Über Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche.

Von

P. Epstein in Straßburg i. E.

§ 1.

Unter dem *Möbiuskettenbruch*[1] (abgekürzt $\mathfrak{MK}$) für eine reelle Zahl ω verstehen wir die Entwicklung

$$\omega = k - \cfrac{1}{k_1 - \cfrac{1}{k_2 - \ddots}},$$

worin k die kleinste ganze Zahl $> \omega$ ist und $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ganze Zahlen $\geqq 2$ bedeuten. Wir bezeichnen einen solchen Kettenbruch durch

$$(1) \qquad \omega = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, k_3, \ldots)$$

und nennen ihn einen eigentlichen $\mathfrak{MK}$. Daneben werden wir auch uneigentliche $\mathfrak{MK}$ betrachten, bei denen einzelne der Zahlen $k_1, k_2, k_3, \ldots = 1$ sind. Sie lassen sich immer in eigentliche $\mathfrak{MK}$ verwandeln mit Hilfe der folgenden leicht abzuleitenden Formeln:

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}(\ldots a, 1, b, c, \ldots) & = \mathfrak{M}(\ldots a-1, b-1, c, \ldots), \\ \mathfrak{M}(\ldots a, 1, 1, b, c, \ldots) & = \mathfrak{M}(\ldots a+b-1, c, \ldots), \\ \mathfrak{M}(\ldots a, 1, 1, 1, b, c, \ldots) & = \mathfrak{M}(\ldots a, b, c, \ldots). \end{cases}$$

Man erhält den eigentlichen $\mathfrak{MK}$ für die Zahl ω durch den Algorithmus

$$\omega = k - \frac{1}{\omega_1}, \qquad \omega_1 = k_1 - \frac{1}{\omega_2}, \qquad \omega_2 = k_2 - \frac{1}{\omega_3}, \quad \ldots.$$

Hierbei ist k_i die kleinste ganze Zahl $\geqq \omega_i$ und die vollständigen Quotienten ω_i sind sämtlich > 1.

Ist $\omega = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl, so wird der $\mathfrak{MK}$ durch einen *Euklidischen Algorithmus* mit lauter negativen Resten erhalten, d. h. durch eine Kette von Gleichungen

[1]) Möbius, Werke, Bd. 4, S. 505. Perron (Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 168) nennt diese Kettenbrüche reduziert-regelmäßig.

$$(3)\qquad \begin{cases} a = kb - r_1, & 0 < r_1 < b \\ b = k_1 r_1 - r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = k_2 r_2 - r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_{m-1} = k_m r_m, \end{cases}$$

und es wird

$$\frac{a}{b} = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_m).$$

Für die letzte Gleichung in (3) kann man auch $r_{m-1} = (k_m + 1) r_m - r_m$, dann beliebig oft die Gleichung $r_m = 2r_m - r_m$ und schließlich $r_m = 1 \cdot r_m$ schreiben, also folgt[2]):

Für das letzte Element k_m eines endlichen $\mathfrak{MR}$ kann man auch

$$k_m + 1, 2, 2, 2, \ldots, 2, 1$$

mit beliebig vielen Teilquotienten 2 *setzen.* Der Kettenbruch wird dann ein uneigentlicher $\mathfrak{MR}$.

Eine irrationale Zahl ω besitzt immer eine unendliche $\mathfrak{MR}$-Entwicklung und umgekehrt stellt jeder unendliche $\mathfrak{MR}$ eine irrationale Zahl vor *mit Ausnahme der $\mathfrak{MR}$, welche mit einer unendlichen Folge von Teilquotienten* 2 *schließen.* Diese konvergieren gegen rationale Grenzwerte und es ist

$$\mathfrak{M}(2, 2, 2, \ldots) = 1,$$

$$\mathfrak{M}(k, k_1, \ldots, k_m, 2, 2, 2, \ldots) = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_m - 1).$$

Dies sind uneigentliche unendliche $\mathfrak{MR}$.

Die Näherungsbrüche $\frac{P_i}{Q_i}$ eines $\mathfrak{MR}$ werden mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$(4)\qquad \begin{cases} P_{i+1} = k_i P_i - P_{i-1}; & P_0 = 1,\ P_1 = k \\ Q_{i+1} = k_i Q_i - Q_{i-1}; & Q_0 = 0,\ Q_1 = 1 \end{cases}$$

berechnet und für je zwei aufeinanderfolgende Näherungsbrüche besteht die Beziehung

$$(5)\qquad P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = -1.$$

Ist ω_i ein vollständiger Quotient in der $\mathfrak{MR}$-Entwicklung von ω, also

$$\omega = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_{i-1}, \omega_i),$$

so ist

$$(6)\qquad \omega = \frac{P_i \omega_i - P_{i-1}}{Q_i \omega_i - Q_{i-1}},$$

[2]) Vgl. Fueter, Über unimodulare lineare Substitutionen, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. 21 (1910), S. 97.

es sind also ω und ω_i miteinander verknüpft durch die *eigentliche* lineare Substitution [3])

$$\begin{pmatrix} P_i, & -P_{i-1} \\ Q_i, & -Q_{i-1} \end{pmatrix} = S^k T S^{k_1} T \ldots S^{k_{i-1}} T,$$

wobei

(7) $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 2.

Neben dem $\mathfrak{MR}$ betrachten wir den gewöhnlichen *regulären Kettenbruch* für eine Zahl ω, den wir durch

$$\omega = \mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots)$$

bezeichnen. Er läßt sich leicht in einen $\mathfrak{MR}$ verwandeln [4]). Der $\mathfrak{MR}$ mit dem vollständigen Quotienten x:

$$\mathfrak{M}(k, k_1, k_2, \ldots, k_m, x)$$

ist gleichbedeutend mit der linearen Substitution

$$S^k T S^{k_1} T \ldots S^{k_m} T(x).$$

Für $x = \infty$ bedeutet dies den mit k_m schließenden endlichen $\mathfrak{MR}$.

Nun ist der reguläre Kettenbruch mit einer geraden Anzahl von Teilnennern q_i und dem vollständigen Quotienten x:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(q, q_1, q_2, \ldots, q_n, x) &= \mathfrak{M}(q, -q_1, q_2, -q_3, \ldots, q_{n-1}, -q_n, x) \\ &= S^q T S^{-q_1} T S^{q_2} T S^{-q_3} T \ldots S^{-q_n} T(x). \end{aligned}$$

Aus der zwischen S und T bestehenden Beziehung

$$STSTST = 1$$

zusammen mit

$$T^2 = 1$$

findet man leicht

(8) $$S^{-m} = TST(S^2T)^{m-1}ST,$$

folglich wird

(9) $$\mathfrak{K}(q, q_1, \ldots, q_n, x)$$
$$= S^{q+1} T (S^2T)^{q_1-1} S^{q_2+2} T (S^2T)^{q_3-1} \ldots S^{q_{n-1}+2} T (S^2T)^{q_n-1}(x+1).$$

---

[3]) Dabei werden die Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$ als wesentlich identisch angesehen.

[4]) Ein Verfahren zur Verwandlung der halbregelmäßigen Kettenbrüche, zu denen die $\mathfrak{MR}$ gehören, in reguläre Kettenbrüche findet sich bereits in dem Handbuch von Perron, § 37. Es kann natürlich ebenfalls zur Herleitung unserer Formel (10) benutzt werden.

