x_+x_-)$ zum Beispiel in Orthanten benutzt, daß diese Distribution auf $\mathbb{R}^2_*$ die Darstellung

$$\delta(x_+x_-) = \text{f. p.}\,\frac{1}{x_+} \cdot \delta(x_-) + \text{f. p.}\,\frac{1}{x_-} \cdot \delta(x_+)$$

als Summe kartesischer Produkte besitzt. Diese Darstellung wurde schon in [**GS64**] am Ende von Kapitel III gefunden. Sie definiert außerdem eine Fortsetzung von $\delta(x_+x_-)$ in den Ursprung. Das solche Fortsetzungen nach $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ existieren folgt daraus, daß $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ eine welke Garbe ist. Die obige ist in gewissem Sinne die „regulärste“ Fortsetzung.

Mit der obigen Bedingung für Koordinatentransformationen wird für ein $f \in \mathscr{B}[\widetilde{K}]$ wie am Anfang dieses Abschnittes die folgende Definition sinnvoll:

DEFINITION UND BEMERKUNG A.2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen. Eine Funktion $V\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ habe die folgenden Eigenschaften:

i) (ZULÄSSIGKEIT). Die Abbildung $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} x + V(x)\colon \Omega \longrightarrow \widetilde{\Omega}$ erfüllt die Bedingung von Theorem A.2.1.
ii) (ANALYTIZITÄT). Für ein m-tupel $M = (M_1, \dots, M_m)$ nichtnegativer Zahlen setzen wir

$$\widetilde{K}_M \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in \mathbb{C}^m \;\middle|\; \sup_{\widetilde{z} \in \widetilde{K}} |z_i - \widetilde{z}_i| \le M_i \right\}.$$

Damit ist $V(x) \in \mathcal{O}(\partial \widetilde{K}_M)$ und es gilt $\Phi^{-1}(\widetilde{K}) \subset \widetilde{K}_M \cap \mathbb{R}^m$.
iii) (BESCHRÄNKTHEIT). Es gilt mit $V = (V_1, \dots, V_m)$ die Abschätzung

$$\sup_{z \in \partial \widetilde{K}_M} |V_i(z)| < M_i.$$

Dann heißt V **(reelle) analytische Störung der Stärke** M **für** f **(in** Ω**)**. Die Hyperfunktion $f(\Phi(x)) = f(x + V(x))$ ist damit eine Hyperfunktion mit Träger in $\widetilde{K}_M$.

Der zweite Teil von Eigenschaft ii) ist hierbei dafür verantwortlich, daß der Träger der gestörten Hyperfunktion $f(x + V(x))$ nicht „ins Komplexe wandert.“ Diese Forderung kann man natürlich leicht abschwächen, wenn man von vorneherein analytische Funktionale betrachtet. In Bedingung ii) betrachten wir außerdem V nur in einer Umgebung des Randes des Gebietes $\widetilde{K}_M$ und vernachlässigen das Verhalten der Funktion V außerhalb ihres Analytizitätsgebiets völlig.

BEISPIEL A.3. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $V(x) = -a^2/x$ eine reelle analytische Störung der Stärke M in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für die δ-Funktion und jedes $M > |a|$. Die Identität

$$\delta\big(x - a^2/x\big) = \frac{1}{2}\big(\delta(x-a) + \delta(x+a)\big)$$

folgt aus Beispiel A.1. Dieses Beispiel zeigt, daß die Störung den Träger der Hyperfunktion vergrößern kann.

A.3. Störungsentwicklungen

Wir sind nun soweit, unserer Hauptergebnis formulieren zu können. Dabei benutzen wir das in Definition 3.4.5 eingeführte formale Produkt.

THEOREM A.3.1. *Sei f wie oben und V eine relle analytische Störung der Stärke M für f. Dann konvergiert die* ***Störungsentwicklung***

$$f(x+V(x)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} \frac{V^\alpha(x)}{\alpha!} \circ D^\alpha f(x)$$

in dem Raum $\mathcal{O}'(\widetilde{K}_M)$ analytischer Funktionale.

BEWEIS. Wir haben vorausgesetzt, daß $\widetilde{K}$ zylindrisch ist. Damit ist auch $\widetilde{K}_M$ zylindrisch und der Raum $\mathcal{O}'(\widetilde{K}_M)$ besitzt die Darstellung

$$\mathcal{O}'(\widetilde{K}_M) \cong \mathcal{O}(U\#\widetilde{K}_M) \Big/ \sum_{j=1}^{m} \mathcal{O}(U\#_j\widetilde{K}_M),$$

für eine beliebige Umgebung $U \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}^m}(\widetilde{K}_M)$, vergleiche Theorem 5.2.2, und den Beweis von Theorem 6.5.1 in [**Mor93**]. Nach Bedingung iii) für Störungen der Stärke $M = (M_1, \ldots, M_n)$ können wir U so wählen, daß $V \in \mathcal{O}(U\#\widetilde{K}_M)$ ist und die Abschätzung

$$\left|\frac{V_i^n(z)}{z^{n+1}}\right| \le \left|\frac{M_i^n}{z^{n+1}}\right| \le C\cdot q_i^n$$

lokal gleichmäßig in $z \in U\#\widetilde{K}_M$ gilt, mit $q_i < 1$ für $i = 1, \ldots, m$. Eine definierende Funktion für $\Phi^* f$ gewinnt man zum Beispiel aus der standard definierenden Funktion von f durch das Cauchy-Integral

$$\begin{aligned} F(z) &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^m \int_{\widetilde{K}} \frac{f(x)}{(\Phi_1(z)-x_1)\cdots(\Phi_m(z)-x_m)} \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^m \int\limits_{\partial\widetilde{U}_1} \cdots \int\limits_{\partial\widetilde{U}_m} \frac{\widetilde{\mathbf{F}}_f(w)}{(w_1-\Phi_1(z))\cdots(w_m-\Phi_m(z))} \mathrm{d}w_1\cdots\mathrm{d}w_m \end{aligned}$$

Dabei ist $\widetilde{U} = \widetilde{U}_1 \times \cdots \times \widetilde{U}_m$ eine geeignete zylindrische Umgebung von $\widetilde{K}$. Aufgrund obiger Abschätzungen konvergiert die Taylorentwicklung

$$\frac{\widetilde{\mathbf{F}}_f(w)}{(w_1-z_1+V_1(z))\cdots(w_m-z_m-V_m(z))} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} \widetilde{\mathbf{F}}_f(w)\frac{(-1)^{|\alpha|}V^\alpha(z)}{(w-z)^{\alpha+\mathrm{I}}}$$

