Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. I.

Von Herrn *Paul Epstein* in Straßburg i. E.

Den Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit bildete der Gedanke, die Lehre von den gewöhnlichen Kettenbrüchen auf die begrifflich einfachsten Elemente zurückzuführen, in ähnlicher Weise etwa, wie allgemeine lineare Substitutionen auf andere von besonders einfacher Natur zurückgeführt werden. Als Weg hierzu bot sich naturgemäß die Auflösung des Euklidischen Algorithmus in eine Reihe von elementaren Schritten, indem nämlich alle Teilquotienten $= 1$ angenommen werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ersetzung des Divisionsverfahrens durch eine Folge von Subtraktionen. So gelangt man zum Begriff der *Zahlenkette*, den wir an die Spitze unserer Darstellung gesetzt haben. Er führt unmittelbar zu einer besonderen Art von Kettenbrüchen — wir haben sie *Elementarkettenbrüche* (abgekürzt 𝔈𝔎.) genannt —, bei denen sämtliche Teilnenner $+1$, alle Teilzähler entweder $+1$ oder -1 sind. Jede reelle Zahl läßt sich durch einen 𝔈𝔎. darstellen, und *seine Näherungsbrüche sind die Haupt- und Nebennäherungsbrüche der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung* *). Von den 𝔈𝔎. gelangt man in einfachster Weise zu der Christoffel-Hurwitzschen *Charakteristik*, und sie gibt unmittelbar die Ver-

---

*) Dieselbe Eigenschaft haben die von Herrn *Vahlen* (Journ. f. Math. Bd. 115 S. 230) betrachteten „längsten Kettenbrüche" mit den Teilnennern 1 und 2. Die 𝔈𝔎. sind länger infolge des Auftretens der „überzähligen Näherungsbrüche". Sie gehören auch nicht zu den „halbregelmäßigen Kettenbrüchen". (*Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen S. 154, *Tietze*, Math. Ann. Bd. 70.)

wandlung des EK. in einen gewöhnlichen Kettenbruch und umgekehrt. Damit wäre die ursprüngliche Aufgabe, die Theorie der gewöhnlichen Kettenbrüche auf möglichst einfacher Grundlage aufzubauen, erledigt. Aber darüber hinaus haben die EK. auch neben den gewöhnlichen Kettenbrüchen eine selbständige Bedeutung infolge des Umstandes, daß *zwei reziproke Zahlen durchaus verschiedene EK.-Entwicklungen besitzen.* Dies hat weittragende Folgen für die Theorie der unimodularen ganzzahligen Substitutionen $\binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$. Es tritt nämlich dort an Stelle des bekannten Satzes, daß die gewöhnlichen Kettenbrüche für zwei äquivalente Zahlen von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen, der Satz, daß die EK.-Entwicklungen für zwei äquivalente Zahlen von einer bestimmten Stelle an *entweder übereinstimmen oder zueinander reziprok sind* (§ 4, Satz 8). Dadurch offenbart sich eine Scheidung der linearen Substitutionen in zwei Arten, in „*gerade*“ und „*ungerade*“ Substitutionen, und diese Einteilung tritt vollständig gleichberechtigt neben die übliche Einteilung in „eigentliche“ und „uneigentliche“ Substitutionen. So tritt neben die Gruppe $\mathfrak{A}$ der *eigentlichen* Substitutionen (Modulgruppe) die Gruppe $\mathfrak{B}$ der *geraden* Substitutionen, und zu ihnen kann man eine Gruppe $\mathfrak{C}$ fügen, die durch die *eigentlichen geraden* und die *uneigentlichen ungeraden* Substitutionen gebildet wird. Diese drei Gruppen sind isomorph, und*) es gibt in der Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen keine weitere Untergruppe vom Index 2. Sie enthalten als gemeinsame Untergruppe vom Index 2 die Gruppe der eigentlichen geraden Substitutionen**), von der wiederum die Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe eine Untergruppe vom Index 3 darstellt. Wegen der Gleichberechtigung der Gruppen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ muß es zu jeder mit der *Modulgruppe* zusammenhängenden Theorie eine entsprechende Theorie im Gebiete der Gruppe $\mathfrak{B}$ und der Gruppe $\mathfrak{C}$ geben. Dies wird in einer zweiten Abhandlung für die *Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen* innerhalb der Gruppe der geraden Substitutionen durchgeführt werden, und es werden sich dabei die Elementarkettenbrüche als das natürliche Hilfsmittel erweisen.

---

*) Auf diese (vermutlich nicht neue) Tatsache hat mich Herr *J. Schur* aufmerksam gemacht.

**) Diese Gruppe ist identisch mit der Untergruppe Γ_2 bei *Klein-Fricke*, Elliptische Modulfunktionen Bd. I, S. 288.

§ 1. Die Zahlenkette.

Aus zwei gegebenen reellen Zahlen a_0, a_1 bilde man die Folge von positiven Zahlen:

$$(1.)\qquad a_2 = |a_0 - a_1|,\ a_3 = |a_1 - a_2|,\ a_4 = |a_2 - a_3|, \ldots.$$

Wir nennen dann $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine *Kette* von Zahlen und bezeichnen sie durch $[a_0, a_1]$.

Beispiel. Die Kette [28, 13] ist

$$28, 13, 15, 2, 13, 11, 2, 9, 7, 2, 5, 3, 2, 1, {\scriptstyle 1, 0, 1, 1, 0, 1, \ldots}.$$

Wenn, wie im vorliegenden Falle, zwei aufeinanderfolgende Zahlen einander gleich (allgemein $= d$) werden, so wiederholen sich von da ab die Zahlen $d, 0, d$ unbegrenzt, die Reihe wird *periodisch*. Nur in diesem Falle kann die Zahl 0 auftreten. Wir lassen gewöhnlich diesen periodischen Teil fort und nennen dann die Kette eine *eigentliche abbrechende Kette*. Nehmen wir aber eine gewisse Anzahl von Perioden hinzu, so haben wir eine *überzählige abbrechende Kette*. Wenn nichts anderes bemerkt ist, verstehen wir unter einer abbrechenden Kette immer eine eigentliche abbrechende Kette.

Sind a_0 und a_1 *ganze* Zahlen, so ist ihr größter gemeinsamer Teiler gleichzeitig Teiler von jeder Zahl der Kette, die Kette bricht ab und endigt mit dem größten gemeinsamen Teiler von a_0 und a_1. Sind a_0, a_1 relativ prim, so endigt die Kette immer mit den Zahlen 2, 1. Sie möge dann *primitiv* heißen.

Aus der Definition (1.) ist ersichtlich, daß jede Zahl der Kette in der Form

$$\alpha\, a_0 - \beta\, a_1$$

mit ganzzahligen Koeffizienten α, β darstellbar ist. Es kann also die Zahl 0 nur auftreten, wenn das Verhältnis $\frac{a_0}{a_1}$ rational ist, und wir haben den Satz:

1. *Die Kette* $[a_0, a_1]$ *bricht dann und nur dann ab, wenn* a_0 *und* a_1 *ein rationales Verhältnis haben.*

Es seien nun a_0, a_1 ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler. Wir teilen die abbrechende Kette $[a_0, a_1]$ in *Abschnitte*, sodaß in einem Abschnitt *jede Zahl kleiner, als die vorhergehende* ist; sobald eine Zahl größer ist, als die vorangehende, beginnt ein neuer Abschnitt. Jeder Abschnitt — allenfalls mit Ausnahme des ersten (wenn $a_0 < a_1$ ist) — besteht aus *mindestens zwei Zahlen,* denn wenn mit der Zahl a_i ein Abschnitt beginnt, so ist $a_{i-1} < a_i$, also $a_{i+1} = a_i - a_{i-1} < a_i$, d. h. a_{i+1} gehört zum gleichen Abschnitt wie a_i. Auch der letzte Abschnitt einer eigentlichen Kette enthält mindestens die zwei Zahlen 2, 1, dagegen besteht bei einer überzähligen Kette der letzte Abschnitt nur aus der einen Zahl 1, der vorletzte Abschnitt endigt dann mit den Zahlen 1, 0. Es ist, wenn a_{i-1} die Zahl am Schluß eines Abschnitts ist:

$$a_{i+1} = a_i - a_{i-1}, \quad a_{i+2} = a_i - a_{i+1},$$

also

$$(2.) \qquad a_{i+2} = a_{i-1}.$$

Die Zahlen am Schluß eines jeden Abschnitts wiederholen sich drei Stellen weiter.

Es möge so die Kette in Abschnitte von $\alpha, \beta, \gamma, \dots \varrho, \sigma, \tau$ Zahlen zerfallen. Wir nennen dann

$$(3.) \qquad \{\alpha, \beta, \gamma, \dots \varrho, \sigma, \tau\}$$

die *Gliederung* der Kette, und es sind darin sicher alle Zahlen mit Ausnahme der ersten und letzten > 1. Unter dieser Bedingung kann aber *jeder* Komplex (3.) von ganzen positiven Zahlen als *Gliederung einer bestimmten Kette* aufgefaßt werden, denn es besteht der Satz:

2. *Eine primitive Kette ist durch Angabe ihrer Gliederung vollständig bestimmt.*

Zum Beweis brauchen wir nur das Verfahren anzugeben, um aus der Gliederung die Kette zu gewinnen, und schicken folgendes voraus: Es seien u_1, u_2 zwei positive Zahlen ($u_1 < u_2$). Eine endliche oder unendliche Folge von Zahlen

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \dots,$$

bei der von u_3 ab *jede Zahl die Summe der beiden vorhergehenden* ist, heiße eine *Fibonaccische Folge* (u_1, u_2).

