

Gruppen von quasi-Automorphismen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Informatik und Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Jörg Lehnert
aus Hanau

Frankfurt 2008
(D30)

vom Fachbereich *Informatik und Mathematik* der
Johann Wolfgang Goethe–Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: *Prof. Dr. Klaus Johannson*

Gutachter: *Prof. Dr. Robert Bieri, Prof. Dr. Klaus Johannson*

Datum der Disputation: *30. Juni 2008*

Einleitung.

„Wer die Geometrie versteht,
vermag die ganze Welt zu verstehen.“
(Galileo Galilei)

Hintergrund

Die Geschichte der abstrakten Gruppentheorie geht zurück bis in das 19. Jahrhundert. Dabei waren es immer wieder Symmetrien von – oder allgemeiner Operationen auf – geometrischen Objekten, die das Studium von Gruppen motiviert und auch inhaltlich befruchtet haben. Seit Anfang des 20. Jahrhunderts und den Arbeiten von Cayley und Dehn gibt es darüber hinaus in der Gruppentheorie die Auffassung, dass Gruppen selbst als geometrische Objekte begriffen werden sollten. Später waren es dann die Arbeiten von Gromov, die diese Sichtweise in den Fokus moderner Gruppentheorie stellten, in dem sie sich heute noch befindet.

Sei G eine Gruppe und X ein (üblicherweise endliches) Erzeugendensystem für G . Dann ist der Cayley-Graph $\Gamma(G, X)$ der Graph mit Eckenmenge G und zwei Ecken g_1, g_2 sind durch eine Kante verbunden, wenn $g_1^{-1}g_2 \in X$ ist. In dieser Definition hat jede Kante eine Färbung mit einem $x \in X$ bekommen. Indem wir jede Kante eines Cayleygraphen als Kopie des Einheitsintervalles auffassen – und somit mit der Länge 1 versehen – erhalten wir ein geometrisches Objekt. Wenn wir die Gruppe aller Automorphismen des Cayley-Graphen betrachten, die die Färbung respektieren, so erhalten wir wieder die Gruppe G .

Dieser Prozess (Gruppe \rightsquigarrow (metrischer) Graph \rightsquigarrow Gruppe) trägt jedoch eine Uneindeutigkeit in sich. Jede Gruppe besitzt sehr viele Erzeugendensysteme und somit gibt es für eine Gruppe sehr viele Cayley-Graphen. Beschränkt man sich jedoch auf endliche Erzeugendensysteme, so sind die verschiedenen Graphen sich zumindest als metrische Räume ähnlich, sie sind nämlich quasi-isometrisch. Dies ist der formale Begriff für etwas, das man salopp auch so formulieren kann: Wenn man nicht so genau bzw. aus großer Entfernung hinschaut, nimmt man die metrischen Räume als gleich war.

Diese Tatsache erlaubt die oben erwähnte Sichtweise, die Gruppen selbst als geometrische Objekte zu behandeln. Insbesondere Eigenschaften metrischer Räume, die von quasi-Isometrien respektiert werden, sind im Studium dieser Räume besonders interessant, da sie so zu Eigenschaften der Grup-

pen (und unabhängig vom Erzeugendensystem) werden. Dies motiviert das Studium von quasi-Isometrien metrischer Räume und insbesondere von Graphen.

Aus Sicht der Kombinatorik kann jedoch eine quasi-Isometrie einen gewaltigen Eingriff in die Struktur des Graphen bedeuten und quasi-Isometrie ist daher für die Kombinatorik ein schlechtes Maß für die Ähnlichkeit zweier Graphen. Der Grund hierfür liegt darin, dass der Begriff quasi-Isometrie sich auf die Kategorie der metrischen Räume bezieht, sich die Kombinatorik aber in der Kategorie der Graphen abspielt. Das Analogon zur quasi-Isometrie ist hier eine bijektive¹ Abbildung der Eckenmenge, die nur endlich viele Inzidenzen nicht respektiert. Solche Abbildungen nennen wir quasi-Isomorphismen.

Betrachten wir nun quasi-Isomorphismen eines Graphen auf sich selbst, also quasi-Automorphismen, so stellen wir fest, dass diese immer auch quasi-isometrische Selbstabbildung desselben Graphen aufgefasst als metrischer Raum sind. Die Umkehrung ist allerdings falsch. Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Wechselspiel von kombinatorischen und geometrischen Eigenschaften von Gruppen. Wir betrachten Gruppen von quasi-Automorphismen von Graphen und deren geometrische Eigenschaften.

Die untersuchten Graphen sind dabei mit einer Kantenfärbung gegeben. Ein Graphenautomorphismus hat diese Färbung zu respektieren und auch quasi-Automorphismen dürfen die Farbe der Kante nur endlich oft missachten. Bei der Untersuchung von quasi-Automorphismen solcher Graphen werden wir auf verschiedene Verwandtschaften und Parallelen zu in der modernen Gruppentheorie wohl bekannten Gruppen stoßen. So treten zum Beispiel (Richard) Thompsons Gruppen \mathfrak{F} , \mathfrak{T} und \mathfrak{W} bei der Untersuchung von quasi-Automorphismen des ebenen binären Wurzelbaumes auf.

Ergebnisse und Aufbau der Arbeit

Wir wollen nun die wichtigsten Resultate und den Aufbau dieser Arbeit kurz darstellen. Kapitel 1 ist zweigeteilt. Während im Abschnitt 1.1 lediglich die Notationen und der Begriffsapparat, die für die Zwecke dieser Arbeit nötig sind, eingeführt wird, erzielen wir in Abschnitt 1.2 erste Ergebnisse über die Struktur von quasi-Automorphismengruppen insbesondere auch von Cayley-Graphen:

Jeder Automorphismus eines Graphen ist natürlich auch ein quasi-Automorphismus dieses Graphen und ein weiterer Spezialfall von quasi-Automorphismen sind, zumindest bei lokal endlichen Graphen, Permutationen der Eckenmenge mit endlichem Träger. Letztere bilden einen Normalteiler in der quasi-Automorphismengruppe, den wir die Untergruppe der finitären quasi-Automorphismen nennen. Sollte ein Graph Γ keine finitären Auto-

¹Auf die Einschränkung auf bijektive Abbildungen wird im Falle der quasi-Isometrien metrischer Räume verzichtet, vielmehr wird eine Art quasi-Bijektivität definiert. Diese läßt sich jedoch nicht besonders gut auf (kombinatorische) Graphen übertragen.

morphismen außer der Identität besitzen, so folgt, dass das Produkt der finitären quasi-Automorphismengruppe und der Automorphismengruppe, welches dann automatisch ein semidirektes ist, als Untergruppe in $\text{QAut}(\Gamma)$ einbetten.

Ist nun Γ der Cayley-Graph einer Gruppe G , so ist $\text{Aut}\Gamma = G$ und wir erhalten, falls Γ ein 1-endiger Graph ist, dass $\text{QAut}(\Gamma) = S_\Gamma \rtimes G$ ist. Wir werden zeigen, dass die quasi-Automorphismengruppe des Cayley-Graphen einer Gruppe unabhängig von der Wahl des Erzeugendensystems ist, und, mit der Definition $\text{QAut}(G) := \text{QAut}(\Gamma)$ für einen beliebigen Cayley-Graph Γ , werden wir zeigen, dass genau dann $\text{QAut}(G) = S_G \rtimes G$ ist, wenn G die Gruppe der ganzen Zahlen, die unendliche Diedergruppe oder eine 1-endige Gruppe ist.

Der ebene binäre Wurzelbaum Θ ist der Graph, den man induktiv dadurch erhält, dass man mit einer Ecke, der Wurzel, startet und in jedem Schritt in den zuletzt hinzugefügten Ecken eine linke und eine rechte Kante beginnen läßt, die in neu hinzuzufügenden Ecken enden. Im Kapitel 2 werden wir die quasi-Automorphismengruppe von Θ studieren. Da diese, wie bereits erwähnt, eine Verwandtschaft zu Thompsons Gruppen $\mathfrak{F}, \mathfrak{T}$ und \mathfrak{V} aufweisen, von der wir bei der Behandlung der quasi-Automorphismengruppe profitieren, widmen wir den ersten Teil des Kapitels der Erinnerung an die wichtigsten Ergebnisse und Methoden zur Behandlung von Thompsons Gruppen. Dabei folgen wir im Wesentlichen der Arbeit [CFP96]. Insbesondere die Darstellung von Gruppenelementen durch Baumpaard-Diagramme ist dabei von entscheidender Bedeutung, zeigt diese doch am Besten die Verwandtschaft von Thompsons Gruppen zum ebenen binären Wurzelbaum.

Im Abschnitt 2.2 werden wir Baumpaard-Diagramme für die Gruppe $G := \text{QAut}(\Theta)$ entwickeln und mit deren Hilfe zeigen, dass $G/S_\Theta \cong \mathfrak{V}$ ist. Außerdem werden wir zeigen, dass Thompsons Gruppe \mathfrak{F} als Untergruppe derjenigen quasi-Automorphismen, die eine in diesem Kapitel definierte Ordnung auf der Eckenmenge von Θ respektieren, in G einbettet. Das semidirekte Produkt $G^o := S_\Theta \rtimes \mathfrak{F}$, welches somit auch Untergruppe in G ist, nennen wir die Gruppe der quasi-ordnungserhaltenden quasi-Automorphismen. Die hier gefundene Einbettung von \mathfrak{F} in G verträgt sich mit der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G/S_\Theta = \mathfrak{V}$, da π diese Untergruppe in G auf die Untergruppe \mathfrak{F} in \mathfrak{V} abbildet.

In der Folge zeigen wir, dass diese natürliche Einbettung von \mathfrak{F} sich nicht zu einer Einbettung von \mathfrak{T} (und somit auch nicht von \mathfrak{V}) fortsetzen läßt. Dies schließt noch nicht aus, dass G als semidirektes Produkt von S_Θ und \mathfrak{V} zerfällt, macht es jedoch unwahrscheinlich. Wir geben eine Einbettung ι von \mathfrak{V} nach G an, die allerdings nicht mit π verträglich ist. Somit gibt es zumindest ein semidirektes Produkt von S_Θ und \mathfrak{V} als echte Untergruppe von G .

Der Abschnitt 2.3 widmet sich der Konstruktion von Präsentierungen der Gruppen G und G^o . Dabei gelingt es, für G^o eine endliche Präsentation

anzugeben, für G hingegen nur, eine Präsentation mit einem endlichen Erzeugendensystem.

Neben den „klassischen“ Endlichkeitseigenschaften endlich erzeugt und endlich präsentiert werden in der Gruppentheorie auch zwei Familien von Endlichkeitseigenschaften studiert, welche für endlich präsentierte Gruppen zusammenfallen. Eine Gruppe heißt vom Typ F_n , wenn es einen $K(G, 1)$ -Raum mit endlichem n -Gerüst gibt. Endlich erzeugte Gruppen sind genau die Gruppen vom Typ F_1 und endlich präsentierte Gruppen sind genau die Gruppen vom Typ F_2 . Gruppen vom Typ F_3 werden manchmal auch endlich identifiziert genannt.

Eine Gruppe G heißt vom Typ FP_n , wenn \mathbb{Z} als trivialer $\mathbb{Z}G$ -Modul eine projektive Auflösung hat, die bis in Dimension n endlich erzeugt ist. Hat der Modul \mathbb{Z} eine projektive Auflösung, die in jeder Dimension endlich erzeugt ist, so heißt G vom Typ FP_∞ . In Abschnitt 2.4 konstruieren wir einen Komplex, auf dem G^o operiert und zeigen mit Hilfe von Browns Kriterium und diesem Komplex, dass die Gruppe G^o vom Typ FP_∞ ist.

Der letzte Abschnitt des Kapitels über die Gruppe G der quasi-Automorphismen des ebenen binären Wurzelbaumes ist aus der gemeinsamen Arbeit mit Pascal Schweitzer über das co-Wort-Problem entstanden und von dieser maßgeblich beeinflusst. Das co-Wort-Problem einer Gruppe H zu einem gegebenen Erzeugendensystem X ist definiert als die Sprache der Wörter im freien Monoid X^* , die nicht im Kern der kanonischen Projektion $\pi : X^* \rightarrow H$ liegen, also die Gruppenelemente ungleich dem Neutralelement repräsentieren. Eine etwas detailliertere Einleitung in die Hintergründe hierzu findet sich zu Beginn von Abschnitt 2.5. Dort wird mit den Methoden aus [LS07] gezeigt, dass auch das co-Wort-Problem von G kontextfrei ist. Da sich diese Eigenschaft auf Untergruppen vererbt, und wir in dieser Arbeit, wie bereits erwähnt, zeigen, dass \mathfrak{A} Untergruppe von G ist, ist dies das stärkste bisher bekannte Resultat in diesem Gebiet. Da die Zugehörigkeit zu einer kontext-freien Sprache in kubischer Zeit zu entscheiden ist (z.B. mittels des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus), folgt daraus sofort, dass das Wort-Problem in G in kubischer Zeit lösbar ist.

Das nächste Kapitel ist dem Studium der Houghton-Gruppen gewidmet. Die in dieser Arbeit verwendete Definition als Gruppe von quasi-Automorphismen von Graphen bestehend aus disjunkten gefärbten Strahlen ist dabei eine dem Sprachgebrauch dieser Arbeit angepasste Umformulierung der von Houghton in [Ho78] vorgenommenen Definition. Insbesondere weisen wir nach, dass ein Cayley-Graph der 2-strahligen Houghtongruppe beliebig tiefe Sackgassen hat – eine Eigenschaft, die das Verhalten von Geodäten im Cayley-Graphen beschreibt. Die Ergebnisse dieses Kapitels entstammen im Wesentlichen der Arbeit [L07], in der wir einige Resultate zu Sackgassen zusammengestellt und bewiesen haben. Eine ausführlichere Einleitung in dieses Thema findet sich zu Beginn des Kapitels bzw. des Abschnittes 3.2.

Anschließend daran reißen wir in Abschnitt 3.3 Eigenschaften und Mög-

lichkeiten insbesondere der höheren Houghton-Gruppen an, welche man mit einem dort vorgestelltem Modell der Gruppen gut behandeln können sollte. Den Schluß dieser Arbeit bildet dann mit Kapitel 4 ein Ausblick auf einige ausgewählte offene Fragestellungen und interessante Forschungsgebiete, die wir im Bereich der quasi-Automorphismen sehen. Dabei werden wir auch zeigen, dass es für jede Gruppe G einen Graphen Γ gibt, sodass G Faktorgruppe der quasi-Automorphismengruppe von Γ modulo dem Normalteiler S_Γ ist.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Robert Bieri, dessen Begeisterung für „Houghton-ähnliche“ Gruppen mich schnell infiziert hat. Er hat mir immer ein offenes Ohr geliehen, manch wertvollen Tipp gegeben und das Projekt nach Kräften unterstützt.

Professor Kai Uwe Bux hat sich während seiner Besuche in Frankfurt immer Zeit für mich und meine Probleme genommen. Für seine richtigen Fragen im richtigen Moment danke ich ihm ebenso wie Pascal Schweitzer für die stets produktive und nie langweilige Zusammenarbeit, deren Einfluß nicht nur in der gemeinsamen Veröffentlichung zu spüren ist.

Für das Interesse an meiner Arbeit, so manche spannende Diskussion und hilfreiche Hinweise habe ich Professor Reinhard Diestel, Professor Murray Elder, Dr. Bernhard Krön, Benno Kuckuck, Professor Claas Röver, Professor Jörn Steuding und Professor Richard Weidmann zu danken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.	iii
1 Allgemeine Grundlagen.	1
1.1 Notationen und Konventionen.	1
1.2 Erste Beispiele – Cayley-Graphen.	4
2 Der ebene binäre Wurzelbaum.	9
2.1 Thompsons Gruppen.	11
2.1.1 Thompsons Gruppe \mathfrak{F}	11
2.1.2 Thompsons Gruppe \mathfrak{T}	15
2.1.3 Thompsons Gruppe \mathfrak{A}	16
2.2 $\text{QAut}(\Theta)$ und einige Untergruppen.	18
2.2.1 Ordnungserhaltende quasi-Automorphismen.	20
2.3 Präsentierungen für G und G^o	25
2.4 Endlichkeitseigenschaften von G^o	31
2.5 Das co-Wort-Problem.	38
3 Der Sterngraph.	43
3.1 Bekannte Ergebnisse.	43
3.2 Sackgassen.	45
3.3 Weitere Eigenschaften.	52
4 Ausblick.	55
4.1 Verzopfungen.	56
4.2 Das co-Wort-Problem zum Zweiten.	57

Kapitel 1

Allgemeine Grundlagen.

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten Notationen und Konventionen vorgestellt und der Begriff des quasi-Automorphismus eines Graphen eingeführt. Außerdem werden einige Beobachtungen zu Gruppen von quasi-Automorphismen von Graphen angestellt.

1.1 Notationen und Konventionen.

Ein gefärbter Graph Γ besteht aus einem Graphen $\Gamma = (V, E)$ mit Eckenmenge V und Kantenmenge $E \subset V \times V$ und einer Abbildung f von E in eine abzählbare (meist endliche) Farbenmenge C , die jeder Kante eine Farbe zuweist. Setzt man $E_c := f^{-1}(c)$, so zerfällt E in die disjunkte Vereinigung der Kantenmengen E_c und wir schreiben $\Gamma = (V, \bigcup_{c \in C} E_c)$.

Läßt sich ein (gefärbter) Graph kreuzungsfrei in die Ebene einbetten, so nennen wir ihn *planar*. Der Ausdruck *ebener* Graph meint in dieser Arbeit immer einen planaren Graphen mit einer fest gewählten Einbettung in die Ebene. Kommen wir also zur zentralen Definition dieser Arbeit.

1.1 Definition. Sei $\Gamma = (V, \bigcup E_c)$ ein gefärbter Graph. Ein *quasi-Automorphismus* ist eine Bijektion der Ecken $\varphi : V \rightarrow V$, bei der nur endlich viele Kanten jeder Farbe nicht respektiert werden, d.h. $\forall c \in C$ gilt:

$$|\{(a, b) \in E_c \mid (\varphi(a), \varphi(b)) \notin E_c\}| < \infty$$

und

$$|\{(\varphi(a), \varphi(b)) \in E_c \mid (a, b) \notin E_c\}| < \infty.$$

Die Menge aller quasi-Automorphismen von Γ bildet eine Gruppe. Diese nennen wir quasi-Automorphismengruppe von Γ , kurz $\text{QAut}(\Gamma)$.

Um also von einer Bijektion der Eckenmenge festzustellen, ob es sich um einen quasi-Automorphismus handelt, müssen 2 Bedingungen getestet werden. Für manche Graphen (und für fast alle in dieser Arbeit behandelten)

reicht es jedoch aus, die erste Bedingung zu testen, wie Lemma 1.3 zeigen wird. Doch zunächst benötigen wir eine weitere Definition.

1.2 Definition. Sei $\Gamma = (V, \bigcup_{c \in C} E_c)$ ein in n Farben gefärbter Graph, c_1, \dots, c_n eine Abzählung der Farbenmenge und $v \in V$. Der *ausgehende c_i -Grad von v* , bezeichnet mit $\deg_{c_i}^{aus}(v)$, ist die Anzahl der Kanten der Farbe c_i , die in v beginnen, also $\deg_{c_i}^{aus}(v) := |E_{c_i} \cap (\{v\} \times V)|$. Der *ausgehende Farbengrad von v* ist das Tupel $\deg^{aus}(v) := (\deg_{c_1}^{aus}(v), \dots, \deg_{c_n}^{aus}(v))$. Der *ausgehende Absolutgrad von v* ist der Betrag $|\deg^{aus}(v)| := \sum_{i=1}^n \deg_{c_i}^{aus}(v)$.

1.3 Lemma. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein lokal endlicher Graph und $\varphi : V \rightarrow V$ eine Bijektion der Eckenmenge. Wenn es eine Teilmenge V_0 der Eckenmenge V gibt, sodass $V - V_0$ endlich ist und für alle Ecken in $v, v' \in V_0$ gilt,

- dass $\deg^{aus}(v) = \deg^{aus}(v')$ ist,
so folgt aus $|\{(a, b) \in E_c | (\varphi(a), \varphi(b)) \notin E_c\}| < \infty$ bereits, dass auch $|\{(\varphi(a), \varphi(b)) \in E_c | (a, b) \notin E_c\}| < \infty$ ist. Insbesondere gilt dies also für homogene lokal endliche Graphen.
- dass $|\deg^{aus}(v)| = |\deg^{aus}(v')|$ ist,
so folgt aus $\sum_{i=1}^n |\{(a, b) \in E_{c_i} | (\varphi(a), \varphi(b)) \notin E_{c_i}\}| < \infty$ bereits, dass auch $\sum_{i=1}^n |\{(\varphi(a), \varphi(b)) \in E_{c_i} | (a, b) \notin E_{c_i}\}| < \infty$ ist.

Beweis. Sei $V_1 = V_0 \cap \varphi(V_0)$. Da $V - V_0$ endlich ist, ist auch $V - \varphi(V_0)$ und somit $V - V_1$ endlich und aus der lokalen Endlichkeit des Graphen folgt, dass nur endlich viele Kanten mit $V - V_1$ inzidieren. Für alle $c \in C$ sei $\tilde{E}_c := E_c \cap (V_1 \times V)$.

Angenommen $|\{(\varphi(a), \varphi(b)) \in E_c | (a, b) \notin E_c\}| = \infty$. Dann ist auch $|\{(\varphi(a), \varphi(b)) \in \tilde{E}_c | (a, b) \notin \tilde{E}_c\}| = \infty$. Sei $(\varphi(a_i), \varphi(b_i)) \in \tilde{E}_c$ und $(a_i, b_i) \notin \tilde{E}_c$. Da $\deg^{aus}(a_i) = \deg^{aus}(\varphi(a_i))$ folgt, dass es ein $b'_i \in V$ geben muss, mit $(a_i, b'_i) \in \tilde{E}_c$ und $(\varphi(a_i), \varphi(b'_i)) \notin \tilde{E}_c$. Also ist, im Widerspruch zu den Voraussetzungen, die Mächtigkeit $|\{(a, b) \in E_c | (\varphi(a), \varphi(b)) \notin E_c\}| \geq |\{(a, b) \in \tilde{E}_c | (\varphi(a), \varphi(b)) \notin \tilde{E}_c\}| = \infty$.

Der zweite Fall beweist sich analog. □

Statt der ausgehenden Farben- bzw. Absolutgrade kann man auch die entsprechenden eingehenden Grade (die zählen, wie viele Kanten in v enden) definieren und die Aussagen des obigen Lemmas gelten analog. In all diesen Fällen (und noch vielen anderen Fällen besonderer „Regularität“ des betrachteten Graphen), sind also die beiden Bedingungen an quasi-Automorphismen äquivalent. Alle in dieser Arbeit erwähnten Graphen erfüllen zumindest eine der genannten Bedingungen und daher werden wir uns immer auf die Betrachtung der Bedingung

$$|\{(a, b) \in E_c | (\varphi(a), \varphi(b)) \notin E_c\}| < \infty$$

beschränken.

Bevor wir nun die Behandlung von quasi-Automorphismen fortsetzen, wollen wir zunächst einige Konventionen dieser Arbeit vorstellen.

Konventionen. Ist Γ ein Graph, so bezeichnet $V(\Gamma)$ stets die Eckenmenge von Γ , $E(\Gamma)$ die Menge aller Kanten und $E_c(\Gamma)$ die Menge der Kanten der Farbe c .

Die Gruppe der quasi-Automorphismen ist eine Untergruppe der Permutationsgruppe der Eckenmenge des Graphen. Daher operiert $\text{QAut}(\Gamma)$ auf $V(\Gamma)$. Diese Operation fassen wir stets als eine Operation von links auf, somit heißt $\varphi \cdot \psi$ erst ψ , dann φ , und es gilt: $(\varphi \cdot \psi)(v) = \varphi(\psi(v))$.

Ein Automorphismus eines Graphen Γ ist in dieser Arbeit eine bijektive Abbildungen der Ecken des Graphen in sich, die alle Kanten respektiert. (Formal werden also die Kanten nicht abgebildet, obwohl sich jeder Automorphismus zu einer Abbildung der Ecken und Kanten fortsetzen lassen könnte.)

Ist Γ ein Graph und C ein Teilgraph, so ist $\Gamma - C$ der Graph mit Eckenmenge $V(\Gamma - C) = V(\Gamma) - V(C)$ und Kantenmenge $E(\Gamma - C) = E(\Gamma) \cap (V(\Gamma - C) \times V(\Gamma - C))$.

Unsere oben gewählte Definition eines gefärbten Graphen hat implizit jeder Kante des Graphen eine Orientierung gegeben, da E als Teilmenge von $V \times V$ gewählt wurde. Der Begriff des quasi-Automorphismusses lässt sich auch auf andere Definitionen bzw. Klassen von Graphen, zum Beispiel ebene, ungerichtete, ungefärbte oder orientierte Graphen anpassen. In vielen Fällen ist es ohnehin möglich, die quasi-Automorphismengruppe eines solchen (z.B. ungerichteten, ungefärbten) Graphen als quasi-Automorphismengruppe eines (anderen) Graphen gemäß unserer obigen Definition aufzufassen. Ungefärbte Graphen können wir z.B. stets als einheitlich gefärbt, d.h. mit konstanter Färbungsabbildung f , auffassen, eine ungerichtete Kante können wir stets als ein Paar von Kanten mit entgegengesetzten Orientierungen auffassen, etc.

Zunächst werden wir uns mit einigen elementaren Eigenschaften solcher Gruppen beschäftigen.

Sei $\Gamma = (V, \bigcup E_c)$ ein lokal endlicher, gefärbter Graph. Für eine beliebige Permutation φ der Eckenmenge V sei $\text{supp}(\varphi)$ der Träger von φ , d.h. $\text{supp}(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) \neq v\}$. Ist nun $|\text{supp}(\varphi)| < \infty$, so folgt $\varphi \in \text{QAut}(\Gamma)$. Somit ist die Gruppe der finitären Permutationen (d.h. Permutationen mit endlichem Träger) der Eckenmenge Untergruppe von $\text{QAut}(\Gamma)$. Diese Untergruppe bezeichnen wir, in Anlehnung an die symmetrische Gruppe, mit S_Γ .

Da $\text{QAut}(\Gamma)$ eine Untergruppe der vollen Permutationsgruppe der Ecken ist, und in dieser die finitären Permutationen normal sind, ist auch S_Γ ein Normalteiler in $\text{QAut}(\Gamma)$. Wenn Γ ein endlicher Graph ist, so gilt offensichtlich sogar $S_\Gamma = \text{QAut}(\Gamma)$.