Hierin ist die Verwandlung des regulären Kettenbruchs in einen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ enthalten. Um sie übersichtlich schreiben zu können, bezeichnen wir zur Abkürzung einen *Komplex von ν aufeinanderfolgenden Teilnennern* 2 in einem $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ mit $[2]_\nu$ und nennen ihn einen ν-gliedrigen *Zweierkomplex*. Nehmen wir nun $x = \infty$, so haben wir den Satz:

Der Zusammenhang zwischen einem regulären Kettenbruch und dem zugehörigen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ ist durch die Formel gegeben (n ungerade):

$$\begin{aligned}(10)\qquad &\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ &= \mathfrak{M}(q+1, [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, \ldots, q_{n-1}+2, [2]_{q_n-1}).\end{aligned}$$

Da man die Gliederzahl in einem regulären Kettenbruch nach Belieben gerade oder ungerade machen kann, so ist eine weitere Formel für einen regulären Kettenbruch mit ungerader Gliederzahl, die sich leicht aufstellen ließe, nicht erforderlich.

Diese Formel bleibt bestehen, auch wenn einige der Zahlen $q_1, q_3, q_5, \ldots$ gleich 1 sind. Man sieht sofort:

Sobald eine Zahl q_i mit ungeradem Index gleich 1 *ist, fehlt in dem $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ der entsprechende Zweierkomplex und es folgen die Elemente $q_{i-1}+2$ und $q_{i+1}+2$ aufeinander.*

So ist z. B.

$$\mathfrak{K}(2, 3, 1, 1, 5, 1, 4) = \mathfrak{K}(2, 3, 1, 1, 5, 1, 3, 1) = \mathfrak{M}(3, 2, 2, 3, 7, 5).$$

Ferner aber bleibt Formel (10) auch für *unendliche Kettenbrüche* bestehen, da sie für jeden Näherungsbruch gilt, d. h. es ist

$$(11)\quad \mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots) = \mathfrak{M}(q+1, [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, \ldots).$$

So ist z. B. der Kettenbruch für die Zahl e [5])

$$\begin{aligned}&\mathfrak{K}(2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots) \\ &= \mathfrak{M}(3, 4, 3, [2]_3, 3, 8, 3, [2]_7, 3, 12, 3, [2]_{11}, \ldots).\end{aligned}$$

Umgekehrt kann man mit Hilfe von Formel (10) einen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ in einen regulären Kettenbruch verwandeln. Schreibt man, was immer möglich ist, einen allgemeinen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ in der Form

$$\mathfrak{M}(k, [2]_{k_1}, k_2, [2]_{k_3}, k_4, \ldots, [2]_{k_n}),$$

worin die ganzen Zahlen $k_2, k_4, k_6, \ldots$ sämtlich > 2 sind [6]), während von den Zahlen $k_1, k_3, k_5, \ldots$ einige (oder alle) Null sein können, so ist

[5]) Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913, S. 134.

[6]) Das Anfangselement k kann eine beliebige ganze Zahl, auch $= 2$ sein, d. h. ein Anfangselement 2 ist nicht mit etwa darauffolgenden Elementen 2 zu einem Zweierkomplex zu vereinigen.

$$(12)\qquad \mathfrak{M}(k, [2]_{k_1}, k_2, [2]_{k_3}, \ldots, [2]_{k_n}) = \mathfrak{K}(k-1, k_1+1, k_2-2, k_3+1, k_4-2, \ldots, k_n+1).$$

Die regulären Kettenbrüche für zwei *reziproke Zahlen* besitzen dieselben Teilnenner [7]), nämlich

$$\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots) \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}(0, q, q_1, q_2, q_3, \ldots).$$

Dagegen sind ihre $\mathfrak{MK}$-Entwicklungen gänzlich voneinander verschieden; sie sind

$$(13\text{a})\qquad \omega = \mathfrak{M}(q+1, [2]_{q_1-1}, q_2+2, [2]_{q_3-1}, q_4+2, \ldots)$$

und

$$(13\text{b})\qquad \frac{1}{\omega} = \mathfrak{M}(1, [2]_{q-1}, q_1+2, [2]_{q_2-1}, q_3+2, \ldots).$$

So ist z. B.

$$\tfrac{509}{223} = \mathfrak{M}(3, 2, 2, 3, 7, 5),$$
$$\tfrac{223}{509} = \mathfrak{M}(1, 2, 5, 3, [2]_4, 3, [2]_3).$$

Wir beweisen den Satz:

Der $\mathfrak{MK}$ für $-\omega$ stimmt von einer gewissen Stelle an mit dem $\mathfrak{MK}$ für $\frac{1}{\omega}$ überein.

Sei nämlich

$$\frac{1}{\omega} = \mathfrak{M}(k, k_1, k_2, k_3, \ldots),$$

so ist

$$-\omega = -\frac{1}{1/\omega} = \mathfrak{M}(0, k, k_1, k_2, \ldots).$$

Dies ist ein eigentlicher $\mathfrak{MK}$, sobald $0 < \omega < 1$ ist, denn alsdann ist $k > 1$. Ist aber $\omega > 1$, so ist $k = 1$ und der $\mathfrak{MK}$ für $-\omega$ ist ein uneigentlicher $\mathfrak{MK}$. Sei $q < \omega < q+1$, so hat der $\mathfrak{MK}$ für $\frac{1}{\omega}$ die Gestalt (13b) und es wird

$$-\omega = \mathfrak{M}(0, 1, [2]_{q-1}, q_1+2, \ldots)$$

oder mit wiederholter Anwendung von Formel (2)

$$(14)\qquad \begin{aligned} -\omega &= \mathfrak{M}(-1, 1, [2]_{q-2}, q_1+2, \ldots) \\ &= \mathfrak{M}(-2, 1, [2]_{q-3}, q_1+2, \ldots) \\ &\;\;\vdots \\ &= \mathfrak{M}(-(q-1), 1, q_1+2, [2]_{q_2-1}, \ldots) \\ &= \mathfrak{M}(-q, q_1+1, [2]_{q_2-1}, q_3+2, \ldots). \end{aligned}$$

---

[7]) Für negative Zahlen gilt dies erst von einer bestimmten Stelle der beiden Kettenbrüche ab, z. B.

$$-\frac{187}{73} = \mathfrak{K}(-3, 2, 3, 1, 1, 4); \qquad -\frac{73}{187} = \mathfrak{K}(-1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 4).$$

Damit ist aber der obige Satz bewiesen. Aus (13 b) und (14) ergibt sich die folgende Formel, die wir noch zu benutzen haben werden:

Es ist für jeden eigentlichen $\mathfrak{MR}$ mit einem negativen Anfangselement:

$$\mathfrak{M}(-a, b, c, d, \ldots) = -\frac{1}{\mathfrak{M}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots)}. \tag{15}$$

§ 3.

