Lyapunovfunktionen auf Zeitskalen

Diplomarbeit im Fach Mathematik
an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

vorgelegt von Alexandra Zmorzynska

Juli 2004

Für meine Familie

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Arbeiten von Alexander Michailowitsch Lyapunov (1857-1918) waren der Anfangspunkt intensiver Erforschung des Stabilitätsverhaltens von Differentialgleichungen.

In seiner Habilitationsschrift mit dem Titel „Das allgemeine Stabilitätsproblem der Bewegung“[1], die im Jahr 1892 erschien und 1907 ins Französiche übersetzt wurde, führt er das Problem stabiler Bewegung auf das Problem der Untersuchung der Stabilität der trivialen Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$

des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(x_1, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, \ldots, n \tag{0.0.1}$$

zurück, wobei die f_s für $s = 1, \ldots, n$ Potenzreihen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sind, die in einer Umgebung von $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ konvergieren[2].

Zur Untersuchung der trivialen Lösung von (0.0.1) setzt Lyapunov zwei von ihm entwickelte Methoden ein. Für die vorliegende Arbeit relevant ist davon die sogenannte zweite Methode, in der die Existenz von Funktionen

$$V(x_1, \ldots, x_n, t),$$

die zusammen mit ihren Ableitungen in t entlang einer Lösung von (0.0.1)

$$W(x_1, \ldots, x_n, t) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} f_s$$

[1] vgl. [4], S. 290 sowie [43], S. vii

[2] vgl. [45], S. IV

bestimmte Eigenschaften besitzen müssen, hinreichende Bedingung für Stabilität bzw. Instabilität der trivalen Lösung von (0.0.1) ist.

Solche Funktionen heißen Lyapunovfunktionen. Der Vorteil der zweiten Methode von Lyapunov besteht darin, dass wir weder Eigenwerte bzw. charakteristische Exponenten der Gleichungen zu kennen, noch das Verhalten von Lösungen in einer Umgebung der zu untersuchenden Lösung zu studieren brauchen. Der Nachteil besteht darin, dass eine geeignete Funktion V oft mühsam konstruiert werden muss[3].

Viele Autoren haben den Ansatz von Lyapunov aufgegriffen und weiterentwickelt, besonders bekannt sind hier unter anderem die Bücher von W. Hahn, [21] und V.I. Zubov, [45]. In dieser Arbeit werden wir uns oft auf T. Yoshizawa beziehen, der 1966 mit [43] ein sehr umfangreiches und ausführliches Buch über Stabilitätstheorie und Lyapunovs zweite Methode vorgelegt hat, in dem unter anderem hinreichende und notwendige Bedingungen von Stabilität diskutiert und viele verschiedene Existenzsätze für Lyapunovfunktionen bewiesen werden.

Einige der Ergebnisse bezüglich der Stabilität linearer Systeme wurden z.B. von S.N. Elaydi, [15] sowie V. Lakshmikantham und D. Trigiante, [31] unter Annahme einiger Zusatzbedingungen und mit kleinen Modifikationen in die Theorie der Differenzengleichungen übersetzt.

S. Hilger führte 1989 in seiner Dissertation[4] das Zeitskalenkalkül ein, eine Theorie die es ermöglicht, kontinuierliche und diskrete Gleichungen gleichzeitig zu untersuchen, weil als Zeitmengen beliebige, abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ zugelassen werden. Bis dahin behandelten z.B. die Lehrbücher von H. Amann, [3], B. Aulbach, [4] sowie P. Hartman, [22] lediglich den kontinuierlichen Fall mit ganz $\mathbb{R}$ als zugrundeliegender Zeitmenge, während Lakshmikantham und Trigiante 1988 in der Erstauflage von [31] sich auf den diskreten Fall, also $\mathbb{Z}$ als Zeitmenge beschränken.

Zum Zeitskalenkalkül und dessen Verallgemeinerung, dem Masskettenkalkül macht A. Döffinger in ihrer Diplomarbeit folgende Ausführungen:

> *„Durch die vielfältigen, bekannten Analogien in den Konzepten der Differenzenrechnung (...) unter Verwendung des Differen-*

[3] vgl. dazu unter anderem N. Rouche, P. Habets, M. Laroy, [20], S.12 und J. Cronin, [13], S. 191 sowie J. Ombach, [35], S. 225

[4] vgl. [24]

zenoperators

$$\frac{\Delta}{\Delta\tau} f(\tau) := \frac{f(\tau+h) - f(\tau)}{h}$$

einerseits und der Differentialrechnung mit dem Differentialoperator

$$\frac{d}{d\tau} f(\tau) := \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(\tau+h) - f(\tau)}{h}$$

andererseits inspiriert, wurde ein höherrangiger Kalkül, der sogenannte Maßkettenkalkül *entwickelt, der es erlaubt, (...) diskrete und kontinuierliche Prozesse einer einheitlichen Theorie zu unterwerfen (...).*

Es soll an dieser Stelle nicht auf das Axiomensystem eingegangen werden, das eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu einer Maßkette macht; es genügt zu wissen, daß sie alle Eigenschaften besitzt, die für die Entwicklung einer umfassenden, verallgemeinerten Differential- und Integralrechnung vonnöten sind.“[5].

M. Bohner und A. Peterson greifen in [11] S. Hilgers Ansatz auf, fassen die Theorie zusammen und bearbeiten ganze Klassen von verschiedenen Gleichungen auf Zeitskalen, mittlerweile liegt mit [12] eine Zusammenfassung neuerer Enwicklungen vor.

In der vorliegenden Arbeit sollen Lyapunovfunktionen auf Zeitskalen in Bezug auf das Stabilitätsverhalten des homogenen linearen Systems[6]

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{0.0.2}$$

untersucht werden.

Dabei wird zunächst eine Einführung in die Zeitskalenrechnung gegeben, in der bereits auf besondere Vorbedingungen der im zweiten Kapitel zusammengefassten Theorie der dynamischen Gleichungen und linearen Systeme auf Zeitskalen eingegangen werden soll.
In diesem Zusammenhang ist insbesondere zu erwähnen, dass die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von zeitskalenspezifischen Zusatzvoraussetzungen abhängen. Diese sollen benannt und in Bezug auf lineare Systeme diskutiert werden.

---

[5]vgl. [14], S.3

[6]Das hochgestellte Δ (Delta) steht hier für die Ableitung von x in Abhängigkeit von der zugrunde liegenden Zeitskala.

Im dritten Kapitel werden wir Stabilität im Sinne von Lyapunov sowie Lyapunovfunktionen einführen und nach einigen allgemeinen Bemerkungen beginnen, strikte Lyapunovfunktionen für autonome lineare Systeme (0.0.2) mit Hilfe der Gleichung

$$A^T P + (A\mu(t) + I)^T PA = -Q(t) \tag{0.0.3}$$

zu beschreiben, wobei μ eine Funktion ist, welche die Struktur der zugrunde liegenden Zeitskala wiedergibt, P eine symmetrische, positiv definite Matrix und Q eine in einem noch zu erläuternden Sinne symmetrische und positiv definite, matrixwertige Abbildung.
Gleichung (0.0.3) spielt bereits bei S. Hilger und P. Kloeden in [23], Prop. 1, S. 4 für Zeitskalen mit äquidistanter Schrittweite und konstanter Matrix Q, also von t unabhängig, als Lyapunovgleichung eine Rolle, nicht aber bei V. Lakshmikantham, B. Kaymakçalan und S. Sivasundaram in [30], die einen allgemeineren Ansatz wählen.

Wie wir sehen werden, ist die Existenz einer durch (0.0.3) gegebenen strikten Lyapunovfunktion allein in den wenigsten Fällen hinreichend für die asymptotische Stabilität von (0.0.2). Wir können jedoch einen Satz darüber formulieren, dass die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion mit einigen weiteren zeitskalenspezifischen Bedingungen im Allgemeinen hinreichend für die asymptotische Stabilität von (0.0.2) ist.

Im Folgenden soll bei zeitabhängig gewähltem P in (0.0.3) der nichtautonome, lineare Fall untersucht werden. Eine Verallgemeinerung des oben genannten Satzes mit hinreichenden Bedingungen für Stabilität wird bewiesen.

Im letzen Abschnitt wollen wir uns den von Yoshizawa in [43] so genannten *„converse theorems on asymptotic stability“*[7], also Sätzen, mit denen aus asymptotischer Stabilität eines linearen Systems die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion gefolgert werden kann, widmen.

Den Ansatz, mit Hilfe von (0.0.3) strikte Lyapunovfunktionen zu beschreiben, werden wir nur im autonomen Fall weiterverfolgen. Dort werden wir schließlich, unter der Bedingung, dass die zugrunde liegende Zeitskala von sehr einfacher Struktur ist, hinreichende und notwendige Bedingungen für asymptotische Stabilität von (0.0.1) formulieren können.

[7] vgl. [43], S. 91, §19

Im nichtautonomen Fall werden wir auf ein anderes, allgemeineres Konzept aus [43] zurückgreifen und dessen Anwendbarkeit auf Zeitskalen zeigen. In dessen Rahmen werden wir nur unter Voraussetzung eines strengeren Stabilitätsbegriffs, der exponentiellen Stabilität[8] von (0.0.2), die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion folgern können.

[8] vgl. [39], Def. 2, S.4

Notation

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen einschließlich der 0
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$h\mathbb{Z}$	die Menge $\{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ für $h > 0$
$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$	reelle Zahlen, nichtnegative reelle Zahlen
$\mathbb{C}$,	komplexe Zahlen
$\mathbb{C}^-$	längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene
$\mathbb{Q}$	rationale Zahlen
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
$\mathbb{T}$	Zeitskala (vgl. Definition 1.1.1)
$\mathbb{C}_h$	Hilger-komplexe Zahlen (siehe Definition 1.2.3)
$\mathbb{Z}_h$, $\mathbb{Z}'_h$	$\left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h}\right\}$, $\left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) < \frac{\pi}{h}\right\}$
$\mathbb{R}_h$	Hilger-relle Achse (siehe Definition 1.2.3)
$\mathbb{A}_h$	Hilger-alternierende Achse (siehe Definition 1.2.3)
$\mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbb{R}^{d\times d}$	Raum der $n \times n$ bzw. $d \times d$ Matrizen über $\mathbb{R}$, $n, d \in \mathbb{N}$
$\mathcal{B}$	Banachalgebra über $\mathbb{K}$
$\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$	Banachräume
$\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$	lineare beschränkte Abbildungen von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{Y}$
$\mathcal{L}(\mathbb{X})$	lineare beschränkte Abbildungen von $\mathbb{X}$ nach $\mathbb{X}$
$\mathcal{C}(\mathbb{T}, \mathbb{X})$	stetige Abbildungen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{X}$
$\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{X})$	rd-stetige Abbildungen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{X}$ (siehe Definition 1.2.1)
$S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$	Menge aller positiv definiten, symmetrischen $Q \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$, vgl. hierzu Definition 3.2.4
$\mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{X})$	Menge aller regressiven, rd-stetigen Abbildungen von $\mathbb{T}$ nach $\mathbb{X}$ (siehe Definition 2.1.4)
$\Sigma(A)$	Spektrum einer Abbildung $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$
$B_r(a)$	offene Kugel um $a \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$
A^T	transponierte Matrix zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
I	Identitätsmatrix auf $\mathbb{R}^{n\times n}$

id	Identitätsabbildung auf $\mathbb{X}$
μ	Körnigkeit einer Zeitskala (siehe Definition 1.1.4)
$\lVert\cdot\rVert$	Norm auf dem zu Grunde liegenden Banachraum $\mathbb{X}$ beziehungsweise eine zugehörige Operatornorm (siehe unten)
$\square$	Ende eines Beweises

Treten innerhalb einer Aussage mehrere Banachräume auf, so sind diese stets über demselben Körper $\mathbb{K}$ definiert.

Seien $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ Banachräume, $\lVert\cdot\rVert_1$ eine Norm auf $\mathbb{X}$ sowie $\lVert\cdot\rVert_2$ eine Norm auf $\mathbb{Y}$, dann wird für beliebige $x \in \mathbb{X}$ und $y \in \mathbb{Y}$ durch

$$\lVert(x, y)\rVert := \lVert x\rVert_1 + \lVert y\rVert_2$$

eine Norm auf $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ definiert; der Raum $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ wird vermöge der Operatornorm

$$\lVert A\rVert := \sup\{\lVert Ax\rVert_2 : \lVert x\rVert_1 \leq 1\}$$

für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ seinerseits zu einem Banachraum.

Kapitel 1

Grundlagen des Zeitskalenkalküls

1.1 Analysis auf Zeitskalen

1.1.1 Der Begriff der Zeitskala

Der Begriff „Zeitskala“ wurde 1988 von S. Hilger in seiner Dissertation (vgl. [24]) eingeführt und sollte dort der Vereinheitlichung von diskreter und kontinuierlicher Analysis dienen.

Seitdem wurde er von vielen Autoren aufgegriffen und in Bezug auf dynamische Systeme weiterentwickelt, wie z.B. in der Dissertation von S. Keller (vgl. [28]), in Papieren von P. Kloeden (vgl. [23], [19] und [18]), B. Aulbach (vgl. [6]), C. Pötzsche und S. Siegmund (vgl. [39], [38] und [37]) sowie in Büchern von V. Lakshmikantham *et al.* (vgl. [30]) oder auch von M. Bohner und A. Peterson (vgl. [11], [12]).

Im ersten Kapitel soll es um die Vorstellung und Zusammenfassung der grundlegenden Begriffe des Zeitskalenkalküls gehen.

1.1.2 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1.1. Eine *Zeitskala* $\mathbb{T}$ sei eine nichtleere, abgeschlossene Menge der reellen Zahlen.

Beispiel 1.1.1 (vgl. [11], S.1). Folgende Mengen können nach Definition

1.1.1 als Zeitskalen aufgefasst werden:

$$\mathbb{R}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}$$

sowie

$$h\mathbb{Z} := \{hk : k \in \mathbb{Z},\ h > 0\},$$

aber auch Mengen mit komplizierterer Struktur wie

$$[0;1] \cup [2;3], \quad [0;1] \cup \mathbb{N},$$

die Cantormenge oder deren Vereinigungen mit abgeschlossenen Intervallen sind denkbar.

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ eine Folge mit

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x.$$

Dann ist die Menge

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

ebenfalls eine Zeitskala.

Die Mengen

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad \mathbb{C}, \quad]0;1[$$

sind hingegen keine Zeitskalen.

Bemerkung 1.1.2. Insbesondere sind Zeitskalen als Teilmengen der reellen Zahlen stets total geordnet.
Die Relativtopologie auf Zeitskalen bezüglich $\mathbb{R}$ stimmt mit der von der Ordnung auf $\mathbb{T}$ induzierten Topologie überein (vgl. [37], Satz 4.4, S.8 und [24], Satz 1.1, S.1).

Mit den folgenden Funktionen werden die Punkte in $\mathbb{T}$ klassifiziert:

Definition 1.1.2. Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitskala und $t \in \mathbb{T}$. Dann heiße $\sigma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} \tag{1.1.1}$$

Vorwärtssprungoperator und $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} \tag{1.1.2}$$

Rückwärtssprungoperator. Wir setzen $\sigma(t) = t$, falls $t = \max\mathbb{T}$ gilt und $\rho(t) = t$, falls $t = \min\mathbb{T}$.

Definition 1.1.3. $t \in \mathbb{T}$ heiße

i.) *rechts zerstreut*, falls $\sigma(t) > t$

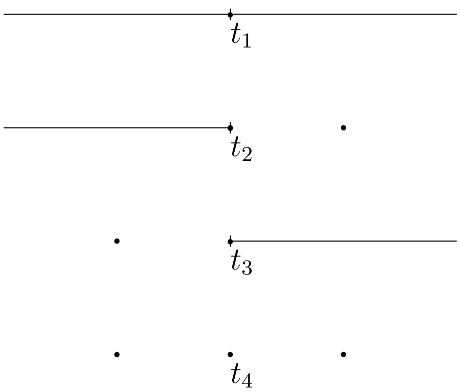
ii.) *links zerstreut*, falls $\rho(t) < t$

iii.) *rechts dicht*, falls $\sigma(t) = t$

iv.) *links dicht*, falls $\rho(t) = t$

v.) *isoliert*, falls $\rho(t) < t < \sigma(t)$

vi.) *dicht*, falls $\rho(t) = t = \sigma(t)$



t_1 ist dicht, bzw. links und rechts dicht

t_2 ist links dicht und rechts zerstreut

t_3 ist links zerstreut und rechts dicht

t_4 ist isoliert, bzw. links und rechts zerstreut

Abbildung 1.1: Lage von Punkten auf einer Zeitskala

Definition 1.1.4. Die Funktion $\mu : \mathbb{T} \longrightarrow]0;\infty[$ definiert durch

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

heiße *Körnigkeit*.
Diese gibt über die Struktur der Zeitskala Auskunft.

Ist ein Punkt $t \in \mathbb{T}$ rechts dicht, so gilt insbesondere

$$\mu(t) = 0,$$

ist er rechts zerstreut, so gilt

$$\mu(t) > 0.$$

Der Funktionswert von μ an der Stelle t beschreibt dabei die Größe des Sprungs zwischen t und dem folgenden Punkt der Zeitskala.

Wir werden sehen, dass die Körnigkeit bei der Analysis auf Zeitskalen und insbesondere auch bei Differentialgleichungen auf Zeitskalen eine große Rolle spielen wird.

1.1.3 Differentiation und Integration auf Zeitskalen

Als nächstes soll Differentiation und Integration auf Zeitskalen eingeführt werden.

Sei dazu im Folgenden $\mathbb{X}$ ein Banachraum über $\mathbb{K}$.

Damit die Ableitung in allen Punkten, in denen sie existiert, eindeutig ist (vgl. [11], Th.8.5., S. 316), muss man ein eventuelles links zerstreutes Maximum der Zeitskala von der Differentiation ausschließen.
Dazu dient die folgende Definition:

Definition 1.1.5. Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitskala. Dann sei die Menge $\mathbb{T}^k$ definiert durch

$$\mathbb{T}^k := \begin{cases} \mathbb{T}\backslash]\rho(\sup\mathbb{T}), \sup\mathbb{T}], & \text{falls} \quad \sup\mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T}, & \text{falls} \quad \sup\mathbb{T} = \infty \end{cases} \tag{1.1.3}$$

In vielen Arbeiten zu Zeitskalen (vgl. hierzu z.B. [36], [28]) wird das Problem mit einem links zerstreuten Maximum umgangen, indem nur nach oben unbeschränkte Zeitskalen betrachtet werden.

Definition 1.1.6. Sei $t \in \mathbb{T}^k$ und $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$.
Falls $x^{\Delta}(t) \in \mathbb{X}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_ε von t existiert mit

$$\left\| x(\sigma(t)) - x(s) - x^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s) \right\| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|$$

für alle $s \in U_\varepsilon$, heiße $x^{\Delta}(t)$ *(Delta-) Ableitung* von x an der Stelle t und x *(Delta-) differenzierbar* an der Stelle t.

Existiert x^{Δ} für alle $t \in \mathbb{T}^\kappa$, so heiße x *(Delta-) differenzierbar*.

Die Funktion $x^{\Delta} : \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{X}$ heiße *(Delta-) Ableitung* von x auf $\mathbb{T}^k$.

Satz 1.1.3 (vgl. [24], S. 27). *Sei $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$ und $t \in \mathbb{T}^k$.*
Dann gilt:

i.) Wenn g in t differenzierbar ist, so ist g stetig in t.

ii.) Sei g stetig und rechts zerstreut in t. Dann ist g in t differenzierbar mit

$$g^{\Delta}(t) = \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)}.$$

iii.) Sei g differenzierbar und rechts dicht in t, dann gilt:

$$g^{\Delta}(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{g(t) - g(s)}{t - s}.$$

iv.) Sei g differenzierbar in t. Dann gilt:

$$g(\sigma(t)) = g(t) + \mu(t) g^{\Delta}(t).$$

Bemerkung 1.1.4. Insbesondere folgt aus Satz 1.1.3, dass die Ableitung an einem rechts zerstreuten Punkt stets existiert und mit Hilfe der Körnigkeit explizit berechnet werden kann.

Der nächste Satz fasst eine Summen- und eine Produktregel für die Delta-Ableitung zusammen.

Offensichtlich sind diese Verallgemeinerungen der Ableitungsregeln aus dem reellen Fall.

Die in [30] eingeführte Kettenregel ist nur für den Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ gültig und im Allgemeinen falsch.

Die Verallgemeinerung der Kettenregel auf Zeitskalen ist möglich, aber nicht unmittelbar einsichtig und recht schwer zu handhaben, weil ein Integral auf Zeitskalen dazu ausgewertet werden muss, vgl. hierzu C. Pötzsche, [38]. Sie wird bei der Einführung von Lyapunovfunktionen Erwähnung finden.

Satz 1.1.5 (Ableitungsregeln). *i.) Seien $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$ differenzierbar in $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.*

Dann ist $\alpha f + \beta g$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ differenzierbar in t mit

$$(\alpha f + \beta g)^{\Delta}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + \beta g^{\Delta}(t).$$

ii.) Seien $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *und* $\mathbb{Z}$ *Banachräume über* $\mathbb{K}$ *und* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *eine stetige, bilineare Abbildung.*

Seien außerdem $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$ *und* $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{Y}$ *in* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *differenzierbar.*

Dann ist $\langle f(t), g(t) \rangle$ *differenzierbar mit*

$$\langle f(t), g(t) \rangle^\Delta = \langle f(\sigma(t)), g^\Delta(t) \rangle + \langle f^\Delta(t), g(t) \rangle.$$

Beweis: vgl. C. Pötzsche, [37], Satz 6.10, S.25, S. Keller, [28], Satz 1.2.3, S.3.

□

Beispiel 1.1.6. Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Da alle Punkte rechts dicht sind, folgt aus Satz 1.1.3, dass $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann in $t \in \mathbb{R}$ Delta-differenzierbar ist, wenn

$$\lim_{s \longrightarrow t} \frac{g(t) - g(s)}{t - s}$$

in $\mathbb{R}$ existiert, insbesondere gilt dann

$$f'(t) = f^\Delta(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.1.7. Sei $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.
Dann folgt aus Satz 1.1.3, dass $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ Delta-differenzierbar in $t \in \mathbb{Z}$ ist mit

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = \Delta f(t),$$

wobei Δf der aus der Theorie der Differenzengleichungen hinreichend bekannte Differenzenoperator (vgl. z.B. [31], Def. 1.1.1, S. 2) ist.

Beispiel 1.1.8. Sei $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := \alpha$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ für alle $t \in \mathbb{T}$ konstant.

Dann gilt

$$f^\Delta(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Beispiel 1.1.9. Sei $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := t$$

für alle $t \in \mathbb{T}$.

Dann ist

$$f^{\Delta}(t) = 1$$

für alle $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ nach Satz 1.1.3, denn es gilt

$$f^{\Delta}(t) = \frac{\sigma(t) - t}{\mu(t)} = \frac{\mu(t)}{\mu(t)} = 1,$$

falls $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ rechts zerstreut ist und

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{t - s}{t - s} = 1$$

für $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ rechts dicht.

Beispiel 1.1.10. Sei $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) := t^2$$

für alle $t \in \mathbb{T}$.

Dann gilt nach Satz 1.1.3 für rechts zerstreutes $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$

$$f^{\Delta}(t) = \frac{(\sigma(t))^2 - t^2}{\sigma(t) - t} = \sigma(t) + t,$$

für rechts dichtes $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ erhalten wir

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \longrightarrow t} \frac{t^2 - s^2}{t - s} = 2t.$$

Wegen $\sigma(t) = t$ für rechts dichtes $t \in \mathbb{T}$ gilt in beiden Fällen

$$f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t).$$

Wie man hier sieht, unterscheiden sich die Ableitungsregeln für Polynome auf Zeitskalen von denen im reellen Fall.
Es treten auch hier stets Ausdrücke auf, in denen die Struktur der Zeitskala zum Tragen kommt.

Das obere Beispiel 1.1.10, im reellen Fall eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit stetigen Ableitungen, verliert auf Zeitskalen betrachtet diese Glattheitseigenschaften, da der Vorwärtssprungoperator im Allgemeinen nicht differenzierbar und nicht stetig sein muss.

Beispiel 1.1.11. Sei $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$f = (f_1, \dots, f_n)$$

und $f_i : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ Delta-differenzierbar für $i = 1, \dots, n$ in $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Dann gilt:

$$f^\Delta(t) = (f_1^\Delta(t), \dots, f_n^\Delta(t)).$$

Aus Satz 1.1.3 folgt die Behauptung direkt durch Fallunterscheidung für $t \in \mathbb{T}^\kappa$ rechts dicht oder rechts zerstreut und Einsetzen in die entsprechenden Ableitungsformeln.

Definition 1.1.7. Sei $G : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $G^\Delta(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}^\kappa$ und $a \in \mathbb{T}^\kappa$.

Dann sei das Integral bezüglich der Zeitskala definiert durch

$$\int_a^t g(s)\Delta s = G(t) - G(a).$$

Zur ausführlichen Einführung des Cauchy - Riemann - Integrals sowie des allgemeineren Riemann - Stieltjes - Integrals auf Zeitskalen sei auf die Diplomarbeit von S. Hock verwiesen (vgl. [27]).

1.2 Regressivität und Rd-Stetigkeit

Um Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Anfangswertproblemen auf Zeitskalen im nächsten Kapitel angehen zu können, fehlen uns noch die zeitskalenspezifischen Eigenschaften Regressivität und Rd-Stetigkeit, die im Folgenden vorgestellt werden sollen.

Beide Eigenschaften spielen nur dann eine Rolle, wenn unsere Zeitskala rechts zerstreute Punkte enthält.

1.2.1 Rd-stetige Funktionen

Eine natürliche Verallgemeinerung der Stetigkeit für Zeitskalen, ist der Begriff der Rd-Stetigkeit, wobei der Ausdruck „rd“ die Abkürzung für rechts dicht ist.

Definition 1.2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$ heiße *rd-stetig* in $t \in \mathbb{T}$, wenn gilt:

i.) $\lim_{s \to t} f(s) = f(t)$ für t rechts dicht

ii.) $\lim_{s \nearrow t} f(s) = f(t^-)$, mit $f(t^-) \in \mathbb{X}$ für t links dicht.

Ist f in allen Punkten $t \in \mathbb{T}$ rd-stetig, so heiße f *rd-stetig auf* $\mathbb{T}$.

Beispiel 1.2.1. Eine Funktion

$$f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$$

mit $\mathrm{Re}(f) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{Im}(f) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße rd-stetig in $t_0 \in \mathbb{T}$, falls $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ rd-stetig in $t_0 \in \mathbb{T}$ sind.

Beispiel 1.2.2. Eine Funktion $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g := (g_1, \ldots, g_n)$ und $g_i : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße rd-stetig in $t_0 \in \mathbb{T}$, wenn g_i stetig in t_0 ist für alle $i = 1, \ldots, n$.

Lemma 1.2.3. *Seien f, $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ rd-stetig in $t \in \mathbb{T}$ und $\mathbb{X}$ ein Banachraum.*

Dann sind auch:

i.) $f + g$

ii.) $\lambda f, \quad \lambda \in \mathbb{K}$

iii.) $f \cdot g$

iv.) $\dfrac{f}{g}, \quad g \neq 0,$

v.) $h \circ f, \quad h : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{X}$ *stetig*

im Punkte $t \in \mathbb{T}$ rd-stetig.

Beweis: Die Behauptungen *i.*) bis *iv.*) folgen direkt aus Definition 1.2.1 und den Rechenregeln für Limiten.

Die Behauptung *v.*) folgt aus [28], Satz 1.3.3, S. 8.

□

Bemerkung 1.2.4. Behauptungen *i.*) und *ii.*) sowie Behauptung *v.*) aus Lemma 1.2.3 gelten weiterhin für $g, f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$ und $h : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$, wenn $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ beliebige Banachräume sind (vgl. [28], Satz 1.3.3, S. 8).

Definition 1.2.2.

$$\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T},\mathbb{X}) := \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}, \quad f \text{ rd-stetig auf } \mathbb{T}\}$$

heiße Menge aller auf $\mathbb{T}$ rd-stetigen Funktionen.

Bemerkung 1.2.5. Es folgt sofort, dass die Menge aller auf $\mathbb{T}$ stetigen Funktionen $\mathcal{C}(\mathbb{T},\mathbb{X})$ eine Teilmenge der auf $\mathbb{T}$ rd-stetigen Funktionen ist.

Für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ gilt insbesondere $\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{R},\mathbb{X}) = \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{X})$.

Korollar 1.2.6. *Sei $f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T},\mathbb{X})$ dann ist auch*

$$|f| := \max\{f, -f\} \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T},\mathbb{X}).$$

Beweis:

Da mit f auch $-f = -1 \cdot f$ nach Lemma 1.2.3 und Bemerkung 1.2.5 rd-stetig ist, folgt die Behauptung nach Definition von $|f|$, da das Maximum zweier rd-stetiger Funktionen wieder rd-stetig ist.

□

1.2.2 Hilger-komplexe Zahlen

Im nächsten Kapitel wollen wir die explizite Darstellung von Lösungen einer Klasse von Differentialgleichungen auf Zeitskalen nach z.B. S. Hilger in [25] und [26], C. Pötzsche in [37], M. Bohner und R.P. Agarwal in [1], S. Keller in [28] sowie B. Aulbach und S. Hilger in [6] betrachten.

Als Vorbereitung dafür werden wir die Zylindertransformation einführen, eine Funktion deren Definitionsmenge die sogenannten Hilger-komplexen Zahlen[1] ist.

Auch für die Regressivität einer Funktion $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$, so wie wir sie im Folgenden definieren wollen, wird ein verallgemeinerter Begriff der Hilger-komplexen Zahlen eine Rolle spielen.