1.2 Erste Beispiele – Cayley-Graphen.

Prominente Beispiele gefärbter Graphen sind die Cayley-Graphen endlich erzeugter Gruppen. Sei G eine Gruppe, die von der endlichen Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ erzeugt wird. Der Cayleygraph $\Gamma = \Gamma(G, X)$ ist der in den Farben x_1, \dots, x_n gefärbte Graph, gegeben durch $V(\Gamma) = G$, $E_{x_i}(\Gamma) = \{(g, gx_i) | g \in G\}$. Da es sich bei Cayley-Graphen um homogene Graphen handelt, können wir hier stets Lemma 1.3 anwenden. Die Automorphismengruppe des Cayleygraphen von G zu einem beliebigen Erzeugendensystem ist, wie man leicht nachprüft, genau die Gruppe G , und somit gilt $G \leq \text{QAut}(\Gamma(G, X))$.

Da die Automorphismengruppe des Cayley-Graphen einer Gruppe die Gruppe selbst ist, ist sie also insbesondere unabhängig von der Wahl des Erzeugendensystems. Dies gilt auch für die quasi-Automorphismengruppe.

1.4 Satz. *Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Die quasi-Automorphismengruppe eines Cayley-Graphen G ist unabhängig von der Wahl des endlichen Erzeugendensystems.*

Beweis. Sei Γ_1 der Cayley-Graph von G zum endlichen Erzeugendensystem X und Γ_2 der Cayley-Graph bezüglich des endlichen Erzeugendensystems $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$. Wir zeigen die Inklusion $\text{QAut}(\Gamma_1) \subseteq \text{QAut}(\Gamma_2)$, die umgekehrte Inklusion folgt aus Symmetriegründen.

X ist ein Erzeugendensystem. Daher gibt es Elemente $x_{k,l} \in X$, sodass $y_i = x_{i,1}x_{i,2} \dots x_{i,j(i)}$ ist. Sei $\varphi \in \text{QAut}(\Gamma_1)$. Es reicht nun zu zeigen, dass für alle i die Mächtigkeiten $|\{g \in G | \varphi(g)y_i \neq \varphi(gy_i)\}| < \infty$ sind. Damit $\varphi(g)y_i \neq \varphi(gy_i)$ ist, muss eine der Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(g)x_{i,1} &= \varphi(gx_{i,1}) \\ \varphi(gx_{i,1})x_{i,2} &= \varphi(gx_{i,1}x_{i,2}) \\ &\vdots \\ \varphi(gx_{i,1}x_{i,2} \dots x_{i,j(i)-1})x_{i,j(i)} &= \varphi(gx_{i,1}x_{i,2} \dots x_{i,j(i)}) \end{aligned}$$

ungültig sein. Insgesamt werden Gleichungen der Form $\varphi(g)x = \varphi(gx)$ für $g \in G$ und $x \in X$ nur endlich oft nicht erfüllt, also kann nur für endlich viele $g \in G$ gelten, dass $\varphi(g)y_i \neq \varphi(gy_i)$ ist. \square

Betrachten wir als erstes Beispiel den Graphen $\Gamma = \Gamma(\mathbb{Z}^2, \{x, y\})$, also das Standard-2-Gitter. Jeder quasi-Automorphismus zerreißt nur endlich viele Kanten. Somit wird außerhalb einer Kugel um den Mittelpunkt jede Kante respektiert und außerhalb dieser Kugel kann das Gitter nur verschoben werden. Jeder quasi-Automorphismus zerfällt auf diese Art in eine finitäre Permutation und eine Translation. Es folgt: $\text{QAut}(\Gamma)/S_\Gamma \cong \mathbb{Z}^2 = \text{Aut}(\Gamma)$. Es gilt sogar: $\text{QAut}(\Gamma) \cong S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$.

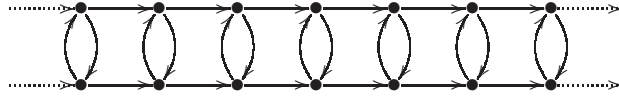


Abbildung 1.1: Der Cayley-Graph Γ von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ bezüglich des Standard-Erzeugendensystems. Alle horizontalen Kanten sind gleich gefärbt und alle vertikalen Kanten sind gleich gefärbt.

Dies ist jedoch nicht immer so. Wenn G eine endliche Gruppe ist, so ist auch der Cayley-Graph endlich und wie bereits im letzten Abschnitt erwähnt, ist dann $\text{QAut}(\Gamma) = S_\Gamma$. Ist Γ jedoch der Cayley-Graph einer unendlichen Gruppe G , so ist $\text{Aut}(\Gamma) \cap S_\Gamma = \{id\}$ und somit auch $S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$ eine Untergruppe von $\text{QAut}(\Gamma)$. Jedoch ist die Gruppe der quasi-Automorphismen meist größer, wie das folgende Beispiel zeigt:

Sei $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ und $X = \{a, b\}$ das Standard-Erzeugendensystem für diese Gruppe. Dann ist $\Gamma = \Gamma(G, X)$ der Leitergraph mit verdoppelten Sprossen (siehe Abbildung 1.1). Die Automorphismengruppe operiert durch verschieben nach links und rechts bzw. vertauschen von oben und unten. Ein quasi-Automorphismus, der nicht in $S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$ enthalten ist, ist zum Beispiel durch

$$f(n, m) := \begin{cases} (n, m) & \text{falls } n < 0 \\ (n, 1 - m) & \text{falls } n \geq 0 \end{cases}$$

gegeben, da hier nur 2 Kanten nicht respektiert werden (und auch nur 2 Kanten neu entstehen, was auch mit Lemma 1.3 aus der ersten Aussage folgt). Damit läßt sich jetzt auch $\text{QAut}(\Gamma)$ vollständig beschreiben. Ein quasi-Automorphismus respektiert alle bis auf endlich viele Kanten. Wählt man einen Punkt rechts (links) von allen nicht respektierten Kanten, so legt das Bild dieser Ecke schon fest, wie alle anderen Ecken rechts (links) der nicht respektierten Kanten abzubilden sind. Da quasi-Automorphismen Bijektionen der Ecken sind, muss die horizontale Verschiebung der Ecken links, der der Ecken rechts entsprechen. Die vertikale Vertauschung hingegen ist links und rechts unabhängig. Es folgt: $\text{QAut}(\Gamma) = (S_\Gamma \rtimes G) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Ändern wir dieses Beispiel nur leicht ab, und betrachten den Cayley-Graphen der durch $\langle a, b | b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ präsentierten Gruppe, also von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$, bezüglich $\{a, b\}$ (siehe Abbildung 1.2), so gehen diese zusätzlichen quasi-Automorphismen wieder verloren. Die Automorphismen dieses Graphen bestehen aus Punktspiegelungen und Translationen und man prüft leicht nach, das in diesem Fall erneut gilt: $\text{QAut}(\Gamma) \cong S_\Gamma \rtimes G$.

Wir haben also gesehen, dass die Frage, ob $\text{QAut}(\Gamma) = S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$ eine gültige Gleichung ist, vom Aussehen des Graphen „weit draußen“ abhängt. Um dies präziser formulieren zu können, benötigen wir den Begriff der Endenzahl einer Gruppe resp. eines Graphen, der erstmals von Hopf [Hp43] und Freudenthal [F43] eingeführt wird.

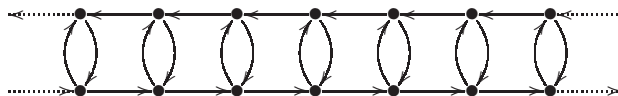


Abbildung 1.2: Der Cayleygraph Γ von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$. Alle horizontalen Kanten sind gleich gefärbt, ebenso alle vertikalen.

1.5 Definition. Sei Γ ein Graph, C ein endlicher Teilgraph und $n(C)$ die Anzahl der unendlichen Zusammenhangskomponenten von $\Gamma - C$. Dann ist $e(\Gamma) := \sup_C(n(C))$ die *Anzahl der Enden* von Γ .

Die Anzahl der Enden eines Cayley-Graphen einer endlich erzeugten Gruppe hängt nicht vom gewählten (endlichen) Erzeugendensystem ab, deshalb definiert man die Anzahl der Enden einer Gruppe als die Anzahl der Enden eines Cayley-Graphen der Gruppe. Endliche Gruppen haben demnach kein Ende. Hopf zeigte in der genannten Arbeit, dass eine endlich erzeugte unendliche Gruppe 1, 2 oder unendlich viele Enden hat und dass alle 2-endigen Gruppen virtuell \mathbb{Z} sind. Der Stallings'sche Struktursatz zeigt dann, dass Gruppen mit unendlich vielen Enden als amalgamierte freie Produkte und HNN-Erweiterungen über endlichen Gruppen zerfallen.

Für 1-endige und unendlichendige Gruppen können wir nun beantworten, ob die Gleichung $\text{QAut}(\Gamma(G, X)) = S_{\Gamma(G, X)} \rtimes \text{Aut}(\Gamma(G, X))$ erfüllt ist.

1.6 Lemma. *Sei G eine Gruppe, X ein endliches Erzeugendensystem für G und Γ der Cayley-Graph von G bezüglich X . Dann gilt:*

1. *Ist G eine 1-endige Gruppe, so ist $\text{QAut}(\Gamma) = S_{\Gamma} \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$.*
2. *Sei G eine ∞ -endige Gruppe, so ist $\text{QAut}(\Gamma) \cong S_{\Gamma} \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \text{QAut}(\Gamma)$. Sei C ein endlicher Teilgraph, der alle Kanten, die nicht von φ respektiert werden enthält. Dann ist $\varphi|_{\Gamma - C}$ ein Morphismus von $\Gamma - C$ nach $\Gamma - \varphi(C)$.

Ist Γ ein 1-endiger Graph, so besteht o.B.d.A. der Graph $\Gamma - C$ nur aus einer Zusammenhangskomponente. Sei g_1 eine Ecke aus $\Gamma - C$ und $g_2 = \varphi(g_1)$. Da φ alle Kanten aus $\Gamma - C$ respektiert, werden alle Wege, die in g_1 beginnen, auf Wege abgebildet, die in g_2 beginnen. Da in jeder Ecke nur eine Kante jeder Farbe beginnt, folgt daraus, dass $\varphi|_{\Gamma - C}$ durch die Linksmultiplikation mit $g_2 g_1^{-1}$ gegeben ist. Also lässt sich $\varphi|_{\Gamma - C}$ zu dem Automorphismus $\tilde{\varphi}$ fortsetzen der durch ebendiese Linksmultiplikation gegeben ist. Somit ist $\varphi \in S_{\Gamma} \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$.

Sei nun Γ ein ∞ -endiger Graph. Dann zerfällt G entweder in ein freies Produkt mit endlichem Amalgam $A *_K B$ oder als HNN-Erweiterung $A *_K$, wobei nicht gleichzeitig $[A : K] = 2$ und $[B : K] = 2$ gelten kann. Wir betrachten hier den Fall des freien Produktes mit Amalgam, der andere Fall

läßt sich analog beweisen. Also $G = A *_K B$ wobei K eine endliche Gruppe ist, und o.B.d.A. $[A : K] \geq 3$.

Sei nun \mathcal{A} ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von K in A und \mathcal{B} ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von K in B . Dabei sei die Nebenklasse K jeweils durch 1 repräsentiert. Gemäß Normalformensatz für freie Produkte mit Amalgam läßt sich jedes Element $g \in G$ auf eindeutige Weise als Produkt $g = g_1 g_2 \dots g_n k$ schreiben, wobei alle $g_i \neq 0$ alternierend aus \mathcal{A} und \mathcal{B} sind, $g_2, \dots, g_n \neq 1$ und k aus K sind. Sei $G_B < G$ die Untermenge aller Elemente, deren Normalform mit einem Element aus B beginnt. Dann ist $G = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} a \cdot G_B$. Da $|A : K| \geq 3$ ist, existieren 2 Elemente $a_1 \neq a_2 \in \mathcal{A} - \{1\}$. Die durch

$$\varphi(g) := \begin{cases} a_2 h & \text{falls } g \in a_1 G_B \text{ und } h = a_1^{-1} g \\ a_1 h & \text{falls } g \in a_2 G_B \text{ und } h = a_2^{-1} g \\ g & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Abbildung ist ein quasi-Automorphismus, da nur Kanten nahe an der Identität nicht respektiert werden. Aber φ liegt nicht in $S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$, da $\varphi|_{G_B} = id_{G_B}$ und φ somit unendlich viele Ecken fixiert. Wäre φ das Produkt eines $\psi_1 \in S_\Gamma$ und eines $\psi_2 \in \text{Aut}(\Gamma)$, so müsste also auch ψ_2 unendlich viele Ecken fixieren. Der einzige Automorphismus der dies leistet ist aber die Identität und φ unterscheidet sich auf unendlich vielen Ecken von dieser. \square

Obwohl der Beweis des mehrendigen Falles auf den Struktursatz zurückgreift, ist heuristisch klar, warum die quasi-Automorphismengruppe größer sein muss. Man hat nach Entfernen eines endlichen Teilgraphen verschiedene Zusammenhangskomponenten, auf denen man einen quasi-Automorphismus verschieden definieren kann, ohne zu viele Kantenrelationen zu verletzen. Dieses Argument sollte natürlich auch für 2-endige Gruppen überzeugen, aber wir haben oben bereits die Cayley-Graphen von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$, einer 2-endigen Gruppe, diskutiert und für diese gilt $\text{QAut}(\Gamma) = S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$. Der Grund hierfür liegt darin, dass nach Entfernen eines endlichen Teilgraphen die beiden unbeschränkten Zusammenhangskomponenten eine triviale Automorphismengruppe haben. Aus dem selben Grund gilt auch für Cayley-Graphen von \mathbb{Z} , dass $\text{QAut}(\Gamma) = S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$ ist.

Allerdings bilden diese beiden Gruppen auch die einzige Ausnahme. Um dies zu zeigen, benötigen wir die folgende genauere Beschreibung von Gruppen mit 2 Enden, wie man sie zum Beispiel in [ScW77] findet.

1.7 Satz ([ScW77] Theorem 5.12). *Eine Gruppe G hat genau dann 2 Enden, wenn G einen endlichen Normalteiler N enthält, sodass $G/N \cong \mathbb{Z}$ oder $G/N \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ist.*

Hierbei ist anzumerken, dass die Gruppen $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ isomorph sind. Alle 2-endigen Gruppen projizieren also mit endlichem Kern auf eine

der beiden erwähnten Ausnahmegruppen, was uns den Beweis der Aussage ermöglicht.

1.8 Lemma. *Sei G eine 2-endige Gruppe, $G \not\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$, $G \not\cong \mathbb{Z}$ und Γ ein Cayley-Graph von G . Dann ist $S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$ eine echte Untergruppe von $\text{QAut}(\Gamma)$.*

Beweis. Nach Satz 1.7 existiert ein endlicher Normalteiler N von G , sodass G/N entweder isomorph zu $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ oder isomorph zu \mathbb{Z} ist. Wir betrachten hier nur den Fall $G/N \cong \mathbb{Z}$, der andere Fall lässt sich vollkommen analog beweisen. Sei $\pi : G \rightarrow G/N$ die kanonische Projektion. Wir wählen ein $n \neq 1$ aus N . Die Abbildung

$$\varphi(g) := \begin{cases} g & \text{falls } g \in \pi^{-1}(\mathbb{Z}^+) \\ ng & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein quasi-Automorphismus: Nur endlich viele Kanten verbinden die Urbilder der positiven Zahlen mit Urbildern der nichtpositiven Zahlen. Nur solche Kanten werden nicht respektiert. Aber $\varphi \notin S_\Gamma \rtimes \text{Aut}(\Gamma)$. \square

Somit ist die Frage, für welche Gruppen G die quasi-Automorphismengruppe isomorph zum semidirekten Produkt der finitären Permutationen und der Gruppe selbst ist, vollständig beantwortet und bevor wir uns den konkreten Beispielen zuwenden, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen, fassen wir das Ergebnis der Lemmata 1.6 und 1.8 im folgenden Satz zusammen.

1.9 Satz. *Sei G eine Gruppe und Γ ein Cayley-Graph für G . Dann gilt: $\text{QAut}(\Gamma) = S_\Gamma \rtimes G$ genau dann, wenn G 1-endig oder isomorph zu \mathbb{Z} oder $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ ist.*

Kapitel 2

Der ebene binäre Wurzelbaum.

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass mehrendige Gruppen eine reichhaltigere quasi-Automorphismengruppe haben als 1-endige, bei denen sich, zumindest im Falle von Cayley-Graphen, diese nur durch eine Erweiterung mit der Gruppe der finitären Permutationen von der Automorphismengruppe unterscheidet. Wir werden uns nun in diesem Kapitel der quasi-Automorphismengruppe eines Baumes zuwenden. Schließlich sind unendliche Bäume Prototypen mehrender Graphen, da in Bäumen alle Strahlen (d.h. alle Folgen von benachbarten Ecken, in denen keine Ecke mehrfach vorkommt) verschiedene Enden repräsentieren.

2.1 Definition. Der *binäre Wurzelbaum* ist der Graph $\tilde{\Theta}$ dessen Ecken- und Kantenmenge durch

$$\begin{aligned} V(\tilde{\Theta}) &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{\bullet_{(i,j)} \mid 1 \leq j \leq 2^i\} \\ E(\tilde{\Theta}) &:= \{(\bullet_{(i,j)}, \bullet_{(i+1,2j-1)}), (\bullet_{(i,j)}, \bullet_{(i+1,2j)}) \mid i \in \mathbb{N}_0, j \leq 2^i\} \end{aligned}$$

beschrieben wird. Die Ecken aus $\{\bullet_{(i,j)} \mid 1 \leq j \leq 2^i\}$ nennen wir Ecken der Höhe i . Der Graph $\tilde{\Theta}$ besteht also aus einer Ecke auf Höhe 0, der Wurzel, und von jeder Ecke v auf Höhe j beginnen 2 Kanten zu Ecken auf Höhe $j+1$, den *Kindern* der Ecke v . In allen Bildern verzichten wir darauf, die Orientierung der Kanten einzuzeichnen, Kanten verlaufen stets von der Wurzel weg.

Ist v ein Kind der Ecke v' , so nennen wir v' die Mutterecke von v . Gibt es eine Folge von Ecken v_1, v_2, \dots, v_n , sodass v_i die Mutterecke von v_{i+1} ist, so heißt v_1 Vorfahr von v_n und v_n Nachkomme von v_1 . Ein Ausschnitt des Graphen $\tilde{\Theta}$ ist in Abbildung 2.1 zu sehen.

Die quasi-Automorphismengruppe von $\tilde{\Theta}$ entzieht sich jedoch den Methoden der geometrischen oder kombinatorischen Gruppentheorie (zumin-

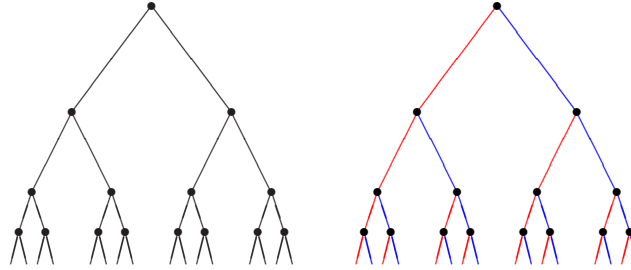


Abbildung 2.1: Ein Ausschnitt des Graphen $\tilde{\Theta}$ (links) und des Graphen Θ (rechts). Zu sehen sind jeweils die Ecken der Höhe 0 bis 3 und alle Kanten, die mit diesen inzidieren. Alle Kanten verlaufen von oben nach unten.

dest den in dieser Arbeit verwendeten), ist doch schon die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\tilde{\Theta})$ eine überabzählbare Gruppe. Diese Situation ändert sich jedoch, wenn man den Baum als ebenen Graphen betrachtet. Durch die ebene Struktur erhalten die 3 mit einer Ecke inzidierenden Kanten eine zyklische Ordnung. Ein Automorphismus des ebenen Graphen muss diese Ordnung respektieren. Dieser Baum besitzt dann nur einen nicht-trivialen Automorphismus, nämlich die Vertauschung der beiden mit der Wurzel inzidierenden Kanten.

Wir werden uns in der Folge mit der Gruppe der quasi-Automorphismen des ebenen binären Wurzelbaumes beschäftigen. Für diese Betrachtungen bleibt das Hinzufügen, Entfernen oder Umfärben von endlich vielen Kanten ohne Auswirkung, deshalb vereinfachen wir die Struktur des ebenen binären Wurzelbaumes, indem wir die beiden mit der Wurzel inzidierenden Kanten voneinander durch Färbung unterscheiden,

Dann können wir den ebenen binären Wurzelbaum durch die folgende Färbung der Kanten simulieren: Von den beiden mit der Wurzel inzidierenden Kanten erhält eine die Farbe links (in Abbildung 2.1 rot dargestellt) und eine die Farbe rechts (in der Abbildung blau dargestellt). Von den beiden Kanten, die eine Ecke mit ihren Kindern verbindet, wird die im Uhrzeigersinn auf die Kante zur Mutterecke folgende Kante mit der Farbe rechts (blau) und die andere links (rot) gefärbt.

2.2 Definition. Der Graph Θ , der aus dem binären Wurzelbaum $\tilde{\Theta}$ durch Färben der Kanten wie eben beschrieben entsteht, heißt ebener binärer Wurzelbaum. Somit ist Θ definiert durch:

$$\begin{aligned}
 V(\tilde{\Theta}) &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \{\bullet_{(i,j)} \mid 1 \leq j \leq 2^i\} \\
 E(\Theta)_{links} &:= \{(\bullet_{(i,j)}, \bullet_{(i+1,2j-1)}) \mid i \in \mathbb{N}_0, j \leq 2^i\} \\
 E(\Theta)_{rechts} &:= \{(\bullet_{(i,j)}, \bullet_{(i+1,2j)}) \mid i \in \mathbb{N}_0, j \leq 2^i\}
 \end{aligned}$$

Wie bereits angedeutet, ist die Automorphismengruppe des Graphen Θ trivial. Die quasi-Automorphismengruppe hingegen ist eine sehr interessante Gruppe, die eine starke Verwandtschaft zu Thompsons Gruppen \mathfrak{F} , \mathfrak{T} und insbesondere zu \mathfrak{V} aufweist. Deshalb werden wir zunächst an diese Gruppen erinnern.

2.1 Thompsons Gruppen.

In der Arbeit [MKTh73] konstruieren McKenzie und Thompson Gruppen mit unlösbarem Wort-Problem. Im Anhang an diese Arbeit verweisen sie darauf, dass einige der Gruppen, die sie für ihre Konstruktion benötigen, ursprünglich von Thompson im Zusammenhang mit seiner Forschung im Bereich der Logik 1965 entdeckt wurden. Heute sind diese Gruppen als Thompsons Gruppen \mathfrak{F} , \mathfrak{T} und \mathfrak{V} bekannt und mit dem Artikel [CFP96] liegt eine allgemein anerkannte Standardreferenz vor, auf die wir für alle weitergehenden und geschichtlichen Fragen zu Thompsons Gruppen verweisen.

Unsere Behandlung dieser Gruppen beschränkt sich auf die Definitionen und einige im weiteren Verlauf der Arbeit nützlichen Aussagen. Auf deren Beweise werden wir weitestgehend verzichten, da diese sich, wie bereits erwähnt, in der Arbeit [CFP96] nachschlagen lassen.

2.1.1 Thompsons Gruppe \mathfrak{F} .

Ein Grund für die Popularität der Gruppe \mathfrak{F} liegt sicherlich darin, dass die Gruppe mehrere, aus verschiedenen Gebieten der Mathematik stammende, Definitionen hat. Wir geben hier die Definition der Gruppe als Untergruppe der Homöomorphismen des Einheitsintervalles an.

2.3 Definition. Die Gruppe \mathfrak{F} ist die Gruppe aller stückweise linearen Homöomorphismen vom geschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$ nach $[0, 1]$, die überall außer an endlich vielen 2-adischen Stellen differenzierbar mit einer Steigung aus $\{2^k | k \in \mathbb{Z}\}$ sind.

Betrachten wir zunächst einige Eigenschaften solcher Homöomorphismen. Da alle Steigungen eines Elementes $f \in \mathfrak{F}$ positiv sind folgt, dass stets gilt: $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Stückweise lineare Abbildungen des Einheitsintervalles lassen sich durch endlich viele Daten beschreiben, zum Beispiel gibt es $x_0, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$ mit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$, sodass

$$f(x) = a_i x + b_i \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

ist. Dabei sind die Zahlen a_i Potenzen von 2 und die Zahlen b_i sind 2-adische Zahlen.

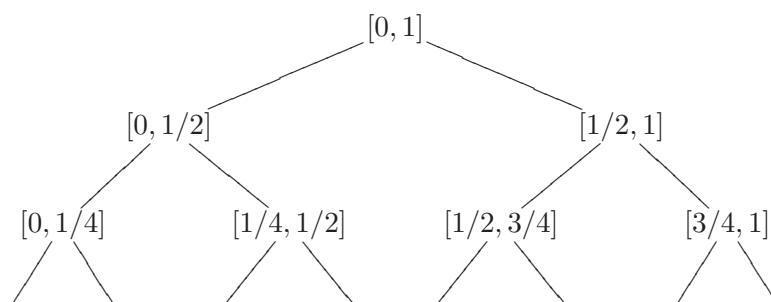


Abbildung 2.2: Der Baum Θ aufgefasst als Baum der 2-adischen Standardintervalle. Die Farben ergeben sich aus der Einbettung in die Ebene, Kanten nach unten links sind linke Kanten, Kanten nach unten rechts rechte.

Diese endliche Beschreibung der Elemente macht \mathfrak{F} zum häufig studierten Objekt. Hierbei haben sich verschiedene Darstellungen für deren Elemente als nützlich erwiesen. Als Beispiele seien hier nur Blockdiagramme, Orgelpfeifendiagramme (im Englischen pipe-diagrams), Baumdiagramme und Walddiagramme genannt. Für unsere Zwecke werden sich Baumdiagramme als die Darstellung der Wahl erweisen. Wir verzichten deshalb auf die Vorstellung der Alternativen und widmen uns diesen Baumdiagrammen.

Ein endlicher binärer Baum S ist ein zusammenhängender Teilgraph von Θ , der die Wurzel enthält und in dem für jede Ecke v gilt, dass entweder beide Kinder oder kein Kind von v in S enthalten ist. Wir führen nun einige Bezeichnungen ein. Ecken, deren Kinder nicht in S enthalten sind, heißen Blätter von S .

Auf der Eckenmenge eines (endlichen) binären Baumes gibt es eine kanonische Ordnung: Für jede Ecke v gilt, dass das linke Kind und alle seine Nachkommen kleiner als v (wir schreiben $< v$) und das rechte Kind und alle seine Nachkommen größer als v (wir schreiben $> v$) sind. Der transitive Abschluß dieser Relationen ist eine Ordnung der Ecken. In endlichen Bäumen nutzen wir diese Ordnung aus, um die Blätter mit 1 beginnend durchnummerieren.