Wir bilden nun, wenn $\tau > 1$ ist, die *Fibonaccische Folge* (1, 2) *mit τ Gliedern* und schreiben sie von rechts nach links. Dann haben wir den letzten Abschnitt der gesuchten Kette. Aus den beiden letzten Gliedern $u_{\tau-1}, u_\tau$ berechnen wir

$$v_1 = u_\tau - u_{\tau-1}, \qquad v_2 = u_\tau + v_1$$

und bilden die *Fibonaccische Folge* (v_1, v_2) *mit* σ *Gliedern.* Aus ihren beiden letzten Gliedern berechnen wir

$$w_1 = v_\sigma - v_{\sigma-1}, \qquad w_2 = v_\sigma + w_1$$

und bilden die *Fibonaccische Folge* (w_1, w_2) *mit* ϱ *Gliedern.* So berechnet man zu jeder Zahl der vorgelegten Gliederung eine Fibonaccische Folge. *Die Gesamtheit dieser Folgen,* von rechts nach links geschrieben, *bildet die gesuchte Kette,* die wir mithin als die Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}$ bezeichnen können. Ist aber $\tau = 1$, so besteht der letzte Abschnitt aus der einen Zahl 1, der vorletzte Abschnitt ist die *Fibonaccische Folge* (0, 1) *mit* σ *Gliedern,* und die übrigen Abschnitte werden nach dem obigen Verfahren gefunden. Man erhält die überzählige Kette $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, 1\}$.

Durch Weglassung der Perioden wird eine überzählige zu einer eigentlichen Kette. So wird, wenn $\sigma > 3$ ist, die überzählige Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma, 1\}$ zur eigentlichen Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma - 2\}$; wir schreiben

$$\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma - 2\}.$$

Ist aber $\sigma = 2$, so ist

$$\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, 2, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \varrho\},$$

ist $\sigma = 3$, so ist $\{\alpha, \beta, \ldots \varrho, \sigma - 2\}$ wieder eine überzählige Kette und läßt sich weiter reduzieren.

Allgemein sei ν der letzte Abschnitt, der *nicht* $= 3$ ist, und es sei $\nu > 3$. Dann ist die überzählige Kette

$$\{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, 3, 3, \ldots 3, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu - 2\}. \tag{4.}$$

Ist aber $\nu = 2$, so ist

$$\{\alpha, \beta, \ldots \mu, 2, 3, 3, \ldots 3, 1\} = \{\alpha, \beta, \ldots \mu\}. \tag{5.}$$

Beispiel. Aus der Gliederung

$$\{2, 2, 3, 3, 4\}$$

ergibt sich die Kette

28 13 | 15 2 | 13 11 2 | 9 7 2 | 5 3 2 1.

Wir leiten nun aus einer Kette eine neue Kette ab, indem wir den letzten Abschnitt um eine Zahl verkürzen. Aus der Kette $\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}$ entsteht so die *erste abgeleitete Kette* $\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau - 1\}$. Im vorliegenden Beispiel ist dies die Kette $\{2, 2, 3, 3, 3\}$:

15 7 | 8 1 | 7 6 1 | 5 4 1 | 3 2 1;

aus ihr entsteht die *zweite abgeleitete Kette* {2, 2, 3, 3, 2}:

13 6 | 7 1 | 6 5 1 | 4 3 1 | 2 1.

Die nächste abgeleitete Kette {2, 2, 3, 3, 1} ist eine überzählige Kette:

2 1 | 1 0 | 1 1 0 | 1 1 0 | 1,

und sie reduziert sich, wie man sieht, übereinstimmend mit (5.) auf {2}, d. i. die einfache Kette 2, 1. Wir behalten aber die überzählige Kette bei und können aus ihr wieder eine Kette {2, 2, 3, 3} ableiten, und so fortfahrend erhalten wir schließlich aus der zugrunde gelegten Kette {2, 2, 3, 3, 4} eine *vollständige Tafel abgeleiteter Ketten:*

28 13	15 2	13 11 2	9 7 2	5 3 2 1
15 7	8 1	7 6 1	5 4 1	3 2 1
13 6	7 1	6 5 1	4 3 1	2 1
2 1	1 0	1 1 0	1 1 0	1
11 5	6 1	5 4 1	3 2 1	
9 4	5 1	4 3 1	2 1	
2 1	1 0	1 1 0	1	
7 3	4 1	3 2 1		
5 2	3 1	2 1		
2 1	1 0	1		
3 1	2 1			
1 0	1			
2 1				
1				

Diese Tafel hat bemerkenswerte Eigenschaften. Es ist nicht nur jede Horizontalreihe, sondern auch *jede Vertikalreihe eine Kette*, genauer: Von jeder Stelle der Tafel geht nach rechts und nach unten eine Kette, und es hat *die vertikale Kette die umgekehrte Gliederung wie die horizontale Kette.* In unserem Beispiel hat die erste vertikale Kette die Gliederung {4, 3, 3, 2, 2}; sie möge die *erste Adjungierte* der vorgelegten Kette heißen. Die darauf folgenden Vertikalreihen bilden die zweite, dritte,... Adjungierte. Jede Adjungierte ist die abgeleitete Kette der vorhergehenden. Ist $[a_0, a_1]$ die gegebene, $[b_0, b_1]$ die erste abgeleitete Kette, so ist $[a_0, b_0]$ die erste, $[a_1, b_1]$ die zweite Adjungierte. Umgekehrt ist die gegebene Kette die erste Adjungierte ihrer Adjungierten.

Da die Tafel auch für die erste Adjungierte eine vollständige Tafel abgeleiteter Ketten darstellt, so zerfällt sie in *vertikale* und *horizontale Abschnitte. Jede Kette am Ende eines Abschnitts ist überzählig und stimmt mit der drittfolgenden Kette überein.* Dies folgt unmittelbar aus Formel (2).

Sind

$$\begin{matrix} a_{i-1} & a_i & a_{i+1} \\ b_{i-1} & b_i & b_{i+1} \\ c_{i-1} & c_i & c_{i+1} \end{matrix}$$

9 Zahlen in je 3 aufeinanderfolgenden Horizontal- und Vertikalreihen, so sind alle aus der Matrix dieser Zahlen gebildeten Unterdeterminanten 2. Grades gleich ± 1 und die Determinante aus den 9 Zahlen ist Null.

Man hat hiernach ein einfaches *Verfahren zur Auflösung der Diophantischen Gleichungen*

$$ax - by = \pm 1.$$

Man bilde die Kette $[a, b]$ und ihre abgeleitete Kette. Dann liefern die beiden ersten Zahlen der abgeleiteten Kette Lösungen y, x der einen Gleichung, und es sind $b - x$ und $a - y$ Lösungen der andern Gleichung.

Diese Eigenschaften der vollständigen Tafel der abgeleiteten Ketten werden evident, wenn wir nun dazu übergehen, den *Zusammenhang der Zahlenketten mit den Kettenbrüchen* zu betrachten.

§ 2. Endliche Elementarkettenbrüche.

Die Bildung der Zahlenkette ist ein besonderer *Euklidischer Algorithmus*, bei dem *alle Teilquotienten $= 1$* sind, und zwar für die Kette mit der Gliederung $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot a_1 + a_2 \\ a_1 &= 1 \cdot a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ \hline a_{\alpha-1} &= 1 \cdot a_\alpha - a_{\alpha+1} \\ a_\alpha &= 1 \cdot a_{\alpha+1} + a_{\alpha+2} \\ &\vdots \\ \hline a_{\alpha+\beta-1} &= 1 \cdot a_{\alpha+\beta} - a_{\alpha+\beta+1} \\ a_{\alpha+\beta} &= 1 \cdot a_{\alpha+\beta+1} + a_{\alpha+\beta+2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hieraus entspringt eine Kettenbruchentwicklung

$$\frac{a_0}{a_1} = \underbrace{1 + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \cdots + \frac{1}{|1}}_{\alpha} \underbrace{- \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \cdots + \frac{1}{|1}}_{\beta} \underbrace{- \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \cdots + \frac{1}{|1}}_{\gamma} - \cdots,$$

also ein Kettenbruch, der ebensoviele Teilnenner, sämtlich vom Werte $+1$, besitzt, als die Anzahl der Zahlen in der Kette beträgt, und bei dem die ersten Teilzähler in jedem Abschnitt (vom zweiten Abschnitt an) gleich -1, alle übrigen Teilzähler gleich $+1$ sind. Einen solchen Kettenbruch nennen wir *Elementarkettenbruch* (abgekürzt $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.) und können ihn vollkommen verständlich durch die Gliederung der Kette bezeichnen, indem wir ihn schreiben:

$$(1.) \qquad \mathfrak{E}\,\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau\}.$$

$\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau\}$ nennen wir dann auch die Gliederung des Kettenbruchs, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ heißen die Abschnitte des Kettenbruchs. Es besteht also der Satz:

1. *Zu jeder Kette* $[a_0, a_1]$ *gehört ein Elementarkettenbruch von der gleichen Gliederung, und sein Wert ist* $\frac{a_0}{a_1}$.

So gehört zu der Kette [28, 13] der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.:

$$\mathfrak{E}\,\{2, 2, 3, 3, 4\}$$

oder

$$\frac{28}{13} = 1 + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} - \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1} + \frac{1}{|1}.$$

Jeder Abschnitt eines $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. außer dem ersten und letzten besteht aus mindestens zwei Gliedern, d. h. *es folgen niemals zwei Teilzähler* -1 *aufeinander*, und umgekehrt ist *jeder derartige Kettenbruch* (mit lauter Teilnennern $+1$ und Teilzählern ± 1) *ein* $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. und einer bestimmten Kette zugeordnet. Zur Darstellung von *negativen* Zahlen werden wir auch $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. zulassen, bei denen die beiden ersten Abschnitte gleich 1 sind (s. u. Formel (14.)).

Zu einer eigentlichen Kette gehört ein *eigentlicher* $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.; bei ihm ist der letzte Abschnitt $\tau > 1$, der Kettenbruch schließt mit $\frac{+1}{|\,1}$. Einer überzähligen Kette entspricht ein *überzähliger* $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. mit $\tau = 1$; er schließt mit $\frac{-1}{|\,1}$.