Definition 1.2.3. Sei $h > 0$.

$$\mathbb{C}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : z \neq -\frac{1}{h} \right\}$$

[1]Benannt nach Stefan Hilger, der das Kalkül auf Zeitskalen eingeführt hat, vgl. hierzu auch [11]

heiße *Hilger-komplexe Zahlen*. Außerdem sei

$$\mathbb{Z}_h := \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \mathrm{Im}(z) \leq \frac{\pi}{h} \right\}.$$

Von einigem Interesse für die Geometrie der weiter unten definierten Zylindertransformation sowie für die Eigenschaften der Exponentialfunktion auf Zeitskalen sind folgende Mengen:

$$\mathbb{R}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z > -\frac{1}{h} \right\} \tag{1.2.1}$$

$$\mathbb{A}_h := \left\{ z \in \mathbb{C}_h : z < -\frac{1}{h} \right\}. \tag{1.2.2}$$

Dabei heiße $\mathbb{R}_h$ *Hilger-reelle Achse* und $\mathbb{A}_h$ *Hilger-alternierende Achse*. Für $h = 0$ sei definiert:

$$\mathbb{C}_0 := \mathbb{C}, \quad \mathbb{Z}_0 := \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R}_0 := \mathbb{R}, \quad \mathbb{A}_0 := \emptyset.$$

Definition 1.2.4. Sei $h > 0$ und $z \in \mathbb{C}_h$. Dann heiße

$$\mathrm{Re}_h(z) := \frac{|1 + zh| - 1}{h}$$

Hilger-Realteil von z. Für $h = 0$ setze:

$$\mathrm{Re}_0(z) := \mathrm{Re}(z)$$

Definition 1.2.5. Die Funktion $\xi_h : \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$ definiert durch:

$$\xi_h(z) := \begin{cases} \frac{1}{h} \operatorname{Log}(1 + zh) & \text{für } h > 0 \\ z & \text{für } h = 0 \end{cases}$$

heiße *Zylindertransformation*, wobei $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig des komplexen Logarithmus ist mit

$$\operatorname{Log}(z) := \log |z| + i\varphi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi. \tag{1.2.3}$$

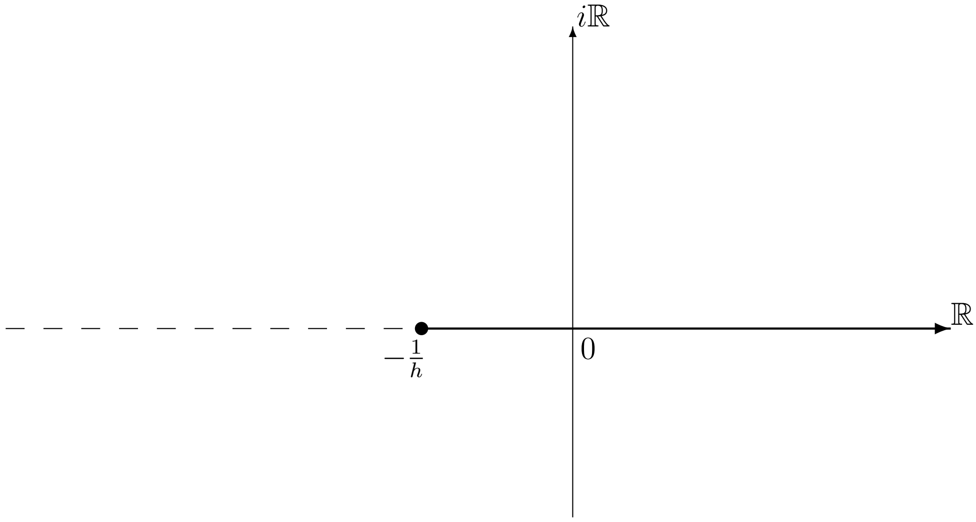


Abbildung 1.2: Lage von $\mathbb{C}_h$, $\mathbb{R}_h$ und $\mathbb{A}_h$ in der komplexen Ebene für $h > 0$

Bemerkung 1.2.7. Die Zylindertransformation ξ_h bildet für $h > 0$ die Hilger-reelle Achse $\mathbb{R}_h$ auf die reelle Achse $\mathbb{R}$ in $\mathbb{Z}_h$ und die Hilger-alternierende Achse $\mathbb{A}_h$ auf die horizontale Gerade durch $\frac{i\pi}{h}$ ab.

Das Bild der punktierten Kreisscheibe mit Mittelpunkt $-\frac{1}{h}$ und Radius $\frac{1}{h}$ liegt im Schnitt der imaginären Achse $i\mathbb{R}$ mit $\mathbb{Z}_h$.

Allgemein werden für $h > 0$ offene, von $-\frac{1}{h}$ ausgehende Strahlen in $\mathbb{C}_h$ zu horizontalen Geraden in $\mathbb{Z}_h$, punktierte Kreisscheiben mit Mittelpunkt $-\frac{1}{h}$ werden zu vertikalen Linien in $\mathbb{Z}_h$, beziehungsweise, wenn wir $\mathbb{R} \times \left\{i\frac{\pi}{h}\right\}$ und $\mathbb{R} \times \left\{-i\frac{\pi}{h}\right\}$ zusammenkleben und so für $\mathbb{Z}_h$ einen unendlich langen Zylinder erhalten, zu Kreisen auf seinem Mantel (vgl. [26], Abschnitt 3, S. 6 sowie [11], S. 57f, Def. 2.21, Ex. 2.22), so dass daher auch der Name „Zylindertransformation" motiviert ist.

Definition 1.2.6. Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitskala mit Körnigkeit μ. Eine Funktion $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ heiße <u>*regressiv*</u> in $t \in \mathbb{T}$, falls gilt:

$$f(t) \in \mathbb{C}_{\mu(t)} \tag{1.2.4}$$

Gilt dies für alle $t \in \mathbb{T}$, so heiße f regressiv auf $\mathbb{T}$.

Bemerkung 1.2.8. Für Zeitskalen $\mathbb{T}$ mit Körnigkeit $\mu \equiv h$ für ein $h \geq 0$ und $t \in \mathbb{T}$ ist Bedingung (1.2.4) äquivalent zu (vgl. [26], Sec. 4):

$$f(t) \in \mathbb{C}_h.$$

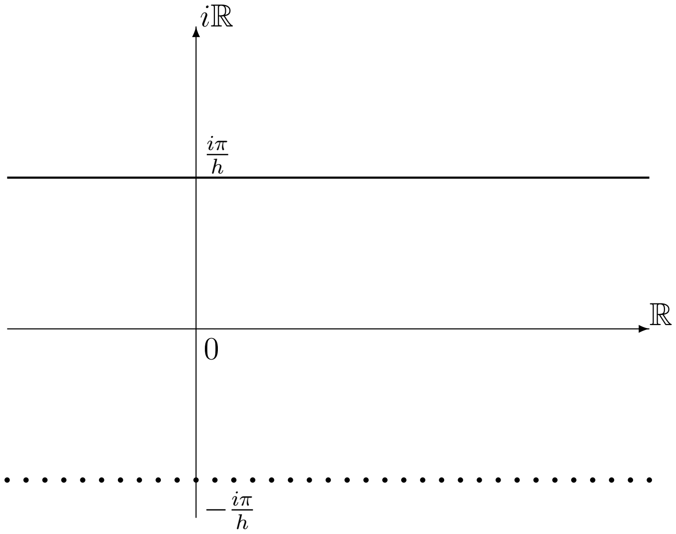


Abbildung 1.3: Lage von $\mathbb{Z}_h$ in der komplexen Ebene für $h > 0$

Bemerkung 1.2.9. Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitskala mit Körnigkeit μ und $f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ regressiv in $t \in \mathbb{T}$, dann gilt insbesondere

$$1 + \mu(t)f(t) \neq 0$$

und damit ist die Verknüpfung der Zylindertransformation mit f und μ in $t \in \mathbb{T}$ mit

$$\xi_{\mu(t)}(f(t)) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Log}(1 + \mu(t)f(t))}{\mu(t)}, & \text{falls } \mu(t) \neq 0; \\ f(t), & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

wohldefiniert.

1.2.3 Integrierbarkeit der Zylindertransformation

Zur expliziten Darstellung von Lösungen einer Klasse von Differentialgleichungen auf Zeitskalen nach z.B. S. Hilger in [25] und [26], C. Pötzsche in [37], M. Bohner und R.P. Agarwal in [1], S. Keller in [28] sowie B. Aulbach und S. Hilger in [6] benötigen wir des Weiteren die Integrierbarkeit der Verknüpfung der in Definition 1.2.5 eingeführten Zylindertransformation ξ mit einer auf $\mathbb{T}$ regressiven Funktion $f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ und der Körnigkeit μ von $\mathbb{T}$.

Nach [11], Th.1.74, S. 27 sind alle rd-stetigen Funktionen Delta-integrierbar.

Die Rd-Stetigkeit der oben genannten Verknüpfung von Zylindertransformation ξ mit f und μ wird oft mit dem Argument der Verknüpfung zweier rd-stetiger Funktionen mit einer stetigen Funktion nach Lemma 1.2.3 abgetan. ξ ist aber nach Definition 1.2.5 mit Hilfe des Hauptzweigs des komplexen Logarithmus erklärt, der auf der negativen, reellen Achse der komplexen Ebene nicht stetig ist.

Diese Tatsache wird in der Literatur bis auf einige vage Hinweise auf mögliche Potenzreihendarstellungen in [25], S. 53 und [37] kaum untersucht. Dennoch wird z.B. in [26], Abschnitt 4, S. 7 sowie [11], Def. 2.30, S. 59 über die Verknüpfung von f und μ mit der Zylindertransformation integriert, ohne dass deren Integrierbarkeit vorher Erwähnung finden würde.

Im Folgenden wollen wir unter Berücksichtigung der oben genannten Hinweise die Delta-Integrierbarkeit zeigen, indem wir zeigen, dass $\xi_\mu(f)$ rd-stetig auf $\mathbb{T}$ ist.

Bemerkung 1.2.10. Sei $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ regressiv, rd-stetig. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{T}$ entweder

$$1 + \mu(t)f(t) \in \mathbb{C}_h \diagdown \mathbb{A}_h, \tag{1.2.6}$$

die Werte von $1 + \mu(t)f(t)$ liegen also in einer längs der negativen reellen Achse ab $-\frac{1}{h}$ geschlitzten Ebene, oder es gilt

$$1 + \mu(t)f(t) \in \mathbb{A}_h, \tag{1.2.7}$$

womit die Werte von $1 + \mu(t)f(t)$ auf der negativen reellen Achse ab $-\frac{1}{h}$ liegen.

Ob $\xi_{\mu(t)}(f(t))$ für $t \in \mathbb{T}$ die Verknüpfung zweier rd-stetiger mit einer sogar holomorphen und damit insbesondere stetigen Funktion ist, hängt davon ab, ob die am Ende des letzten Abschnitts eingeführte Regressivitätsbedingung im Sinne von (1.2.6) oder im Sinne von (1.2.7) erfüllt ist.

Gilt (1.2.6) für $t \in \mathbb{T}$, dann ist $\xi_\mu(f(t))$ die Verknüpfung einer rd-stetigen und einer stetigen Funktion und damit nach Lemma 1.2.3 sofort rd-stetig.

Eine negative Regressivitätsbedingung für $t \in \mathbb{T}$ nach (1.2.7) zuzulassen, ist aber aufgrund interessanter Eigenschaften (vgl. [11], Th. 2.44., S. 66, Lemma 2.47, S. 67, Theorem 2.48, S.67) sinnvoll[2].

[2] In [11], Th. 2.44., S. 66, Lemma 2.47, S. 67, Theorem 2.48, S.67 wird u.a. erläutert, warum für $t \in \mathbb{T}$ und $f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ bei negativer Regressivitätsbedingung die Verallgemeinerung der Exponentialfunktionen für Zeitskalen an jedem Punkt $t \in \mathbb{T}$ das Vorzeichen wechselt.

Um in späteren Kapiteln mit expliziten Darstellungen von Lösungen skalarer Differentialgleichungen auf Zeitskalen nach [11], Th. 2.33, S. 59 und Th. 2.74, S. 77 arbeiten zu können, ohne die Klasse der zulässigen Funktionen auf diejenigen mit positiver Regressivitätsbedingung auf ganz $\mathbb{T}$ einschränken zu müssen, wollen wir die Rd-Stetigkeit von $\xi_{\mu(t)}(f(t))$ auch in $t \in \mathbb{T}$ mit (1.2.7) nachweisen.

Lemma 1.2.11. *Sei $h > 0$ und $\xi_h(z)$ die Zylindertransformation (vgl. Definition 1.2.5) für $z \in \mathbb{C}_h$.*

Dann gilt

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \xi_h(z) = \xi_0(z) = z \tag{1.2.8}$$

bezüglich kompakter Konvergenz in $\mathbb{C}$.

Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}_h$ fest.
Nach [40], S. 121 konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} (\widetilde{z} - 1)^v \tag{1.2.9}$$

bezüglich kompakter Konvergenz für alle $\widetilde{z} \in B_1(1)$ gegen $\operatorname{Log}(\widetilde{z})$.

Damit ist Log auf $B_1(1)$ eine stetige und sogar holomorphe Funktion.

Sei nun

$$\widetilde{z} =: 1 + zh, \quad z \in \mathbb{C}_h, \quad h > 0.$$

Dann gilt $\widetilde{z} \in B_1(1)$ genau dann, wenn $|zh| < 1$, also $z \in B_{\frac{1}{h}}(0)$.

Sei $(h_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} h_n = 0$, dann existiert zu $z \in \mathbb{C}_h$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|zh_n| < 1$ ist für alle $n \geq n_0$, also konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} (zh_n)^v$$

absolut und gleichmäßig gegen $\operatorname{Log}(1 + zh_n)$ für alle $z \in K$, $K \subset B_{\frac{1}{h}}(0)$ kompakt für jedes $n \geq n_0$, so dass man die Reihenfolge der Grenzwertbildung vertauschen kann.

Für alle Folgen $(h_n) \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} h_n = 0$ und $z \in B_{\frac{1}{h}}(0)$ gilt demnach:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\mathrm{Log}(1 + h_n z)}{h_n} &= \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{h_n} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} (z h_n)^v \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} z \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^{v-1}}{v} z^{v-1} h_n^{v-1} \\
&= \lim_{n \longrightarrow \infty} z \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{v}}{v+1} (z h_n)^v \\
&= z.
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \xi_h(z) = \xi_0(z) = z.$$

$\square$

Proposition 1.2.12. *Sei $\mathbb{T}$ eine Zeitskala mit Körnigkeit μ, $p \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ regressiv auf $\mathbb{T}$ und ξ die Zylindertransformation nach Definition 1.2.5.*

Dann ist die Verknüpfung $\xi_\mu(p)$ von Zylindertransformation mit μ und p (vgl. (1.2.5)*) wohldefiniert und rd-stetig auf $\mathbb{T}$.*

Beweis: Die Wohldefiniertheit folgt sofort aus Bemerkung 1.2.9, da $p(t)$ nach Voraussetzung für alle $t \in \mathbb{T}$ regressiv ist.

Um die Rd-Stetigkeit zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle:

i.) Sei $t \in \mathbb{T}$ rechts dicht, dann ist $\mu(t) = 0$ und es ist die Stetigkeit in t zu zeigen. Da μ und p auf $\mathbb{T}$ rd-stetig und damit in t stetig sind, gibt es eine Umgebung U von t, so dass für alle $\tau \in U$

$$|\mu(\tau) p(\tau)| < 1 \tag{1.2.10}$$

gilt.

Für alle $\tau \in U$ konvergiert die Potenzreihe

$$p(\tau)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v+1}(\mu(\tau)p(\tau))^v$$

bezüglich kompakter Konvergenz gegen $\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))$, denn für $\tau \in U$ gilt entweder $\mu(\tau) = 0$, womit die Behauptung sofort folgt, da alle Summanden der Potenzreihe bis auf den ersten verschwinden oder es gilt $\mu(\tau) > 0$ und dann folgt die Behauptung analog zu Lemma 1.2.11, denn es gilt in jedem Fall (1.2.10).

Wiederum die Rd-Stetigkeit von μ und p verwendend, gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{s\longrightarrow t}\xi_{\mu(s)}(p(s)) &= \lim_{s\longrightarrow t}p(s)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v+1}(\mu(s)p(s))^v\\ &= p(t)\sum_{v=0}^{\infty}\frac{(-1)^v}{v+1}(\mu(t)p(t))^v\\ &= \xi_{\mu(t)}(p(t)),\end{aligned}$$

da analog zu Lemma 1.2.11 aus der kompakten Konvergenz für alle $\tau \in U$ folgt, dass die Reihenfolge der Grenzwertbildung vertauscht werden darf.

ii.) Sei $t \in \mathbb{T}$ links dicht. Zu zeigen ist, dass

$$\lim_{s\nearrow t}\xi_{\mu(s)}(p(s)) =: \xi_{\mu(t^-)}(p(t^-))$$

existiert.

Ist $t \in \mathbb{T}$ gleichzeitig rechts dicht, dann folgt sogar die Stetigkeit von t aus dem ersten Fall.

Sei also $t \in \mathbb{T}$ links dicht und rechts zerstreut, dann ist insbesondere $\mu(t) \neq 0$.

Sei $(\tau_n) \subset \mathbb{T}$ mit $\lim_{n\longrightarrow\infty}\tau_n = t$ und $\tau_n < t$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\tau_n \in \begin{cases}(\tau_{n_k}),\ k \in \mathbb{N}, & \text{falls } \mu(\tau_n) = 0\\ (\tau_{n_j}),\ j \in \mathbb{N}, & \text{falls } \mu(\tau_n) > 0\end{cases} \tag{1.2.11}$$

Da die Folge (τ_n) gegen t konvergiert, folgt sofort, dass auch die beiden Teilfolgen (τ_{n_k}) und (τ_{n_j}) gegen t konvergieren.

Konvergieren $\xi_{\mu(\tau_{n_k})}(p(\tau_{n_k}))$ und $\xi_{\mu(\tau_{n_j})}(p(\tau_{n_j}))$ gegen den gleichen Grenzwert, konvergiert auch $\xi_{\mu(\tau_n)}(p(\tau_n))$ dagegen, denn jedes Folgenglied von τ_n liegt entweder in der Teilfolge (τ_{nk}) oder in der Teilfolge (τ_{nj}).

Da die Funktion p nach Voraussetzung rd-stetig ist, gilt für die Folge $\xi_{\mu(\tau_{n_k})}(p(\tau_{n_k}))$:

$$\begin{aligned}\lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_{\mu(\tau_{n_k})}(p(\tau_{n_k})) &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_0(p(\tau_{n_k})) \\ &= \lim_{k\longrightarrow\infty} p(\tau_{n_k}) \\ &= p(t^-). \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Um den Grenzwert von $\xi_{\mu(\tau_{n_j})}(p(\tau_{n_j}))$ zu bestimmen, machen wir folgende Vorüberlegung:

Wegen $\tau_n < t$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

$$\sigma(\tau_n) = \inf\{s \in \mathbb{T} : \tau_n < s\} \leq t.$$

Daraus ergeben sich folgende Äquivalenzen:

$$\sigma(\tau_n) \leq t \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(\tau_n) - \tau_n \leq t - \tau_n \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \mu(\tau_n) \leq t - \tau_n.$$

Wegen

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \tau_n = t$$

folgt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} t - \tau_n = 0.$$

und damit aus den oberen Umformungen auch

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\tau_n) = 0$$

Da $\mu(\tau_{n_j})$ eine Teilfolge von $\mu(\tau_n)$ ist, gilt ebenfalls

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \mu(\tau_{n_j}) = 0.$$

Die Funktion p ist nach Voraussetzung rd-stetig, also gilt $\lim_{j\longrightarrow\infty} p(t_{n_j}) = p(t^-)$ und somit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $j \geq n_0$ gilt:

$$\left|p(\tau_{n_j})\mu(\tau_{n_j})\right| < 1.$$

Damit lässt sich für alle $j \geq n_0$ analog zu (1.2.10)

$$\frac{\operatorname{Log}(1 + p(\tau_{n_j})\mu(\tau_{n_j}))}{\mu(\tau_{n_j})}$$

mit Hilfe der Potenzreihe

$$p(\tau_{n_j}) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v+1} (p(\tau_{n_j})\mu(\tau_{n_j}))^v$$

darstellen.

Da für alle $j \in \mathbb{N}$ nach (1.2.11) $\mu(\tau_{n_j}) > 0$ gilt, folgt bezüglich kompakter Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\longrightarrow\infty} \xi_{\mu(\tau_{n_j})}(p(\tau_{n_j})) &= \lim_{j\longrightarrow\infty} \frac{\operatorname{Log}(1 + p(\tau_{n_j})\mu(\tau_{n_j}))}{\mu(\tau_{n_j})} \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty} p(\tau_{n_j}) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v+1} (p(\tau_{n_j})\mu(\tau_{n_j}))^v \\
&= p(t^-).
\end{aligned}$$

Mit (1.2.12) gilt also:

$$\begin{aligned}
\lim_{j\longrightarrow\infty} \xi_{\mu(\tau_{n_j})}(p(\tau_{n_j})) &= \lim_{k\longrightarrow\infty} \xi_{\mu(\tau_{n_k})}(p(\tau_{n_k})) \\
&= p(t^-)
\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \xi_{\mu(\tau_n)}(p(\tau_n)) = p(t^-). \tag{1.2.13}$$

Damit ist alles bewiesen und aus beiden Fällen folgt die Rd-Stetigkeit der Zylindertransformation für alle $t \in \mathbb{T}$.

□

Das folgende Korollar bedient sich des von u.a. in [11] formulierten Zusammenhangs zwischen Rd-Stetigkeit einer Funktion und ihrer Integrierbarkeit.

Die Integrierbarkeit der Zylindertransformation bei ihrer Anwendung auf rd-stetige Funktionen ist ihrerseits unverzichtbar für die explizite Darstellung von Lösungen skalarer Differentialgleichungen auf Zeitskalen, wie zu Anfang des Abschnitts schon erwähnt wurde.

Es sei hier nur angemerkt, dass die Schwierigkeiten mit der Integrierbarkeit von Funktionen dem sehr eng gefassten Begriff vom Integral als zur Differentiation inverser Operator geschuldet sind, wie er z.B. in [11] eingeführt und auch in dieser Arbeit verwendet wird.

Ein eleganterer und allgemeinerer Zugang ist die Entwicklung eines Integralbegriffs über maßtheoretische Überlegungen (vgl. hierzu die Diplomarbeit von S. Hock, [27] sowie L. Neidhart, [34] und [5]).

Korollar 1.2.13 (Integrierbarkeit der Zylindertransformation). *Sei* $p \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ *regressiv und* ξ *die Zylindertransformation nach Definition 1.2.5.*

Dann existiert

$$\int \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau.$$

Beweis: Mit Proposition 1.2.12 folgt die Rd-Stetigkeit von $\xi_\mu(p)$ auf $\mathbb{T}$. Damit folgt die Behauptung aus [11], Th. 1.74, S.27.

□

1.3 Matrizen und vektorwertige Funktionen

Bevor Begriffe wie Lösung oder Stabilität von linearen Systemen auf Zeitskalen eingeführt und deren Eigenschaften diskutiert werden können, muss grundsätzlich das Kalkül vektor- und matrixwertiger Funktionen betrachtet werden, deren Definitionsbereich in einer Zeitskala $\mathbb{T}$ liegt.

Im Folgenden wollen wir daher nochmal ausführlich auf deren Differentiation und Integration auf Zeitskalen eingehen.

Definition 1.3.1. Gegeben sei die zeitabhängige Matrix

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \tag{1.3.1}$$

mit $a_{ij} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $1 \leq i \leq n$ sowie $1 \leq j \leq m$.

i.) Sei σ der Vorwärtssprungoperator auf $\mathbb{T}$ (vgl. (1.1.1)), A wie in (1.3.1) und $t \in \mathbb{T}$.

Dann sei

$$A^\sigma(t) := A(\sigma(t)) = (a_{ij}(\sigma(t)))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} .$$

ii.) Sei A wie in (1.3.1) gegeben mit $a_{ij} \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ für $i = 1, \ldots, n$ sowie $j = 1, \ldots, m$.

Dann ist unter

$$\int_{t_0}^{t} A(s)\Delta s \tag{1.3.2}$$

die konstante Matrix

$$\left(\int_{t_0}^{t} a_{ij}(s)\Delta s\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} \tag{1.3.3}$$

zu verstehen.

Nach [11], Theorem 1.74, S.27 existiert dieses Integral für jede rd-stetige Funktion und ist damit für alle $a_{ij} \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ und $i = 1, \ldots, n$ sowie $j = 1, \ldots, m$ wohldefiniert.

Bemerkung 1.3.1. Sei

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$$

mit $a_{ij} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ für alle $1 \leq i \leq n$ sowie $1 \leq j \leq m$.

Dann ist A in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ differenzierbar mit

$$A^\Delta(t) = \big(a_{ij}^\Delta(t)\big)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} .$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Satz 1.1.3 und Beispiel 1.1.11. □

Als Vorbereitung für Stabilitätsbetrachtungen nichtautonomer, linearer Systeme auf Zeitskalen wollen wir als nächstes Ableitungsregeln für zeitabhängige Matrizen zusammenstellen.

Wir gehen hier auf den endlichdimensionalen Fall nochmal gesondert ein, weil wir die in Definition 1.3.1 eingeführte explizite Darstellung fürs Integral und die in Bemerkung 1.3.1 eingeführte explizite Darstellung für die Delta-Ableitung bei der Diskussion von Lyapunovfunktionen in den folgenden Kapiteln brauchen werden.

M. Bohner und A. Peterson betrachten in [11], Th. 5.3., S. 189 nur den $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Der größte Teil des dann elementaren Beweises befindet sich ebenda als leichte Übungsaufgabe (vgl. [11], Ex. 5.4., S. 190).

Satz 1.3.2. *Seien $n, m, r \in \mathbb{N}$ und*

$$A := (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}, \quad B := (b_{uv})_{\substack{1\le u\le n\\ 1\le v\le r}}$$

mit $a_{ij}, b_{uv} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$ differenzierbar in $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Dann gilt:

i.) $(A+B)^\Delta(t) = A^\Delta(t) + B^\Delta(t)$;

ii.) $(\alpha \cdot B)^\Delta(t) = \alpha \cdot B^\Delta(t)$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *konstant;*

iii.) $(AB)^\Delta(t) = A^\Delta(t)B^\sigma(t) + A(t)B^\Delta(t) = A^\sigma(t)B^\Delta(t) + A^\Delta(t)B(t)$;

iv.) Falls A^σ und A^{-1} invertierbar in $t \in \mathbb{T}^\kappa$ sind

$$\left(A^{-1}\right)^\Delta(t) = -\left(A^\sigma\right)^{-1}(t)A^\Delta(t)A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A^\Delta(t)A^\sigma(t).$$

Beweis: Behauptungen *i.)* und *iii.)* folgen direkt als endlichdimensionale Spezialfälle von Satz 1.1.5; durch Anwendung der Produktregel von *iii.)* auf $I = A(t)A^{-1}(t)$ folgt Behauptung *iv.)*.

Zu zeigen bleibt *ii.)*, sei dazu

$$\alpha := (\alpha_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

mit $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$(\alpha \cdot B)^{\Delta}(t) = (c_{iv})^{\Delta}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le v \le r}}(t)$$

mit

$$c^{\Delta}_{iv}(t) := \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_{jv} \right)^{\Delta}(t)$$

für jedes $1 \le i \le m$ und jedes $1 \le v \le r$.

Aus den Ableitungsregeln in Satz 1.1.5 folgt für $1 \le i \le m$ sowie $1 \le v \le r$:

$$(c_{iv})^{\Delta}(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b^{\Delta}_{jv}(t)$$

und daraus

$$(c_{iv})^{\Delta}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le v \le r}}(t) = \alpha B^{\Delta}(t).$$

□

Die nächsten Eigenschaften zeitabhängiger $n \times n$ Matrizen werden wir bei der Abhandlung von Lyapunovgleichungen für lineare Systeme auf Zeitskalen benötigen.

Wir werden zunächst weit ausholen und mit Hilfe von [37] den Begriff der Involution auf Banachalgebren einführen, um dann für eine zeitabhängige, in $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$ differenzierbare Matrix A sofort die Ableitung von A^T an der Stelle t_0 angeben zu können.

Definition 1.3.2 (vgl. [37], S. 27). Sei $\mathcal{B}$ eine Banach-Algebra über $\mathbb{K}$ mit Einselement $I_{\mathcal{B}}$.

Eine Abbildung $\cdot^* : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ heiße <u>*Involution*</u>, falls

i.) $(X+Y)^* = X^* + Y^*$

ii.) $(XY)^* = Y^* X^*$

iii.) $(\alpha X)^* = \overline{\alpha} X^*$

iv.) $X^{**} = X$

v.) $\|X^*\| = \|X\|$

gilt für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $X, Y \in \mathcal{B}$.

Lemma 1.3.3 (vgl. [37], Lemma 6.12, S. 27). *Ist $\mathcal{B}$ eine Banachalgebra mit der Involution $\cdot^* : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ und $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathcal{B}$ differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$, so ist auch $G(t) := F(t)^*$ differenzierbar in t_0 mit der Ableitung*

$$G^\Delta(t_0) = \left[F^\Delta(t_0)\right]^*.$$

Beweis: Nach C. Pötzsche, [37], S. 27 folgt die Behauptung sofort, da Involutionen stetige Isometrien auf $\mathcal{B}$ sind.

□

Bezeichnet $(\cdot)^T : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ diejenige Abbildung, die eine Matrix $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ in die transponierte Matrix $(a_{ji})_{j,i=1,\dots,n}$ überführt, dann gilt:

Korollar 1.3.4. *Aus Lemma 1.3.3 folgt für $A : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^{n\times n}$ differenzierbar in $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$*

$$\left[A^T(t_0)\right]^\Delta = \left[A^\Delta(t_0)\right]^T,$$

da die Abbildung $(\cdot)^T$ eine Involution auf der Banachalgebra $\mathcal{B} := \mathbb{K}^{n\times n}$ der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K}$ ist.