Eine Ecke bildet mit ihren Kindern (und den dazwischen liegenden Kanten) eine Gabel. Sei S ein Teilbaum des Baumes S' . Wenn v ein Blatt von S ist und kein echter Teilbaum von S' sowohl S als auch die Kinder von v enthält, so sagen wir S' ist aus S durch Anhängen einer Gabel an v entstanden. Die Menge aller endlichen binären Bäume nennen wir \mathcal{T} und die Menge der endlichen binären Bäume mit k Blättern \mathcal{T}_k . Somit ist $\mathcal{T} = \bigcup_k \mathcal{T}_k$.

Wir identifizieren die Ecken des Baumes Θ mit 2-adischen Standardintervallen, indem wir die Ecke $\bullet_{i,j}$ mit dem Intervall $[(j-1)/2^i, j/2^i]$ identifizieren. Die Abbildung 2.2 zeigt einen Teil des Baumes. Mit dieser Identifikation bilden die Blätter eines endlichen binären Baumes stets eine Zerlegung

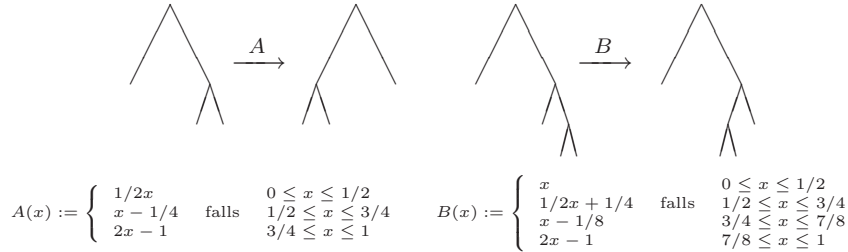


Abbildung 2.3: Baumpaardigramme für die Elemente A und B aus Thompsons Gruppe \mathfrak{F} .

des Einheitsintervalles in 2-adische Standard-Teilintervalle. Wie oben bereits erwähnt gibt es für jedes $f \in \mathfrak{F}$ eine Zerlegung des Einheitsintervalles in 2-adische Standardintervalle, sodass f auf jedem Standardintervall linear ist.

Durch weitere Unterteilung des Einheitsintervalles kann man erreichen, dass das Bild eines jeden in der Unterteilung auftauchenden 2-adischen Standardintervalles wieder ein 2-adisches Standardintervall ist. Dies ermöglicht die Beschreibung von Elementen aus \mathfrak{F} durch Baumpaard-Diagramme. Seien $S, T \in \mathcal{T}_k$. Dann repräsentiert (S, T) das Element von \mathfrak{F} , welches das Intervall, das dem i -ten Blatt in S entspricht, auf das Intervall, das dem i -ten Blatt in T entspricht, affin abbildet.

Abbildung 2.3 zeigt die Baumpaard-Diagramme für 2 Elemente aus \mathfrak{F} . Wir wollen das eben definierte noch einmal an Hand des Elementes $A \in \mathfrak{F}$ erläutern. Die Blätter des linken Baumes, genannt der Urbildbaum, entsprechen von links nach rechts den Intervallen $[0, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$ und $[3/4, 1]$; die Blätter des rechten, des Bildbaumes, den Intervallen $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$ und $[1/2, 1]$. Deshalb bildet das von diesem Baumpaard-Diagramm beschriebene Element, also A , das Intervall $[0, 1/2]$ linear auf das Intervall $[0, 1/4]$ ab. Mit anderen Worten: Für $0 \leq x \leq 1/2$ ist $A(x) = 1/2x$. Analog bestimmt sich die Abbildungsvorschrift auf den anderen Intervallen, die auch in der Abbildung angegeben ist.

Diese Darstellung von Elementen aus \mathfrak{F} ist aber alles andere als eindeutig. Hängt man in beiden Bäumen an das i -te Blatt eine Gabel an, entsteht ein neues Baumpaard-Diagramm, welches dasselbe Element repräsentiert. Andersherum betrachtet, wenn also bei beiden Bäumen eines Diagrammes das i -te und das $(i + 1)$ -te Blatt zu einer Gabel gehören, so kann man diese Gabel in beiden Bäumen entfernen, ohne das dargestellte Element zu ändern. Diesen Vorgang nennen wir Reduzieren. Gilt für alle Paare von aufeinanderfolgenden Blättern, dass diese in mindestens einem der beiden Bäume nicht Teil einer Gabel sind, so heißt das Diagramm reduziert.

Zu jedem Element aus \mathfrak{F} existiert genau ein reduziertes Baumpaard-Dia-

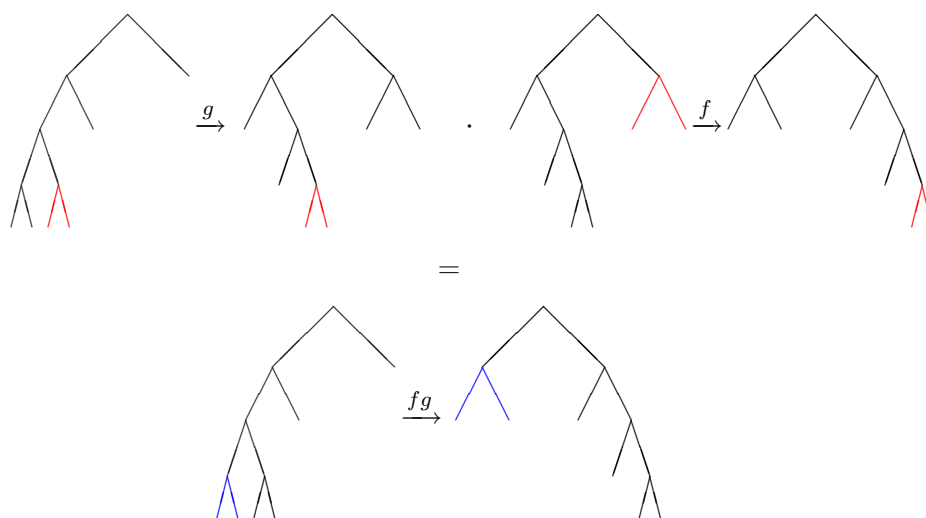


Abbildung 2.4: Die Berechnung des Produktes $f \cdot g$: Zunächst müssen die roten Gabeln angehängt werden, damit das Produkt dargestellt werden kann. Im Ergebnis werden anschließend die blauen Gabeln wieder reduziert.

gramm. Somit gibt es eine kanonische Bijektion zwischen Elementen aus \mathfrak{F} und reduzierten Baumpaard-Diagrammen. Wenn (Q, R) ein Diagramm für $f \in \mathfrak{F}$ und (R, S) ein Diagramm für $g \in \mathfrak{F}$ ist, so ist offensichtlich (Q, S) ein Diagramm für gf (unsere Konvention hier lautet: gf heißt „erst f , dann g “).

Seien (Q, R) und (S, T) Diagramme für f resp. g . Dann gibt es einen endlichen binären Baum U , der sowohl R , als auch S als Teilbaum enthält. Wir erweitern durch Anhängen von Gabeln im Bild- und Urbildbaum (Q, R) zu einem äquivalentem Diagramm (Q', U) und (S, T) zu einem äquivalentem Diagramm (U, T') . Dann wird gf dargestellt durch das Diagramm (Q', T') . Nach Reduktion dieses Diagrammes erhalten wir das eindeutige reduzierte Diagramm, das gf darstellt (siehe Abbildung 2.4).

Von nun an werden wir nicht mehr zwischen Elementen aus \mathfrak{F} und ihren darstellenden Diagrammen unterscheiden. Mit Hilfe dieser Darstellung von \mathfrak{F} als Gruppe von Diagrammen erhält man (nach einiger Überlegung) die Präsentation

$$\mathfrak{F} = \langle A, B \mid [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2] \rangle.$$

Dabei sind A und B gerade die in Abbildung 2.3 beschriebenen Elemente.

Insbesondere ist \mathfrak{F} also eine endlich präsentierte Gruppe. Das folgende Resultat über Untergruppen stammt von Matt G. Brin und Craig C. Squier ([BSq79]).

2.4 Satz ([BSq79]). *Jede nicht-abelsche Untergruppe von \mathfrak{F} enthält eine frei abelsche Gruppe von abzählbarem Rang als Untergruppe.*

Also insbesondere:

2.5 Korollar. *Thompsons Gruppe \mathfrak{F} enthält keine freien Gruppen vom Rang größer 1.*

2.1.2 Thompsons Gruppe \mathfrak{T} .

Die Gruppe \mathfrak{T} unterscheidet sich von \mathfrak{F} dadurch, dass sie nicht aus Homöomorphismen des Einheitsintervalles besteht, sondern aus Homöomorphismen des Einheitskreises, der entsteht, wenn wir 0 und 1 im Einheitsintervall identifizieren. Die Einschränkungen an die Homöomorphismen bleiben erhalten. Somit besteht \mathfrak{T} aus den stückweise linearen Homöomorphismen von $[0, 1]_{/0 \sim 1}$ auf sich selbst, die überall bis auf an endlich vielen 2-adischen Stellen differenzierbar mit 2er-Potenz-Steigung sind.

Dieser Definition sehen wir sofort an, dass \mathfrak{F} als Stabilisator des Punktes $0 = 1$ Untergruppe von \mathfrak{T} ist. Die Elemente aus \mathfrak{T} lassen sich immer als Komposition einer 2-adischen Drehung und einem Element dieses Stabilisators beschreiben. Dies ermöglicht es uns, auch Elemente aus \mathfrak{T} durch Baumpaard-Diagramme zu beschreiben.

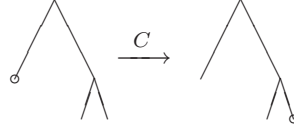
Sei $f \in \mathfrak{T}$. Dann gibt es eine Zerlegung von $[0, 1]$ in 2-adische Teilintervalle, sodass jedes dieser Teilintervalle von f linear auf ein 2-adisches Standardintervall abgebildet wird. Damit die Baumdiagramme aus dem vorangegangenen Abschnitt Elemente aus \mathfrak{T} beschreiben können, müssen diese zusätzlich noch die Information transportieren, welches Blatt (=2-adisches Intervall) auf welches Blatt (=2-adisches Intervall) abgebildet wird. Die Stetigkeit von f erzwingt jedoch, dass die zyklische Anordnung der Blätter erhalten bleibt.

Ein Baumpaard-Diagramm besteht also aus zwei endlichen binären Bäumen, bei denen jeweils ein Blatt markiert ist. Das repräsentierte Element bildet dann die markierten Blätter (= Intervalle) aufeinander ab. Die Untergruppeneinbettung von \mathfrak{F} in \mathfrak{T} ergibt sich, indem an beiden Bäumen eines Diagrammes von \mathfrak{T} dasselbe Blatt, z.B. das erste, markiert wird.

Die Multiplikationsvorschrift und die Bildung der Äquivalenzklassen verläuft im Wesentlichen analog zum Fall der Gruppe \mathfrak{F} . Auf eine detaillierte Beschreibung wollen wir hier verzichten, da diese sich auch aus der noch folgenden Beschreibung für \mathfrak{V} rekonstruieren lässt.

Sei C das in Abbildung 2.5 beschriebene Element, also

$$C(x) := \begin{cases} 1/2x + 3/4 & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{falls } 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ x - 1/4 & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Abbildung 2.5: Das Element $C \in \mathfrak{T}$.

Dann ist \mathfrak{T} gegeben durch die Präsentierung

$$\mathfrak{T} = \langle A, B, C \mid [AB^{-1}, A^{-1}BA], [AB^{-1}, A^{-2}BA^2], C^{-1}BA^{-1}CB, \\ A^{-1}CBA^{-1}B^{-1}ABA^{-2}CB^2, A^{-1}C^{-1}(A^{-1}CB)^2, C^3 \rangle.$$

Dabei sind A und B die Bilder der Einbettung von A resp. B aus \mathfrak{F} .

2.1.3 Thompsons Gruppe \mathfrak{V} .

Die Thompson-Gruppe mit der engsten Verwandtschaft zu $\text{QAut}(\Theta)$ ist sicherlich die Gruppe \mathfrak{V} . Wie auch \mathfrak{T} ist \mathfrak{V} definiert als eine Gruppe von Bijektionen auf S^1 .

2.6 Definition. Die Gruppe \mathfrak{V} ist die Gruppe aller stückweise linearen rechtsstetigen Bijektionen auf S^1 , die 2-adische Stellen auf 2-adische Stellen abbildet und überall außer an endlich vielen 2-adischen Stellen differenzierbar mit Steigung 2^k ist.

Erneut lässt sich ein Element einer Gruppe beschreiben, indem man das Einheitsintervall I , oder besser $I/_{0\sim 1}$ in geeignete 2-adische Standardintervalle zerlegt, auf denen die Abbildung affin ist und deren Bilder andere Standardintervalle sind. Da jedoch die Linksstetigkeit der Abbildungen nicht mehr gefordert ist, müssen in \mathfrak{V} halboffene Standardintervalle der Form $[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i})$ betrachtet werden.

Um Elemente von \mathfrak{V} durch Baumpaard-Diagramme darzustellen, müssen wir die Blätter durchnummerieren um anzuzeigen, welche Intervalle aufeinander abgebildet werden. Das heißt: Ist $f \in \mathfrak{V}$, so besteht ein Baumdiagramm für f aus zwei endlichen binären Bäumen $S, T \in \mathcal{T}$ und einer Bijektion b_b , die den Blättern von S Blätter von T zuordnet. Diese Bijektion beschreiben wir im Diagramm, indem wir die Blätter des Urbildbaumes von 1 bis n (für passendes n) durchnummerieren und jedes Blatt v des Bildbaumes mit der Nummer des Blattes $b_b^{-1}(v)$ des Urbildbaumes versehen. Dabei muss die Nummerierung im linken Baum nicht notwendigerweise aufsteigend sein.

Die Bijektion b_b ist dabei so gewählt, dass f das Intervall, das einem Blatt v des Urbildbaumes entspricht, auf das Intervall, das dem Blatt $b_b(v)$ im Bildbaum entspricht, abbildet. Da die Nummerierung lediglich dazu dient, die Bijektion b_b zu beschreiben, erlauben wir uns, ein solches Baumdiagramm als Tripel (S, T, b_b) zu schreiben.

Ist f Element der Untergruppe \mathfrak{F} , so sind die Blätter in beiden Bäumen in der gleichen Reihenfolge durchnummeriert. Ist $f \in \mathfrak{T} < \mathfrak{B}$, so ist die Nummerierung der Blätter in den Bäumen bis auf zyklische Permutation gleich. Für die Erzeugenden von \mathfrak{F} und \mathfrak{T} geben wir mögliche Baumpaardiagramme als Elemente von \mathfrak{B} in Abbildung 2.6 an.

Seien $S, T \in \mathcal{T}_k$ und $\mathfrak{B} \ni f = (S, T, b_b)$. Hängen wir in S und T jeweils an das Blatt l eine Gabel an und nummerieren die neuen Blätter mit l und $k + 1$, so erhalten wir ein Baumpaar-Diagramm (S', T') , das ebenfalls f repräsentiert.

Sei $1 \leq i < j \leq k$. Sind in den beiden Bäumen S und T die Blätter i und j Teil derselben Gabel, so können wir diese Gabeln entfernen. Die inneren Ecken, die dabei zu Blättern werden, nummerieren wir mit i und falls $j \neq k$ erhalten die Blätter mit der Nummer k die Nummer j . Diesen Vorgang nennen wir Reduzieren.

Die Baumpaardiagramme enthalten jedoch in ihrer Darstellung zusätzlich zu dieser eine weitere Uneindeutigkeit: Sei $\pi \in S_k$ eine Permutation der Nummern $1, \dots, k$ und $(S, T, b_b) \in \mathcal{T}_k \times \mathcal{T}_k \times S_k$ ein Baumpaar-Diagramm. Wenn wir in S und T die Blätter mittels π umnummerieren, erhalten wir ein anderes Baumpaar-Diagramm für das gleiche Element aus \mathfrak{B} , da die Nummern die gleiche Bijektion b_b beschreiben.

Ein Diagramm, das sich nicht reduzieren lässt und bei dem die Nummerierung der Blätter im Urbildbaum aufsteigend ist, heißt reduziert. Wie schon in den Fällen der Gruppen \mathfrak{F} und \mathfrak{T} gibt es für jedes Element aus \mathfrak{B} genau ein reduziertes Diagramm.

Diese Diagramme können wir erneut benutzen, um das Produkt von zwei Elementen zu berechnen. Seien $f, g \in \mathfrak{B}$. Wir suchen, durch sukzessives Erweitern und gegebenenfalls Umnummerieren, Baumpaardiagramme $(S, T, b_1) = f$ und $(R, S, b_2) = g$. Dann ist $fg = (R, T, b_1 b_2)$.

Um die Gruppe \mathfrak{B} zu erzeugen bedarf es eines weiteren Elementes. Sei dazu

$$D(x) := \begin{cases} 1/2x + 1/2 & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & \text{falls } 1/2 \leq x < 3/4 \\ x & 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

das in Abbildung 2.6 beschriebene Element; dann gibt es eine Präsentation

$$\mathfrak{B} = \langle A, B, C, D \mid \mathcal{R} \rangle ,$$

von \mathfrak{B} , wobei \mathcal{R} eine Menge aus 14 Relationen ist. Insbesondere ist auch \mathfrak{B} endlich präsentiert.

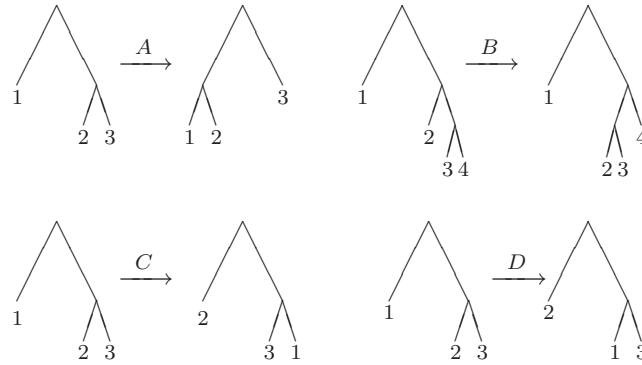


Abbildung 2.6: Baumpaarddiagramme für die Elemente A , B und C aufgefasst als Elemente von \mathfrak{B} sowie für das Element D , dass nicht in \mathfrak{T} enthalten ist.

2.2 Die quasi-Automorphismengruppe und einige Untergruppen.

Betrachten wir nun quasi-Automorphismen des ebenen binären Wurzelbaumes Θ . Ein quasi-Automorphismus φ von Θ muss alle bis auf endlich viele Kanten respektieren. Somit liegen alle Kanten, die nicht respektiert, also zerrissen, werden in einem endlichen Teilbaum. Sei T ein solcher Teilbaum und n die Anzahl der Blätter von T .

Alle Nachkommen eines Blattes von T bilden zusammen mit dem Blatt selbst einen Teilgraph von Θ der zu Θ isomorph ist. Da φ in diesem Teilgraph alle Kanten respektiert, wird dieser auf einen anderen zu Θ isomorphen Teilgraph abgebildet. Da die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Theta)$ trivial ist, ist die Abbildung φ eingeschränkt auf solch einen Teilgraphen bereits durch das Bild der Wurzel des Teilgraphen, also das Bild des Blattes, eindeutig bestimmt.

Wir können also jedes Element $\varphi \in \text{QAut}(\Theta)$ beschreiben, indem wir die Abbildung auf einem endlichen binären Teilbaum definieren und implizit verlangen, dass außerhalb dieses Baumes alle Kanten respektiert werden. Wie kann das Bild dieses endlichen Teilbaumes aussehen?

Für jede Ecke v sei Θ_v der zu Θ isomorphe Baum, dessen Wurzel die Ecke v ist. Seien v_1, \dots, v_n die Blätter von T . Dann ist $\varphi(\Theta_{v_i}) = \Theta_{\varphi(v_i)}$. Da T genau $n - 1$ innere Ecken hat und φ eine Bijektion der Ecken von Θ ist, muss

$$\left| V \left(\Theta - \left(\bigcup_{i=1}^n \varphi(\Theta_{v_i}) \right) \right) \right| = n - 1$$

sein. Dies impliziert jedoch, dass die Ecken $\varphi(v_i)$ genau die Blätter eines

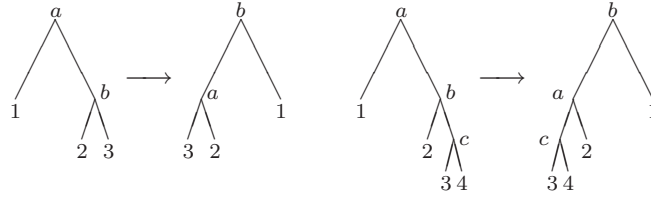


Abbildung 2.7: Ein Beispiel von äquivalenten Baumpaard-Diagrammen. Hängt man im linken Baum am Blatt Nummer 3 die Gabel $(3, c, 4)$ an, erhält man das rechte Diagramm.

endlichen binären Baumes S sind, dessen innere Ecken die φ -Bilder der inneren Ecken von T sind.

Diese Tatsache benutzen wir, um Elemente aus $\text{QAut}(\Theta)$ mittels Baumpaard-Diagrammen darzustellen: Das Element φ wird z.B. durch das Diagramm (T, S, b_b, b_i) dargestellt, wenn b_b die Bijektion der Blätter von T auf die Blätter von S und b_i die Bijektion der inneren Ecken von T auf die inneren Ecken von S ist. Mit anderen Worten, wenn $b_b = \varphi|_{\{\text{Blätter von } T\}}$ und $b_i = \varphi|_{\{\text{Innere Ecken von } T\}}$ ist.

Die Bijektionen b_b und b_i stellen wir in Diagrammen wieder durch entsprechende Markierungen dar. Dabei markieren wir die inneren Ecken von T mit verschiedenen Wörtern $\omega \in \mathcal{B} = \{a, b, \dots, z\}^*$ und die Blätter mit Zahlen. Die Ecken von S werden so markiert, dass φ , und somit auch b_b bzw. b_i , jede Ecke auf eine auf die gleiche Weise markierte Ecke abbildet.

Natürlich sind auch diese Baumpaard-Diagramme nicht eindeutig. Wenn T alle Kanten enthält, die nicht respektiert werden, so tut dies auch jeder endliche binäre Baum der T umfasst. Allerdings gibt es einen eindeutigen minimalen Baum der all diese Kanten enthält. Ist T dieser Baum, so nennen wir das Baumpaard-Diagramm reduziert. Alle anderen Baumpaard-Diagramme gehen aus diesem durch sukzessives Anhängen von Gabeln und entsprechender Anpassung der Markierungen hervor. Ein Beispiel hierfür findet sich in Abbildung 2.7.

Ein reduziertes Diagramm erkennt man daran, dass es in S keine Gabel der mit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \mathcal{B}$ markierten Ecken gibt, wenn diese schon in T die Ecken einer Gabel markieren. Ist dies dagegen der Fall, können wir diese Gabeln in beiden Bäumen entfernen und erhalten nachdem wir die Ecken, die bisher mit ω markiert waren nun mit n_1 markieren, ein Baumpaard-Diagramm, welches denselben quasi-Automorphismus repräsentiert.

Die Baumpaard-Diagramme für Elemente aus $\text{QAut}(\Theta)$ unterscheiden sich also von denen für Elemente von \mathfrak{A} nur dadurch, dass die inneren Ecken noch mit Wörtern markiert sind. Auch die Multiplikation lässt sich analog zur Multiplikation in \mathfrak{A} auf der Ebene der Diagramme durchführen.

Aus den allgemeinen Betrachtungen in Abschnitt 1.1 folgt, dass die Untergruppe S_Θ der quasi-Automorphismen mit endlichem Träger einen Nor-

malteiler in $\text{QAut}(\Theta)$ bildet. Dieser Normalteiler läßt sich an den Diagrammen leicht erkennen und auch die Faktorgruppe ist eine wohlbekannte Gruppe.

2.7 Lemma. *Der Normalteiler S_Θ von $\text{QAut}(\Theta)$ besteht aus all jenen quasi-Automorphismen, deren Baumpaard-Diagramme aus zwei identischen Bäumen mit identischer Nummerierung der Blätter (aber möglicherweise verschiedener Markierung der inneren Ecken) besteht.*

Die Gruppe $G = \text{QAut}(\Theta)/S_\Theta$ ist isomorph zu Thompsons Gruppe \mathfrak{V} .

Beweis. Sei $\varphi \in S_\Theta$ und T ein Baum, der alle von φ nicht respektierten Kanten enthält. Dann gibt es einen Baum S , sodass (T, S, b_b, b_i) mit geeigneten Bijektionen b_b, b_i ein Baumpaard-Diagramm für φ ist. Würde φ ein Blatt von T nicht auf sich selbst abbilden, würde es dies mit allen Nachkommen ebenfalls tun. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass φ endlichen Träger hat. Wenn aber alle Blätter fixiert werden, so ist offensichtlich $S = T$ und die Nummerierungen der Blätter entsprechen sich. Ist andererseits ein Baumpaard-Diagramm mit zwei identischen Bäumen gegeben, deren Blätter gleich nummeriert sind, so hat das repräsentierte Element endlichen Träger und ist somit in S_Θ enthalten.

Der gesuchte Isomorphismus besteht aus dem „Vergessen“ der inneren Markierungen: Das Diagramm (S, T, b_b, b_i) wird auf das Diagramm (S, T, b_b) abgebildet. Die Äquivalenzrelationen von Diagrammen für G und Diagrammen für \mathfrak{V} sind vollkommen analog definiert, sodass alle Baumpaard-Diagramme, die $\varphi \in G$ beschreiben nach Ignorieren der inneren Markierungen $\tilde{\varphi}$ beschreiben. Somit hebt sich das Ignorieren innerer Markierungen zu einer Abbildung von G nach \mathfrak{V} hoch. Diese Abbildung ist ein Homomorphismus, da auch die Multiplikation mittels Diagrammen durchgeführt wird.