Den abgeleiteten Ketten entsprechen (in umgekehrter Reihenfolge) die *Näherungsbrüche* des 𝔈𝔎. Es sind dies die Elementarkettenbrüche (wir lassen das Zeichen 𝔈 weg):

$$\begin{array}{ccc} \{1\}; & \{2\}; \ldots & \{\alpha\} \\ \{\alpha, 1\}; & \{\alpha, 2\}; \ldots & \{\alpha, \beta\} \\ \{\alpha, \beta, 1\}; & \{\alpha, \beta, 2\}; \ldots & \{\alpha, \beta, \gamma\} \\ & \vdots & \\ \{\alpha, \beta, \ldots \sigma, 1\}; & \{\alpha, \beta, \ldots \sigma, 2\}; \ldots & \{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}. \end{array}$$

Die Näherungsbrüche am Beginn eines jeden Abschnitts (vom zweiten Abschnitt an) sind *überzählig*; *jeder von ihnen ist gleich dem um 3 Stellen zurückliegenden Näherungsbruch.* Die übrigen Näherungsbrüche sind die *eigentlichen* Näherungsbrüche. Bei dem obigen 𝔈𝔎. hat man die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1} \;\Big|\; \frac{1}{0}, \frac{3}{1} \;\Big|\; \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3} \;\Big|\; \frac{2}{1}, \frac{9}{4}, \frac{11}{5} \;\Big|\; \frac{2}{1}, \frac{13}{6}, \frac{15}{7}, \frac{28}{13}.$$

Hier wird auch der Näherungsbruch $\frac{1}{0}$ als überzählig angesehen, indem man dem Näherungsbruch $\frac{1}{1}$ den Bruch $\frac{1}{0}$ als nullten eigentlichen Näherungsbruch vorausschickt. Für die Berechnung der Näherungsbrüche besteht das Gesetz:

Der Zähler (Nenner) eines $\begin{array}{c}\textit{eigentlichen}\\ \textit{überzähligen}\end{array}$ *Näherungsbruches ist die* $\begin{array}{c}\textit{Summe}\\ \textit{Differenz}\end{array}$ *der beiden vorhergehenden Zähler (Nenner).*

Um die Gesamtheit der Näherungsbrüche einfach zu übersehen, verstehen wir unter einer *gebrochenen Fibonaccischen Folge* von n Gliedern eine Reihe von n Brüchen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots$, deren Zähler und Nenner Fibonaccische Folgen sind, sodaß also $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i + a_{i-1}}{b_i + b_{i-1}}$ ist, und bezeichnen eine solche gebrochene Folge durch

$$\frac{(a_1, a_2)}{(b_1, b_2)_n}.$$

Es sei nun zunächst $\alpha > 1$. Dann bilden die α ersten Näherungsbrüche die gebrochene Folge $\frac{(1, 2)}{(1, 1)_\alpha}$. Die beiden letzten Brüche seien $\frac{a_{\alpha-1}}{a'_{\alpha-1}}, \frac{a_\alpha}{a'_\alpha}$; man berechnet

$$b_1 = a_\alpha - a_{\alpha-1}, \quad b_2 = a_\alpha + b_1$$
$$b_1' = a_\alpha' - a_{\alpha-1}', \quad b_2' = a_\alpha' + b_1'$$

und hat in der gebrochenen Folge $\frac{(b_1, b_2)}{(b_1', b_2')_\beta}$ die β Näherungsbrüche des zweiten Abschnitts. Die beiden letzten Näherungsbrüche liefern

$$c_1 = b_\beta - b_{\beta-1}, \quad c_2 = b_\beta + c_1$$
$$c_1' = b_\beta' - b_{\beta-1}', \quad c_2' = b_\beta' + c_1',$$

und die gebrochene Folge $\frac{(c_1, c_2)}{(c_1', c_2')_\gamma}$ gibt die γ Näherungsbrüche des dritten Abschnitts. So erhält man der Reihe nach zu jedem Abschnitt des $\mathfrak{EK}$. die zugehörigen Näherungsbrüche.

Ist aber $\alpha = 1$, so ist $\frac{1}{1}$ der erste Näherungsbruch; die β Näherungsbrüche des zweiten Abschnitts bilden die gebrochene Folge $\frac{(0, 1)}{(1, 2)_\beta}$, und dann rechnet man wie oben weiter.

Aus der Bildungsweise der Näherungsbrüche erkennt man sofort:

2. *Die Zähler und Nenner sämtlicher Näherungsbrüche bilden* (von rückwärts genommen) *Zahlenketten von der umgekehrten Gliederung, wie der $\mathfrak{EK}$. und sein erster vollständiger Quotient*, d. h. es sind die Ketten

$$\{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha\} \text{ und } \{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha - 1\}.$$

Sie bilden mithin die erste und zweite Adjungierte der dem $\mathfrak{EK}$. zugeordneten Zahlenkette $[a_0, a_1]$.

Ist $[b_0, b_1]$ die erste abgeleitete Kette von $[a_0, a_1]$, so kann man die Gesamtheit der Näherungsbrüche symbolisch durch den Ausdruck

$$\frac{[a_0, b_0]}{[a_1, b_1]}$$

zusammenfassen, und es ist

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\} \\ \frac{b_0}{b_1} &= \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau - 1\} \\ \frac{a_0}{b_0} &= \mathfrak{E}\{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha\} \\ \frac{a_1}{b_1} &= \mathfrak{E}\{\tau, \sigma, \ldots \beta, \alpha - 1\}. \end{aligned} \tag{2.}$$

Die Anzahl der Glieder einer abbrechenden Kette, also auch die *Anzahl der Teilnenner* oder *der Näherungsbrüche* des zugehörigen ℭ𝔎. nennen wir die *Länge* der Kette und des Kettenbruchs. Sie ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \sigma + \tau = l.$$

Ferner möge *die um 1 verminderte Anzahl der Abschnitte* oder die *Anzahl der negativen Teilzähler* oder *der überzähligen Näherungsbrüche* als die *Ordnung* der Kette und des Kettenbruchs bezeichnet werden.

Ebenso, wie man einen überzähligen ℭ𝔎. auf einen eigentlichen reduzieren kann, kann man auch einen eigentlichen ℭ𝔎. zu einem überzähligen von beliebiger Länge erweitern, und zwar auf zwei Arten. Nach (4.) und (5.) in § 1 ist:

$$(3.)\qquad \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \nu\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu + 2, 3, 3, \ldots 3, 1\}$$

und

$$(4.)\qquad \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \nu\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu, 2, 3, 3, \ldots 3, 1\}.$$

In der ersten Formel kann der ℭ𝔎. links auch ein überzähliger sein.

Es sei $\frac{P_i}{Q_i}$ der i^{te} Näherungsbruch, und es werde

$$(5.)\qquad P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = \partial_i$$

gesetzt. Ist nun $\frac{P_i}{Q_i}$ ein *eigentlicher* Näherungsbruch, so ist $P_i = P_{i-1} + P_{i-2}$, $Q_i = Q_{i-1} + Q_{i-2}$, also

$$\partial_i = -\partial_{i-1}.$$

Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ ein *überzähliger* Näherungsbruch, so ist $P_i = P_{i-1} - P_{i-2}$, $Q_i = Q_{i-1} - Q_{i-2}$, also

$$\partial_i = \partial_{i-1}.$$

Da nun $\partial_1 = -1$ ist, so folgt:

3. *Die zu den Näherungsbrüchen gehörenden Zahlen ∂_i sind in einem Abschnitt abwechselnd $+1$ und -1. Die erste Zahl in jedem Abschnitt stimmt mit der letzten des vorausgehenden Abschnitts überein. Die erste von allen Zahlen ∂_i ist -1.*

Der Näherungsbruch $\frac{P_i}{Q_i}$ hat als ℭ𝔎. die Länge i; seine Ordnung sei m, er gehöre also zum $(m+1)^{\text{ten}}$ Abschnitt. Dann ist offenbar

$$(6.)\qquad \partial_i = (-1)^{i-m}.$$

Führt man in (5.): $P_{i-1} = P_i \mp P_{i-2}$, $Q_{i-1} = Q_i \mp Q_{i-2}$ ein, je nachdem

$\frac{P_i}{Q_i}$ ein eigentlicher oder ein überzähliger Näherungsbruch ist, so folgt:

4. Es ist

$$(7.)\qquad P_i Q_{i-2} - P_{i-2} Q_i = (-1)^{i-m+1} \textit{ oder } (-1)^{i-m},$$

je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ *ein eigentlicher oder ein überzähliger Näherungsbruch ist.*

Ist $\frac{P_i}{Q_i}$ *nicht* der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, also etwa, wenn der Abschnitt $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ist:

$$\frac{P_i}{Q_i} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu_1\},$$

und ist x_i der zugehörige vollständige Quotient:

$$x_i = \mathfrak{E}\{\mu_2, \nu, \ldots \sigma, \tau\},$$

so ist

$$(8.)\qquad \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau\} = \frac{x_i P_i + P_{i-1}}{x_i Q_i + Q_{i-1}}.$$

Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ *der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt,* also

$$\frac{P_i}{Q_i} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu\};\ x_i = \mathfrak{E}\{\nu, \ldots \sigma, \tau\},$$

so ist

$$(8^a.)\qquad \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\} = \frac{x_i P_i - P_{i-1}}{x_i Q_i - Q_{i-1}}.$$

Es sei a der Wert des $\mathfrak{EK}$. und $\frac{P_i}{Q_i}$ *nicht* der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt. Dann ist

$$a - \frac{P_i}{Q_i} = \frac{x_i P_i + P_{i-1}}{x_i Q_i + Q_{i-1}} - \frac{P_i}{Q_i} = -\frac{\partial_i}{Q_i(x_i Q_i + Q_{i-1})}, \text{ also}$$

$$\left|a - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i(x_i Q_i + Q_{i-1})}.$$