Lemma 1.3.5. *Sei $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix und $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ differenzierbar für ein $t \in \mathbb{T}^\kappa$.*

Dann gilt

$$(Bx(t))^\Delta = Bx^\Delta(t).$$

Beweis: Sei

$$B := (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n},$$

dann gilt nach Satz 1.1.5:

$$\begin{aligned}
(B(x(t))^\Delta &= \left(\sum_{i=1}^n b_{ij}\ x_j(t)\right)^\Delta_{j=1,\dots,n} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n [b_{ij}\ x_j(t)^\Delta\right)_{j=1,\dots,n} \\
&= Bx^\Delta(t).
\end{aligned}$$

$\square$

Lemma 1.3.6. *Sei* $A(t) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *wie in* (1.3.1) *für* $t \in \mathbb{T}^\kappa$ *differenzierbar.*

Dann gilt:

$$A^\sigma(t) = A(t) + \mu(t)A^\Delta(t).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
A^\sigma(t) &= a_{ij}(\sigma(t))_{i,j=1,\ldots,n} \\
&= \left(a_{ij}^\Delta(t)\cdot\mu(t) + a_{ij}(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n} \\
&= a_{ij}^\Delta(t)_{i,j=1,\ldots,n}\cdot\mu(t) + (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \\
&= A^\Delta(t)\mu(t) + A(t).
\end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 2

Dynamische Gleichungen und lineare Systeme

2.1 Grundlagen

Im folgenden sei $\mathbb{T}$ eine nach oben unbeschränkte Zeitskala.

2.1.1 Exponentialfunktion auf Zeitskalen

Mit Hilfe der Exponentialfunktion auf Zeitskalen lassen sich, wie wir im Folgenden zeigen werden, Lösungen von dynamischen Gleichungen direkt angeben.

Definition 2.1.1.

$$\mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K}) := \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K},\ f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K}),\ f \text{ regressiv}\}$$

sei die Menge aller rd-stetigen, regressiven Funktionen $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}$.

Definition 2.1.2. Sei $p \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$. Dann heiße

$$y^{\Delta} = p(t)y \tag{2.1.1}$$

regressive, dynamische Gleichung.

Definition 2.1.3. Sei $p \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ und $t, t_0 \in \mathbb{T}$. Dann heiße

$$e_p(t, t_0) := \exp\left(\int_{t_0}^{t} \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right)$$

Exponentialfunktion auf Zeitskalen, wobei ξ die Zylindertransformation nach Definition 1.2.5 ist.

Bemerkung 2.1.1. Sei $p \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ und $\mathbb{T} = \mathbb{R}$.
Da jeder Punkt $t \in \mathbb{R}$ rechts dicht ist, ist p insbesondere stetig und aus der Definition 1.1.7 des Integrals auf Zeitskalen sowie aus der Definition 1.2.5 der Zylindertransformation folgt

$$e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} (p(\tau))d\tau\right).$$

Somit ist $e_p(t, t_0)$ für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = p(t)y, \quad p(t_0) = 1.$$

Die nächsten Sätze werden einige Eigenschaften der Exponentialfunktion zusammenfassen, die sich aus dem reellen Fall auf beliebige Zeitskalen übertragen lassen:

Satz 2.1.2 (vgl. [11], Th. 2.36, S. 62). *Sei $p \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ und $t, s, r \in \mathbb{T}$.*
Dann gilt:

i.) $e_0(t, s) \equiv 1$ *für alle* $t, r, s \in \mathbb{T}$, *falls* $0 \in \mathbb{T}$.

ii.) $e_p(t, t) = 1$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$.

iii.) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$ *für alle* $t, s \in \mathbb{T}$.

iv.) $e_p(t, s) = \dfrac{1}{e_p(s, t)}$ *für alle* $t, s \in \mathbb{T}$.

v.) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$ *für alle* $t, s \in \mathbb{T}$ *(Halbgruppeneigenschaft).*

Dass ebenfalls die Eigenschaften aus Bemerkung 2.1.1 sich verallgemeinern lassen, davon handelt der folgende Satz:

Satz 2.1.3 (vgl. [11], Th. 2.23, S. 59). *Sei* (2.1.1) *eine regressive, dynamische Gleichung.*
Dann ist $e_p(t, t_0)$ *die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \tag{2.1.2}$$

auf $\mathbb{T}$.

Beweis: Mit Hilfe der Eigenschaften der Exponentialfunktion aus Satz 2.1.2 auf Zeitskalen folgt sofort, dass $e_p(t, t_0)$ den Anfangswert erfüllt.

Um zu zeigen, dass $e_p(t, t_0)$ die regressive, dynamische Gleichung (2.1.1) löst, wird danach unterschieden, ob $t \in \mathbb{T}$ ein rechts dichter oder rechts zerstreuter Punkt ist.

Wenn $t \in \mathbb{T}$ rechts zerstreut ist, können wir mit Hilfe der Formel für Differenzierbarkeit in rechts zerstreuten Punkten aus Satz 1.1.3 $e_p^{\Delta}(t, t_0)$ direkt angeben und kommen mit Hilfe einiger Umformungen zum gewünschten Ergebnis.

Wenn $t \in \mathbb{T}$ rechts dicht ist, gehen wir direkt auf die Definition der Delta-Differenzierbarkeit aus 1.1.6 ein und zeigen mit Hilfe der Rd-Stetigkeit der Zylindertransformation und der Regeln von de L'Hôpital (vgl. [11], Th. 1.119, S. 48), dass zu $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U_ε von t existiert mit

$$|e_p(t, t_0) - e_p(s, t_0) - p(t)e_p(t, t_0)(t - s)| \leq \varepsilon\, |t - s|$$

für alle $s \in U_\varepsilon$.

Die Eindeutigkeit folgt durch einfache Rechnung aus [11], Th. 2.35, S. 61.

□

2.1.2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen linearer Systeme

Sei im Folgenden $\mathbb{X}$ ein beliebiger Banachraum und

$$\mathcal{L}(\mathbb{X}) := \{A : \mathbb{X} \to \mathbb{X}, A \text{ linear und beschränkt}\}$$

die Menge aller beschränkten, linearen Abbildungen von $\mathbb{X}$ in sich.

Gegenstand der Untersuchung soll zunächst Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems

$$x^{\Delta} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1.3}$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$, $t_0 \in \mathbb{T}$ und $x_0 \in \mathbb{X}$ sein.

Dies motiviert die Verallgemeinerung von Definition 1.2.6 für einen beliebigen Banachraum:

Definition 2.1.4. $f : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ heiße *regressiv* in $t \in \mathbb{T}$, wenn die Abbildung

$$\mathrm{id} + f(t, \cdot)\mu(t) : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X},$$

mit id Identitätsfunktion auf $\mathbb{X}$, invertierbar ist.

Ist f in jedem $t \in \mathbb{T}$ regressiv, so heiße f regressiv.

Weiterhin sei

$$\mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{X}) := \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X} : f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{X}),\ f \text{ regressiv}\}$$

die Menge aller regressiven und rd-stetigen Funktionen $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$.

Mit Hilfe von Definition 2.1.4 können wir Abbildungen, für die (2.1.3) eindeutig lösbar ist, klassifizieren:

Bemerkung 2.1.4. Die Eindeutigkeit und Existenz der Lösung des Anfangswertproblems (2.1.3) mit $A \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$ folgt aus dem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. [28], Satz 2.1.6, S. 13 oder [11], Th. 8.20, S. 324), wenn A regressiv ist.

Nach [28], Satz 2.1.8, S. 14 existieren maximale Lösungen von linearen Gleichungen auf der ganzen Zeitskala $\mathbb{T}$, sofern ihre rechte Seite auf ganz $\mathbb{T}$ erklärt ist.

Definition 2.1.5. Gegeben sei das lineare System (2.1.3).

Dann heiße die nach [28], Satz 2.1.6, S. 13 oder [11], Th. 8.20, S. 324 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$Y^{\Delta} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = \mathrm{id}$$

mit id Identität auf $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ und $t_0 \in \mathbb{T}$ *Übergangsabbildung von t_0 nach t* und werde mit $e_A(t, t_0)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.1.5. Nach [28], Def. 2.2.4, S. 18 lassen sich alle Eigenschaften von Satz 2.1.2 auf $e_A(t, t_0)$ verallgemeinern.

Schwieriger ist es um eine explizite Darstellung der Übergangsabbildung $e_A(t, t_0)$.

Vergleiche hierzu für $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ [11] im autonomen Fall, [39] im nichtautonomen Fall.

Mit Hilfe von $e_A(t, t_0)$ läßt sich der Satz von der Variation der Konstanten auf Zeitskalen übertragen:

Satz 2.1.6 (vgl. [28], Satz 2.2.6, S.19). *Sei* $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$ *und* $f \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{X})$.

Sei $t_0 \in \mathbb{T}$ *und* $y_0 \in \mathbb{X}$.

Dann hat das Anfangswertproblem

$$y^{\Delta} = A(t)y + f(t), \quad y(t_0) = y_0 \tag{2.1.4}$$

eine eindeutige Lösung $y : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$ *mit*

$$y(t) = e_A(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^{t} e_A(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau.$$

Beweis: Die Existenz von y auf ganz $\mathbb{T}$ folgt aus der Existenz von $e_A(t, t_0)$ auf ganz $\mathbb{T}$.

Mit Hilfe der Halbgruppeneigenschaft von $e_A(t, t_0)$ (vgl. Bemerkung 2.1.5) läßt sich unter Anwendung der Produktregel (vgl. Satz 1.1.5) zeigen, dass y das Anfangswertproblem (2.1.4) löst.

Die Eindeutigkeit folgt wiederum unter Anwendung der Halbgruppeneigenschaft von $e_A(t, t_0)$.

Für einen ausführlichen Beweis vgl. z.B. [11], Th. 5.24, S. 195.
Dort wird zwar nur der Sonderfall $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ betrachtet, der Beweis behält seine Gültigkeit aber ohne Einschränkung für beliebige Banachräume $\mathbb{X}$.

□

Zum Abschluss noch eine fundamentale Eigenschaft linearer Systeme im Reellen, die sich auf Zeitskalen völlig analog übertragen lässt:

Lemma 2.1.7 (Superpositionsprinzip). *Seien* $t_0 \in \mathbb{T}$, $x, x' \in \mathbb{X}$ *sowie* $x(t, t_0, x)$, $x(t, t_0, x')$ *Lösungen von* (2.1.3) *zu den Anfangswerten* $x(t_0) = x$ *bzw.* $x(t_0) = x'$.

Dann löst

$$x(t, t_0, x - x') := x(t, t_0, x) - x(t, t_0, x')$$

(2.1.3) *mit Anfangsbedingung* $x(t_0) = x - x'$.

Beweis: Wegen

$$x(t_0, t_0, x - x') = x(t_0, t_0, x) - x(t_0, t_0, x') = x - x'$$

ist die Anfangsbedingung erfüllt.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t,t_0,x-x') &= (x(t,t_0,x)-x(t,t_0,x'))^{\Delta} \\ &= x^{\Delta}(t,t_0,x)-x^{\Delta}(t,t_0,x') \\ &= A(t)x(t,t_0,x)-A(t)x(t,t_0,x') \\ &= A(t)\left(x(t,t_0,x)-x(t,t_0,x')\right) \\ &= A(t)(x(t,t_0,x-x')). \end{aligned}$$

□

2.2 Regressivität und Übergangsabbildung für Matrizen

Da wir in den nächsten Kapiteln die Stabilität linearer Systeme für $\mathbb{X}=\mathbb{R}^n$ untersuchen wollen, werden wir im Folgenden auf Regressivitätsbedingungen für zeitabhängige, matrixwertige Funktionen näher eingehen.

Ferner werden wir eine Darstellung der Übergangsabbildung im endlichdimensionalen Fall mit Hilfe der Jordanschen Zerlegung angeben.

Dieses Ergebnis wird in [14] für Zeitskalen mit konstanter Körnigkeit ausführlich diskutiert und lässt sich leicht auf Zeitskalen mit variabler Körnigkeit verallgemeinern (vgl. hierzu [39]).

Die explizite Darstellung der Übergangsabbildung für Matrizen wird später bei der Untersuchung hinreichender Bedingungen für die Existenz von Lyapunovfunktionen eine Rolle spielen.

Definition 2.2.1 (vgl.[39], S.15).

$$x^{\Delta}=A(t)x \tag{2.2.1}$$

mit $A\in\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T},\mathbb{K}^{n\times n})$ heiße <u>*Jordan zerlegbar*</u>, wenn eine reguläre Matrix $T\in\mathbb{K}^{n\times n}$ existiert, so dass für jedes $t\in\mathbb{T}$

$$J(t):=T^{-1}A(t)T=\operatorname{diag}\left(J_1(t),\ldots,J_k(t)\right)$$

gilt, wobei $J_i(t) \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$ mit $n_1 + \ldots + n_k = n$ für $1 \leq i \leq k \leq n$ und jedes $t \in \mathbb{T}$ ein Jordanblock ist, definiert durch

$$J_i(t) := \begin{pmatrix} \lambda_i(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \lambda_i(t) & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & & \lambda_i(t) \end{pmatrix}.$$

Falls (2.2.1) zeitunabhängig ist, dann ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konstant und jedes λ_i für $i = 1, \ldots, k$ Eigenwert von A.

Weiterhin existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so dass $T^{-1}AT$ eine Jordanmatrix ist (vgl. z.B. [8], S. 132).

Falls (2.2.1) Jordan zerlegbar ist, so folgt aus der Eindeutigkeit der Jordanschen Normalform (vgl. [8], Bemerkung 5.37, S. 132) für $A(t)$ in jedem $t \in \mathbb{T}$ die Eindeutigkeit von $T^{-1}A(t)T$, wobei $\lambda_i(t)$ mit $1 \leq i \leq k \leq n$ Eigenwert von $A(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ ist.

2.2.1 Regressivitätsbedingungen

Beispiel 2.2.1. Nach Definition 2.1.4 heißt eine Abbildung $A : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ regressiv, wenn die zeitabhängige Matrix

$$I + A(t)\mu(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ invertierbar ist.

Das folgende Lemma gibt den Zusammenhang zwischen der Regressivität und dem Spektrum einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ an.

Es handelt sich hierbei um die Ausführung einer Übungsaufgabe aus [11], Ex. 5.6, S. 190.

Lemma 2.2.2. *Sei* (2.2.1) *Jordan zerlegbar.*

$A \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{K}^{n \times n})$ *ist regressiv genau dann, wenn die Abbildungen*

$$\lambda_i : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad i = 1, \ldots, k$$

mit $\lambda_i(t) \in \Sigma\,(A(t))$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$ *und alle* $i = 1, \ldots, k$ *regressiv sind.*

Beweis: Sei $t \in \mathbb{T}$.

Da (2.2.1) nach Voraussetzung Jordan zerlegbar ist, existiert nach Definition 2.2.1 eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit

$$TA(t)T^{-1} = \mathrm{diag}(J_1(t), \ldots, J_k(t)), \quad k \leq n, \quad J_i : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_i \times n_i},$$

wobei jedes $J_i(t)$ Jordanblock von $A(t)$ bezüglich des Eigenwerts $\lambda_i(t)$ ist für $i = 1, \ldots, k$.

Weil T regulär ist, gilt

$$\det\left(A(t)\mu(t) + I\right) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\left(T[I + \mu(t)A(t)]T^{-1}\right) \neq 0.$$

Der linke Ausdruck läßt sich des Weiteren umformen zu

$$\begin{aligned} \det(T[I + \mu(t)A(t)]T^{-1}) &= \det(TT^{-1} + \mu(t)TA(t)T^{-1}) \\ &= \det(I + \mu(t) \cdot \mathrm{diag}(J_1(t), \ldots, J_k(t)) \\ &= \det(\mathrm{diag}\left(I_{n_1} + J_1(t)\mu(t), \ldots, I_{n_k} + J_k(t)\mu(t)\right)) \end{aligned}$$

mit

$$J_i(t) \cdot \mu(t) + I_{n_i} = \begin{pmatrix} \mu(t)\lambda_i(t) + 1 & \mu(t) & \ldots & 0 \\ 0 & \mu(t)\lambda_i(t) + 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu(t) \\ 0 & \ldots & 0 & \mu(t)\lambda_i(t) + 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

für $i = 1, \ldots, k$.

Da (2.2.2) eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt

$$\det\left(A(t)\mu(t) + I\right) \neq 0 \Leftrightarrow \mu(t)\lambda_i(t) + 1 \neq 0 \tag{2.2.3}$$

für alle $i = 1, \ldots, k$ und alle $t \in \mathbb{T}$.

Nach der Definition von Regressivität folgt direkt aus der Äquivalenz der Aussagen in (2.2.3) die Behauptung in beide Richtungen, denn $A(t)\mu(t) + I$ ist genau dann invertierbar für ein $t \in \mathbb{T}$, wenn $\det\left(A(t)\mu(t) + I\right) \neq 0$ gilt.

$\square$

2.2.2 Übergangsabbildung und Jordansche Zerlegung

Der folgende Satz stellt den Zusammenhang zwischen Jordanscher Zerlegung des linearen Systems (2.2.1) und der in Definition 2.1.5 eingeführten Übergangsabbildung her.

Satz 2.2.3 (vgl. [39], Theorem 12, S. 15). *Sei* $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K}^{n\times n})$*, so dass* (2.2.1) *Jordan zerlegbar ist.*

Dann gilt für $t, t_0 \in \mathbb{T}$*:*

$$e_A(t, t_0) = T\left(\operatorname{diag}(e_{J_1}(t, t_0), \ldots, e_{J_k}(t, t_0))\right)T^{-1}$$

mit $T, J_i(t)$ *wie in Definition 2.2.1 für* $i = 1, \ldots, k$ *und alle* $t \in \mathbb{T}$ *.*

Beweis: Zum Beweis des Satzes vgl. [39], S. 15.

□

2.3 Stabilität und lineare Systeme

Im Folgenden sei $\mathbb{T}$ wieder eine nach oben unbeschränkte Zeitskala.

Da wir das Langzeitverhalten eines linearen Systems

$$x^\Delta = A(t)x \tag{2.3.1}$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ untersuchen wollen, würde es nicht mehr reichen, ein eventuelles links zerstreutes Maximum von $\mathbb{T}$ durch Übergang nach $\mathbb{T}^\kappa$ auszuschließen, um die Eindeutigkeit der Delta-Ableitung an jedem Punkt zu gewährleisten.

Vielmehr müssen wir eine nach oben unbeschränkte Zeitskala $\mathbb{T}$ voraussetzen, um (2.3.1) überhaupt lange genug beobachten zu können.

2.3.1 Stabilität auf Zeitskalen

Bevor wir uns jedoch dem speziellen Fall der linearen Systeme zuwenden, wollen wir klären, was im allgemeinen Fall unter der Stabilität im Sinne von Lyapunov[1] zu verstehen ist.

[1] Alexander Michailowitsch Lyapunov (1857-1918) veröffentlichte fundamentale Ergebnisse zur Stabilitätstheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen in seiner Habilitationsschrift „Das allgemeine Stabilitätsproblem der Bewegung" im Jahre 1892 (vgl. [4], S. 290).

Definition 2.3.1. Sei $I \subset \mathbb{T}$ nach oben unbeschränkt und $G \subset \mathbb{X}$ ein Gebiet.

Sei

$$x^{\Delta} = f(t, x) \tag{2.3.2}$$

mit $f : I \times G \longrightarrow \mathbb{X}$ regressiv, rd-stetig auf I, stetig auf G.

Sei $J \subset I$ nach oben unbeschränkt und $v : J \longrightarrow \mathbb{X}$ eine Lösung von (2.3.2).

Ferner existiere für jedes $t_0 \in J$ ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$, so dass gilt:

$$\{(t, \xi) \in J \times \mathbb{X} : t \geq t_0,\ \|\xi - v(t)\| \leq \widetilde{\varepsilon}\} \subset I \times G.$$

Dann heiße v

i.) *stabil*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $t_0 \in J$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass zu jedem Anfangswert $\xi \in G$ mit $\|\xi - v(t_0)\| < \delta$ die Lösung $\lambda(t, t_0, \xi)$ für $t \geq t_0$ existiert und

$$\|\lambda(t, t_0, \xi) - v(t)\| < \varepsilon \tag{2.3.3}$$

für alle $t \geq t_0$ erfüllt ist.

Andernfalls heiße v *instabil*.

ii.) *attraktiv*, wenn zu jedem $t_0 \in J$ ein $\eta > 0$ existiert, so dass zu jedem Anfangswert $\xi \in G$ mit $\|\xi - v(t_0)\| < \eta$ die Lösung für $t \geq t_0$ existiert mit

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|\lambda(t, t_0, \xi) - v(t)\| = 0. \tag{2.3.4}$$

iii.) Ist die Lösung v stabil und attraktiv, so heiße sie *asymptotisch stabil*.

Zu den in Definition 2.3.1 getroffenen Voraussetzungen noch einige erklärende Bemerkungen:

Offensichtlich sind, da bei der Stabilitätsbetrachtung das Langzeitverhalten von v auf J untersucht wird, nur diejenigen Lösungen v interessant, bei denen der Definitionsbereich J nach oben unbeschränkt ist.
Dies setzt voraus, dass f auf einer nach oben unbeschränkten Teilmenge I von $\mathbb{T}$ existiert.

Ferner ist die obere Definition der Stabilität nur dann schlüssig, wenn zu jedem $t_0 \in J$ ein $\widetilde{\varepsilon} > 0$ existiert, so dass für alle $t \geq t_0$ die Umgebung $B_{\widetilde{\varepsilon}}(v(t))$ noch ganz in G enthalten ist.

Im Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ entspricht dies der Existenz eines $\widetilde{\varepsilon}$-Schlauchs um v (vgl. [14], S. 53).

Beispiel 2.3.1. Sei

$$\mathbb{T} := \{q^n : n \in \mathbb{N}_0, \quad q > 1\}$$

und

$$x^\Delta = \alpha x, \quad x(1) = 1 \tag{2.3.5}$$

ein Anfangswertproblem mit regressiver Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nach [11], Bsp. 1.41, S. 16 gilt bezüglich der Körnigkeit μ für alle $t \in \mathbb{T}$

$$\mu(t) = (q-1)t$$

und nach [11], Bsp. 2.55, S.70 gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} e_\alpha(t,1) &= \prod_{s \in \mathbb{T} \cap]0;t[} (1 + (q-1)s \cdot \alpha) \\ &= \prod_{s \in \mathbb{T} \cap]0;t[} (1 + \mu(s)\alpha). \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \prod_{s \in \mathbb{T} \cap]0;t[} (1 + \mu(s)\alpha) = \prod_{s \in \mathbb{T} \cap]0;\infty[} (1 + \mu(s)\alpha).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow \infty} \mu(t) &= \lim_{t \longrightarrow \infty} (q-1)t \\ &= \infty \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_\alpha(t,1)\| &= \left\| \prod_{s \in \mathbb{T} \cap]0;t[} (1 + \mu(s)\alpha) \right\| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Damit kann unabhängig von der Wahl der Konstante α allein wegen der Struktur der Zeitskala keine Lösung von (2.3.5) attraktiv und somit erst recht nicht asymptotisch stabil sein.

Um diese und ähnliche Sonderfälle bei der Diskussion von Stabilität und Lyapunovfunktionen auszuschließen, wollen wir in den nächsten Kapiteln stets Zeitskalen mit beschränkter Körnigkeit, also mit

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |\mu(t)| \leq K, \quad K > 0$$

betrachten.

Für die Praxis handelt es sich dabei um keine zu große Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man bedenkt, dass z.B. vom numerischen Standpunkt Verfahren mit beliebig großer Schrittweite keinen Sinn machen.

2.3.2 Asymptotische Stabilität linearer Systeme

Gegenstand der folgenden Abschnitte werden homogene, lineare Systeme der Form

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{2.3.6}$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{X})$ sein, wobei sich die meisten späteren Betrachtungen auf $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ beschränken werden, weil man für diesen Fall zu einem gegebenen Anfangswert oft eine explizite Darstellung der Übergangsmatrix von (2.3.6) angeben kann.

Der Einfachheit halber wollen wir solche A betrachten, die auf ganz $\mathbb{T}$ definiert sind, ohne Einschränkung der Allgemeinheit könnte der Definitionsbereich von A jedoch auch eine nach oben unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{T}$ sein.

Im linearen Fall sind Stabilitätsaussagen einfach zu überprüfen. Genügt eine Gleichung dem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz, so folgt sofort, dass jede ihrer Lösungen auf ganz $\mathbb{T}$ (vgl. [11], Th. 8.20, S. 324 und Th. 8.24, S. 325) existiert.

Die aus der Theorie der reellen Differentialgleichungen bekannte Aussage, dass alle Lösungen eines linearen Systems dasselbe Stabilitätsverhalten aufweisen, lässt sich für nach oben unbeschränkte Zeitskalen mit beschränkter Körnigkeit verallgemeinern (vgl. [28], S. 28).

Zur asymptotischen Stabilität von linearen Systemen auf Zeitskalen gilt außerdem folgender Satz:

Satz 2.3.2 (vgl. [28], Th. 2.5.7, S.28). *Sei* $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$.

Die lineare Gleichung

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{2.3.7}$$

ist genau dann asymptotisch stabil, wenn

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t, \tau)\| = 0$$

mit $e_A(t, \tau)$ *wie in Definition 2.1.5 für ein und damit nach den oberen Ausführungen für jedes* $\tau \in \mathbb{T}$ *gilt.*

Der obere Satz hat ganz konkrete Auswirkungen für die Überprüfung der asymptotischen Stabilität bei linearen Gleichungen:

Bemerkung 2.3.3. Sei das lineare System (2.3.7) mit $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathcal{L}(\mathbb{X}))$ attraktiv. Dann ist (2.3.7) ebenfalls asymptotisch stabil.

Sei $x(t, t_0, x_0)$ Lösung von (2.3.7) zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ mit $t_0 \in \mathbb{T}$.

Der Einzugsbereich

$$\left\{(t, x_0) \in \mathbb{T} \times \mathbb{X} : \lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = 0\right\}$$

der konstanten Lösung $x \equiv 0$ und damit jeder Lösung von (2.3.7) ist ganz $\mathbb{T} \times \mathbb{X}$.

Beweis: Sei $t_0 \in \mathbb{T}$ fest gewählt.

Dann gibt es ein $\eta > 0$, so dass

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t, t_0, x_0)\| = \lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t, t_0)x_0\| = 0 \tag{2.3.8}$$

für $\|x_0\| < \eta$, da sich nach Satz 2.1.6 jede Lösung x von (2.3.7) mit $x(t_0) = x_0$ mit Hilfe der Übergangsabbildung als

$$x(t, t_0, x_0) = e_A(t, t_0)x_0$$

darstellen läßt.

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t, t_0)\| &= \lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \{\|e_A(t, t_0)x\|, \ x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq 1\} \\
&= \frac{2}{\eta} \lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \left\{\left\|e_A(t, t_0)\frac{\eta}{2}x\right\|, \ x \in \mathbb{X} : \|x\| \leq 1\right\}
\end{aligned}$$

Aus $\|x\| \le 1$ folgt $\left\|\frac{\eta}{2}x\right\| < \eta$.

Aus der Attraktivität von (2.3.7) mit (2.3.8) folgt daher

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \sup \left\{ \left\| e_A(t,t_0)\frac{\eta}{2}x \right\|, \ x \in \mathbb{X} : \|x\| \le 1 \right\} = 0$$

und damit

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t,t_0)\| = 0.$$

Somit ist (2.3.7) asymptotisch stabil nach Satz 2.3.2 und für die Untersuchung der asymptotischen Stabilität von (2.3.7) genügt es, Attraktivität nachzuweisen.

Für beliebige $t_0 \in \mathbb{T}$ und $x_0 \in \mathbb{X}$ gilt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|x(t,t_0,x_0)\| = \lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t,t_0)x_0\| \le \lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t,t_0)\| \, \|x_0\| = 0$$

und daher ist der Einzugsbereich von $x \equiv 0$ sowie jeder anderen Lösung von (2.3.7) ganz $\mathbb{T} \times \mathbb{X}$.

$\square$

Kapitel 3

Lyapunovfunktionen und Stabilität

3.1 Lyapunovfunktionen

Die geometrische Bedeutung der Existenz von Lyapunovfunktionen[1] lässt sich für den reellen Fall anhand des folgenden Beispiels verdeutlichen[2]:

Sei

$$V(x) := x^T Q x,$$

mit Q positiv definite, symmetrische $n \times n$ Matrix und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist V eine positiv definite, quadratische Form und die Gleichung

$$V(x) = K, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1.1}$$

beschreibt für $K > 0$ ein Ellipsoid im $\mathbb{R}^n$, dessen Achsen umso steiler sind, je größer K ist.

Die Ableitung $V'(y)$ bezüglich einer Lösung y der Differentialgleichung

$$y' = Ay \tag{3.1.2}$$

[1]benannt nach Alexander Michailowitsch Lyapunov (1857-1918)

[2]vgl. hierzu auch J. Cronin, [13], S. 194. Dort wird dieser Zusammenhang anhand einer allgemeinen Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ diskutiert. Dafür muss angenommen werden, dass die Lyapunovfunktion V autonom ist. Dies ist für unser Beispiel (3.1.2) unmittelbar einsichtig.

mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt an, wie sich V für $t \in \mathbb{R}$ entlang von $y(t) \in \mathbb{R}^n$ verändert.

Ist $V'(y)$ negativ semidefinit und tritt die Lösung y von (3.1.2) in das durch (3.1.1) beschriebene Ellipsoid ein, dann bleibt sie für alle Zeiten darin, die konstante Lösung $y \equiv 0$ von (3.1.2) ist somit stabil[3].

Ist $V'(y)$ sogar negativ definit, dann verbleibt die Lösung nicht nur in dem von (3.1.1) beschriebenen Ellipsoid, sondern tritt in darin enthaltene, kleinere Ellipsoide ein.

Die konstante Lösung $y \equiv 0$ von (3.1.2) ist in diesem Fall asymptotisch stabil[4].

Existiert V bezüglich eines linearen Systems und erfüllt $V'(y)$ für dessen Lösung y eine der oberen Bedingungen, so ist V eine Lyapunovfunktion.

In den nächsten Abschnitten wird es darum gehen, den hier im reellen Fall sehr anschaulich und lose dargestellten Zusammenhang zwischen Lyapunovfunktionen und Stabilität in klarer, mathematischer Sprache zu formulieren und auf Zeitskalen zu übertragen.

Damit aufgrund der Struktur der Zeitskala $\mathbb{T}$ nach den Überlegungen des letzten Abschnitts Aussagen über Stabilität überhaupt möglich sind und um Fälle auszuschließen, in denen bereits wegen der Körnigkeit, wie in Beispiel 2.3.1, asymptotische Stabilität nicht vorliegen kann, sei im Folgenden $\mathbb{T}$ stets eine nach oben unbeschränkte Zeitskala mit beschränkter Körnigkeit.