Im Kern dieses Homomorphismusses befinden sich alle Elemente, deren Baumpaard-Diagramme aus zwei identischen Bäumen mit identischer Nummerierung der Blätter bestehen, also alle Elemente von S_Θ . Da der Homomorphismus offensichtlich surjektiv ist, folgt die Behauptung. \square

2.2.1 Ordnungserhaltende quasi-Automorphismen.

Auf die Verwandtschaft zwischen Thompsons Gruppen und $\text{QAut}(\Theta)$ wollen wir noch etwas näher eingehen. Für den Rest dieses Kapitels setzen wir $G := \text{QAut}(\Theta)$. Da \mathfrak{V} isomorph zu G/S_Θ ist, stellt sich natürlich die Frage, ob \mathfrak{V} sogar Untergruppe von G ist und ob G als semidirektes Produkt zerfällt. Wir stellen diese Frage zunächst zurück und zeigen stattdessen:

2.8 Lemma. *Thompsons Gruppe \mathfrak{F} ist eine Untergruppe von $G = \text{QAut}(\Theta)$. Unter der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G/S_\Theta$ wird diese Untergruppe auf das Erzeugnis von A, B abgebildet. (Somit ist auch $S_\Theta \rtimes \mathfrak{F} \leq G$.)*

Beweis. Die Gruppe \mathfrak{F} operiert stetig auf dem Einheitsintervall. Daher ist ein Homöomorphismus aus \mathfrak{F} bereits eindeutig durch die Bilder der 2-adischen Zahlen festgelegt und diese werden in sich abgebildet. Somit ist die Gruppe \mathfrak{F} als Untergruppe der Gruppe der Permutationen der 2-adischen Zahlen definiert.

Wir beschreiben nun eine Bijektion zwischen den 2-adischen Zahlen des Einheitsintervalles und den Ecken des 2-adischen Wurzelbaumes Θ . Dazu identifizieren wir die Wurzel von Θ mit der Zahl $\frac{1}{2}$ und die Ecken auf Höhe k von links nach rechts mit $\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{3}{2^{k+1}} \dots \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$. Diese Identifizierung ist der Interpretation von Θ als Baum der 2-adischen Standardintervalle aus Abbildung 2.2 sehr ähnlich. Statt als Intervall interpretieren wir die Ecken des Baumes nun als Mittelpunkt des entsprechenden Intervalles.

Mittels dieser Bijektion ist \mathfrak{F} eine Untergruppe der Permutationen der Ecken des binären Wurzelbaumes. Wir zeigen zunächst, dass Bilder dieser Einbettung sogar quasi-Automorphismen sind.

Dazu sei $\varphi \in \mathfrak{F}$ und (S, T) ein (beliebiges) Baumpaard-Diagramm, das φ repräsentiert. Sei v ein Blatt von S . Dann enthält Θ_v , also der Teilgraph von Θ , der als Ecken gerade v und alle Nachkommen von v hat, alle Ecken des 2-adischen Standard-Intervalles, dessen Mittelpunkt die Ecke v repräsentiert. Das heißt, dass $\varphi(\Theta_v) = \Theta_{\varphi(v)}$ ist. Damit φ ein Element aus G ist, müssen aber auch die inneren Ecken von S auf innere Ecken von T abgebildet werden.

Die inneren Ecken entsprechen all den Zahlen aus $(0, 1)$, die als Intervallgrenzen der Blätter auftauchen. Da Intervalle auf Intervalle und somit Intervallgrenzen auf Intervallgrenzen abgebildet werden, werden innere Ecken auf innere Ecken abgebildet. Dies zeigt die Einbettbarkeit von \mathfrak{F} nach G . Dass unter der kanonischen Projektion nach \mathfrak{B} das Element $\varphi \in G$ auf $\varphi \in \mathfrak{F}$ abgebildet wird ergibt sich aus der Konstruktion. \square

Wir können diese Einbettung auch explizit angeben, indem wir ein Baumpaard-Diagramm angeben, welches ein in G eingebettetes Element $\varphi \in \mathfrak{F}$ beschreibt.

Sei $\alpha : V(\Theta) \hookrightarrow [0, 1]$ die im Beweis beschriebene Interpretation der Ecken des Baumes als 2-adische Zahlen. Dann ist durch $v_1 < v_2 \Leftrightarrow \alpha(v_1) < \alpha(v_2)$ eine Ordnung auf den Ecken des ebenen binären Wurzelbaumes definiert. (Diese Ordnung entspricht der in der Einleitung definierten Ordnung auf den Ecken von Θ .)

Da \mathfrak{F} ordnungserhaltend auf $[0, 1]$ operiert, ist dies zwangsläufig auch auf dem Baum für die vererbte Ordnung so. Sei (S, T) ein beliebiges Baumpaard-Diagramm für φ als Element von \mathfrak{F} . Dann können wir daraus ein Baumpaard-Diagramm für φ als Element in G konstruieren, indem wir die inneren Ecken von S und von T einfach bezüglich der $<$ -Ordnung alphabetisch aufsteigend makieren und ebenso die Blätter von links nach rechts durchnummerieren.

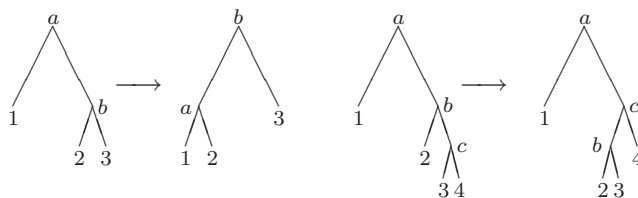


Abbildung 2.8: Die Erzeugenden von Thompsons Gruppe \mathfrak{F} als Elemente von $\text{QAut}(\Theta)$.

In Abbildung 2.8 sind die Erzeugenden von \mathfrak{F} als Elemente in G nach dieser Konstruktion dargestellt. Die Projektion dieser Elemente nach G/S_Θ liefert gerade A bzw. B in \mathfrak{A} .

Die Untergruppe \mathfrak{F} besteht also aus allen quasi-Automorphismen, die die eben konstruierte Ordnung der Ecken respektieren, das semidirekte Produkt $S_\Theta \rtimes \mathfrak{F}$ aus allen quasi-Automorphismen, bei denen endlich viele Ecken nicht der Ordnung entsprechend abgebildet werden. Dies motiviert die folgende Definition:

2.9 Definition. Das Bild der Einbettung von \mathfrak{F} in $G = \text{QAut}(\Theta)$, die in Lemma 2.8 konstruiert wurde, nennen wir die Gruppe der ordnungserhaltenden quasi-Automorphismen. Das semidirekte Produkt $S_\Theta \rtimes \mathfrak{F}$ nennen wir die Gruppe der quasi-ordnungserhaltenden quasi-Automorphismen und bezeichnen sie mit G° .

Nachdem wir nun die Gruppe \mathfrak{F} erfolgreich in G eingebettet haben, kehren wir zu der Frage der Einbettbarkeit von \mathfrak{A} oder auch von \mathfrak{T} zurück. Warum ist die eben genutzte Technik – Interpretation der Ecken von Θ als 2-adische Zahlen – hier nicht erfolgreich? Das Problem besteht darin, dass wir nicht alle 2-adischen Zahlen aus $[0, 1]$ in Θ wiederfinden, sondern nur die 2-adischen Zahlen aus dem offenen Einheitsintervall.

Da \mathfrak{T} und \mathfrak{A} als Homöomorphismen, also insbesondere Bijektionen, der S^1 definiert sind, fehlt uns der Punkt $0 = 1$, der in diesen Gruppen eben anders als in \mathfrak{F} nicht fixiert wird. In der Tat kann man leicht nachrechnen, dass zumindest die minimalen Baumpaard-Diagramme von Elementen aus \mathfrak{T} sich nicht zu Baumpaard-Diagrammen aus G fortsetzen lassen, ohne dabei in \mathfrak{T} gültige Relationen zu verletzen. Will man die Einbettung der Gruppe \mathfrak{F} zu einer Einbettung von \mathfrak{T} erweitern, so ist man in jedem Fall zum Scheitern verurteilt.

2.10 Lemma. Die Einbettung von \mathfrak{F} als Gruppe der orientierungserhaltenden quasi-Automorphismen von Θ lässt sich nicht zu einer Einbettung $\mathfrak{T} \rightarrow \text{QAut}(\Theta)$ fortsetzen, die sich mit der kanonischen Projektion verträgt,

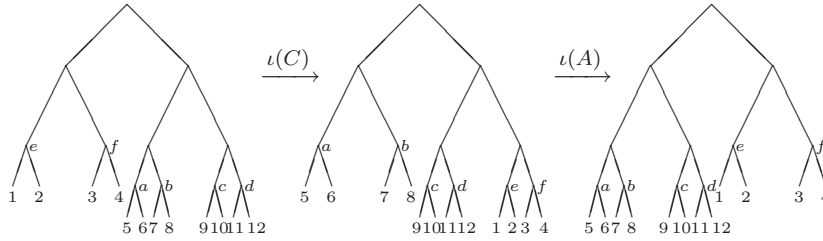


Abbildung 2.9: Ein Diagramm der Höhe $k + 1$ für C würde sich stets reduzieren lassen: Die Ecke a im linken Baum muss im rechten Baum auf eine Ecke abgebildet werden, die bei nochmaliger Anwendung von AC wieder der Ecke a im linken Baum entspricht. Dies ist jedoch die Ecke a im rechten Baum. Dies impliziert auch die Position von a im mittleren Baum. Analog lassen sich die Bilder von b, c und d begründen.

Für die Bestimmung der Bilder von e und f betrachten wir zunächst nur die beiden linken Bäume. Da $C^3 = 1$ ist, muss die Ecke $e = C(a)$ im linken Baum auf eine Ecke abgebildet werden, deren C -Bild der Ecke a im linken Baum entspricht. Dies ist die Ecke e im mittleren Baum. Analog bestimmen wir das Bild von f . Die Markierungen im rechten Baum ergeben sich aus der Definition von $\iota(A)$. Nun lassen sich alle unteren Gabeln entfernen und man erhält ein äquivalentes Diagramm der Höhe k .

mit anderen Worten: Das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{F}}} & \mathfrak{T} \\ \iota_{\alpha} \downarrow & & \downarrow \iota_{\mathfrak{T}} \\ G & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A} \end{array}$$

läßt sich nicht kommutativ mit einem Homomorphismus von \mathfrak{T} nach G ergänzen. Dabei ist ι_{α} die in Lemma 2.8 konstruierte Einbettung, $\iota_{\mathfrak{F}}$ und $\iota_{\mathfrak{T}}$ sind die durch die Definition beschriebenen Untergruppeneinbettungen und π ist die kanonische Projektion.

Beweis. Die Untergruppe $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{T}$ ist wie in Lemma 2.8 abzubilden. Da \mathfrak{T} von den Elementen A, B und C erzeugt wird und $A, B \in \mathfrak{F}$ sind, müssen wir zeigen, dass es keine Wahl für $\iota(C)$ aus $\pi^{-1}(C)$ gibt, sodass $\iota(A), \iota(B), \iota(C)$ alle Relationen erfüllen, die $A, B, C \in \mathfrak{T}$ erfüllen.

Gehen wir vom Gegenteil aus. Sei (S, T, b_b, b_i) ein Baumpaard-Diagramm für $\iota(C)$. In \mathfrak{T} hat das minimale Baumpaard-Diagramm für C die Form (U', U', b') , wobei b' eine zyklische Permutation ist. Wir erweitern dieses Diagramm durch Anhängen von Gabeln an jedes Blatt von U' . Diesen Vorgang wiederholen wir, bis wir ein Diagramm der Form (U, U, b) erhalten, bei dem der Baum U den Baum S enthält. Für ein passendes k sind die Blätter

dieses Baumes U dann genau die Nachkommen der Höhe k des linken Kindes der Wurzel und die Nachkommen der Höhe $k + 1$ des rechten Kindes der Wurzel.

Da S ein Teilbaum von U ist, können wir das Diagramm (S, T, b_b, b_i) zu einem Diagramm (U, T', b'_b, b'_i) erweitern und da $\pi(\iota(C)) = C$ ist muss dann $T = S$ und $b_b = b$ sein. Das Element $\iota(C)$ hat also ein Baumpaard-Diagramm der Form (U, U, b, b_i) . Sei V der Baum, der aus U durch Vertauschen des rechten und linken Kindes der Wurzel entsteht. Nach obigen Betrachtungen ist $U \neq V$. Wir rechnen nach, dass das Element $\iota(A)\iota(C)$ ein Baumpaard-Diagramm der Form (U, V, b_1, b_2) hat.

Das Element $AC \in \mathfrak{A}$ hat Ordnung 2. Daher muss auch $\iota(A)\iota(C)$ Ordnung 2 haben. Wir zeigen nun, dass es keine geeignete Wahl für k gibt. Im Fall $k = 0$ ist b_i eine Bijektion auf 2 Ecken. Da C Ordnung 3 hat, muss b_i dann die Identität sein. Dies verträgt sich jedoch nicht mit der Relation $(AC)^2 = 1$.

Nun führen wir den Fall $k = n$ auf den Fall $k = n - 1$ zurück, d.h. wir zeigen: Ist $k = n$ eine geeignete Wahl, dann auch schon $k = n - 1$. Das Diagramm (U, U, b, b_i) ist also das oben beschrieben, bei dem die Blätter von U die n -ten Nachkommen des linken Kindes der Wurzel und die $(n + 1)$ -ten Nachkommen des rechten Kindes sind. Aus den beiden Relationen $(AC)^2 = 1$ und $C^3 = 1$ folgt dann, dass man alle untersten Gabeln reduzieren kann. Die hierfür nötige Argumentation wird exemplarisch für den Fall $k = 2$ in Abbildung 2.9 vorgeführt. \square

Der Beweis dieses Lemmas hat sogar eine stärkere Aussage gezeigt, nämlich dass es keine Einbettung von \mathfrak{A} gibt, die das Element $A \in \mathfrak{A}$ auf $\iota(A)$ abbildet, denn das Element $\iota(B)$ tauchte in der Argumentation gar nicht auf. Dann kann es aber auch keine Einbettung von \mathfrak{A} geben, die A auf ein Konjugat von $\iota(A)$ abbildet. Ist also $k \in S_\Theta$ so ist $k^{-1}\iota(A)k = k^{-1}\iota(A)k\iota(A^{-1})\iota(A)$. Ist also $k' \in S_\Theta$ und $k' \cdot \iota(A)$ das Bild von A unter einer Einbettung von \mathfrak{A} , so ist $k' \notin S_\Theta \cdot S_\Theta^{\iota(A)}$.

Trotz dieses negativen Resultates gibt es in $\text{QAut}(\Theta)$ Untergruppen, die isomorph zu \mathfrak{B} (und somit auch Untergruppen, die isomorph zu \mathfrak{A}) sind. Allerdings verträgt sich die im Folgenden angegebene Einbettung nicht mit der kanonischen Projektion.

2.11 Lemma. *Thompsons Gruppe \mathfrak{B} ist eine Untergruppe von $\text{QAut}(\Theta)$.*

Beweis. Der Beweis dieser Aussage ist eine leichte Variation des Beweises von Lemma 2.8. Wie in diesem Beweis identifizieren wir Ecken des Baumes mit 2-adischen Zahlen, allerdings diesmal mit dem doppelten des Mittelpunktes der 2-adischen Standardintervalle, die die Ecken repräsentieren. Somit haben wir alle 2-adischen Zahlen des offenen Intervalls $(0, 2)$ mit Ecken des Baumes identifiziert. Die Gruppe \mathfrak{B} operiert nun via dieser Identifikation

auf dem Teilbaum bestehend aus der Wurzel, deren linkem Kind und allen Nachkommen dieses Kindes. Der Teilgraph $\Theta_{(\text{rechtes Kind})}$ wird stabilisiert.

Wir müssen nun überprüfen, ob ein Element aus $\varphi \in \mathfrak{A}$ auf diese Weise ein quasi-Automorphismus ist, also nur endlich viele Kanten nicht respektiert. Sei (S, T, b) ein Baumpaard-Diagramm für $\varphi \in \mathfrak{A}$ und S' (bzw. T') der Baum, den man erhält wenn man S (bzw. T) an das linke Kind einer Gabel anhängt. Wir erhalten ein Baumpaard-Diagramm (S', T', b_1, b_2) für $\varphi \in \text{QAut}(\Theta)$, wenn wir b_1 so wählen, dass es auf den ersten Blättern mit b übereinstimmt und das letzte Blatt fixiert und b_2 so wählen, wie es die Identifikation der 2-adischen Zahlen mit den Ecken von Θ vorschreibt. \square

2.3 Präsentierungen für G und G^o .

Ziel dieses Abschnittes ist es, möglichst handliche Präsentierungen für die Gruppe G der quasi-Automorphismen des ebenen binären Wurzelbaumes und die Gruppe G^o der quasi-orientierungserhaltenden quasi-Automorphismen zu entwickeln. Dabei werden wir für die Gruppe G^o eine endliche Präsentation angeben. Ob dies auch für die Gruppe G möglich ist, muss leider offen bleiben, aber dazu später mehr.

Konstruieren wir zunächst eine nichtendliche Präsentation für G . Dazu nutzen wir die im letzten Abschnitt gewonnene Erkenntnis, dass G auf \mathfrak{A} projiziert und der Kern isomorph zu S_∞ ist. In dieser Situation gibt es ein wohlbekanntes Verfahren, aus Präsentierungen der Faktorgruppe und des Kerns eine Präsentation der Gruppe zu konstruieren, wie man zum Beispiel bei [Ro82] nachlesen kann. Es sei

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} Q \rightarrow 1$$

eine exakte Sequenz und es seien $N = \langle Y | S \rangle$, $Q = \langle X | R \rangle$ Präsentierungen von N und Q . Wählen wir nun für jedes $x \in X$ ein Element $g_x \in G$ mit $\pi(g_x) = x$, so erhalten wir als Präsentation für G :

$$G = \langle X, Y | R_N, R_Q, R_C \rangle,$$

wobei R_N, R_Q, R_C für die folgenden Familien von Relationen stehen:

R_N enthält genau die Relationen aus S .

R_Q enthält für jede Relation aus R eine Relation. Ersetzt man in einem $r \in R$ die $x_i \in X$ durch $g_{x_i} \in G$, so erhält man ein Element des Normalteilers N . Es gibt also ein Wort v_r in Y mit $r(g_{x_1}, \dots, g_{x_n}) =_G v_r$. Wir setzen $R_Q = \{r(x_1, \dots, x_n) = v_r | r \in R\}$.

R_C enthält für jedes Paar von Erzeugenden $y \in Y$ und $x \in X$ genau 2 Relationen. Konjugiert man ein Erzeugendes y des Normalteilers mit einem g_x oder seinem Inversen, erhält man wieder ein Element aus

dem Normalteiler. Es gibt also Worte $u_{(x,y)}$ und $u_{(x^{-1},y)}$ in Y , sodass $g_x y g_x^{-1} =_G u_{(x^{-1},y)}$ bzw. $g_x^{-1} y g_x =_G u_{(x,y)}$. Wir setzen $R_C = \{xyx^{-1} = u_{(x^{-1},y)}, x^{-1}yx = u_{(x,y)} \mid x \in X, y \in Y\}$.

Um diese Konstruktion anwenden zu können, benötigen wir also Präsentierungen für S_Θ und für \mathfrak{A} . In Kapitel 2.1.3 haben wir bereits für \mathfrak{A} die Präsentation

$$\mathfrak{A} = \langle A, B, C, D \mid \mathcal{R} \rangle,$$

wobei \mathcal{R} eine Menge aus 14 Relationen ist, angegeben. Wenden wir uns also der Gruppe S_Θ zu. In der Arbeit [Se93] entwickelt Sergiescu Präsentierungen für die Gruppe der Permutationen der Ecken eines Graphen erzeugt durch die Transpositionen von Ecken, die mit einer Kante verbunden sind. Da Θ ein Baum ist, benötigen wir dieses Resultat nicht in der vollen Allgemeinheit, was uns die Einführung einiger Notationen erlaubt. Für den Spezialfall der Bäume liefert diese Arbeit:

2.12 Korollar ([Se93]). *Sei Γ ein (nicht notwendigerweise endlicher) zusammenhängender, lokal-endlicher Baum, $X_\Gamma := E(\Gamma)$ und R_Γ die Vereinigung der Mengen von Relationen*

$$\begin{aligned} R_O &:= \{x^2 = 1 \mid x \in X_\Gamma\} \\ R_K &:= \{(x_1 x_2)^2 = 1 \mid x_1, x_2 \in X_\Gamma \text{ haben keine Ecke gemeinsam}\} \\ R_N &:= \{(x_1 x_2)^3 = 1 \mid x_1, x_2 \in X_\Gamma \text{ haben eine Ecke gemeinsam}\} \\ R_D &:= \{x_1 x_2 x_3 x_1 = x_2 x_3 x_1 x_2 \mid x_1, x_2, x_3 \in X_\Gamma \text{ haben Ecke gemeinsam}\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\langle X_\Gamma \mid R_\Gamma \rangle$ eine Präsentation von S_Γ .

Die Relationen R_O heißen Ordnungsrelationen, die Relationen R_K Kommutativitätsrelationen, die Relationen R_N Nachbarschaftsrelationen und die Relationen R_D Dreibeinrelationen.

Setzen wir $X_\Theta := V(\Theta)$, ergibt sich also für G die Präsentation:

$$G = \langle X_\Theta, A, B, C, D \mid R_O, R_K, R_N, R_D, R_{\mathfrak{A}}, R_C \rangle,$$

wobei die Relationen aus $R_{\mathfrak{A}}$ den mit einem Korrekturterm versehenen Relationen aus \mathcal{R} entsprechen und R_C aus den Konjugationsrelationen wie oben beschrieben besteht. Um dies explizit zu machen, müssen wir Wahlen der Elemente g_x , also von $A, B, C, D \in \text{QAut}(\Theta)$ vornehmen. Dabei achten wir darauf, dass die Wahl von A und B gerade der Untergruppeneinbettung entspricht. Wir wählen die Urbilder so, wie in Abbildung 2.10 beschrieben.

Betrachten wir die nun die Untergruppe G° der quasi-orientierungserhaltenden quasi-Automorphismen. Diese zerfällt als semi-direktes Produkt $S_\infty \rtimes \mathfrak{F}$ und somit ist die Behandlung dieser Gruppe etwas einfacher. Mit

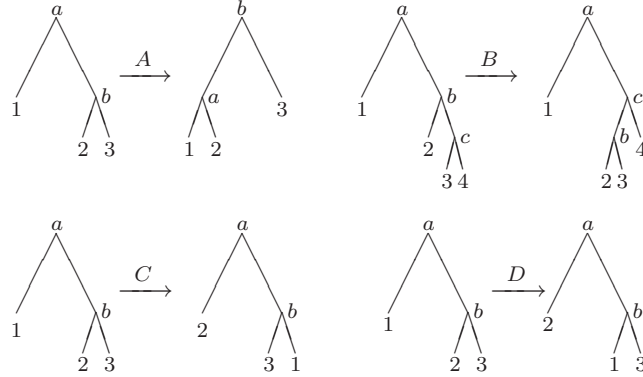


Abbildung 2.10: Baumpaarddiagramme für 4 der Erzeugenden von $\text{QAut}(\Theta)$.

der oben genannten Konstruktion von Präsentierungen einer Gruppenerweiterung erhalten wir

$$G^O = \langle X_\Theta, A, B \mid R_O, R_K, R_N, R_D, R_{\mathfrak{F}}, R'_C \rangle,$$

Dabei sind die Relationenmengen $R_{\mathfrak{F}}$ und R'_C echte Untermengen der Mengen $R_{\mathfrak{A}}$ und R_C (so sind die Mengen $R_{\mathfrak{A}}$ und R_C konstruiert) und die Untergruppeneinbettung ist durch $A \mapsto A$, $B \mapsto B$ und $X_\Theta \ni x \mapsto x$ gegeben. Außerdem entspricht die Relationenmenge $R_{\mathfrak{F}}$ genau den Relationen aus der Präsentation für \mathfrak{F} .

Diese Präsentation wollen wir mittels Tietze-Transformationen in eine endliche Präsentation verwandeln. Dazu benötigen wir das folgende Lemma, welches die hohe Transitivität der Operation der Untergruppe \mathfrak{F} von G beschreibt.

2.13 Lemma. *Die Gruppe \mathfrak{F} operiert für alle $n > 0$ durch quasi-Automorphismen n -fach ordnungserhaltend transitiv auf dem Baum Θ , d.h. gegeben zwei n -Tupel von Ecken (v_1, v_2, \dots, v_n) und (w_1, w_2, \dots, w_n) mit $v_i < v_{i+1}$ und $w_i < w_{i+1}$ für alle i , gibt es ein Element $f \in \mathfrak{F}$ mit $f(v_i) = w_i$.*

Beweis. Zur Illustration betrachten wir zunächst den Fall $n = 1$. Wir konstruieren den kleinsten Teilbaum S von Θ , der v_1 als innere Ecke hat und den kleinsten Teilbaum T , der w_1 als innere Ecke hat. Wir hängen an die Kinder der Ecken v_1 und w_1 so Gabeln an, dass links (rechts) von v_1 genauso viele Blätter liegen wie links (rechts) von w_1 . Die entstehenden Bäume S' und T' bilden ein Baumpaard-Diagramm (S', T') eines Elementes von \mathfrak{F} . Dieses Element, oder besser gesagt das Bild dieses Elementes unter der Einbettung, bildet v_1 auf w_1 ab.

Ganz analog beweist sich der allgemeine Fall. Wir konstruieren die kleinsten Bäume, die v_1, v_2, \dots, v_n bzw. w_1, w_2, \dots, w_n als innere Ecken haben. Dann

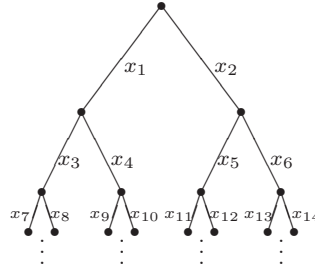


Abbildung 2.11: Die Kanten- resp. Erzeugendennummerierung.

hängen wir solange Gabeln an die Bäume unter die Ecken v_i oder w_i an, bis die Anzahl der Blätter links von v_i der Anzahl der Blätter links von w_i für alle i entspricht. Außerdem muss die Anzahl der Blätter rechts von v_n der Anzahl der Blätter rechts von w_n entsprechen. Dies ergibt ein Baumpaard-Diagramm eines Elementes, welches für alle i die Ecke v_i auf w_i abbildet. \square

Damit wir mit der Präsentation besser arbeiten können, nummerieren wir die Erzeugenden $x \in X_\Theta$, also die Kanten des ebenen binären Wurzelbaumes, von oben nach unten und von links nach rechts durch, d.h. wir setzen $x_1 := (\bullet_{0,1}, \bullet_{1,1})$, $x_2 := (\bullet_{0,1}, \bullet_{1,2})$, $x_3 := (\bullet_{1,1}, \bullet_{2,1})$ usw. (siehe Abbildung 2.11). Im Folgenden sind Argumentationen stets in schwarzer Schrift und vorgenommene Tietze-Transformationen in roter Schrift notiert.

