

## Über Elementarkettenbrüche, lineare Substitutionen und indefinite binäre quadratische Formen. II.

Von Herrn *Paul Epstein* in Frankfurt a. M.

---

Die im ersten Teil dieser Arbeit (dieses Journal Bd. 149, im folgenden kurz mit I bezeichnet) entwickelte Theorie der Elementarkettenbrüche hat zu einer Einteilung der unimodularen ganzzahligen Substitutionen  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  in *grade* und *ungrade* Substitutionen geführt, die als vollständig gleichberechtigt zu der üblichen Einteilung in eigentliche und uneigentliche Substitutionen anzusehen ist. Diese doppelte Einteilung ermöglicht es, die drei Untergruppen vom Index 2 der Gruppe aller unimodularen ganzzahligen Substitutionen in einfacher Weise zu charakterisieren, nämlich

Gruppe  $\mathfrak{A}$  der eigentlichen Substitutionen (Modulgruppe)  
 „  $\mathfrak{B}$  „ graden „ „  
 „  $\mathfrak{C}$  „ eigentlichen graden und uneigentlichen ungraden Substitutionen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der klassischen Theorie der Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen innerhalb der Gruppe  $\mathfrak{A}$  die entsprechende *Reduktionstheorie im Gebiete der Gruppe  $\mathfrak{B}$*  an die Seite gestellt. Sie ist gleichbedeutend mit der Theorie der *periodischen Elementarkettenbrüche*. Der Einteilung der Formen in Klassen entspricht hier eine Einteilung in „Stämme“ als Gesamtheiten von

Formen, die mit einander grade-äquivalent sind. Den entgegengesetzten Klassen entsprechen die reziproken Stämme, den ambigen Klassen die involutorischen Stämme. Es mag hier nur angedeutet sein, daß die Einführung des *Index* der quadratischen Form eine einheitliche Behandlung der Reduktionstheorie für alle drei Gruppen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C}$  ermöglicht.

Die Reduktion der *definiten* quadratischen Formen im Bereich der Gruppe  $\mathfrak{B}$  bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, würde aber außerhalb des Rahmens dieser Arbeit fallen. Sie wird am einfachsten mit Hilfe des Fundamentalbereichs der Gruppe erledigt. Die entsprechende Aufgabe für die *Hauptkongruenzgruppe 2. Stufe*, welche eine gemeinsame Untergruppe der drei Gruppen  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  bildet, hat *Kronecker*\*) durchgeführt. Er bezeichnet zwei Formen, die durch eine Substitution dieser Untergruppe ineinander transformiert werden können, als *vollständig* äquivalent. Vom gruppentheoretischen Standpunkt aus dürfte es gerechtfertigt erscheinen, diese Bezeichnung für die Äquivalenz innerhalb der *größten* gemeinsamen Untergruppe von  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ , d. i. die Gruppe der *eigentlichen graden* Substitutionen vorzubehalten.

§ 1. Einer binären quadratischen Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c)$$

mit positiver nicht quadratischer Determinante

$$D = b^2 - ac$$

und ganzzahligen Koeffizienten  $a, b, c$  ordnen wir *eine* der beiden quadratischen Irrationalzahlen

$$\frac{\sqrt{D}-b}{a} \text{ oder } \frac{-\sqrt{D}-b}{a}$$

zu und bezeichnen dementsprechend die Form durch

$$(a, b, c)_+ \text{ oder } (a, b, c)_-,$$

so daß also der Form  $(a, b, c)_e$  die Irrationalzahl

---

\*) *Kronecker*, Über bilineare Formen mit vier Variabeln. Werke Bd. 2, S. 435. Vgl. *Stephen Smith*, Sur les équations modulaires. Werke Bd. 2.

$$(1.) \quad \omega = \frac{\varepsilon\sqrt{D}-b}{a}$$

eindeutig zugeordnet ist. Das Zeichen  $\varepsilon = \pm 1$  heiße der *Index* der Form und der zugeordneten Irrationalzahl\*). Die mit  $\omega$  konjugierte Zahl  $\frac{-\varepsilon\sqrt{D}-b}{a}$  werde mit  $\omega'$  bezeichnet.

Den Formen  $(a, b, c)_\varepsilon$  und  $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$  entspricht dieselbe Irrationalzahl  $\omega$ . Unterscheidet man aber  $\frac{\varepsilon\sqrt{D}-b}{a}$  und  $\frac{-\varepsilon\sqrt{D}+b}{-a}$ , wobei  $b^2 - D \equiv 0 \pmod{a}$  ist, als zwei verschiedene „Formen“ derselben Irrationalzahl  $\omega$ , so entspricht einer gegebenen Irrationalzahl auch nur eine bestimmte quadratische Form.

Die Form  $(a, b, c)_\varepsilon$  heißt eine *Form I. Art*, wenn die zugeordnete Irrationalzahl  $\omega > 1$  ist. Andernfalls, wenn  $\omega < 1$  ist, heißt  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine *Form II. Art*. Es ergeben sich leicht als Kennzeichen fur jede der beiden Arten:

$$(2.) \quad \begin{array}{l} \text{Ist } a > 0 \text{ und } a + b \leq \varepsilon\sqrt{D}, \text{ so ist } (a, b, c)_\varepsilon \text{ von der} \\ \text{I. Art.} \\ \text{II. ,,} \\ \text{,, } a < 0 \text{ ,, } a + b \geq \varepsilon\sqrt{D}, \text{ ,, ,, } (a, b, c)_\varepsilon \text{ ,, ,,} \\ \text{I. Art.} \\ \text{II. ,,} \end{array}$$

So ist z. B.  $(5, -7, 4)_+$  mit  $D = 29$  eine Form I. Art, dagegen  $(5, -7, 4)_-$  eine Form II. Art.

Auf die einer Form  $(a, b, c)_\varepsilon$  zugeordnete Irrationalzahl  $\omega$  wenden wir den in I, § 3 angegebenen Algorithmus an und bilden die Reihe der Irrationalzahlen

$$\omega_1 = \frac{1}{|\omega - 1|}, \quad \omega_2 = \frac{1}{|\omega_1 - 1|}, \quad \omega_3 = \frac{1}{|\omega_2 - 1|}, \dots$$

Ihnen entspricht eine nicht abbrechende *Kette von abgeleiteten Formen*  $(a_i, b_i, c_i)_{\varepsilon_i}$ , die durch lineare Transformation aus der Form  $(a, b, c)_\varepsilon$  hervorgehen.

---

\*) Es bedeuten also  $(a, b, c)_\varepsilon$  und  $(a, b, c)_{-\varepsilon}$  zwei verschiedene Formen oder, wenn man will, die beiden „Zweige“ derselben Form. Ihre zugeordneten Irrationalzahlen sind konjugiert, deshalb heißen auch die Formen konjugiert.

Ist  $\omega > 1$ , also  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine Form I. Art, so ist  $\omega_1 = \frac{1}{\omega - 1}$ .

Dies entspricht einer Transformation  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  der Form  $(a, b, c)_\varepsilon$ , und es ist für die abgeleitete Form

$$(3.) \quad a_1 = a + 2b + c, \quad b_1 = a + b, \quad c_1 = a.$$

Zur Bestimmung des Index  $\varepsilon_1$  hat man

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega - 1} = \frac{a}{\varepsilon\sqrt{D} - a - b} = \frac{-\varepsilon\sqrt{D} - (a + b)}{a + 2b + c} = \frac{\varepsilon_1\sqrt{D} - b_1}{a_1},$$

also ist

$$(4.) \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon.$$

Ist  $\omega < 1$ , also  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine Form II. Art, so ist  $\omega_1 = \frac{1}{1 - \omega}$ , entsprechend einer Transformation  $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  von  $(a, b, c)_\varepsilon$ . Es wird also für die abgeleitete Form

$$(5.) \quad a_1 = a + 2b + c, \quad b_1 = -(a + b), \quad c_1 = a,$$

und da  $\omega_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{D} + a + b}{a + 2b + c} = \frac{\varepsilon_1\sqrt{D} - b_1}{a_1}$  ist, so ist der Index

$$(6.) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Ist hier  $\omega$  positiv, so ist  $\omega_1 > 1$ , also  $(a_1, b_1, c_1)_{\varepsilon_1}$  eine Form I. Art. Ist aber  $\omega$  negativ, so ist  $0 < \omega_1 < 1$ , also  $(a_1, b_1, c_1)_{\varepsilon_1}$  eine Form II. Art und die daraus abgeleitete Form  $(a_2, b_2, c_2)_{\varepsilon_2}$  eine Form I. Art. Wir wollen, wenn nichts anderes bemerkt ist, immer  $\omega$  als *positiv* voraussetzen. *Dann folgen niemals zwei Formen II. Art aufeinander*, und wir haben den Satz:

1. *Auf eine Form I. Art folgt immer mittels der Formeln (3.) eine Form I. oder II. Art von entgegengesetztem Index, auf eine Form II. Art folgt mittels der Formeln (5.) immer eine Form I. Art von gleichem Index.*

Infolgedessen läßt sich die Kette der abgeleiteten Formen in einzelne *Abschnitte* zerlegen. Jeder Abschnitt besteht aus einer oder mehreren Formen I. Art und *einer* Form II. Art, mit welcher er *endigt*.

Nur wenn die Ausgangsform  $(a, b, c)_e$  schon eine Form II. Art ist, bildet sie allein den ersten Abschnitt. Sonst bestehen sämtliche Abschnitte aus mindestens zwei Formen\*). Die Formen in einem Abschnitt haben abwechselnd positiven und negativen Index, die erste Form im Abschnitt, die wir die *Leitform* nennen wollen, hat den gleichen Index wie die letzte des vorangehenden Abschnitts. Die übrigen Formen des Abschnitts heißen *Zwischenformen*.

Irgend zwei Formen der Kette sind durch eine *grade* Substitution\*\*) mit einander verknüpft, sie heißen *grade-äquivalent*. Da die Fundamentalsubstitution  $U$  eine uneigentliche,  $V$  eine eigentliche Substitution ist, so sind zwei Formen der Kette mit gleichem Index eigentlich äquivalent, zwei Formen mit verschiedenem Index uneigentlich äquivalent.