3.1.1 Delta-Differenzierbarkeit und Kettenregel

Wie bereits in der Einleitung zu dieser Arbeit, aber noch viel konkreter in dem das Kapitel 3 einleitenden Beispiel klar wurde, spielen bei Lyapunovfunktionen ihre Ableitungen bezüglich einer Lösung der gegebenen Differentialgleichung eine Rolle.

Daher wollen wir definieren, was wir auf Zeitskalen unter der Ableitung einer Funktion V bezüglich einer anderen, geeigneten Funktion x verstehen, außerdem wollen wir an einigen Beispielen ihre Berechnung untersuchen.

[3]vgl. [13], S. 194

[4]vgl. [13], S. 196; dort sind die Voraussetzungen an $V'(y)$ etwas anders, da eine allgemeine Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ zugrunde liegt.

In diesem Zusammenhang sei auch die Kettenregel von C. Pötzsche erwähnt, die er 1998 als Erster formuliert und in seinem Artikel mit dem Titel *„Chain Rule and invariance principle on measure chains“* (vgl. [38]) vorstellt.

Definition 3.1.1. Seien $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ Banachräume, $V : \mathbb{T} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ und $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{X}$.

V heiße *(Delta-) differenzierbar bezüglich x* an der Stelle $t_0 \in \mathbb{T}$, wenn für die Funktion $V_* : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{Y}$ definiert durch

$$V_*(t) := V(t, x(t)) \tag{3.1.3}$$

eine Zahl $V_*^{\Delta}(t_0) \in \mathbb{Y}$ existiert, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ von t_0 existiert mit

$$\left\| V_*(s) - V_*(\sigma(t_0)) - V_*^{\Delta}(t_0)(\sigma(t_0) - s) \right\| \leq \varepsilon \left| \sigma(t_0) - s \right| \tag{3.1.4}$$

für alle $s \in U_\varepsilon$.

Weiterhin heiße $V_*^{\Delta}(t_0)$ *(Delta-) Ableitung* von V *bezüglich x* in t_0.

Existiert $V_*^{\Delta}(t)$ in allen $t \in \mathbb{T}$, so heiße $V_*^{\Delta} : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{Y}$ (Delta-) Ableitung von V bezüglich x.

Beispiel 3.1.1. Beim folgenden Beispiel handelt es sich um die Kettenregel auf Zeitskalen von C. Pötzsche, [38].

Sei $I \subset \mathbb{T}$ offen, $J \subset \mathbb{R}^n$ offen und $t_0 \in I$.

Seien $g : I \longrightarrow J$ sowie $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

i.) Die Funktionen g, $t \longrightarrow f(t, g(t_0))$ mit $t \in I$ sind Delta-differenzierbar in t_0, wobei mit $\Delta_1 f(t_0, g(t_0))$ die Delta-Ableitung der Funktion $t \longrightarrow f(t, g(t_0))$ an der Stelle t_0 bezeichnet werde.

ii.) Es existiert eine Umgebung $U \subset I$ von t_0 so dass

$$D_2 f(t, \cdot) := \frac{df(t,x)}{dx}$$

für alle $x \in J$ und festes $t \in U \cap \{\sigma(t_0)\}$ existiert.

iii.) $D_2 f(\sigma(t_0), \cdot)$ ist stetig auf

$$\{g(t_0) + h\mu(t_0)g(t_0) \in \mathbb{R}^n : h \in [0; 1]\} . \tag{3.1.5}$$

iv.) $D_2 f$ ist stetig in $(t_0, g(t_0))$.

Dann ist die Abbildung $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(t) := f(t, g(t))$ differenzierbar in t_0 mit

$$F^\Delta(t_0) = \Delta_1 f(t_0, g(t_0)) + \left[\int_0^1 D_2 f(\sigma(t_0), g(t_0) + h\mu(t_0)g^\Delta(t_0))dh\right] \cdot g^\Delta(t_0) \tag{3.1.6}$$

Es gilt außerdem

$$F^\Delta(t_0) = f_*^\Delta(t_0).$$

Beweis: C. Pötzsche beweist die obere Behauptung in [38] gemäß der Definition von Delta-Differenzierbarkeit auf beliebigen Banachräumen (vgl. Definition 1.1.6), indem er zeigt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U_\varepsilon \subset I$ von t_0 gibt, so dass

$$\left\| F(s) - F(\sigma(t_0)) - (\sigma(t_0) - s)\left[\int_0^1 D_2 f(\sigma(t_0), g(t_0) + h\mu(t_0)g^\Delta(t_0))dh\right] \cdot g^\Delta(t_0) \right\|.$$
$$\leq \varepsilon \cdot |\sigma(t_0) - s|$$

für alle $s \in U_\varepsilon$ gilt.

$\square$

Beispiel 3.1.2. Sei durch $V : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$V(x) := x^T P x \tag{3.1.7}$$

mit $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch eine quadratische Form im $\mathbb{R}^n$ gegeben und

$$x^\Delta = Ax \tag{3.1.8}$$

ein lineares System mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regressiv.

Sei $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (3.1.8), dann gilt für allt $t \in \mathbb{T}$:

$$V_*(t) = x^T(t)Px(t)$$

und

$$V_*^\Delta(t) = (x^T(t)Px(t))^\Delta. \tag{3.1.9}$$

Daher läßt sich V_*^Δ mit Hilfe der Produktregel auf Zeitskalen (vgl. Satz 1.1.5) sowie Lemmata 1.3.3 und 1.3.6 folgendermaßen berechnen:

$$\begin{aligned} V_*^\Delta(t) &= (x^T(t)Px(t))^\Delta \\ &= x^T(\sigma(t))Px^\Delta(t) + x^T(t))^\Delta Px(t). \end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Der Ausdruck (3.1.10) ist wohldefiniert, da x nach Voraussetzung eine Lösung des linearen Systems (3.1.8) ist; setzen wir (3.1.8) ein, dann erhalten wir unter Verwendung der Rechenregeln für Matrizen und Lemma 1.3.3

$$\begin{aligned} x^T(\sigma(t))Px^\Delta(t) + (x^T(t))^\Delta Px(t) &= x^T(\sigma(t))PAx(t) + (x^\Delta(t))^T Px(t) \\ &= x^T(\sigma(t))PAx(t) + x^T(t)A^T Px(t). \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Nach Lemma 1.3.6 und unter Verwendung von (3.1.8) gilt stets:

$$(x(\sigma(t))^T = x^T(t)(A\mu(t) + I)^T.$$

Eingesetzt in (3.1.11) ergibt dies:

$$x^T(\sigma(t))PAx(t) + x^T(t)A^T Px(t) = x^T(t)\left[(A\mu(t) + I)^T PA + A^T P\right] x(t).$$

Somit erhalten wir für die Delta-Ableitung von V bezüglich x

$$V_*^\Delta(t) = x^T(t)\left[(A\mu(t) + I)^T PA + A^T P\right] x(t)$$

nach Produktregel, wobei V_*^Δ nicht nur von $x(t)$, sondern auch von t allein abhängt.

Beispiel 3.1.3. Die Kettenregel aus Beispiel 3.1.1 liefert für V_*^Δ bei V wie in Beispiel 3.1.2 das gleiche Ergebnis.

Die Berechnung ist zugleich ein schönes Beispiel für ihre praktische Anwendung, daher hat die folgende Rechnung im Rahmen dieser Arbeit ihre Berechtigung.

Da V in unserem Fall nur von der Variable x abhängt, entfällt Δ_1 in der Formel (3.1.6) für die Kettenregel.

Wir berechnen zunächst D_2V für $V(x) = x^T Px$ mit $x \in \mathbb{R}^n$.

Da $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist, existiert eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$TPT^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte von P sind.

Sei P daher im weiteren Beispiel in der Diagonalform.

Dann gilt:

$$x^T P x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$$

und $D_2 V$ berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} D_2(x^T P x) &= D_2\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right). \end{aligned}$$

Für alle $i, j = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 &= \frac{\partial}{\partial x_j}\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_j}\lambda_j x_j^2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_j}\lambda_n x_n^2 \\ &= 2\lambda_j x_j. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right) &= 2(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n). \\ &= 2x^T P. \end{aligned}$$

Also gilt nach der Formel für die Kettenregel (3.1.1):

$$\begin{aligned}
V_*^{\Delta}(t) &= \left[\int_0^1 2(x(t) + h\mu(t)x^{\Delta}(t))^T P)\ dh\right] x^{\Delta}(t) \\
&= \left[\int_0^1 2(x(t) + h(x(\sigma(t)) - x(t)))^T P\ dh\right] Ax(t) \\
&= [2(x^T(t)P + \frac{1}{2}x^T(t)(A\mu(t) + I)^T P - \frac{1}{2}x^T(t)P)]Ax(t) \\
&= x^T(t)PAx(t) + x^T(t)(A\mu(t) + I)^T PAx(t).
\end{aligned}$$

Die Funktion

$$\widetilde{V}(x, y) := x^T Py$$

ist für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ eine symmetrische Bilinearform, da P nach Voraussetzung eine symmetrische Matrix ist (vgl. [9], S. 255).

Somit gilt:

$$\widetilde{V}(x, y) = \widetilde{V}(y, x)$$

für alle $x, y, \in \mathbb{R}^n$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
x^T(t)PAx(t) &= \widetilde{V}(x(t), Ax(t)) \\
&= \widetilde{V}(Ax(t), x(t)) \\
&= (Ax(t))^T Px(t) \\
&= x^T(t)A^T Px(t)
\end{aligned}$$

und somit liefert die Kettenregel mit

$$V_*^{\Delta}(t) = x^T(t)[A^T P + (A\mu(t) + I)^T PA]x(t)$$

das gewünschte Resultat.

Wie wir an (3.1.12) und an Beispiel 3.1.3 und 3.1.2 sehen, kann V_*^{Δ} bezüglich (3.1.8) von t und $x(t)$ abhängen, auch wenn V nur von $x(t)$ abhängt, denn in allen Ausdrücken der Differentiation kommt die Struktur der Zeitskala in Form des Vorwärtssprungoperators σ bzw. der Körnigkeitsfunktion μ zum Tragen.

Hängt die Körnigkeit unserer Zeitskala von $t \in \mathbb{T}$ ab, dann erhalten wir trotz von t unabhängiger Funktionsgleichung (3.1.7) für V einen nichtautonomen Ausdruck für V_*^Δ bezüglich (3.1.8).

Dieses Problem werden wir im nächsten Abschnitt bei der Formulierung von Sätzen, in denen V_*^Δ eine Rolle spielt, zu berücksichtigen haben.

3.2 Lyapunovfunktionen und asymptotische Stabilität

Mit Hilfe der Delta-Ableitung entlang der Lösung einer gegebenen Gleichung werden wir Lyapunovfunktionen charakterisieren können.

Die Unterscheidung von Lyapunovfunktion und strikter Lyapunovfunktion, die wir in diesem Abschnitt machen werden, trägt dem Anspruch Rechnung, das Stabilitätsverhalten des linearen Systems

$$x^\Delta = A(t)x$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ durch die spezifischen Eigenschaften der zugehörigen Lyapunovfunktion analog zum reellen Fall vollständig beschreiben zu können, obwohl diese Arbeit sich nur dem Zusammenhang zwischen Lyapunovfunktionen und asymptotischer bzw. exponentieller Stabilität widmen wird.

Ferner sind aus der gleichen Motivation heraus die folgenden Definitionen allgemein genug gefasst, dass damit auch der nichtlineare Fall untersucht werden könnte.

Sie sollen außerdem eine Alternative zum Konzept von [30], S. 81-99, darstellen.

Dort bleibt nicht nur der Begriff der Instabilität für Zeitskalen völlig unklar, sondern auch, warum als Charakteristikum einer Lyapunovfunktion $V(t,x)$ mit $t \in \mathbb{T}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ für eine Lösung x mit einer gegebenen Differentialgleichung auf Zeitskalen eine verallgemeinerte Ableitung bezüglich $(t, x(t))$ betrachtet wird, die, wenn V in $(t, x(t))$ differenzierbar ist, nach Gleichung (3.1.6.), S. 90 offensichtlich nicht einmal mit $V^\Delta(t, x(t))$ identisch sein muss.

Ferner wird bei fast allen Sätzen eine abgeschwächte lokale Lipschitzeigenschaft von V in x gefordert, welche in die Definition von V im Gegensatz zu [43], S. 3 im reellen Fall nicht eingebaut wird.

Offen bleibt bei [30] ebenfalls der Zusammenhang zwischen einer Bemerkung auf S. 95, die besagt, dass ein vorher bewiesenes Theorem (vgl. Th. 3.2.1, S. 92) nur unter Veränderungen ein zum reellen Fall analoges Ergebnis bezüglich der Stabilität liefert und dem folgenden Korollar (vgl. Kor. 3.2.2, S. 95), das eben dieses Ergebnis ohne genauere Hinweise auf Modifikation direkt aus dem oben genannten Theorem (vgl. Th. 3.2.1, S. 92) folgert.

Unsere Ideen für die Definition von Lyapunovfunktionen sind angelehnt an [43], [4] im Reellen, vgl. auch [31] sowie [15] für Differenzengleichungen und wurden für Zeitskalen verallgemeinert.

3.2.1 Lyapunovfunktionen auf Zeitskalen

Definition 3.2.1. Sei $I \subset \mathbb{T}$, $J \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$V : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße *positiv definit*, wenn $\widetilde{V} : J \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\widetilde{V}(x) > 0$ für alle $x \in J$ mit $x \neq 0$ existiert, so dass

$$V(t, x) \geq \widetilde{V}(x) \tag{3.2.1}$$

für alle $x \in J$ mit $x \neq 0$ und alle $t \in I$ gilt.

Ist $\widetilde{V}(x) \geq 0$ für alle $x \in J$ mit $x \neq 0$ und gelte weiterhin (3.2.1), so heiße V *positiv semidefinit*.

Definition 3.2.2. Sei $I \subset \mathbb{T}$ offen, $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lösung von

$$y^{\Delta} = f(t, y). \tag{3.2.2}$$

mit $f : I \times G \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

$V : I \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ heiße *Lyapunovfunktion*, wenn gilt:

i.) V ist rd-stetig in t und stetig in x für alle $t \in I$ und alle $x \in G$

ii.) $V_*^{\Delta}(t)$ bezüglich y existiert für alle $t \in I$ und es gilt:

$$V_*^{\Delta}(t) \leq -W_*(t) \tag{3.2.3}$$

mit $W : I \times G \longrightarrow \mathbb{R}$ positiv semidefinit.

V heiße *strikte Lyapunovfunktion*, wenn sowohl V als auch W positiv definit sind.

3.2.2 Positiv definite, symmetrische Matrizen

Da wir im Folgenden zeigen wollen, dass ähnlich wie im reellen Fall, quadratische Formen als Lyapunovfunktionen für lineare Systeme auf Zeitskalen gewählt werden können, wenn diese einer zeitabhängigen Matrizengleichung genügen, werden wir als Vorbereitung noch einige spezielle Bezeichnungen einführen müssen:

Definition 3.2.3. Eine zeitabhängige Matrix $Q \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ heiße *symmetrisch*, falls für jedes $t \in \mathbb{T}$

$$Q^T(t) = Q(t)$$

gilt.

Definition 3.2.4. Eine symmetrische, zeitabhängige Matrix $Q \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ heiße *positiv definit* (bzw. positiv semidefinit), falls die durch sie induzierte zeitabhängige quadratische Form

$$Q_{t,x} : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(t, x) \longrightarrow x^T Q(t)x, \quad t \in \mathbb{T},\ x \in \mathbb{R}^n$$

positiv definit (bzw. positiv semidefinit) ist.

Dies bedeutet insbesondere, dass ein $c > 0$ (bzw. $c \geq 0$) existiert mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^Q(t)x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} cx_i^2$$

für alle $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \neq 0$ und $\lambda_i^Q(t) \in \Sigma(Q(t))$ für jedes $t \in \mathbb{T}$, $i = 1, \ldots, n$.

Diese Bedingung beinhaltet, dass $Q(t)$ an jeder Stelle $t \in \mathbb{T}$ eine positiv definite (bzw. positiv semidefinite) Matrix sein soll, verlangt bei positiver Definitheit aber zusätzlich, dass die durch Q induzierte quadratische Form für alle $t \in \mathbb{T}$ gleichmäßig von der 0 weg beschränkt ist.

Ferner sei

$$S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}) := \left\{Q \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}) \ \text{ symmetrisch, positiv definit}\right\}$$

die Menge aller positiv definiten, symmetrischen Matrizen.

3.2.3 Quadratische Lyapunovfunktionen und asymptotische Stabilität linearer Systeme

Wie man bezüglich eines autonomen, linearen Systems auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala mit beschränkter Körnigkeit eine quadratische Lyapunovfunktion beschreiben kann, darüber gibt das nächste Lemma Auskunft.

Lemma 3.2.1. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regressiv und*

$$x^{\Delta} = Ax \tag{3.2.4}$$

ein lineares System.

Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit

$$A^T P + (A\mu(t) + I)^T PA = -Q(t), \tag{3.2.5}$$

und $Q \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und positiv semidefinit. Dann ist

$$V(x) := x^T Px \tag{3.2.6}$$

mit $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lyapunovfunktion bezüglich (3.2.4).

Beweis: Es gilt nach Beispiel 3.1.2 und Beispiel 3.1.3

$$\begin{aligned} V_*^{\Delta}(t) &= (x^T(t)Px(t))^{\Delta} \\ &= x^T(t)[(A\mu(t) + I)^T PA + A^T P]x(t). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (3.2.5) sowie nach Definition 3.2.4

$$V_*^{\Delta}(t) = x^T(t)(-Q(t))x(t).$$

Die Behauptung folgt somit direkt aus Definition 3.2.2.

Da V als quadratische Form im $\mathbb{R}^n$ stetig und von $t \in \mathbb{T}$ unabhängig ist, gilt die erste Bedingung.

Weil Q nach Voraussetzung positiv semidefinit ist, folgt die zweite Bedingung von Definition 3.2.2.

□

Setzt man in Lemma 3.2.1 P und Q in $S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ voraus, so ist V sogar eine strikte Lyapunovfunktion.

Das folgende technische Lemma fehlt noch für das erste Resultat über Lyapunovfunktionen in Bezug auf asymptotische Stabilität linearer Gleichungen auf Zeitskalen:

Lemma 3.2.2. *Sei* $f \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{K})$ *und* $\xi_{\mu(\cdot)}f(\cdot)$ *wie in Bemerkung 1.2.9, Gleichung* (1.2.5) *definiert, wobei* ξ *die Zylindertransformation nach Definition 1.2.5 sei.*

Es gelte weiterhin:

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}(\xi_{\mu(t)}(f(t))) = -K, \quad K > 0.$$

Dann ist

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} e_f(t,t_0) = 0.$$

Beweis: Wegen

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} -|e_f(t,t_0)| \le \lim_{t\longrightarrow\infty} e_f(t,t_0) \le \lim_{t\longrightarrow\infty} |e_f(t,t_0)| \tag{3.2.7}$$

reicht es zu zeigen:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} |e_f(t,t_0)| = 0. \tag{3.2.8}$$

Dabei gelten folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
|e_f(t,t_0)| &= \left| \exp\left(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\Delta\tau\right)\right| \\
&= \left| \exp\left(\int_{t_0}^t \left[\mathrm{Re}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right) + i\cdot \mathrm{Im}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right)\right]\Delta\tau\right)\right| \\
&= \left| \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{Re}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right)\Delta\tau + i\cdot \int_{t_0}^t \mathrm{Im}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right)\Delta\tau\right)\right| \\
&= \left| \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{Re}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right)\Delta\tau\right)\right| \cdot \left| \exp\left(i\cdot \int_{t_0}^t \mathrm{Im}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right)\Delta\tau\right)\right|.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\left|e^{i\alpha}\right| = 1$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\left| \exp\left(i\cdot \int_{t_0}^t \mathrm{Im}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right)\Delta\tau\right)\right| = 1 \tag{3.2.9}$$

und

$$
\begin{aligned}
|e_f(t,t_0)| &= \left| \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\left(\xi_{\mu(\tau)}(f(\tau))\right) \Delta\tau \right) \right| \\
&\le \left| \exp\left(\int_{t_0}^{t} -K\Delta\tau \right) \right| \\
&= \left| \exp\left((t-t_0)\cdot(-K)\right) \right|.
\end{aligned}
$$

Dies führt zur Ungleichung

$$
0 \le \lim_{t\longrightarrow\infty} |e_f(t,t_0)| \le \lim_{t\longrightarrow\infty} |\exp\left((t-t_0)\cdot(-K)\right)| = 0 \tag{3.2.10}
$$

und daraus folgt die Behauptung nach (3.2.7).

□

Mit Hilfe der oberen Überlegungen können wir einen ersten Satz über den Zusammenhang von Lyapunovfunktionen und hinreichenden Bedingungen für asymptotische Stabilität autonomer linearer Systeme auf nach oben unbeschränkten Zeitskalen mit beschränkter Körnigkeit formulieren.

Die Beweisidee hierzu stammt von P. Kloeden, [29], S. 14/3 für den reellen Fall, um diese auf Zeitskalen übertragen zu können, waren einige technische Zusatzannahmen nötig. Dabei musste der Tatsache Rechnung getragen werden, dass bei einer Zeitskala mit nichtkonstanter Körnigkeit die Zeitabhängigkeit ebenfalls in die Lyapunovgleichung eingeht.

Proposition 3.2.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine regressive Matrix und*

$$
x^{\Delta} = Ax \tag{3.2.11}
$$

ein lineares System auf $\mathbb{T}$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$
V(x) := x^T P x,
$$

$P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ konstant mit größtem Eigenwert $\lambda_{\max}^P = 1$ gegeben durch

$$
A^T P + (A\mu(t) + I)^T P A = -Q(t) \tag{3.2.12}
$$

mit $Q \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Sei außerdem $\lambda_{\min}^Q(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ kleinster Eigenwert von $Q(t)$, so dass die Funktion $\gamma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\gamma(t) := -\lambda_{\min}^Q(t) \tag{3.2.13}$$

regressiv ist und die Bedingung

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}(\xi_{\mu(t)}(\gamma(t))) = -K \tag{3.2.14}$$

für ein $K > 0$ erfüllt.

Dann ist die Lösung $x \equiv 0$ von (3.2.11) *asymptotisch stabil.*

Beweis: Sei $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Lösung von (3.2.11) mit

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$$

und $x_i : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

$P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch und positiv definit, daher gibt es eine reguläre Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$TPT^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^P, \ldots, \lambda_n^P)$$

mit Eigenwerten $\lambda_i^P \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Sei deshalb P im weiteren Beweis in der Diagonalform.

$Q(t)$ läßt sich als symmetrische Matrix für jedes $t \in \mathbb{T}$ ebenfalls diagonalisieren mit Eigenwerten $\lambda_i^Q(t) \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \ldots, n$.

Weil Q positiv definit ist, folgt für $t \in \mathbb{T}$:

$$x^T Q(t) x = \sum_{i=1}^n \lambda_i^Q(t) x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n c x_i^2$$

für ein $c > 0$ sowie alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit ist auch $\lambda_i^Q(t) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und $i = 1, \ldots, n$.

Sei also $Q(t)$ im weiteren Beweis ebenfalls in der Diagonalform für jedes $t \in \mathbb{T}$.

Nach Lemma 3.2.1 gilt für $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} V_*^\Delta(t) &= x^T(t)[A^T P + (A\mu(t) + I)^T PA]x(t) \\ &= x^T(t)(-Q(t))x(t) \\ &= -\sum_{i=1}^n \lambda_i^Q(t) x_i^2(t). \end{aligned}$$

Sei $\lambda_{\min}^Q(t)$ der kleinste Eigenwert von $Q(t)$, dann erhalten wir wegen $\lambda_{\max}^P = 1$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}^Q(t) V_*(t) &= \lambda_{\min}^Q(t) x^T P x(t) \\ &= \lambda_{\min}^Q(t) \sum_{i=1}^n \lambda_i^P x_i^2(t) \\ &\leq \lambda_{\min}^Q(t) \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^Q(t) x_i^2(t) \\ &\leq x^T(t) Q(t) x(t) \\ &= -V_*^\Delta(t). \end{aligned}$$

Multiplikation mit -1 liefert

$$V_*^\Delta(t) \leq -\lambda_{\min}^Q(t) V_*(t) = \gamma(t) V_*(t).$$

Aus der Rd-Stetigkeit von Q folgt die Rd-Stetigkeit von $\lambda_{\min}^Q$ auf $\mathbb{T}$, da wir $Q(t)$ in der Diagonalform für jedes $t \in \mathbb{T}$ wählten, folgt Rd-Stetigkeit aller λ_i^Q mit $i = 1, \ldots, n$ auf $\mathbb{T}$ unmittelbar aus der Rd-Stetigkeit von Q auf $\mathbb{T}$.

Wegen $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus die Rd-Stetigkeit von $\lambda_{\min}^Q$ auf $\mathbb{T}$ als Minimum über endlich viele rd-stetige Funktionen.

Weil γ nach Voraussetzung regressiv ist, folgt mit den oberen Überlegungen $\gamma \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ und wegen $V_* : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist $e_\gamma(t, t_0)V_*(t_0)$ nach Satz 2.1.3 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$V_*^\Delta(t) = \gamma(t)V_*(t), \quad V_*(t_0) = V(t_0, x(t_0)).$$

Dies führt zur Ungleichung

$$V_*(t) \leq e_\gamma(t, t_0)V_*(t_0). \tag{3.2.15}$$

Mit (3.2.14) erfüllt γ die Voraussetzungen von Lemma 3.2.2 und daraus folgt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} e_\gamma(t, t_0) = 0. \tag{3.2.16}$$

Sei $\lambda_{\min}^P$ der kleinste Eigenwert von P.

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda_{\min}^P \|x\|^2 \leq V_*(t). \tag{3.2.17}$$

Daher folgt aus (3.2.15), (3.2.16) und (3.2.17)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \longrightarrow \infty} \lambda_{\min}^P \|x(t)\|^2 \\ &\leq \lim_{t \longrightarrow \infty} V_*(t) \\ &\leq \lim_{t \longrightarrow \infty} e_\gamma(t, t_0)V_*(t_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0.$$

für jede beliebige Lösung x von (3.2.11) und damit ist die Lösung $x \equiv 0$ von (3.2.11) attraktiv.

Daraus folgt die asymptotische Stabilität von $x \equiv 0$ mit Bemerkung 2.3.3.

□

Über den Zusammenhang zwischen der Existenz einer Lyapunovfunktion und der Stabilität bzw. Instabilität von (3.2.11) liefert Proposition 3.2.3 keine Aussagen.

Obwohl wir in Proposition 3.2.3 ein autonomes, lineares System betrachten, folgt aus Lemma 3.2.1, dass wir im Allgemeinen eine nichtautonome Lyapunovgleichung (3.2.12) zu lösen haben, weil durch die Anwendung der Produktregel auf Zeitskalen Ausdrücke hineinkommen, die von der Körnigkeit der Zeitskala abhängig sind.

Nur wenn $\mathbb{T}$ konstante Körnigkeit besitzt, ist die Lyapunovgleichung autonom, in diesem Fall wollen wir von einer homogenen Zeitskala sprechen.

3.3 Beispiele

Im Folgenden werden wir versuchen, Proposition 3.2.3 mit Hilfe einiger Bemerkungen und Beispiele zu ergänzen sowie Untersuchungen auf asymptotische Stabilität eines konkreten linearen Systems durchzuführen.

Bemerkung 3.3.1. i.) Gegeben sei das lineare System (3.2.11) mit Lösung $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$V(x) := x^T P x,$$

mit $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische, positive Lösung von (3.2.12) und damit eine strikte Lyapunovfunktion nach Lemma 3.2.1.

Dann ist αV für jedes $\alpha > 0$ ebenfalls eine strikte Lyapunovfunktion.

ii.) Sei λ^P_{max} der größte Eigenwert von P. Dann hat

$$\widetilde{P} := P \cdot \frac{1}{\lambda^P_{max}} \tag{3.3.1}$$

1 als größten Eigenwert und

$$\widetilde{V}(x) := x^T \widetilde{P} x \tag{3.3.2}$$

erfüllt die Eigenschaften (3.2.12) und (3.2.13) von Proposition 3.2.3.

Beweis:

i.) Sei $\alpha > 0$.

Dann gilt nach (3.2.12)

$$\begin{aligned}
[\alpha V]_*^\Delta(t) &= \alpha \cdot V_*^\Delta(t) \\
&= \alpha \cdot x^T(t)(-Q(t))x(t) \\
&= x^T(t)(-\alpha \cdot Q(t))x(t). \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

Aus Q symmetrisch folgt αQ symmetrisch mit Eigenwerten $\alpha\lambda_i^Q(t)$ für $i = 1, \ldots, n$ und jedes $t \in \mathbb{T}$.

Da $x^T Q(t)x$ positiv definit ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in \mathbb{T}$, existiert ein $c > 0$ so daß für alle $t \in \mathbb{T}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^Q(t)x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n cx_i^2. \qquad (3.3.4)$$

Wegen $\alpha > 0$ folgt aus (3.3.4)

$$\sum_{i=1}^n \alpha\lambda_i^Q(t)x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n (\alpha c)x_i^2$$

und damit ist $x^T(\alpha Q(t))x$ ebenfalls positiv definit.

Da die Multiplikation mit einer positiven Konstante nichts an der Stetigkeit von V ändert, folgt die Behauptung aus den Eigenschaften von V und (3.3.3) direkt aus Definition 3.2.2.

ii.) Nach i.) ist $\widetilde{V}(x)$ wieder eine Lyapunovfunktion. Seien $\lambda_1^P, \ldots, \lambda_n^P$ die Eigenwerte von P. Dann gilt für die Eigenwerte von $\widetilde{P}$:

$$\lambda_i^{\widetilde{P}} = \frac{\lambda_i^P}{\lambda_{\max}^P} \leq 1 \qquad (3.3.5)$$

insbesondere ist

$$\lambda_{\max}^{\widetilde{P}} = \frac{\lambda_{\max}^P}{\lambda_{\max}^P} = 1. \qquad (3.3.6)$$

□

Wie wir an der letzten Bemerkung sehen, können wir die Forderung

$$\lambda_{\max}^P = 1$$

von Proposition 3.2.3 bezüglich des größten Eigenwerts von P, die für die Rechnungen im Beweis sehr praktisch war und daher ihre Berechtigung hatte, weglassen.