Das Erzeugnis von A und B in G° ist gerade die gemäß Lemma 2.8 eingebettete Untergruppe \mathfrak{F} und operiert nach Lemma 2.13 n -fach ordnungserhaltend transitiv auf Θ für alle n . Der Zentralisator Z von x_1 entspricht gerade dem Stabilisator von $\{\bullet_{0,1}, \bullet_{1,1}\}$ und der Schnitt $U = Z \cap \mathfrak{F}$ ist, wie man leicht nachprüft, isomorph zu $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$, also insbesondere eine endlich erzeugte Untergruppe von $\langle A, B \rangle_{G^\circ}$. Wir wählen ein endliches Erzeugendensystem $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_m\}$ von U und für jedes \tilde{u}_i wählen wir ein Wort $u_i \in (\{A, B\}^\pm)^*$, welches \tilde{u}_i in G° repräsentiert. Dann ist $x_1^{u_i} = x_1$ eine in G° gültige Relation.

TT Wir fügen die Relationenmenge $R_1 := \{x_1^{u_i} = x_1 \mid i = 1, \dots, m\}$ zur Präsentation hinzu.

Durch Konjugation der Relation $x_1^{u_i} = x_1$ mit einem u_j erhält man die Relation $x_1^{u_i u_j} = x_1^{u_j} = x_1$. Durch iteratives Anwenden dieses Argumentes und Verwendung der Relationen aus $R_\mathfrak{F}$ können wir so für alle $w \in (\{A, B\}^\pm)^*$, die ein Element aus U repräsentieren, die Relation $x_1^w = x_1$ aus den endlich vielen Relationen $R_1 \cup R_\mathfrak{F}$ herleiten. Für andere Worte w ist dies auch keine gültige Relation.

Da $\langle A, B \rangle$ auf den Ecken von Θ ordnungserhaltend 2-fach transitiv operiert, operiert es auch transitiv auf den Erzeugenden x_i , d.h. es gibt für alle

i ein Wort $w_i \in (\{A, B\}^\pm)^*$, mit $x_i = x_1^{w_i}$.

TT Wir beseitigen die Erzeugenden $x_i, i \neq 1$ aus der Präsentation, ersetzen x_1 durch x und ersetzen in allen Relationen x_i durch x^{w_i} .

Damit ist bereits gezeigt, dass G^O und auch G endlich erzeugte Gruppen sind. Die Relationen aus R_O haben nun alle die Form $(x^{w_i})^2 = 1$ und folgen somit aus der Relation $x^2 = 1$.

TT Wir entfernen alle Relationen aus R_O außer der Relation $x^2 = 1$.

Die Relationen aus R_K haben die Form $(x^{w_i}x^{w_j})^2 = 1$. Seien a, b die Ecken aus $\text{supp}(x^{w_i})$ und c, d die Ecken aus $\text{supp}(x^{w_j})$. Wir müssen nun unterscheiden, wie die Ecken a, b, c, d bezüglich der Ordnung der Ecken von Θ angeordnet sind. Sei o.B.d.A. $a < b, c < d$ und $a < c$. Dann liegt eine der beiden folgenden Anordnungen vor: $a < b < c < d$ oder $a < c < d < b$ (der Fall $a < c < b < d$ kann nicht auftreten, da a und b durch eine Kante verbunden sind, genauso c und d).

Betrachten wir zunächst den ersten dieser Fälle. Da \mathfrak{F} ordnungserhaltend 4-fach transitiv auf den Ecken von Θ operiert, gibt es ein Wort $v_{i,j}$ mit der Eigenschaft $(x^{w_i})^{v_{i,j}} = x^{w_3}$ und $(x^{w_j})^{v_{i,j}} = x^{w_2}$. Diese Relationen lassen sich auch schreiben als $x^{w_i v_{i,j} w_2^{-1}} = x$ und sind somit Folgerelationen der Relationen aus R_1 . Also folgt die Relation $(x^{w_i}x^{w_j})^2 = 1$ aus den Relationen aus R_1 und der Relation $(x^{w_3}x^{w_2})^2 = 1$. Analog läßt sich im zweiten Fall zeigen, dass die Relation $(x^{w_i}x^{w_j})^2 = 1$ aus $(x^{w_1}x^{w_9})^2 = 1$ folgt.

Insgesamt sind die Relationen aus R_K also alle Folgerelationen von R_1 und

$$R_2 := \{(x^{w_3}x^{w_2})^2 = 1, (x^{w_1}x^{w_9})^2 = 1\}$$

TT Wir entfernen alle Relationen aus R_K außer den Relationen R_2 .

Die analoge Operation ermöglicht es uns, die ordnungserhaltende 3-fache Transitivität zu nutzen, um alle Relationen aus R_N aus einer der Relationen

$$R_3 := \{(xx^{w_2})^3 = 1, (xx^{w_4})^3 = 1, (x^{w_2}x^{w_5})^3 = 1\}$$

abzuleiten bzw. die ordnungserhaltende 4-fache Transitivität, um alle Relationen aus R_D aus einer der Relationen aus

$$R_4 := \{xx^{w_4}x^{w_3}x = x^{w_4}x^{w_3}xx^{w_4} = x^{w_3}xx^{w_4}x^{w_3}, \\ x^{w_2}x^{w_6}x^{w_5}x^{w_2} = x^{w_6}x^{w_5}x^{w_2}x^{w_6} = x^{w_5}x^{w_2}x^{w_6}x^{w_5}\}$$

abzuleiten.

TT Wir ersetzen die Relationen R_N und R_D durch die Relationen R_3 und R_4 .

Die Relationen aus R'_C haben bis auf die 4 Ausnahmen

$$R_5 := \{(x^{w_5})^A = x^{w_3}x^{w_1}x^{w_3}, (x^{w_5})^{A^{-1}} = x^{w_5}x^{w_2}x^{w_5}, \\ (x^{w_{10}})^B = x^{w_8}x^{w_6}x^{w_8}, (x^{w_8})^{B^{-1}} = x^{w_{10}}x^{w_7}x^{w_{10}}\}$$

alle die Form $x^{w_i} = x^{w_j}$, sind also konjugiert zu Relationen $x^{w_i w_j^{-1}} = x$, die sich aus den Relationen R_1 und $R_{\mathfrak{F}}$ ableiten lassen.

TT Wir ersetzen die Relationen R'_C durch die Relationen R_5 .

Somit haben wir für den Satz bewiesen:

2.14 Satz. *Die Gruppe der quasi-orientierungserhaltenden quasi-Automorphismen wird durch die endliche Präsentation*

$$G^o = \langle x, A, B \mid x^2 = 1, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_{\mathfrak{F}} \rangle,$$

mit den oben definierten Relationenmengen R_1, R_2, R_3, R_4 und $R_{\mathfrak{F}}$ beschrieben.

Das für diesen Satz verwendete Verfahren, aus einer Präsentation des Normalteilers und einer Präsentation der Faktorgruppe eine Präsentation für die Gruppe zu konstruieren, wurde von Baik, Harlander und Pride in [BaHP98] auf 3-Präsentierungen verallgemeinert. Durch die hochtransitive Operation der von A und B erzeugten Untergruppe würde diese Methode aus einer 3-Präsentierung der S_∞ und der endlichen 3-Präsentierung von \mathfrak{F} auch eine endliche 3-Präsentierung für G^o konstruieren. Wir wollen darauf aber hier nicht näher eingehen, da die Resultate des folgenden Abschnittes zumindest die Existenz einer solchen 3-Präsentierung implizieren.

Doch zurück zur Gruppe G . Sämtliche Tietze-Transformationen, die wir auf die Präsentation von G^o angewendet haben, können wir auch auf die oben gegebene Präsentation für G anwenden, da die ursprüngliche Präsentation der Untergruppe G^o eine Teilpräsentierung der Präsentation für G ist. Dadurch erhalten wir für G die (immer noch unendliche) Präsentation

$$G = \langle x, A, B, C, D \mid x^2 = 1, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_{\mathfrak{F}}, (x^{w_i})^C = x^{w_{j(i)}}, \\ (x^{w_i})^{C^{-1}} = x^{w_{k(i)}}, (x^{w_i})^D = x^{w_{l(i)}}, (x^{w_i})^{D^{-1}} = x^{w_{m(i)}} \rangle,$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und geeignete Funktionen $j, k, l, m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Hierbei bilden nur noch die Relationen, die die Konjugationen eines σ^{w_i} mit einem der Elemente $C^{\pm 1}$ oder $D^{\pm 1}$ beschreiben, eine unendliche Familie. Die Frage,

ob sich diese Präsentation in eine endliche umformen läßt muss hier unbeantwortet bleiben. Allerdings zeigt diese Präsentation zumindest, dass G endlich erzeugt ist.

In einem allgemeinerem Kontext stellt sich die folgende Frage: Gegeben sei eine Gruppenerweiterung $N \twoheadrightarrow G_1 \twoheadrightarrow Q_1$ eines Normalteilers N mit einer endlich präsentierten Faktorgruppe Q_1 und diese habe eine endlich präsentierte Untergruppe Q_2 , die in G_1 (mit der Projektion verträglich) einbettet und die Untergruppe $N \rtimes G_2$ sei endlich präsentiert. Dann ist G_1 zumindest endlich erzeugt. Unter welchen Voraussetzungen an den Normalteiler N (z.B. lokal endlich?) und an Q_1 bzw. die Einbettung $Q_2 \hookrightarrow Q_1$ lassen sich darüber hinausgehende Endlichkeitsaussagen über G_1 treffen?

2.4 Endlichkeitseigenschaften von G^o .

Über die Untergruppe G^o der quasi-ordnungserhaltenden quasi-Automorphismen lassen sich noch stärkere Endlichkeitsaussagen treffen. Der Schlüssel hierzu ist Browns Kriterium, das Brown in [Br87] vorstellte und mit dessen Hilfe dort unter anderem nachgewiesen wird, dass Thompsons Gruppen \mathfrak{F} , \mathfrak{T} und \mathfrak{V} vom Typ FP_∞ sind. Dem Buch [G08] kann man eine Variante dieses Beweises für \mathfrak{F} entnehmen, der den hier geführten Beweis inspiriert hat. Wir zitieren zunächst Browns Kriterium.

2.15 Satz. (Browns Kriterium, [Br87]) *Sei G eine Gruppe. Wenn ein N -filtrierter (links-) G -Komplex $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} X_j$ mit den Eigenschaften*

- X ist zusammenziehbar.
- Alle Zellenstabilisatoren sind vom Typ FP_∞ .
- Alle Faktorkomplexe $G \setminus X_j$ sind endlich.
- Für $j \rightarrow \infty$ geht der Zusammenhang des Paares (X_{j+1}, X_j) gegen unendlich.

existiert, dann ist G endlich präsentiert und vom Typ FP_∞ .

Wir wollen nun zeigen, dass die Gruppe G^o der quasi-ordnungserhaltenden quasi-Automorphismen des binären Wurzelbaumes vom Typ FP_∞ ist. Ziel ist es also einen Komplex X zu konstruieren, der die obigen vier Bedingungen erfüllt. Sei dazu wie gehabt \mathcal{T} die Menge der endlichen binären Bäume. Seien $S, T \in \mathcal{T}$, $g \in G^o$. Wir sagen: (S, T) trägt g , wenn es mit passenden Markierungen b_b, b_i ein Baumpaard-Diagramm (S, T, b_b, b_i) für g gibt.

Wir benötigen für die Bäume $S \in \mathcal{T}$ eine Bezeichnung für die inneren Ecken und die Blätter. Die Ecken von Θ haben wir im Kapitel 2.1.1 mit einer Ordnung versehen. Diese Ordnung induziert eine Ordnung der Ecken

von S . Wenn wir künftig von der i -ten inneren Ecke oder dem i -ten Blatt eines endlichen Baumes sprechen, so meinen wir stets die bezüglich dieser Ordnung i -te innere Ecke oder das bezüglich dieser Ordnung i -te Blatt.

Kommen wir nun zu der Konstruktion unseres Komplexes.

2.16 Lemma. *Auf $G^o \times \mathcal{T}$ definiert*

$$(g, T) \sim (h, S) :\Leftrightarrow (S, T) \text{ tr\"agt } h^{-1}g$$

eine \u00c4quivalenzrelation.

Beweis. Die Reflexivit\u00e4t und die Symmetrie folgen unmittelbar aus der Definition. Zu zeigen bleibt nur die Transitivit\u00e4t: Sei $(g_1, T_1) \sim (g_2, T_2) \sim (g_3, T_3)$. Das hei\u00dft (T_1, T_2) tr\u00e4gt $g_1^{-1}g_2$ und (T_2, T_3) tr\u00e4gt $g_2^{-1}g_3$. Dann tr\u00e4gt (T_1, T_3) auch das Produkt $(g_1^{-1}g_2)(g_2^{-1}g_3) = g_1^{-1}g_3$. \square

Sei $B := G^o \times \mathcal{T} / \sim$. Wir schreiben die \u00c4quivalenzklasse von (g, T) als $[g, T]$. Aus dieser Menge werden wir den gesuchten Komplex konstruieren. Dazu zun\u00e4chst einige Beobachtungen.

2.17 Lemma. *Die Menge $B = G^o \times \mathcal{T} / \sim$ ist mittels $g[h, T] := [gh, T]$ eine (links-) G^o -Menge.*

Beweis. Zu zeigen ist nur die Wohldefiniertheit:

$$\begin{aligned} (h_1, T_1) \sim (h_2, T_2) &\Leftrightarrow (T_1, T_2) \text{ tr\"agt } h_1^{-1}h_2 \\ &\Leftrightarrow (T_1, T_2) \text{ tr\"agt } (h_1^{-1}g^{-1})(gh_2) \\ &\Leftrightarrow (gh_1, T_1) \sim (gh_2, T_2) \end{aligned}$$

\square

Damit ein Paar aus zwei B\u00e4umen ein Element der Gruppe tragen kann, m\u00fcssen diese beiden B\u00e4ume nach Definition die gleiche Anzahl Bl\u00e4tter besitzen. Deshalb folgt aus $(g_1, T_1) \sim (g_2, T_2)$, dass T_1 und T_2 gleich viele Bl\u00e4tter haben. Wir k\u00f6nnen also die Menge B nach der Anzahl der Bl\u00e4tter der Baumkomponente filtrieren: Sei \mathcal{T}_n die Menge aller n -bl\u00e4ttrigen bin\u00e4ren B\u00e4ume und $B_n := \{[g, T] \mid T \in \cup_{j=1}^n \mathcal{T}_j\}$. Dann ist B die Vereinigung $\bigcup_{j=2}^{\infty} B_j$. Diese Filtrierung ist offensichtlich G^o -invariant.

2.18 Lemma. *F\u00fcr $[g, T] \in B_n - B_{n-1}$ gilt: $\text{Stab}([g, T]) \cong S_{n-1}$.*

Beweis. $[hg, T] = [g, T] \Rightarrow (T, T)$ tr\u00e4gt $g^{-1}hg$. \square

Sei e_i die Erweiterung eines Baumes am i -ten Blatt, d.h. $e_i(T)$ ist der Baum, der entsteht, wenn man am i -ten Blatt von T eine Gabel anh\u00e4ngt. Diese Erweiterung induziert f\u00fcr $k \geq i$ eine Abbildung von B_k nach B_{k+1} .

2.19 Lemma. *Die Abbildung $E_i : B - B_{i-1} \rightarrow B$, $[g, T] \mapsto [g, e_i(T)]$ ist wohldefiniert und eine G^o -Abbildung.*

Beweis. Die Menge der von (T_1, T_2) getragenen Elemente ist eine echte Teilmenge der von $(e_i(T_1), e_i(T_2))$ getragenen Elemente. Die G^o -Äquivarianz ist offensichtlich. \square

2.20 Definition. Auf B definieren wir die folgende partielle Ordnung: $[g, S] < [h, T] :\Leftrightarrow \exists i_1 \dots i_k$ sodass $[h, T] = E_{i_k} \dots E_{i_1} [g, S]$.

Zu jeder partiell geordneten Menge ist ein Simplizialkomplex assoziiert, dessen n -Simplizes aus aufsteigenden n -Ketten dieser Menge bestehen. $|B|$ ist die geometrische Realisierung des zu B assoziierten Simplizialkomplexes.

Da die Gruppe G^o auf B ordnungserhaltend operiert, operiert sie auch auf $|B|$. Die Filtrierung von B induziert auf natürliche Weise eine Filtrierung von $|B|$: Sei $|B_n|$ der zu B_n assoziierte Simplizialkomplex, dann gilt $|B| = \bigcup_{j=2}^{\infty} |B_j|$. Da die G^o -Operation die Filtrierung von B respektiert, respektiert sie auch die Filtrierung von $|B|$. Damit haben wir einen guten Kandidaten gefunden, um Browns Kriterium anzuwenden, indem wir für $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} |B_j|$ den Komplex $|B| = \bigcup_{j=0}^{\infty} |B_{j+2}|$ einsetzen. Ist ein Simplex in $|B_k|$ aber nicht in $|B_{k-1}|$ enthalten, so sagen wir der Simplex hat die *Höhe* k .

2.21 Lemma. B ist eine gerichtete Menge, d.h. für alle $[h_1, T_1], [h_2, T_2] \in B$ existiert ein $[i, U] \in B$ sodass $[h_1, T_1] < [i, U]$ und $[h_2, T_2] < [i, U]$. Insbesondere ist der Simplizialkomplex $|B|$ zusammenziehbar.

Beweis. Seien $S_1, S_2 \in \mathcal{T}$. Wenn (S_1, S_2) das Element $g \in G^o$ trägt, dann ist $[g, S_2] = [1, S_1]$. Wählen wir S_1, S_2 so, dass S_2 eine Erweiterung von S_1 ist (dies ist stets möglich), so folgt, $[g, S] < [1, S_1]$. Es gibt also für jedes Element $[g, S]$ einen Baum S' mit $[g, S] < [1, S']$. Zu zeigen bleibt also: Für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ existiert ein $T \in \mathcal{T}$ mit $[1, T_i] < [1, T], i = 1, 2$. Dies ist offensichtlich wahr. \square

Somit ist die erste der Bedingungen von Browns Kriterium erfüllt. Lemma 2.18 lässt sich zu der Aussage umformulieren, dass der Stabilisator von 0-Simplizes unter der G^o -Operation endlich ist. Da die Operation auf den 0-Simplizes die Filtrierung respektiert und jeder Simplex höchstens einen 0-Simplex einer gegebenen Höhe enthält, kann ein Simplex nur unter der G^o -Operation stabilisiert werden, wenn alle 0-Simplizes im Rand des Simplexes stabilisiert werden. Somit sind alle Stabilisatoren von Simplizes endlich und die zweite Bedingung von Browns Kriterium ist erfüllt.

2.22 Lemma. Der Simplizialkomplex $G^o \setminus |B_n|$ ist endlich.

Beweis. Die G^o -Bahn von $[h, S]$ enthält immer $[1, S]$. Es gibt nur endlich viele Bäume mit n oder weniger Blättern, deswegen hat $G^o \setminus |B_n|$ nur endlich viele 0-Simplizes. Dann muss $G^o \setminus |B_n|$ insgesamt endlich sein. \square

Somit bleibt nur noch die letzte Bedingung aus Browns Kriterium zu zeigen, nämlich, dass für $j \rightarrow \infty$ der Zusammenhang des Paares (X_{j+1}, X_j)

gegen unendlich geht. Um diesen Zusammenhang des CW-Paares zu verstehen, ist es nötig, sich mit dem Link eines 0-Simplexes b auf Höhe $j + 1$ in X_{j+1} zu beschäftigen. Wir nennen den Link von b im Teilkomplex aller Simplexes von Höhe kleiner oder gleich der Höhe von b , den absteigenden Link von b . Nach Konstruktion von $|B|$ entspricht dieser gerade dem Teilkomplex $|B_{<b}|$ bestehend aus allen Ketten, deren Glieder kleiner als b sind.

Dies wirft die Frage auf, welche Äquivalenzklassen denn kleiner als eine gegebene Klasse $[g, T] \in B$ sind und welche maximal mit dieser Eigenschaft sind. Dazu definieren wir Abbildungen $D_i : B - B_i \rightarrow \mathcal{P}(B)$ wie folgt: $[h, S] \in D_i([g, T]) \Leftrightarrow E_i([h, S]) = [g, T]$. Mit anderen Worten: Die Abbildung D_i bildet eine Klasse $[g, T]$ auf die Menge der E_i -Urbilder von $[g, T]$ ab.

Wenn $T \in \mathcal{T}$ ein Baum ist, bei dem das i -te und das $(i + 1)$ -te Blatt Teil derselben Gabel sind, dann sei mit $d_i(T)$ der Baum $S \in \mathcal{T}$ bezeichnet, der aus T durch Entfernen dieser Gabel entsteht. Es gilt also: $d_i(e_i(S)) = S$.

Sei $T \in \mathcal{T}_n$. Dann enthält T genau $n - 1$ innere Ecken und wir definieren:

2.23 Definition. Die Menge der $T \in \mathcal{T}_n$, bei denen das i -te und $(i + 1)$ -te Blatt Teil derselben Gabel sind, wird mit $\mathcal{T}_{n,i}$ bezeichnet. Mit anderen Worten $\mathcal{T}_{n,i} := e_i(\mathcal{T}) \cap \mathcal{T}_n = e_i(\mathcal{T}_{n-1})$.

Wir beschreiben nun die Schnitte der Mengen $\mathcal{T}_{n,i}$ für konstantes n .

2.24 Lemma. Seien $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n - 1\}$. Dann gilt: $\bigcap_{j=1}^k \mathcal{T}_{n,i_j} \neq \emptyset \iff \forall l, m \in \{1, \dots, k\}$ ist $|i_l - i_m| \neq 1$.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $T \in \mathcal{T}_{n,i} \cap \mathcal{T}_{n,i+1}$. Dann sind in T das i -te, das $(i + 1)$ -te und das $(i + 2)$ -te Blatt Teil der selben Gabel. Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, dass eine Gabel höchstens zwei Blätter enthält.

„ \Leftarrow “: Ein Baum T im Schnitt kann leicht konstruiert werden: Wir beginnen mit n Blättern und verbinden jeweils das (i_j) -te und $(i_j + 1)$ -te Blatt durch eine Gabel. Die verbleibenden Zusammenhangskomponenten werden durch passende Gabeln verbunden. \square

Das folgende Lemma beschreibt $D_i([g, T])$.

2.25 Lemma. Sei $g \in G^o$, $T \in \mathcal{T}_n$. Dann gibt es für jeden Baum $T_i \in \mathcal{T}_{n,i}$ ein $g_i \in G^o$ mit $[g, T] = [g_i, T_i]$, sodass $D_i([g, T])$ aus den Elementen $[g_i h_{i,j}, d_i(T_i)]$ für $j = 1 \dots (n - 1)$ besteht. Dabei sind die Gruppenelemente $h_{i,j}$ Repräsentanten der Linksnebenklassen von $S_{d_i(T_i)}$ in der Gruppe S_{T_i} .

Beweis. Sei $T_i \in \mathcal{T}_{n,i}$ und $g_i \in G^o$ so, dass $[g_i, T_i] = [g, T]$ ist. Sei $[h', T'] \in D_i([g, T])$. Dann ist T' ein Baum mit $n - 1$ Blättern, also existiert ein $h \in G^o$, sodass $[h', T'] = [h, d_i(T_i)]$ ist.

Da $[h, d_i(T_i)] \in D_i([g, T])$ ist, muss $e_i[h, d_i(T_i)] = [h, T_i] = [g_i, T_i]$ sein. Das heißt aber, dass $g_i^{-1}h$ von (T_i, T_i) getragen wird und somit $g_i^{-1}h \in S_{T_i}$ ist. Daraus folgt, dass h in $g_i \cdot S_{T_i}$ liegt und es Elemente k_j gibt, sodass

$D_i[g, T]$ aus Elementen $[g_i k_j, d_i(T_i)]$ besteht. Dabei sind die Elemente $k_j \in S_{T_i}$.

Des weiteren gilt für $\hat{h} \in S_{d_i(T_i)}$ ist $[h\hat{h}, d_i(T_i)] = [h, d_i(T_i)]$, d.h. wenn k_{j_1} und k_{j_2} in derselben Linksnebenklasse von $S_{d_i(T_i)}$ liegen, ist $[g_i k_{j_1}, d_i(T_i)] = [g_i k_{j_2}, d_i(T_i)]$. Wenn also $\{h_{i,1}, \dots, h_{i,n}\}$ ein Repräsentantensystem für die Linksnebenklassen von $S_{d_i(T_i)}$ in S_{T_i} ist, dann gilt: $D_i[g, T] = \{[g_i h_{i,j}, d_i(T_i)] \mid j = 1, \dots, n\}$. \square

Die Gabel, die das i -te und $(i+1)$ -te Blatt enthält, ist stets an der i -ten inneren Ecke aufgehängt. Somit kann man für $h_{i,j}$ stets die Transposition der i -ten und der j -ten inneren Ecke ($i \leftrightarrow j$), bzw. für $h_{i,i}$ die Identität wählen.

Um mit Hilfe dieser Einsicht den Link zu analysieren, nutzen wir eine in der Topologie wohlbekanntere Tatsache über den Nerv einer Überdeckung:

2.26 Definition. Sei $\mathcal{U} = \{X_\alpha\}$ eine Überdeckung eines CW-Komplexes X durch Teilkomplexe. Der *Nerv* von \mathcal{U} ist der Simplizialkomplex $N(\mathcal{U})$, bestehend aus einem Vertex v_α für jedes X_α , in dem die Vertices $\{v_{\alpha_0}, \dots, v_{\alpha_k}\}$ genau dann einen Simplex bilden, wenn $\bigcap_{i=0}^k X_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

2.27 Lemma. Sei $\mathcal{U} = \{X_\alpha\}$ eine endliche Überdeckung von X . Wenn für alle Teilmengen $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ gilt, dass $\bigcap_{i=0}^k X_{\alpha_i}$ zusammenziehbar oder leer ist, dann sind X und $N(\mathcal{U})$ homotopieäquivalent.

Beweis. (Siehe zum Beispiel [G08] Satz 7.8.20) \square

2.28 Lemma. Sei T ein Baum mit $n > 2$ Blättern. Der absteigende Link eines 0-Simplexes $[g, T]$, $|B_{<[g,T]}|$ ist homotopieäquivalent zu dem folgenden Komplex $L_n: L_n^0 = \{1, 2, \dots, n-1\} \times \{1, 2, \dots, n-1\}$ und die Ecken $(k_1, l_1), \dots, (k_m, l_m)$ spannen einen Simplex auf wenn für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt: $k_i \notin \{k_j - 1, k_j, k_j + 1\}$ und $l_i \neq l_j$.

Beweis. Aufgrund der G -Äquivarianz der Konstruktionen, reicht es aus, den Fall $g = 1$ zu betrachten. Der Komplex $|B_{<[1,T]}|$ wird überdeckt durch die Komplexe $|B_{\leq D_k([1,T])}|, k = 1, \dots, (n-1)$. Wie in Lemma 2.25 sei $T_k \in \mathcal{T}_{n,k}$, $g_k \in G^{\mathcal{O}}$ so, dass $[g_k, T_k] = [1, T]$ und $h_{k,l}$ die Transposition der k -ten und l -ten Ecke in T_k ist. Dann wird $|B_{\leq D_k([1,T])}|$ von den $n-1$ Komplexen $|B_{\leq [g_k h_{k,l}, d_k(T_k)]}|$ mit $l = 1, \dots, (n-1)$ überdeckt.