Die gegenseitigen Beziehungen der regulären und der Möbiuskettenbrüche werden besonders durchsichtig, wenn man noch die Theorie der *Elementarkettenbrüche*[8]) heranzieht. Der Elementarkettenbruch (abgekürzt $\mathfrak{EK}$) für eine reelle Zahl ω beruht auf dem Algorithmus

$$\omega_1 = \frac{1}{|\omega - 1|}, \quad \omega_2 = \frac{1}{|\omega_1 - 1|}, \quad \omega_3 = \frac{1}{|\omega_2 - 1|}, \ \ldots$$

Ist eine der Zahlen $\omega_i < 1$, so folgt auf sie eine Zahl $\omega_{i+1} > 1$. Man kann daher die Zahlen ω_i in Abschnitte

$$\begin{array}{lllll}
\omega, & \omega_1, & \omega_2, \ \ldots & \omega_{\alpha-1}, \\
\omega_\alpha, & \omega_{\alpha+1}, & \omega_{\alpha+2}, \ \ldots & \omega_{\alpha+\beta-1}, \\
\omega_{\alpha+\beta}, & \omega_{\alpha+\beta+1}, & \omega_{\alpha+\beta+2}, \ \ldots & \omega_{\alpha+\beta+\gamma-1}, \\
\vdots
\end{array}$$

derart unterbringen, daß die letzte Zahl in jedem Abschnitt < 1, alle übrigen Zahlen > 1 sind. Ist die gegebene Zahl positiv, aber < 1, so bildet sie für sich den ersten Abschnitt, alle folgenden Abschnitte enthalten mindestens zwei Zahlen, d. h. es ist bei einer positiven Zahl ω immer

$$\alpha \geqq 1, \quad \beta, \gamma, \delta, \ldots > 1.$$

Ist ω negativ, so ist $0 < \omega_1 < 1$; es bilden dann ω und ω_1 für sich die beiden ersten Abschnitte, d. h. es ist bei einer negativen Zahl ω immer

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots > 1.$$

Ist ω eine rationale Zahl, so gelangt man immer zu einer Zahl $\omega_i = \frac{1}{2}$ als Schlußzahl eines Abschnitts; mit dieser brechen wir den Algorithmus ab. Bei einer irrationalen Zahl ω ist der Algorithmus unbegrenzt.

Auf Grund dieses Algorithmus erhält man für ω einen Kettenbruch von der Form

$$\omega = \underbrace{1 + \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots + \frac{1|}{|1}}_{\alpha} - \underbrace{\frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|1} + \cdots + \frac{1|}{|1}}_{\beta} - \underbrace{\frac{1|}{|1} + \cdots + \frac{1|}{|1}}_{\gamma} - \frac{1}{1} + \cdots$$

---

[8]) Die Theorie dieser Kettenbrüche und ihre Anwendungen auf lineare Substitutionen und quadratische Formen habe ich ausführlich in zwei Arbeiten dargestellt, die in Crelles Journal, Bd. 148, erscheinen werden. Sie werden im folgenden kurz als $\mathfrak{EK}$ I und $\mathfrak{EK}$ II angeführt.

Ein solcher Kettenbruch, bei dem *alle Teilnenner* $=1$, *alle Teilzähler* $=\pm 1$ sind und niemals zwei negative Teilzähler unmittelbar aufeinander folgen (außer wenn ω negativ ist, wo dann die beiden ersten Teilzähler -1 sind[9]), heißt ein *Elementarkettenbruch.* Er ist durch die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ völlig bestimmt; wir nennen sie die ***Abschnitte*** des $\mathfrak{EK}$ und bezeichnen ihn mit

$$\mathfrak{E}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Jede rationale Zahl läßt sich durch einen endlichen, jede irrationale Zahl durch einen unendlichen konvergenten $\mathfrak{EK}$ darstellen[10]. Die Näherungsbrüche des $\mathfrak{EK}$ stimmen mit den Haupt- und Nebennäherungsbrüchen des regulären Kettenbruchs, also auch des $\mathfrak{MK}$ überein.

Zu jedem $\mathfrak{EK}$ gehört eine ***Indexkette,*** die Elementarindexkette ($\mathfrak{EJ}$). Sie besteht aus einer Folge von *abwechselnden* $+$- und $-$-Zeichen, mit $-$ beginnend, welche durch Trennungsstriche in Abschnitte geteilt ist, so daß im ersten Abschnitt α Zeichen; in den folgenden Abschnitten $\beta-1$, $\gamma-1$, $\delta-1, \ldots$ Zeichen stehen.

Entsprechend gehört zu einem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, q_3, \ldots)$ eine *Charakteristik*[11]), bestehend aus Abschnitten von *untereinander gleichen* Zeichen, so daß der 1., 3., 5., ... Abschnitt aus $q, q_2, q_4, \ldots$ Minuszeichen, der 2., 4., 6., ... Abschnitt aus $q_1, q_3, q_5, \ldots$ Pluszeichen gebildet ist. Ist $q=0$, so fehlt der entsprechende Abschnitt, und umgekehrt gehört zu einer mit einem Plusabschnitt beginnenden Charakteristik ein Kettenbruch mit dem Anfangselement 0. Kehrt man alle Vorzeichen in der Charakteristik um, so erhält man die reziproke Charakteristik. Die zu beiden Charakteristiken gehörigen Kettenbrüche sind reziprok.

Einem Möbiuskettenbruch $\mathfrak{M}(a, b, c, d, \ldots)$ ordnen wir wiederum eine Indexkette, die ***Möbiusindexkette*** ($\mathfrak{MJ}$) zu, die genau so wie die $\mathfrak{EJ}$ aus *abwechselnden* $+$- und $-$-Zeichen, mit $-$ beginnend, besteht und im ersten Abschnitt a Zeichen, in den folgenden Abschnitten $b-1$, $c-1$, $d-1, \ldots$ Zeichen aufweist.

Von der $\mathfrak{EJ}$ geht man, wie in $\mathfrak{EK}$ I, § 2 gezeigt ist, ganz einfach zur Charakteristik in der Weise über, daß man jedes Vorzeichen am Ende eines Abschnitts umkehrt. Damit ist gleichzeitig ein $\mathfrak{EK}$ in einen gewöhnlichen Kettenbruch verwandelt. Umgekehrt erhält man aus der Charakteristik die zugehörige Indexkette, indem man unter die Charakteristik eine ebenso lange Reihe von abwechselnden Vorzeichen $-+-+\ldots$ schreibt

---

[9]) Wo nichts anderes bemerkt ist, nehmen wir im folgenden immer ω als *positiv* an.

[10]) Das Umgekehrte ist nicht richtig. Die mit $3, 3, 3, \ldots$ endigenden $\mathfrak{EK}$ konvergieren entweder gegen einen rationalen Wert oder sie divergieren. Hierüber, sowie über den Begriff der Konvergenz eines $\mathfrak{EK}$ vgl. $\mathfrak{EK}$ I, § 3.

[11]) Vgl. Hurwitz, Math. Annalen, Bd. 44 (1894), S. 417.

und hinter jedes Vorzeichen, welches von dem darüberstehenden verschieden ist, einen Trennungsstrich setzt.

Läßt man in einer Indexkette die Trennungsstriche fort und setzt dafür neue Trennungsstriche, wo bisher keine waren, so erhält man die *reziproke Indexkette.* (𝔈𝔎 I, § 2.) *Die reziproke* 𝔈𝔍 *gehört zum reziproken* 𝔈𝔎. Wir ordnen nun auch einer Charakteristik eine neue Charakteristik zu, die wir die ***assoziierte Charakteristik*** nennen, indem wir festsetzen:

Wo die eine Charakteristik einen Zeichenwechsel hat, hat die assoziierte Charakteristik eine Zeichenfolge und umgekehrt.

Die Beziehung zwischen beiden Charakteristiken ist gegenseitig; jede ist zur andern assoziiert. So sind z. B.

$$\text{(16)} \qquad \begin{array}{c} - - - - + + - + + + + - + - - - \\ - + - + + - - - + - + + + + - + \end{array}$$

assoziierte Charakteristiken; ihnen entsprechen die assoziierten regulären Kettenbrüche $\mathfrak{K}\,(4, 2, 1, 4, 1, 1, 3)$ und $\mathfrak{K}\,(1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 4, 1, 1)$.