($\mathrm{I} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{N}^m$) lokal gleichmäßig in $z \in U\#\overline{\widetilde{U}_M}$ und $w \in \widetilde{U}\#\widetilde{K}$, nach Weierstrass' M-test. Damit können Integration und Summation vertauscht werden und wir erhalten

$$F(z) = \left(\frac{-1}{2\pi i}\right)^m \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} \int_{\partial\widetilde{U}} \widetilde{\mathbf{F}}_f(w)\frac{(-1)^{|\alpha|}V^\alpha(z)}{(w-z)^{\alpha+\mathrm{I}}} \mathrm{d}w,$$

lokal gleichmäßig in $z \in U\#\overline{\widetilde{U}_M}$. Da die Umgebung $\widetilde{U}$ von $\widetilde{K}$ beliebig gewählt war, folgt mit dem Satz B.5.4 von Stieltjes–Vitali die Konvergenz der Entwicklung gegen die holomorphe Funktion F in $U\#\widetilde{K}_M$. Damit definiert die Reihe, ebenso wie jedes ihrer Glieder, ein Funktional in $\mathcal{O}'(\widetilde{K}_M)$ und konvergiert in diesem Raum. Dies zeigt zusammen mit (6.2) die Aussage. □

Dieses Theorem ist, so wie es dasteht, natürlich noch nicht in seiner allgemeinsten möglichen Form. Man könnte zum Beispiel noch zusätzliche, holomorphe Parameter für f einführen, die von der Störung nicht betroffen sind, Störungen zulassen, die den Träger ins Komplexe verschieben oder auch Hyperfunktionen auf Mannigfaltigkeiten berachten. Die Grundstruktur des Beweises der Störungsentwicklung ist jedoch immer dieselbe.

A.4. Beispiele

BEISPIEL A.4. Es ist nun klar, daß die asymptotischen Entwicklungen der Beispiele 6.3–6.5 Störungsentwicklungen im obigen Sinne sind. Insbesondere ist der nichtlokale Verschiebungsoperator $e^{a \cdot D}$ eine stetige Abbildung von $\mathscr{B}[\{0\}]$ nach $\mathcal{O}'(\overline{D_M})$ für jedes $M > a$. Tatsächlich konvergiert hier die Störungsentwicklung sogar in $\mathcal{O}'(\overline{D_a})$, da die Störung außerhalb $\overline{D_a}$ nicht wächst. Die Summe

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$$

ist analytisch fortsetzbar nach $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, was wiederum zeigt, daß $e^{a \cdot D}$ den Raum $\mathscr{B}[\{0\}]$ auf $\mathscr{B}[\{a\}]$ abbildet. Beispiele 6.4 und 6.5 sind Auswertungen solcher Verschiebungen auf analytischen Testfunktionen. In [**CCC85**] wurde eine Anwendung im Rahmen der klassischen Mechanik im Zusammenhang mit dem Lagrange–Bürmann-Theorem dargestellt.

BEISPIEL A.5. Für $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1$ können wir das Verhalten der δ-Funktion unter linearen Transformationen reproduzieren. Wir finden für beliebiges $M > 0$:

$$\begin{aligned}\delta(x + \alpha x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2\pi i}(\alpha z)^n \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}\right] = \left[\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z}\right] \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n \\ &= \frac{1}{1+\alpha}\delta(x) = \delta\big((1+\alpha)x\big),\end{aligned}$$

wobei die eckigen Klammern hier Äquivalenzklassen in den analytischen Funktionalen $\mathcal{O}'(\overline{D_M}) = \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{D_M}) \,/\, \mathcal{O}(\mathbb{C})$ bedeuten. Daß diese geometrische Reihe für $|\alpha| \geq 1$ nicht mehr konvergiert, zeigt, daß man die Bedingung iii) für analytische Störungen im allgemeinen nicht lockern kann.

BEISPIEL A.6. Den einfachsten Fall, in dem eine Störung den Träger vergrößert, bietet Beispiel A.3. Als Störungsentwicklung erhalten wir dafür

$$\begin{aligned}\delta\big(x - a^2/x\big) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{a^{2n}}{x^n} \circ \delta^{(n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!}\delta^{(2n)}(x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-a)^n}{n!}\delta^{(n)}(x) + \frac{a^n}{n!}\delta^{(n)}(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(\delta(x-a) + \delta(x+a)\big),\end{aligned}$$

in $\mathcal{O}'(\overline{D_M})$ für alle $M > a$, in Übereinstimmung mit den Beispielen 6.3 und A.1.

BEISPIEL A.7. Für Ableitungen $D^\beta f$ von Hyperfunktionen gilt unter den Voraussetzungen von Theorem A.3.1 die Störungsentwicklung

$$(D^\beta f)(x + V(x)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} \frac{V^\alpha(x)}{\alpha!} \circ D^{\beta+\alpha} f(x)$$

in $\mathcal{O}'(\widetilde{K}_M)$, wie man leicht sieht, wenn man die Cauchy-Formel zur Berechnung der standard definierenden Funtkion $\widetilde{\mathbf{F}}_{D^\beta f}$ in den Beweis einsetzt.

BEISPIEL A.8. Sei f eine Hyperfunktion mit Träger in $\{0\}$. Dann ist f nach dem Struktursatz 4.4.2 darstellbar als

$$f(x) = J(D)\delta(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \delta^{(j)}(x),$$

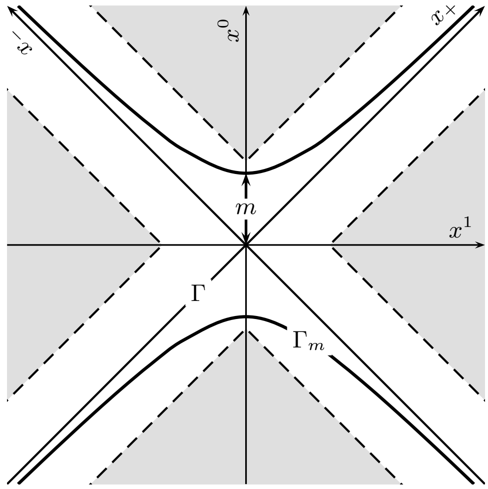

ABBILDUNG A.1. Zu Beispiel A.9.

mit einem lokalen Operator $J(D)$. Ist Φ eine rationale Funktion, die eine Partialbruchzerlegung wie am Ende von Beispiel A.1 besitzt, so können wir die Beispiele 6.3 und A.7 kombinieren, um die Formel

$$\Phi^* f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{M} A_i \frac{(-q_i)^n}{n!} f^{(n)}(x) = \sum_{j,n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{M} A_i a_j \frac{(-q_i)^n}{n!} \delta^{(i+n)}(x)$$

zu erhalten, die in $\mathcal{O}'(\overline{D_M})$ gilt mit $M = \max\{|q_i|\}$.