In der Kette der aus  $(a, b, c)_e$  abgeleiteten Formen mögen  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  die Anzahlen der Formen in den einzelnen Abschnitten sein. Dann besteht nach I, § 3 für die der Form  $(a, b, c)_e$  zugeordnete Irrationalzahl die Elementarkettenbruchentwicklung

$$(7.) \quad \omega = \mathfrak{E} \{ \alpha, \beta, \gamma, \dots \}.$$

Sind  $\frac{x_i}{y_i}$  die Näherungsbrüche dieses  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ .  $(\frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{0}, \frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{1})$ , so ist

$$\begin{pmatrix} x_i \pm x_{i-1} \\ y_i \pm y_{i-1} \end{pmatrix}$$

die Substitution, die die Form  $(a, b, c)$  in die Form  $(a_i, b_i, c_i)$  der Kette überführt. Darin ist in der zweiten Spalte das positive oder negative Vorzeichen zu wählen, je nachdem  $(a_i, b_i, c_i)$  eine Zwischenform oder eine Leitform ist.

Die Indizes der Zwischenformen unter Beibehaltung des allerersten Index und der Einteilung in Abschnitte sind offenbar entweder identisch mit der *Indexkette*\*\*\*) des  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ . (7.) — sobald nämlich die Ausgangsform  $(a, b, c)_e$  negativen Index hat — oder sie werden zur Indexkette, wenn man jeden Index umkehrt. Man hat also nach den Entwicklungen in

\*) Ist  $\omega$  negativ, so bestehen die ersten beiden Abschnitte aus je einer Form II. Art.

\*\*) Vgl. I, § 4.

\*\*\*) Vgl. I, § 2.

I, § 2 durch die Indizes der Formen auch ohne weiteres die Charakteristik und damit die *gewöhnliche* Kettenbruchentwicklung von  $\omega$ .

1. *Beispiel.* Wir gehen von der Form  $(62, -95, 145)_-$  aus. Ihre Determinante ist  $D = 35$ , die zugeordnete Irrationalzahl

$$\omega = \frac{-\sqrt{35} + 95}{62} > 1,$$

also die Form von der I. Art. Wir bilden die Kette der abgeleiteten Formen, indem wir jedesmal nach (2.) oder direkt durch Betrachtung der zugeordneten Irrationalzahl die Art der Form bestimmen und dann die Formeln (3.) oder (5.) anwenden:

( 62, -95, 145) <sub>-</sub>	( 5, -10, 13) <sub>+</sub>	( 13, -16, 17) <sub>+</sub>
( 17, -33, 62) <sub>+</sub>	( -2, -5, 5) <sub>-</sub>	( -2, -3, 13) <sub>-</sub>
( 13, -16, 17) <sub>-</sub>	( -7, 7, -2) <sub>-</sub>	( 5, -5, -2) <sub>+</sub>
( -2, 3, 13) <sub>-</sub>	( 5, 0, -7) <sub>+</sub>	( -7, 0, 5) <sub>-</sub>
( 17, 1, -2) <sub>+</sub>	( -2, 5, 5) <sub>-</sub>	( -2, 7, -7) <sub>-</sub>
( 17, -18, 17) <sub>+</sub>	( 13, 3, -2) <sub>+</sub>	( 5, 5, -2) <sub>+</sub>
( -2, -1, 17) <sub>-</sub>	( 17, -16, 13) <sub>+</sub>	( 13, -10, 5) <sub>+</sub>
( 13, -3, -2) <sub>+</sub>	( -2, 1, 17) <sub>-</sub>	( -2, 3, 13) <sub>-</sub>
	( 17, -1, -2) <sub>+</sub>	( 17, 1, -2) <sub>+</sub>

Die beiden letzten Formen stimmen mit den beiden Formen im zweiten Abschnitt überein, also wiederholen sich von hier ab die Formen, *die Kette ist periodisch* und wir haben für  $\omega$  den *periodischen*  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ .

$$\frac{-\sqrt{35} + 95}{62} = \mathfrak{E} \{ 3, 2, \overline{3, 2, 4, 3, 4, 2, 3}, \dots \}.$$

Aus der Indexkette ergibt sich die Charakteristik

— + + — — — + + — — — — — + + — — — — — usw.,

also ist der *gewöhnliche* Kettenbruch für  $\omega$ :

$$[ 1, 2, 3, \overline{2, 5}, \dots ].$$

Würden wir die Periode bereits mit dem zweiten Abschnitt beginnen lassen, so würde ihr Ende in den zuletzt *hingeschriebenen* Abschnitt hineinfallen, so daß immer das erste Element desselben zu einer Periode,

die beiden andern zur nächsten Periode gehören würden. Wir verschieben deshalb den Beginn der Periode bis zu einem Abschnitt, der in der Kette vollständig wiederkehrt, so daß also die Periode immer aus vollständigen Abschnitten besteht.

Die aus den Formen  $(a, b, c)_e$  und  $(-a, -b, -c)_{-e}$  abgeleiteten Ketten haben offenbar dieselbe Gliederung. Es wird also nicht nur, sobald eine Form  $(a, b, c)_e$  sich wiederholt, eine Kette als periodisch erkannt, sondern auch, sobald in der Kette die Form  $(-a, -b, -c)_{-e}$  auftritt.

2. *Beispiel.* Die Form  $(330, -767, 1782)_+$  mit der Determinante  $D = 229$  ist von der ersten Art. Die Kette der abgeleiteten Formen ist

$$\begin{array}{lll}
 (330, -767, 1782)_+ & (150, -223, 330)_+ & (-22, 19, -6)_- \\
 (578, -437, 330)_- & (34, -73, 150)_- & (10, -3, -22)_+ \\
 \hline
 (34, -141, 578)_- & (38, -39, 34)_+ & (-18, 7, 10)_- \\
 (330, -107, 34)_+ & (-6, -1, 38)_- & (6, -11, -18)_+ \\
 & (30, -7, -6)_+ & (-34, -5, 6)_- \\
 & \hline
 & (10, -23, 30)_+ & (-38, 39, -34)_- \\
 & (-6, -13, 10)_- & \vdots
 \end{array}$$

Die letzte Form entspricht der dritten Form des dritten Abschnitts. Man erhält also den periodischen  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ .

$$\omega = \frac{\sqrt{229} + 767}{330} = \mathfrak{E}\{2, 2, 5, \overline{2, 5}, 3, \dots\}.$$

Der gewöhnliche Kettenbruch für  $\omega$  wird

$$\omega = [2, 2, 1, 2, \overline{2, 1}, 4, \dots].$$

Zwei solche Formen  $(a, b, c)_e$  und  $(-a, -b, -c)_{-e}$  mögen *symmetrische Formen* heißen; ihre zugehörigen Ketten bestehen aus paarweise symmetrischen Formen und haben gleiche Gliederung. Sie sind im allgemeinen verschieden und heißen dann *symmetrische Ketten*. Wenn, wie im obigen Beispiel, je zwei symmetrische Formen derselben Kette angehören, so heißt die Kette *in sich symmetrisch*. Es wird später zu untersuchen sein, unter welcher Bedingung dies eintritt (s. u. Satz 23).

§ 2. Wir unterscheiden zwei Arten von reduzierten Formen.

Eine Form  $(a, b, c)_\varepsilon$ , bei der

$$(8.) \quad \omega > 1 \text{ und } 0 < \omega' < 1$$

ist, heißt eine *reduzierte Leitform*.

Eine Form  $(a, b, c)_\varepsilon$ , bei der

$$(9.) \quad \omega > 0 \text{ und } \omega' < 0$$

ist, heißt eine *reduzierte Zwischenform*.

Für jede reduzierte Form ist also

$$\omega - \omega' = \frac{2\varepsilon\sqrt{D}}{a} > 0,$$

folglich

$$(10.) \quad a\varepsilon > 0,$$

d. h.:

2. Bei jeder reduzierten Form stimmt das Vorzeichen von  $a$  mit dem Index überein.

Für eine *reduzierte Leitform* ist

$$\omega + \omega' = -\frac{2b}{a} > 0, \quad \omega\omega' = \frac{c}{a} > 0,$$

also haben  $a$  und  $b$  verschiedene Vorzeichen,  $a$  und  $c$  gleiche Vorzeichen, folglich ist  $b^2 = D + ac > D$  und

$$(11.) \quad |b| > \sqrt{D}.$$

Ferner ist nach (8.)

$$0 < \frac{-\varepsilon\sqrt{D} - b}{a} < 1 < \frac{\varepsilon\sqrt{D} - b}{a},$$

mithin, da  $a\varepsilon$  positiv ist,

$$0 < -\sqrt{D} - b\varepsilon < a\varepsilon < \sqrt{D} - b\varepsilon,$$

und hieraus folgt

$$(12^a.) \quad -\sqrt{D} < a + b < \sqrt{D}.$$

Mit  $(a, b, c)_\varepsilon$  ist auch gleichzeitig  $(c, b, a)_\varepsilon$  eine reduzierte Leitform,

denn es gehören zu ihr die Wurzeln  $\bar{\omega} = \frac{\varepsilon\sqrt{D} - b}{c} = \frac{a}{c}\omega = \frac{1}{\omega'} > 1$  und

$\bar{\omega}' = \frac{1}{\omega} < 1$ , aber positiv, folglich ist auch

$$(12^b.) \quad -\sqrt{D} < b + c < \sqrt{D}.$$



Aus (12<sup>a</sup>.) und (12<sup>b</sup>.) ergibt sich

$$(13.) \quad -2\sqrt{D} < a - c < 2\sqrt{D}$$

und weiter durch Addition von (12<sup>a</sup>.) und (12<sup>b</sup>.) und Quadrieren von (12<sup>a</sup>.) mit Rücksicht auf (10.)

$$(14.) \quad -2\sqrt{D} < \varepsilon(a + 2b + c) < 0.$$

Da  $D - b^2$ , also auch  $D - (a + b)^2$  durch  $a$  teilbar ist, so ist

$$(15.) \quad |a| \leq |D - (a + b)^2|,$$

also, da  $D - (a + b)^2$  positiv ist:

$$|a| \leq D$$

und ebenso

$$|c| \leq D.$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nicht gleichzeitig bestehen, denn ist  $a = D$ , so muß nach (15.)  $a + b = 0$ , also  $b = -D$  sein, und dann folgt  $c = D - 1$ . Es ist also immer  $ac < D^2$ , also  $b^2 < D^2 + D$ , und hieraus ergibt sich

$$|b| \leq D.$$

Wir haben damit den Satz:

3. Bei jeder reduzierten Leitform ist

$$(16.) \quad |a| \leq D, \quad \sqrt{D} < |b| \leq D, \quad |c| \leq D.$$

Nimmt man zu diesen Ungleichungen noch eine der Ungleichungen (12.), (13.), (14.) hinzu, so ist jede Form, deren Koeffizienten diese Ungleichungen befriedigen, wenn nur  $a$  und  $c$  gleiche,  $a$  und  $b$  verschiedene Vorzeichen haben, eine reduzierte Leitform. Noch einfacher ist eine reduzierte Leitform durch folgenden Satz gekennzeichnet:

4. Sind  $a$  und  $c$  positiv und ist  $a + 2b + c$  negativ (mithin auch  $b$  negativ), so ist  $(a, b, c)$  eine reduzierte Leitform von positivem Index\*).