Der vorausgehende Näherungsbruch gehöre zum gleichen Abschnitt; der zugehörige vollständige Quotient ist $x_{i-1} = 1 + \frac{1}{x_i}$, und es wird

$$\left|a - \frac{P_{i-1}}{Q_{i-1}}\right| = \frac{1}{Q_{i-1}(x_{i-1} Q_{i-1} + Q_{i-2})} = \frac{x_i}{Q_{i-1}[x_i(Q_{i-1} + Q_{i-2}) + Q_{i-1}]}$$

$$= \frac{x_i}{Q_{i-1}(x_i Q_i + Q_{i-1})} = \frac{x_i Q_i}{Q_{i-1}}\left|a - \frac{P_i}{Q_i}\right|.$$

Setzt man

(9.) $$|a\, Q_i - P_i| = \Delta_i,$$
so ist also

(10.) $$\Delta_{i-1} = x_i\, \Delta_i.$$

Man sieht leicht, daß diese Formel allgemein gilt, auch wenn $\frac{P_i}{Q_i}$ der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt oder ein überzähliger Näherungsbruch ist. Nun ist $x_i = \frac{1}{|x_{i-1} - 1|}$, also
$$\Delta_i = |\, \Delta_{i-2} - \Delta_{i-1}|,$$
und damit hat man den Satz:

5. *Die Differenzen* $\Delta_i = |a\; Q_i - P_i|$ *bilden eine Zahlenkette, die mit den Zahlen* $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = |\, a - 1|$ *beginnt. Ihre Gliederung ist* $\{\alpha - 1, \beta, \gamma, \ldots \tau\}$ *oder* $\{\beta, \gamma, \ldots \tau\}$, *je nachdem* $\alpha \geqq 1$ *ist.*

Der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. für $a = \frac{a_0}{a_1}$ entspringt aus der Zahlenkette $[a_0, a_1]$, und nach dem eben gefundenen Satz ist

(11.) $$|\, a_0\, Q_i - a_1\, P_i\,| = a_{i+1}.$$

Hiermit sind die Glieder der Zahlenkette durch die beiden ersten Glieder ausgedrückt.

Das *Vorzeichen* der oben bestimmten Größe $\partial_i = P_i Q_{i-1} - P_{i-1}\, Q_i = \pm 1$ wollen wir den *Index* des Näherungsbruches $\frac{P_i}{Q_i}$ nennen. Wir lassen nun die Indices der überzähligen Näherungsbrüche fort, behalten aber die Einteilung in Abschnitte bei und nennen die so gebildete Gesamtheit der Indices die *Indexkette* des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. Es besteht also die Indexkette zum Kettenbruch $\mathfrak{E}\,\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau\}$ aus lauter abwechselnden Vorzeichen $\pm$, mit $-$ beginnend, und zwar im ersten Abschnitt α, in den folgenden Abschnitten $\beta - 1, \gamma - 1, \ldots \tau - 1$ Indices. Durch die Indexkette ist der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. vollständig bestimmt. So gehört zur Indexkette

$$- + - \,|\, + - + - + \,|\, - \,|\, + \,|\, - \,|\, + - \,|\, + - + \,|\, - \,|\, + - + - \,|\, + - \,|\, + - \,|\, +$$
der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.: $\mathfrak{E}\,\{3, 6, 2, 2, 2, 3, 4, 2, 5, 3, 3, 2\}$.

Einer gegebenen Indexkette kann man eine zweite Kette zuordnen, indem man die fehlenden Trennungsstriche zwischen je zwei Indices hinzufügt und dafür die vorhandenen Trennungsstriche wegläßt. Diese neue Indexkette heiße die zur ersten *reziproke Indexkette.*

Die zur obigen Kette reziproke Kette ist also:

$-|+|-+|-|+|-|+-+-+|-+|-|+-+|-|+|-+|-+|-+$

und der zugehörige 𝔈𝔎.: 𝔈 $\{1, 2, 3, 2, 2, 2, 6, 3, 2, 4, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

Die Indexkette steht in einfachem Zusammenhang mit der von *Christoffel* und Herrn *Hurwitz**) eingeführten *Charakteristik.* Wir stellen zunächst fest, daß die Näherungsbrüche des 𝔈𝔎. auf Grund der oben beschriebenen Bildungsweise dieselben sind, wie die, welche man nach *Hurwitz* durch die ***Fareyschen Reihen*****) erhält. Man gibt nun jedem Näherungsbruch den *Charakter* $+$ oder $-$, je nachdem er größer oder kleiner ist, als der Wert a des Kettenbruchs. Die Charaktere der eigentlichen Näherungsbrüche bilden in ihrer Gesamtheit die *Charakteristik* von a.

Ist $\frac{P_i}{Q_i}$ *nicht* der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist $a = \frac{P_i x + P_{i-1}}{Q_i x + Q_{i-1}} \lesseqgtr \frac{P_i}{Q_i}$, je nachdem $P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i \gtreqless 0$ ist, also je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ positiven oder negativen Index hat. Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist $a = \frac{P_i x - P_{i-1}}{Q_i x - Q_{i-1}} \lesseqgtr \frac{P_i}{Q_i}$, je nachdem der Index von $\frac{P_i}{Q_i}$ negativ oder positiv ist. Es besteht also der Satz:

6. ***Für alle Näherungsbrüche in einem Abschnitt mit Ausnahme des letzten stimmt der Charakter mit dem Index überein; für den letzten Näherungsbruch in jedem Abschnitt ist der Charakter dem Index entgegengesetzt.***

Es wird also die *Indexkette* in die *Charakteristik* verwandelt, indem man nur jeden letzten Index in einem Abschnitt durch den entgegengesetzten ersetzt.

Von der Charakteristik gelangt man bekanntlich sofort zu der *gewöhnlichen* Kettenbruchentwicklung der Zahl a. Seien nämlich $q, q_1, q_2, \ldots$

---

*) *Christoffel*, Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen, Annali di Matematica (2) **15** (1888).

Hurwitz, Über die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche. Math. Ann. **44** (1894).

) Es ist gewiß bemerkenswert, daß bereits *Nicolas Chuquet* in seiner Triparty, 1484 in derselben Weise die Näherungsbrüche einer gegebenen Größe bildet. Vgl. *Cantor*, Gesch. d. Math. Bd. 2, S. 352. *Wertheim*, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. **42 (1898) Suppl. S. 149.

die Anzahlen der aufeinander folgenden gleichen Charaktere, beginnend mit q negativen Charakteren, so ist*)

$$a = [q, q_1, q_2, \ldots] = q + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}.$$

Beginnt aber die Charakteristik mit q positiven Charakteren, so ist

$$a = [0, q, q_1, q_2, \ldots] = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q_1 + \cdots}}.$$

Indem wir die Indexkette in die Charakteristik verwandeln, haben wir also *einen E.K. in einen gewöhnlichen Kettenbruch verwandelt*, und es besteht der Satz:

7. *Die eigentlichen Näherungsbrüche des Elementarkettenbruchs für eine Zahl a stimmen überein mit den Haupt- und Näherungsbrüchen***) *der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung von a.*

Ist wieder l die Länge, m die Ordnung des E.K., so ist also die Summe aller Teilquotienten des gewöhnlichen Kettenbruchs

$$(12.) \qquad q + q_1 + q_2 + \cdots + q_n = l - m,$$

was sich auch daraus ergibt, daß Indexreihe und Charakteristik gleich lang sind.

So erhält man nach Satz 6. aus der Indexkette

$$-+-|+-+-+|-|+|-|+-|+-+|-|+-+-|+-|+-|+$$

die Charakteristik

$$-+++-+--+-++++--++-++++++\pm$$

und der zugehörige E.K. ist gleich dem regelmäßigen Kettenbruch

$$[1, 3, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 7].$$

Der letzte Charakter kann nach Belieben + oder − genommen werden, entsprechend dem Umstand, daß man den Kettenbruch anstatt mit $q_n\,(>1)$ auch mit $q_n - 1 + \frac{1}{1}$ schließen kann.

---

*) Der kleine formale Unterschied gegen die Darstellung von Herrn *Hurwitz* (a. a. O. S. 430) kommt nur daher, daß dort dem Näherungsbruch $\frac{1}{1}$ noch die Brüche $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}$ vorangehen.

**) Dabei rechnen wir abweichend von *Perron*, Die Lehre von den Kettenbrüchen S. 55, die Zahlen $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \ldots \frac{q-1}{1}$ zu den Näherungsbrüchen des Kettenbruchs.

Ebenso einfach ist die *Verwandlung eines gewöhnlichen Kettenbruchs in einen Elementarkettenbruch.* Man schreibt unter die Charakteristik des Kettenbruchs eine gleichlange Reihe von abwechselnden Vorzeichen $\pm$, mit $-$ beginnend. So oft ein Vorzeichen von dem darüberstehenden Charakter verschieden ist, ist ein Abschnitt zu Ende. Damit hat man die Indexkette des 𝔈𝔎. und diesen selbst. So hat der gewöhnliche Kettenbruch [0, 3, 2, 1, 5] die Charakteristik

$$+++--+-----,$$

also ist die Indexkette

$$-|+-|+|-+-+|-+|-$$

und der 𝔈𝔎.: 𝔈 $\{1, 3, 2, 5, 3, 2\}$.

Beim Übergang von der Indexkette zur reziproken Kette wird jeder innere (d. h. nicht einen Abschnitt schließende) Index zu einem letzten und jeder letzte Index zu einem inneren. Es hat daher die zur reziproken Kette gehörige Charakteristik gerade die entgegengesetzten Charaktere, wie die erste Charakteristik, folglich sind die entsprechenden Kettenbrüche zueinander reziprok; es besteht der Satz:

8. *Die zu reziproken Indexketten gehörenden Elementarkettenbrüche sind reziprok.*

Die explizite Darstellung des zum 𝔈𝔎. 𝔈 $\{\alpha, \beta, \dots \tau\}$ reziproken 𝔈𝔎. ist nicht eben einfach und kann hier übergangen werden*).