BEISPIEL A.9. Betrachten wir die auf dem zweidimensionalen **Massenhyperboloid** $\Gamma_m \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \langle x\,, x\rangle = m^2\}$ konzentrierte δ-Funktion

$$\delta\Big((x^0)^2 - (x^1)^2 - m^2\Big) = \delta(x_+ x_- - m^2),$$

mit $m > 0$, in den Lichtkegelkoordinaten von Beispiel A.2. In dem Gebiet $\mathbb{R}^2_{\varepsilon+} = \{(x^0, x^1) \mid |x_+| > \varepsilon\}$ finden wir

$$\delta(x_+ x_- - m^2) = \left[\frac{-1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{x_+} \cdot \frac{1}{z_- - \frac{m^2}{x_+}}\right]_{z_- = x_-} = \frac{1}{x_+} \cdot \delta\left(x_- - \frac{m^2}{x_+}\right)$$

und analog in $\mathbb{R}^2_{\varepsilon-}$. Diese Hyperfunktion besitzt die Störungsentwicklung

$$\frac{1}{x_+} \cdot \delta\left(x_- - \frac{m^2}{x_+}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m^{2n}}{n!} \left(\frac{1}{x_+}\right)^{n+1} \delta^{(n)}(x_-).$$

Diese Entwicklung konvergiert im Sinne analytischer Funktionale in der Koordinate x_- in dem Raum $\mathcal{O}'(\overline{D_M})$, mit $D_{M-} = \{z_- \mid |z_-| < M\}$, falls $M > m^2/\varepsilon$ ist. Die Konvergenz ist dabei lokal gleichmäßig in x_+, das heißt $x_+ \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ ist ein reell analytischer Parameter der Entwicklung. Ein analoges Resultat findet man für die andere Lichtkegelkoordinate und ein Vergleich mit der Darstellung von $\delta(x_+ x_-)$ aus Beispiel A.2 führt auf die Entwicklung

$$\delta(x_+ x_- - m^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n m^{2n}}{n!} \delta^{(n)}(x_+ x_-).$$

Diese Entwicklung einer Hyperfunktion auf $\mathbb{R}^2_{\varepsilon+} \cap \mathbb{R}^2_{\varepsilon-}$ gilt zunächst in dem Raum $\mathcal{O}'(\overline{D_{M+}} \times \overline{D_{M-}})$ für $M > m^2/\varepsilon$. Läßt man ε von unten gegen m streben, so sieht man, daß die Entwicklung in $\mathcal{O}'(\overline{D_{M+}} \times \overline{D_{M-}})$ für jedes $M > m$ konvergiert. Nach den Überlegungen von Beispiel A.2 können wir sie als analytische Störungsentwicklung einer Hyperfunktion auf ganz $\mathbb{R}^2$ auffassen. Die Situation ist in Abbildung A.1 skizziert. Das schattierte Gebiet ist die Projektion auf $\mathbb{R}^2$ des Konvergenzgebietes der Entwicklung (man beachte, daß die $x_\pm$-Achsen eine um den Faktor $\sqrt{2}$ längere Skala haben als die x^0- und x^1-Achse). Diese Entwicklung wird am Ende von Kapitel III von [**GS64**] als asymptotische Entwicklung dargestellt. Das Beispiel zeigt, daß wir unter gewissen Umständen auf die Forderung der Kompaktheit der Träger von gestörter und ungestörter Hyperfunktion verzichten können, falls die Störung in unabhängige Störungen in einzelnen Koordinaten zerfällt.

ANHANG B

Verwendete Definitionen und Aussagen

B.1. Notationen

Wir bezeichnen die natürlichen Zahlen $\{1, 2, \ldots\}$ mit $\mathbb{N}$ und setzen $\mathbb{N}_0 \overset{\text{def}}{=} \mathbb{N} \cup \{0\}$. Das Symbol $\mathbb{R}_\pm$ bezeichnet die offenen Halbachsen $\{x \in \mathbb{R} \mid x \gtrless 0\}$. Wir bezeichnen mit $D_R(z_0) \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ die offene Kreisscheibe vom Radius R mit Mittelpunkt z_0 in $\mathbb{C}$ und $A_R(z_0) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \overline{D_R(z_0)}$ den unbeschränkten Annulus mit innerem Radius R um z_0. Falls $z_0 = 0$ ist schreiben wir einfach D_R und A_R.

Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ bezeichnet xy ihr euklidisches Skalarprodukt. Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ und $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Wir verwenden die Schreibweise

$$D_x^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

für partielle Differentialoperatoren in der Koordinate x.

Eine Untermenge U eines topologischen Raumes X heißt **relativ kompakt** in X, falls ihr Abschluß in X kompakt ist. Wir schreiben dann $U \Subset X$. Die disjunkte Vereinigung zweier Mengen A und B schreiben wir als $A \sqcup B$.

B.2. Radiale Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$

Die im folgenden eingeführte Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ wurde von Kawai in [**Kaw70**] zur Konstruktion von Fourier Hyperfunktionen benutzt. Setze

$$\mathbb{D}^n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n \sqcup S_\infty^{n-1},$$

wobei S_∞^{n-1} die $n-1$-dimensionale Sphäre der unendlich fernen Punkte ist. Ihre Elemente bezeichnen wir mit

$$x\infty \in S_\infty^{n-1} \overset{\text{def}}{=} \big(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}\big)/\mathbb{R}_+,$$

für $x \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$. $\mathbb{D}^n$ trägt die folgende Topologie: Für $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{D}^n$ ist ein Fundamentalsystem offener Umgebungen gegeben durch ein beliebiges Fundamentalsystem von Umgebungen von x in $\mathbb{R}^n$. Für $x\infty \in S_\infty^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ definieren wir ein Fundamentalsystem von Umgebungen von $x\infty$ die Familie

$$U_{\Delta,A}(x\infty) \overset{\text{def}}{=} \big\{y \in \mathbb{R}^n \bigm| y/|y| \in \Delta, |y| > A\big\} \sqcup \Delta\infty,$$

$$\Delta\infty \overset{\text{def}}{=} \big\{y\infty \in S_\infty^{n-1} \bigm| y \in \Delta\big\},$$

von Teilmengen von $\mathbb{D}^n$, wobei Δ eine Umgebung von x in S^{n-1} ist. Mit diesen Setzungen ist $\mathbb{C}^n$ eingebettet in den zylindrischen topologischen Raum

$$\mathbb{Q}^n \overset{\text{def}}{=} \mathbb{D}^n + i\mathbb{R}^n,$$

der mit der Produkttopologie versehen ist. Mit diesen Topologien sind $\mathbb{D}^n$ und $\mathbb{Q}^n$ σ-kompakte, lokalkompakte Hausdorffräume. Den Abschluß einer Menge V in $\mathbb{D}^n$ oder $\mathbb{Q}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{\overline{V}}$, um ihn von den Abschlüssen in $\mathbb{R}^n$ oder

$\mathbb{C}^n$ zu unterscheiden. Wir schreiben $R_{\mathbb{R}^n} \overset{\text{def}}{=} R \cap \mathbb{R}^n$ für $R \subset \mathbb{D}^n$ und analog $S_{\mathbb{C}^n} \overset{\text{def}}{=} S \cap \mathbb{C}^n$ für $S \subset \mathbb{Q}^n$. Wir schreiben weiter

$$R \setminus S \overset{\text{def}}{=} (R_{\mathbb{C}^n} \setminus S_{\mathbb{C}^n}) \sqcup (R_\infty \setminus S_\infty)$$

für die Differenz zweier Mengen in $\mathbb{Q}^n$, wobei S_∞ die **unendlich fernen Punkte**, das heißt die Punkte von S in $S_\infty^{n-1} + i\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Weiterhin setzen wir $\mathbb{D} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{D}^1$ und $\mathbb{Q} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{Q}^1$. Sei $W \subset \mathbb{Q}^n$ offen. Eine Folge kompakter Mengen $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ in W heißt **ausschöpfend** für W, wenn $K_j \Subset K_{j+1}$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j = W$ ist. Eine Menge $S \subset \mathbb{Q}^n$ heißt **zusammenhängend**, wenn $S_{\mathbb{C}^n}$ zusammenhängend ist. S heißt **zylindrisch** oder **Zylindermenge**, wenn sie von der Form eines kartesischen Produkts $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ mit $S_i \subset \mathbb{Q}$ ist.