*Beweis.* Es ist  $ac = b^2 - D > 0$ , also  $0 < -\sqrt{D} - b$  und daher  $0 < \omega'$ . Ferner ist  $a(a + 2b + c) = (a + b)^2 - D < 0$ , also  $-\sqrt{D} < a + b < \sqrt{D}$  und  $-\sqrt{D} - b < a < \sqrt{D} - b$ , folglich  $\omega' < 1 < \omega$ .

---

\*) Der Satz ergibt sich auch sofort durch Betrachtung der Funktion  $f(t) = at^2 + 2bt + c$ , da  $f(0) > 0$ ,  $f(1) < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t^2} > 0$  sein soll.

Ebenso ist eine Form mit negativen  $a$  und  $c$  und positivem Wert von  $a + 2b + c$  eine reduzierte Leitform von negativem Index.

Vor allem ergibt sich aus (16.):

5. *Es gibt nur eine endliche Anzahl von reduzierten Leitformen der Determinante  $D$ .*

Um sie alle aufzustellen, nimmt man zunächst für  $b$  die *negativen* der Ungleichung (16.) entsprechenden Zahlen und zerlegt jedesmal  $b^2 - D$  auf alle möglichen Arten in zwei positive Faktoren  $a$  und  $c$ , so daß immer  $a + 2b + c < 0$  wird. So erhält man die reduzierten Leitformen  $(a, b, c)_+$ , und einer jeden entspricht eine Leitform  $(-a, -b, -c)_-$ .

So erhält man z. B. für  $D = 15$  die folgenden reduzierten Leitformen von positivem Index:

(1, -4, 1)

(2, -5, 5) (5, -5, 2)

(3, -6, 7) (7, -8, 7) (7, -6, 3)

(6, -9, 11) (11, -13, 14) (14, -15, 15) (15, -15, 14) (14, -13, 11) (11, -9, 6).

Diese bilden, wie man sieht, vier Perioden von benachbarten Formen\*).

Für die abgeleitete Form einer reduzierten Leitform ist  $\omega_1 = \frac{1}{\omega - 1} > 0$

und  $\omega'_1 = \frac{1}{\omega' - 1} < 0$ , also:

6. *Auf eine reduzierte Leitform folgt immer eine reduzierte Zwischenform.*

\*) Man kann allein auf die reduzierten Leitformen mit positivem Index eine Reduktionstheorie innerhalb der Gruppe  $\mathfrak{A}$  der eigentlichen Substitutionen gründen. Es treten darin Möbiussche Kettenbrüche von der Art

$$\mathfrak{M}(k_1, k_2, k_3 \dots) = k_1 - \frac{1}{k_2 - \frac{1}{k_3 - \dots}}$$

auf, worin alle  $k_i \geq 2$  sind. Ist  $(a_1, b_1, a_2) (a_2, b_2, a_3) \dots (a_n, b_n, a_1)$  eine Periode benachbarter reduzierter Formen, so ist  $k_i = -\frac{b_i + b_{i+1}}{a_{i+1}}$ , und für die größere Lösung

$\tau = \frac{\sqrt{D} - b_1}{a_2}$  der Gleichung  $a_1 + 2b_1\tau + a_2\tau^2 = 0$  erhält man den rein periodischen Kettenbruch

$$\tau = \overline{\mathfrak{M}(k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)}.$$

Bei einer solchen Form ist  $\omega\omega' = \frac{c}{a} < 0$ , also haben  $a$  und  $c$  verschiedene Vorzeichen, und dies zusammen mit Satz 2 ist notwendige und hinreichende Bedingung für eine reduzierte Zwischenform.

Es ist also

$$b^2 = D + ac < D,$$

folglich

$$(17.) \quad |b| < \sqrt{D}.$$

Hieraus folgt, daß es auch nur eine endliche Anzahl von reduzierten Zwischenformen der Determinante  $D$  gibt.

Ist  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Zwischenform I. Art, also  $\omega > 1$ , so ist für die abgeleitete Form  $\omega_1 = \frac{1}{\omega-1} > 0$ ,  $\omega'_1 = \frac{1}{\omega'-1} < 0$ , also:

7. Auf eine reduzierte Zwischenform I. Art folgt wieder eine reduzierte Zwischenform.

Dies setzt sich fort, bis eine reduzierte Zwischenform II. Art auftritt. Dann ist  $\omega' < 0 < \omega < 1$ , also für die abgeleitete Form  $\omega_1 = \frac{1}{1-\omega} > 1$ ,  $\omega'_1 = \frac{1}{1-\omega'} < 1$ , aber positiv, also:

8. Auf eine reduzierte Zwischenform II. Art folgt eine reduzierte Leitform.

Sobald also in einer Kette abgeleiteter Formen eine reduzierte Form erscheint, sind alle folgenden Formen reduziert. Es gilt nun der folgende Satz, der die Umkehrung von Satz 2 darstellt:

9. Wenn für zwei aufeinanderfolgende Formen in demselben Abschnitt das Vorzeichen des ersten Koeffizienten mit dem Index übereinstimmt, so sind die Formen reduziert.

*Beweis.* Die den Formen zugeordneten Irrationalzahlen sind

$$\omega = \frac{\sqrt{D} - b\varepsilon}{a\varepsilon}, \quad \omega_1 = \frac{\sqrt{D} - b_1\varepsilon_1}{a_1\varepsilon_1}.$$

Die Form  $(a, b, c)_\varepsilon$  ist jedenfalls von der ersten Art, also ist  $\varepsilon_1 = -\varepsilon$  und  $b_1 = a + b$ , folglich

$$\sqrt{D} - b_1\varepsilon_1 = \sqrt{D} + \varepsilon b + \varepsilon a = -a\varepsilon\omega + a\varepsilon$$

und

$$\omega_1 = \frac{a\varepsilon}{a_1\varepsilon_1} (1 - \omega').$$

Da nun  $\omega_1$  positiv ist und nach Voraussetzung auch  $a_\varepsilon$  und  $a_1 \varepsilon_1$  positiv sein sollen, so muß  $\omega' < 1$  sein. Da aber zugleich  $\omega > 1$  ist, so ist  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Form.

Mit Hilfe dieses Satzes erkennt man bei der Bildung der Kette ohne weiteres das Auftreten einer reduzierten Form, und dann braucht man die Kennzeichen (2.) nicht mehr, um im weiteren Verlauf der Kette zu sehen, von welcher Art die Formen sind und wo ein Abschnitt zu Ende ist. Innerhalb eines Abschnitts haben die ersten Koeffizienten abwechselnde Vorzeichen. Sobald dieses Vorzeichen bei zwei aufeinanderfolgenden Formen dasselbe bleibt, ist die erste dieser Formen eine reduzierte Zwischenform II. Art und schließt den Abschnitt. (Vergleiche die obigen Beispiele.)

Eine Kette von reduzierten Formen ist aber nicht nur nach vorwärts, sondern auch nach rückwärts eindeutig bestimmt, d. h. es gibt zu einer Form  $(a, b, c)_\varepsilon$  der Kette nur eine bestimmte *reduzierte* Form  $(a', b', c')_{\varepsilon'}$ , die ihr vorangeht. Ist  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Leitform, so ist

$$a' = c, \quad b' = -b - c, \quad c' = a + 2b + c \quad \text{und} \quad \varepsilon' = \varepsilon.$$

Ist  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Zwischenform, so ist

$$a' = c, \quad b' = b - c, \quad c' = a - 2b + c \quad \text{und} \quad \varepsilon' = -\varepsilon.$$

Sobald bei einer so berechneten Form die beiden äußeren Koeffizienten gleiches Vorzeichen erhalten, ist die Form eine reduzierte Leitform, sonst eine reduzierte Zwischenform.

Hieraus und aus der endlichen Anzahl der reduzierten Formen schließt man, daß alle reduzierten Formen einer Kette von der ersten ab in derselben Reihenfolge wiederkehren, d. h. *die Kette ist von da ab periodisch*. Wir lassen die Periode immer mit dem Abschnitt beginnen, der zuerst vollständig wiederkehrt. Ihm können einige reduzierte Formen vorhergehen; diese wiederholen sich im letzten Abschnitt der Periode. Ihre Anzahl ist also sicher nicht größer, als der letzte Abschnitt der Periode.

Es besteht nun der Satz:

10. Für jede Form  $(a, b, c)_\varepsilon$  führt die Kette der abgeleiteten Formen auf eine reduzierte Form.

Der Beweis gestaltet sich mit Hilfe des Satzes 8 am Schluß von I, § 3 sehr einfach. Wir bezeichnen die Form durch die konjugierten Irrationalzahlen mit  $[\omega, \omega']$ , worin die erste Zahl immer die der Form zugeordnete Irrationalzahl bedeutet. Ist  $\omega < 0$ , so sind von der ersten abgeleiteten Form an alle  $\omega > 0$ , wir können also von vornherein  $\omega > 0$  annehmen. Ist dann  $\omega' < 0$ , so ist bereits  $(a, b, c)_e$  eine reduzierte Zwischenform. Es sei also  $\omega > 0$  und  $\omega' > 0$ . Es liegt dann jede der beiden Zahlen in einem der durch die Näherungsbrüche  $\frac{p_{k+1}}{p_k}$  von  $\mathfrak{E}\{\infty\} = t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  begrenzten Intervalle  $I_k = \left(\frac{p_k}{p_{k-1}}, \frac{p_{k+2}}{p_{k+1}}\right)$ , und zwar sei

$\omega$  im Intervall  $I_m$ ,  $\omega'$  im Intervall  $I_n$ .

Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist  $n < m$ , so ist nach dem erwähnten Satz  $\omega_n > 1$  und  $0 < \omega'_n < 1$ , also ist  $[\omega_n, \omega'_n]$  eine *reduzierte Leitform*. Die  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ -entwicklung für  $\omega$  ist dann

$$\omega = \mathfrak{E}\{m+1, \overline{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e}, \dots\},$$

und es ist darin  $\alpha_e = m+1-n$ . Ist  $n=0$ , so ist bereits  $[\omega, \omega']$  eine reduzierte Leitform, der  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$  wird rein periodisch.

b) Ist  $n > m$ , so ist  $0 < \omega_m < 1$ ,  $\omega'_m > 1$ . Für die darauf folgende Form ist dann  $\omega_{m+1} = \frac{1}{1-\omega_m} > 1$ ,  $\omega'_{m+1} = \frac{1}{1-\omega'_m} < 0$ , also ist  $[\omega_{m+1}, \omega'_{m+1}]$  eine *reduzierte Zwischenform*. Der  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$  für  $\omega$  hat die Gestalt

$$\omega = \mathfrak{E}\{m+1, i, \overline{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e}, \dots\},$$

und darin ist  $\alpha_e > i$ .

c) Sind  $\omega$  und  $\omega'$  im gleichen Intervall, so liegen für alle Formen des ersten Abschnitts die konjugierten Zahlen in gleichen Intervallen. Ebenso werden in den darauf folgenden Abschnitten je zwei konjugierte Zahlen im gleichen Intervall liegen, sobald dies bei der ersten Form des Abschnitts der Fall ist. Seien dies die  $k$  ersten Abschnitte mit  $a_1, a_2, \dots, a_k$  Formen, dagegen seien bei der ersten Form des  $(k+1)$ ten Abschnitts die konjugierten Zahlen in verschiedenen Intervallen. Dann beginnt sowohl für  $\omega$ , wie für  $\omega'$  die  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ -entwicklung mit  $\mathfrak{E}\{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ . Hieraus folgt aber, daß die Anzahl  $k$  endlich sein muß, sonst wäre  $\omega = \omega'$ .

Es liegen also schließlich die konjugierten Zahlen in verschiedenen Intervallen, und man hat wieder Fall a) oder Fall b).

*Beispiel.* Wir haben oben für die Zahl  $\frac{\sqrt{229} + 767}{330}$  den  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ .

$$\mathcal{E}\{2, 2, 5, \overline{2, 5, 3}, \dots\}$$

gefunden. Daraus schließt man, daß für die vier ersten Formen der Kette je zwei konjugierte Zahlen im gleichen Intervall liegen, dagegen für die erste Form des dritten Abschnitts:  $(150, -223, 330)_+$  die Zahl  $\omega$  im vierten,  $\omega'$  im zweiten Intervall. In der Tat ist, um nur das letzte zu prüfen:

$$\frac{3}{2} < \frac{\sqrt{229} + 223}{150} < \frac{8}{5} \text{ und } 1 < \frac{-\sqrt{229} + 223}{150} < \frac{3}{2}.$$

Zusammenfassend haben wir den Satz:

11. Für jede Form  $(a, b, c)_e$  wird die Kette der abgeleiteten Formen und der  $\mathcal{E}\mathcal{R}$  für die zugehörige quadratische Irrationalität  $\omega$  schließlich periodisch. Ist die Form eine reduzierte Leitform, also  $\omega > 1$  und  $0 < \omega' < 1$ , so ist der  $\mathcal{E}\mathcal{R}$  rein periodisch. Ist die Form eine reduzierte Zwischenform, also  $\omega > 0$ ,  $\omega' < 0$ , so geht der Periode nur ein Abschnitt voraus, der kleiner ist, als der letzte Abschnitt der Periode. In allen andern Fällen geht der Periode entweder ein größerer Abschnitt oder mehrere Abschnitte voraus.

Wie in der Lehre von den gewöhnlichen Kettenbrüchen gilt auch die Umkehrung dieses Satzes und kann mit ähnlichen Hilfsmitteln wie dort bewiesen werden, worauf wir hier nicht weiter eingehen wollen.

Der periodische Teil der aus  $(a, b, c)_e$  abgeleiteten Kette möge die reduzierte Kette der Form heißen.

In jeder reduzierten Kette gibt es sicher reduzierte Zwischenformen. Man kann aber fragen, ob es auch jedesmal reduzierte Leitformen gibt. Enthält die Kette keine reduzierte Leitform, so enthält sie auch keine reduzierte Zwischenform II. Art. Man sieht sogleich, daß dann alle reduzierten Formen dieselbe zugeordnete Zahl  $\omega$  haben müssen, und dieses muß die Grenzzahl  $t = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$  der Intervalle  $I_v$  sein. Dies ergibt sich auch aus der alsdann bestehenden Gleichung  $\omega = \frac{1}{\omega - 1}$ . Die zugehörige Form ist  $(2, -1, -2)_+$ ; ihre abgeleitete Form ist die zu ihr symmetrische zum gleichen  $\omega$  gehörige Form  $(-2, 1, 2)_-$ , und diese beiden Formen wechseln

in der Kette miteinander ab. Der  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ . für die Zahl  $t$  ist  $\mathfrak{E}\{\infty\}$ , und alle mit  $t$  durch eine grade Substitution verknüpften Zahlen und nur diese haben diesen  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ . als vollständigen Quotienten. Es besteht daher der Satz:

12. Nur die zur Form  $(2, -1, -2)_+$  grade-äquivalenten Formen haben die Eigenschaft, daß in ihrer Kette keine reduzierte Leitform auftritt. Die einer solchen Form zugeordnete Irrationalität hat eine  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ .entwicklung von der Gestalt

$$(18.) \quad \omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots, \mu, \infty\}.$$

Ist  $[\omega, \omega'] = (a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Leitform, so ist  $\left[\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega'}\right] = (c, b, a)_\varepsilon$  ebenfalls eine reduzierte Leitform. Der  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ . für  $\omega$  ist rein periodisch; die Periode sei  $\{\alpha, \beta, \dots, \tau\}$  und der Näherungsbruch bis zum Schluß der Periode sei  $\frac{P_i}{Q_i}$ . Dann ist nach I, § 2

$$\omega = \mathfrak{E}\{\alpha, \beta, \dots, \tau \parallel \omega\} = \frac{P_i \omega - P_{i-1}}{Q_i \omega - Q_{i-1}},$$

also

$$\omega' = \frac{P_i \omega' - P_{i-1}}{Q_i \omega' - Q_{i-1}},$$

oder wenn  $\frac{1}{\omega'} = \bar{\omega}$  geschrieben wird:

$$\bar{\omega} = \frac{Q_{i-1} \bar{\omega} - Q_i}{P_{i-1} \bar{\omega} - P_i}.$$

Hieraus folgt durch Umkehrung:

$$\bar{\omega} = \frac{P_i \bar{\omega} - Q_i}{P_{i-1} \bar{\omega} - Q_{i-1}}.$$

Nun ist aber nach I, § 2, Formel (2.):

$$\frac{P_i}{P_{i-1}} = \mathfrak{E}\{\tau, \dots, \beta, \alpha\}; \quad \frac{Q_i}{Q_{i-1}} = \mathfrak{E}\{\tau, \dots, \beta, \alpha-1\},$$

folglich ist

$$\bar{\omega} = \mathfrak{E}\{\tau, \dots, \beta, \alpha \parallel \bar{\omega}\},$$

d. h.  $\frac{1}{\omega'}$  hat die umgekehrte Periode wie  $\omega$ . Das gleiche gilt aber für jede quadratische Irrationalzahl  $\xi$ . Ist nämlich  $(a, b, c)_\varepsilon$  die zugeordnete Form, so gibt es, abgesehen von der in Satz 12 gefundenen Ausnahme, jedenfalls

eine mit ihr grade-äquivalente reduzierte Leitform. Ihre zugeordnete Irrationalzahl sei  $\omega$ , dann sind  $\xi$  und  $\omega$  durch eine grade Substitution

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \omega = A(\omega)$$

verknüpft, woraus sich zwischen  $\bar{\xi} = \frac{1}{\xi}$  und  $\bar{\omega} = \frac{1}{\omega}$  die Beziehung

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \bar{\omega} = B(\bar{\omega})$$

ergibt. Es ist aber, wenn  $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist:

$$B = R A R,$$

also auch  $B$  eine grade Substitution, und nun ergibt sich aus Satz 4 in I, § 4, daß die  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . von  $\bar{\xi}$  und  $\bar{\omega}$  von einer bestimmten Stelle an übereinstimmen. Gehört aber  $(a, b, c)_e$  zu den in Satz 12 genannten Formen, so ist  $\xi$  grade-äquivalent mit  $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ,  $\frac{1}{\xi}$  mit  $\frac{1}{t}$ , also auch mit  $-\frac{1}{t}$ . Da aber  $-\frac{1}{t} = t$  ist, so haben  $\xi$  und  $\frac{1}{\xi}$   $\mathcal{E}\mathcal{R}$ .entwicklungen von der Form (18.). Allgemein gilt also für jede quadratische Irrationalzahl  $\omega$  der Satz:

13. Der  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . für  $\frac{1}{\omega}$  hat die umgekehrte Periode wie der für  $\omega$ .

Ist die Irrationalzahl  $\omega$  der Form  $(a, b, c)_e$  zugeordnet, so ist auf Grund der Transformation  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  die reziproke Zahl  $\frac{1}{\omega}$  der Form  $(c, b, a)_{-e}$  zugeordnet. Wir nennen die eine Form die *reziproke Form* der andern, die ihnen zugeordneten reduzierten Ketten mögen *reziproke Ketten* heißen. Ist  $(a, b, c)_e$  eine reduzierte Leitform, so ist ihre reziproke Form  $(c, b, a)_{-e}$  keine reduzierte Form, weil ja das Vorzeichen von  $c$  nicht mit dem Index übereinstimmt. Dagegen ist die reziproke Form einer reduzierten Zwischenform offenbar wiederum eine reduzierte Zwischenform; sie findet sich also in der reziproken Kette vor, und umgekehrt sind nur in diesem Fall zwei Ketten reziprok. Es besteht mithin der Satz:

14. Zwei reduzierte Ketten sind dann und nur dann reziprok, wenn die reziproke Form einer Zwischenform der einen Kette in der andern Kette vorkommt. Alsdann sind alle Zwischenformen der einen Kette die reziproken



*Formen der Zwischenformen der andern. Die Anzahl der Zwischenformen ist also in beiden Ketten die gleiche.*

Zwei reziproke Formen und überhaupt zwei durch eine ungrade Substitution verknüpfte Formen sind *ungrade-äquivalent*.