Dagegen bestehen einfache Beziehungen zwischen den *Längen* l, l' und den *Ordnungen* m, m' von zwei reziproken Elementarkettenbrüchen. Zunächst sind die beiden reziproken Indexketten gleich lang, also

$$(13^a.) \qquad l - m = l' - m'.$$

Denkt man sich die beiden Ketten aufeinandergelegt, so fallen die Trennungsstriche der einen Kette zwischen die nicht getrennten Indices der andern, also ist ihre Anzahl in beiden Ketten zusammen:

$$m + m' = l - m - 1.$$

Hiernach ist die Ordnung des reziproken 𝔈𝔎.

$$(13^b.) \qquad m' = l - 2m - 1$$

und die Länge

---

*) Es sei hierfür auf eine demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinende Arbeit „*Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche*“ verwiesen.

$$(13^c.) \qquad l' = 2l - 3m - 1.$$

Bis jetzt haben wir die durch einen 𝔈𝔎. dargestellte Zahl als *positiv* angenommen. Wir können aber auch eine *negative* rationale Zahl in einen 𝔈𝔎. entwickeln, und zwar auf zwei Arten. Seien a_0 und a_1 positive ganze Zahlen, so können wir entweder $-\frac{a_0}{a_1} = \frac{-a_0}{a_1}$ oder $= \frac{a_0}{-a_1}$ setzen. Bilden wir nun die Zahlenkette $[-a_0, a_1]$, so beginnt sie mit $-a_0 \mid a_1 \mid a_0 + a_1, a_0, a_1 \ldots$ geht also nach 3 Gliedern in die Kette $[a_0, a_1]$ über. Ist nun $\frac{a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, so ist also

$$(14). \qquad \frac{-a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{1, 1, \alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Vom dritten Näherungsbruch an sind alle Zähler negativ.

Dagegen beginnt die Kette $[a_0, -a_1]$ mit $a_0, -a_1 \mid a_0 + a_1 \mid a_0 + 2a_1, a_1$ $a_0 + a_1, a_0, a_1 \ldots$, also ist

$$\frac{a_0}{-a_1} = \mathfrak{E}\{2, 1, 2, \alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Vom vierten Näherungsbruch an sind alle Nenner negativ.

Von diesen beiden 𝔈𝔎., die dieselbe Zahl darstellen, wollen wir nur den ersten als einen echten 𝔈𝔎. ansehen. Ebenso können wir aber auch neben dem 𝔈𝔎 für die positive rationale Zahl $\frac{a_0}{a_1}$ einen zweiten aufstellen, wenn wir $\frac{a_0}{a_1} = \frac{-a_0}{-a_1}$ setzen, also die Kette $[-a_0, -a_1]$ bilden. Wir haben dabei zwei Fälle zu unterscheiden. Ist $a_0 > a_1$, so beginnt die Kette mit $-a_0 \mid -a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0, a_1, \ldots$, also ist

$$\frac{-a_0}{-a_1} = \mathfrak{E}\{1, 1, 1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Ist aber $a_0 < a_1$, so hat der 𝔈𝔎. für $\frac{a_0}{a_1}$ die Form $\frac{a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ und die Kette $[-a_0, -a_1]$ beginnt mit $-a_0, -a_1 \mid a_1 - a_0 \mid 2a_1 - a_0, a_1, \ldots$ Man erhält also den zugehörigen 𝔈𝔎., indem man dem 𝔈𝔎. für $\frac{2a_1 - a_0}{a_1} = 2 - \frac{a_0}{a_1}$ die Abschnitte 2, 1 vorsetzt. Es ist aber offenbar $2 - \frac{a_0}{a_1} = \mathfrak{E}\{\alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}$, folglich

$$\frac{-a_0}{-a_1} = \mathfrak{E}\{2, 1, \alpha + 1, \beta, \gamma, \ldots\}.$$

Auch die beiden letzten Formen wollen wir von der Betrachtung ausschließen; es ist also bei einem eigentlichen $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. entweder kein Abschnitt $= 1$ (wenn der Wert des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. $a > 1$) oder nur der erste Abschnitt (wenn $0 < a < 1$) oder die beiden ersten Abschnitte (wenn $a < 0$ ist).

§ 3. Unendliche Elementarkettenbrüche.

Anstatt aus der Zahlenkette kann man einen Elementarkettenbruch auch durch den folgenden einfachen Algorithmus erhalten. Es sei ω eine reelle Zahl. Man bilde nacheinander die Zahlen

$$(1.)\qquad \omega_1 = \frac{1}{|\omega - 1|},\ \omega_2 = \frac{1}{|\omega_1 - 1|},\ \omega_3 = \frac{1}{|\omega_2 - 1|}, \ldots$$

Ist nun ω *positiv*, so folgt in der Reihe der Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ stets auf eine Zahl, die < 1 ist, eine Zahl > 1. Man kann also die Reihe in Abschnitte von $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Zahlen

$$(2.)\qquad \begin{array}{llll} \omega, & \omega_1, & \omega_2, \ldots & \omega_{\alpha-1}, \\ \omega_\alpha, & \omega_{\alpha+1}, & \omega_{\alpha+2}, \ldots & \omega_{\alpha+\beta-1}, \\ \omega_{\alpha+\beta}, \ldots & & & \omega_{\alpha+\beta+\gamma-1}, \\ & & \ldots & \end{array}$$

zerlegen, sodaß jeder Abschnitt mit einer Zahl < 1 schließt, während alle übrigen Zahlen > 1 sind. Mit diesen Zahlen bilde man den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.

$$(3.)\qquad \mathfrak{E}\,\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\},$$

und in diesem sind sicher alle Abschnitte vom zweiten ab > 1.

Ist aber ω *negativ*, so ist $\omega_1 = \frac{1}{1-\omega} < 1$, es folgen also hier zwei Zahlen < 1 auf einander, sie bilden jede für sich einen Abschnitt und der zugehörige $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. hat die Form

$$(4.)\qquad \mathfrak{E}\,\{1, 1, \gamma, \delta, \ldots\},$$

worin alle Abschnitte vom dritten ab > 1 sind.

Wir beweisen nun den Satz:

1. *Ist ω eine rationale Zahl, so gelangt man in der Reihe der Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ schließlich zu zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $\omega_{l-2} = 2$, $\omega_{l-1} = 1$. Schließt man mit diesen die Reihe, so hat der zugehörige endliche $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. den Wert ω.*

Beweis. Ist ω *positiv* und gleich dem Quotienten $\frac{a_0}{a_1}$ von teilerfremden ganzen Zahlen, so ist

$$\omega_1 = \frac{a_1}{|a_0 - a_1|} = \frac{a_1}{a_2}, \; \omega_2 = \frac{a_2}{|a_1 - a_2|} = \frac{a_2}{a_3}, \ldots,$$

also bilden $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine *Zahlenkette* $[a_0, a_1]$. Diese schließt mit $a_{l-2} = 2$, $a_{l-1} = 1$, also wird $\omega_{l-2} = \frac{a_{l-2}}{a_{l-1}} = 2$ und $\omega_{l-1} = \frac{1}{\omega_{l-2} - 1} = 1$. Die Gliederung der Kette $[a_0, a_1]$ stimmt offenbar mit der durch die Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ erzeugten Gliederung $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ überein, folglich hat der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. (3.) den Wert $\frac{a_0}{a_1} = \omega$.

Ist ω *negativ*, so ist $\omega_1 = \frac{1}{1-\omega} < 1$, also gleich dem endlichen $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. $\omega_1 = \mathfrak{E}\{1, \gamma, \delta, \ldots\}$. Dann ist aber $\omega = 1 - \frac{1}{\omega_1}$ gleich dem $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. (4.). Damit ist der Satz bewiesen. *Die Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ sind die vollständigen Quotienten des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.*

Ist nun ω eine *irrationale Zahl*, so bricht die Reihe der Zahlen $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$ nicht ab und der zugehörige $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. wird *unendlich*.

Ein unendlicher $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. heiße konvergent, wenn seine eigentlichen Näherungsbrüche gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren.

Zur Untersuchung der Konvergenz eines unendlichen $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. betrachten wir die Differenzen von zwei Näherungsbrüchen $\frac{P_{i+\varkappa}}{Q_{i+\varkappa}} - \frac{P_i}{Q_i}$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$ Es ist nach (8.) und (8ª.) in § 3:

$$\left|\frac{P_{i+\varkappa}}{Q_{i+\varkappa}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \left|\frac{P_i x_{i\varkappa} \mp P_{i-1}}{Q_i x_{i\varkappa} \mp Q_{i-1}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| = \frac{1}{Q_i (Q_i x_{i\varkappa} \mp Q_{i-1})},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ ein Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts ist oder nicht. Im ersten Falle ist immer $x_{i\varkappa} > 1$, also, da $Q_i - Q_{i-1} = Q_{i-2}$ ist:

$$\left|\frac{P_{i+\varkappa}}{Q_{i+\varkappa}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| < \frac{1}{Q_i Q_{i-2}};$$

im zweiten Fall ist $x_{i\varkappa} > 0$, also

$$\left|\frac{P_{i+\varkappa}}{Q_{i+\varkappa}} - \frac{P_i}{Q_i}\right| < \frac{1}{Q_i\, Q_{i-1}}.$$

Es ist also der unendliche $\mathfrak{EK}$. jedenfalls konvergent, sobald die Nenner Q_i mit i über alle Grenzen wachsen. Das ist aber stets der Fall *mit der einen Ausnahme, daß die Nenner* $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ *die periodische Zahlenkette* $1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$ *bilden.* Dies tritt nur bei zwei Elementarkettenbrüchen ein, nämlich $\mathfrak{E}\{2, 3, 3, 3, \ldots\}$ und $\mathfrak{E}\{1, 1, 3, 3, 3, \ldots\}$, und diese sind in der Tat *divergent;* die Näherungsbrüche des ersten gehen gegen $+\infty$, die des zweiten gegen $-\infty$. Es gilt also der Satz:

Ein unendlicher $\mathfrak{EK}$. *ist* — abgesehen von den beiden erwähnten Ausnahmen — *stets konvergent.* Man sieht leicht, daß für eine endliche Irrationalzahl ω der Algorithmus (1.) niemals auf die Gliederung $\{2, 3, 3, 3, \ldots\}$ oder $\{1, 1, 3, 3, 3, \ldots\}$ führen kann, also folgt:

3. *Der einer Irrationalzahl* ω *zugeordnete unendliche* $\mathfrak{EK}$. (3.) *oder* (4.) *ist stets konvergent und hat den Wert* ω.