Hat die Lyapunovgleichung (3.2.12) eine beliebige, positiv definite und symmetrische Lösung $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so kann man λ^P_{max} nach Bemerkung 3.3.1 durch Multiplikation mit einer geeigneten Konstante $\alpha > 0$ stets auf Eins normieren.

Beispiel 3.3.2. Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, dann gilt $\mu(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Die Lyapunovgleichung (3.2.12) ist für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ von t unabhängig und hat folgende Gestalt:

$$A^T P + PA = -Q. \tag{3.3.7}$$

Dies entspricht der für den reellen Fall bekannten Gleichung (vgl. z.B [43], S. 86 und [29], S. 14/3).

Weil $Q \in S^+\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ eine konstante Matrix ist, gilt

$$\lambda^Q_{\min}(t) = \lambda^Q_{\min},$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus sofort

$$\gamma \equiv -\lambda^Q_{\min}$$

auf $\mathbb{T}$ folgt und damit

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \mathrm{Re}\left(\xi_{\mu(t)}(\gamma(t))\right) = \mathrm{Re}\left(\xi_0(-\lambda^Q_{\min})\right) = -\lambda^Q_{\min}.$$

Somit impliziert im reellen Fall die Existenz einer positiv definiten Lösung von (3.2.12) bereits Bedingung (3.2.14), da alle $\alpha \in \mathbb{R}$ bezüglich $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ regressiv sind.

Von den Bedingungen aus Proposition 3.2.3 bleibt also nur zu überprüfen, ob die Lyapunovgleichung (3.3.7) eine positiv definite und symmetrische Lösung besitzt.

Damit liefert Proposition 3.2.3 im reellen Fall das bekannte Ergebnis (vgl. z.B. [29], S. 14/3), dass die Existenz einer positiv definiten, symmetrischen Lösung P von (3.2.12) die asymptotische Stabilität von (3.2.11) impliziert.

Beispiel 3.3.3. Sei $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Wegen $\mu(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{T}$ ist Q eine beliebige konstante, symmetrische und positiv definite Matrix.

Wählt man Q als Identitätsmatrix I, so ergibt sich folgende, autonome Lyapunovgleichung:

$$A^T + (A+I)^T BA = -I. \tag{3.3.8}$$

Sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass $(C-I)$ regressiv ist und

$$x(t+1) = Cx(t) \tag{3.3.9}$$

eine Differenzengleichung.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} x^{\Delta}(t) &= \frac{x(\sigma(t)) - x(t)}{\mu(t)} \\ x^{\Delta}(t) &= x(t+1) - x(t) \\ x^{\Delta}(t) &= Cx(t) - x(t) \\ x^{\Delta}(t) &= (C-I)x(t). \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Formel (3.3.8) für die Lyapunovgleichung auf $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ergibt sich die für Differenzengleichungen bekannte Lyapunovgleichung (vgl. z.B. [31], S. 130):

$$\begin{aligned} (C-I)^T B + (C-I+I)^T B(C-I) &= -I \\ (C-I)^T B + C^T B(C-I) &= -I \\ C^T B - B + C^T BC - C^T B &= -I \\ C^T BC - B &= -I. \end{aligned}$$

Beispiel 3.3.4. Sei $\mathbb{T} = h\mathbb{Z},\ h > 0$. Dann ist $\mu(t) = h$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Die inverse Matrix zu $Ah + I$ ist für $\|Ah\| < 1$ durch die von Neumann-Reihe (vgl. [44], S. 69) gegeben:

$$\begin{aligned} (Ah+I)^{-1} &= (-1\cdot(-Ah-I))^{-1} \\ &= -(-Ah-I)^{-1} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}(-Ah)^k, \end{aligned}$$

da die von Neumann-Reihe für

$$\|-Ah\| = \|Ah\| < 1 \tag{3.3.10}$$

konvergiert.

A ist somit regressiv auf allen Zeitskalen $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, für deren Körnigkeit h die Beziehung (3.3.10) gilt.

Insbesondere existiert $h^* > 0$, so dass (3.3.10) gilt für alle $h < h^*$.

Damit ist jede beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regressiv auf einer Zeitskala $\mathbb{T}_1$ mit konstanter Körnigkeit h_1, wenn nur h_1 klein genug ist.

Für das lineare System (3.2.11) mit zugrunde liegender Zeitskala $\mathbb{T}_1$ gilt dann der allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. [11], Th. 8.20, S. 324).

Dies motiviert die Untersuchung der Lyapunovgleichung auf $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, wenn die Körnigkeit h gegen 0 geht.

Wegen $\mu \equiv h$ auf $\mathbb{T}$ ist die linke Seite von (3.2.12) autonom und wir können $Q \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ konstant wählen.

Für $Q = I$ ergibt sich dann aus (3.2.12) die Lyapunovgleichung

$$A^T P + (Ah + I)^T PA = -I. \tag{3.3.11}$$

Außerdem gilt:

$$\lim_{h \longrightarrow 0} A^T P + (Ah + I)^T PA = A^T P + PA,$$

also konvergiert (3.3.11) für $h \longrightarrow 0$ gegen die Lyapunovgleichung in $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (vgl. Beispiel 3.3.2).

In Bezug auf asymptotische Stabilität des linearen Systems (3.2.11) bleibt nach Proposition 3.2.3 Bedingung (3.2.14) zunächst auch im Fall einer homogenen Zeitskala mit Körnigkeit $h \neq 0$ zu überprüfen.

Wegen $1 - h \neq 0$ für alle $h < 1$ folgt die Regressivität von $\gamma \equiv -1$ auf $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ mit $h < 1$.

Betrachten wir Gleichung (3.2.14) für $h < 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sup_{t\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\xi_{\mu(t)}(\gamma(t))\right) &= \operatorname{Re}\left(\xi_h(-1)\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Log}(1-h)}{h}\right) \\ &= \frac{\log(1-h)}{h} \\ &< -K_h\end{aligned}$$

für ein $K_h > 0$ wegen $\log(1-h) < 0$ für $0 < h < 1$.

Damit ist Bedingung 3.2.14 auf $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ trivialerweise erfüllt, wenn $h < 1$ ist.
Analog zum reellen Fall (vgl. Beispiel 3.3.2) folgt dann aus der Existenz einer positiv definiten, symmetrischen Lösung P von (3.3.11) bereits die asymptotische Stabilität von (3.2.11).

Ein entscheidender Vorteil des Zeitskalenkalküls gegenüber der Theorie der Differenzengleichungen (vgl. [15], [31]), ist die Möglichkeit, mit wenig Aufwand Differentialgleichungen auf periodischen Zeitskalen der Bauart

$$\mathbb{T}_{a,b} := \bigcup_{n=0}^{\infty} [n(a+b); n(a+b)+a], \quad a, b > 0$$

lösen zu können.

Diese Zeitskalen eignen sich besonders gut, um Probleme aus der Biologie zu modellieren, in denen Wachstumsperioden immer wieder von Ruheperioden unterbrochen werden und danach auf höherem Niveau fortfahren, wie z.B. Lebenszyklen von Insektenpopulationen (vgl. [11], Ex. 1.39, S. 15) oder die mehrjährige Entwicklung des Bestands einjähriger Pflanzen, die im Frühjahr aus den Samen des Vorjahresbestands zu wachsen beginnen und im Herbst absterben (vgl. [11], Ex. 2.58, S.72).

Das folgende Beispiel soll anhand von

$$\mathbb{T}_{1,1} = \bigcup_{n=0}^{\infty} [2n; 2n+1]$$

verdeutlichen, dass im Falle eines linearen Systems auf $\mathbb{T}_{1,1}$ durch einfaches Lösen von linearen Gleichungssystemen gegebenenfalls eine strikte Lyapunovfunktion explizit angegeben werden kann.

Alle Bedingungen aus Proposition 3.2.3 sind durch Fallunterscheidung für $t \in [2n; 2n+1[$ und $t = 2n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ von $t \in \mathbb{T}$ unabhängig, so dass die Untersuchung eines linearen Systems auf asymptotische Stabilität praktisch gut durchführbar ist.

Beispiel 3.3.5. Sei

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{3.3.12}$$

Sei außerdem

$$x^{\Delta} = Ax \tag{3.3.13}$$

ein lineares System auf einer periodischen Zeitskala

$$\mathbb{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1]. \tag{3.3.14}$$

Dann sind alle Punkte auf $]2n, 2n+1[$ rechts dicht und links dicht.

Insbesondere gilt $\mu(t) = 0$ für alle $t \in\,]2n, 2n+1[$.
Ebenfalls ist $t = 2n$ mit $n = 1, 2, \ldots$ rechts dicht, denn

$$\sigma(2n) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = 2n \tag{3.3.15}$$

also auch $\mu(2n) = 0$ mit $n = 1, 2 \ldots$.

Dagegen ist $t = 2n$ für $n = 1$ als Minimum von $\mathbb{T}$ links dicht und für $n \neq 1$ links zerstreut.

Insbesondere gilt:

$$\rho(2n) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 1, \\ 2n - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abbildung 3.1: Die Zeitskala $\mathbb{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1]$

Die Punkte $t = 2n + 1$ mit $n = 1, 2 \ldots$ sind rechts zerstreut und links dicht, denn:

$$\sigma(2n + 1) = 2n + 2$$

und

$$\rho(2n + 1) = 2n + 1.$$

Daraus folgt $\sigma(t) > t$ für $t = 2n + 1$ und

$$\mu(t) = 2n + 2 - (2n + 1) = 1.$$

Auf $[2n, 2n + 1[$ ergibt sich wegen $\mu \equiv 0$ nach (3.2.12) die autonome Lyapunovgleichung

$$A^T P + PA = -Q_1.$$

Für alle $t = 2n+1$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu(t) = 1$ und damit ebenfalls nach (3.2.12)

$$A^T P + (A + I)^T PA = -Q_2.$$

Dies führt zu folgendem Gleichungssystem für (3.2.12) auf $\mathbb{T}$:

$$A^T P + PA = -Q_1 \tag{3.3.16}$$

$$A^T P + (A + I)^T PA = -Q_2. \tag{3.3.17}$$

Einsetzen in (3.3.17) ergibt:

$$\begin{aligned} A^T P + (A + I)^T PA &= A^T P + A^T PA + PA \\ &= A^T P + PA + A^T PA \\ &= -Q_1 + A^T PA. \end{aligned}$$

Wähle $Q_1 = I$.

Dann ist die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.3.16) gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 4 & 18 \end{pmatrix}. \tag{3.3.18}$$

P lässt sich vollständig diagonalisieren mit positiven Eigenwerten

$$\begin{aligned}
\lambda_1^P &= \frac{3}{2} \\
\lambda_2^P &= \frac{-10240 + 128\sqrt{5120}}{-512} \\
\lambda_3^P &= \frac{-10240 - 128\sqrt{5120}}{-512}
\end{aligned}$$

und ist daher für $h = 0$ positiv definit nach dem Trägheitssatz von Sylvester (vgl. [9], S.273).

Es bleibt nach (3.3.18) zu überprüfen, ob P auch (3.3.17) löst. Dazu setzen wir alle bekannten Werte in (3.3.17) ein und diskutieren, ob wir für Q_2 dann eine positiv definite, symmetrische Matrix erhalten:

$$\begin{aligned}
A^T PA - Q_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{31}{32} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{11}{8} \end{pmatrix} \\
&= -1 \cdot Q_2;
\end{aligned}$$

Q_2 lässt sich vollständig diagonalisieren mit Eigenwerten

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{Q_2} &= \frac{5}{6} > 0 \\
\lambda_2^{Q_2} &= \frac{75}{64} + \frac{1}{64}\sqrt{233} > 0 \\
\lambda_3^{Q_2} &= \frac{75}{64} - \frac{1}{64}\sqrt{233} > 0
\end{aligned}$$

und ist somit positiv definit nach dem Trägheitssatz von Sylvester (vgl. [9], S.273) und

$$Q(t) := \begin{cases} Q_1, & \text{falls } t \in [2n, 2n+1[\\ Q_2, & \text{falls } t = t = 2n+1 \text{ mit } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ist für alle $t \in \mathbb{T}$ positiv definit, symmetrisch und offensichtlich regressiv und rd-stetig.

Wähle daher für $x \in \mathbb{R}^n$

$$V(x) := x^T P x. \tag{3.3.19}$$

Dann ist (3.3.19) nach Proposition 3.2.3 eine mögliche Lyapunovfunktion für die gegebene Gleichung (3.3.13).

Um zu überprüfen, ob (3.3.13) auch tatsächlich asymptotisch stabil ist, bleiben die übrigen Bedingungen von Proposition 3.2.3 zu betrachten:

$$\gamma(t) := -\lambda_{min}^{Q(t)} = \begin{cases} -\dfrac{5}{6}, & \text{falls } t = 2u+1 \\ -1, & \text{sonst} \end{cases}$$

also insbesondere rd-stetig auf $\mathbb{T}$.

Weiterhin gilt

$$1 + \mu(t)\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & \text{falls } t = 2u+1 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit ist γ auch regressiv auf $\mathbb{T}$.

Für die Verknüpfung von γ mit μ und Zylindertransformation (vgl. Proposition 3.2.3, Bedingung 3.2.14) gilt

$$\xi_{\mu(t)}(\gamma(t)) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{2}{3}\right), & \text{falls } t = 2u+1 \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist $\xi_{\mu(t)}(\gamma(t))$ in $\mathbb{R}$ und wir haben:

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \operatorname{Re}(\xi_{\mu(t)}(\gamma(t))) = \log\left(\frac{2}{3}\right) < 0,$$

und damit ist die konstante Lösung $x \equiv 0$ von (3.3.13) nach Proposition 3.2.3 asymptotisch stabil.

Beispiel 3.3.6. Wir betrachten erneut das lineare System (3.3.13), diesmal auf $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, also $\mu(t) = h$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und $h \geq 0$.

Wir wollen im Folgenden untersuchen, für welche Körnigkeiten $h \geq 0$ die Lyapunovgleichung (3.3.11) eine symmetrische und positiv definite Lösung besitzt.

Setze dafür

$$P_h := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich aus (3.3.11) folgendes lineare Gleichungssystem bezüglich P_h:

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{3}p_{11} - \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{3}h+1\right)p_{11} &&= -1\\
&-\tfrac{1}{3}p_{12} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{3}h+1\right)p_{12} &&= 0\\
&-\tfrac{1}{3}p_{13} - \left(-\tfrac{1}{3}h+1\right)p_{12} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{3}h+1\right)p_{13} &&= 0\\
&-\tfrac{1}{4}p_{21} - \tfrac{1}{3}\left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{21} &&= 0\\
&-\tfrac{1}{4}p_{22} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{22} &&= -1\\
&-\tfrac{1}{4}p_{23} - \left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{22} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{23} = 0 &&= 0\\
&-p_{21} - \tfrac{1}{4}p_{31} + \tfrac{1}{3}hp_{21} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{31} &&= 0\\
&-p_{22} - \tfrac{1}{4}p_{32} + \tfrac{1}{4}hp_{22} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{32} &&= 0\\
&-p_{23} - \tfrac{1}{4}p_{33} + hp_{22} - \left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{32} + \tfrac{1}{4}hp_{23} - \tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{1}{4}h+1\right)p_{33} &&= -1
\end{aligned}$$

und daraus folgende Lösung für $h \in \mathbb{R}^+ \setminus \{6, 8\}$:

$$P_h = \begin{pmatrix} \dfrac{-9}{-6+h} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-16}{h-8} & 64 \cdot \dfrac{h-4}{(h-8)^2} \\ 0 & 64 \cdot \dfrac{h-4}{(h-8)^2} & -16 \cdot \dfrac{17h^2 - 144h + 576}{(h-8)^3} \end{pmatrix}. \tag{3.3.20}$$

Offensichtlich ist P_h für $h \in \mathbb{R}^+ \setminus \{6, 8\}$ eine symmetrische Matrix.

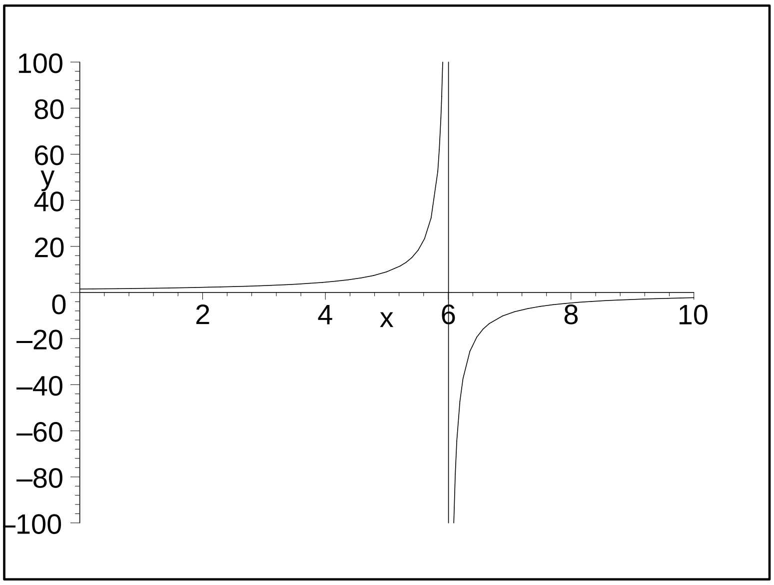


Abbildung 3.2: Funktionsgraph von $\lambda_1^P(h)$

Es bleibt also zu untersuchen, für welche Körnigkeit $h \geq 0$ diese positiv definit ist.

Als symmetrische Matrix ist P_h vollständig diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten.
Nach dem Trägheitssatz von Sylvester (vgl. [9], S.273) ist P_h positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind.

Diese haben in Abhängigkeit von h folgende Gestalt:

$$\lambda_1^P(h) = \frac{-9}{-6+h}$$

$$\lambda_2^P(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-288h^2 + 2560h - 10240 + 128\sqrt{\alpha(h)}}{(h-8)^3}$$

$$\lambda_3^P(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-288h^2 + 2560h - 10240 - 128\sqrt{\alpha(h)}}{(h-8)^3}$$

wobei

$$\alpha(h) = 5h^4 - 88h^3 + 720h^2 - 2861h + 5120$$

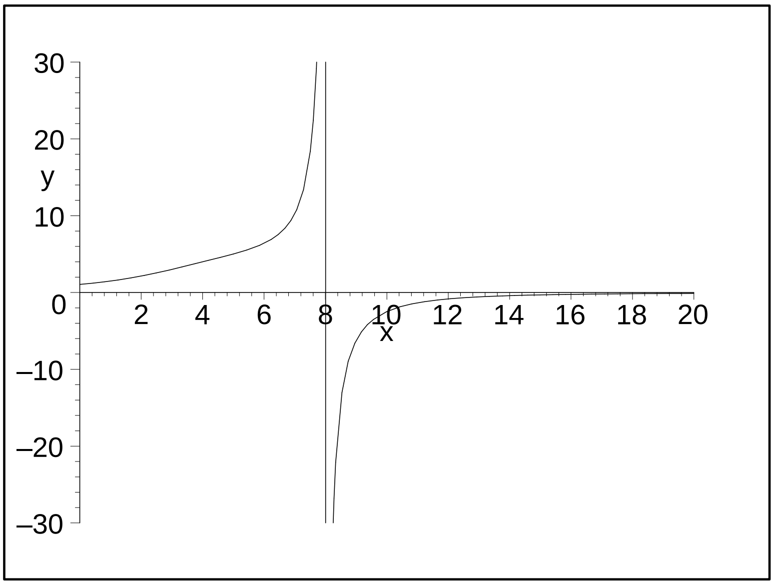


Abbildung 3.3: Funktionsgraph von $\lambda_2^P(h)$

für alle $h \in \mathbb{R}$ positiv ist.

Somit sind $\lambda_1^P(h), \lambda_2^P(h)$ sowie $\lambda_3^P(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}^+ \setminus \{6, 8\}$ reelle Funktionen (vgl. Abbildungen 3.2, 3.3 und 3.4 mit den zugehörigen Funktionsgraphen).

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1^P(h) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad h \in [0; 6[\\ \lambda_2^P(h) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad h \in [0; 8[\\ \lambda_3^P(h) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad h \in [0; 8[, \end{aligned}$$

also sind alle drei Eigenwerte von P_h genau dann positiv, wenn $h \in [0; 6[$ und somit ist $V(x) := x^T P_h x$ für $h \in [0; 6[$ eine strikte Lyapunovfunktion nach Lemma 3.2.1.

Sei $h > 0$.

Wegen

$$0 < \frac{h}{\lambda_{\max}^P(h)} < 1$$

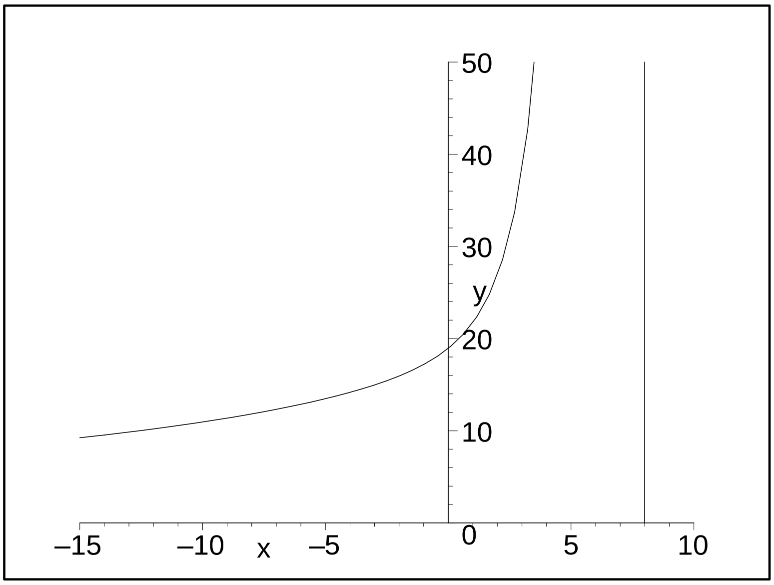


Abbildung 3.4: Funktionsgraph von $\lambda_3^P(h)$

für alle $h \in]0;6[$ ist

$$\frac{1}{h} \cdot \log \left| 1 - \frac{h}{\lambda_{\max}^P(h)} \right| < -K_h, \quad K_h > 0$$

und die Bedingung (3.2.14) aus Proposition 3.2.3. erfüllt.

Nach Beispiel 3.3.2 ist im Fall $h = 0$ nichts mehr zu überprüfen.

Aus Proposition 3.2.3 folgt somit, dass die Lösung $x \equiv 0$ von (3.3.13) mit A wie in (3.3.12) für $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $h \in]0;6[$ und $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ asymptotisch stabil ist.

Proposition 3.2.3 vermag jedoch nicht den Zusammenhang zwischen der Definitionslücke von $\lambda_i^P(h)$ für $i = 1,2,3$ und der Stabilität von (3.3.13) zu fassen.

Obwohl wir wissen, dass für $h \geq 6$ keine asymptotische Stabilität vorliegen kann, erhalten wir keine Auskunft darüber, wann immerhin noch Stabilität und wann Instabilität vorliegen könnte.

Diesen Zusammenhang können liefern z.B. die Ergebnisse von A. Döffinger (vgl. [14], Kor. 3.2.4, S. 59) für homogene Zeitskalen.

Betrachtet man die Eigenwerte von A

$$\lambda_1^A = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda_2^A = -\frac{1}{3},$$

so ergeben sich folgende Ungleichungen bezüglich ihres Realteils in Abhängigkeit von der Körnigkeit $h \geq 0$:

$$\mathrm{Re}_h(\lambda_1^A) < 0 \Leftrightarrow \frac{\left|1 - \frac{h}{4}\right| - 1}{h} < 0 \Leftrightarrow h \in [0; 8[$$

und

$$\mathrm{Re}_h(\lambda_2^A) < 0 \Leftrightarrow \frac{\left|1 - \frac{h}{3}\right| - 1}{h} < 0 \Leftrightarrow h \in [0; 6[,$$

was sich mit unseren Ergebnissen für asymptotische Stabilität deckt.

Für $h = 6$ gilt

$$\mathrm{Re}_6\, \lambda_2^A = 0$$

und damit ist nach [14], Kor. 3.2.4, S. 59 das lineare System (3.3.13) in diesem Fall immerhin noch stabil.

Für $h > 6$ gilt

$$\mathrm{Re}_6\, \lambda_2^A > 0$$

und damit ist (3.3.13) in diesem Fall instabil nach [14], Kor. 3.2.4, S. 59.

Der Zusammenhang zwischen der Stabilität bzw. Instabilität eines linearen Systems auf einer Zeitskala mit Hilfe von Lyapunovfunktionen wäre also noch zu formulieren.

Wünschenswert wäre eine Verallgemeinerung von [4], Satz 7.9.1, S. 347 aus dem reellen Fall auf Zeitskalen, in dem die Existenz einer Lyapunovfunktion Stabilität eines linearen Systems impliziert, sowie eine Verallgemeinerung des Zusammenhangs zwischen strikter Lyapunovfunktion und Instabilität (vgl. z.B. [4], Satz 7.9.3, S. 350) auf Zeitskalen.

Dadurch, dass bei nichthomogenen Zeitskalen P in der Lyapunovgleichung durch eine matrixwertige Abbildung Q beschrieben wird, ist die praktische Berechnung von Lyapunovfunktionen mit Hilfe von (3.2.14) schon für autonome lineare Systeme schwierig.

Wir werden im nächsten Kapitel zu zeigen versuchen, dass es trotzdem einen Unterschied macht, ob man Lyapunovgleichungen für autonome oder nichtautonome, lineare Systeme untersuchen will.

Kapitel 4

Nichtautonome, lineare Systeme

Bei der Betrachtung von Lyapunovfunktionen für nichtautonome, lineare Gleichungen werden wir uns weiterhin des Konzepts aus Definition 3.2.2 bedienen, das dafür allgemein genug ist.

Ziel des Abschnitts ist es, Proposition 3.2.3 auf den nichtautonomen Fall auszuweiten.
Dazu werden wir in Anlehnung an P.C. Müller, der in [33], Abschnitt 3.3, S. 81-83, den nichtautonomen, reellen Fall diskutiert, auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala $\mathbb{T}$ mit beschränkter Körnigkeit $P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ zeitabhängig wählen und so die Lyapunovgleichung (3.2.12) aus Proposition 3.2.3 verallgemeinern.

4.1 Asymptotische Stabilität nichtautonomer, linearer Systeme

4.1.1 Zeitabhängige Lyapunovfunktionen

Sei

$$x^{\Delta} = A(t)x, \tag{4.1.1}$$

$A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ ein lineares System auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala $\mathbb{T}$ mit beschränkter Körnigkeit.

Das nächste Beispiel gibt darüber Auskunft, wie eine quadratische Lyapunovfunktion für (4.1.1) aussehen könnte:

Beispiel 4.1.1. Sei $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$V(t, x) := x^T P(t) x \tag{4.1.2}$$

mit $P \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und Delta-differenzierbar.
Sei $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (4.1.1).

Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{T}$

$$V_*^\Delta(t) = x^T(t) \left[H^T(t)P^\Delta(t)H(t) + H^T(t)P(t)A(t) + A^T(t)P(t)\right] x(t) \tag{4.1.3}$$

mit

$$H(t) := A(t)\mu(t) + I.$$

Beweis: Mit Hilfe der Produktregel für Ableitungen auf Zeitskalen nach Satz 1.3.2 gilt für jedes $t \in \mathbb{T}$

$$\begin{aligned} V_*^\Delta(t) &= \left[x^T(t)P(t)x(t)\right]^\Delta \\ &= \left[x^T(t) \cdot P(t)x(t)\right]^\Delta \\ &= x^T(\sigma(t)) \cdot [P(t)x(t)]^\Delta + \left(x^\Delta(t)\right)^T \cdot P(t)x(t). \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Durch erneute Anwendung der Produktregel auf (4.1.4) ergibt sich durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \left[x^T(t)P(t)x(t)\right]^\Delta &= x^T(\sigma(t)) \left[P^\Delta(t)x(\sigma(t)) + P(t)x^\Delta(t)\right] \\ &+ \left(x^\Delta(t)\right)^T \cdot P(t)x(t) \\ &= x^T(\sigma(t))P^\Delta(t)x(\sigma(t)) \\ &+ x^T(\sigma(t))P(t)x^\Delta(t) + \left(x^\Delta(t)\right)^T \cdot P(t)x(t) \\ &= x^T(\sigma(t))P^\Delta(t)x(\sigma(t)) \\ &+ x^T(\sigma(t))P(t)A(t)x(t) \\ &+ x^T(t)A^T(t)P(t)x(t). \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Unabhängig davon, ob $t \in \mathbb{T}$ rechts dicht oder rechts zerstreut ist, ist die folgende Umformung wahr nach Lemma 1.3.6

$$x(\sigma(t)) = x^{\Delta}(t) \cdot \mu(t) + x(t). \tag{4.1.6}$$

Eingesetzt in Gleichung (4.1.5) folgt aus (4.1.6):

$$\begin{aligned}
\left[x^T(t)P(t)x(t)\right]^{\Delta} &= (x^{\Delta}(t)\mu(t) + x(t))^T P^{\Delta}(t)(x^{\Delta}\mu(t) + x(t)) \\
&+ (x^{\Delta}(t)\mu(t) + x(t))^T P(t)A(t)x(t) + x^T(t)A^T(t)P(t)x(t) \\
&= x^T(t)(A(t)\mu(t) + I)^T P^{\Delta}(t)(A(t)\mu(t))x(t) \\
&+ x^T(t)(A(t)\mu(t) + I)^T P(t)A(t)x(t) + x^T(t)A^T(t)P(t)x(t) \\
&= x^T(t)\left[H^T(t)P^{\Delta}(t)H(t) + H^T(t)P(t)A(t) + A^T(t)P(t)\right]x(t).
\end{aligned}$$

□

Weil P Delta-differenzierbar ist und damit nach [11], Th. 8.5, S. 316 auch stetig, ist V stetig in beiden Komponenten.