B.3. Lokal abgeschlossene Mengen

Eine **lokal abgeschlossene** Menge S in einem topologischen Raum X ist eine Menge, in der jeder Punkt $x \in S$ eine offene Umgebung U_x besitzt so, daß $U_x \cap S$ abgeschlossen ist in S. Jede lokal abgeschlossene Menge ist Schnitt einer abgeschlossenen mit einer offenen Menge, siehe [**Mor93**], §1.5. Insbesondere sind offene und kompakte Mengen lokal abgeschlossen. Eine **offene Umgebung** einer lokal abgeschlossenen Menge S ist eine offene Menge $W \subset X$ so, daß S abgeschlossen ist in W. Die Menge aller offenen Umgebungen von $S \subset X$ wird mit $\mathfrak{N}_X(S)$ bezeichnet.

B.4. Konvexe Kegel und infinitesimale Keile

Sei Γ ein offener, konvexer Kegel in $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen jeden Kegel Γ', für den $(\overline{\Gamma} \cap S^{n-1}) \supset (\overline{\Gamma'} \cap S^{n-1})$ gilt, als **eigentlichen Unterkegel** von Γ und schreiben dann $\Gamma' \Subset \Gamma$. Der zu Γ **duale Kegel** Γ° ist definiert durch

$$\Gamma^\circ \overset{\text{def}}{=} \big\{x \in \mathbb{R}^n \;\big|\; x\xi \geq 0 \text{ für alle } \xi \in \Gamma\big\}.$$

Der duale Kegel Γ° ist ein abgeschlossener, konvexer Kegel und es gelten für offene, konvexe Kegel Γ, Γ_1, Γ_2 die Identitäten

$$\begin{aligned} \Gamma^\circ &= (\widehat{\Gamma})^\circ, \\ (\Gamma^\circ)^\circ &= \overline{\widehat{\Gamma}}, \text{ und} \\ (\Gamma_1 + \Gamma_2)^\circ &= \Gamma_1^\circ \cap \Gamma_2^\circ, \end{aligned}$$

wobei $\widehat{\Gamma}$ die konvexe Hülle von Γ bezeichnet.

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{D}^n$ offen. Als **infinitesimalen Keil vom Typ** $\Omega + i\Gamma 0$ bezeichnen wir jede komplexe offene Menge $U \subset \mathbb{Q}^n$ so, daß $U \subset \Omega + i\Gamma$ ist und gilt: Für jeden eigentlichen Unterkegel $\Gamma' \Subset \Gamma$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß

$$U \supset \Omega_\varepsilon + i\big(\Gamma' \cap \{|y| < \delta\}\big),$$

wobei $\Omega_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} \overline{\overline{\{x \in \Omega_{\mathbb{R}^n} \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega_{\mathbb{R}^n}) > \varepsilon\}}}$ ist. Beachte daß, falls $\Omega_{\mathbb{R}^n}$ unbeschränkt ist, die letzte Bedingung garantiert, daß ein infinitesimaler Keil eine gewisse Breite in $\operatorname{Im} z$ bis ins reell Unendliche beibehält. Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}(\Omega + i\Gamma 0)$ die Menge der Funktionen, die holomorph sind auf einem beliebigen infinitesimalen Keil vom Typ $\Omega + i\Gamma 0$.

B.5. Funktionentheoretische Hilfsmittel

LEMMA B.5.1 ([**Mor93**], Lemma 2.1.1). *Sei K kompakt in $\mathbb{C}$ und $W \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(K)$. Dann existiert ein* ***spezieller Polyeder*** *L, das heißt ein Schnitt endlich vieler abgeschlossener Kreisringe (Annuli), mit $K \Subset L \Subset W$.*

Wir bezeichnen mit $\mathrm{d}\lambda(z)$ das Lebesguemaß und mit $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}$ das orientierte Flächenmaß auf $\mathbb{C}$. Wie üblich ist $\mathrm{d}z$ das Integrationsmaß für orientierte Wegintegrale in $\mathbb{C}$ und sein unorientiertes Gegenstück. Beachte die Umrechnungsvorschrift $\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z} = -2i\mathrm{d}\lambda(z)$.

SATZ B.5.2 ([**Hör66**], Theorem 1.2.1). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes, offenes Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f \in C^1(\overline{U})$. Dann gilt*

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi i}\left(\int_{\partial U} \frac{f(w)}{z-w}\mathrm{d}w + \iint_U \frac{\mathrm{d}f/\mathrm{d}\overline{w}}{z-w}\mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\overline{w}\right)$$

für alle $z \in U$.

SATZ B.5.3 ([**Hör66**], Theorem 1.2.4). *Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet, K ein Kompaktum in U und $V \in \mathfrak{N}_{\mathbb{C}}(K)$ mit $V \subset U$. Dann gibt es Konstanten $C_j > 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ so, daß für $f \in \mathcal{O}(V) \cap L^1(V, \mathrm{d}\lambda)$ die Abschätzung*

$$\sup_{z\in K}\left|\frac{\mathrm{d}^j f(z)}{\mathrm{d}z^j}\right| \leq C_j \|f\|_{L^1(V,\mathrm{d}\lambda)}$$

gilt.

SATZ B.5.4 (Stieltjes–Vitali, [**Hör66**], Korollare 1.2.6 und 2.2.5). *Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{C}^n$ ein offenes Gebiet und sei $\{f_q\}_{q\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{O}(U)$. Sei die Folge $\{|f_q|\}_{q\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt auf allen kompakten Teilmengen von U. Dann existiert eine Teilfolge $\{f_{q_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, die auf allen kompakten Teilmengen von U gleichmäßig gegen eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ konvergiert.*

SATZ B.5.5 ([**Dur70**], §1.3). *Eine stetige Funktion $g(z)$ auf einem beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist* ***subharmonisch*** *genau dann, wenn zu jedem $z_0 \in D$ ein $\rho_0 > 0$ existiert so, daß die Kreisscheibe $D_{\rho_0}(z_0)$ in D enthalten ist und die Abschätzung*

$$g(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + \rho \mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

erfüllt ist für alle $\rho < \rho_0$.

B.6. Lokalkonvexe, FS- und DFS-Räume

In diesem Abschnitt werden wir nicht versuchen, auch nur andeutungsweise eine Einführung in das weite Gebiet der *topologischen Vektorräume* und der *induktiven* und *projektiven Limiten lokalkonvexer Räume* zu geben. Für alle grundlegenden Begriffe, insbesondere des *projektiven* und *induktiven Spektrums* beziehungsweise *Limes* oder der *Spektralabbildungen* verweisen wir auf [**FW68**], §§6 und 23 und den Anhang A von [**Mor93**].