§ 3. Auf Grund der Sätze 4 und 5 in I, § 4 kann nun der folgende Satz ausgesprochen werden, der zusammen mit Satz 11 das Hauptergebnis unserer Untersuchung darstellt:

15. *Grade-äquivalente Formen haben dieselbe reduzierte Kette, ungrade-äquivalente Formen haben reziproke reduzierte Ketten.*

Allerdings können wir zunächst nur schließen, da zu *symmetrischen* Formen die gleiche  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ -Periode gehört, daß zwei grade-äquivalente Formen entweder dieselbe oder symmetrische reduzierte Ketten besitzen (und entsprechend für ungrade-äquivalente Formen), es wird sich aber zeigen, daß der zweite Fall nicht möglich ist (s. u. Satz 21). Um die Darstellung nicht zu unterbrechen, wollen wir zuvor einige wichtige neue Begriffe definieren.

Eine Gesamtheit von Formen, von denen jede mit jeder andern grade-äquivalent ist, nennen wir einen *Stamm*. Jeder Stamm ist durch seine reduzierte Kette charakterisiert. Zwei Stämme mit reziproken reduzierten Ketten heißen reziproke Stämme. Jede Form des einen Stammes ist die reziproke Form einer Form des andern Stammes.

*Es kann aber auch eine reduzierte Kette mit ihrer reziproken Kette identisch sein.* Eine solche Kette und den ihr entsprechenden Stamm wollen wir *involutorisch* nennen. In einem involutorischen Stamm tritt neben jeder Form  $(a, b, c)_e$  die reziproke Form  $(c, b, a)_{-e}$  auf, und jede Form ist mit jeder andern, also auch mit sich selbst sowohl grade- wie auch ungrade-äquivalent. Es gilt aber auch offenbar das umgekehrte, nämlich:

16. *Eine Form gehört zu einem involutorischen Stamm, wenn es ungrade Substitutionen gibt, die die Form in sich selbst überführen.*

Neben den involutorischen Stämmen wollen wir noch zwei besondere Arten von Stämmen betrachten. Sie treten auf, sobald zwei *konjugierte Formen äquivalent* sind. Konjugierte Formen gehören zu *konjugierten Stämmen*; jede Form des einen Stammes ist die konjugierte Form einer Form des andern Stammes. Sind nun zwei konjugierte Formen äquivalent, so sind ihre Stämme entweder *identisch* oder *reziprok*, je nachdem die Formen grade- oder ungrade-äquivalent sind.

Ein Stamm, der mit seinem konjugierten Stamm identisch ist, heißt *selbstkonjugiert*. In ihm tritt also neben jeder Form  $(a, b, c)_\varepsilon = [\omega, \omega']$  die konjugierte Form  $(a, b, c)_{-\varepsilon} = [\omega', \omega]$  auf. Diese Formen können nicht gleichzeitig reduzierte Formen sein. Es ist aber zur Form  $[\omega', \omega]$  die Form  $[-\omega', -\omega] = (a, -b, c)_\varepsilon$  grade-äquivalent, also gehört auch sie zu dem Stamm, und diese Form ist gleichzeitig mit  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Zwischenform. Es folgt also:

*Bei einem selbstkonjugierten Stamm tritt in der reduzierten Kette neben jeder reduzierten Zwischenform  $(a, b, c)_\varepsilon$  auch die Form  $(a, -b, c)_\varepsilon$  auf.*

Sind zwei konjugierte Stämme reziprok und ist  $(a, b, c)_\varepsilon = [\omega, \omega']$  irgend eine Form des einen Stammes, so gehört zum gleichen Stamm die Konjugierte der reziproken Form  $(c, b, a)_{-\varepsilon}$ , d. h. die Form  $(c, b, a)_\varepsilon = \left[\frac{1}{\omega'}, \frac{1}{\omega}\right]$ . Diese Form heißt die *Umkehrung* der Form  $(a, b, c)_\varepsilon$ , und ein Stamm, der zu seinem konjugierten Stamm reziprok ist, heißt *umkehrbar*. Ist  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Leitform, so ist auch die Umkehrung eine reduzierte Leitform, ist  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine reduzierte Zwischenform, so ist die zur Umkehrung grade-äquivalente Form  $(c, -b, a)_{-\varepsilon} = \left[-\frac{1}{\omega'}, -\frac{1}{\omega}\right]$  ebenfalls eine reduzierte Zwischenform, also folgt:

*Bei einem umkehrbaren Stamm tritt in der reduzierten Kette neben jeder reduzierten Leitform ihre Umkehrung, neben jeder reduzierten Zwischenform  $(a, b, c)_\varepsilon$  die Form  $(c, -b, a)_{-\varepsilon}$  auf.*

Bezeichnen wir einen Stamm mit  $\mathfrak{S}$ , seinen reziproken Stamm mit  $\mathfrak{S}^{-1}$ , den konjugierten Stamm mit  $\mathfrak{S}'$ , so ist der Stamm  $\mathfrak{S}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{involutorisch,} & \text{wenn } \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}, \\ \text{selbstkonjugiert,} & \text{,, } \mathfrak{S} = \mathfrak{S}', \\ \text{umkehrbar,} & \text{,, } \mathfrak{S}' = \mathfrak{S}^{-1}. \end{array}$$

Diesen drei besonderen Stämmen entsprechen besondere Eigenschaften der zugehörigen  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ -entwicklungen. Bezeichnen wir kurz die Perioden von zwei reziproken Irrationalzahlen als reziproke Perioden, so ist ohne weiteres klar\*):

---

\*) Über die Eigenschaften der involutorischen, selbstkonjugierten und umkehrbaren  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ . vgl. auch meine Arbeit „Über Möbius-Kettenbrüche und Elementarkettenbrüche“, Math. Zeitschr. Bd. 2, S. 428 ff.

17<sup>a</sup>. Bei einem involutorischen Stamm ist die Periode mit ihrer reziproken Periode identisch.

Bei einem selbstkonjugierten Stamm ist  $\omega'$  grade-äquivalent mit  $\omega$ , mithin auch  $\frac{1}{\omega'}$  grade-äquivalent mit  $\frac{1}{\omega}$ , also folgt nach Satz 13:

17<sup>b</sup>. Bei einem selbstkonjugierten Stamm ist die reziproke Periode die Umkehrung der Periode.

Bei einem umkehrbaren Stamm ist  $\frac{1}{\omega'}$  grade-äquivalent mit  $\omega$ , also ergibt die Umkehrung der Periode bis auf eine Verschiebung wieder dieselbe Periode, d. h. aber:

17<sup>c</sup>. Bei einem umkehrbaren Stamm besteht die Periode aus einem oder zwei symmetrischen Teilen.

Für die Perioden der involutorischen und selbstkonjugierten Stämme kann noch eine weitere Eigenschaft festgestellt werden. Es sei für irgendeinen periodischen  $\mathfrak{C}\mathfrak{R}$ .  $\overline{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu}$  die Periode; ihre Länge ist

$$\lambda = \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_\mu,$$

die Anzahl  $\mu$  der Abschnitte heiße die Ordnung der Periode; sie ist gleich der Anzahl der Trennungsstriche in der Indexkette der Periode, wenn man den Trennungsstrich zwischen zwei Perioden immer zur vorangehenden Periode rechnet. Die reziproke Periode habe die Länge  $\lambda'$ , die Ordnung  $\mu'$ . Durch Betrachtung der Indexketten beider Perioden findet man ganz entsprechend wie in I, § 2 die Beziehungen

$$\begin{aligned} \lambda' - \mu' &= \lambda - \mu \\ \lambda' &= 2\lambda - 3\mu \\ \mu' &= \lambda - 2\mu. \end{aligned}$$

Aus ihnen ergibt sich sofort für die Anzahlen  $l$  und  $l'$  der reduzierten Leitformen und die Anzahlen  $z$  und  $z'$  der reduzierten Zwischenformen in zwei reziproken Stämmen\*):

$$z = z' = l + l'.$$

Bei den involutorischen und den selbstkonjugierten Stämmen ist  $\lambda' = \lambda, \mu' = \mu, l' = l$ , also folgt:

$$(19.) \quad \lambda = 3\mu, \quad z = 2l.$$

18. Bei jedem involutorischen und jedem selbstkonjugierten Stamm ist die Länge der Periode das Dreifache der Ordnung und die Anzahl der

\*) Es ist entweder  $l + z = \lambda, l = \mu$  oder (vgl. Satz 19)  $l + z = 2\lambda, l = 2\mu$ .

reduzierten Zwischenformen doppelt so groß wie die Anzahl der reduzierten Leitformen.

Diese Erscheinung tritt sehr häufig ein, z. B. bei jedem  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . für eine Quadratwurzel, denn die Form  $(1, 0, -D)_+$  gehört zu einem selbstkonjugierten Stamm. So ist

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= \mathcal{E}\{2, \overline{2, 4, 3, \dots}\}; & \lambda = 9, \mu = 3 \\ \sqrt{7} &= \mathcal{E}\{2, \overline{2, 2, 2, 2, 3, 7, 3, \dots}\}; & \lambda = 21, \mu = 7. \end{aligned}$$

Die Periode des zweiten  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . setzt sich aus zwei symmetrischen Teilen zusammen, weil der Stamm der Form  $(1, 0, -7)_+$  gleichzeitig selbstkonjugiert und umkehrbar ist. Er ist dann auch zugleich involutorisch.

Eine einfache Periode des Stammes entspricht nicht in allen Fällen einer einfachen Periode des  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ ., sondern es kommt vor, daß sie zwei Perioden des  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . entspricht, wenn nämlich der Stamm neben jeder Form  $(a, b, c)_e$  auch die Form  $(-a, -b, -c)_{-e}$  enthält, d. h. wenn er *in sich symmetrisch* ist (vgl. das Beispiel S. 38). Aus der Betrachtung der Indexkette der reduzierten Formen ergibt sich sogleich:

19. *Je nachdem in der Periode des  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ .  $\lambda - \mu$  grade oder ungrade ist, ist die Periode der Formen grade so lang oder doppelt so lang, wie die Periode des  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . Im zweiten Fall ist der Stamm in sich symmetrisch.*

Es ist also nach (19.) *ein involutorischer oder ein selbstkonjugierter Stamm niemals in sich symmetrisch.*

Die Sätze 17 sind nicht ohne weiteres umkehrbar in dem Sinne, daß aus den dort angegebenen Eigenschaften der Perioden geschlossen werden könnte, daß die Stämme involutorisch, selbstkonjugiert oder umkehrbar seien. Wenn nämlich in einem Stamm zu jeder Form  $(a, b, c)_e$  nicht die reziproke, sondern die zu dieser *symmetrische Form*  $(-c, -b, -a)_e$  vorkommt, so ist der Stamm nicht involutorisch, aber für die Periode des  $\mathcal{E}\mathcal{R}$ . gilt Satz 17<sup>a</sup> und 18. Einen solchen Stamm kann man *scheinbar involutorisch* nennen. Der reziproke Stamm ist dann auch scheinbar involutorisch, und die beiden Stämme sind *symmetrisch*.