Zu der assoziierten Charakteristik gehört wiederum eine bestimmte Indexkette. Die beiden zu assoziierten Charakteristiken gehörigen Indexketten heißen *assoziierte Indexketten.* Zu den obigen Charakteristiken gehören die assoziierten Indexketten:

$$\text{(17)} \qquad \begin{array}{c} - +|- +|-|+ - + -|+ -|+|-|+|- + \\ - + - + -|+|- +|-|+|-|+ -|+ - + \end{array}$$

Es seien nun in dem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}\,(q, q_1, q_2, q_3, \ldots)$ alle Teilnenner vom zweiten ab > 1. Bildet man die Charakteristik und ihre assoziierte Charakteristik, so überzeugt man sich leicht, *daß die zur assoziierten Charakteristik gehörige Indexkette gerade die Indexkette des Möbiuskettenbruchs in Formel* (10) *ist,* und dieses bleibt auch bestehen, wenn einige der Teilnenner des regulären Kettenbruchs $= 1$ sind. Es gilt also der Satz:

1. *Die zur assoziierten Charakteristik gehörige Indexkette ist die Möbiusindexkette.*

Oder, was dasselbe bedeutet:

2. *Ein Elementarkettenbruch und der ihm gleiche Möbiuskettenbruch haben assoziierte Indexketten.*

Es zeigt sich hier eine merkwürdige Reziprozität zwischen 𝔈𝔎 und 𝔐𝔎, die noch deutlicher in dem folgenden Satz zum Ausdruck kommt:

3. *Ist*

$$\mathfrak{E}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots) = \mathfrak{M}(a, b, c, d, \ldots),$$

so ist

$$\mathfrak{E}(a, b, c, d, \ldots) = \mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots).$$

So ersieht man aus den Charakteristiken (16) und den zugehörigen Indexketten (17) die Gleichheit der folgenden Kettenbrüche:

$$\mathfrak{K}(4, 2, 1, 4, 1, 1, 3) = \mathfrak{E}(2, 3, 2, 5, 3, 2, 2, 2, 3) = \mathfrak{M}(5, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 4),$$
$$\mathfrak{K}(1, 1, 1, 2, 3, 1, 1, 4, 1, 1) = \mathfrak{E}(5, 2, 3, 2, 2, 2, 3, 4) = \mathfrak{M}(2, 3, 2, 5, 3, 2, 2, 2, 3).$$

Der erste Kettenbruch hat den Wert $\frac{479}{110}$, der zweite den Wert $\frac{628}{395}$.

So kann man mit Hilfe der assoziierten Charakteristiken und Indexketten sehr einfach die drei Kettenbrucharten ineinander überführen.

Die assoziierten Charakteristiken und die zugehörigen Indexketten sind gleichlang. Nennen wir in einem endlichen $\mathfrak{EK}$ $\mathfrak{E}(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\mu)$ die Summe $\alpha + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu = \lambda$ die *Länge*, μ die *Ordnung* und entsprechend in dem gleichwertigen $\mathfrak{MK}$ $\mathfrak{M}(a, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ebenfalls $a + a_1 + \ldots + a_m = l$ die Länge, m die Ordnung, und ist $\mathfrak{K}(q, q_1, q_2, \ldots q_n)$ der den beiden Kettenbrüchen gleiche reguläre Kettenbruch, so ist[12])

$$\lambda - \mu = l - m = q + q_1 + q_2 + \ldots + q_n, \tag{18}$$

Diese für jeden der drei Kettenbrüche gleiche Zahl möge der *Rang* ϱ des Kettenbruchs und der durch ihn dargestellten rationalen Zahl heißen.

Aus Satz 3 ergibt sich, daß *zu reziproken Indexketten auch reziproke* $\mathfrak{MK}$ gehören und daß zwischen den Längen und Ordnungen von reziproken $\mathfrak{MK}$ dieselben Beziehungen wie bei reziproken $\mathfrak{EK}$ ($\mathfrak{EK}$ I, § 2) bestehen. Sind l', m' Länge und Ordnung des reziproken $\mathfrak{MK}$, so haben zunächst beide $\mathfrak{MK}$ gleichen Rang, weil ihre Indexketten gleich lang sind, also

$$l - m = l' - m' = \varrho.$$

Ferner ist die Summe der Ordnungen gleich der Anzahl der Trennungsstriche in den beiden reziproken Indexketten, also

$$m + m' = \varrho - 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$l + l' = 3\varrho - 1$$

und

$$l' = 2l - 3m - 1, \qquad m' = l - 2m - 1. \tag{19}$$

§ 4.

Die Theorie der Elementarkettenbrüche führt zu einer Einteilung der ganzzahligen linearen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ von der Determinante ± 1 in

12) Der auf den $\mathfrak{MK}$ bezügliche Teil dieses Satzes ist ein besonderer Fall eines Satzes von Herrn Vahlen (Crelles Journ., Bd. 115 (1895), S. 226).

zwei Arten, in *gerade* und *ungerade* Substitutionen[13]). Die geraden Substitutionen sind am einfachsten dadurch gekennzeichnet[14]), daß sie mod 2 einer der drei Substitutionen

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

kongruent sind, d. h. entweder α, δ ungerade, β, γ gerade oder α, β, γ ungerade oder β, γ, δ ungerade. Alle anderen Substitutionen, die also mod 2 den Substitutionen

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

kongruent sind, sind ungerade Substitutionen.

Sei G die Gruppe aller ganzzahligen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Determinante ± 1. Die Gesamtheit der *geraden* Substitutionen bildet eine *Untergruppe* von G vom Index 2. Sie wird mit $\mathfrak{B}$ bezeichnet und ist isomorph zu der Gruppe $\mathfrak{A}$ der *eigentlichen* Substitutionen. Das Produkt von 2 geraden oder von 2 ungeraden Substitutionen ergibt eine gerade Substitution, eine gerade mit einer ungeraden Substitution ergibt eine ungerade Substitution.

Zwei irrationale Zahlen ω, ω', die durch eine Substitution der Gruppe G miteinander verknüpft sind, so daß

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \qquad \alpha\delta-\beta\gamma = \pm 1 = \varepsilon$$

ist, heißen äquivalent und es besteht der bekannte Satz:

4. ***Die regulären Kettenbruchentwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen von einer gewissen Stelle an überein.***

Die beiden Zahlen ω und ω' sind entweder eigentlich oder uneigentlich äquivalent. Gleichzeitig aber sind sie entweder *gerade* oder *ungerade* äquivalent, je nachdem die sie verknüpfende Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ gerade oder ungerade ist. In der Theorie der $\mathfrak{EK}$ entspricht nun dem Satz 4. der folgende Satz:

5. ***Die $\mathfrak{EK}$-Entwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen entweder von einer gewissen Stelle an überein oder sie sind von einer gewissen Stelle an zueinander reziprok, je nachdem die Zahlen gerade oder ungerade äquivalent sind.***

---

[13]) Vgl. $\mathfrak{EK}$ I, § 4.

[14]) Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn I. Schur. In $\mathfrak{EK}$ I werden die geraden Substitutionen durch die erzeugenden Substitutionen U und V (s. u.) definiert.