Als grundlegende Vereinfachung benutzen wir, daß jedes projektive (induktive) Spektrum äquivalenterweise (s. u.) durch eines ersetzt werden kann, das mit einer *konfinalen* und insbesondere abzählbaren Indexmenge gebildet wird, vergleiche [**FW68**], §6, Satz 2.5 und §23. Wir formulieren dementsprechend alle Aussagen von vornherein mit $\mathbb{N}$ als Indexmenge.

SATZ B.6.1 ([**FW68**], §6, Satz 2.6 und §23, Satz 4.1). *Seien $E = \varprojlim E_j$ und $F = \varprojlim F_j$ ($S = \varinjlim S_j$ und $T = \varinjlim T_j$) projektive (induktive) Limiten lokalkonvexer Räume. Es gebe stetige, lineare Abbildungen $A_j\colon E_j \to F_j$ ($B_j\colon S_j \to T_j$), die mit den Spektralabbildungen vertauschen, das heißt jedes Diagramm*

$$\begin{tikzcd} E_j \arrow[d, "A_j"'] & E_{j+1} \arrow[l, "\varepsilon_j^{j+1}"'] \arrow[d, "A_{j+1}"] \\ F_j & F_{j+1} \arrow[l, "\varphi_j^{j+1}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} S_j \arrow[r, "\sigma_{j+1}^{j}"] \arrow[d, "B_j"'] & S_{j+1} \arrow[d, "B_{j+1}"] \\ T_j \arrow[r, "\tau_{j+1}^{j}"'] & T_{j+1} \end{tikzcd} \right)$$

ist kommutativ. Dann wird eine stetige, lineare Abbildung

$$A\colon E \longrightarrow F \quad (B\colon S \longrightarrow T)$$

induziert für die

$$\varphi_j \circ A = A_j \circ \varepsilon_j \quad (B \circ \sigma^j = \tau^j \circ B_j)$$

gilt, wobei $\varepsilon_j\colon E \to E_j$ und $\varphi_j\colon F \to F_j$ ($\sigma^j\colon S_j \to S$ und $\tau^j\colon T_j \to T$) die kanonischen Abbildungen sind.

SATZ B.6.2 ([**FW68**], §6, Satz 2.7 und §23, Satz 4.2). *Sind $E = \varprojlim E_j$, $F = \varprojlim F_j$ ($S = \varinjlim S_j$, $T = \varinjlim T_j$) wie oben und gibt es stetige, lineare Abbildungen $A_j\colon F_j \to E_j$ und $B_j\colon E_j \to F_{j-1}$ ($C_j\colon S_j \to T_j$ und $D_j\colon T_j \to S_{j+1}$) so, daß alle Teildiagramme der Diagramme*

$$\begin{tikzcd} E_j & & E_{j+1} \arrow[ll, "\varepsilon_j^{j+1}"'] \arrow[dl, "B_{j+1}"'] & \\ & F_j \arrow[ul, "A_j"] & & F_{j+1} \arrow[ll, "\varphi_j^{j+1}"] \arrow[ul, "A_{j+1}"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} S_j \arrow[rr, "\sigma_{j+1}^{j}"] \arrow[dr, "C_j"'] & & S_{j+1} \arrow[dr, "C_{j+1}"] & \\ & T_j \arrow[ur, "D_j"] \arrow[rr, "\tau_{j+1}^{j}"'] & & T_{j+1} \end{tikzcd} \right)$$

kommutativ sind, so sind die projektiven (induktiven) Limiten E und F (S und T) topologisch isomorph.

Sind die Voraussetzungen des letzten Satzes erfüllt, so spricht man von **äquivalenten** projektiven beziehungsweise induktiven Spektren. Der Spezialfall, der uns hauptsächlich interessiert, ist der folgende:

DEFINITION B.6.3. Ist $E = \varprojlim E_j$ e in projektiver Limes ($S = \varinjlim S_j$ ein induktiver Limes) in dem alle E_j (S_j) Banachräume und alle Spektralabbildungen

$$\cdots \longleftarrow E_j \overset{\varepsilon_j^{j+1}}{\longleftarrow} E_{j+1} \longleftarrow \cdots \quad (\cdots \longrightarrow S_j \overset{\sigma_{j+1}^{j}}{\longrightarrow} S_{j+1} \longrightarrow \cdots)$$

kompakt sind, so heißt E **Fréchet-Schwartz-Raum** oder **FS-Raum** (**dualer Fréchet-Schwartz-Raum** oder **DFS-Raum**).

Die Beschränkung auf Banachräume ist keine wirkliche Einschränkung der Allgemeinheit, denn jede kompakte Abbildung zwischen lokalkonvexen Räumen faktorisiert über einem Banachraum, so daß man zu einem gegebenen Spektrum mit kompakten Spektralabbildungen stets ein äquivalentes findet, das aus Banachräumen besteht, siehe [**Flo70**], §6. Das folgende Lemma liefert eine gewisse „Transitivität" der Definition von DFS-Räumen.

LEMMA B.6.4 ([**Ito88**], Lemma 2.1.6). *Angenommen $E = \varinjlim E_m$ und $F = \varinjlim F_m$ sind induktive Limiten von Folgen lokalkonvexer Räume. Sei $r_m\colon E_m \to F_m$ eine kompakte Abbildung für alle m. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$r = \varinjlim r_m\colon E \longrightarrow F$$

ebenfalls kompakt.

FS- und DFS-Räume besitzen wichtige Permanenzeigenschaften:

SATZ B.6.5 ([**Mor93**], Anhang A, §§4 und 5). *Ist S ein FS-Raum (oder DFS-Raum) und T ein abgeschlossener Unterraum von S, dann sind sowohl T als auch der Quotient S/T FS-Räume (oder DFS-Räume).*

Kommen wir nun zu der Dualität zwischen FS- und DFS-Räumen. Sei $S = \varinjlim S_j$ der induktive Limes einer aufsteigenden Folge von lokalkonvexen Räumen. Falls S ein Hausdorffraum ist und für jede beschränkte Menge B in S ein Index j existiert so, daß $B \subset S_j$ gilt, so heißt der induktive Limes **regulär**.

SATZ B.6.6 ([**Mor93**], Theorem A.5.7). *Sei $S = \varinjlim S_j$ der induktive Limes einer aufsteigenden Folge von lokalkonvexen Räumen. Ist jede der Abbildungen $\rho^j_{j+1} \colon S_j \to S_{j+1}$ kompakt, so ist $\varinjlim S_j$ regulär.*

SATZ B.6.7 ([**FW68**], §26). *Ist $S = \varinjlim S_j$ regulär, so existiert ein topologischer Isomorphismus*

$$S' \xrightarrow{\sim} \varprojlim (S_j)'$$

lokalkonvexer Räume.