Im weiteren Verlauf des Beweises wird es häufiger nötig sein, den Baum T_k geeignet zu wählen. Deshalb ist es wichtig, eine kanonische Wahl der Elemente $g_k \in G^{\mathcal{O}}$ vorzunehmen. Da $[g_k, T_k] = [1, T]$ sein soll, ist es möglich, g_k aus $\mathfrak{F} < G^{\mathcal{O}}$ zu wählen. Diese Definition ermöglicht eine Bezeichnung der Nebenklassen, die unabhängig von der Wahl der T_k ist, in dem Sinne, dass für $g_k, g'_k \in \mathfrak{F}$ und $T_k, T'_k \in \mathcal{T}_{n,k}$ mit $[g_k, T_k] = [g'_k, T'_k]$ auch $[g_k(k \leftrightarrow l), d_k(T_k)] = [g'_k(k \leftrightarrow l), d_k(T'_k)]$ ist.

Sei nun $(k, l) := |B_{\leq [g_k(k \leftrightarrow l), d_k(T_k)]}|$. Wir wollen nun Lemma 2.27 anwenden. Bei jedem der Komplexe (k, l) handelt es sich um einen Kegel, also einen zusammenziehbaren Komplex. Wir werden mit Behauptung 4 zeigen, dass auch die Schnitte von solchen Komplexen zusammenziehbar sind, wenn sie nicht leer sind. Wir können also (k, l) als 0-Zellen eines zu $B_{< [1, T]}$ homotopieäquivalenten Simplicialkomplex auffassen. Um festzustellen, wann in diesem Komplex die Ecken $\{(k_1, l_1), \dots, (k_m, l_m)\}$ einen Simplex aufspannen, bedarf es einer Analyse von Schnitten der zugrunde liegenden Teilkomplexe. Dies geschieht in den folgenden Behauptungen:

Behauptung 1: Für alle $k, l_1 \neq l_2 \in \{1, \dots, n-1\}$ gilt: $(k, l_1) \cap (k, l_2) = \emptyset$.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition. Sei $[h, S] \in (k, l_1) \cap (k, l_2)$. Das bedeutet für $i = 1, 2$ ist $[h, S] < [g_k(k \leftrightarrow l_i), d_k(T_k)]$. O.B.d.A. sei S ein Teilbaum von $d_k(T_k)$. Dann gibt es i_1, \dots, i_j , sodass $E_{i_j} E_{i_{j-1}} \dots E_{i_1} [h, S] = [h, d_k(T_k)]$. Es folgt $g_k(k \leftrightarrow l_1) S_{d_k(T_k)} = h S_{d_k(T_k)} = g_k(k \leftrightarrow l_2) S_{d_k(T_k)}$ und somit $l_1 = l_2$.

Behauptung 2: Für alle $l_1, l_2 \in \{1, \dots, (n-1)\}$ und $k \in \{1, \dots, (n-2)\}$ gilt: $(k, l_1) \cap (k+1, l_2) = \emptyset$.

Sei $[h, S] \in (k, l_1) \cap (k+1, l_2)$ und o.B.d.A. S ein Teilbaum von $d_k(T_k)$ und von $d_{k+1}(T_{k+1})$. Dann gibt es i_1, \dots, i_j , sodass $E_k E_{i_j} E_{i_{j-1}} \dots E_{i_1} [h, S] = [h, T_k] = [1, T]$. Das Element $1^{-1}h = h$ wird also von $[T, T_k]$ getragen. Analog gilt, dass h von $[T, T_{k+1}]$ getragen wird. Also ist $T_k = T_{k+1}$ und somit gilt $T_k \in \mathcal{T}_{n,k} \cap \mathcal{T}_{n,k+1}$. Lemma 2.24 verbietet dies jedoch.

Behauptung 3: Für alle $l, k_1 \neq k_2$ gilt: $(k_1, l) \cap (k_2, l) = \emptyset$.

Sei $[h, S] \in (k_1, l) \cap (k_2, l)$. Ist $k_1 = k_2 \pm 1$ so folgt die Behauptung bereits aus Behauptung 2. Sei deshalb o.B.d.A. $k_1 \neq k_2 \pm 1$. Sei weiterhin o.B.d.A. $T_{k_1} = T_{k_2} =: T_k$ und S ein Teilbaum von $d_{k_1}(T_k)$ und von $d_{k_2}(T_k)$. Dann ist $h \in (k_1 \leftrightarrow l) S_{d_{k_1}(T_k)}$ und $h \in (k_2 \leftrightarrow l) S_{d_{k_2}(T_k)}$. Also ist h eine Bijektion, die sowohl die k_1 -te innere Ecke als auch die k_2 -te innere Ecke auf l abbildet und somit $k_1 = k_2$.

Behauptung 4: Wenn für alle $1 \leq i, j \leq m$ gilt: $k_i \notin k_j - 1, k_j, k_j + 1$ und $l_i \neq l_j$, dann ist $\bigcap_{i=1}^m (k_i, l_i) \neq \emptyset$. Dieser Schnitt ist zusammenziehbar.

Sei o.B.d.A. $k_1 < k_2 < \dots < k_m$. Nach Lemma 2.24 gibt es ein $S \in \bigcap_{i=1}^m \mathcal{T}_{n,k_i}$. Sei $h \in \mathfrak{F} < G^o$ so, dass $[h, S] = [1, T]$. Sei σ eine Permutation, die für alle i das Element k_i auf l_i abbildet. Dann ist $[h\sigma, d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m} S] \in \bigcap_{i=1}^m (k_i, l_i)$. Damit ist auch $B_{\leq [h\sigma, d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m} S]}$ im Schnitt enthalten.

Sei nun $[f, U] \in \bigcap_{i=1}^m (k_i, l_i)$. Dann gibt es einen Baum $S' \in \mathcal{T}_n$ und für jedes $i = 1, \dots, m$ eine Folge a^i von Erweiterungen sodass $e_{k_i} a_i(U) = S'$ ist. Also ist $S' \in \bigcap_{i=1}^m \mathcal{T}_{n,k_i}$ und U ein Teilbaum von $d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}(S')$. Somit ist $[f, U] < [f, d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}(S')]$. Sei $\tilde{f} \in \mathfrak{F} < G^o$ und $\tau \in S_{S'}$ so, dass $\tilde{f}\tau = f$. Da $[\tilde{f}, S'] = [1, T] = [h, S]$ ist auch $[\tilde{f}, d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}(S')] = [h, d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}(S)]$. Außerdem müssen τ und σ sich entsprechende Nebenklassen von $d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}(S)$ bzw. (S') in S bzw. S' repräsentieren. Somit

ist $\bigcap_{i=1}^m \mathcal{T}_{n,k_i} = B_{\leq [h\sigma, d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_m}(s)]}$, also ein Kegel und somit zusammenziehbar. \square

Die Zusammenhangseigenschaften des absteigenden Links eines Elementes $[g, T]$ lassen sich also an den Zusammenhangseigenschaften des Komplexes L_n ablesen. Für diese gilt:

2.29 Lemma. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $N(k) \in \mathbb{N}$, sodass für $n > N(k)$ der Komplex L_n k -zusammenhängend ist.*

Beweis. Wir beweisen die folgende stärkere Aussage durch vollständige Induktion:

Behauptung Es gibt Funktionen $N, M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass für $n > N(k)$ das k -Gerüst L_n^k unter einer Homotopie 0-homotop in L_n ist, die jedes k -Simplex nur innerhalb eines von höchstens $M(k)$ Ecken aufgespannten Unterkomplex von L_n bewegt.

Wir setzen $N(0) = 8$ und $M(0) = 3$. Für $n \geq 8$ können in L_n beliebige Ecken verbunden werden: Um die Ecken (k_1, l_1) und (k_2, l_2) (o.B.d.A. sei $k_1 \leq k_2$) zu verbinden müssen 2 Fälle unterschieden werden, erstens $k_1 \in \{k_2 - 1, k_2\}$ und zweitens $k_1 \notin \{k_2 - 1, k_2\}$. Im ersten Fall wählen wir $k_3 \in \{1, \dots, 7\} - \{k_1 - 1, k_2 - 1, k_2, k_2 + 1\}$ und $l_3 \in \{1, \dots, 7\} - \{l_1, l_2\}$. Dann spannen sowohl (k_1, l_1) und (k_3, l_3) als auch (k_3, l_3) und (k_2, l_2) einen Simplex auf. Der zweite Fall zerfällt in 2 Unterfälle: $l_1 \neq l_2$, in diesem Fall spannen (k_1, l_1) und (k_2, l_2) bereits einen Simplex auf, und den Fall $l_1 = l_2$. In diesem Fall wählen wir $k_3 \in \{1, \dots, 7\} - \{k_1 - 1, k_1, k_1 + 1, k_2 - 1, k_2, k_2 + 1\}$ und $l_3 \in \{1, \dots, 7\} - \{l_1\}$. Wieder spannen sowohl (k_1, l_1) und (k_3, l_3) als auch (k_3, l_3) und (k_2, l_2) einen Simplex auf.

Sei nun $N(k-1)$ und $M(k-1)$ bereits so definiert, dass die Behauptung für $k-1$ gilt. Sei $n > N(k-1)$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine 0-Homotopie von L_n^{k-1} , die jede $(k-1)$ -Zelle nur innerhalb eines von $M(k-1)$ Ecken getragenen Teilkomplexes abbildet. Diese Homotopie wollen wir auf L_n^k fortsetzen. Sei dazu σ ein beliebiges k -Simplex in L_n . Der Rand $\partial\sigma$ ist in einem Teilkomplex Σ , der höchstens von $s = (k+1)M(k-1)$ aufgespannt wird, 0-homotop. Ist $n \geq 3s + 2$, so gibt es eine Ecke v , in deren Link $Lk(v)$ der Komplex Σ enthalten ist. Der von Σ und v aufgespannte Komplex ist also ein Kegel mit Kegelpunkt v , in diesem kann die Homotopie des $k-1$ -Gerüstes auf die Zelle σ fortgesetzt werden. Somit ist die Aussage für $N(k) = \max\{N(k-1), 3(k+1)M(k-1) + 2\}$ und $M(k) = (k+1)M(k-1) + 1$ bewiesen. \square

Damit haben wir die Vorbereitungen abgeschlossen, die nötig sind um den angekündigten Satz über die Endlichkeitseigenschaften von G^o zu zeigen.

2.30 Satz. *Die Gruppe G^o der quasi-ordnungserhaltenden quasi-Automorphismen ist vom Typ FP_∞*

Beweis. Wir wenden Browns Kriterium (Satz 2.15) auf den Komplex $|B| = \bigcup |B_n|$ an. Die ersten drei Bedingungen wurden bereits nachgewiesen. Für $n > N(k)$ ist das Paar (B_{n+1}, B_n) nach Lemma 2.28 und Lemma 2.29 k -zusammenhängend. Also geht der Zusammenhang mit wachsendem n gegen unendlich. \square

2.5 Das co-Wort-Problem.

Das Studium von Wort-Problemen in Gruppen geht auf Max Dehns Arbeit [D10] zurück und ist eines der klassischen Themen der kombinatorischen Gruppentheorie. Gegeben sei eine Gruppe G und ein endliches (unter Bildung von Inversen abgeschlossenes) Erzeugendensystem X . Die kanonische Projektion $\pi : X^* \rightarrow G$ bildet den freien Monoid über X auf die Gruppe G ab.

Das Wort-Problem besteht nun darin, zu entscheiden, ob ein Wort aus X^* im Kern von π liegt, also in G die Identität repräsentiert, oder nicht. Seit damals konnten sehr viele Resultate über Wort-Probleme bewiesen werden, z.B.: Es existieren Gruppen mit unlösbarem Wort-Problem [N55]; das Wort-Problem einer Gruppe G ist genau dann lösbar, wenn G in eine einfache Gruppe eingebettet werden kann, die in eine endlich erzeugte Gruppe eingebettet ist [BoHi74].

Später wurde dann formal das Wort-Problem einer Gruppe in Bezug auf ein Erzeugendensystem als die Menge aller Wörter definiert, die die Identität in der Gruppe repräsentieren, also $W(G; X) := \pi^{-1}(1_G)$. Das ursprüngliche Wort-Problem im Dehnschen Sinne wird damit zur Frage: Gegeben ein $w \in X^*$, ist $w \in W(G; X)$. Diese Definition erlaubt ein konkreteres Studium der Komplexität des Wort-Problems und das wohl berühmteste Ergebnis in dieser Frage ist der Satz von Muller und Schupp [MSp83]: Das Wort-Problem einer endlich erzeugten Gruppe ist genau dann eine kontextfreie Sprache, wenn die Gruppe virtuell frei ist.

Es ist eine in der Informatik wohlbekannte Tatsache, dass die kontextfreien Sprachen genau die Sprachen sind, die sich mit einem nicht-deterministischen Kellerautomaten (=NDPA für non-deterministic pushdown automaton) erkennen lassen. Ein solcher NDPA ist ein nicht-deterministischer endlicher Automat mit einem zusätzlichen Stack auf dessen obersten Speicherplatz der Automat lesend, schreibend, einfügend oder löschend zugreifen kann. Eine präzise Definition und die Diskussion der verschiedenen gängigen, äquivalenten Definitionen findet sich zum Beispiel in [Gi66].

Das co-Wort-Problem $coW(G; X)$ ist definiert als das Komplement des Wort-Problems und wurde erstmals von Holt, Reese, Röver und Thomas in [HRRT05] untersucht. Dort wird gezeigt, dass die Frage, ob das co-Wort-Problem kontextfrei ist, von der Wahl des endlichen Erzeugendensystems unabhängig ist. Außerdem wird gezeigt, dass die Klasse der Gruppen mit

kontextfreiem co-Wort-Problem abgeschlossen ist unter Bildung des direkten Produktes und des Standard-Kranzproduktes über einer virtuell freien Gruppe sowie dem Übergang zu endlich erzeugten Unter- und endlichem Index Obergruppen.

In der Arbeit von Muller und Schupp [MSp83] wird auch bewiesen, dass das Wort-Problem einer virtuell freien Gruppe bereits von einem deterministische Kellerautomaten erkannt wird, das Wort-Problem dieser Gruppen also sogar deterministisch kontextfrei ist. Das Komplement deterministisch kontextfreier Sprachen ist aber stets deterministisch kontextfrei und somit haben virtuell freie Gruppen ein kontextfreies co-Wort-Problem.

Erste Beispiele von Gruppen mit kontextfreiem co-Wort-Problem, die nicht auf die oben beschriebene Methode aus freien Gruppen zusammengesetzt werden können liefert [LS07]. Die dort vorgestellte Methode, mit der wir zeigen konnten, dass das co-Wort-Problem von \mathfrak{W} kontextfrei ist, ist auch geeignet um das co-Wort-Problem von $\text{QAut}(\Theta)$ zu untersuchen, was wir in der Folge tun wollen. Dazu benötigen wir zunächst folgendes Lemma über kontextfreie Sprachen, welches bereits von Maslov in [Ma73] bewiesen wurde:

2.31 Lemma ([Ma73]). *Sei $L \subseteq X^*$ eine kontextfreie Sprache, dann ist $L^\circ := \{yx \mid x, y \in X^*, xy \in L\}$, die Menge aller zyklischen Permutationen von Worten aus L , ebenfalls kontextfrei.*

Sei $X := \{A, B, C, D, \sigma_1\}^\pm$ das im letzten Abschnitt hergeleitete Erzeugendensystem für \mathfrak{W} . Ein Wort $w \in X^*$ beschreibt dann von rechts nach links gelesen eine Folge von den erzeugenden quasi-Automorphismen. Um zu bestätigen, dass das Wort $w \in \text{coW}(\mathfrak{W}; X)$ liegt, reicht es aus, eine Ecke $v \in \Theta$ zu finden, die kein Fixpunkt dieser Hintereinanderausführung von quasi-Automorphismen ist. Sei L_v die Sprache aller $w \in X^*$, für die $w(v) \neq v$ ist. Dann ist $\text{coW}(\mathfrak{W}; X) = \bigcup_{v \in \Theta} L_v$ und wir nähern uns dem co-Wort-Problem durch die Untersuchung von L_v .

Wie auch in [LS07] werden wir in diesen Untersuchungen eine leicht abgewandelte Definition von Kellerautomaten zu Grunde legen, die die gleichen Sprachen wie gewöhnliche Kellerautomaten erkennen können. Statt nur auf die oberste Position des Stacks zugreifen zu dürfen, erlauben wir Kellerautomaten, dass sie auf die obersten 3 Positionen lesend, schreibend, löschend und einfügend zugreifen können. Dies kann immer durch eine Erhöhung der Zustände im endlichen Automaten eines „normalen“ Kellerautomaten simuliert werden. Außerdem liest unser Kellerautomat das Eingabewort von rechts nach links statt von links nach rechts. Dies stellt kein Problem dar, weil das Rückwärtslesen einer kontextfreien Sprache wieder eine kontextfreie Sprache ergibt.

2.32 Lemma. *Sei $v \in V(\Theta)$. Die Sprache L_v aller Wörter, die v nicht fixieren, ist kontextfrei.*

Beweis. Wir konstruieren einen deterministischen Kellerautomaten, der L_v erkennt. Zu Beginn schreibt der Kellerautomat auf den (leeren) Stack die relative Position der Ecke v zur Wurzel in Θ als Folge von L 's für linke Kanten und R 's für rechte Kanten. Ist v also z.B. die Wurzel, so bleibt der Stack leer, ist v das linke Kind der Wurzel so steht danach auf dem Stack L , ist v das rechte Kind des linken Kindes steht danach auf dem Stack LR .

Um jetzt festzustellen, ob ein Wort w zu L_v gehört oder nicht, vollzieht der Automat Erzeugendes für Erzeugendes (wegen der Operation von links wird mit dem letzten Erzeugenden begonnen und sich dann nach vorne durchgearbeitet) nach, wohin die Ecke v abgebildet wird. Dies ist möglich, da jedes Erzeugende die relative Position jeder Ecke zur Wurzel nur in den obersten 3 Einträgen ändert.

Ist das Wort w vollständig gelesen, überprüft der Automat, ob auf dem Stack erneut die Position der Ecke v gespeichert ist, ist sie es nicht, wird das Wort akzeptiert. \square

Bekanntermaßen sind endliche Vereinigungen von kontextfreien Sprachen wieder kontextfrei. Sei $\tilde{V} := \{v \in V(\Theta) \mid v \text{ hat höchstens Höhe } 3\}$ und

$$L := \bigcup_{v \in \tilde{V}} L_v.$$

Dann ist auch L eine kontextfreie Sprache. Wir kommen nun zu dem Ergebnis dieses Abschnittes.

2.33 Satz. *Das co-Wort-Problem $coW(\text{QAut}(\Theta))$ der quasi-Automorphismengruppe des ebenen binären Wurzelbaumes ist kontextfrei.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass L eine kontextfreie Sprache ist und nach Lemma 2.31 ist auch L° eine kontextfreie Sprache. Es reicht nun zu zeigen, dass $coW(\text{QAut}(\Theta), X) = L^\circ$ ist.

Sei $w \in coW(\text{QAut}(\Theta), X) - L$. Dann gibt es ein $v \in V(\Theta)$, sodass $w(v) \neq v$ ist aber für alle Vorfahren v' von v gilt $w(v') = v'$. Da die Elemente aus X alle Kanten unterhalb der Höhe 3 respektieren, muss es Teilworte u_1, u_2 von w geben mit $w = u_1 u_2$ und $u_2(v) = \tilde{v}$ ist eine Ecke der Höhe ≤ 3 . Da $u_2 u_1(\tilde{v}) = u_2 w u_2^{-1}(\tilde{v}) = u_2 w(v) \neq u_2(v) = \tilde{v}$ ist, folgt, dass $u_2 u_1 \in L$ und somit $w \in L^\circ$ ist.

Ist $w \in L^\circ$, dann gibt es ein Teilwort u von w , sodass $u w u^{-1} \in L$ ist. Also gibt es ein $v \in V(\Theta)$ mit $u w u^{-1}(v) \neq v$. Daraus folgt, dass $w u(v) \neq u(v)$ und somit $w \in coW(\text{QAut}(\Theta), X)$ ist. \square

Wie bereits erwähnt, haben Holt, Reese, Röver und Thomas in [HRRT05] bewiesen, dass sich die Eigenschaft, kontextfreies Wort-Problem zu haben, auf Untergruppen vererbt. Mit Lemma 2.11 folgt also:

2.34 Korollar ([LS07]¹). *Das co-Wort-Problem der Thompson-Gruppe \mathfrak{V} ist kontextfrei*

¹Während der Entstehung dieser Arbeit, war den Autoren bereits klar, dass Satz 2.33 gültig ist, allerdings war Lemma 2.11 noch unbekannt, sodass in der Arbeit das vermeintlich interessantere Beispiel bewiesen wurde.

Kapitel 3

Der Sterngraph.

In diesem Kapitel werden wir als weiteres Beispiel von Graphen mit einer interessanten quasi-Automorphismengruppe die Sterngraphen $*^n$ betrachten.

3.1 Definition. Der n -strahlige Sterngraph $*^n$ ist der Graph, dessen Ecken- und Kantenmenge durch

$$\begin{aligned} V(*^n) &:= \{(k, l) \mid k \in \mathbb{N}, l \in \{1, \dots, n\}\} \\ E(*^n) &:= \bigcup_{i=1}^n E_i(*^n) \\ E_i(*^n) &:= \{((j, i), (j+1, i)) \mid j \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

definiert ist. (Siehe auch Abbildung 3.1)

Der Graph, der aus allen Kanten der Farbe i und allen mit diesen Kanten inzidierenden Ecken besteht, heißt i -ter *Strahl*. Die Gruppe $H_n := \text{QAut}(*^n)$ der quasi-Automorphismen des n -strahligen Sterngraphen nennen wir n -strahlige *Houghton-Gruppe*.

3.1 Bekannte Ergebnisse.

Die n -strahligen Houghton-Gruppen wurden von C. H. Houghton in [Ho78] als Beispiele von Gruppen mit bestimmten cohomologischen Eigenschaften definiert. Die Bezeichnung Houghton-Gruppen geht auf K. Brown zurück, der in [Br87] gezeigt hat, dass H_n vom Typ FP_{n-1} aber nicht vom Typ FP_n und für $n \geq 3$ endlich präsentiert ist.

Betrachten wir die einzelnen Gruppen etwas näher. Der Graph $*^n$ hat für alle n eine triviale Automorphismengruppe, da eine Abbildung, die alle Kanten respektiert, jeden Strahl punktweise fixieren muss. Betrachten wir den Fall $n = 1$. Sei φ ein quasi-Automorphismus von $*^1$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass φ alle Kanten aus $\{(l, 1), (l+1, 1) \mid l > k\}$ respektiert. Da φ eine Bijektion der Ecken ist, folgt daraus, dass φ alle Ecken aus $\{(l, 1) \mid l > k\}$

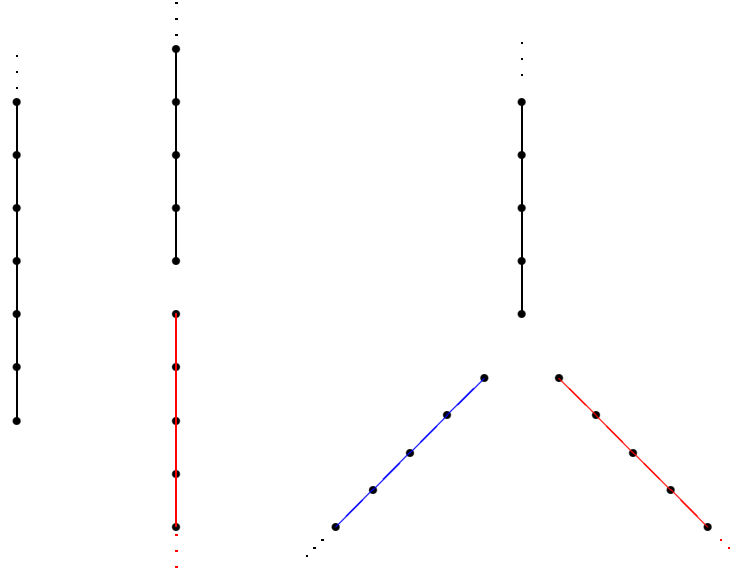


Abbildung 3.1: Die Graphen $*^1$, $*^2$ und $*^3$. Die Farbe 1 ist schwarz dargestellt, 2 rot und 3 blau. Alle Kanten sind von innen nach außen orientiert.

punktweise fixiert, φ also endlichen Träger hat. Die Gruppe H_1 ist also isomorph zu S_∞ .

Sei nun $n \geq 2$. Dann enthält H_n für jedes Paar (i, j) ein Element, das wir als *einfachen Shift von i nach j* , oder kurz $s_{i,j}$, bezeichnen. Diese Abbildungen schieben anschaulich gesagt auf dem i -ten Strahl alle Ecken um 1 nach innen und auf dem j -ten Strahl um 1 nach außen. Formal sind sie wie folgt definiert:

$$s_{i,j}(k, l) := \begin{cases} (k+1, l) & \text{falls } l = j \\ (k-1, l) & \text{falls } l = i \text{ und } k \neq 1 \\ (1, j) & \text{falls } (k, l) = (1, i) \\ (k, l) & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun $n = 2$. Die Gruppe H_2 ist ein alter Bekannter, denn: Sei $\varphi \in H_2$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass φ alle Kanten aus $\{(l, j), (l+1, j) \mid l > k, j = 1, 2\}$ respektiert. Daher muss ein $s \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass φ für $l > k$ die Ecken der Form $(l, 1)$ auf $(l+s, 1)$ und die Ecken der Form $(l, 2)$ auf $(l-s, 2)$ abbildet. Mit anderen Worten: φ setzt sich aus einer Potenz des Shifts s_{ij} und einer finitären Permutation zusammen. Somit ist $H_2 \cong S_\infty \times \mathbb{Z} \cong \text{QAut}(\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\}))$, der quasi-Automorphismengruppe von \mathbb{Z} .

Diese Isomorphie kann man $*^2$ auch direkt ansehen. Wenn man die Kanten der Farbe 2 durch umgekehrt orientierte Kanten der Farbe 1 ersetzt und die Ecken $(1, 1)$ und $(1, 2)$ mit einer Kante der Farbe 1 verbindet, erhält man einen Cayley-Graphen für \mathbb{Z} . Die Tatsache, dass das Hinzufügen oder Entfernen von endlich vielen Kanten die Gruppe nicht beeinflusst, erzwingt die

oben konstruierte Isomorphie. Diese Gruppe ist, wie bereits erwähnt, endlich erzeugt. Ein Erzeugendensystem ist zum Beispiel die Menge $\{s_{1,2}, \sigma\}$, wobei σ die Transposition $((1, 1) \leftrightarrow (1, 2))$ ist.