Ebenso ist ein Stamm *scheinbar selbstkonjugiert*, wenn zu jeder Form  $(a, b, c)_e$  die zur konjugierten Form symmetrische Form  $(-a, -b, -c)_e$ , und *scheinbar umkehrbar*, wenn zu jeder Form  $(a, b, c)_e$  die Form  $(-c, -b, -a)_{-e}$ , also auch die damit grade-äquivalente Form  $(c, b, -a)_e$  in dem Stamm

auftritt. Für die Perioden der  $\mathfrak{E}\mathfrak{R}$ . gelten dann die Sätze 17<sup>b</sup> und 17<sup>c</sup>. Ein scheinbar selbstkonjugierter Stamm ist symmetrisch zu seinem konjugierten Stamm, bei einem scheinbar umkehrbaren Stamm ist der konjugierte Stamm symmetrisch zum reziproken Stamm.

Bezeichnet man den zu  $\mathfrak{E}$  symmetrischen Stamm mit  $\bar{\mathfrak{E}}$ , so sind die genannten drei Arten von Stämmen kurz in folgender Weise charakterisiert:

$$\begin{aligned} \text{scheinbar involutorisch: } \bar{\mathfrak{E}} &= \mathfrak{E}^{-1}, \\ \text{,, selbstkonjugiert: } \bar{\mathfrak{E}} &= \mathfrak{E}', \\ \text{,, umkehrbar: } \bar{\mathfrak{E}}' &= \mathfrak{E}^{-1}. \end{aligned}$$

Natürlich darf ein solcher Stamm nicht in sich symmetrisch sein, was nach dem oben Gesagten nur bei der letzten Art eintreten kann, sonst ist der Stamm nicht nur scheinbar, sondern wirklich umkehrbar.

1. Beispiel. Die reduzierte Leitform  $(3, -7, 4)_+$  mit  $D = 37$  gehört zu einem scheinbar involutorischen Stamm. Die reduzierte Kette ist\*)

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 3, -7, 4 \\ -7, -4, 3 \\ \hline -12, 11, -7 \\ 3, -1, -12 \\ -11, 2, 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} -4, 9, -11 \\ 3, 5, -4 \\ \hline 9, -8, 3 \\ -4, 1, 9 \\ 7, -3, -4 \\ -3, 4, 7 \\ \hline 12, 1, -3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 11, -13, 12 \\ -3, -2, 11 \\ 4, -5, -3 \\ -9, -1, 4 \\ \hline -7, 10, -9 \\ 4, 3, -7 \\ \hline 3, -7, 4 \\ \hline \vdots \end{array} \end{array}$$

2. Beispiel. Die reduzierte Leitform  $(10, -8, 3)_+$  mit  $D = 34$  gehört zu einem scheinbar umkehrbaren Stamm. Die reduzierte Kette ist

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 10, -8, 3 \\ -3, 2, 10 \\ \hline 11, -1, -3 \\ \hline 6, -10, 11 \\ -3, -4, 6 \\ \hline -5, 7, -3 \\ 6, 2, -5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 5, -8, 6 \\ -5, -3, 5 \\ \hline -6, 8, -5 \\ 5, 2, -6 \\ \hline 3, -7, 5 \\ -6, -4, 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} -11, 10, -6 \\ 3, -1, -11 \\ -10, 2, 3 \\ \hline -3, 8, -10 \\ 3, 5, -3 \\ \hline 10, -8, 3 \\ \hline \vdots \end{array} \end{array}$$

\*) Die Indizes der Formen sind weggelassen, da sie mit den Vorzeichen der ersten Koeffizienten übereinstimmen.

Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die scheinbar involutorischen, selbstkonjugierten oder umkehrbaren Stämme auftreten.

Ein Stamm ist scheinbar involutorisch, wenn die symmetrischen Formen  $(a, b, c)_\varepsilon$  und  $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$  ungrade äquivalent sind. Wir wollen also zunächst überhaupt die Äquivalenz von symmetrischen Formen betrachten. Wenn die Formen  $(a, b, c)_\varepsilon$  und  $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$  äquivalent sind, so sind sie wegen der ungleichen Indizes uneigentlich äquivalent, es ist also die zugeordnete Irrationalzahl  $\omega$  sich selbst uneigentlich äquivalent:

$$\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = -1,$$

mithin

$$a : 2b : c = \gamma : \delta - \alpha : -\beta.$$

Hieraus folgt:

20<sup>a</sup>. Ist der größte gemeinsame Teiler  $\sigma$  von  $a, 2b, c$  bereits Teiler von  $a, b, c$  und ist

$$D_0 = \frac{D}{\sigma^2},$$

so ist zur Äquivalenz der Formen  $(a, b, c)_\varepsilon$  und  $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$  notwendig und hinreichend, daß die Gleichung

$$(20^a.) \quad t^2 - D_0 u^2 = -1$$

in ganzen Zahlen lösbar ist, und dann sind

$$(21^a.) \quad \begin{aligned} \alpha &= t - \frac{b}{\sigma} u, & \beta &= -\frac{c}{\sigma} u \\ \gamma &= \frac{a}{\sigma} u, & \delta &= t + \frac{b}{\sigma} u \end{aligned}$$

die Elemente der Substitution, die  $\omega$  in sich selbst überführt.

20<sup>b</sup>. Ist  $\sigma$  der größte gemeinsame Teiler von  $a, 2b, c$  (aber nicht von  $a, b, c$ ), so ist jedenfalls  $\sigma$  grade; ist dann\*)

$$D_0 = \frac{D}{\sigma^2/4},$$

so ist zur Äquivalenz von  $(a, b, c)_\varepsilon$  und  $(-a, -b, -c)_{-\varepsilon}$  die Lösbarkeit der Gleichung

$$(20^b.) \quad t^2 - D_0 u^2 = -4$$

notwendig und hinreichend, und die Substitution ist durch

---

\*) Es kann nicht  $D_0 \equiv 0 \pmod{4}$  sein, denn dann wäre  $\sigma$  schon gemeinsamer Teiler von  $a, b, c$ .

$$(21^b.) \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left( t - \frac{b}{\sigma/2} u \right), & \beta &= \frac{-c}{\sigma} u \\ \gamma &= \frac{a}{\sigma} u, & \delta &= \frac{1}{2} \left( t + \frac{b}{\sigma/2} u \right) \end{aligned}$$

gegeben. Ist Gleichung (20<sup>a</sup>.) lösbar, so ist es auch (20<sup>b</sup>.), wenn auch nicht immer in relativ primen Zahlen  $t, u$ , und umgekehrt ist für jede nicht durch 4 teilbare Determinante  $D_0$ , für die (20<sup>b</sup>.) lösbar ist, auch (20<sup>a</sup>.) lösbar.

Nunmehr können wir die zum vollständigen Beweis des Satzes 15 notwendige Ergänzung geben, indem wir den folgenden Satz beweisen:

21. *Zwei grade-äquivalente symmetrische Formen gehören immer zur gleichen Kette.*

Sei nämlich  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine Form von der in Satz 20<sup>a</sup> betrachteten Art, — wir dürfen sie als reduzierte Leitform annehmen — und sei die Gleichung  $t^2 - D_0 u^2 = -1$  lösbar, so ist\*)

$$(22.) \quad \begin{pmatrix} t - \frac{\varepsilon b}{\sigma} u & -\frac{\varepsilon c}{\sigma} u \\ \frac{\varepsilon a}{\sigma} u & t + \frac{\varepsilon b}{\sigma} u \end{pmatrix}$$

eine Substitution, die  $(a, b, c)_\varepsilon$  in die symmetrische Form überführt. Sie soll eine grade Substitution sein. Ihr entspricht der  $\mathfrak{C}\mathfrak{R}$ . für die der Form zugeordnete Irrationalzahl

$$\omega = \mathfrak{C} \{ \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu \mid \omega \} = \frac{\omega P_\lambda - P_{\lambda-1}}{\omega Q_\lambda - Q_{\lambda-1}}.$$

Darin ist  $\overline{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\mu}$  die Periode des  $\mathfrak{C}\mathfrak{R}$ ., und die Substitution  $\begin{pmatrix} P_\lambda & -P_{\lambda-1} \\ Q_\lambda & -Q_{\lambda-1} \end{pmatrix}$  muß für ein bestimmtes Lösungspaar  $t, u$  mit (22.) übereinstimmen, also

$$\begin{aligned} P_\lambda &= t - \frac{\varepsilon b}{\sigma} u, & P_{\lambda-1} &= \frac{\varepsilon c}{\sigma} u \\ Q_\lambda &= \frac{\varepsilon a}{\sigma} u, & Q_{\lambda-1} &= -t - \frac{\varepsilon b}{\sigma} u. \end{aligned}$$

$\lambda$  ist die Länge der Periode, und nach (6.) in I, § 2 ist\*\*)

$$P_\lambda Q_{\lambda-1} - P_{\lambda-1} Q_\lambda = (-1)^{\lambda-\mu+1}$$

oder

$$t^2 - D_0 u^2 = (-1)^{\lambda-\mu}.$$

\*) Man beachte, daß  $\varepsilon a$  und  $\varepsilon c$  positiv,  $\varepsilon b$  negativ ist.

\*\*) Für  $m$  in jener Formel ist hier  $\mu - 1$  zu setzen.

Hieraus folgt aber, daß  $\lambda - \mu$  *ungrade* sein muß, folglich ist nach Satz 19 der Stamm in sich symmetrisch. Dies ist aber gleichbedeutend mit Satz 21. Ganz entsprechend wird der Beweis geführt, wenn  $(a, b, c)_e$  eine Form von der in Satz 20<sup>b</sup> betrachteten Art ist.