Hierbei meint S' den mit der starken Topologie versehenen Dualraum eines lokalkonvexen Raums, siehe [**FW68**], §13. Mit diesen beiden Ergebnissen kann man den Dualraum eines DFS-Raums als FS-Raum identifizieren:

LEMMA B.6.8 ([**Mor93**], Theoreme A.5.3 und A.6.1). *Falls der induktive Limes $S = \varinjlim S_j$ ein DFS-Raum ist, so ist S regulär. Dann existiert ein Isomorphismus lokalkonvexer Räume*

$$S' \xrightarrow{\sim} \varprojlim (S_j)'$$

und S' ist ein FS-Raum.

Ist der Induktive Limes nicht regulär, so gilt immerhin noch $S' \cong \varprojlim (S_j)'$ als algebraischer Isomorphismus, das heißt ohne Berücksichtigung einer Topologie auf S', siehe [**FW68**], §26.

FS-Räume sind vollständige, separable, hausdorffsche topologische Vektorräume. FS-Räume sind metrisierbar und deshalb insbesondere bornologisch. Daraus folgt, daß auch ihre Dualräume, also die DFS-Räume, vollständig sind. Auch DFS-Räume sind hausdorffsch und sowohl FS- als auch DFS-Räume sind Montel-Räume und daher insbesondere reflexiv.

Nun zu einigen allgemeinen Ergebnissen über topologische Vektorräume, von denen wir im Text Gebrauch machen.

THEOREM B.6.9 (Hahn-Banach, [**FW68**], §5, Abschnitt 2). *Sei E ein lokalkonvexer Raum und $F \subset E$ ein linearer Unterraum. Dann ist die Restriktionsabbildung $E' \to F'$ surjektiv.*

Es folgt eine sehr allgemeine Formulierung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen.

THEOREM B.6.10 ([**FW68**], §7, Abschnitt 2). *Seien E und F vollständige, metrisierbare, topologische Vektorräume und $T \colon E \to F$ linear. Ist der Graph von T abgeschlossen in der Produkttopologie von $E \times F$, so ist T stetig.*

Diese beiden Theoreme gelten insbesondere für FS- und DFS-Räume. Wir benötigen folgendes Kriterium für die *Nuklearität* von Räumen.

SATZ B.6.11 ([**Pie72**], Proposition 4.1.5). *Ein lokalkonvexer Raum E ist nuklear genau dann, wenn es ein Fundamentalsystem $\mathfrak{U}$ von Nullumgebungen in E gibt mit folgender Eigenschaft: Für jedes $U \in \mathfrak{U}$ existiert ein $V \in \mathfrak{U}$ und* *ein positives Radonmaß μ auf der schwach kompakten polaren Menge V° von V, das die Ungleichung*

$$p_U(x) \leq \int_{V^\circ} |\langle x\,, a\rangle| d\mu(a)$$

erfüllt, wobei p_U eine Halbnorm auf E ist, für die

$$U = \big\{ x \in E \bigm| p_U(x) < 1 \big\}$$

gilt (p_U ist das sogenannte ***Minkowski-Funktional*** *von U).*

Für die folgenden Permanenzeigenschaften der Nuklearität vergleiche auch §27 in [**FW68**].

SATZ B.6.12 ([**Tre67**], Proposition 50.1). *Ist E ein lokalkonvexer Raum, dann gelten die Aussagen:*

i) *E ist genau dann nuklear, wenn seine Vervollständigung nuklear ist.*
ii) *Jeder lineare Unterraum von E ist nuklear.*
iii) *Der Quotient von E modulo einem abgeschlossenen, linearen Unterraum ist nuklear.*
iv) *Ist E ein abzählbarer induktiver beziehungsweise projektiver Limes nuklearer, lokalkonvexer Räume, so ist E selbst nuklear.*

Für nukleare Räume ist insbesondere die Theorie der topologischen Tensorprodukte sehr einfach: Die *injektive* oder *ε-Topologie* von $E \otimes_\varepsilon F$ stimmt mit der *projektiven* oder *π-Topologie* von $E \otimes_\pi F$ überein (Für deren Definition siehe [**Tre67**], Kapitel 43). Mehr noch, es gilt

SATZ B.6.13 ([**Pie72**], Theorem 7.3.3). *Genau dann ist ein lokalkonvexer Raum E nuklear, wenn für alle lokalkonvexen Räume F die topologische Identität*

$$E \otimes_\pi F \cong E \otimes_\varepsilon F$$

gilt.

Dann sind insbesondere die Vervollständigungen der beiden topologischen Tensorprodukte in der jeweiligen Topologie $E \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} F$ beziehungsweise $E \mathbin{\widehat{\otimes}_\varepsilon} F$ topologisch Isomorph. Man schreibt deshalb einfach $E \mathbin{\widehat{\otimes}} F$, wenn einer der beiden Faktoren eines topologischen Tensorproduktes nuklear ist.

Literatur

[Akh65] AKHIEZER, N. I.: *The Classical Moment Problem*. New York : Hafner Publishing Company, 1965

[Bal92] BALIAN, Roger: *From Microphysics to Macrophysics*. Bd. II. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1992

[BG89] BOHM, A. ; GADELLA, M.: *Lecture Notes in Physics*. Bd. 348 : Dirac Kets, Gamow Vectors and Gel'fand Triplets. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1989

[BLOT90] BOGOLUBOV, N. N. ; LOGUNOV, A. A. ; OKSAK, A. I. ; TODOROV, I. T.: *General Principles of Quantum Field Theory*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990

[BN89] BRÜNING, Erwin ; NAGAMACHI, Shigeaki: Hyperfunction Quantum Field Theory: Basic Structural Results. In: *Journal of Mathematical Physics* 30 (1989), Nr. 1, S. 2340–2359

[BN98] BRÜNING, Erwin ; NAGAMACHI, Shigeaki: Closure of Field Operators, Asymptotic Abelianess, and Vacuum Structure in Hyperfunction Quantum Field Theory. In: *Journal of Mathematical Physics* 39 (1998), Nr. 10, S. 5098–5111

[Bre65] BREMERMANN, Hans: *Distributions, Complex Variables, and Fourier Transforms*. Reading, Massachusetts : Addison–Wesley Publishing Company, 1965

[BS74] BRÜNING, E. ; STICHEL, P.: On the Equivalence of Scaling, Light-cone Singularities, and Asymptotic Behavior of the Jost-Lehmann Spectral Function. In: *Communications in Mathematical Physics* 36 (1974), S. 137–156

[BS75] BRÜNING, E. ; STICHEL, P.: Asymptotics and Light-cone Singularities in Quantum Field Theory. In: ARAKI, H. (Hrsg.): *Proceedings of the International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Kyoto, Japan, January 19–23, 1975 : Springer-Verlag, 1975, S. 72–84

[CCC85] CABOZ, R. ; CODDACCIONI, J.-P. ; CONSTANTINESCU, F.: Taylor Series for the Dirac Function on Perturbed Surfaces with Applications to Mechanics. In: *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 7 (1985), S. 416–425