Wir wollen nun den entsprechenden Satz in der Theorie des $\mathfrak{MK}$ aufsuchen. Wir setzen zunächst die beiden Zahlen ω und ω' als positiv voraus und denken uns die Vorzeichen der Substitutionskoeffizienten so gewählt, daß $\alpha\omega+\beta$, also auch $\gamma\omega+\delta$ positiv ist. Sei nun die $\mathfrak{MK}$-Entwicklung von ω

$$\omega=\mathfrak{M}(a, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, \xi)=\frac{P_m\xi-P_{m-1}}{Q_m\xi-Q_{m-1}}, \tag{20}$$

so ist

$$\omega'=\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_m, -P_{m-1}\\ Q_m, -Q_{m-1}\end{pmatrix}(\xi)=\frac{A\xi-B}{C\xi-D},$$

worin

$$A=\alpha P_m+\beta Q_m,\quad B=\alpha P_{m-1}+\beta Q_{m-1},$$
$$C=\gamma P_m+\delta Q_m,\quad D=\gamma P_{m-1}+\delta Q_{m-1}$$

und

$$AD-BC=-\varepsilon.$$

Es ist also

$$\frac{A}{B}=\frac{Q_m}{Q_{m-1}}\,\frac{\alpha\frac{P_m}{Q_m}+\beta}{\alpha\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\beta},\qquad \frac{C}{D}=\frac{Q_m}{Q_{m-1}}\,\frac{\gamma\frac{P_m}{Q_m}+\delta}{\gamma\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\delta},$$

folglich wird, wenn man m groß genug wählt, schließlich sicher[15])

$$\frac{A}{B}>1,\qquad \frac{C}{D}>1.$$

Sei nun

$$\frac{A}{C}=\mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$$

und $\frac{A'}{C'}$ der vorletzte Näherungsbruch, so ist

$$AC'-CA'=-1.$$

---

[15]) Es ist nämlich wegen (5)

$$\alpha\frac{P_m}{Q_m}+\beta=\alpha\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\beta-\frac{\alpha}{Q_mQ_{m-1}},$$

also

$$\frac{A}{B}=\frac{Q_m}{Q_{m-1}}-\frac{\alpha}{Q_{m-1}(\alpha P_{m-1}+\beta Q_{m-1})}.$$

Von einem bestimmten m ab wird $\alpha\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}+\beta>0$, also $\alpha P_{m-1}+\beta Q_{m-1}\geqq 1$. Ist $\alpha\leqq 0$, so wird $\frac{A}{B}\geqq\frac{Q_m}{Q_{m-1}}>1$. Ist aber $\alpha>0$, so wird

$$\frac{A}{B}\geqq\frac{Q_m-\alpha}{Q_{m-1}}.$$

Nun folgt aus $Q_m-Q_{m-1}=(k_m-1)\,Q_{m-1}-Q_{m-2}$, daß bei wachsendem m, da immer wieder Werte $k_m>2$ vorkommen, die Differenzen Q_m-Q_{m-1} schließlich jeden Betrag überschreiten, es wird also von einem bestimmten m ab $\alpha<Q_m-Q_{m-1}$, folglich wiederum $\frac{A}{B}>1$. Entsprechend für $\frac{C}{D}$.

Ist

1. $\varepsilon = +1$, also $AD - BC = -1$, so folgt

$$A(C' - D) = C(A' - B)$$

und hieraus in bekannter Weise

$$B = A', \quad D = C',$$

folglich ist

$$\omega' = \frac{A\xi - A'}{C\xi - C'} = \mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, \xi). \tag{21a}$$

Ist aber

2. $\varepsilon = -1$, also $AD - BC = +1$,

so folgt

$$A(C' + D) = C(A' + B),$$

also muß $A' + B$ durch A teilbar sein. Da aber $A' + B < 2A$ ist, so ergibt sich

$$A' + B = A, \quad C' + D = C,$$
$$B = A - A', \quad D = C - C',$$

und daher

$$\frac{B}{D} = \frac{A - A'}{C - C'} = \mathfrak{M}(b, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1),$$

also ist $\frac{A}{C}$ der vorletzte Näherungsbruch dieses uneigentlichen $\mathfrak{MR}$.

Es wird dann

$$\omega' = \frac{A\xi - B}{C\xi - D} = \frac{B \cdot \frac{1}{\xi} - A}{D \cdot \frac{1}{\xi} - C},$$

folglich

$$\omega' = \mathfrak{M}\left(b, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1, \frac{1}{\xi}\right).$$

Sei nun der $\mathfrak{MR}$ für ξ:

$$\xi = \mathfrak{M}(c, c_1, c_2, c_3, \ldots).$$

Da $\xi > 1$ ist, so hat der $\mathfrak{MR}$ für $\frac{1}{\xi}$ die Form

$$\frac{1}{\xi} = \mathfrak{M}(1, d, d_1, d_2, \ldots)$$

und es ist daher

$$\omega' = \mathfrak{M}(b, b_1, \ldots, b_{n-1}, 1, 1, d, d_1, d_2, \ldots)$$

oder nach der zweiten Formel (2):

$$\omega' = \mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} + d - 1, d_1, d_2, \ldots). \tag{21b}$$

In den Formeln (20) und (21) haben wir nunmehr den folgenden Satz:

6. *Die $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$-Entwicklungen von zwei äquivalenten Zahlen stimmen entweder von einer gewissen Stelle an überein oder sie sind von einer gewissen Stelle an zueinander reziprok, je nachdem die Zahlen eigentlich oder uneigentlich äquivalent sind.*

Der Satz bleibt auch bestehen, wenn eine der Zahlen ω, ω' oder beide Zahlen negativ sind. Denn seien z. B. ω und ω' eigentlich äquivalent und ω negativ, so sind ω' und $-\omega$ uneigentlich äquivalent, also ist der $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω' von einer gewissen Stelle an reziprok zum $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für $-\omega$. Dieser letztere aber ist selbst, wie oben gezeigt wurde, von einer gewissen Stelle an reziprok zum $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω, folglich stimmen die $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω und ω' von einer gewissen Stelle an überein.

Durch die Sätze 4, 5, 6 ist die systematische Stellung der drei Kettenbrucharten vom gruppentheoretischen Standpunkt aus sehr deutlich gekennzeichnet. *Die regulären Kettenbrüche gehören zur Gesamtgruppe G aller ganzzahligen Substitutionen $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ der Determinante ± 1, die Möbiuskettenbrüche gehören zur Untergruppe $\mathfrak{A}$ der eigentlichen Substitutionen, die Elementarkettenbrüche zur Untergruppe $\mathfrak{B}$ der geraden Substitutionen.*

§ 5.

Durch die Sätze 1, 2, 3 ist eine Beziehung zwischen je zwei positiven reellen Zahlen hergestellt. Zwei solche Zahlen nennen wir *assoziierte Zahlen*. Ihre regulären Kettenbrüche sind assoziiert und der $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ der einen Zahl liefert, mit denselben Elementen geschrieben, den $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ der andern, d. h. ist

$$\omega = \mathfrak{M}(a, b, c, \ldots) = \mathfrak{E}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

so ist die assoziierte Zahl

$$\overline{\omega} = \mathfrak{E}(a, b, c, \ldots) = \mathfrak{M}(\alpha, \beta, \gamma, \ldots).$$

Dabei ist aber bei einer rationalen Zahl ω stets nur der eigentliche $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ anzusetzen[16]), denn zu jedem der unendlich vielen uneigentlichen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$ für ω würde man eine andere assoziierte Zahl erhalten. Ferner aber müssen wir zur eindeutigen Festlegung des Begriffs der assoziierten Zahlen eine bestimmte Klasse von Zahlen ausschließen. Die irrationale Zahl $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist gleich dem regulären Kettenbruch $\mathfrak{K}(1, 1, 1, \ldots)$ mit der Charakteristik $- + - + - + - + \ldots$. Die hierzu assoziierte Charak-