Damit V alle Eigenschaften einer Lyapunovfunktion erfüllt, muss nach Definition 3.2.2 eine positiv semidefinite Funktion $W : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, rd-stetig auf $\mathbb{T}$ und stetig auf $\mathbb{R}^n$ existieren mit

$$V_*^{\Delta}(t) \leq -W_*(t). \tag{4.1.7}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$.

Sei $Q \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ symmetrisch und positiv semidefinit mit

$$V_*^{\Delta}(t) = x^T(-Q(t))x(t),$$

dann ist V eine Lyapunovfunktion.

Sind Q und P sogar in $S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$, dann ist V eine strikte Lyapunovfunktion.

Im nächsten Abschnitt wollen wir zeigen, dass aus der Existenz einer strikten quadratischen Lyapunovfunktion, die durch eine positiv definite Lösung von (4.1.3) aus Beispiel 4.1.1 beschrieben wird, für (4.1.1) mit einigen zeitskalenspezifischen Zusatzannahmen asymptotische Stabilität von (4.1.1) gefolgert werden kann.

4.1.2 Hinreichende Bedingungen für asymptotische Stabilität

Mit den Überlegungen des letzten Abschnitts werden wir Proposition 3.2.3 im Folgenden für den nichtautonomen Fall verallgemeinern.

Als Voraussetzung für asymptotische Stabilität von (4.1.1) reicht im Allgemeinen die Existenz einer strikten, quadratischen Lyapunovfunktion

$$V(t,x) = x^T P(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{T}$$

mit geeignetem $P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ nicht aus. Wir müssen die gleichen technischen Zusatzbedingungen annehmen wie schon in Proposition 3.2.3, um den Beweis übertragen zu können.

Proposition 4.1.2. *Für das lineare System* (4.1.1) *mit* $A \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *sei* $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$V(t,x) := x^T P(t)x, \tag{4.1.8}$$

wobei $P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *durch*

$$H^T P^\Delta H + H^T PA + A^T P = -Q, \quad H := A\mu + I, \tag{4.1.9}$$

mit $Q \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *gegeben sei.*

Sei außerdem $\lambda^Q_{\min}(t)$ *für jedes* $t \in \mathbb{T}$ *der kleinste Eigenwert von* $Q(t)$ *und* $\lambda^P_{\max}(t)$ *für jedes* $t \in \mathbb{T}$ *der größte Eigenwert von* $P(t)$.

Die Funktion $\gamma : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$\gamma(t) := \frac{-\lambda^Q_{\min}}{\lambda^P_{\max}}(t)$$

sei regressiv mit

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\xi_{\mu(t)}(\gamma(t))\right) = -K \tag{4.1.10}$$

für ein $K > 0$.

Dann ist die konstante Lösung $x \equiv 0$ *von* (4.1.1) *asymptotisch stabil.*

Beweis: Sei $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lösung von (4.1.1) mit

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$$

und $x_i : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$.

Da $P(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ eine symmetrische $n \times n$ - Matrix ist, lässt sich $P(t)$ vollständig diagonalisieren mit reellen Eigenwerten (vgl. [16], S. 312).

Seien also $\lambda_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ so dass $\lambda_i^P(t)$ für alle $i = 1 \ldots n$ und jedes $t \in \mathbb{T}$ Eigenwerte von $P(t)$ sind und $P(t)$ im weiteren Beweis eine Diagonalmatrix.

Aus der positiven Definitheit von P folgt weiterhin für ein $c > 0$ und alle $t \in \mathbb{T}$:

$$x^T P(t)x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^P(t)x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{n} cx_i^2 \tag{4.1.11}$$

Somit gilt sogar $\lambda_i : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$, d.h. die Eigenwerte von $P(t)$ sind strikt positiv für jedes $t \in \mathbb{T}$, da P gleichmäßig von der 0 weg beschränkt ist.

Nach Beispiel 4.1.1 und Lyapunovgleichung (4.1.9) gilt

$$\begin{aligned} V_*^{\Delta}(t) &= x^T(t)[H^T(t)P^{\Delta}(t)H(t) + H^T(t)P(t)A(t) + A^T(t)P(t)]x(t) \\ &= x^T(t)(-Q(t))x(t) \end{aligned}$$

Da $Q \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$, sei $Q(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ mit dem gleichen Argument wie $P(t)$ im weiteren Beweis in der Diagonalform mit strikt positiven, reellen Eigenwerten $\lambda_1^Q(t), \ldots, \lambda_n^Q(t)$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{\min}^Q(t)}{\lambda_{\max}^P(t)} V_*(t) &= \frac{\lambda_{\min}^Q(t)}{\lambda_{\max}^P(t)} x^T P(t)x \\ &= \lambda_{\min}^Q(t) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i^P(t)}{\lambda_{\max}^P(t)} x_i^2(t) \\ &\leq x^T(t)Q(t)x(t). \end{aligned}$$

Multiplikation mit -1 liefert zusammen mit (4.1.12) folgende Abschätzung für $V_*(t),\ t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} V_*^{\Delta}(t) &\leq \frac{-\lambda_{\min}^Q(t)}{\lambda_{\max}^P(t)} x^T P(t)x \\ &= \gamma(t)V_*(t). \end{aligned}$$

Aus der Rd-Stetigkeit von P und Q folgt mit Lemma 1.2.3 Rd-Stetigkeit von γ analog zu Proposition 3.2.3.

Wegen $V_* : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ und γ regressiv nach Voraussetzung ist $e_\gamma(t,t_0)$ nach Satz 2.1.2 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$V_*^\Delta(t) = \gamma(t)V_*(t), \quad V_*(t_0) = V(t_0, x(t_0)) \tag{4.1.12}$$

Dies führt zur Ungleichung

$$V_*(t) \leq e_\gamma(t,t_0)V_*(t_0). \tag{4.1.13}$$

Mit (4.1.10) erfüllt γ die Voraussetzungen von Lemma 3.2.2 und es gilt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} e_\gamma(t,t_0) = 0.$$

Wegen (4.1.11) und (4.1.13) ist die folgende Ungleichungskette wahr:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \longrightarrow \infty} c\,\|x(t)\|^2 \\ &\leq \lim_{t \longrightarrow \infty} V_*(t) \\ &\leq \lim_{t \longrightarrow \infty} e_\gamma(t,t_0)V_*(t_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

für jede beliebige Lösung x von (4.1.1) und damit ist die konstante Lösung

$$x \equiv 0$$

von (4.1.1) attraktiv und wegen Satz 2.3.2 sowie Bemerkung 2.3.3 asymptotisch stabil.

□

Bemerkung 4.1.3. Sogar wenn wir in Proposition 4.1.2 als Voraussetzung die Regressivität von P und Q fordern würden, müssten wir die Regressivität von γ zusätzlich voraussetzen.

Impliziert zwar die Regressivität von P und Q, da beide als Diagonalmatrizen gewählt werden können, die Regressivität aller ihrer Eigenwerte nach Lemma 2.2.2, jedoch ist der Quotient zweier regressiver Funktionen im Allgemeinen nicht wieder regressiv.

Bemerkung 4.1.4. Sei V wie in Proposition 4.1.2 gegeben.

i.) Für $P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ konstant und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt insbesondere

$$P^\Delta \equiv 0$$

und damit erhalten wir für (4.1.9) die aus Lemma 3.2.1 bereits bekannte Lyapunovgleichung

$$V_*^\Delta(t) = x^T(t)(A^T P + (A\mu(t) + I)^T PA)x(t) = x^T(t)(-Q(t))x(t). \tag{4.1.14}$$

Somit ist Proposition 3.2.3 ein Sonderfall von Proposition 4.1.2.

ii.) Betrachten wir ein autonomes, lineares System

$$x^\Delta = Ax \tag{4.1.15}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regressiv, so ist die Delta-Ableitung $V_*^\Delta(t)$ bezüglich einer Lösung $x : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ von (4.1.15) nach (4.1.14) durch eine nichtautonome Gleichung gegeben, in der immerhin die Delta-Ableitung von P verschwindet, was die Berechnung konkreter Lyapunovfunktionen für autonome, lineare Systeme weniger aufwendig macht.

Die Lösbarkeit der Lyapunovgleichung (4.1.9) für nichtautonome, lineare Systeme müssen wir mit Hilfe des allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für Zeitskalen (vgl. [11], Th. 8.20, S. 324) untersuchen[1], eine Methode dafür soll im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

4.2 Existenz und Eindeutigkeit

Bemerkung 4.2.1. In diesem Abschnitt sollen einige allgemeine Überlegungen dazu angestellt werden, wann die Lyapunovgleichung (4.1.9) auf Zeitskalen zu einem Anfangswert $P(t_0) = P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eindeutig lösbar ist.

[1] Der Unterschied, ob man (4.1.9) für autonome oder für nichtautonome lineare Systeme lösen liegt hier.

Es wird ein Verfahren skizziert werden, mit dem (4.1.9) auf eine Form gebracht werden kann, in der (Regressivität und Rd-Stetigkeit vorausgesetzt) mit Hilfe des allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssatzes (vgl. [11], Th. 8.20, S. 324) eine zum gegebenen Anfangswert eindeutige Lösung nachgewiesen werden kann.

Seien hierzu $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ definiert durch

$$A(t) := (a_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} \tag{4.2.1}$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$, sei $P \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ mit

$$P(t) := (p_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} \tag{4.2.2}$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ sowie $Q \in S^{+}\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n \times n})$ mit

$$Q(t) := (q_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} \tag{4.2.3}$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$.

Mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis von Proposition 4.1.2 sei $Q(t)$ eine Diagonalmatrix für jedes $t \in \mathbb{T}$, um die Rechnungen zu vereinfachen.

Wegen A regressiv ist die Abbildung H definiert durch

$$H(t) = (h_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} := (A(t)\mu(t) + I)^{-1} \quad t \in \mathbb{T}, \tag{4.2.4}$$

wohldefiniert und rd-stetig für alle $t \in \mathbb{T}$.

Mit diesen Bezeichnungen wird die Lyapunovgleichung (4.1.9) jetzt mit Hilfe einfacher Äquivalenzumformungen umgestellt, so dass P^{Δ} alleine steht:

$$P^{\Delta}(t) = -P(t)A(t)H(t) - H^{T}(t)A^{T}(t)P(t)H(t) - H^{T}(t)Q(t)H(t) \tag{4.2.5}$$

für $t \in \mathbb{T}$.

Die rechte Seite von (4.2.5) wird mit Matrixmultiplikation zusammengefasst. Wir sortieren die Koeffizienten danach, ob sie Einträge von P enthalten und klammern diese gegebenfalls aus.

Damit ist (4.2.5) äquivalent zu

$$P^{\Delta}(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n} + (r_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}, \tag{4.2.6}$$

wobei $(r_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ eine $n \times n$ Matrix ohne Einträge $(p_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ ist.

Die Einträge der Matrix $(b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ in (4.2.6) lassen sich für jedes $t \in \mathbb{T}$ mit Hilfe des euklidischen Skalarprodukts im $\mathbb{R}^{n^2}$ wie folgt schreiben:

$$b_{ij}(t) = -\langle \overrightarrow{l^{ij}}(t), \overrightarrow{P}(t) \rangle$$

wobei

$$\overrightarrow{P}(t) = (p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t))^T$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ die Matrix $P(t)$ als Spaltenvektor im $\mathbb{R}^{n^2}$ darstellt und

$$\overrightarrow{l^{ij}}(t) = (l^{ij}_{11}(t), \dots, l^{ij}_{nn}(t)) \in \mathbb{R}^{n^2} \tag{4.2.7}$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ keine Einträge von $P(t)$, dafür aber für $i, j = 1, \dots, n$ Ausdrücke aus Koeffizienten von $A(t)$, $H(t)$ sowie $Q(t)$ enthält.

Damit lässt sich $(b_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ aus (4.2.6) für jedes $t \in \mathbb{T}$ als Produkt einer Matrix und eines Spaltenvektors im $\mathbb{R}^{n^2}$ darstellen:

$$\begin{pmatrix} b_{11}(t) \\ \vdots \\ b_{nn}(t) \end{pmatrix} = L(t) \cdot \left(\overrightarrow{P}(t) \right)$$

mit

$$L(t) := \begin{pmatrix} \overrightarrow{l^{11}}(t) \\ \vdots \\ \overrightarrow{l^{nn}}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2},$$

wobei die Zeilenvektoren $\overrightarrow{l^{ij}}(t)$ für $t \in \mathbb{T}$ in (4.2.7) definiert wurden.

Insbesondere enthält $L(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ ebenfalls keine Koeffizienten von $P(t)$.

Schreibt man auch alle Einträge von $P^{\Delta}(t)$ und $(r_{ij}(t))_{i,j=1,\dots,n}$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ als Spaltenvektoren im $\mathbb{R}^{n^2}$, also

$$\overrightarrow{P^{\Delta}}(t) := \begin{pmatrix} p^{\Delta}_{11}(t) \\ \vdots \\ p^{\Delta}_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{r}(t) := \begin{pmatrix} r_{11}(t) \\ \vdots \\ r_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

so erhält man folgende Darstellung von (4.2.6) als lineares System auf $\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{n^2}$:

$$\overrightarrow{P^{\Delta}} = L \cdot \overrightarrow{P} + \overrightarrow{r}. \tag{4.2.8}$$

Nach dem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz (vgl. [28], S. 13, oder auch [11], Th. 8.20, S. 324) sowie Satz 2.1.6 über die Variation der Konstanten existiert für (4.2.8) eine eindeutige Lösung $P \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n^2})$ zu jedem gegebenen Anfangswert $P(t_0) = P_0 \in \mathbb{R}^{n^2}$, falls $L \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n^2\times n^2})$ und $(r_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ auf $\mathbb{T}$ rd-stetig ist.

Beispiel 4.2.2. Gegeben seien A, P , Q und H im $\mathbb{R}^{2\times 2}$ wie in (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) sowie (4.2.4) definiert.

Die Gleichung 4.2.5 ist dann äquivalent zu:

$$P^{\Delta} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned} b_{11} = & -(a_{11}h_{11} + a_{12}h_{21} + h_{11}^2 a_{11} + h_{11}h_{21}a_{21})p_{11} \\ & -(a_{21}h_{11} + a_{22}h_{21} + h_{11}h_{21}a_{11} + h_{21}^2 a_{12})p_{12} \\ & -(h_{11}^2 a_{21} + h_{11}h_{21}a_{22})p_{21} \\ & -(h_{11}h_{21}a_{21} + h_{21}^2 a_{22})p_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} = & -(a_{11}h_{12} + a_{12}h_{22} + h_{11}a_{11}h_{12} + h_{21}h_{12}a_{12})p_{11} \\ & -(a_{21}h_{12} + a_{22}h_{22} + h_{11}h_{22}a_{11} + h_{22}h_{21}a_{12})p_{12} \\ & -(h_{11}a_{21}h_{12} + h_{21}h_{12}a_{22})p_{21} \\ & -(h_{11}h_{22}a_{21} + h_{21}h_{22}a_{22})p_{22} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &= -(h_{12}h_{11}a_{11} + h_{22}a_{12}h_{11})p_{11} \\
&\quad -(h_{21}h_{12}a_{11} + h_{21}h_{22}a_{12})p_{12} \\
&\quad -(a_{11}h_{11} + a_{12}h_{21} + h_{11}h_{22}a_{22})p_{21} \\
&\quad -(a_{21}h_{11} + a_{22}h_{21} + h_{21}h_{12}a_{21} + h_{21}h_{22}a_{22})p_{22} \\
b_{22} &= -(h_{12}^2a_{11} + h_{12}h_{22}a_{12})p_{11} \\
&\quad -(h_{22}h_{12}a_{11} + h_{22}^2a_{12})p_{12} \\
&\quad -(a_{11}h_{12} + a_{12}h_{22} + h_{12}^2a_{21} + h_{12}h_{22}a_{22})p_{21} \\
&\quad -(a_{21}h_{21} + a_{22}h_{21} + h_{22}h_{12}a_{21} + h_{22}^2a_{22})p_{22}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
r_{11} &= -h_{11}^2q_{11} - h_{21}^2q_{22} \\
r_{12} &= -h_{11}q_{11}h_{12} - h_{21}q_{22}h_{22} \\
r_{21} &= -h_{11}q_{11}h_{12} - h_{21}q_{22}h_{22} \\
r_{22} &= -h_{12}^2q_{11} - h_{22}^2q_{22}.
\end{aligned}$$

Sei

$$\overrightarrow{P} = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})^T.$$

Dann läßt sich (4.2.5) mit Hilfe der oberen Bezeichnungen umformen zu:

$$P^{\Delta} = \begin{pmatrix} -\langle \overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{P} \rangle & -\langle \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{P} \rangle \\ -\langle \overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{P} \rangle & -\langle \overrightarrow{b}_4, \overrightarrow{P} \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \tag{4.2.9}$$

wobei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^4$ gemeint ist.

Weiterhin enthalten die Vektoren $\overrightarrow{b}_i$ mit $i = 1, 2, 3, 4$ die folgenden Koeffizienten von A, H und Q:

$$\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} a_{11}h_{11} + a_{12}h_{21} + h_{11}^2 a_{11} + h_{11}h_{21}a_{21} \\ a_{21}h_{11} + a_{22}h_{21} + h_{11}h_{21}a_{11} + h_{21}^2 a_{12} \\ h_{11}^2 a_{21} + h_{11}h_{21}a_{22} \\ h_{11}h_{21}a_{21} + h_{21}^2 a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} a_{11}h_{12} + a_{12}h_{22} + h_{11}a_{11}h_{12} + h_{21}h_{12}a_{12} \\ a_{21}h_{12} + a_{22}h_{22} + h_{11}h_{22}a_{11} + h_{22}h_{21}a_{12} \\ h_{11}a_{21}h_{12} + h_{21}h_{12}a_{22} \\ h_{11}h_{22}a_{21} + h_{21}h_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b}_3 = \begin{pmatrix} h_{12}h_{11}a_{11} + h_{22}a_{12}h_{11} \\ h_{21}h_{12}a_{11} + h_{21}h_{22}a_{12} \\ a_{11}h_{11} + a_{12}h_{21} + h_{11}h_{22}a_{22} \\ a_{21}h_{11} + a_{22}h_{21} + h_{21}h_{12}a_{21} + h_{21}h_{22}a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b}_4 = \begin{pmatrix} h_{12}^2 a_{11} + h_{12}h_{22}a_{12} \\ h_{22}h_{12}a_{11} + h_{22}^2 a_{12} \\ h_{11}a_{21}h_{12} + h_{21}h_{12}a_{22} \\ a_{21}h_{21} + a_{22}h_{21} + h_{22}h_{12}a_{21} + h_{22}^2 a_{22} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich aus (4.2.9) für

$$L = \begin{pmatrix} -\overrightarrow{b}_1^T \\ -\overrightarrow{b}_2^T \\ -\overrightarrow{b}_3^T \\ -\overrightarrow{b}_4^T \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{21} \\ r_{22} \end{pmatrix}$$

sowie für

$$\overrightarrow{P^{\Delta}} = (p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})^T$$

folgendes lineare System im $\mathbb{T} \times \mathbb{R}^4$:

$$\overrightarrow{P^{\Delta}} = L\overrightarrow{P} + \overrightarrow{r}. \tag{4.2.10}$$

Ist $L \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{4\times 4})$ und $\overrightarrow{r} \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^4)$, liefert [28], S. 13 bzw. [11], Th. 8.20, S. 324 zusammen mit Satz 2.1.6 eine eindeutige Lösung $P \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^4)$ für (4.2.10) zum Anfangswert $P(t_0) = P_0$ für $t_0 \in \mathbb{T}$ und $P_0 \in \mathbb{R}^4$.

Damit ist über positive Definitheit bzw. Symmetrie von P noch nichts ausgesagt; um diese Untersuchen zu können, müssten wir uns erst um eine explizite Darstellung von P bemühen.

Ist P konstant, dann ist diese durch den Putzer-Algorithmus auf Zeitskalen (vgl. [11], Th. 5.35, S. 201) mit Hilfe von Satz 2.1.6 gegeben.

Ist P Jordan zerlegbar, dann liefert [39], Lemma 16, S. 17 zusammen mit Satz 2.2.3 eine explizite Darstellung.

4.3 Beispiele

In Proposition 4.1.2 haben wir gesehen, dass für die asymptotische Stabilität des linearen Systems

$$x^{\Delta} = A(t)x$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala mit beschränkter Körnigkeit unter anderem die matrixwertige, lineare Gleichung (4.2.5) eine Lösung $P \in S^{+}\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ besitzen muss.

Mit der Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösung von (4.2.5) haben wir uns im vorigen Abschnitt beschäftigt und konnten feststellen, dass diese von der Regressivität und Rd-Stetigkeit der Gleichung (4.2.8) abhängt, die eine Darstellung von (4.2.5) im $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

Somit ist es im nichtautonomen Fall um Beispiele für Lyapunovfunktionen auch deshalb schwierig, weil kein allgemeines Verfahren zur direkten Bestimmung der Lösung von (4.1.9) auf beliebigem $\mathbb{T}$ zur Verfügung steht. Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung müssen mühsam überprüft werden.

Im Folgenden wollen wir Existenz sowie positive Definitheit und Symmetrie von Lösungen der Lyapunovgleichung (4.1.9) zumindest bezüglich zweier einfacher Zeitskalen diskutieren, für die wir auf bekannte Resultate aus der Theorie der reellen Matrizen zurückgreifen können.

Daher fangen wir mit dem einfachsten Beispiel $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ an und wollen in Bezug darauf zusammenfassen, welche Bedingungen gelten müssen, damit

(4.1.9) lösbar ist und die Lösung P von (4.1.9) in $S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ liegt für vorgegebenes $Q \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Die Übertragung bekannter Ergebnisse aus [7] in die Sprache der Zeitskalen soll dabei auch der Selbstverständigung darüber dienen, welche Ergebnisse auf beliebigen unbeschränkten Zeitskalen $\mathbb{T}$ mit beschränkter Körnigkeit zu verallgemeinern wünschenswert wäre.

Beispiel 4.3.1. Sei $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ und

$$x^\Delta = A(t)x \tag{4.3.1}$$

ein lineares System mit $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Offensichtlich gilt dann $\mu(t) = 0$ und $\sigma(t) = t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und daraus ergibt sich aus der allgemeinen Lyapunovgleichung (4.1.9) in Proposition 4.1.2 die folgende Riccati-Matrizengleichung:

$$P^\Delta = -A^T P - PA - Q \tag{4.3.2}$$

mit $Q \in S^+\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Da wir uns im reellen Fall befinden, ist jede Gleichung regressiv und wegen A nach Voraussetzung stetig, existiert zu jedem beliebigen Anfangswert $P(t_0) = P_0$ nach Bemerkung 4.2.1 eine eindeutige Lösung P von (4.3.2).

Zunächst wollen wir eine explizite Darstellung von P angeben und danach hinreichende und notwendige Bedingungen, unter denen P symmetrisch und positiv definit im Sinne von Definition 3.2.3 und Defintion 3.2.4 ist.

Unsere Ergebnisse sind aus [7], [32] und [17] für den reellen Fall entnommen und in die Zeitskalenschreibweise übertragen worden.

Die Formel für P liefert dabei der folgende Satz:

Satz 4.3.2 (vgl. [7], Th. 5.3, S.108). *Gegeben sei die Anfangswertaufgabe*

$$P^\Delta = -A^T P - PA - Q, \quad P(t_0) = P_0 \tag{4.3.3}$$

mit $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $Q \in S^+\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *und* $t_0 \in \mathbb{R}$.

Weiterhin sei $P_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *Lösung von*

$$P_1^\Delta = -A^T P_1, \quad P_1(t_0) = I \tag{4.3.4}$$

Dann ist

$$P(t) = P_1(t)\left\{P_0 + \int_{t_0}^{t} P_1^{-1}(s)(-Q(s))\left(P_1^T\right)^{-1}(s)\Delta s\right\} P_1^T(t) \tag{4.3.5}$$

eindeutige Lösung von (4.3.3).

Der nächste Satz behandelt Bedingungen für positive Definitheit und Symmetrie von P:

Satz 4.3.3 (vgl. [7], Th. 5.4, S.110). *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.3.4 sei das Anfangswertproblem* (4.3.3) *mit* $P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch und eindeutiger Lösung* $P \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *durch* (4.3.5) *für jedes* $t \in \mathbb{R}$ *gegeben.*

Dann ist $P \in S^+\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *genau dann wenn*

$$P_0 + \int_{t_0}^{t} P_1^{-1}(s)(-Q(s)) \left(P_1^T\right)^{-1}(s)\Delta s$$

für $t \geq t_0$ *symmetrisch und positiv definit ist.*

Beispiel 4.3.4. Sei

$$\mathbb{T} := \bigcup_{n\in\ \mathbb{N}} [2n, 2n+1].$$

und

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{4.3.6}$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{d\times d})$ ein lineares System mit folgenden Eigenschaften:

i.) Es existiert eine Funktion $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^{d\times d} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $V(t,x) := x^T P(t)x$ für $t \in \mathbb{T}$, $x \in \mathbb{R}^d$ und $P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{d\times d})$.

ii.) Für $t \in [2n, 2n+1[$ sei $P(t)$ Lösung von

$$-Q(t) = P^{\Delta}(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) \tag{4.3.7}$$

mit $Q \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{d\times d})$.

iii.) Für $P_n := P(2n+1)$, $Q_n := Q(2n+1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ löse P_n die Gleichung

$$-Q_n = (A(2n+1) + I)^T P_n A(2n+1) + A^T(2n+1)P_n. \tag{4.3.8}$$

iv.) Für $\lambda_{\min}^{Q_n}$ kleinster Eigenwert von Q_n, $\lambda_{\max}^{P_n}$ größter Eigenwert von P_n und jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\gamma_n := \frac{\lambda_{\min}^{Q_n}}{\lambda_{\max}^{P_n}}$$

in $t = 2n+1$ regressiv und

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \log|1 - \gamma_n| = -K \tag{4.3.9}$$

für ein $K > 0$.

Dann ist das nichtautonome, lineare System (4.3.6) asymptotisch stabil.

Insbesondere implizieren die dritte und vierte Bedingung die asymptotische Stabilität des autonomen, linearen Systems

$$x^{\Delta} = A(2n+1)x \tag{4.3.10}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ auf $\mathbb{T}_1 := \mathbb{Z}$.

Abbildung 4.1: Die Zeitskala $\mathbb{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2n, 2n+1]$

Beweis: Nach Definition 3.2.1 ist V mit den Eigenschaften aus i.) und ii.) eine strikte Lyapunovfunktion für $t \in [2n; 2n+1[$, $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $\mu \equiv 0$ auf $[2n; 2n+1[$ mit $n \in \mathbb{N}$ folgt für $\lambda^Q_{\min}(t)$ kleinster Eigenwert von $Q(t)$, $\lambda^P_{\max}(t)$ größter Eigenwert von $P(t)$ die Beziehung

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \operatorname{Re}\left(\xi_{\mu(t)}\left(-\frac{\lambda^Q_{\min}}{\lambda^P_{\max}}(t)\right)\right) = \sup_{t \in \mathbb{T}} -\frac{\lambda^Q_{\min}}{\lambda^P_{\max}}(t) \leq \frac{c_2}{c_1}$$

mit $c_1, c_2 > 0$ und $t \in [2n; 2n+1[$, $n \in \mathbb{N}$; denn aus der positiven Definitheit von P folgt die Existenz von $c_1 > 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda^P_i(t) x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{d} c_1 x_i^2$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$, $\lambda^P_i(t) \in \Sigma\left(P(t)\right)$ für $t \in [2n; 2n+1[$.

Analog folgt aus der positiven Definitheit von Q die Existenz von $c_2 > 0$ mit

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda^Q_i(t) x_i^2 \geq \sum_{i=1}^{d} c_2 x_i^2$$

für alle $x = (x_1, \ldots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ und $\lambda^Q_i(t) \in \Sigma\left(Q(t)\right)$ für $t \in [2n; 2n+1[$.

Für $t = 2n + 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mu(2n + 1) = 1$ und $V_n := x^T P_n x$ nach Definition 3.2.1 eine strikte Lyapunovfunktion.

γ_n ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung regressiv in $t = 2n + 1$, daher ist $\xi_1(\gamma_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und nach (4.3.9) gilt:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\xi_1\left(\gamma_n\right)\right) &= \operatorname{Re}\left(\operatorname{Log}\left(1 - \gamma_n\right)\right) \\
&= \log\left|1 - \gamma_n\right| \\
&= \log\left|1 - \gamma_n\right| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \log\left|1 - \gamma_n\right| \\
&= -K.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$\operatorname{Re}\left(\xi_1\left(\gamma_n\right)\right) \leq -K$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Wegen $P \in S^+\mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{d\times d})$ ist V rd-stetig auf $\mathbb{T}$ und als quadratische Form bei festem $t \in \mathbb{T}$ stetig auf $\mathbb{R}^d$ und damit nach Definition 3.2.1 eine strikte Lyapunovfunktion auf ganz $\mathbb{T}$.

Weiterhin gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} \xi_{\mu(t)}\left(\gamma(t)\right) \leq -C$$

für

$$C := \min\left\{K, \frac{c_2}{c_1}\right\}.$$

Daher folgt die Behauptung aus Proposition 4.1.2.

Betrachtet man nur die dritte und vierte Bedingung, so sind für alle $n \in \mathbb{N}$ die Voraussetzungen von Proposition 3.2.3 erfüllt.

Daher folgt die asymptotische Stabilität von (4.3.10) mit Proposition 3.2.3.

□

Bemerkung 4.3.5. Nach Satz 4.3.3 ist (4.3.7) für $t \in [2n; 2n+1[$ und $n \in \mathbb{N}$ zu einem gegebenen Anfangswert eindeutig lösbar, wenn (4.3.4) eine eindeutige Lösung besitzt.

Dies gilt, weil nach Voraussetzung $A \in \mathcal{C}^{rd}([2n; 2n+1[, \mathbb{R}^{d\times d})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen $\mu(t) = 0$ für alle $t \in [2n; 2n+1[$ und alle $n \in \mathbb{N}$ stets regressiv ist, nach [11], Th. 8.20, S. 324.

Weiterhin ist (4.3.8) für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch ein lineares Gleichungssystem gegeben und damit lösbar, wenn $A(2n+1)$ und Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ vollen Rang haben.