Die 2-strahlige Houghton-Gruppe ist mit einer Familie von Gruppen verwandt, die in der kombinatorischen Gruppentheorie oft als Beispiele für Gruppen mit unerwartete Eigenschaften dient, nämlich den sogenannten Lamplighter-Gruppen $L_n \cong \mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}$. Das Erzeugnis der Elemente σ und $s_{1,2}^2$ ist nämlich isomorph zu L_2 und auf ähnliche Weise lassen sich auch die anderen Lamplighter Gruppen als Untergruppen in H_2 einbetten.

Sei nun $n \geq 3$. Die einzige Möglichkeit für einen quasi-Automorphismus φ , fast alle Kanten zu respektieren, besteht darin, auf jedem Strahl alle bis auf endlich viele Ecken genauso abzubilden wie ein Shift, d.h. eine mehrfache Hintereinanderausführung eines festen Elementes $s_{i,j}$. Das Element φ setzt sich also aus einem Produkt von einfachen Shifts und einer finitären Permutation zusammen. Da $s_{i,j} = s_{1,j}s_{1,i}^{-1}$ ist, wird H_n durch alle Transpositionen von benachbarten Ecken und alle einfachen Shifts $s_{1,j}$ erzeugt.

Für $i \neq j$ ist der Kommutator $[s_{1,i}, s_{1,j}] = s_{1,i}^{-1}s_{1,j}^{-1}s_{1,i}s_{1,j} = ((1, 1) \leftrightarrow (1, i))$. Jede Nachbarschaftstransposition ergibt also konjugiert mit einem passenden Produkt von einfachen Shifts einen Kommutator von einfachen Shifts. Also wird H_n von den Elementen $\{s_{1,i} | i = 2, \dots, n\}$ erzeugt. Außerdem folgt wie auch schon im Fall $n = 2$ sofort, dass $H_n/S_{*n} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ ist. Allerdings zerfällt für $n > 2$ die Houghton-Gruppe H_n nicht mehr als semidirektes Produkt von S_{*n} und \mathbb{Z}^{n-1} .

Röver hat in [R99] gezeigt, dass für alle n die Gruppe H_n Untergruppe von Thompsons Gruppe \mathfrak{Th} und somit auch von $\text{QAut}(\Theta)$ ist. Aus Abschnitt 2.5 wissen wir, dass dann auch das co-Wort-Problem von H_n kontextfrei ist.

3.2 Sackgassen.

Wir wollen uns nun mit dem Phänomen der Sackgassen beschäftigen, welches in Cayley-Graphen von Gruppen auftreten kann. Bevor wir auf Sackgassen in H_2 zu sprechen kommen, wollen wir zunächst den allgemeinen Hintergrund beleuchten.

Sei $\Gamma = \Gamma(G, X)$ ein Cayley-Graph für eine Gruppe G bezüglich eines endlichen Erzeugendensystems X . Dann können wir Γ mit einer metrischen Struktur versehen, indem wir allen Kanten die Länge 1 geben. Diese Metrik nennen wir $d_X(\cdot, \cdot)$. Die Struktur von Geodäten in einem Cayley-Graph lässt dabei oft Rückschlüsse auf die Gruppe zu.

Da die Gruppe G transitiv auf den Ecken von Γ operiert, reicht es für die Untersuchung der Struktur von Geodäten aus, solche von 1 zu einem Element $g \in G$ zu betrachten. Für manche g kann es passieren, dass keine Geodäte von 1 nach g zu einer Geodäte von 1 nach g' fortgesetzt werden

kann. Ist dies der Fall, so nennen wir g eine *Sackgasse*. Genauer gesagt: Sei $n = d_X(1, g)$. Das Element g ist eine Sackgasse, wenn der Ball $B_g(1)$ mit Radius 1 um g vollständig im Ball $B_1(n)$ vom Radius n um 1 enthalten ist.

Sei $k = \max\{l \mid B_g(l) \subseteq B_1(n)\}$. Dann ist k die *Tiefe* der Sackgasse g . Sackgassen und ihre Tiefe wurden erstmals von Bogopolski in [Bg97] untersucht. Dort beweist er unter anderem, dass die Tiefe der Sackgassen von hyperbolischen Gruppen bezüglich eines gegebenen Erzeugendensystems beschränkt ist. Thompsons Gruppe \mathfrak{F} ist ein Beispiel einer Gruppe mit unendlich vielen Sackgassen, alle der Tiefe 2 ([CITa04]), und die Lamplighter-Gruppe L_2 ist ein Beispiel einer Gruppe mit Sackgassen beliebiger Tiefe ([CITa05]).

Es ist leicht zu sehen, dass die Existenz von Sackgassen keine Invariante der Gruppe ist. Betrachten wir zum Beispiel \mathbb{Z} . Der Cayley-Graph $\Gamma(\mathbb{Z}, \{1\})$ enthält keine Sackgassen, der Cayley-Graph $\Gamma(\mathbb{Z}, \{2, 3\})$ hat hingegen die Sackgassen -1 und 1 . In der Tat hat Šunić in [Su06] gezeigt, dass es für jede unendliche, endlich erzeugte Gruppe ein Erzeugendensystem gibt, sodass der dazugehörige Cayley-Graph Sackgassen hat. Sogar die Eigenschaft, Sackgassen von beliebiger Tiefe zu besitzen, ist keine Gruppen-Invariante, wie Riley und Warshall [RiWa06] gezeigt haben¹.

Es gibt aber auch Ergebnisse, die vom Erzeugendensystem unabhängig sind. Das Ergebnis von Bogopolski über hyperbolische Gruppen wurde bereits oben erwähnt. Šunić zeigt in [Su06], dass \mathbb{Z} bezüglich jedes Erzeugendensystems nur endlich viele Sackgassen hat und Warshall [Wa06], dass in allen schwach geodätisch automatischen Gruppen, also z.B. allen abelschen Gruppen, die Tiefe von Sackgassen stets beschränkt ist. Wir konnten dieses Ergebnis in [L07] teilweise verallgemeinern, indem wir zeigten, dass abelsche Gruppen bezüglich jedes Erzeugendensystems nur endlich viele Sackgassen haben. Außerdem zeigten wir, dass in mehrendigen Gruppen die Tiefe der Sackgassen durch eine Konstante beschränkt ist, die vom Erzeugendensystem abhängt.

Wir werden nun folgenden Satz aus [L07] beweisen:

3.2 Satz. *Die Tiefe der Sackgassen in H_2 bezüglich des Standard-Erzeugendensystems $X = \{\sigma, s = s_{1,2}\}$ ist unbeschränkt.*

Um den Beweis hierfür führen zu können, bedarf es der Analyse von Geodäten. Daher werden wir nun ein Modell entwickeln, das uns die Berechnungen dieses Abschnittes ermöglicht. Dazu nutzen wir die Bijektion $f : V(*^2) = \mathbb{N} \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{Z} - \{0\}$ definiert durch $f(k, i) := (-1)^i(k)$ um H_2 als Gruppe der Permutationen von mit $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ nummerierten Kugeln zu betrachten. Eine Standard-Notation für solch eine Permutation $g \in H_2$

¹Diese Arbeit gibt zwei Beispiele von Gruppen, die bezüglich einem Erzeugendensystem beliebig tiefe Sackgassen und bezüglich eines anderen nur beschränkt tiefe Sackgassen hat. Die Behandlung des endlich präsentierten Beispiels enthält einen Fehler, dessen Korrektur die Autoren angekündigt haben.

ist dann durch

$$g = \begin{pmatrix} \dots & g^{-1}(-k) & \dots & g^{-1}(-2) & g^{-1}(-1) & g^{-1}(1) & g^{-1}(2) & \dots & g^{-1}(k) & \dots \\ \dots & -k & \dots & -2 & -1 & 1 & 2 & \dots & k & \dots \end{pmatrix}$$

gegeben. Da in dieser Notation die untere Reihe alle Kugeln in aufsteigender Reihenfolge aufzählt, reicht es um g zu beschreiben aus, die obere Zeile anzugeben und zusätzlich zu markieren, wo in der unteren Reihe die Kugel mit der Nummer -1 stand. Diese Position markieren wir, indem wir einen Pfeil zwischen die Urbilder der Kugeln -1 und 1 zeichnen. Mit dieser Konvention wird das Element g durch

$$\dots g^{-1}(-k) \dots g^{-1}(-2) g^{-1}(-1) \downarrow g^{-1}(1) g^{-1}(2) \dots g^{-1}(k-1) g^{-1}(k) \dots$$

beschrieben. Das triviale Element ist in dieser Darstellung durch

$$id = \dots (-k) (-k+1) \dots (-2) (-1) \downarrow 1 2 \dots (k-1) k \dots$$

gegeben.

In dieser Beschreibung ist es jetzt sehr einfach, Produkte $s \cdot g$ und $\sigma \cdot g$ auszurechnen. Die Multiplikation mit s bewegt den Pfeil um eine Position nach links, mit s^{-1} um eine Position nach rechts und die Multiplikation mit $\sigma = \sigma^{-1}$ vertauscht die beiden Kugeln rechts und links des Pfeiles. Wir werden von nun an den Pfeil *Cursor* nennen, da er in unserem Modell als Cursor angezeigt, auf welche Kugeln das nächste (von rechts nach links gelesen) σ wirken wird.

Indem wir die Operation von s als Bewegung des Cursors und nicht als Bewegung der Kugeln definiert haben, haben wir den Bezugspunkt gewechselt. Dies macht es im Gegenzug nötig, die Cursorposition eines Elementes $g \in H_2$ zu definieren. Seien $x_1, \dots, x_n \in \{\sigma, s^{\pm 1}\}$ und $w = x_n x_{n-1} \dots x_1$ ein Wort, das g repräsentiert und sei $c(g, w) := \#\{i | x_i = s^{-1}\} - \#\{i | x_i = s\}$. Dann entspricht $c(g, w)$ gerade der Differenz der Anzahl der positiven Kugeln links des Cursors und der negativen Kugeln rechts des Cursors. Insbesondere hängt $c(g, w)$ nur von g und nicht von w ab. Wir setzen $c(g) = c(g, w)$ und wenn $c(g) = i$ ist, so sagen wir g hat Cursorposition c_i .

Um unsere Beschreibung von Elementen notationell zu vereinfachen, schreiben wir ein Element aus H_2 , indem wir die finitäre Permutation der Kugeln in Zykelschreibweise angeben und die Cursorposition als Index an das Produkt der Zykeln anfügen. So ist z.B. $s = (1)_{-1}$, $\sigma = (-1, 1)_0$ oder aber $g = (-3, -1, 2, 4)_{-3}$ entspricht der Konfiguration $\dots -5 -4 \downarrow 4 -2 -3 1 -1 3 2 5 6 \dots$

Um den Abstand $d_X(1, g)$ auszurechnen müssen wir die Mindestanzahl von Kommandos zur Cursorbewegung oder zur Vertauschung von dem Cursor benachbarten Kugel bestimmen, die nötig ist, um die Konfiguration $(1)_0$ in die Konfiguration für g zu transformieren. Die Elemente mit Cursorposition c_0 bilden die Untergruppe der finitären quasi-Automorphismen von

*². Diese Untergruppe wird durch $Y = \{\sigma_t = \sigma^{s^t} | t \in \mathbb{Z}\}$ erzeugt. Wir wenden uns nun einigen speziellen Elementen der Untergruppe S_∞ zu. Sei $g_k = ((-k, k)(-(k-1), k-1) \dots (-3, 3)(-2, 2)(-1, 1))_0$, also das Element, welches der Vertauschung der Kugeln i und $-i$ für alle $i < k$ entspricht. Das folgende Lemma wird dann Satz 3.2 beweisen.

3.3 Lemma. *Das Element g_k ist eine Sackgasse mit Tiefe größer als k bezüglich des Erzeugendensystems X .*

Der Beweis dieses Lemmas besteht aus mehreren Schritten. Wir werden in Lemma 3.5 den Abstand $d_X(1, g_k)$ berechnen und ein geodätisches Wort konstruieren, das g_k repräsentiert. Außerdem müssen wir zeigen, dass alle Elemente aus $B_{g_k}(k)$ höchstens so weit von der Identität entfernt sind, wie g_k . Dieser Teil des Beweises wird in Lemma 3.4 vorbereitet, welchem ein anderes Erzeugendensystem zu Grunde liegt. Danach werden diese verschiedenen Beweisbestandteile zusammengesetzt.

Zunächst berechnen wir den Abstand $d_{Y_k}(1, g_k)$ in der Untergruppe S_{2k} erzeugt durch $Y_k = \{\sigma_t | -k < t < k\}$. Sei M der Träger von g_k , also $M = \{-k, \dots, -1, 1, \dots, k\}$. Für alle $g \in S_{2k}$ definieren wir die Inversionszahl $i(g) := \#\{(i, j) | i < j \in M, g(i) > g(j)\}$. Dann ist $i(\sigma_t \cdot g) = i(g) \pm 1$, also $d_{Y_k}(1, g) \geq i(g)$. Die Inversionszahl von g_k ist $i(g_k) = \sum_{i=1}^{2k} i - 1 = k(2k - 1)$. Wenn wir also ein Wort w_k der Länge $k(2k - 1)$ finden, welches g_k repräsentiert, dann ist w_k geodätisch.

Dazu konstruieren wir zunächst für alle l geodätische Worte für $(-l, l)_0$. Für $l = 1$ ist $u_1 = \sigma_0$ geodätisch. Das Wort $v_l = \sigma_{-(l-1)}\sigma_{-(l-2)} \dots \sigma_{l-2}$ repräsentiert das Gruppenelement $(l-1, -l, -(l-1), \dots, l-2)_0$ und deshalb repräsentiert $u_l := (\sigma_{l-1})^{v_l} = v_l \sigma_{l-1} v_l^{-1}$ das Element $(-l, l)_0$. Dabei hat das Wort u_l die Länge $1 + 4(l-1) = i(u_l)$, ist also ein geodätisches Wort.

Da $(-l, l)_0$ und $(-l', l')_0$ für $l \neq l'$ disjunkten Träger haben, ist die Verknüpfung der Worte u_l für $0 < l \leq k$ in jeder beliebigen Reihenfolge ein Wort, welches g_k repräsentiert. Sei $w_k = u_1 u_2 \dots u_k$. Dann hat w_k die Länge $\sum_{l=1}^k 1 + 4(l-1) = k(2k - 1)$ und ist somit ein geodätisches Wort. Dieses Wort hat eine interessante Eigenschaft, die im späteren Verlauf dieses Abschnittes von Bedeutung sein wird.

3.4 Lemma. *Für jedes Element $g \in S_{2k}$ kann man ein Wort, welches g repräsentiert, aus w_k konstruieren, indem man einige der Buchstaben von w_k löscht.*

Beweis. Wir beweisen dies mit Induktion über k . Der Fall $k = 1$ ist trivial. Seien nun $n \geq 1$ und wir nehmen an, dass die Aussage für $k = n$ stimmt. Sei $k = n + 1$. Das Wort w_k entspricht dem Wort $w_{k-1} u_k$. Wir konstruieren ein Teilwort x von u_k , das ein Element h repräsentiert, mit $h^{-1}(k) = g^{-1}(k)$ und $h^{-1}(-k) = g^{-1}(-k)$. Nach Induktionsannahme gibt es dann ein Teilwort y von w_{k-1} , welches gh^{-1} repräsentiert. Dann muss aber yx das Element g repräsentieren.

Wie erhalten wir das Teilwort x von u_k ? Sei $a = g^{-1}(k)$ und $b = g^{-1}(-k)$. Wenn $-k < a < 0$ ist, dann löschen wir das letzte σ_a das in u_k auftritt, ist $0 < a \leq k$ löschen wir das letzte σ_{a-1} . Ist $-k \leq b < 0$ so löschen wir das erste σ_{b-1} und wenn $0 < b < k$ ist, dann löschen wir das erste σ_b . Auf diese Weise erhalten wir das gesuchte Wort. \square

Wir wollen nun den Abstand $d_X(1, g_k)$ berechnen. Für jedes Wort w mit Buchstaben aus Y (oder Y_k) sei w' das Wort mit Buchstaben aus X , das wir erhalten, wenn wir alle σ_t durch $s^t \sigma s^{-t}$ ersetzen und \tilde{w} das Wort, das wir aus w' durch Kürzen der Stachel erhalten. Dann ist $\tilde{u}_l = s^{-(l-1)}(\sigma s)^{2(l-1)}(\sigma s^{-1})^{2(l-1)}\sigma s^{(l-1)}$.

Der Abstand $d_X(1, (-l, l)_0)$ ergibt sich aus der Anzahl der Befehle, derer es bedarf, um die Kugeln $-l$ und l zu vertauschen und den Cursor zurück in den Ursprung zu bringen. O.B.d.A. wird die Kugel $-l$ bewegt, bevor die Kugel l bewegt wird. Dazu müssen wir den Cursor ein erstes Mal in die Position $c_{-(l-1)}$ bringen, wofür wir $(l-1)$ Vorkommen des Buchstaben s benötigen. Dann muss der Cursor im Verlauf der weiteren Kalkulation die Position c_{l-1} ein erstes Mal erreichen um danach nochmals in der Position $c_{-(l-1)}$ zu sein, um die Kugel l an ihren Bestimmungsort zu bringen. Dafür benötigen wir insgesamt mindestens $2(l-1)$ Kommandos s^{-1} und $2(l-1)$ Kommandos s . Für den Weg des Cursors zurück in den Ursprung brauchen wir nochmals mindestens $l-1$ Kommandos s^{-1} . Jedes Wort, welches $(-l, l)_0$ darstellt muss also mindestens $6(l-1)$ Buchstaben s oder s^{-1} enthalten. Wegen der Inversionzahl werden auch mindestens $4l-3$ Buchstaben σ benötigt. Somit kann es kein Wort geben, das kürzer als \tilde{u}_l ist und dasselbe Element repräsentiert.

3.5 Lemma. *Das Wort \tilde{w}_k ist ein geodätisches Wort für das Element g_k und somit ist $d_X(1, g_k) = 1 + \sum_{l=2}^k (8l-5)$.*

Beweis. Das Wort \tilde{w}_k hat die Länge $l(\tilde{w}_k) = 1 + \sum_{l=2}^k (8l-5)$, da es $\sum_{l=1}^k (4l-3)$ viele σ 's und $\sum_{l=2}^k (4l-2)$ viele s 'e oder s^{-1} 'e enthält. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Für $k=1$ ist $\tilde{w}_1 = \sigma$ und somit geodätisch.

Sei $k > 1$ und nehmen wir an \tilde{w}_{k-1} sei geodätisch. Es gilt: $l(\tilde{w}_k) = l(\tilde{w}_{k-1}) + 8k - 5$. (Mit $l(w)$ bezeichnen wir die Länge des Wortes w , d.h. die Anzahl der Buchstaben in w .) Angenommen, es gebe ein Wort v_k , welches g_k repräsentiert mit $l(v_k) < l(\tilde{w}_k)$. Dann konstruieren wir aus v_k das Wort v_{k-1} , indem wir die folgenden Buchstaben aus v_k löschen: Zunächst löschen wir alle Buchstaben s und s^{-1} die in v_k für eine Bewegung des Cursors von c_0 nach $c_{\pm 1}$ oder eine Bewegung von $c_{\pm 1}$ nach c_0 stehen. Anschließend löschen wir alle σ 's, die in dem neu entstandenen Wort zwei Kugeln vertauschen, die bereits vertauscht wurden.

Wir zählen nun die Anzahl der gelöschten Buchstaben s und s^{-1} . Jede Kugel $l > 1$ wird durch die Position c_0 durch bewegt. Deshalb müssen die

folgenden Situationen beim Ausführen von \tilde{w}_k auftreten:

1. Der Cursor ist in Position c_1 , die Kugel l liegt direkt links des Cursors und der Cursor wird auf c_0 bewegt.
2. Der Cursor ist in Position c_0 , die Kugel l liegt direkt links des Cursors und der Cursor wird auf c_{-1} bewegt.

Wir löschen also für jede Kugel $l > 1$ zwei Buchstaben s . Analog löschen wir für jede Kugel $l < -1$ zweimal den Buchstaben s^{-1} . Außerdem muss der Cursor ein erstes mal von c_0 weg und ein letztes mal auf c_0 drauf bewegt werden. Insgesamt haben wir also $2(k-1) + 2(k-1) + 2 = 4k - 2$ mal den Buchstaben s oder s^{-1} gelöscht.

Das Wort v_{k-1} repräsentiert, wie wir leicht nachprüfen können, das Gruppenelement g_{k-1} . Gemäß Konstruktion entspricht die Anzahl der σ 's in v_{k-1} der Inversionzahl $i(g_{k-1})$, ist also um $4k - 3$ kleiner als die Anzahl des σ 's in v_k . Wir erhalten $l(v_{k-1}) \leq l(v_k) - (8k - 5) < l(\tilde{w}_k) - (8k - 5) = l(\tilde{w}_{k-1})$. Was der Induktionsannahme widerspricht. \square

Nun können wir den Beweis von Satz 3.2 angeben.

Beweis von Satz 3.2. Wir müssen zeigen, dass für alle $g \in B_{g_k}(k)$ der Abstand $d(1, g) \leq d(1, g_k)$ ist. Sei dazu $\omega \in S_\infty$ und $t \in \mathbb{Z}$ so, dass $g = (\omega)_t$ ist. Da $g \in B_{g_k}(k)$ ist, folgt dass $\omega \in S_{2k}$ und $t \leq k$ ist. Mit Lemma 3.4 schließen wir, dass $d(1, g) \leq d(1, s^{-t}g_k)$ ist.

Das Element g_g hat Ordnung 2 und deshalb ist \tilde{w}_k^{-1} ebenfalls ein geodätisches Wort für g_k . Dieses Wort beginnt mit s^k und aus Symmetriegründen gibt es auch ein geodätisches Wort für g_k , das mit s^{-k} beginnt. Daher gilt sogar: $d(1, s^{-t}g_k) \leq d(1, g_k) - |t|$. \square

Wie anfangs erwähnt, gibt es Gruppen, deren Cayley-Graph bezüglich einem Erzeugendensystem beliebig tiefe Sackgassen hat und deren Cayley-Graph bezüglich einem anderen Erzeugendensystem beschränkte Sackgassentiefe hat. Die Existenz von beliebig tiefen Sackgassen im Cayley-Graph ist also keine Gruppeninvariante. Betrachtet man das Beispiel aus [RiWa06] jedoch genauer, fällt auf, dass die beliebig tiefen Sackgassen qualitativ andere sind, als die von H_2 . Es ist nämlich, anders als bei H_2 bei diesen Sackgassen möglich, eine Sackgasse zu verlassen, ohne im Ball weit zurück zu laufen. Dies motiviert die folgende Definition:

3.6 Definition. Sei $\Gamma = (\Gamma, X)$ der Cayley-Graph einer Gruppe bezüglich dem endlichen Erzeugendensystem X und $g \in G$ eine Sackgasse von Γ mit $d(1, g) = n$. Die *Rückkehrtiefe* von g ist definiert als die kleinste Zahl k , sodass g mit einer Ecke außerhalb von $B_1(n)$ in dem Teilgraphen $\Gamma - B_1(n - k)$ verbunden werden kann.

Mit anderen Worten gibt die Rückkehrtiefe einer Sackgasse an, wie weit zurück Richtung Identität ein Weg aus der Sackgasse führen muss, um einen Punkt außerhalb des Balles $B_1(n)$ zu erreichen. In den Beispielen aus [RiWa06] ist die Rückkehrtiefe aller Sackgassen bezüglich beider angegebener Erzeugendensysteme kleiner als 2. Im Gegensatz dazu gilt:

3.7 Satz. *Das Element g_k ist in $\Gamma(H_2, X)$ eine Sackgasse mit Rückkehrtiefe mindestens k .*

Beweis. Im Beweis von Satz 3.2 haben wir gezeigt, dass alle Elemente $(\omega)_t$, $\omega \in S_{2k}$, $|t| \leq k$ innerhalb des Balles $B_1(d(1, g_k))$ liegen. Also muss jeder Weg zu einer Ecke außerhalb dieses Balles ein Element der Form $h = (\omega')_{\pm k}$, $\omega \in S_{2k}$ enthalten. Von diesen Elementen haben wir im Beweis von Satz 3.2 gezeigt, dass $d(1, h) \leq d(1, g_k) - k$ ist. \square

Offensichtlich ist die Rückkehrtiefe einer Sackgasse immer kleiner als die Tiefe einer Sackgasse, sodass die Eigenschaft, Sackgassen von beliebig großer Rückkehrtiefe zu besitzen, eine stärkere Eigenschaft ist, als die Eigenschaft, Sackgassen beliebiger Tiefe zu besitzen. Daher drängt sich die Frage auf, ob diese stärkere Eigenschaft eventuell von der Wahl des Erzeugendensystems unabhängig ist. Diese Frage muss hier offen bleiben.

Exkurs - Sackgassen in allgemeinen Graphen

Die Definition von Sackgassen in Cayley-Graphen ergibt auch in allgemeinen Graphen Sinn, sobald man in diesen einen Basispunkt auszeichnet, der die Rolle der 1 des Cayley-Graphen im allgemeinen Graphen übernimmt. Vor diesem Hintergrund könnte man die Vermutung aufstellen, dass wenn in einem Graphen die Rückkehrtiefe der Sackgassen unbeschränkt ist, dies auch in allen zu diesem Graphen quasi-isometrischen Graphen gilt. Dies ist jedoch falsch, wie das folgende Beispiel von Bernhard Krön zeigt.

Sei Γ_1 das quadratische Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit Basispunkt $(0, 0)$. Der Graph Γ_1 enthält keine Sackgassen. Wir wollen nun aus Γ_1 einen dazu quasi-isometrischen Graphen Γ_2 konstruieren. Dazu ersetzen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ jede Kante innerhalb einer Kugel vom Radius n um $(2^{n+1}, 0)$ durch einen Kantenzug der Länge 5. Abbildung 3.2 zeigt einen Ausschnitt des Graphen Γ_2 . Diese Graphen sind offensichtlich quasi-isometrisch. In Γ_2 ist aber $d((0, 0), (2^{n+1}, 0))$ immer um mindestens n größer als der Abstand von $(0, 0)$ zu Punkten auf dem Rand von $B_{(2^{n+1}, 0)}(4n)$. Sei $v_n \in B_{(2^{n+1}, 0)}(4n)$ eine Ecke mit maximalem Abstand zum Basispunkt $(0, 0)$. Dann ist v_n eine Sackgasse von Rückkehrtiefe größer als n .