[16]) Dies ist auch aus dem Grunde gerechtfertigt, weil sich zu einem uneigentlichen $\mathfrak{M}\mathfrak{K}$, der immer das Element 1 (und zwar nicht als Anfangselement) enthält, keine Indexkette angeben läßt.

teristik ist $- - - - - - - - - \ldots$, sie entspricht der Zahl ∞. Es wäre also die Zahl t mit ∞ assoziiert. Dasselbe ergibt sich durch die $\mathfrak{EK}$-Darstellung $t = \mathfrak{E}(\infty)$, also die assoziierte Zahl $\mathfrak{M}(\infty) = \infty$. Zur reziproken Zahl $\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist dann die Zahl 0 assoziiert. Der reguläre Kettenbruch für eine mit t äquivalente Zahl zeigt von einer bestimmten Stelle an die Teilnenner $1, 1, 1, \ldots$; ihnen entspricht in dem assoziierten Kettenbruch der Teilnenner ∞, d. h. die assoziierte Zahl wird *rational*, und umgekehrt erhält man zu jeder rationalen Zahl ω eine mit t äquivalente Zahl als assoziiert, wenn man den regulären Kettenbruch für ω mit dem Teilnenner ∞ endigen läßt. Somit wäre jede rationale Zahl mit zwei Zahlen, einer rationalen und einer irrationalen Zahl assoziiert. Um dies zu vermeiden, setzen wir fest:

Die mit $t = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ äquivalenten Zahlen[17]*, sowie die Zahlen* 0 *und* ∞ *heißen singuläre Zahlen. Sie werden von der Betrachtung ausgeschlossen.*

Um auch zu einer *negativen* Zahl eine assoziierte Zahl finden zu können, bedürfen wir einer *Definition von Elementarkettenbrüchen, bei denen der erste Abschnitt* 0 *oder eine negative Zahl ist.* Der $\mathfrak{EK}$ mit dem vollständigen Quotienten x:

$$y = \mathfrak{E}(a, b, c, \ldots, s \,\|\, x)$$

ist gleichbedeutend mit der linearen Substitution

$$y = U^{a-1} V U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots U^{s-1} V(x),$$

worin

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist; man wird also folgerichtig unter dem $\mathfrak{EK}$

$$\mathfrak{E}(-a, b, c, \ldots, s \,\|\, x)$$

die Substitution

$$U^{-a-1} V U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots U^{s-1} V(x) \tag{22}$$

verstehen. Nun gelten für die Substitutionen U und V die Formeln

$$V^3 = 1, \quad U^{-1} = V^2 U V^2,$$

ferner bedeutet $V^2 U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = N$ lediglich eine Umkehrung des Vorzeichens. Ist nun

---

[17]) Diese Zahlen nehmen auch sonst in der Lehre von den Kettenbrüchen eine Ausnahmestellung ein. Vgl. Hurwitz, Acta mathematica, Bd. 12 (1889); Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen. Leipzig 1913, S. 178–180; ferner $\mathfrak{EK}$ I, § 3. Entsprechendes singuläres Verhalten zeigt die zu diesen Zahlen gehörige Klasse der mit der Form $(2, -1, -2)$ äquivalenten Formen. Vgl. $\mathfrak{EK}$ II.

1. $a = 0$, so ist die Substitution (22):

$$U^{-1} V U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots = V^2 U^b V U^{c-1} V \ldots$$
$$= N U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots,$$

folglich ist

(23) $$\mathfrak{E}(0, b, c, d, \ldots) = -\mathfrak{E}(b, c, d, \ldots)$$

zu setzen. Ist aber

2. $a > 0$, so bilden wir

$$U^{-2} = V^2 U V U V^2 = N V (U V) V$$
$$U^{-3} = N V (U V)^2 V,$$

allgemein

$$U^{-a-1} = N V (U V)^a V = N V (U V)^{a-1} U V^2.$$

Dies in (22) eingesetzt, ergibt

$$U^{-a-1} V U^{b-1} V U^{c-1} V \ldots = N V (U V)^{a-1} U^b V U^{c-1} V \ldots,$$

und dies bedeutet, *daß*

(24) $$\mathfrak{E}(-a, b, c, d, \ldots) = -\mathfrak{E}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots)$$

zu nehmen ist.

Wir können nun zu der negativen Zahl

$$\mathfrak{M}(-a, b, c, d, \ldots)$$

als assoziierte Zahl die Zahl

$$\mathfrak{E}(-a, b, c, d, \ldots)$$

erklären. Ist

1. $a = 0$, so ist, wenn wir durch das Zeichen $\sim$ andeuten, daß zwei Zahlen assoziiert sind:

$$\mathfrak{M}(0, b, c, d, \ldots) \sim \mathfrak{E}(0, b, c, d, \ldots),$$

oder

$$-\frac{1}{\mathfrak{M}(b, c, d, \ldots)} \sim -\mathfrak{E}(b, c, d, \ldots).$$

Es ist aber

$$\mathfrak{E}(b, c, d, \ldots) \sim \mathfrak{M}(b, c, d, \ldots),$$

folglich haben wir den Satz:

7. *Ist* ω *assoziiert zu* $\overline{\omega}$, *so ist* $-\omega$ *assoziiert zu* $-\frac{1}{\overline{\omega}}$.

Man kann diesen Satz auch in folgender Form aussprechen:

7a. *Ist* $\mathfrak{E}(a', b', c', \ldots)$ *der zu* $\mathfrak{E}(a, b, c, \ldots)$ *reziproke* $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$, *so ist*

$$-\mathfrak{M}(a, b, c, \ldots) \sim -\mathfrak{E}(a', b', c', \ldots).$$

Dasselbe ergibt sich, wenn

2. $a > 0$. Dann ist

$$\mathfrak{M}(-a, b, c, d, \ldots) \sim \mathfrak{E}(-a, b, c, d, \ldots)$$

oder nach (15) und (24)

$$-\frac{1}{\mathfrak{M}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots)} \sim -\mathfrak{E}(1, [2]_{a-1}, b+1, c, d, \ldots),$$

und dies entspricht dem Satz 7.

So ist z. B.

$$\mathfrak{M}(-5, 3, 2, 4) = -\tfrac{92}{17}$$

assoziiert zu

$$\mathfrak{E}(-5, 3, 2, 4) = -\mathfrak{E}(1, 2, 2, 2, 2, 4, 2, 4) = -\tfrac{111}{181},$$

es muß also $\frac{92}{17}$ zu $\frac{181}{111}$ assoziiert sein. In der Tat ist

$$\tfrac{92}{17} = \mathfrak{M}(6, 2, 4, 2, 2), \quad \tfrac{181}{111} = \mathfrak{E}(6, 2, 4, 2, 2).$$

Wir können nunmehr den folgenden Satz aussprechen:

8. *Nach Ausschluß der singulären Zahlen gehört zu jeder reellen Zahl eine bestimmte assoziierte Zahl. Zu einer rationalen Zahl gehört eine rationale Zahl vom gleichen Rang*[18]). *Die assoziierten Zahlen von reziproken Zahlen sind reziprok.*

Es sei $\omega = \mathfrak{M}(a, a_1, a_2, \ldots)$ eine irrationale Zahl. Der reziproke $\mathfrak{MK}$ sei $\frac{1}{\omega} = \mathfrak{M}(b, b_1, b_2, \ldots)$. Die zu ω assoziierte Zahl ist $\overline{\omega} = \mathfrak{E}(a, a_1, a_2, \ldots)$. Dann ist $\frac{1}{\overline{\omega}} = \mathfrak{E}(b, b_1, b_2, \ldots)$.