Das letztere ergibt sich daraus, daß nach (1.) sich ω mit Hilfe der Näherungsbrüche des zugeordneten $\mathfrak{EK}$. durch die Ausdrücke $\omega = \frac{P_i\,\omega_i \mp P_{i-1}}{Q_i\,\omega_i \mp Q_{i-1}}$ darstellt und infolgedessen $\left|\omega - \frac{P_i}{Q_i}\right|$ gegen Null konvergiert.

Ein unendlicher $\mathfrak{EK}$. *kann einen rationalen Wert haben.* Man kann nämlich auch für ein rationales ω den Algorithmus (1.) unbegrenzt fortsetzen. An den Wert $\omega_{l-1} = 1$ schließt sich an:

$$\omega_l = \infty, \quad \omega_{l+1} = 0, \quad \omega_{l+2} = 1, \quad \omega_{l+3} = \infty, \quad \omega_{l+4} = 0, \ldots.$$

Ist nun

$$(5.)\qquad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau\}$$

der endliche $\mathfrak{EK}$. für ω, so kann man entweder durch $\omega_l = \infty$ und $\omega_{l+1} = 0$ den letzten Abschnitt um zwei vermehren, und dann folgen unbegrenzt viele Abschnitte gleich 3, oder man hat durch ω_l und ω_{l+1} einen neuen Abschnitt $= 2$ und darauf lauter Abschnitte $= 3$, sodaß man für ω zwei unendliche Elementarkettenbrüche erhält:

$$(6.)\qquad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau + 2, 3, 3, 3, \ldots\}$$

und

$$(7.)\qquad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \sigma, \tau, 2, 3, 3, 3, \ldots\}.$$

Beide ergeben in der Tat denselben Wert, wie der E.K. (5.). Sei nämlich $\omega = \frac{a_0}{a_1}$ der Wert dieses E.K., $\frac{b_0}{b_1}$ sein vorletzter Näherungsbruch, so folgen beim E.K. (6.) auf $\frac{a_0}{a_1}$ die Näherungsbrüche

$$\frac{a_0+b_0}{a_1+b_1}, \frac{2a_0+b_0}{2a_1+b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{3a_0+b_0}{3a_1+b_1}, \frac{4a_0+b_0}{4a_1+b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{5a_0+b_0}{5a_1+b_1}, \frac{6a_0+b_0}{6a_1+b_1}; \ldots,$$

also ist der Wert des unendlichen E.K. (6.):

$$\lim_{n=\infty} \frac{na_0+b_0}{na_1+b_1} = \frac{a_0}{a_1} = \omega.$$

Im E.K. (7.) dagegen folgen auf $\frac{b_0}{b_1}, \frac{a_0}{a_1}$ die Näherungsbrüche

$$\frac{a_0-b_0}{a_1-b_1}, \frac{2a_0-b_0}{2a_1-b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{3a_0-b_0}{3a_1-b_1}, \frac{4a_0-b_0}{4a_1-b_1}; \frac{a_0}{a_1}, \frac{5a_0-b_0}{5a_1-b_1}, \frac{6a_0-b_0}{6a_1-b_1}; \ldots,$$

also ist auch hier der Wert des E.K.

$$\lim_{n=\infty} \frac{na_0-b_0}{na_1-b_1} = \frac{a_0}{a_1} = \omega.$$

Es kann also ein endlicher E.K. auf zwei Arten in einen unendlichen E.K. verwandelt werden. Umgekehrt aber gilt der Satz:

4. *Ein unendlicher E.K. hat dann und nur dann einen rationalen Wert, wenn von einer bestimmten Stelle an alle Abschnitte gleich 3 sind.*

Es muß nämlich, wenn $\omega = \frac{a_0}{a_1}$ ist, der Ausdruck

$$|Q_i\,\omega - P_i| = \frac{|Q_i\,a_0 - P_i\,a_1|}{a_1}$$

verschwinden, sobald er unter $\frac{1}{a_1}$ sinkt. Ist nun $\frac{P_i}{Q_i}$ nicht der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist

$$|Q_i\,\omega - P_i| = \frac{1}{Q_i\,\omega_i + Q_{i-1}},$$

also muß jedesmal, wenn $Q_i\,\omega_i + Q_{i-1} > a_1$ wird, $\omega_i = \infty$ sein. Der zu $\frac{P_i}{Q_i}$ gehörige vollständige Quotient ist also der oben gefundene divergente unendliche E.K. $\omega_i = E\,|2, 3, 3, 3, \ldots|$, folglich hat dann der E.K. für ω in der Tat die Form (6.). Ist aber $\frac{P_i}{Q_i}$ der letzte Näherungsbruch in einem Abschnitt, so ist, da $Q_i = Q_{i-1} + Q_{i-2}$ ist:

$$|Q_i\,\omega - P_i| = \frac{1}{Q_i\,\omega_i - Q_{i-1}} = \frac{1}{Q_{i-1}(\omega_i - 1) + Q_{i-2}\,\omega_i},$$

und auch hier ergibt sich, sobald der Nenner $> a_1$ wird, $\omega_i = \infty$. Dies führt aber zu einem unendlichen $\mathfrak{EK}$. von der Form (7.).

Schließen wir also diese $\mathfrak{EK}$. mit der „Periode 3" von der Betrachtung aus, womit auch die beiden divergenten $\mathfrak{EK}$. ausgeschlossen sind, und nennen wir einen unendlichen $\mathfrak{EK}$., dessen Abschnitte nicht schließlich alle $= 3$ sind, *regulär*, so gilt der Satz:

5. *Ein regulärer $\mathfrak{EK}$. ist stets konvergent und stellt eine irrationale Zahl vor. Umgekehrt läßt sich eine irrationale Zahl immer nur auf eine Weise in einen unendlichen $\mathfrak{EK}$. verwandeln, und dieser ist stets regulär.*

Bei einem unendlichen $\mathfrak{EK}$. von *endlicher Ordnung*, also mit einer endlichen Anzahl von Abschnitten, ist der letzte Abschnitt unendlich lang, d. h. der $\mathfrak{EK}$. schließt mit dem gewöhnlichen Kettenbruch $[1, 1, 1, \ldots]$, der als $\mathfrak{EK}$. mit $\mathfrak{E}\{\infty\}$ zu bezeichnen ist. Sein Wert, den wir mit t bezeichnen wollen, ist

$$(8.) \qquad t = \mathfrak{E}\{\infty\} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Es ist also ein unendlicher $\mathfrak{EK}$. von endlicher Ordnung

$$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \tau, \infty\} = \frac{a_0\,t - b_0}{a_1\,t - b_1},$$

worin $\frac{b_0}{b_1}, \frac{a_0}{a_1}$ die beiden letzten Näherungsbrüche des endlichen $\mathfrak{EK}$. $\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \tau\}$ bezeichnen, und es besteht der Satz:

6. *Jeder unendliche $\mathfrak{EK}$. von endlicher Ordnung ist arithmetisch äquivalent mit der quadratischen Irrationalzahl t.*

Die Umkehrung dieses Satzes kann hier noch nicht in präziser Weise formuliert werden (vgl. § 5, Satz 11.).

Ein Abschnitt der durch den Algorithmus (1.) bestimmten Zahlen

ω_i bestehe aus den Zahlen $\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots \omega^{(\nu)}$, sodaß also $\omega^{(\nu)} < 1$, die übrigen Zahlen > 1 sind. Es ist dann

$$(9.)\qquad \omega^{(\nu-1)} = 1 + \frac{1}{\omega^{(\nu)}};\ \omega^{(\nu-2)} = 1 + \frac{1}{\omega^{(\nu-1)}};\ \ldots\ \omega^{(1)} = 1 + \frac{1}{\omega^{(2)}}.$$

Damit $\omega^{(\nu)}$ in das Intervall $0 < \omega^{(\nu)} < 1$ hineinfällt, muß jede der vorhergehenden Zahlen in einem bestimmten Intervall liegen. Diese Intervalle sind alle voneinander getrennt und sind in folgender Weise festgelegt:

Es seien

$$p_0 = 0,\ p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 2,\ p_4 = 3,\ p_5 = 5,\ p_6 = 8, \ldots$$

die bekannten Fibonaccischen Zahlen mit dem Bildungsgesetz

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Ihre Verhältnisse $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_2}, \ldots$ sind die Näherungsbrüche des eben erwähnten Kettenbruchs $\mathfrak{E}\{\infty\} = t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, und sie begrenzen Intervalle $I_1, I_2, I_3, \ldots$, welche immer kleiner werdend von beiden Seiten gegen den Grenzpunkt t konvergieren. Das m^{te} Intervall ist

$$(10.)\qquad I_m = \left(\frac{p_m}{p_{m-1}},\ \frac{p_{m+2}}{p_{m+1}}\right).$$

Hierunter ist mit $p_{-1} = 1$ auch das Intervall $(0, 1)$ als I_0 einbegriffen.