[CCK96] CHUNG, Jaeyoung ; CHUNG, Soon-Yeong ; KIM, Dohan: Characterizations of the Gelfand-Shilov Spaces via Fourier Transforms. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 124 (1996), Nr. 7, S. 2101–2108

[Cio90] CIORANESCU, I.: Moment Sequences for Ultradistributions. In: *Mathematische Zeitschrift* 204 (1990), S. 391–400

[Con95] CONNES, Alain: Noncommutative Geometry and Reality. In: *Journal of Mathematical Physics* 36 (1995), S. 6194–6231

[Con96] CONNES, Alain: Gravity Coupled with Matter and the Foundation of Noncommutative Geometry. In: *Communications in Mathematical Physics* 182 (1996), S. 155–175

[CT74] CONSTANTINESCU, Florin ; THALHEIMER, Willi: Euclidean Green´s Functions for Jaffe Fields. In: *Communications in Mathematical Physics* 38 (1974), Nr. 2, S. 299–316

[CT79] CONSTANTINESCU, Florin ; THALHEIMER, Willi: Ultradistributions and Quantum Fields: Fourier-Laplace Transforms and Boundary Values of Analytic Functions. In: *Reports on Mathematical Physics* 16 (1979), Nr. 2, S. 167–180

[DE94] DURÁN, A. L. ; ESTRADA, R.: Strong Moment Problems for Rapidly Decreasing Smooth Functions. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 120 (1994), Nr. 2, S. 529–534

[Dea83] DEANS, Stanley R.: *The Radon Transform and some of its Applications*. Reading, Massachusetts : Addison–Wesley Publishing Company, 1983

[DEK96] DURÁN, A. L. ; ESTRADA, R. ; KANWAL, R. P.: Pre-asymptotic Expansions. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 202 (1996), S. 470–484

[Dur70] DUREN, Peter L.: *Theory of H^p spaces*. London, San Diego : Academic Press, 1970

[EF97] ESTRADA, R. ; FULLING, S. A.: Distributional Asymptotic Expansions of Spectral Functions and of the Associated Green Kernels. Preprint. 1997. `funct-an/9710003`

[EGBV98] ESTRADA, R. ; GRACIA-BONDÍA, J. M. ; VÁRILLY, J. C.: On Summability of Distributions and Spectral Geometry. In: *Communications in Mathematical Physics* 191 (1998), S. 219–248

[EK87] ESTRADA, R. ; KANWAL, R. P.: Moment Sequences for a Certain Class of Distributions. In: *Complex Variables Theor. Appl.* 9 (1987), S. 31–39

[EK90] ESTRADA, R. ; KANWAL, R. P.: A Distributional Theory for Asymptotic Expansions. In: *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A* 428 (1990), S. 399–430

[Est98] ESTRADA, Ricardo: Vector Moment Problems for Rapidly Decreasing Smooth Functions of Several Variables. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 126 (1998), Nr. 3, S. 761–768

[Flo70] FLORET, Klaus: Lokalkonvexe Sequenzen mit kompakten Abbildungen. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 247 (1970), S. 155–195

[FW68] FLORET, Klaus ; WLOKA, Joseph: *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1968

[GGV66] GELFAND, I. M. ; GRAEV, M. I. ; VILENKIN, N. Y.: *Generalized Functions*. Bd. 5. London, San Diego : Academic Press, 1966

[GLS68] GROSSMAN, A. ; LOUPIAS, G. ; STEIN, E. M.: An Algebra of Pseudodifferential Operators and Quantum Mechanics in Phase Space. In: *Ann. Inst. Fourier* 18 (1968), S. 343–368

[GS64] GELFAND, I. M. ; SHILOV, G. E.: *Generalized Functions*. Bd. 2. London, San Diego : Academic Press, 1964

[GS69] GELFAND, I. M. ; SCHILOW, G. E.: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. Bd. II. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969

[GW64] GELFAND, I. M. ; WILENKIN, N. J.: *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)*. Bd. IV. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964

[Has61] HASUMI, Morisuke: Note on the n-Dimensional Tempered Ultra-Distributions. In: *Tôhoku Math. Journal* 13 (1961), S. 94–104

[Hel84] HELGASON, Sigurdur: *Groups and Geometric Analysis*. London, San Diego : Academic Press, 1984

[Hör66] HÖRMANDER, Lars: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. New York, Toronto, London, Melbourne : Van Nostrand Reinhold Company, 1966

[Hör83] HÖRMANDER, Lars: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*. Bd. I. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1983

[Ima92] IMAI, Isao: *Applied Hyperfunction Theory*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1992

[Ito88] ITO, Yoshifumi: Fourier Hyperfunctions of General Type. In: *J. Math. Kyoto Univ.* 28 (1988), Nr. 2, S. 213–265

[Ito92] ITO, Yoshifumi: Vector Valued Fourier Hyperfunctions. In: *J. Math. Kyoto Univ.* 32 (1992), Nr. 2, S. 259–285

[JS88] JAKOBCZYK, L. ; STROCCHI, F.: Euclidean Formulation of Quantum Field Theory Without Positivity. In: *Communications in Mathematical Physics* 119 (1988), S. 529–541

[Kan72] KANEKO, Akira: Representation of Hyperfunctions by Measures and some of its Applications. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 19 (1972), S. 321–352

[Kan88] KANEKO, Akira: *Introduction to Hyperfunctions*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1988

[Kas78] KASHPIROVSKY, A. I.: Equality of the Spaces $\mathscr{S}_\alpha^\beta$ and $\mathscr{S}_\alpha \cap \mathscr{S}^\beta$. In: *Functional Analysis Appl.* 14 (1978), S. 60

[Kaw70] KAWAI, Takahiro: On the Theory of Fourier Hyperfunctions and its Applications to Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 17 (1970), S. 467–515

[KCK93] KIM, K. W. ; CHUNG, S.-Y. ; KIM, D.: Fourier Hyperfunctions as Boundary Values of Smooth Solutions of the Heat Equation. In: *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* 29 (1993), S. 280–300

[KKK86] KASHIWARA, Masaki ; KAWAI, Takahiro ; KIMURA, Tatsuo: *Foundations of Algebraic Analysis*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1986

[Kom73] KOMATSU, Hikosaburo: Ultradistributions, I Structure Theorems and a Characterization. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 20 (1973), S. 25–105

[Kom89] KOMATSU, Hikosaburo: Microlocal Analysis in Gevrey Classes and in Complex Domains. In: CATTABRIGA, Lamberto (Hrsg.) ; RODINO, Luigi (Hrsg.): *Microlocal Analysis and Applications* Bd. 1495. Montecattini Terme, Italy : Springer-Verlag, Juli 1989, S. 161–236

[KT95] KANEKO, Akira ; TAKIGUCHI, Takashi: Radon Transform of Hyperfunctions and Support Theorem. In: *Hokkaido Mathematical Journal* 24 (1995), S. 63–103

[Mor93] MORIMOTO, Mitsuo: *An Introduction to Sato's Hyperfunctions*. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 1993

[MS92] MOSCHELLA, U. ; STROCCHI, F.: The Choice of Test Functions in Gauge Quantum Field Theory. In: *Letters in Mathematical Physics* 24 (1992), S. 103–113