Irgendeine mit ω *eigentlich* äquivalente Zahl ω' wird eine $\mathfrak{MK}$-Entwicklung von der Form

$$\omega' = \mathfrak{M}(c, c_1, c_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots)$$

besitzen. Ihre assoziierte Zahl ist

$$\overline{\omega}' = \mathfrak{E}(c, c_1, c_2, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots),$$

sie ist also nach Satz 5 mit $\overline{\omega}$ *gerade* äquivalent.

Ist aber ω' mit ω *uneigentlich* äquivalent, so ist

$$\omega' = \mathfrak{M}(d, d_1, d_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots),$$

also die assoziierte Zahl

$$\overline{\omega}' = \mathfrak{E}(d, d_1, d_2, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots),$$

und diese ist mit $\overline{\omega}$ *ungerade* äquivalent. Es besteht also der Satz:

[18]) Den Rang einer negativen rationalen Zahl kann man dem der entgegengesetzten Zahl gleichsetzen.

9. *Die assoziierten Zahlen von zwei äquivalenten Zahlen sind ebenfalls äquivalent, und je nachdem das eine Zahlenpaar* ***eigentlich*** *oder* ***uneigentlich*** *äquivalent ist, ist das zu ihnen assoziierte Paar* ***gerade*** *oder* ***ungerade*** *äquivalent.*

Die Theorie der *periodischen* 𝔈𝔎 und 𝔐𝔎, die wir hier nicht eingehend darstellen können, führt unmittelbar zu dem folgenden Satz:

10. *Zu einer quadratischen Irrationalzahl ist stets eine quadratische Irrationalzahl assoziiert, und die zu zwei konjugierten Zahlen assoziierten Zahlen sind wiederum konjugiert.*

Der Gesamtheit der 𝔐𝔎 mit derselben Periode entspricht eine *Klasse eigentlich* äquivalenter binärer quadratischer Formen; der Gesamtheit der 𝔈𝔎 mit derselben Periode entspricht ein *Stamm gerade* äquivalenter Formen[19]). Man sieht also:

11. *Jede Klasse binärer quadratischer Formen ist assoziiert mit einem bestimmten Stamm solcher Formen.*

Die Determinanten der Klasse und des Stammes sind im allgemeinen verschieden.

Die Periode eines periodischen 𝔈𝔎 kann immer in der Form

$$(25) \qquad q_1+2, [2]_{q_2-1}, \; q_3+2, [2]_{q_4-1}, \; q_5+2, \ldots, [2]_{q_n-1}$$

geschrieben werden. Darin ist n gerade und jede Zahl $q_1, q_2, \ldots, q_n \geqq 1$. Ist eine Zahl mit geradem Index $q_{2i} = 1$, so fehlt der entsprechende Zweierkomplex. So ist z. B. die Periode

$$3, 5, 2, 2, 2, 4, 3 = 3, [2]_0, 5, [2]_3, 4, [2]_0, 3, [2]_0,$$

also $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $q_3 = 3$, $q_4 = 4$, $q_5 = 2$, $q_6 = 1$, $q_7 = 1$, $q_8 = 1$.

Der reziproke 𝔈𝔎 wird ebenso gebildet, wie der reziproke 𝔐𝔎. Es ist also nach (13b) *die zu* (25) *reziproke Periode*

$$(26) \qquad [2]_{q_1-1}, \; q_2+2, [2]_{q_3-1}, \; q_4+2, [2]_{q_5-1}, \ldots, q_n+2.$$

Die zu obigem Beispiel reziproke Periode ist

$$[2]_0, 3, [2]_2, 6, [2]_1, 3, [2]_0, 3 = 3, 2, 2, 6, 2, 3, 3.$$

Zu den 𝔈𝔎 mit reziproken Perioden sind reziproke 𝔐𝔎 mit den gleichen Perioden assoziiert. Der 𝔐𝔎 mit der Periode (25) ist aber gleich einem regulären Kettenbruch mit der Periode $\overline{q_1, q_2, \ldots, q_n}$, also folgt:

---

[19]) In meiner Arbeit 𝔈𝔎 II habe ich die Reduktion der indefiniten binären quadratischen Formen innerhalb der Gruppe der geraden Substitutionen durchgeführt. Sie ist gleichbedeutend mit der Theorie der periodischen 𝔈𝔎. Eine Gesamtheit von Formen, die miteinander gerade äquivalent sind, bildet einen Stamm.

12. *Der* 𝔈𝔎 *mit der Periode* (25) *ist assoziiert zu einem regulären Kettenbruch mit der Periode* $\overline{q_1, q_2, \ldots, q_n}$.

Wir wollen drei besondere Arten von periodischen 𝔈𝔎 betrachten, die für die Theorie der quadratischen Formen von Wichtigkeit sind.

I. Die Periode (25) heißt *involutorisch*, wenn der reziproke 𝔈𝔎 die gleiche Periode hat, also wenn die Periode (25) einfach durch Verschiebung in die reziproke Periode übergeht. Ist (25) eine einfache Periode und involutorisch, so kann die Verschiebung nur so geschehen, daß q_1 in $q_{\frac{n}{2}+1}$ übergeht, also folgt:

13. *Die Periode* (25) *ist involutorisch, wenn*

$$q_1 = q_{\frac{n}{2}+1},\ q_2 = q_{\frac{n}{2}+2},\ \ldots,\ q_{\frac{n}{2}} = q_n$$

ist.

Es muß dann überdies $\frac{n}{2} + 1$ eine gerade Zahl sein, also:

Bei einer involutorischen Periode ist $n \equiv 2 \bmod 4$.

Aus den Sätzen 12. und 13. ergibt sich weiter:

14. *Der Periode eines involutorischen* 𝔈𝔎 *sind im assoziierten regulären Kettenbruch zwei einfache Perioden mit ungerader Gliederzahl zugeordnet.*

Umgekehrt ist *zu jedem regulären Kettenbruch mit einer Periode von ungerader Gliederzahl ein involutorischer* 𝔈𝔎 *assoziiert.* So ist z. B. zu dem Kettenbruch 𝔎 $(\ldots \overline{2, 5, 3} \ldots)$ mit $q_1 = q_4 = 2$, $q_2 = q_5 = 5$, $q_3 = q_6 = 3$ ein 𝔈𝔎 mit der Periode

$$4, [2]_4, 5, [2]_1, 7, [2]_2 = 4, 2, 2, 2, 2, 5, 2, 7, 2, 2$$

assoziiert und man überzeugt sich leicht, daß dies eine involutorische Periode ist.

Eine Zahl $\omega = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$ hat bekanntlich dann und nur dann eine reguläre Kettenbruchperiode von ungerader Gliederzahl, wenn die Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = -\sigma^2 \tag{27}$$

in relativ primen Zahlen lösbar ist, wobei $\sigma = 1$ oder 2, je nachdem die der Zahl ω zugeordnete quadratische Form eigentlich oder uneigentlich primitiv ist. Es folgt also auf Grund von Satz 11 und 14:

15. *Jeder involutorische Stamm ist assoziiert zu einer Klasse quadratischer Formen einer solchen Determinante, für die die Gleichung* (27) *lösbar ist.*

II. Die Periode eines 𝔈𝔎 heißt *selbstkonjugiert*, wenn die reziproke Periode die Umkehrung der ursprünglichen Periode ist. Man sieht also aus (25) und (26):

16. *Die Periode* (25) *ist selbstkonjugiert, wenn es einen Index i derart gibt, daß*

$$q_1 = q_{2i}, \quad q_2 = q_{2i-1}, \quad q_3 = q_{2i-2}, \ldots, q_i = q_{i+1},$$

$$q_{2i+1} = q_n, \quad q_{2i+2} = q_{n-1}, \ldots, \quad q_{\frac{n}{2}+i} = q_{\frac{n}{2}+i+1}.$$

Hieraus schließt man nach Satz 12:

17. *Die Periode des regulären Kettenbruchs, der einem selbstkonjugierten* 𝔈𝔎 *assoziiert ist, besteht aus zwei flachsymmetrischen Teilen*[20]).