Aus den Formeln (9.) folgt dann der Satz:

7. *Damit $0 < \omega^{(\nu)} < 1$ ist, müssen die Zahlen $\omega^{(\nu-m)}$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$ jeweils im Intervall I_m liegen.*

Oder anders ausgedrückt:

8. *Liegt eine Zahl ω_i im Intervall I_m, so folgen auf sie im gleichen Abschnitt noch m Zahlen, welche der Reihe nach in den Intervallen I_{m-1}, $I_{m-2}, \ldots I_1, I_0$* liegen.

§ 4. Elementarkettenbrüche und lineare Substitutionen.

Es sei $\frac{P_i}{Q_i} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu\}$ ein Näherungsbruch der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Entwicklung einer Größe x; der zugehörige vollständige Quotient sei y, also

$$x = \frac{P_i y \mp P_{i-1}}{Q_i y \mp Q_{i-1}},$$

je nachdem $\frac{P_i}{Q_i}$ der Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts ist oder nicht. Wir schreiben dann den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. für x im einen oder anderen Fall in der Form

$$x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \lambda, \mu \,\|\, y\} \tag{2.}$$

oder

$$x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \lambda, \mu \,|\, y\}. \tag{3.}$$

Die Zahlen x und y sind durch eine ganzzahlige Substitution von der Determinante ± 1 mit einander verknüpft. Diese läßt sich aus *zwei Fundamentalsubstitutionen* $x' = 1 + \frac{1}{x}$ und $x' = 1 - \frac{1}{x}$ oder

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.}$$

zusammensetzen, und die Zusammensetzung ist durch den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$., unmittelbar gegeben. Es ist nämlich auf Grund der Bildungsweise der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$., je nachdem zwischen x und y die Beziehung (2.) oder (3.) besteht:

$$x = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \dots U^{\mu-1} V(y) \text{ oder} \tag{5.}$$

$$x = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \dots U^{\mu}(y). \tag{6.}$$

Wir nennen eine Substitution*) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, die sich allein aus den Substitutionen U und V zusammensetzt, eine *gerade Substitution* und haben den Satz:

1. *Der Wert des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. ist mit irgend einem vollständigen Quotienten durch eine gerade Substitution verknüpft.*

Für die Fundamentalsubstitutionen U und V gelten die Beziehungen**):

$$V^3 = 1, \text{ also } V^{-1} = V^2, \tag{7.}$$

$$UV^2\, UV^2 = 1, \text{ also}$$

---

*) Eine Verwechslung der Substitutionskoeffizienten α, β mit den gleich bezeichneten Abschnitten des $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. ist wohl nicht zu befürchten.

**) Dabei werden $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$ als identisch angesehen.

(8.) $$V = UV^2U,\quad U^{-1} = V^2UV^2.$$

Man sieht ohne weiteres:

2. *Die geraden Substitutionen bilden eine Gruppe.*

Infolge von (7.) und (8.) kann jede gerade Substitution auf eine solche Form gebracht werden, daß sie die Potenzen von U nur mit positiven Exponenten und zwischen ihnen nur die erste Potenz von V enthält, d. h. *sie läßt sich stets auf eine der Formen* (5.) *oder* (6.) *reduzieren.* Darin kann $\alpha = 1$ oder gleichzeitig $\alpha = 1$, $\beta = 1$ sein; dann beginnen die Substitutionen mit V oder V^2. Ferner kann in (5.) auch $\mu = 1$ sein; dann schließt die Substitution mit V^2. Die übrigen Zahlen $\gamma, \delta, \dots \lambda$ sind *sämtlich größer als 1.* Dies entspricht den früheren Festsetzungen über die Elementarkettenbrüche, wonach nur die beiden ersten Abschnitte und der letzte Abschnitt gleich 1 sein sollen. Solche $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. wollen wir jetzt normal nennen. Wir können nun aber auch $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. betrachten, bei denen einzelne innere Abschnitte gleich 1 sind, und können sie, indem wir sie mit den linearen Substitutionen in Beziehung setzen, in normale $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. verwandeln. Es mögen also im $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. die Abschnitte $\varkappa$, 1, λ aufeinanderfolgen, wobei $\varkappa$ und $\lambda > 1$ sind. Ihnen entspricht in der zugeordneten Substitution das Produkt $U^{\varkappa-1}VVU^{\lambda-1}V$ oder nach (8.): $U^{\varkappa-2}VU^{\lambda-2}V$, folglich ist

(9.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \varkappa, 1, \lambda, \dots\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \varkappa - 1, \lambda - 1, \dots\}.$$

Sind aber zwei aufeinanderfolgende innere Abschnitte gleich 1, so entspricht den Abschnitten $\varkappa$, 1, 1, λ das Produkt $U^{\varkappa-1}VV^2U^{\lambda-1}V = U^{\varkappa+\lambda-2}V$, also ist

(10.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \varkappa, 1, 1, \lambda, \dots\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \varkappa + \lambda - 1, \dots\}.$$

Sind drei aufeinanderfolgende innere Abschnitte gleich 1, so entspricht dies dem Produkt $U^{\varkappa-1}VV^3U^{\lambda-1}V = U^{\varkappa-1}VU^{\lambda-1}V$, d. h. es ist

(11.) $$\mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \varkappa, 1, 1, 1, \lambda, \dots\} = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots \varkappa, \lambda, \dots\}.$$

Auf diese drei Fälle läßt sich die Reduktion aller nicht normalen $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. zurückführen. So ist z. B. nach (9.) und (11.)

$$\mathfrak{E}\{3, 1, 2, 1, 1, 4\} = \mathfrak{E}\{2, 1, 1, 1, 4\} = \mathfrak{E}\{2, 4\}$$

oder nach (10.) und (9.)

$$\mathfrak{E}\{3, 1, 2, 1, 1, 4\} = \mathfrak{E}\{3, 1, 5\} = \mathfrak{E}\{2, 4\}.$$

Es seien nun x und x' zwei irrationale Zahlen, deren $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen, also einen vollständigen Quotienten y gemeinsam haben. Dann folgt aus Satz 1, daß x und x' durch eine gerade Substitution verknüpft sind. Zwei solche Zahlen nennen wir *gerade-äquivalent.* Es besteht also der Satz:

3. *Zwei irrationale Zahlen, deren E.K.-Entwicklungen von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen, sind gerade-äquivalent.*

Es gilt aber auch die Umkehrung dieses Satzes. Sind x und x' gerade-äquivalent, so ist entweder

$$(12.)\qquad x' = U^{\alpha-1}\, V\, U^{\beta-1}\, V \dots U^{\mu-1}\, V(x) = \mathfrak{E}\,\{\alpha, \beta, \dots \mu \,\|\, x\}$$

oder

$$(12^{a}.)\qquad x' = U^{\alpha-1}\, V\, U^{\beta-1}\, V \dots U^{\mu}(x) = \mathfrak{E}\,\{\alpha, \beta, \dots \mu \,|\, x\};$$

wir haben also den Satz:

4. *Sind zwei Zahlen gerade-äquivalent, so stimmen ihre E.K.-Entwicklungen von einer bestimmten Stelle an überein.*

Es kann dabei stets erreicht werden, daß die eine Zahl ein vollständiger Quotient in der E.K.-Entwicklung der anderen Zahl ist.

Es seien nun x und x' irgendwie äquivalent, d. h. es sei

$$(13.)\qquad x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

mit vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von der Determinante $\varepsilon = \pm 1$. In der Entwicklung von x in einen normalen E.K. sei $\frac{P_i}{Q_i}$ ein Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts, y der zugehörige vollständige Quotient, dann ist

$$x = \frac{P_i y - P_{i-1}}{Q_i y - Q_{i-1}} \text{ und}$$

$$P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = \partial_i = \pm 1.$$

Dies in (13.) eingeführt gibt

$$(14.)\qquad x' = \frac{Ay - B}{Cy - D}, \text{ worin}$$

$$A = \alpha P_i + \beta Q_i, \quad B = \alpha P_{i-1} + \beta Q_{i-1},$$
$$C = \gamma P_i + \delta Q_i, \quad D = \gamma P_{i-1} + \delta Q_{i-1},$$

und es ist

$$AD - BC = \varepsilon\partial_i = \pm 1.$$

Es seien nun zunächst x und x' positiv und die Vorzeichen von α, β, γ, δ so gewählt, daß $\alpha x + \beta$, also auch $\gamma x + \delta$ positiv ist. Dann werden bei genügend großem i die Zahlen A, B, C, D positiv, und es wird

$$A > B, \quad C > D.$$

In dem $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$. für $\frac{A}{C}$ sei $\frac{B'}{D'}$ der vorletzte Näherungsbruch. Dann können *zwei Fälle* eintreten:

1. Es ist

$$AD' - B'C = AD - BC,$$

und dann folgt in bekannter Weise, daß

$$B' = B, \quad D' = D$$

sein muß, also ist nach (**14.**) y auch ein vollständiger Quotient der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Entwicklung von x', folglich sind x *und* x' *gerade-äquivalent.*

2. Es ist

$$AD' - B'C = -AD + BC, \text{ also}$$

$$A(D + D') = C(B + B'),$$

und hieraus folgt, da $B + B' < 2A$, $D + D' < 2C$ ist, daß

$$B + B' = A, \quad D + D' = C$$

sein muß. Es ist dann also $\frac{B}{D}$ *der dem Bruch* $\frac{B'}{D'}$ *vorangehende Näherungsbruch;* dies ist aber zugleich der dem Bruch $\frac{A}{C}$ folgende *überzählige Näherungsbruch*, d. h. ist

$$\frac{A}{C} = \mathfrak{E}\{a, b, \dots n\},$$

so ist

$$\frac{B}{D} = \mathfrak{E}\{a, b, \dots n, 1\}.$$

Nach (**14.**) ist dann

$$x' = \frac{B \cdot \frac{1}{y} - A}{D \cdot \frac{1}{y} - C},$$

und daraus schließt man, daß in der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Entwicklung von x' der Bruch $\frac{B}{D}$ ein Näherungsbruch am Schluß eines Abschnitts und $\frac{1}{y}$ der zugehörige vollständige Quotient ist. Wir nennen in diesem Fall x und x' *ungerade-äquivalent.*