[Nar85] NARASIMHAN, Raghavan: *Complex Analysis in One Variable*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser–Verlag, 1985

[NM76a] NAGAMACHI, S. ; MUGIBAYASHI, N.: Hyperfunction Quantum Field Theory. In: *Communications in Mathematical Physics* 46 (1976), S. 119–134

[NM76b] NAGAMACHI, S. ; MUGIBAYASHI, N.: Hyperfunction Quantum Field Theory II. In: *Communications in Mathematical Physics* 49 (1976), S. 257–275

[NM77] NAGAMACHI, S. ; MUGIBAYASHI, N.: Quantum Field Theory in Terms of Fourier Hyperfunctions. In: *Publ. RIMS, Tokyo Univ.* 12 (1977), S. 309–341. – Supplement

[NM79] NAGAMACHI, S. ; MUGIBAYASHI, N.: The Haag–Ruelle Formulation of Scattering in Hyperfunction Quantum Field Theory. In: *Reports on Mathematical Physics* 16 (1979), S. 181–201

[NM86] NAGAMACHI, S. ; MUGIBAYASHI, N.: Hyperfunctions and Renormalization. In: *Journal of Mathematical Physics* 27 (1986), Nr. 3, S. 832–838

[Olv97] OLVER, Frank W. J.: *Asymptotics and Special Functions*. London, San Diego : Academic Press, 1997

[OS72] OSTERWALDER, Konrad ; SCHRADER, Robert: Axioms for Euclidean Green´s Functions. In: *Communications in Mathematical Physics* 31 (1972), S. 83–112

[OS75] OSTERWALDER, Konrad ; SCHRADER, Robert: Axioms for Euclidean Green´s Functions II. In: *Communications in Mathematical Physics* 42 (1975), S. 281–305

[Pie72] PIETSCH, Albrecht: *Nuclear Locally Convex Spaces*. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1972

[Pie88] PIEROTTI, D.: The Exponential of the Two-Dimensional Massless Scalar Field as an Infrared Jaffe Field. In: *Letters in Mathematical Physics* 15 (1988), S. 219–230

[PM73] PARK, Young S. ; MORIMOTO, Mitsuo: Fourier Ultra-Hyperfunctions in the Euclidean n-Space. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 20 (1973), S. 25–105

[Rem89] REMMERT, Reinhold: *Funktionentheorie*. Bd. I. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 1989

[RS72] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. London, San Diego : Academic Press, 1972

[Rud74] RUDIN, Walter: *Functional Analysis*. TMH. New York, Singapore : McGraw-Hill Book Company, 1974

[Rud86] RUDIN, Walter: *Real and Complex Analysis*. 3. New York, Singapore : McGraw-Hill Book Company, 1986

[Sab85] SABURI, Yutaka: Fundamental Properties of Modified Fourier Hyperfunctions. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 8 (1985), Nr. 1, S. 231–273

[Sat59] SATO, Mikio: Theory of Hyperfunctions, I. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 8 (1959), Nr. 1, S. 139–193

[Sat60] SATO, Mikio: Theory of Hyperfunctions, II. In: *Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Ser. IA* 8 (1960), Nr. 2, S. 387–437

[Sch66] SCHWARTZ, Laurent: *Théorie des distributions*. Paris : Hermann, 1966

[Sch97a] SCHMIDT, Andreas U.: Euclidean Reconstruction in Quantum Field Theory: Between Tempered Distributions and Fourier Hyperfunctions / Johann Wolfgang Goethe-Universität. Frankfurt am Main, Germany, 1997. – Preprint. `math-ph/9811002`

[Sch97b] SCHMIDT, Andreas U.: Mathematical Problems of Gauge Quantum Field Theory: A Survey of the Schwinger Model. In: *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica* Fasciculus XXXIV (1997), S. 113–134. – `hep-th/9707166`

[Seb58] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Les fonctions analytiques commes ultradistributiones dans le calcul operationnél. In: *Mathematische Annalen* 136 (1958), S. 58–96

[Sim97] SIMON, B.: The Classical Moment Problem as a Self-adjoint Finite Difference Operator / California Institute of Technology. 1997. – Preprint. To appear in *Advances in Mathematics*

[Smi91] SMIRNOV, V. A.: *Renormalization and Asymptotic Expansions*. Boston, Basel, Stuttgart: Birkhäuser–Verlag, 1991

[Smi95] SMIRNOV, V. A.: Asymptotic Expansions in Momenta and Masses and Calculation of Feynman Diagrams. In: *Modern Physics Letters A* 10 (1995), Nr. 21, S. 1485–1499

[Sol97a] SOLOVIEV, M. A.: An Extension of Distribution Theory and of the Payley-Wiener-Schwartz Theorem Related to Quantum Gauge Theory. In: *Communications in Mathematical Physics* 184 (1997), S. 579–596

[Sol97b] SOLOVIEV, M. A.: Wick-Ordered Entire Functions of the Indefinite Metric Free Field. In: *Letters in Mathematical Physics* 41 (1997), S. 265–277

[Str93] STROCCHI, F.: *Lecture Notes in Physics*. Bd. 51 : Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. Singapore, London, Hong Kong : World Scientific, 1993

[SW64] STREATER, R. F. ; WIGHTMAN, Arthur S.: *PCT, Spin and Statistics, and All That*. London, Amsterdam : W. A. Benjamin, 1964

['t 94] 'T HOOFT, G.: *Under the Spell of the Gauge Principle.* World Scientific, 1994

[Tay91] TAYLOR, Micheal E.: *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE*. Boston, Basel, Stuttgart : Birkhäuser–Verlag, 1991

[Tit39] TITCHMARSH, E. C.: *The Theory of Functions*. 2. Oxford : Oxford University Press, 1939

[Tre67] TREVES, François: *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. London, San Diego : Academic Press, 1967

[Tre80a] TREVES, François: *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. Bd. 1. New York, London : Plenum Press, 1980

[Tre80b] TREVES, François: *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. Bd. 2. New York, London : Plenum Press, 1980

[VDZ90] VLADIMIROV, V. S. ; DROZZINOV, Yu. N. ; ZAVIALOV, B. I.: *Tauberian Theorems for Generalized Functions*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990

[Was65] WASOW, Wolfgang: *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. New York, London, Sydney : John Wiley & Sons, Inc., 1965

[Wid75] WIDDER, D. V.: *The Heat Equation*. London, San Diego : Academic Press, 1975

[Wig81] WIGHTMAN, Arthur S.: The Choice of Testfunctions in Quantum Field Theory. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 7B (1981), S. 769–791. – Supplement

[WW52] WHITTAKER, E. T. ; WATSON, G. N.: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1952

[YCK98] YEOM, Yongjin ; CHUNG, Soon-Yeong ; KIM, Dohan: Moment Problem for Hyperfunctions and Heat Kernel Method / Seoul National University. Seoul, Korea, April 1998 (RIM-GARC 98–8). – Preprint

Symbol-, Autoren- und Sachverzeichnis