Falls eine Lösung P von (4.3.7) und (4.3.8) existiert, haben wir eine Lösung von (4.1.9) auf $\mathbb{T}$ gefunden.
Auf $[2n; 2n+1[$ liefert dann Satz 4.3.3 die Stetigkeit von P für alle $n \in \mathbb{N}$.
Da $t = 2n+1$ rechts zerstreut und links dicht ist für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt die Rd-Stetigkeit von P auf ganz $\mathbb{T}$.

Unter der Voraussetzung, dass die Lösung von (4.3.7) existiert, liefert Satz 4.3.3 hinreichende und notwendige Bedingungen für Symmetrie und positive Definitheit.

Da die Lösung von (4.3.8), falls diese existiert, für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine konstante Matrix ist, lassen sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ positive Definitheit mit Hilfe der Eigenwerte überprüfen, denn eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn sie vollständig diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten ist (vgl. [16], Kor.1, S. 321).

In der Praxis ist diese Überprüfung aber leider nicht so einfach durchführbar, da wir Symmetrie und positive Definitheit der Lösung von (4.3.8) für jedes $n \in \mathbb{N}$ fordern.

Kapitel 5

Existenz von Lyapunovfunktionen

Als Nächstes wollen wir uns mit asymptotischer Stabilität als hinreichender Bedingung der Existenz von Lyapunovfunktionen beschäftigen.

Zunächst interessiert uns, ob, analog zum autonomen, reellen Fall (vgl. [33], Satz 4.3.1.3, S. 101), auf beliebigen nach oben unbeschränkten Zeitskalen mit konstanter Körnigkeit asymptotische Stabilität eines linearen Systems die Existenz einer strikten, quadratischen Lyapunovfunktion impliziert, die mit Hilfe eines konvergenten, uneigentlichen Integrals dargestellt werden kann (vgl. hierzu [7], [32], [21] sowie [41]).

Im zweiten Abschnitt wollen wir uns dann dem allgemeinen nichtautonomen Fall auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala mit beschränkter Körnigkeit zuwenden und einen Existenzsatz für Lyapunovfunktionen formulieren, mit dem wir uns recht weit vom bisherigen Konzept entfernen.

Weder werden die Lyapunovfunktionen stets quadratisch sein, noch wird asymptotische Stabilität eines nichtautonomen, linearen Systems für die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion hinreichen, wir werden dafür den strengeren Begriff der exponentiellen Stabilität zugrunde legen müssen.

5.1 Existenz von Lyapunovfunktionen im autonomen Fall

Wir werden den Zusammenhang zwischen Lyapunovfunktionen und asymptotischer Stabilität autonomer, linearer Systeme auf homogenen Zeitskalen mit Hilfe eines Konzepts abhandeln, welches aus [7], [32] sowie [17], entlehnt und für Zeitskalen verallgemeinert wurde.

Als Vorbereitung dafür muss die Lösung der folgenden linearen Matrizengleichung auf Zeitskalen genauer betrachtet werden, dabei können wir noch beliebige Körnigkeit annehmen.

5.1.1 Lösung einer Matrizengleichung auf Zeitskalen

Sei $\mathbb{T}$ eine nach oben unbeschränkte Zeitskala mit beliebiger Körnigkeit.

Dann liefert die nächste Proposition eine explizite Darstellung der Lösung einer matrixwertigen linearen Gleichung auf $\mathbb{T}$, die nur durch die Körnigkeit $\mu(t)$ von $t \in \mathbb{T}$ abhängt.

Vergleicht man den Ansatz mit Satz 4.3.4 aus dem vorigen Abschnitt, kann man die Idee erkennen, mit deren Hilfe diese Darstellung gefunden werden konnte (vgl. hierzu [7], S. 85-113, insbesondere Theorem 5.4, S. 110, [32], Theorem 8.5.1, S. 262, Theorem 8.5.2, S. 263 sowie Abschnitt 8.7, S. 267-270, [17], S. 120 sowie 5, S. 185-189 aber auch [21], Theorem 27.3, S. 119), sie beruht auf einer Verallgemeinerung des dort diskutierten reellen Falls für Zeitskalen.

Lemma 5.1.1. *Sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ und $X : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{K}^{d\times d}$ Lösung des Anfangswertproblems*

$$X^{\Delta} = A^T X, \quad X(t_0) = I.$$

Dann löst X^T das Anfangswertproblem

$$Y^{\Delta} = YA, \quad Y(t_0) = I.$$

Beweis: Für die Anfangswertbedingung gilt:

$$(X(t_0))^T = I^T = I.$$

Weiterhin ist nach Lemma 1.3.3:

$$\left(X^T\right)^{\Delta} = \left(X^{\Delta}\right)^T = \left(A^T X\right)^T = X^T A.$$

□

Proposition 5.1.2. *Sei $A, Q \in \mathbb{K}^{d\times d}$ regressiv und $t_0 \in \mathbb{T}$ mit*

$$Z^\Delta = A^T Z + (A\mu(t) + I)^T ZA, \quad Z(t_0) = Q. \tag{5.1.1}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung Z_1 für

$$Z_1^\Delta = A^T Z_1, \quad Z_1(t_0) = I \tag{5.1.2}$$

und

$$Z := Z_1 Q Z_1^T$$

löst das Anfangswertproblem (5.1.1).

Beweis: Die Existenz einer eindeutigen Lösung von (5.1.2) folgt wegen $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ regressiv aus [11], Th. 8.20, S. 324.

Wir zeigen zunächst, dass Z die Gleichung (5.1.1) löst.

Mit Lemma 1.3.2 gilt nämlich:

$$\begin{aligned} Z^\Delta &= (Z_1 Q Z_1^T)^\Delta \\ &= Z_1(\sigma(t)) Q (Z_1^T)^\Delta + Z_1^\Delta Q Z_1^T. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von 1.3.6 folgt weiterhin für jedes $t \in \mathbb{T}$:

$$\begin{aligned} Z_1(\sigma(t)) &= Z_1^\Delta(t)\mu(t) + Z_1(t) \\ &= A^T Z_1 \mu(t) + Z_1(t) \\ &= (A^T\mu(t) + I) Z_1(t) \\ &= (A\mu(t) + I)^T Z_1(t). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Lemma 5.1.1:

$$\begin{aligned} Z^\Delta &= (A\mu(t) + I)^T Z_1 Q (Z_1^T)^\Delta + Z_1^\Delta Q Z_1^T \\ &= (A\mu(t) + I)^T Z_1 Q Z_1^T A + A^T Z_1 Q Z_1^T \\ &= (A\mu(t) + I)^T Z A + A^T Z. \end{aligned}$$

Z erfüllt die Anfangswertbedingung, denn aus

$$Z_1(t_0) = Z_1^T(t_0) = I$$

folgt

$$Z(t_0) = Z_1(t_0) Q Z_1^T(t_0) = Q.$$

□

Bemerkung 5.1.3. Die Eindeutigkeit der Lösung von (5.1.1) ist mit der gleichen Methode, wie sie in Abschnitt 4.2 vorgestellt und angewendet worden ist, zu untersuchen.

Falls die Methode aus Abschnitt 4.2 eine regressive $n^2 \times n^2$ - Matrix liefert, folgt die Eindeutigkeit der Lösung aus [11], Th. 8.20, S. 324.

5.1.2 Hinreichende Bedingungen der Existenz von Lyapunovfunktionen

Im Folgenden werden wir das lineare System

$$x^{\Delta} = Ax \tag{5.1.3}$$

mit $A \in \mathbb{K}^{d \times d}$ und homogene, nach oben unbeschränkte Zeitskalen betrachten.

Wir müssen uns auf homogene Zeitskalen beschränken, denn für diese können sowohl hinreichende als auch notwendige Bedingungen für asymptotische Stabilität von (5.1.3) aus der Lage der Eigenwerte von A in der komplexen Ebene (vgl. [4], Satz 7.5.5, S. 309, für den reellen Fall und [14], Korollar 3.2.4, S. 59, für den allgemeinen Fall einer homogenen Zeitskala) gefolgert werden.

Keller erwähnt in seiner Dissertation (vgl. [28], Satz 2.5.8, S. 29), dass auf Zeitskalen mit beschränkter Körnigkeit die Lage der Eigenwerte von $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ in der komplexen Ebene immerhin noch hinreichende Bedingung der asymptotischen Stabilität von (5.1.3) ist.

Ein allgemeineres Konzept mit Hilfe von einer Art Lyapunovexponenten für Gleichungen auf Zeitskalen entwickeln C. Pötzsche, S. Siegmund und F. Wirth in [39].

Ziel dieses Abschnitts ist zu zeigen, dass asymptotische Stabilität von (5.1.3) die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion bezüglich (5.1.3) impliziert, als Vorbereitung dazu sollen die folgenden Ergebnisse dienen:

Lemma 5.1.4. *Sei $A \in \mathbb{K}^{d\times d}$ eine Matrix.*

Dann haben A und A^T dieselben Eigenwerte.

Beweis:

$$\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - I^T\lambda) = \det\left((A - \lambda I)\right)^T = \det(A - \lambda I).$$

□

Mit Hilfe des nächsten, von A. Döffinger in ihrer Diplomarbeit (vgl. [14], Korollar 3.2.4, S. 59) bewiesenen Satzes sowie eines Lemmas über Konvergenz, welches von C. Pötzsche, S. Siegmund und F. Wirth in [39], Lemma 17, S. 17, bewiesen wird, lässt sich das Hauptergebnis dieses Kapitels formulieren:

Satz 5.1.5 (vgl. [14], Korollar 3.2.4, S. 59). *Für ein $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sei ein lineares System*

$$x^\Delta = Ax \tag{5.1.4}$$

auf einer homogenen Zeitskala $\mathbb{T}$ mit Körnigkeit $h \geq 0$ gegeben.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

i.) Das System (5.1.4) *ist genau dann stabil, wenn für den Hilger-Realteil aller Eigenwerte λ von A die Beziehung*

$$Re_h(\lambda) \leq 0$$

erfüllt ist und alle Eigenwerte von A mit $Re_h(\lambda) = 0$ halbeinfach[1] *sind.*

ii.) Das System (5.1.4) *ist genau dann asymptotisch stabil, wenn für alle Eigenwerte λ von A die Beziehung*

$$Re_h(\lambda) < 0$$

erfüllt ist.

[1] d.h. algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts stimmen überein

iii.) Ist das System (5.1.4) *auf* $\mathbb{T}$ *stabil (bzw. asymptotisch stabil), so gilt dies auch für jede homogene Zeitskala* $\mathbb{T}_1$ *mit* $\mu(\mathbb{T}_1) \leq \mu(\mathbb{T})$.

Ist dagegen das System (5.1.4) *instabil auf* $\mathbb{T}$*, dann auch auf jeder homogenen Zeitskala* $\mathbb{T}_2$ *mit* $\mu(\mathbb{T}_2) \geq \mu(\mathbb{T})$.

Lemma 5.1.6 (vgl. [39], Lemma 17, S. 17). *Seien* $\alpha \in \mathcal{C}^{rd}_{+}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ *und* $\lambda \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ *auf einer unbeschränkten Zeitskala mit*

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \mu(t) = h < \infty.$$

Falls ein $T \in \mathbb{T}$ *existiert, so dass gilt:*

$$0 < \inf_{t \in [T;\infty[\cap \mathbb{T}} \left[\alpha(t) - \mathrm{Re}_{\mu(t)}(\lambda(t))\right].$$

Dann ist

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} m^n_\lambda(t, t_0) e_{\lambda \ominus \alpha}(t, t_0) = 0, \quad t_0 \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{N},$$

mit

$$\lambda \ominus \alpha := \lambda + \frac{-\alpha}{1 + \alpha\mu} + \lambda \cdot \frac{-\alpha\mu}{1 + \alpha\mu}$$

wobei $m^n_\lambda : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *wie folgt definiert sind:*

$$\begin{aligned} m^0_\lambda(t, t_0) &:\equiv 1 \\ m^n_\lambda(t, t_0) &= \int_{t_0}^{t} \frac{m^{n-1}_\lambda(s, t_0)}{1 + \mu(s)\lambda(s)} \Delta s. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.7. Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ konstant und regressiv auf einer homogenen Zeitskala mit Körnigkeit $h \geq 0$ ist, so dass außerdem

$$\mathrm{Re}_h(\lambda) < 0$$

gilt, dann folgt

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} m^n_\lambda(t, t_0) e_\lambda(t, t_0) = 0 \quad t_0 \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Wegen

$$\mathrm{Re}_h(\lambda) < 0 \Leftrightarrow \frac{|1 + h\lambda| - 1}{h} < 0$$

folgt sofort für jedes beliebige $T \in \mathbb{T}$ und $\alpha(t) \equiv 0$

$$0 < \inf_{t \in [T;\infty[\cap \mathbb{T}} [-\operatorname{Re}_h(\lambda)] .$$

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 5.1.6.

□

Proposition 5.1.8. *Sei*

$$x^{\Delta} = Ax \tag{5.1.5}$$

ein asymptotisch stabiles, lineares System auf einer homogenen Zeitskala $\mathbb{T}$ mit Körnigkeit $h \geq 0$ und $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ Jordan zerlegbar und regressiv.

Dann existiert eine positiv definite, symmetrische Matrix P, die für ein vorgegebenes, symmetrisches und positiv definites $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ die Lyapunovgleichung

$$A^T P + (Ah + I)^T PA = -Q \tag{5.1.6}$$

löst.

Beweis: Betrachte das Anfangswertproblem

$$Z^{\Delta} = A^T Z + (Ah + I)^T ZA, \quad Z(t_0) = Q \tag{5.1.7}$$

mit $t_0 \in \mathbb{T}$.

Nach Proposition 5.1.2 hat (5.1.7) die Lösung:

$$Z = Z_1 Q Z_1^T$$

mit Z_1 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$Z_1^{\Delta} = A^T Z_1, \quad Z_1(t_0) = I. \tag{5.1.8}$$

Daraus folgt für $t \in \mathbb{T}$ nach Definition 2.1.3

$$Z_1(t) = e_{A^T}(t, t_0), \quad Z_1^T(t) = (e_{A^T}(t, t_0))^T .$$

Die Lösung Z ist differenzierbar, also insbesondere stetig (vgl. [11], Th. 1.16, S.5), aus A^T konstant folgt A^T stetig.

Damit ist auch Summe, Multiplikation mit einer Konstanten aus $\mathbb{R}$ sowie das Produkt von A^T und Z stetig und damit insbesondere rd-stetig, so dass nach [11], Th. 1.74, S. 27 beide Seiten integriert werden dürfen.

Also gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} Z^{\Delta}(\tau)\Delta\tau = \int_{t_0}^{\infty} \left[A^T Z(\tau) + (Ah+I)^T Z(\tau) A\right] \Delta\tau.$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} Z(t) - Z(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} \left[A^T Z(\tau) + (Ah+I)^T Z(\tau) A\right] \Delta\tau. \tag{5.1.9}$$

Damit das uneigentliche Integral in (5.1.9) konvergiert, muß der Limes auf der linken Seite exististieren (endlich).
Wir wollen zeigen, dass sogar

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} Z(t) = 0 \tag{5.1.10}$$

gilt.

Da (5.1.10) zu

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} e_{A^T}(t,t_0) Q \left(e_{A^T}(t,t_0)\right)^T = 0$$

äquivalent ist, wird im Folgenden

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} e_{A^T}(t,t_0) = 0$$

zu zeigen sein.

Aus Lemma 5.1.4 folgt

$$\Sigma(A) = \Sigma(A^T)$$

und damit ist mit A auch A^T Jordan zerlegbar.

Sei also

$$J := \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_k), \quad J_i \in \mathbb{C}^{d_i \times d_i}, \quad 1 \le i \le k \le d \tag{5.1.11}$$

mit $d_1 + \ldots + d_k = d$ die Darstellung von A^T in Jordan-Normalform.
Dann gibt es eine reguläre Matrix S mit $S^{-1}A^T S = J$ und nach Satz 2.2.3 gilt

$$e_{A^T}(t,t_0) = S^{-1} e_{SA^T S^{-1}}(t,t_0) S = S^{-1} \operatorname{diag}\left(e_{J_1}(t,t_0), \ldots, e_{J_k}(t,t_0)\right) S.$$

Daraus folgt:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} Z(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \longrightarrow \infty} e_{J_i}(t, t_0), \quad i = 1, \ldots, k. \tag{5.1.12}$$

Da das System (5.1.5) nach Voraussetzung asymptotisch stabil ist, gilt nach Satz 5.1.5 für alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Sigma(A^T)$:

$$\mathrm{Re}_h(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Daraus folgt nach Bemerkung 5.1.7:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} m_\lambda^n(t, t_0) e_\lambda(t, t_0) = 0 \quad t_0 \in \mathbb{T}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.1.13}$$

Mit Hilfe der in [39], Lemma 16, S. 17 eingeführten Darstellung von $e_{J_i}(t, t_0)$ mit $i = 1, \ldots, k$ folgt wegen (5.1.13)

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} e_0(t, t_0) e_{J_i}(t, t_0) = \lim_{t \longrightarrow \infty} e_{J_i}(t, t_0) = 0$$

für alle $i = 1, \ldots, k$.

Somit ist nach (5.1.12) die Behauptung

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} Z(t) = 0$$

gezeigt und das uneigentliche Integral in (5.1.9) konvergiert mit

$$-Q = \int_{t_0}^{\infty} A^T Z(\tau) + (Ah + I)^T Z(\tau) A \Delta\tau.$$

Da A, A^T, $(Ah + I)^T$ nicht von τ abhängen, erhalten wir

$$-Q = A^T \int_{t_0}^{\infty} Z(\tau)\Delta\tau + (Ah + I)^T \left\{ \int_{t_0}^{\infty} Z(\tau)\Delta\tau \right\} A. \tag{5.1.14}$$

Insbesondere konvergiert also das uneigentliche Integral

$$\int_{t_0}^{\infty} Z(\tau)\Delta\tau.$$

Daraus folgt, dass

$$P := \int_{t_0}^{\infty} Z(\tau)\Delta\tau = \int_{t_0}^{\infty} e_{A^T}(t, t_0) Q \left(e_{A^T}(t, t_0)\right)^T \Delta\tau$$

Lösung von (5.1.6) ist.

Bleibt zu zeigen, dass P symmetrisch und positiv definit ist.
Sei dazu $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ nach Voraussetzung symmetrisch und positiv definit gewählt.

Dann ist

$$Z(t) = e_{A^T}(t,t_0)Q\left(e_{A^T}(t,t_0)\right)^T \tag{5.1.15}$$

für jedes $t \in \mathbb{T}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation aus Q entstanden und damit für jedes $t \in \mathbb{T}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix.

Aus der Symmetrie von $Z(t)$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} P^T &= \left(\int_{t_0}^{\infty} z_{ij}(\tau)\Delta\tau\right)^T_{i,j=1,\dots,n} \\ &= \left(\int_{t_0}^{\infty} z_{ji}(\tau)\Delta\tau\right)_{i,j=1,\dots,n} \\ &= \left(\int_{t_0}^{\infty} z_{ij}(\tau)\Delta\tau\right)_{i,j=1,\dots,n} \\ &= P. \end{aligned}$$

Zu zeigen bleibt, dass P positiv definit ist.

Sei dazu $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$, dann gilt

$$x^T P x = \int_{t_0}^{\infty} x^T Z(\tau) x \Delta\tau.$$

Wegen $Z(t)$ positiv definit für alle $t \in \mathbb{T}$ und alle $x \in \mathbb{R}^d$ mit $x \neq 0$ folgt $x^T Z(\tau)x > 0$ für alle $\tau \in [t_0;\infty[\cap\mathbb{T}$ und wegen der Positivität des Cauchy-Integrals auf Zeitskalen (vgl. [11], Th. 1.77, S. 29)

$$x^T P x = \int_{t_0}^{\infty} x^T Z(\tau) x \Delta\tau > 0,$$

somit ist P positiv definit.

$\square$

Bemerkung 5.1.9. Proposition 5.1.8 liefert im Allgemeinen jedoch nicht die Bedingungen, die nach Proposition 3.2.3 über die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion hinaus als hinreichende Bedingungen für die asymptotische Stabilität des linearen Systems (5.1.5) gefordert werden.

Daher gilt die Äquivalenz der Aussagen

- (5.1.5) ist asymptotisch stabil
- Es existiert eine positiv definite, symmetrische Lösung $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ von (5.1.6) mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch, positiv definit, so dass bezüglich des kleinsten Eigenwerts $\lambda^Q_{\min}$ von Q und des größten Eigenwerts $\lambda^P_{\max}$ von P
$$\gamma := -\frac{\lambda^Q_{\min}}{\lambda^P_{\max}} \tag{5.1.16}$$
regressiv ist und überdies
$$\operatorname{Re}\left(\xi_h(\gamma)\right) < -K \tag{5.1.17}$$
für ein $K > 0$ gilt

nur, wenn im Falle der Existenz von P (5.1.16) und (5.1.17) wegen der Körnigkeit h der Zeitskala $\mathbb{T}$ trivialerweise erfüllt sind, also für $h = 0$ (vgl. Beispiel 3.3.2) und auch für $0 < h < 1$ (vgl. Beispiel 3.3.4).

Diese Tatsache motiviert den folgenden Satz:

Satz 5.1.10. *Sei $\mathbb{T}$ eine nach oben unbeschränkte, homogene Zeitskala mit Körnigkeit $0 \le h < 1$.*

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i.) (5.1.5) *ist asymptotisch stabil*

ii.) (5.1.6) *besitzt eine positiv definite, symmetrische Lösung $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$.*

Beweis: Die Behauptung folgt mit Bemerkung 5.1.9 aus Proposition 5.1.8, Proposition 3.2.3 sowie Beispiel 3.3.2 und Beispiel 3.3.4.

□

5.2 Existenz von Lyapunovfunktionen im nichtautonomen Fall

Gegeben sei das nichtautonome, lineare System

$$x^\Delta = A(t)x \tag{5.2.1}$$

mit $A \in \mathcal{C}^{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala $\mathbb{T}$ mit beschränkter Körnigkeit.

Ziel des folgenden und letzten Abschnitts ist es, einen allgemeinen Satz mit Bedingungen der Existenz einer Lyapunovfunktion für (5.2.1) zu formulieren.

Dafür werden wir einen für den reellen Fall in [43] bewiesenen Satz auf Zeitskalen verallgemeinern.

Die Umkehrfunktion der in Kapitel 1, Definition 1.2.5 eingeführten Zylindertransformation ξ wird dabei eine Abschätzung für die Delta - Ableitung entlang der Lösung von (5.2.1) eines geeigneten Kandidaten für die Lyapunovfunktion liefern, die für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ mit der Abschätzung aus [43] identisch ist.

5.2.1 Umkehrung der Zylindertransformation

Wir beginnen mit einer Diskussion der Existenz einer Umkehrfunktion ξ^{-1} der Zylindertransformation und ihrer Eigenschaften:

Lemma 5.2.1. *Sei $h > 0$, $\mathbb{Z}'_h := \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{h}\right\}$ und $\xi_h : \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h \longrightarrow \mathbb{Z}'_h$ definiert durch*

$$\xi_h(z) := \frac{1}{h} \operatorname{Log}(1 + zh),$$

wobei $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ *der Hauptzweig des komplexen Logarithmus in der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene sei.*

Dann wird $\mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$ für jedes $h > 0$ vermöge ξ_h biholomorph auf $\mathbb{Z}'_h$ abgebildet, die Umkehrabbildung $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}'_h \longrightarrow \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$ ist gegeben durch

$$\xi_h^{-1}(z) := \frac{\exp(zh) - 1}{h}.$$

Beweis: Sei $z \in \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$, dann ist $1 + zh \in \mathbb{C}^-$ und

$$\xi_h(z) = \frac{1}{h} \operatorname{Log}(1 + zh) = \frac{\log |1 + zh|}{h} + i \cdot \frac{\operatorname{Arg}(1 + zh)}{h}$$

mit $-\pi < \operatorname{Arg}(1 + zh) < \pi$.

Daraus folgt

$$-\frac{\pi}{h} < \frac{\operatorname{Arg}(1 + zh)}{h} < \frac{\pi}{h}$$

und damit $\xi_h(z) \in \mathbb{Z}'_h$, woraus wiederum $\xi_h(\mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h) \subset \mathbb{Z}'_h$ folgt.

Stets gilt

$$\xi_h^{-1}(z) \in \mathbb{A}_h \Leftrightarrow \exp(zh) = \exp(hx)\exp(ihy) < 0 \Leftrightarrow \exp(ihy) = -1. \quad (5.2.2)$$

Sei $z = x + iy \in \mathbb{Z}'_h$, dann ist $-\frac{\pi}{h} < y < \frac{\pi}{h}$ und $x \in \mathbb{R}$ beliebig und wegen (5.2.2) folgt also $\xi_h^{-1}(z) \in \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$ und $\xi_h^{-1}(\mathbb{Z}'_h) \subset \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$.

Für $z \in \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$ gilt weiterhin $\exp(\operatorname{Log}(1 + zh) = 1 + zh$ nach [40], S. 120 und S. 126, daraus folgt für $z \in \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$ und $h > 0$

$$\frac{\exp\left(h \cdot \frac{1}{h} \operatorname{Log}(1 + zh)\right) - 1}{h} = \frac{1 + zh - 1}{h} = z.$$

Umgekehrt gilt für $z \in \mathbb{Z}'_h$ stets $-\frac{\pi}{h} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{h}$ und damit $\operatorname{Log}(\exp(zh)) = zh$ nach [40], S. 125 und S. 126, woraus für $z \in \mathbb{Z}'_h$ und $h > 0$ folgt:

$$\frac{1}{h} \operatorname{Log}\left(1 + h \cdot \frac{\exp(zh) - 1}{h}\right) = \frac{1}{h} \operatorname{Log}(\exp(zh)) = z.$$

Nach [40], S. 64 ist damit $\xi : \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h \longrightarrow \mathbb{Z}'_h$ bijektiv mit Umkehrabbildung $\xi_h^{-1} : \mathbb{Z}'_h \longrightarrow \mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$, wegen der Holomorphie von exp auf $\mathbb{C}$ und Log auf $\mathbb{C}^-$ folgt die Holomorphie von ξ_h auf $\mathbb{C}_h \setminus \mathbb{A}_h$ sowie von ξ_h^- auf $\mathbb{Z}'_h$ für $h > 0$.

Somit ist ξ_h bzw. ξ_h^{-1} biholomorph für $h > 0$ nach [40], S. 64.

□

Bemerkung 5.2.2. Für $h = 0$ ist nach Definition 1.2.5 $\xi_0 \equiv \mathrm{id}$ auf $\mathbb{C}$ und damit gilt auch $\xi_0^{-1} \equiv \mathrm{id}$ auf ganz $\mathbb{C}$.

Im Folgenden werden wir ξ^{-1} für ein festes $c \in \mathbb{R}$ als Funktion der Körnigkeit $\mu(t)$ mit $t \in \mathbb{T}$ betrachten.

Definiere hierzu für ein festes $c \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{T}$

$$\overline{\xi}_c(t) := \xi^{-1}_{\mu(t)}(c).$$

Wie wir sehen werden, besitzt $\overline{\xi}_c$ viele nützliche Eigenschaften:

Bemerkung 5.2.3. Sei $c \in \mathbb{R}$.

Definiere $\overline{\xi}_c : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ durch

$$\overline{\xi}_c(t) := \begin{cases} \dfrac{\exp(\mu(t) \cdot c) - 1}{\mu(t)}, & t < \sigma(t); \\ c, & t = \sigma(t). \end{cases} \tag{5.2.3}$$

Setz man jetzt $z(t) := \mu(t) \cdot c$ für $t \in \mathbb{T}$, dann läßt sich (5.2.3) umschreiben zu

$$\overline{\xi}_c(t) = \begin{cases} \dfrac{\exp(z(t)) - 1}{z(t)} \cdot c, & t < \sigma(t); \\ c, & t = \sigma(t). \end{cases} \tag{5.2.4}$$

Da die Körnigkeit auf $\mathbb{T}$ stets rd-stetig ist, folgt $z(t)$ stetig für alle $t \in \mathbb{T}$ und mit (5.2.4) folgt, da die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\exp(x) - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, die Rd-Stetigkeit von $\overline{\xi}_c$ als Verknüpfung einer stetigen mit einer rd-stetigen Funktion nach Satz 1.2.3.

Wegen $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt weiterhin $\overline{\xi}_c(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$, falls $c > 0$ und $\overline{\xi}_c(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{T}$, falls $c < 0$.

Insbesondere gilt $\overline{\xi}_c(t) = c$ für alle rechts dichten Punkte $t \in \mathbb{T}$.

Ist $\mu \equiv h$ mit $h \geq 0$ auf $\mathbb{T}$, so ist

$$\overline{\xi}_c(t) = \begin{cases} \dfrac{\exp(h \cdot c)}{h}, & h > 0; \\ c, & h = 0. \end{cases}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ konstant.