Ist

$$y = \mathfrak{E}\{\nu, \pi, \varrho, \sigma, \ldots\},$$

so hat der reziproke $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$., da $\nu > 1$ ist, die Form

$$\frac{1}{y} = \mathfrak{E}\{1, \nu', \pi', \varrho', \ldots\},$$

also wird

$$x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots n, 1, 1, \nu', \pi', \varrho', \ldots\}$$

oder nach (10.)

$$x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots n + \nu' - 1, \pi', \varrho', \ldots\}. \tag{15.}$$

Es besteht also der Satz:

5. *Sind zwei Zahlen ungerade-äquivalent, so sind ihre $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$.-Entwicklungen von einer bestimmten Stelle an zueinander reziprok.*

Der Satz bleibt bestehen, wenn eine oder beide Zahlen negativ sind, denn es ist $-x$ zu x gerade-äquivalent vermöge der Substitution $V^2 U$, sodaß $-x = \mathfrak{E}\{1, 1, 1 | x\}$. Ist nun z. B. nur x negativ, so gilt der Satz für $-x$ und x', folglich auch für x und x'.

Zwei ungerade-äquivalente Zahlen sind durch eine *ungerade Substitution* miteinander verknüpft. Es ist

$$x = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \ldots \mu \,\|\, y\},$$
$$x' = \mathfrak{E}\{a, b, \ldots m \,\|\, \frac{1}{y}\}, \tag{16.}$$

also, wenn wir als neue Fundamentalsubstitution die *reziproke Transformation*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{17.}$$

einführen:

$$x = U^{\alpha-1} V U^{\beta-1} V \ldots U^{\mu-1} V(y),$$
$$x' = U^{a-1} V U^{b-1} V \ldots U^{m-1} V R(y).$$

Durch Umkehrung der ersten Substitution erhält man, wenn man zur Abkürzung

$$V\,(UV)^{\alpha-1}\,V = T_\alpha$$

setzt:

$$y = T_\mu\,T_\lambda \dots T_\beta\,T_\alpha\,(x)$$

und damit

$$x' = U^{\alpha-1}\,V \dots U^{m-1}\,V\,R\,T_\mu \dots T_\alpha(x), \tag{18.}$$

d. h. *eine ungerade Substitution setzt sich aus den drei Substitutionen U, V, R zusammen.*

Die vorliegende Substitution läßt sich bedeutend vereinfachen. Für die Substitution R gelten die Beziehungen

$$\begin{gathered} R^2 = 1, \text{ also } R^{-1} = R \\ RUR = VU,\ RVR = V^2,\ RV^2\,R = V. \end{gathered} \tag{19.}$$

Hieraus schließt man sofort den Satz:

6. *Jede aus U, V, R zusammengesetzte Substitution, die eine gerade Anzahl von Substitutionen R enthält, läßt sich allein durch U und V ausdrücken, ist also eine gerade Substitution.*

Es läßt sich also eine ungerade Substitution aus den Substitutionen U, V und *einer* Substitution R zusammensetzen, und man kann stets erreichen, daß die Substitution R am Ende steht. Um (18.) in dieser Weise umzuformen, bilden wir mit Benutzung von (19.)

$$R(UV)R = RURRVR = VUV^2,$$

ferner

$$RT_\mu R = RVRR(\overset{1}{\breve{UV}})R \dots R(\overset{\mu-1}{\overbrace{UV}})RRVR = U^{\mu-1}\,V,$$

folglich

$$RT_\mu \dots T_\alpha = U^{\mu-1}\,V\,U^{\lambda-1}\,V \dots U^{\alpha-1}\,VR.$$

Damit wird (18.):

$$x' = U^{\alpha-1}\,V \dots U^{m-1}\,V\,U^{\mu-1}\,V \dots U^{\alpha-1}\,VR\,(x).$$

Hieraus schließt man:

7. *Haben zwei ungerade-äquivalente Zahlen die in* (16.) *angegebenen* 𝔈𝔎.-*Entwicklungen, so ist*

$$x' = \mathfrak{C}\,\{a, b, \ldots m,\ \mu, \lambda, \ldots \beta, \alpha \,\|\, \frac{1}{x}\} \tag{20.}$$

und umgekehrt, wie man leicht sieht:

$$x = \mathfrak{C}\,\{\alpha, \beta, \ldots \mu, m, \ldots b, a \,\|\, \frac{1}{x'}\}. \tag{20a.}$$

Es ist nun auch sofort zu sehen, daß *jede* aus U, V und *einer* Substitution R zusammengesetzte Substitution eine ungerade Substitution ist. Eine derartige Substitution läßt sich immer auf eine der beiden Formen

$$x' = U^{\alpha-1}\, V \ldots U^{\mu-1}\, VR(x),$$
$$x' = U^{\alpha-1}\, V \ldots U^{\mu}\, R(x)$$

bringen. Diese entsprechen den $\mathfrak{C}\mathfrak{K}$.

$$x' = \mathfrak{C}\,\{\alpha, \beta, \ldots \mu \,\|\, \frac{1}{x}\}$$

und

$$x' = \mathfrak{C}\,\{\alpha, \beta, \ldots \mu \,|\, \frac{1}{x}\} = \mathfrak{C}\,\{\alpha, \beta, \ldots \mu + 1, 1, 1 \,\|\, \frac{1}{x}\},$$

d. h. es sind in der Tat x und x' ungerade-äquivalent.

Zusammenfassend können wir sagen:

8. **Alle ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante ± 1 zerfallen in zwei Arten: Gerade Substitutionen, die sich allein aus den Fundamentalsubstitutionen U und V, und ungerade Substitutionen, die sich aus U, V und *einer* Substitution R zusammensetzen. Die geraden Substitutionen bilden eine Gruppe, zwei ungerade Substitutionen geben zusammengesetzt eine gerade Substitution. Die $\mathfrak{C}\mathfrak{K}$.-Entwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen entweder von einer bestimmten Stelle an überein oder sie sind von einer bestimmten Stelle an reziprok, je nachdem die Zahlen durch eine gerade oder ungerade Substitution miteinander verknüpft sind*).**

*) Vgl. hierzu meine Arbeit „*Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche*", Math. Zeitschr. Bd. 3.

Bei dieser Einteilung der linearen Substitutionen in zwei Arten kommt die Scheidung in eigentliche (Determinante $+1$) und uneigentliche Substitutionen (Determinante -1) nicht zum Ausdruck. Dies gelingt aber in sehr übersichtlicher Weise, wenn wir an Stelle von U die Substitution $x' = -x$ oder

$$N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V^2 U$$

und an Stelle von R die Substitution $x' = -\frac{1}{x}$ oder

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = NR$$

einführen. Dann ist

$$N^2 = 1, \; T^2 = 1, \; V^3 = 1,$$

ferner

$$TNT = N, \; NTN = T,$$
$$NVN = TV^2T, \; NV^2N = TVT,$$

und es besteht der Satz:

9. *Alle ganzzahligen linearen Substitutionen von der Determinante ± 1 lassen sich aus den drei zyklischen Substitutionen N, V, T zusammensetzen. Jede Substitution mit einer geraden Anzahl von T läßt sich durch N und V, jede Substitution mit einer geraden Anzahl von N läßt sich durch T und V ausdrücken.*

Dies führt in doppelter Weise zu einer Einteilung der linearen Substitutionen.

I. *Gerade* Substitutionen nur aus V und N zusammengesetzt.
Ungerade „ „ „ V, N und *einer* Substitution T zusammengesetzt.

II. *Eigentliche* Substitutionen nur aus V und T zusammengesetzt.
Uneigentliche „ „ „ V, T und *einer* Substitution N zusammengesetzt.

Die *Translation* $x' = x + 1$ oder $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine ungerade Substitution, denn es ist

$$S = VT = UR. \tag{21.}$$

Ein einfaches Kennzeichen für gerade Substitutionen hat man in dem folgenden Satz, auf den mich Herr *J. Schur* aufmerksam gemacht hat:

10. *Die Gruppe der geraden Substitutionen stimmt überein mit der Gruppe der Substitutionen, die mod 2 einer der Substitutionen*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; V^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

kongruent sind.

Ist nämlich $\mathfrak{B}$ die Gruppe der geraden Substitutionen, $\mathfrak{B}'$ die in dem Satz genannte Gruppe, so ist $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}'$ enthalten, da die Substitutionen V und N in $\mathfrak{B}'$ enthalten sind. Daß beide Gruppen identisch sind, folgt einfach daraus, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ Untergruppen vom Index 2 in der Gruppe aller ganzzahligen unimodularen Substitutionen sind.

Es ist also $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine gerade Substitution, wenn entweder β *und* γ *gerade* oder α, β, γ *ungerade* oder β, γ, δ *ungerade* sind.

Zugleich ergibt sich, daß die ungeraden Substitutionen diejenigen sind, die mod 2 einer der Substitutionen

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; TV = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; TV^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kongruent sind.

Aus Satz 10. schließt man sofort den folgenden Satz, dessen sehr einfache Begründung ich ebenfalls Herrn *J. Schur* verdanke.

11. *Jede eigentliche Substitution von der Form* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ *ist eine ungerade Substitution.*

Es könnte nämlich die Substitution nur gerade sein, wenn β und γ gerade sind. Dann wäre aber $\alpha^2 = -\beta\gamma - 1 \equiv 3 \mod 4$, was unmöglich ist.