Damit ist der Fundamentalsatz 15 vollständig bewiesen.

Eine Form  $(a, b, c)_e$  wird zu einem scheinbar involutorischen Stamm gehören, wenn für sie die Substitution (21.) eine *ungrade* Substitution wird. Solche Formen gibt es aber für jede der in Betracht kommenden Determinanten, z. B. die Form  $(1, 0, -D)_+$ , denn es besteht der Satz:

*Sind  $t, u$  Lösungen der Gleichung  $t^2 - Du^2 = -1$ , so ist die Substitution  $\begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}$  stets ungrade.*

Es ergibt sich dies sofort aus dem in I, § 4 bewiesenen Satz 11, denn es ist  $\begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix}$  grade-äquivalent mit der eigentlichen ungraden Substitution  $\begin{pmatrix} t & Du \\ u & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -Du \\ u & -t \end{pmatrix}$ .

Wir können also den folgenden Satz aussprechen, wobei wir uns der Einfachheit halber ohne wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf primitive Formen und Stämme beschränken dürfen:

22. *Scheinbar involutorische Stämme gibt es dann und nur dann, wenn die Gleichung*

$$(23.) \quad t^2 - Du^2 = -1$$

*in ganzen Zahlen lösbar ist.*

Jede Form einer solchen Determinante, welche nicht zu einem scheinbar involutorischen Stamm gehört, ist mit ihrer symmetrischen Form grade-äquivalent, also folgt nach Satz 21:

23. *Alle nicht scheinbar involutorischen Stämme einer Determinante, für die die Gleichung (23.) lösbar ist, und nur diese, sind in sich symmetrisch.*

Wollen wir nun das Auftreten von scheinbar selbstkonjugierten oder scheinbar umkehrbaren Stämmen untersuchen, so liegt der eine oder der andere Fall vor, je nachdem die Formen  $(a, b, c)_e$  und  $(-a, -b, -c)_e$  grade- oder ungrade-äquivalent und die Stämme nicht in sich symmetrisch sind. Jedenfalls müssen also diese Formen oder die zugeordneten Irrationalzahlen  $\omega$  und  $\omega'$  eigentlich äquivalent sein, d. h., wenn noch  $\omega'$  durch  $\frac{c}{a\omega}$  ersetzt wird:



$$\frac{c}{a\omega} = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

also

$$(24.) \quad a\alpha\omega^2 + (a\beta - c\gamma)\omega - c\delta = 0.$$

Ist zunächst  $\alpha = 0$ , so muß auch  $a\beta - c\gamma = 0$  und  $\delta = 0$ , also  $\beta = 1, \gamma = -1$  und  $a = -c$  sein. Die Substitution  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  ist ungrade, also folgt (mit  $a = m, b = n$ ):

24. Jeder Stamm, welcher eine Form  $(m, n, -m)_e$  enthält, ist wirklich oder scheinbar umkehrbar, je nachdem er in sich symmetrisch ist oder nicht.

Ist aber  $\alpha \neq 0$ , so folgt aus (24.)

$$(25.) \quad \alpha + \delta = 0, \quad a\beta - c\gamma = 2b\alpha.$$

Die erste Gleichung zeigt, daß jede eigentliche Substitution, durch die eine Form  $(a, b, c)_e$  in  $(-a, -b, -c)_e$  übergeht, die Gestalt  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$  hat. Jede solche Substitution ist aber nach I, § 4, Satz 11 eine ungrade Substitution, also finden wir:

25. Es gibt keine scheinbar selbstkonjugierten Stämme.

Wir sind nun weiter in der Lage, sämtliche scheinbar umkehrbare Stämme anzugeben. Da  $\delta = -\alpha$  ist, so ist

$$-\beta\gamma = \alpha^2 + 1,$$

folglich müssen  $\beta$  und  $-\gamma$ , die wir als positiv voraussetzen dürfen, Summen von 2 Quadraten sein:

$$\beta = x^2 + \lambda^2, \quad -\gamma = \mu^2 + \nu^2,$$

und da

$$-\beta\gamma = (x^2 + \lambda^2)(\mu^2 + \nu^2) = (x\mu + \lambda\nu)^2 + (x\nu - \lambda\mu)^2 = \alpha^2 + 1$$

sein soll, so muß es möglich sein,  $x, \lambda, \mu, \nu$  so zu bestimmen, daß

$$x\mu + \lambda\nu = -\alpha$$

und

$$x\nu - \lambda\mu = 1$$

ist. Nach (25.) ist dann

$$a(x^2 + \lambda^2) + 2b(x\mu + \lambda\nu) + c(\mu^2 + \nu^2) = 0,$$

also

$$ax^2 + 2bx\mu + c\mu^2 = -(a\lambda^2 + 2b\lambda\nu + c\nu^2) = m.$$

Hieraus folgt aber:

Die Form  $(a, b, c)_s$  geht durch die eigentliche Substitution  $\begin{pmatrix} x & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$  in die Form  $(m, n, -m)_s$  über, und darin ist

$$n = ax\lambda + b(x\nu + \lambda\mu) + c\lambda\nu.$$

Es zeigt sich damit, daß Satz 24 bereits alle Möglichkeiten des Auftretens von scheinbar umkehrbaren Stämmen erschöpft: Es muß also jedenfalls die Determinante eine Summe von zwei Quadraten sein, und für jede solche Determinante gibt es scheinbar umkehrbare Stämme; denn wenn für eine derartige Determinante die Gleichung  $t^2 - Du^2 = -1$  nicht lösbar ist, so gibt es keinen in sich symmetrischen Stamm, ist sie aber lösbar, so ist beispielsweise der scheinbar involutorische Stamm der Form  $(1, 0, -D)_+$  gleichzeitig scheinbar umkehrbar. Es folgt ferner aus Satz 23, daß für solche Determinanten, für die die Gleichung  $t^2 - Du^2 = -1$  lösbar ist, jeder scheinbar umkehrbare Stamm gleichzeitig scheinbar involutorisch ist.

Die Einteilung der Formen in Stämme entspricht vollständig der Klasseneinteilung in der gewöhnlichen Theorie, aber sie deckt sich nicht mit ihr. Den reziproken Stämmen entsprechen die entgegengesetzten Klassen, den involutorischen Stämmen die ambigen Klassen, es kann aber vorkommen, daß zwei reziproke Stämme zusammen eine ambige Klasse bilden oder daß ein involutorischer Stamm zwei entgegengesetzte Klassen umfaßt. So gibt es z. B. für  $D = 17$  zwei reziproke Stämme mit den reduzierten Ketten:

2, - 5, 4	8, - 9, 8
- 4, - 3, 2	- 2, - 1, 8
- 8, 7, - 4	4, - 3, - 2
2, - 1, - 8	- 4, 1, 4
- 8, 1, 2	2, - 3, - 4
- 4, 7, - 8	- 8, - 1, 2
2, 3, - 4	- 8, 9, - 8
4, - 5, 2	⋮
- 4, - 1, 4	
- 2, 5, - 4	
⋮	

Diese beiden Stämme bilden zusammen eine ambige Klasse.

Dagegen besteht für  $D = 79$  der folgende involutorische Stamm aus zwei entgegengesetzten Klassen; alle Formen mit gleichem Index gehören zu einer Klasse:

6, — 11, 7	— 21, 25, — 26	— 18, 13, — 5
— 9, — 5, 6	3, 4, — 21	3, — 5, — 18
— 13, 14, — 9	— 10, 7, 3	— 25, — 2, 3
6, 1, — 13	7, — 3, — 10	— 26, 27, — 25
— 5, 7, 6	— 9, 4, 7	3, 1, — 26
15, 2, — 5	6, — 5, — 9	— 21, 4, 3
14, — 17, 15	— 13, 1, 6	— 10, 17, — 21
— 5, — 3, 14	— 5, 12, — 13	3, 7, — 10
3, — 8, — 5	6, 7, — 5	7, — 10, 3
— 18, — 5, 3	15, — 13, 6	— 10, — 3, 7
— 25, 23, — 18	— 5, 2, 15	— 9, 13, — 10
3, — 2, — 25	14, — 3, — 5	7, 4, — 9
— 26, 1, 3	3, — 11, 14	6, — 11, 7
	— 5, — 8, 3	⋮

Allgemein gelten die folgenden Sätze:

26<sup>a</sup>. Zwei reziproke Stämme bilden eine ambige Klasse, wenn jede Form sich selbst uneigentlich äquivalent ist, also wenn gleichzeitig mit  $(a, b, c)_\varepsilon$  auch die konjugierte Form  $(a, b, c)_{-\varepsilon}$  entweder im gleichen oder im reziproken Stamm auftritt, d. h. wenn jeder Stamm entweder selbstkonjugiert oder umkehrbar ist.

26<sup>b</sup>. Ein involutorischer Stamm bildet eine ambige Klasse, wenn er selbstkonjugiert ist. Er ist dann gleichzeitig umkehrbar.

Es sei  $(a, b, c)_\varepsilon$  eine eigentlich primitive Form. Alle Transformationen der Form in sich werden erhalten durch

$$(26.) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + bu & cu \\ -au & t - bu \end{pmatrix},$$

worin  $t, u$  Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

bedeuten. Ist nun  $D \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $D \equiv 2 \pmod{4}$  oder  $D \equiv 4 \pmod{8}$ , so muß notwendig  $u$  grade sein, also sind dann nach I, § 4, Satz 10 alle Substitutionen (26.) grade Substitutionen, und es folgt:

Ist  $D \equiv 1 \pmod{4}$  oder  $D \equiv 2 \pmod{4}$  oder  $D \equiv 4 \pmod{8}$ , so gibt es keine ungraden Transformationen einer eigentlich primitiven Form in sich.

Hieraus schließt man nach Satz 16:

27. Eigentlich primitive involutorische Stämme kann es nur für  $D \equiv 0 \pmod{8}$  und  $D \equiv 3 \pmod{4}$  geben.