Sei $k \geq 0$ mit $\sup_{t\in\mathbb{T}} \mu(t) \leq k$.
Da $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ streng monoton wächst, ist $\overline{\xi}_c$ beschränkt auf $\mathbb{T}$ mit

$$c \leq \lim_{t\longrightarrow\infty} \sup \overline{\xi}_c(t) \leq \frac{\exp(kc) - 1}{k}.$$

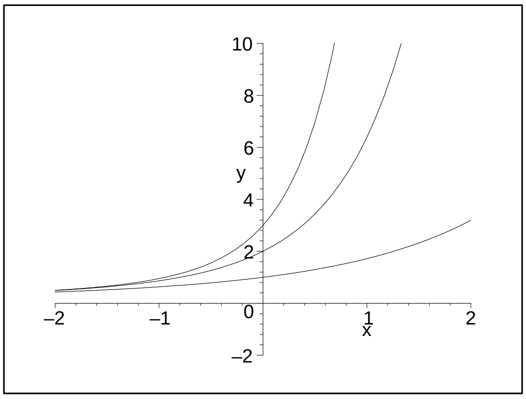


Abbildung 5.1: $f(x) = \frac{\exp(kx)-1}{x}$ für $x \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3$

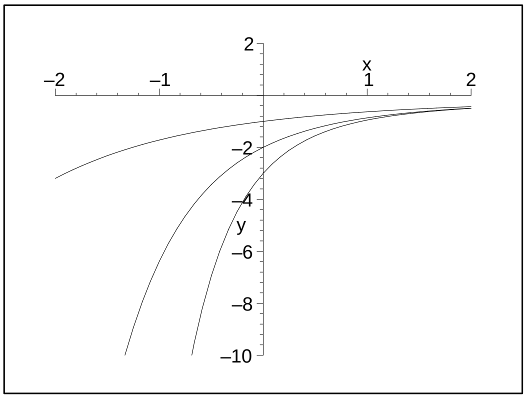


Abbildung 5.2: $f(x) = \frac{\exp(-kx)-1}{x}$ für $x \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3.$

5.2.2 Ein allgemeiner Existenzsatz

Beim nächsten Ergebnis handelt es sich um die oben angekündigte Verallgemeinerung eines Satzes, der von Yoshizawa in [43] für den kontinuierlichen Fall bewiesen worden ist:

Satz 5.2.4 (vgl. [43], Th. 19.1, S.92). *Sei $K > 0$, $c \in \mathbb{R}$ und $x(t, t_0, x_0)$ eine Lösung des linearen Systems*

$$x^\Delta = A(t)x, \quad A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n}) \tag{5.2.5}$$

zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ mit

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq Ke^{-c(t-t_0)} \|x_0\| \tag{5.2.6}$$

für alle $t \geq t_0$.

Dann existiert eine stetige Funktion $V : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

i.) $\|x\| \le V(t,x) \le K\|x\|$ *für alle* $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$

ii.) $|V(t,x) - V(t,x')| \le K\|x - x'\|$ *für alle* $(t,x), (t,x') \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$

iii.) $V_*^\Delta(t) \le \overline{\xi}_{-c}(t) V_*(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{T}$.

Bemerkung 5.2.5. Nach Eigenschaft *ii.*) genügt V einer globalen Lipschitz-Bedingung bezüglich x.

Außerdem ist V nach Eigenschaft *iii.*) und Bemerkung 5.2.3 durch eine rd-stetige Funktion von t nach oben beschränkt.

Gilt (5.2.6) für $c > 0$, so ist nach Bemerkung 5.2.3 $\overline{\xi}_{-c} < 0$ auf $\mathbb{T}$ und V damit nach Definition 3.1.1 eine strikte Lyapunovfunktion.

Beweis: Im Folgenden sei für $t \in \mathbb{T}$ die Menge $A_t \subset \mathbb{R}$ definiert durch

$$A_t := \{y \in [0;\infty[: t + y \in \mathbb{T}\}$$

und

$$V(t,x) := \sup_{\tau \in A_t} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} \tag{5.2.7}$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Zunächst beweisen wir Eigenschaft *i.*) und damit insbesondere Beschränktheit und positive Definitheit von V:

Sei dazu V gemäß (5.2.7) gewählt, dann gilt $\|x\| \le V(t,x)$, denn $\tau = 0$ ist in A_t und somit

$$\|x(t+0,t,x)\| e^{c\cdot 0} = \|x(t,t,x)\| = \|x\|$$

zur Supremumsbildung zugelassen.

Daraus folgt

$$\|x\| \le V(t,x).$$

Wegen (5.2.6) gilt andererseits:

$$\|x(t+\tau,t,x)\| \le K e^{-c(t+\tau-t)} \|x\| = K e^{-c\tau} \|x\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} V(t,x) &= \sup_{\tau\in A_t} \|x(t+\tau,t,x)\| e^{c\tau} \\ &\leq \sup_{\tau\in A_t} Ke^{-c\tau} \|x\| e^{c\tau} \\ &= \sup_{\tau\in A_t} K\|x\| \\ &= K\|x\| \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

und damit wäre die erste Eigenschaft bewiesen.

Als nächstes zeigen wir, dass V einer Lipschitz-Bedingung bezüglich x genügt.

Sei $t \in \mathbb{T}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist $\|x(t+\tau,t,x)\| e^{c\tau}$ mit $\tau \in A_t$ wegen (5.2.8) beschränkt; aus der Dreieckungleichung ergibt sich daher die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |V(t,x) - V(t,x')| &= \left|\sup_{\tau\in A_t} \|x(t+\tau,t,x)\| e^{c\tau} - \sup_{\tau\in A_t} \|x(t+\tau,t,x')\| e^{c\tau}\right| \\ &= \left|\sup_{\tau\in A_t} e^{c\tau}(\|x(t+\tau,t,x)\| - \|x(t+\tau,t,x')\|)\right| \\ &\leq \left|\sup_{\tau\in A_t} e^{c\tau}(\|x(t+\tau,t,x) - x(t+\tau,t,x')\|)\right| \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.1.7 (Superpositionsprinzip) folgt weiter

$$\begin{aligned} |V(t,x) - V(t,x')| &\leq \sup_{\tau\in A_t} e^{c\tau} \|x(t+\tau,t,x-x')\| \\ &= V(x-x') \\ &\leq K\|x-x'\|, \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, dass V einer Lipschitz-Bedingung bezüglich x genügt.

Zu zeigen ist ebenfalls die Stetigkeit von V in allen $(t,x) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Gesucht sind $\delta_1, \delta_2 > 0$ und offene Kugeln $B_{\delta_1}(t) \subset \mathbb{T}$ von t, $B_{\delta_2}(x) \subset \mathbb{R}^n$ von x, so dass

$$|V(t', x') - V(t, x)| < \varepsilon \tag{5.2.9}$$

gilt für alle $(t', x') \in B_{\delta_1}(t) \times B_{\delta_2}(x)$.

Für beliebiges $\delta > 0$ und $t \in \mathbb{T}$ folgt aus $t' \in B_\delta(t)$ stets $t' = t + \nu$ oder $t' = t - \nu$, für ein $v \in A_t$ mit $0 \leq \nu < \delta$.

Setze zunächst $t' = t + \nu$ mit $\nu \in A_t$, dann folgt aus (5.2.9)

$$\begin{aligned} |V(t', x') - V(t, x)| &= |V(t + \nu, x') - V(t, x)| \\ &\leq |V(t + \nu, x') - V(t + \nu, x)| \\ &+ |V(t + \nu, x) - V(t + \nu, x(t + \nu, t, x))| \\ &+ |V(t + \nu, x(t + \nu, t, x)) - V(t, x)| \,. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Da V in x eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, gilt für jedes $t + \nu \in \mathbb{T}$

$$|V(t + \nu, x') - V(t + \nu, x)| \leq K \|x - x'\| \,,$$

wähle also $\delta_2 < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{K}$ und eine offene Kugel $B_{\delta_2}(x)$ um x, dann gilt

$$|V(t + \nu, x') - V(t + \nu, x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $x' \in B_{\delta_2}(x)$.

Weiterhin gilt mit demselben Argument:

$$|V(t + \nu, x) - V(t + \nu, x(t + \nu, t, x))| \leq K \|x - x(t + \nu, t, x)\| \,. \tag{5.2.11}$$

Wegen $x = x(t, t, x)$ und weil $x(t + \nu, t, x)$ für alle $\nu \in A_t$ stetig ist, folgt

$$\lim_{\nu \longrightarrow 0} x(t + \nu, t, x) = x$$

und damit existiert ein $\delta_1' > 0$, so dass für alle $\nu \in A_t$ mit $0 \leq \nu < \delta_1'$ gilt:

$$\|x - x(t + \nu, t, x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{1}{K}.$$

Daraus folgt mit (5.2.11):

$$|V(t + \nu, x) - V(t + \nu, x(t + \nu, t, x))| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $\nu \in A_t$ mit $0 \leq \nu < \delta_1'$.

Um den letzten Summanden von (5.2.10) abzuschätzen, betrachte erneut das durch (5.2.5) gegebene lineare System.

Sei $\tau \in A_{t+\nu}$ und $x(t+\nu+\tau, t+\nu, x(t+\nu, t, x))$ eine Lösung von (5.2.5) zum Anfangswert $x(t+\nu, t, x)$.

Gleichzeitig ist $\tau = 0 \in A_{t+v}$ und damit

$$x(t+\nu+0, t, x) = x(t+\nu, t, x).$$

Daraus folgt

$$x(t+\nu+\tau, t+\nu, x(t+\nu, t, x)) = x(t+\nu+\tau, t, x)$$

nach [11], Th. 8.20, S.324.

Definiere

$$\Delta V := |V(t+\nu, x(t+\nu, t, x)) - V(t, x)|,$$

dann folgt

$$\Delta V = \left| \sup_{\tau \in A_{t+\nu}} \|x(t+\nu+\tau, t, x)\| e^{c\tau} - \sup_{\tau \in A_t} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} \right|. \tag{5.2.12}$$

Setze $\tau' := \tau + \nu$, dann folgt für $\tau \in A_{t+\nu}$

$$\tau' \in \{y \in [\nu; \infty[: t+y \in \mathbb{T}\}.$$

wegen der oberen Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sup_{\tau \in A_{t+\nu}} \|x(t+\nu+\tau, t, x)\| e^{c\tau} &= \sup_{\tau' \in \{y \in [\nu;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau', t, x)\| e^{c\tau'} \\
&= \sup_{\tau' \in \{y \in [\nu;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau', t, x)\| e^{c\tau} e^{c\nu} \\
&= \sup_{\tau \in \{y \in [\nu;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} e^{-c\nu}
\end{aligned}$$

und daraus folgt nach (5.2.12):

$$\Delta V = \left| \sup_{\tau \in \{y \in [v;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} e^{-c\nu} - \sup_{\tau \in \{y \in [0;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} \right|.$$

Setze für $\nu \in A_t$

$$\alpha(\nu) := \sup_{\tau \in \{y \in [v;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau, t, x)\| \, e^{c\tau}.$$

Dann gilt

$$\Delta V \leq \left|\alpha(\nu)e^{-c\nu} - \alpha(0)\right| \tag{5.2.13}$$

mit

$$\alpha(\nu) \leq \alpha(0),$$

denn für $\nu \in A_t$ gilt nach Definition $\nu \geq 0$.
Insbesondere ist α als Funktion von ν damit nicht aufsteigend und wegen $\|x(t+\tau, t, x)\| \, e^{c\tau}$ stetig in allen $t+\tau \in \mathbb{T}$, $\tau \in A_t$ mit

$$\alpha(\nu) \leq \alpha(0) = \sup_{\tau \in A_t} \|x(t+\tau, t, x)\| \, e^{c\tau} \leq K \, \|x\| \, .$$

Daraus folgt

$$\lim_{\substack{\nu \longrightarrow 0 \\ \nu \in A_t}} \alpha(\nu) = \alpha(0)$$

und wegen (5.2.13) existiert daher ein $\delta_1'' > 0$, so dass für alle $v \in A_t$ mit $0 \leq \nu \leq \delta_1''$

$$\Delta V < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt.

Wähle nun

$$B_{\delta_1}(t) := B_{\delta_1'}(t) \cap B_{\delta_1''}(t)$$

Für $t' = t + \nu, \nu \in A_t$ mit $0 \leq \nu < \min\{\delta_1', \delta_2'\}$ sowie $x' \in B_{\delta_2}(x)$ folgt $(t', x') \in B_{\delta_1}(t) \times B_{\delta_2}(x)$ und

$$|V(t', x') - V(t, x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Analog folgt die Behauptung für alle $t' = t - \nu$ mit $0 \leq \nu \leq \min\{\delta_1', \delta_2'\}$ durch Übergang zu $\nu \in \overline{A}_t := \{y \in [0;\infty[: t - y \in \tau\}$ sowie durch Betrachtung von $\alpha(-\nu)$ mit $\nu \in \overline{A}_t$ bei der Abschätzung des letzten Summanden von (5.2.10) und damit ist die Stetigkeit von V gezeigt.

Zu zeigen bleibt also Eigenschaft *iii.*).

Da V bezüglich $t \in \mathbb{T}$ gleichmäßig beschränkt und x als Lösung von (5.2.6) differenzierbar in allen $t+\tau$ mit $\tau \in A_t$ ist, existiert

$$V_*^{\Delta}(t) = V^{\Delta}(t, x(t)) = \left(\sup_{\tau \in A_t} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} \right)^{\Delta}.$$

Zu zeigen bleibt:

$$V_*^{\Delta}(t) \leq \overline{\xi}_{-c}(t) V_*(t)$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

i.) Sei $\sigma(t) = t$, dann gilt

$$V_*^{\Delta}(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h}.$$

Setze $x' := x(t+h, t, x)$, dann folgt

$$\begin{aligned}
V(t+h, x(t+h)) &= \sup_{\tau \in A_{t+h}} \|x(t+h+\tau, t+h, x')\| e^{c\tau} \\
&= \sup_{\tau \in \{y \in [h;\infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t+\tau, t, x)\| e^{c\tau} e^{-ch} \\
&\leq V(t, x(t)) e^{-ch}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h} &\leq \frac{V(t, x(t)) e^{-ch} - V(t, x(t))}{h} \\
&= V(t, x(t)) \cdot \frac{e^{-ch} - 1}{h},
\end{aligned}$$

Limesbildung auf beiden Seiten ergibt:

$$\begin{aligned}
V_*^{\Delta}(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h} \\
&\leq \lim_{h \longrightarrow 0} V(t, x(t)) \cdot \frac{e^{-ch} - 1}{h} \\
&= V(t, x(t)) \cdot (-c) \\
&= V_*(t) \cdot \xi_0^{-1}(-c).
\end{aligned}$$

ii.) Sei $\sigma(t) > t$. Dann gilt:

$$V_*^\Delta(t) = \frac{V(\sigma(t), x(\sigma(t))) - V(t, x(t))}{\mu(t)}$$

mit

$$\begin{aligned}
V(t, x(\sigma(t))) &= \sup_{\tau \in A_{\sigma(t)}} \|x(\sigma(t) + \tau, \sigma(t), x)\| \, e^{c\tau} \\
&= \sup_{\tau \in A_{\mu(t)+t}} \|x(\mu(t) + t + \tau, \mu(t) + t, x)\| \, e^{c\tau} \\
&= \sup_{\tau \in \{y \in [\mu(t); \infty[: t+y \in \mathbb{T}\}} \|x(t + \tau, t, x)\| \, e^{c\tau} e^{-\mu(t)c} \\
&\leq V(t, x(t)) e^{-c\mu(t)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
V_*^\Delta(t) &= \frac{V(\sigma(t), x(\sigma(t))) - V(t, x(t))}{\mu(t)} \\
&\leq \frac{V(t, x(t)) e^{-c\mu(t)} - V(t, x(t))}{\mu(t)} \\
&= V(t, x(t)) \cdot \frac{e^{-c\mu(t)} - 1}{\mu(t)} \\
&= V(t, x(t)) \cdot \overline{\xi}_{-c}(t) \\
&= V_*(t) \cdot \overline{\xi}_{-c}(t).
\end{aligned}$$

Und damit wäre der Satz bewiesen.

□

Bemerkung 5.2.6. C. Pötzsche, S. Siegmund und F. Wirth führen in [39], Definition 2, S. 4 den Begriff der exponentiellen Stabilität für nichtautonome, lineare Systeme ein.

(5.2.5) heiße danach exponentiell stabil, falls $\alpha > 0$ existiert, so dass zu jedem $t_0 \in \mathbb{T}$ ein $K(t_0) \geq 1$ existiert mit

$$\|e_A(t,t_0)\| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)} \tag{5.2.14}$$

für $t \geq t_0$.

Mit (5.2.14) folgt dann für jedes $t_0 \in \mathbb{T}$

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \|e_A(t,t_0)\| \leq \lim_{t \longrightarrow \infty} Ke^{-\alpha(t-t_0)} = 0$$

und daraus die asymptotische Stabilität eines exponentiell stabilen, linearen Systems nach Satz 2.3.2.

Falls (5.2.5) exponentiell stabil ist, so gilt für jede Lösung $x(t,t_0,x_0)$ mit $t,t_0 \in \mathbb{T}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ von (5.2.5) nach Satz 2.1.6

$$\|x(t,t_0,x_0)\| = \|e_A(t,t_0)x_0\| \leq Ke^{\alpha(t-t_0)}\,\|x_0\|$$

und damit ist Voraussetzung (5.2.6) von Satz 5.2.4 für $\alpha > 0$ erfüllt, so dass V nach Bemerkung 5.2.5 eine strikte Lyapunovfunktion ist.

Wie wir also sehen, folgt im allgemeinen Fall einer nichtautonomen, linearen Gleichung auf einer nach oben unbeschränkten Zeitskala $\mathbb{T}$ mit beschränkter Körnigkeit aus exponentieller Stabilität die Existenz einer strikten und sogar in beiden Komponenten stetigen Lyapunovfunktion.

Da, wie oben ausgeführt, exponentielle Stabilität asymptotische Stabilität impliziert, kann somit zumindest für eine kleinere Klasse asymptotisch stabiler, linearer Systeme Existenz von Lyapunovfunktionen im allgemeinen Fall aus Satz 5.2.4 gefolgert werden.

Da Satz 5.2.4 ein reiner Existenzsatz ist, können wir weder etwas darüber aussagen, unter welchen Bedingungen unsere Lyapunovfunktionen quadratisch sind, noch darüber, wie sie sich überhaupt explizit darstellen lassen.

Ausblick

Gegenstand dieser Arbeit waren Lyapunovfunktionen und asymptotische Stabilität von homogenen, linearen Systemen

$$x^{\Delta} = A(t)x \tag{5.2.15}$$

auf einer Zeitskala $\mathbb{T}$[2].

Wie wir gesehen haben, ließen sich viele wünschenswerte Ergebnisse aus dem reellen Fall auf $\mathbb{T}$ verallgemeinern. Je einfacher die Struktur der Zeiskala, umso mehr ähneln die Ergebnisse den bekannten Resultaten im Reellen, so z.B. Satz 5.1.10, der hinreichende und notwendige Bedingungen für Lyapunovfunktionen liefert, wenn die Körnigkeit der Zeitskala konstant und klein genug ist.

Gerade in diesem Zusammenhang wäre es spannend zu untersuchen, wie weit sich die in Proposition 3.2.3 und Proposition 4.1.2 postulierten, zeitskalenspezifischen Zusatzbedingungen für asymptotische Stabilität von (5.2.15) noch abschwächen ließen.
Dabei wäre es realistisch zu versuchen, die technische Bedingung

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} \operatorname{Re} \xi_{\mu(t)}(\gamma(t)) < -K, \quad K > 0$$

für $\gamma \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$[3], die in beiden Propositionen für die Konvergenz von $e_{\gamma}(t, t_0)$[4] eine entscheidende Rolle spielt, durch eine zu ersetzen, in der anstatt des Supremums über alle $t \in \mathbb{T}$ nur noch der Limes superior vorkommt,

[2]Es macht allerdings nur bei nach oben unbeschränkten Zeitskalen überhaupt Sinn, von Stabilität des Systems (5.2.15) zu sprechen. Je komplizierter die Struktur der Zeitskala und damit ihre Körnigkeit, desto schwerer ist es im Allgemeinen um die Stabilität von (5.2.15).

[3]$\gamma(t)$ ist dabei für jedes $t \in \mathbb{T}$ der Quotient von Eigenwerten symmetrischer und positiv definiter Matrizen, vgl. hierzu Proposition 3.2.3 sowie Proposition 4.1.2.

[4]vgl. hierzu Proposition 3.2.3 sowie Proposition 4.1.2.

was vielleicht auch die praktische Überprüfung asymptotischer Stabilität konkreter linearer Systeme mit Hilfe von Proposition 3.2.3 bzw. Proposition 4.1.2 bei Zeitskalen mit nichtkonstanter Körnigkeit vereinfachen könnte.

Die Anwendung der oben genannten Propositionen betreffend wäre überhaupt wünschenswert, Beispiele für autonome Systeme auf inhomogenen Zeitskalen sowie für nichtautonome Systeme zu finden, in denen eine Lyapunovfunktion existiert und berechnet werden kann oder zumindest Kriterien dafür angegeben werden könnten, wann die Lyapunovgleichung lösbar und ihre Lösung positiv definit und symmetrisch ist. Diese sind bisher nur für $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ bekannt (vgl. Beispiel 3.3.2).

Ein Nachteil bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von (5.2.15) mittels der in der vorliegenden Arbeit über asymptotische Stabilität und Lyapunovfunktionen formulierten Sätze ist, dass wir noch nicht in der Lage sind, auch Aussagen über Stabilität bzw. Instabilität von (5.2.15) zu treffen.

Betrachten wir (5.2.15) mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auf einer homogenen Zeitskala $\mathbb{T}$, so liefert A. Döffinger in ihrer Diplomarbeit notwendige und hinreichende Bedingungen für asymptotische Stabilität, Stabilität und Instabilität mit Hilfe der Lage des Spektrums von A in der komplexen Ebene (vgl. [14]). Keller bemerkt in seiner Dissertation (vgl. [28], Satz 2.5.8, S. 29), dass wenn die Körnigkeit von $\mathbb{T}$ zeitabhängig ist, die Lage des Spektrums von A in der komplexen Ebene nur noch hinreichende Bedingung ist.

In der Arbeit von C. Pötzsche, S. Siegmund und F. Wirth[5] werden unter anderem hinreichende sowie notwendige Bedingungen für exponentielle Stabilität von (5.2.15) für $A \in \mathcal{C}^{rd}\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{n\times n})$ diskutiert.

In Bezug auf Lyapunovfunktionen existieren keine Sätze über Instabilität für Differenzengleichungen bei Lakshmikantham und Trigiante (vgl. [31]), für Zeitskalen werden in [30] eine größere Klasse von Gleichungen als in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe von allgemeineren Lyapunovfunktionen auf verschiedene Arten asymptotischer Stabilität untersucht.

Aufgrund der erzielten Ergebnisse wäre jedoch zu erwarten, dass für (5.2.15) auch Aussagen über Stabilität und Instabilität mit Hilfe von Lyapunovfunktionen zu treffen möglich sei, dies zu untersuchen wäre zumindest interessant.

---

[5] vgl. [39]

Unabhängig von den oberen Überlegungen wäre ein weiterer Aspekt zukünftiger Forschung auch die Untersuchung der expliziten Darstellbarkeit der Lyapunovfunktionen aus Satz 5.2.4.

Dort haben wir gesehen, dass exponentielle Stabilität von (5.2.15) die Existenz einer strikten Lyapunovfunktion impliziert.
Es wäre sicherlich sinnvoll, Kriterien dafür zu kennen, wann diese quadratisch ist.

Letzendlich stellt sich die Frage nach dem Sinn und der praktischen Anwendbarkeit des Zeitskalenkalküls im Allgemeinen und der Verallgemeinerung der Theorie von Lyapunovfunktionen elementarster, linearer Systeme auf Zeitskalen im Besonderen.
So gibt es in der Tat nur wenige Anwendungen, für die Differenzengleichungen nicht ausreichen, eine solche Anwendungsmöglichkeit aus der Biologie wird in Beispiel 3.3.12 erwähnt.
Dabei handelt es sich jedoch eines von wenigen Standardbeispielen aus der Literatur (vgl. z.B. [11], Ex. 1.39, S. 15 und [1], Ex. 4.3, S. 11), für die allein die Einführung eines neuen Kalküls nicht unmitelbar einsichtig ist.

Vom theoretischen Standpunkt liefert das Zeitskalenkalkül eine Vereinheitlichung von diskreter und kontinuierlicher Analysis und erlaubt in unserem Fall die Untersuchung der Existenz von Lyapunovfunktionen bezüglich (5.2.15) gleichzeitig für diskrete und kontinuierliche zugrundeliegende Zeitmengen, sowie für Mischformen davon.
Dadurch eröffnet sich die Möglichkeit, Veränderungen des Stabilitätsverhaltens von (5.2.15) bei sich ändernder Struktur von $\mathbb{T}$ zu studieren und zu verstehen.

Da nicht nur Anwendungen, sondern auch theoretisches Interesse legitime Motivation der Auseinandersetzung mit einem Forschungsgegenstand sein kann, war die Untersuchung von Lyapunovfunktionen auf Zeitskalen ein spannendes und lohnenswertes Unterfangen.

Literaturverzeichnis

[1] Agarwal, R.P. und Bohner, M. und O'Regan D. und Peterson A.: *Dynamic equations on time scales: a survey.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 141:1–26, 2002.

[2] Agarwal, R.P.: *Difference Equations and Inequalities.* Marcel Dekker, New York, 1992.

[3] Amann, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Walter de Gruyter, New York, 1995.

[4] Aulbach, B.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg/Berlin, 1997.

[5] Aulbach, B. und Neidhart, L.: *Integration on Measure Chains.* In: Aulbach, B. und Elaydi, S.N. und Ladas G. (Herausgeber): *New Progress in Difference Equations.* CRC-Press, BocaRaton, 2004.

[6] Aulbach, B. und Hilger, S.: *Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale.* In: *Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems*, Band 59 der Reihe *Math. Res.*, Seiten 9–20, Berlin, 1990. Akademie-Verlag.

[7] Barnett, S.: *Matrices in Control Theory.* van Nostrand Reinhold Company, London, 1971.

[8] Baumeister, J.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Script zur Vorlesung Lineare Algebra, 1995/1996. in den Semestern Winter 1995/96, Sommer 1996.

[9] Beutelspacher, A.: *Lineare Algebra.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000.

[10] Bhatia, R.: *Matrix Analysis.* Springer, New York, 1997.

[11] Bohner, M. und Peterson, A.: *Dynamic Equations on Time Scales.* Birkhäuser, Boston, 2001.

[12] Bohner, M. und Peterson, A.: *Advances in Dynamic Equations on Time Scales.* Birkhäuser, Boston, 2003.

[13] Cronin, J.: *Differential Equations.* Marcel Dekker, New York, 1980.

[14] Döffinger, A.: *Theorie dynamischer Gleichungen- ein einheitlicher Zugang zur kontinuierlichen und diskreten Dynamik.* Diplomarbeit, Universität Augsburg, 1995.

[15] Elaydi, S.N.: *An Introduction to Difference Equations.* Springer, New York, 1999.

[16] Fischer, G.: *Lineare Algebra.* Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000.

[17] Gantmacher, F.R.: *Matrix Theory*, Band 2. Chelsea Publishing Company, New York, 1960.

[18] Garay, B. und Hilger, S. und Kloeden P.: *Continuous dependence in time scale dynamics.* In: Aulbach, B., Elaydi S.N. und Ladas G. (Herausgeber): *New Progress in Difference Equations*, Seiten 279–288. CRC-Press, Boca Raton, 2004.

[19] Gil, M.I. und Kloeden, P.: *Stability and boundedness of solutions of Stieltjes Differential Equations.* Results Math., 43:101–113, 2003.

[20] Habets, P. und Laroy, M. und Rouche N.: *Stability Theory by Liapunovs Direct Method.* Springer, New York, 1977.

[21] Hahn, W.: *Stability of Motion.* Springer, Heidelberg, 1967.

[22] Hartman, P.: *Ordinary Differential Equations.* John Wiley and Sons Inc., New York, 1964.

[23] Hilger, S. und Kloeden, P.: *Comparative time grainyness and asymptotic stability of dynamical systems.* Autom. Remote Control, 55(1):1293–1298, 1994.

[24] HILGER, S.: *Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten.* Dissertation, Universität Würzburg, Würzburg, 1988.

[25] HILGER, S.: *Analysis on measure chains - a unified approach to continuous and discrete calculus.* Results Math, 18:18–56, 1990.

[26] HILGER, S.: *Special functions, Laplace and Fourier transform on measure chains.* Dynam. Systems Appl., 8(3-4):471–488, 1999. Special issue on "Discrete and Continuous Hamiltonian Systems".

[27] HOCK, S.: *Integrationstheorie auf Zeitskalen.* Diplomarbeit, Universität Frankfurt am Main, 2004.

[28] KELLER, S.: *Asymptotisches Verhalten invarianter Faserbündel bei Diskretisierung und Mittelwertbildung im Rahmen der Analysis auf Zeitskalen.* Dissertation, Universität Augsburg, 1999.

[29] KLOEDEN, P.: *Numerische Dynamik.* Vorlesungsscript, Wintersemester 1997. Universität Frankfurt am Main.

[30] LAKSHMIKANTHAM, V. UND KAYMAKÇALAN, B. UND SIVASUNDARAM S.: *Dynamic Systems on Measure Chains*, Band 370 der Reihe *Mathematics and Its Application.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1996.

[31] LAKSHMIKANTHAM, V. UND TRIGIANTE, D.: *Theory of Difference Equations*, Band 251 der Reihe *Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker Inc., New York, zweite Auflage, 2002.

[32] LANCASTER, K.: *Theory of Matrices.* Academic Press, New York, 1969.

[33] MÜLLER, P.C.: *Stabilität und Matrizen.* Springer, Berlin/Heidelberg, 1977.

[34] NEIDHART, L.: *Integration im Rahmen des Maßkettenkalküls.* Diplomarbeit, Universität Augsburg, 2001.

[35] OMBACH, J.: *Wykłady z równań różniczkowych.* Uniwersytet Jagielloński, Kraków, 1996.

[36] Peterson, A. und Tisdell, C.: *Boundedness and uniqueness of solutions to dynamic equations on time scales.* unveröffentlichtes Papier, 2001.

[37] Pötzsche, C.: *Analysis auf Maßketten.* Universität Augsburg, 1998.

[38] Pötzsche, C.: *Chain Rule and invariance principle on measure chains.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 141:249–254, 2002.

[39] Pötzsche, C. und Siegmund, S. und Wirth F.: *A spectral characterisation of exponential stability for linear time-invariant systems on time scales.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 9:255–265, 2002.

[40] Remmert, R.: *Funktionentheorie*, Band 1. Springer, Berlin/Heidelberg, 1995.

[41] Sontag, E.D.: *Mathematical Control Theory*, Band 6 der Reihe *Texts in Applied Mathematics.* Springer, New York/Heidelberg, 1998.

[42] Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications.* Academic Press, New York, 1976.

[43] Yoshizawa, T.: *Stability Theory by Liapunovs Second Method.* Mathematical Society of Japan, Tokio, 1966.

[44] Yosida, K.: *Functional Analysis.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1995.

[45] Zubov, V.I.: *Methods of A.M. Lyapunov and Their Application.* P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1964.

Erklärung über die eigenhändige Anfertigung der Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Frankfurt, den 12. Juli 2004