Dieses Beispiel zweier quasi-isometrischer Graphen mit verschiedenem Sackgassenverhalten lebt jedoch ganz entscheidend davon, dass der Graph Γ_2 nicht vertex-transitiv ist, das heißt, dass die Automorphismengruppe des

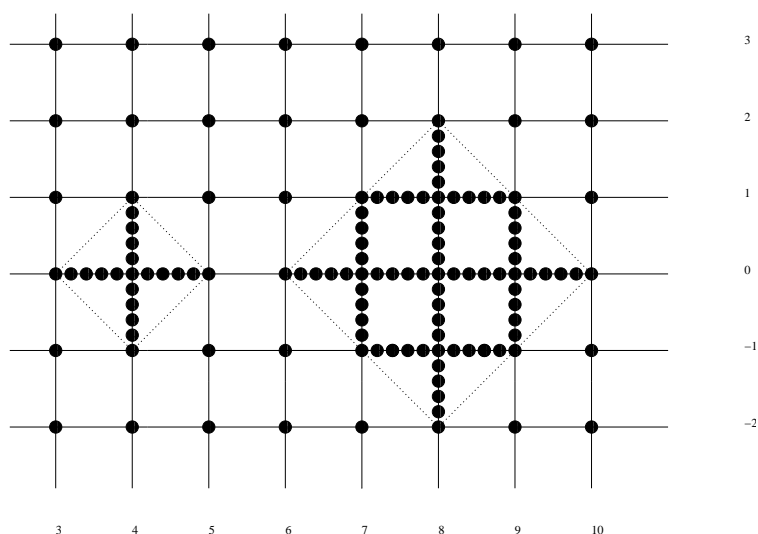


Abbildung 3.2: Der Graph Γ_2 . Der Rand der Kugeln $B_{(2^{1+1},0)}(5 \cdot 1)$ und $B_{(2^{2+1},0)}(5 \cdot 2)$ ist gepunktet eingezeichnet.

Graphen nicht transitiv auf den Ecken operiert. Cayley-Graphen sind jedoch vertex-transitiv und in vertex-transitiven Graphen scheint es ungleich schwerer, Graphen mit Sackgassen von beliebiger Rückkehrtiefe zu konstruieren, die quasi-isometrisch zu einem Graphen ohne solche Sackgassen sind. Wir schließen also diesen Abschnitt mit der Frage:

Gibt es quasi-isometrische, vertex-transitive Graphen Γ_1 und Γ_2 , sodass die Rückkehrtiefe der Sackgassen in Γ_1 beschränkt ist und in Γ_2 nicht?

3.3 Weitere Eigenschaften.

Die in Abschnitt 3.2 entwickelte geometrische Beschreibung der Gruppe H_2 lässt sich zwar nicht eins zu eins auf die höheren Houghton-Gruppen H_n übertragen, aber eine gewisse anschauliche Vorstellung können wir doch beschreiben. Wir wollen nun eine Beschreibung der Gruppe H_n angeben, die wir das Rubik's Modell der Houghton-Gruppe nennen, da es auch die Beschreibung eines fiktiven (physikalisch jedoch nur schwer zu realisierenden) Rubik's Spieles² sein könnte.

In diesem Modell wird jede Ecke des Graphen $*^n$ durch eine farbige und mit einer Nummer versehene Kugel dargestellt. Die Ecke (k, l) entspricht der

²Für Kenner der Rubik's-Spiele: Die Beschreibung erinnert an eine unendliche Version des Spieles „Rubik's Rings“, die wiederum auf die sogenannten „Ungarischen Ringe“ (erfunden von Endre Pap) zurückgehen. Konkurrierend dazu gibt es ein U.S. Patent (Nr. 507,215) aus dem Jahr 1893, auf die Erfindung von William Churchill eines ähnlichen Puzzles.

Kugel mit der Nummer k und der Farbe l . Diese Kugeln werden ihren Farben entsprechend und aufsteigend in n Röhren geführt. Diese Konfiguration entspricht der Identität. Die Erzeugenden, also die Shifts $s_{i,j}$, verändern die Konfiguration, indem sie in der i -ten Röhre alle Kugeln um 1 nach innen schieben und in der j -ten Röhre die nun aus der i -ten Röhre rausgedrückten Kugel von innen einfügen. So entsteht eine 1-1-Beziehung der Elemente der Houghton-Gruppe und aller Konfigurationen, bei denen fast alle Kugeln in der richtigen Röhre und aufsteigend angeordnet sind.

Der Abstand zwischen zwei Gruppenelementen entspricht dann der minimalen Anzahl von Verschiebungen, die benötigt werden, um die entsprechenden Konfigurationen ineinander zu überführen. Mit dieser Möglichkeit ausgestattet, Abstände zu berechnen, wird es möglich, weitere Eigenschaften von n -strahligen Houghton-Gruppen nachzuweisen. Zum Beispiel wartet die Frage, ob auch die höheren Houghton-Gruppen Sackgassen beliebiger (Rückkehr-) Tiefe haben, noch auf eine Antwort. Es könnte auch möglich sein, diese Beschreibung effektiv zu nutzen, um die Dehn-Funktion von z.B. H_3 anzugeben, oder Fragen der Konvexität des Cayley-Graphen zu beantworten. Diese letzte Eigenschaft, die mit der Dehn-Funktion verwandt ist, wollen wir kurz näher betrachten.

Sei Γ der Cayley-Graph einer endlich erzeugten Gruppe. Dann heißt Γ *beinahe konvex*, wenn es eine Konstante N gibt, sodass für alle k und $g, h \in B_1(k)$ mit $d(g, h) = 2$ gilt, dass es einen Kantenzug mit Länge kleiner als N gibt, der g und h verbindet. Diese Eigenschaft wurde erstmals von Cannon in [C87] studiert, der aus der Tatsache, dass ein Cayley-Gruppe beinahe konvex ist, die Existenz eines Algorithmus zur Konstruktion von $B_1(n)$ nachwies und Klassen von Gruppen angab, die beinahe konvexe Cayley-Graphen haben.

Eine schwächere Konvexitätseigenschaft geht auf Kapovich [K02] zurück. Ein Cayley-Graph Γ heißt *minimal beinahe konvex*, wenn es eine Konstante N gibt, sodass für alle $n > N$ und $g, h \in B_1(n)$ mit $d(g, h) = 2$ gilt, dass es in $B_1(n)$ einen Kantenzug der Länge kleiner als $2n$ gibt, der g und h verbindet. Kapovich zeigte, dass eine Gruppe, deren Cayley-Graph minimal beinahe konvex ist, endlich präsentiert ist. Daher kann ein Cayley-Graph von H_2 nicht minimal beinahe konvex und somit auch nicht beinahe konvex sein.

Auch der Cayley-Graph von H_3 bezüglich des Standard-Erzeugendensystems $\{s_{1,2}, s_{1,3}\}$ ist nicht beinahe konvex. Wir skizzieren hier einen Beweis dieser Aussage: Sei g das Element, das die $(n+1)$ -te Kugel der 1-ten Röhre mit der n -ten Kugel der 2-ten Röhre vertauscht. Dann gilt $d(1, g) = 6n + 4$ und es gibt von 1 nach g sowohl eine Geodäte, die mit $s_{1,2}$ beginnt und mit $s_{1,2}^{-1}$ endet, als auch eine Geodäte, die mit $s_{1,2}^{-1}$ beginnt und mit $s_{1,2}$ endet. Daher sind $h_1 := s_{1,2}g$ und $h_2 := s_{1,2}^{-1}g$ beides Elemente, die Abstand $6n + 3$ zur 1 haben und voneinander Abstand 2. Eine Kantenzug von h_1 nach h_2 ,

der $B_1(6n + 3)$ nicht verläßt muss aber mindestens Länge $2n$ haben. Wir vermuten sogar, dass ein solcher Kantenweg mindestens die Länge $12n + 3$ haben muss und somit H_3 auch nicht minimal beinahe konvex ist, allerdings muss diese Frage hier offen bleiben.

Kapitel 4

Ausblick.

Die Klasse der quasi-Automorphismengruppen von lokal endlichen gefärbten Graphen ist sehr reichhaltig und diese Arbeit konnte nur einen kleinen Ausschnitt der interessanten Fragestellungen aus diesem Gebiet behandeln. Hieran anschließend gibt es noch zahlreiche Problem- und Fragestellungen, die einer Bearbeitung harren. Einige davon wollen wir kurz vorstellen.

Da es für jede endlich erzeugte Gruppe lokal-endliche Cayley-Graphen gibt, ist jede endlich erzeugte Gruppe auch Automorphismengruppe eines gefärbten lokal endlichen Graphen. In dieser Arbeit haben wir einige Beispiele von Graphen studiert, für die nicht gilt, dass $\text{QAut}(\Gamma)/S_\Gamma \cong \text{Aut}(\Gamma)$ ist. Daher stellt sich die Frage, welche Gruppen Faktorgruppe einer quasi-Automorphismengruppe modulo den finitären quasi-Automorphismen sind. Das Beispiel der H_n zeigt, dass die frei abelschen Gruppen zu diesen Gruppen gehören und außerdem haben wir in dieser Arbeit gesehen, dass Thompson's Gruppe \mathfrak{V} solch eine Faktorgruppe ist.

Allerdings sind dies keine Beispiele, die über die Ergebnisse aus Abschnitt 1.2 hinausgehen, da die Gruppen \mathfrak{V} und \mathbb{Z}^n für $n \geq 2$ einendige Gruppen sind und sie deshalb bereits die entsprechenden Faktorgruppen ihrer eigenen Cayley-Graphen sind (siehe Lemma 1.6). Aber auch manche 2-endige Gruppen treten als Faktorgruppen in quasi-Automorphismengruppen auf, wie folgendes Beispiel zeigt. Sei Γ' ein Cayleygraph einer endlichen Gruppe G und Γ'' das kartesische Produkt von Γ' und einem Strahl, d.h. $V(\Gamma'') := \{(v, i) | v \in V(\Gamma'), i \in \mathbb{N}\}$ und $E(\Gamma'') := \{((v, i), (v', i)) | (v, v') \in E(\Gamma'), i \in \mathbb{N}\} \cup \{((v, i), (v, i+1)) | v \in V(\Gamma'), i \in \mathbb{N}\}$, wobei die Kanten, die einer Kante aus Γ' entsprechen, die Farbe dieser Kante erben und die Kanten, die Kanten des Strahles sind, eine von diesen verschiedene Farbe erhalten. Sei Γ die Vereinigung von Γ'' und einem weiteren Strahl. Abbildung 4.1 zeigt einen solchen Graphen für die Gruppe $G \cong \mathbb{Z}_4$. Dann ist $\text{QAut}(\Gamma)/S_\Gamma \cong \mathbb{Z} \times G$.

Mit einem ähnlichen Trick können wir für jede Gruppe G einen Graphen Γ konstruieren, dessen quasi-Automorphismengruppe ein semidirektes

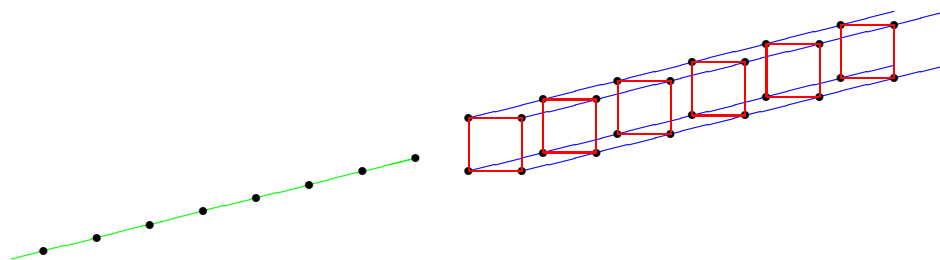


Abbildung 4.1: Ein Graph Γ mit $\text{QAut}(\Gamma) \cong S_\infty \rtimes (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4)$. Alle blauen und grünen Kanten sind von links nach rechts orientiert, alle roten Kanten im Uhrzeigersinn.

Produkt von S_∞ und G ist: Sei Γ' ein beliebiger Cayley-Graph von G und Γ das kartesische Produkt von Γ' und einem Strahl. Dann entspricht die Automorphismengruppe von Γ der Automorphismengruppe von Γ' also der Gruppe G . Da Γ ein 1-endiger Graph ist und sich jeder Automorphismus eines co-endlichen Teilgraphen von Γ zu einem Automorphismus von Γ fortsetzen läßt, folgt die Behauptung analog zu dem Beweis des ersten Teiles von Lemma 1.6.

Da es also für jede Gruppe G verschiedene Graphen gibt, deren quasi-Automorphismengruppe G als Faktorgruppe besitzt, wäre es interessant zu wissen, welche graphentheoretischen Eigenschaften alle so zu einer bestimmten Gruppe assoziierten Graphen gemein haben. Ob es solche Eigenschaften (über die offensichtlichen wie z.B. hat abzählbar viele Ecken hinaus) gibt und welcher Natur sie sind, ist noch gänzlich unbekannt.

Unabhängig von der Frage, was man über die innere Struktur der Quotienten von quasi-Automorphismengruppen aus den Eigenschaften der zu Grunde liegenden Graphen schließen kann, verspricht die Untersuchung von weiteren unendlichen Graphen viele spannende Gruppen mit interessanten und vielleicht auch unerwarteten Eigenschaften zu Tage zu bringen und ist allein schon deshalb eine lohnende Aufgabe.

4.1 Verzopfungen.

Ausgehend von Thompsons Gruppe \mathfrak{Th} haben unabhängig voneinander Matt Brin [B06] und Patrick Dehornoy [De04] die verzopfte Thompson Gruppe BV definiert und untersucht. Diese relativ neu entdeckte Gruppe gilt unter Gruppentheoretikern als interessante Gruppe, die insbesondere für Zwecke der Gruppen-basierten Kryptographie immer wieder als Kandidat für neue Ergebnisse gehandelt wird.

Für die quasi-Automorphismengruppe des binären Wurzelbaumes gibt es einen natürlichen Weg, diese ebenfalls zu Verzopfen. Heuristisch gesprochen geschieht dies wie folgt: Wir ersetzen den Normalteiler der finitären quasi-

Automorphismen S_Θ , der zu S_∞ isomorph ist, durch die Zopfgruppe B_∞ , indem wir jede inner Ecke von Θ als Strang des Zopfes auffassen. Dadurch erhalten wir als Erweiterung der Thompson Gruppe \mathfrak{A} die verzopfte quasi-Automorphismengruppe $\text{BQAut}(\Theta)$.

Genauer gesagt: Wir betten den binären Wurzelbaum Θ in die Ebene ein und lassen in jeder Ecke einen Strang beginnen. Die Enden der Fäden werden dabei wieder an die Ecken einer Kopie des binären Wurzelbaumes in einer zu dieser Ebene parallelen Ebene befestigt. Die Gruppe $\text{BQAut}(\Theta)$ besteht aus all jenen Zöpfen dieser Stränge, die auf allen Zusammenhangskomponenten der oberen Kopie von Θ , aus der eine Kreisscheibe um die Wurzel entfernt wurde, einer Kämmung entsprechen.

Diese Gruppe besitzt als weiteren Normalteiler die Untergruppe PB der reinen Zöpfe. Eine dazu isomorphe Gruppe ist auch Normalteiler in BV. Die Faktorgruppe $\text{BQAut}(\Theta)/\text{PB}$ ist isomorph zur entsprechenden Faktorgruppe BV/PB . Franz Degenhardt hat in seiner Dissertation [Dg00] eine verzopfte Version der Houghton Gruppen untersucht. Die dort verwendete Definition passt so in diesen Kontext, dass sie Untergruppeneinbettung von H_n in $\text{QAut}(\Theta)$ sich zu einer Einbettung der verzopften Versionen hochhebt.

Eine genauere Untersuchung der verzopften quasi-Automorphismengruppe des binären Wurzelbaumes sollte es ermöglichen, sowohl neue Einsichten über die verzopfte Thompson Gruppe und die verzopften Houghton-Gruppen zu gewinnen, als auch eine für die Zwecke der kryptographischen Gruppentheorie interessante Gruppe bereitzustellen.

4.2 Das co-Wort-Problem zum Zweiten.

Das in Abschnitt 2.5 diskutierte co-Wort-Problem bietet in zwei verschiedene Richtungen Ansatzpunkte für weitere Forschung. Einerseits gibt es das Resultat von Holt, Reese, Röver und Thomas, das besagt, dass das co-Wort-Problem einer Untergruppe einer Gruppe G kontext-frei ist, wenn dies in der Gruppe G bereits der Fall ist. Dies könnte sich als hilfreich erweisen, wenn man zeigen will, dass eine bestimmte Gruppe keine Untergruppe von \mathfrak{A} ist. Zum Beispiel ist aus [HRRT05] bekannt, dass das co-Wort-Problem der Baumslag-Solitar-Gruppen $\text{BS}(p, q)$ für teilerfremde p und q nicht kontext-frei ist. Somit können diese Gruppen keine Untergruppen von \mathfrak{A} sein.

Andererseits harrt die Frage nach der Klassifikation der Gruppen mit kontext-freiem co-Wort-Problem einer Antwort. Bisher sind ausser den Untergruppen von $\text{QAut}(\Theta)$ keine Gruppen bekannt, deren co-Wort-Problem kontext-frei ist. Bei dem Ergebnis von Muller und Schupp über die Gruppen mit kontext-freiem Wort-Problem hat die Operation auf Bäumen durch Automorphismen eine zentrale Rolle gespielt und es ist durchaus möglich, dass die Operation auf einem Baum durch quasi-Automorphismen das typische für Gruppen mit kontext-freiem co-Wort-Problem ist. Immerhin erinnert

die Operation der Zustandsübergangsrelationen auf dem Stack stark an eine Operation durch quasi-Automorphismen auf einem Baum.

In welchem Umfang dieses heuristische Argument bei der Beantwortung der Frage, welche Gruppen kontext-freies co-Wort-Problem besitzen, zum Tragen kommt ist allerdings noch offen. Auf jeden Fall lohnt es sich, die Interaktion von quasi-Automorphismen und dem co-Wort-Problem genauer zu untersuchen um ein tieferes Verständnis für sowohl die Gruppen der quasi-Automorphismen, als auch das co-Wort-Problem zu erlangen.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Der Cayley-Graph Γ von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$	5
1.2	Der Cayley-Graph Γ von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$	6
2.1	Der binäre Wurzelbaum und der ebene binäre Wurzelbaum	10
2.2	Der Baum der 2-adischen Standardintervalle	12
2.3	Die Erzeugenden von \mathfrak{F}	13
2.4	Multiplikation in \mathfrak{F}	14
2.5	Das zusätzliche Erzeugende für \mathfrak{T}	16
2.6	Die Erzeugenden von \mathfrak{V}	18
2.7	Erweiterung eines Diagrammes aus $\text{QAut}(\Theta)$	19
2.8	\mathfrak{F} ist Untergruppe von $\text{QAut}(\Theta)$	22
2.9	Die Einbettung von \mathfrak{F} läßt sich nicht auf \mathfrak{T} fortsetzen.	23
2.10	Die Urbilder der Erzeugenden von \mathfrak{V}	27
2.11	Die Erzeugenden der S_Θ	28
3.1	Die Graphen $*^1, *^2, *^3$	44
3.2	Der Krön-Graph mit Sackgassen beliebiger Rückkehrtiefe	52
4.1	Ein Graph Γ mit $\text{QAut}(\Gamma) = S_\infty \rtimes (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4)$	56

Literaturverzeichnis

- [BaHP98] Y.G. BAIK, J. HARLANDER UND S. J. PRIDE, 'The geometry of group extensions', *J. Group Theory* **1** (1998), 395-416.
- [Bg97] O.V. BOGOPOL'SKIĬ, 'Infinite commensurable hyperbolic groups are bi-Lipschitz equivalent', *Algebra and Logic* **36**(3) (1997), 155-163.
- [BoHi74] W. BOONE UND G. HIGMAN, 'An algebraic characterization of the solvability of the word problem', *J. Austral. Math. Soc.* **18** (1974), 41-53.
- [BSq79] M.G. BRIN UND C.C. SQUIER, 'Groups of piecewise linear homeomorphisms of the real line' *Invent. Math.* **79**(1985), 485-498.
- [B06] M.G. BRIN, 'The Algebra of Strand Splitting. I. A Braided Version of Thompson's Group V', *J. Group Theory* **10** (2007), 757-788.
- [Br87] K. BROWN, 'Finiteness properties of groups', *J. Pure and Applied Algebra* **44** (1987), 45-75.
- [CFP96] J.W. CANNON, W.J. FLOYD UND W.R. PARRY, 'Introductory Notes on Richard Thompson's Groups', *L'Enseignement Mathématique* **42** (1996), 215-256.
- [C87] J.W. CANNON, 'Almost convex groups', *Geom. Dedicata* **22** (1987), 197-210.
- [CITa04] S. CLEARY UND J. TABACK, 'Combinatorial properties of Thompson's group F', *Trans. Amer. Math. Soc.* **356**(7) (2004), 2825-2849.
- [CITa05] S. CLEARY UND J. TABACK, 'Dead end words in lamplighter groups and other wreath products', *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **56**(2) (2005), 165-178.
- [Dg00] F. DEGENHARDT, 'Endlichkeitseigenschaften gewisser Gruppen von Zöpfen unendlicher Ordnung', Dissertation, Frankfurt, 2000.

- [D10] M. DEHN, 'Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes', *Math. Ann.* **69/1** (1910), 137–168.
- [De04] P. DEHORNOY, 'Geometric presentations for Thompson's groups', *J. Pure and Applied Algebra*, **203** (2005), 1-44.
- [F43] H. FREUDENTHAL, 'Neuaufbau der Endentheorie.', *Ann. of Math.* **43** (1942), 261-279.
- [G08] R. GEOGHEGAN, 'Topological Methods in Group Theory', *Graduate Texts in Mathematics* **243**, Springer (2008).
- [Gi66] S. GINSBURG, 'The mathematical structure of context-free languages', McGraw-Hill, New York, 1966.
- [HRRT05] D.F. HOLT, S.E. REES, C.E. RÖVER UND R.M. THOMAS, 'Groups with context-free co-word problem', *J. London Math. Soc.* **71/3** (2005) 643-657.
- [Hp43] H. HOPF, 'Enden offener Räume und unedliche diskontinuierliche Gruppen', *Comment. Math. Helv.* **15** (1943), 27-32.
- [Ho78] C.H. HOUGHTON, 'The first cohomology of a group with permutation module coefficients', *Arch. Math.* **31** (1978/79), 254-258.
- [K02] I. KAPOVICH, 'A note on the Poenaru condition', *J. of group theory* **5** (2002), 119-127.
- [LS07] J. LEHNERT UND P. SCHWEITZER, 'The co-word problem for the Higman-Thompson group is context-free', *Bull. London Math. Soc.* **39** (2007), 235-241.
- [L07] J. LEHNERT, 'Some remarks on depth of dead ends', preprint, *arXiv:math.GR/0703636*, 2007.
- [Ma73] A.N. MASLOV, 'Cyclic shift operation for languages', *Problems of Inform. Transm.* **9/4**, 1973, 333-338.
- [MKTh73] R. MCKENZIE UND R.J. THOMPSON, 'An elementary construction of unsolvable word problems in group theory', *Word Problems* (W.W. Boone, F.B. Cannonito and R.C. Lyndon, eds), *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, **71**, North-Holland, Amsterdam (1973), 457-478.
- [MSp83] D.E. MULLER UND P.E. SCHUPP, 'Groups, the theory of ends, and context-free languages', *J. Comp. System Sci.* **26** (1983), 295-310.

- [N55] P.S. NOVIKOV, 'On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory', *Trudy Mat. Inst. Steklov* **44** (1955), 1-143.
- [R99] C.H.E.W. RÖVER, 'Subgroups of finitely presented simple groups', Ph.D.-thesis, Oxford, 1999.
- [Ro82] D.J.S. ROBINSON, 'A course in the theory of groups', *Graduate Texts in Mathematics* **80**, Springer (1982)
- [RiWa06] T.RILEY UND A.D. WARSHALL, 'The unbounded dead-end depth property is not a group invariant', *Internat. J. Algebra Comput.*, **16**(5) (2006), 969-984. Corrected version in preparation.
- [Se93] V. SERGIESCU, 'Graphes planaires et présentations des groupes de tresses' *Math. Z.* **214** (1993), 477-490.
- [Su06] Z. ŠUNIĆ, 'Frobenius problem and dead ends in integers', *J. Number Theory*, to appear.
- [ScW77] P. SCOTT UND T. WALL, 'Topological Methods in Group Theory', in 'Homological Group Theory' (ed. C.T.C. Wall), *London Mathematical Society Lecture Notes Series*, **36**, Cambridge University Press, 1977.
- [Wa06] A.D. WARSHALL, 'Deep pockets in Lattices and other groups', preprint, <http://www.arxiv.org/math.GR/0611575>, 2006.

Curriculum Vitae

PERSÖNLICHES Name: Jörg Lehnert
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch
Geburtstag: 16. Mai 1976
Geburtsort: Hanau

AUSBILDUNG 1982-1986 Ysenburgschule Hailer-Meerholz
Grundschule
1986-1995 Grimmelshausen Gymnasium Gelnhausen
Gymnasium
Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife mit Note 2,0
1996-2003 Goethe-Universität Frankfurt
Universität
Studium der Mathematik mit Nf. Theoretische Physik
Abschluß Diplom, Abschlußnote „mit Auszeichnung“
Diplomarbeit: „Injektive Hüllen metrischer Räume“

BERUFSERFAHRUNG 1999-2003 Studentische Hilfskraft Uni Frankfurt
2001 Zweimonatiges Praktikum Allianz Leben
2003-2008 Wissenschaftlicher Mitarbeiter Uni Frankfurt

WEHRDIENST 1995-1996 Grundwehrdienstleistender
Im Rahmen der Wehrpflicht viermonatige Teilnahme
am internationalen NATO-Einsatz GECONIFOR in Ex-
Jugoslawien.

MANDATE 1997-heute Stadtverordneter in Gelnhausen
2003-heute Mitglied des Verwaltungsrates der kath. Kirche
Meerholz-Hailer

PUBLIKATIONEN *The coword problem for the Higman-Thompson group is context-free.*
joint with Pascal Schweitzer, Bull. London Math. Soc. 39 (2007)
235-241

Some remarks on depth of dead ends in groups.
Preprint, auf meiner Homepage www.jlehnert.eu verfügbar.

AKADEMISCHE LEHRER Prof. Baumeister, Prof. Behr, Prof. Bieri, Prof. Bliedtner, Prof. Burde, Prof. Bux, Prof. Harlander, Prof. Johannson, Prof. Kersting, Prof. Kulze, Prof. Maruhn, Prof. Steuding, Prof. Wakolbinger, Prof. Weidmann und Prof. Wolfart.