Ist aber  $(a, b, c)_e$  eine uneigentlich primitive Form, also  $a$  und  $c$  grade Zahlen, dagegen  $b$  ungrade, so sind alle Transformationen der Form in sich durch

$$(27.) \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+bu}{2} & \frac{c}{2}u \\ -\frac{a}{2}u & \frac{t-bu}{2} \end{pmatrix}$$

gegeben, und darin sind  $t, u$  Lösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Hier ist  $D \equiv 1 \pmod{4}$ . Sind  $t$  und  $u$  grade, so ist die Substitution grade. Sind  $t$  und  $u$  ungrade, so muß eine der Zahlen  $\frac{t+bu}{2}$  und  $\frac{t-bu}{2}$  grade, die andere ungrade sein, folglich sind  $\frac{a}{2}$  und  $\frac{c}{2}$  ungrade und alle Substitutionen (27.) sind wiederum nach I, § 4, Satz 10 grade. Daraus folgt der Satz:

28. Es gibt keine uneigentlich primitiven involutorischen Stämme.

Während es also für jede Determinante ambige Klassen gibt, treten involutorische Stämme ungleich seltener auf.

Zum Schluß geben wir eine Tafel aller primitiven Stämme bis  $D = 33$ . In der ersten Spalte stehen unter dem Wert der Determinante die Anzahl der Stämme und der Klassen. In der zweiten Spalte steht als Vertreter eines jeden Stammes eine reduzierte Leitform. Nur für  $D = 5$  ist die letzte Form entsprechend Satz 12 keine Leitform. Je zwei reziproke Stämme sind durch eine geschweifte Klammer verbunden.  $i, s$  oder  $u$  bedeutet, daß der Stamm involutorisch, selbstkonjugiert oder umkehrbar, ( $i$ ) oder ( $u$ ), daß er scheinbar involutorisch oder scheinbar umkehrbar ist. Ein wagrechter Strich zwischen den Formen einer Determinante scheidet die eigentlich primitiven Stämme von den uneigentlich primitiven. Die dritte Spalte enthält die Periode des zu der Leitform gehörigen Elementarkettenbruchs.

Wie man sieht, sind alle Stämme der Tafel entweder selbstkonjugiert oder umkehrbar. Dies kommt daher, daß bis  $D = 33$  nur ambige Klassen vorkommen. Mit  $D = 34$  treten die ersten nicht ambigen Klassen auf; ihnen entsprechen zwei reziproke Stämme mit den Leitformen  $(6, -10, 11)$  (Periode 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3) und  $(11, -12, 10)$  (Periode 8, 4) und die beiden dazu symmetrischen Stämme. Sie sind scheinbar umkehrbar, aber nicht scheinbar involutorisch, weil für diese Determinante die Gleichung  $t^2 - Du^2 = -1$  nicht lösbar ist. Bekanntlich sind es im ersten Hundert nur die Determinanten 34, 37, 79, 82, für die nicht ambige Klassen existieren\*).

---

\*) *Gauß*, Disqu. arithm. § 304. Nach der Tafel von *Cayley* (ds. Journ. Bd. 60) würde noch  $D = 99$  mit dem Typus IV, 2 hinzukommen, während *Gauß* (Werke Bd. 2, S. 475) den Typus IV, 1 angibt. Bei einem Vergleich der *Cayleyschen* Tafel mit unserer ist zu beachten, daß dort alle Formen mit positivem Index zu versehen sind.

---

D	Leitform	Periode	D	Leitform	Periode
$\begin{matrix} 2 \\ 2 \ 1 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -2, 2 \\ -1, 2, -2 \end{matrix} \right\} (i), s, (u)$	2, 4	$\begin{matrix} 13 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -4, 3 \\ -1, 4, -3 \end{matrix} \right\} (i), s, (u)$	2, 3, 3, 8, 3, 3, 2, 2, 2, 2.
$\begin{matrix} 3 \\ 2 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -2, 1 \\ -1, 2, -1 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 5, 2		$\left. \begin{matrix} 2, -5, 6 \\ 6, -7, 6 \end{matrix} \right\} u$	2, 3 4
$\begin{matrix} 5 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -3, 4 \\ -1, 3, -4 \end{matrix} \right\} (i), s, (u)$	2, 3, 4, 3			
	$\left. \begin{matrix} 2, -3, 2 \\ 2, -1, -2 \end{matrix} \right\} u$	2 $\infty$	$\begin{matrix} 14 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -4, 2 \\ 2, -4, 1 \end{matrix} \right\} s$	2, 3, 3, 5, 2 2, 5, 3, 3, 2
$\begin{matrix} 6 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -3, 3 \\ 3, -3, 1 \end{matrix} \right\} s$	2, 3, 4 4, 3, 2		$\left. \begin{matrix} -1, 4, -2 \\ -2, 4, -1 \end{matrix} \right\} s$	
	$\left. \begin{matrix} -1, 3, -3 \\ -3, 3, -1 \end{matrix} \right\} s$		$\begin{matrix} 15 \\ 4 \ 4 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -4, 1 \\ -1, 4, -1 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 3, 3, 5, 3, 3, 2
$\begin{matrix} 7 \\ 2 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -3, 2 \\ -1, 3, -2 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 3, 7, 3, 2, 2, 2		$\left. \begin{matrix} 2, -5, 5 \\ -2, 5, -5 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 3, 2, 4, 4
$\begin{matrix} 8 \\ 2 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -3, 1 \\ -1, 3, -1 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 3, 5, 3, 2	$\begin{matrix} 17 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -5, 8 \\ -1, 5, -8 \end{matrix} \right\} (i), s, (u)$	2, 3, 3, 3, 4, 3, 3, 3
$\begin{matrix} 10 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -4, 6 \\ -1, 4, -6 \end{matrix} \right\} (i), s, (u)$	2, 3, 3, 4, 3, 3		$\left. \begin{matrix} 2, -5, 4 \\ 8, -9, 8 \end{matrix} \right\} u$	2, 3, 2, 2 6
	$\left. \begin{matrix} 2, -4, 3 \\ -2, 4, -3 \end{matrix} \right\} (i), s, (u)$	2, 6, 2, 2	$\begin{matrix} 18 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -5, 7 \\ 7, -5, 1 \end{matrix} \right\} s$	2, 3, 3, 3, 4, 3 3, 4, 3, 3, 3, 2
$\begin{matrix} 11 \\ 2 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -4, 5 \\ -1, 4, -5 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 2, 3		$\left. \begin{matrix} -1, 5, -7 \\ -7, 5, -1 \end{matrix} \right\} s$	
$\begin{matrix} 12 \\ 4 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -4, 4 \\ 4, -4, 1 \end{matrix} \right\} s$	2, 3, 3, 4 4, 3, 3, 2	$\begin{matrix} 19 \\ 2 \ 2 \end{matrix}$	$\left. \begin{matrix} 1, -5, 6 \\ -1, 5, -6 \end{matrix} \right\} i, s, u$	2, 3, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 5, 5
	$\left. \begin{matrix} -1, 4, -4 \\ -4, 4, -1 \end{matrix} \right\} s$				

D	Leitform	Periode	D	Leitform	Periode
<b>20</b> 4 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -5, 5 \\ 5, -5, 1 \\ -1, 5, -5 \\ -5, 5, -1 \end{array} \right\} s$	$2, 3, 3, 3, 4$ $4, 3, 3, 3, 2$	<b>29</b> 4 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 7 \\ -1, 6, -7 \end{array} \right\} (i), s, (u)$	$2, 3, 3, 3, 3, 4, 2, 2, 2,$ $4, 3, 3, 3, 3, 2, 6$
<b>21</b> 8 4	$\left. \begin{array}{l} 1, -5, 4 \\ 4, -5, 1 \\ -1, 5, -4 \\ -4, 5, -1 \end{array} \right\} s$	$2, 3, 3, 3, 6, 2, 2$ $2, 2, 6, 3, 3, 3, 2$		$\left. \begin{array}{l} 2, -7, 10 \\ 14, -13, 10 \end{array} \right\} u$	$2, 3, 3$ $3, 4$
<b>22</b> 4 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -5, 3 \\ 3, -5, 1 \\ -1, 5, -3 \\ -3, 5, -1 \end{array} \right\} s$	$2, 2, 3$ $5$	<b>30</b> 8 4	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 6 \\ 6, -6, 1 \\ -1, 6, -6 \\ -6, 6, -1 \\ 2, -6, 3 \\ 3, -6, 2 \\ -2, 6, -3 \\ -3, 6, -2 \end{array} \right\} s$	$2, 3, 3, 3, 3, 4$ $4, 3, 3, 3, 3, 2$ $2, 3, 5, 2$ $2, 5, 3, 2$
<b>23</b> 2 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -5, 2 i, s, u \\ -1, 5, -2 i, s, u \end{array} \right\}$	$2, 3, 3, 3, 5, 5, 3, 3,$ $3, 2, 2, 3, 2$	<b>31</b> 2 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 5 i, s, u \\ -1, 6, -5 i, s, u \end{array} \right\}$	$2, 3, 3, 3, 3, 6, 4, 3, 4,$ $6, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2,$ $3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 2$
<b>24</b> 4 4	$\left. \begin{array}{l} 1, -5, 1 i, s, u \\ -1, 5, -1 i, s, u \\ 3, -6, 4 i, s, u \\ -3, 6, -4 i, s, u \end{array} \right\}$	$2, 3, 3, 3, 5, 3, 3, 3, 2$ $2, 7, 2, 2, 2$	<b>32</b> 2 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 4 i, s, u \\ -1, 6, -4 i, s, u \end{array} \right\}$	$2, 3, 3, 3, 3, 7, 3, 3, 3,$ $3, 2, 2, 2$
<b>26</b> 4 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 10 \\ -1, 6, -10 \\ 2, -6, 5 \\ -2, 6, -5 \end{array} \right\} (i), s, (u)$	$2, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 3,$ $3, 3$ $2, 3, 6, 3, 2, 2$	<b>33</b> 8 4	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 3 \\ 3, -6, 1 \\ -1, 6, -3 \\ -3, 6, -1 \end{array} \right\} s$	$2, 3, 3, 3, 3, 5, 2$ $2, 5, 3, 3, 3, 3, 2$
<b>27</b> 2 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 9 i, s, u \\ -1, 6, -9 i, s, u \end{array} \right\}$	$2, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 4,$ $3, 3, 3, 3, 2, 3, 3$		$\left. \begin{array}{l} 4, -7, 4 \\ 16, -17, 16 \\ -4, 7, -4 \\ -16, 17, -16 \end{array} \right\} u$	$2, 4, 3, 4, 2$ $3, 2, 5, 2, 3$
<b>28</b> 4 2	$\left. \begin{array}{l} 1, -6, 8 \\ 8, -6, 1 \\ -1, 6, -8 \\ -8, 6, -1 \end{array} \right\} s$	$2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 2, 3$ $3, 2, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 2$			