So ist z. B. dem regulären Kettenbruch 𝔎 (... 1, 2, 2, 1, 3, 3, ...) ein 𝔈𝔎 mit der Periode

$$3, [2]_1, 4, [2]_0, 5, [2]_2 = 3, 2, 4, 5, 2, 2$$

assoziiert. Die reziproke Periode ist

$$[2]_0, 4, [2]_1, 3, [2]_2, 5 = 4, 2, 3, 2, 2, 5,$$

also die Umkehrung der vorhergehenden; die Perioden sind selbstkonjugiert.

Der 𝔈𝔎 für die quadratische Irrationalzahl ω ist selbstkonjugiert, wenn ω mit der konjugierten Zahl ω' *gerade* äquivalent ist[21]) (vgl. 𝔈𝔎 II). Es ist dann nach Satz 9 die assoziierte Zahl $\overline{\omega}$ mit ihrer konjugierten Zahl $\overline{\omega}'$ *eigentlich* äquivalent, also:

$$\overline{\omega}' = \frac{\alpha\overline{\omega}+\beta}{\gamma\overline{\omega}+\delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = +1.$$

Hieraus folgt

$$\gamma\overline{\omega}\,\overline{\omega}' + \tfrac{1}{2}(\delta+\alpha)(\overline{\omega}' - \omega) + \tfrac{1}{2}(\delta-\alpha)(\overline{\omega}'+\overline{\omega}) - \beta = 0.$$

Sei (a, b, c) die zu $\overline{\omega}$ gehörige Form von der Determinante D. Dann ist

$$\overline{\omega} + \overline{\omega}' = -\frac{2b}{a}, \quad \overline{\omega}\,\overline{\omega}' = \frac{c}{a}, \quad \overline{\omega} - \overline{\omega}' = \frac{2\sqrt{D}}{a},$$

also

$$\gamma\frac{c}{a} - (\delta+\alpha)\frac{\sqrt{D}}{a} - (\delta-\alpha)\frac{b}{a} - \beta = 0,$$

folglich

(28) $$\alpha + \delta = 0, \quad \beta a - 2\alpha b - \gamma c = 0.$$

$\delta = -\alpha$ ergibt

$$-\beta\gamma = \alpha^2 + 1,$$

folglich sind β und $-\gamma$ Summen von zwei Quadraten:

$$\beta = \varkappa^2 + \lambda^2, \quad -\gamma = \mu^2 + \nu^2,$$

[20]) Ein symmetrischer Bestandteil eines regulären Kettenbruchs heißt flachsymmetrisch oder spitzsymmetrisch, je nachdem er aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Gliedern besteht.

[21]) Hieraus folgt, daß z. B. der 𝔈𝔎 für jede Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl selbstkonjugiert ist.

und da

$$(\varkappa^2+\lambda^2)(\mu^2+\nu^2)=(\varkappa\mu+\lambda\nu)^2+(\varkappa\nu-\lambda\mu)^2$$

ist, so kann man zwischen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ die Beziehung

$$\varkappa\nu-\lambda\mu=1$$

ansetzen und α durch

$$\varkappa\mu+\lambda\nu=-\alpha$$

bestimmen. Nach (28) ist dann

$$a(\varkappa^2+\lambda^2)+2b(\varkappa\mu+\lambda\nu)+c(\mu^2+\nu^2)=0$$

oder

$$a\varkappa^2+2b\varkappa\mu+c\mu^2=-(a\lambda^2+2b\lambda\nu+c\nu^2)=m, \quad \text{d. h.:}$$

Die Form (a, b, c) *geht durch die Substitution* $\begin{pmatrix}\varkappa & \lambda\\ \mu & \nu\end{pmatrix}$ *in die Form* $(m, n, -m)$ *über,* und es ist

$$n=a\varkappa\lambda+b(\varkappa\nu+\lambda\mu)+c\mu\nu.$$

Damit hat man den Satz:

18. *Jeder selbstkonjugierte Stamm ist assoziiert zu einer Klasse quadratischer Formen, die mit einer Form* $(m, n, -m)$ *äquivalent sind.* Die Periode der zu einer solchen Klasse gehörigen regulären Kettenbrüche besteht aus zwei flachsymmetrischen Teilen.

Oder auch:

18a. *In jedem selbstkonjugierten Stamm gibt es eine Form, deren assoziierte Form die Gestalt* $(m, n, -m)$ *hat.*

So ist z. B. der zur Form $(5, -7, 7)$ der Determinante 14 gehörige Stamm selbstkonjugiert. Der $\mathfrak{EK}$ für die zugehörige Irrationalzahl $\omega=\frac{\sqrt{14}+7}{5}$ ist

$$\omega=\mathfrak{E}(\overline{2, 2, 3, 3, 5, \ldots}).$$

Die assoziierte Zahl ist

$$\bar{\omega}=\mathfrak{M}(\overline{2, 2, 3, 3, 5, \ldots})=\mathfrak{K}(1, 2, \overline{1, 1, 1, 1, 3, 3, \ldots}),$$

die zugehörige Form $(10, -8, 3)$ von der Determinante 34 ist eigentlich äquivalent mit $(5, -3, -5)$.

III. Die Periode eines $\mathfrak{EK}$ heißt *umkehrbar,* wenn sie aus zwei symmetrischen Teilen besteht. Aus (25) ergibt sich:

19. *Die Periode* (25) *ist umkehrbar, wenn es einen Index i gibt so daß*

$$q_1=q_{2i+1}, \quad q_2=q_{2i}, \quad q_3=q_{2i-1}, \ldots, q_i=q_{i+2},$$

$$q_{2i+2}=q_n, \quad q_{2i+3}=q_{n-1}, \ldots; \quad q_{\frac{n}{2}+i}=q_{\frac{n}{2}+i+2}.$$

Hieraus folgt:

20. *Die Periode des regulären Kettenbruchs, der einem umkehrbaren* $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ *assoziiert ist, besteht aus zwei spitzsymmetrischen Teilen.*

Der $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ für die quadratische Irrationalzahl ω ist umkehrbar, wenn ω und $-\frac{1}{\omega}$, gerade, also ω und ω' *ungerade* äquivalent sind (vgl. $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ II). Dann ist also die assoziierte Zahl $\overline{\omega}$ mit ihrer konjugierten Zahl $\overline{\omega}'$ *uneigentlich* äquivalent. Dies bedeutet aber, daß die zu ω gehörige Form *ambig* ist, es besteht daher der Satz:

21. *Jeder umkehrbare Stamm ist zu einer ambigen Klasse assoziiert.* Die Periode der zu einer solchen Klasse gehörigen regulären Kettenbrüche besteht aus zwei spitzsymmetrischen Teilen.

Ein regulärer Kettenbruch, dessen Periode aus einem spitzsymmetrischen und einem flachsymmetrischen Teil besteht, ist zunächst ein Kettenbruch von der in Satz 14 auftretenden Art. Andererseits aber läßt sich die doppelte Periode sowohl in zwei flachsymmetrische, wie auch in zwei spitzsymmetrische Teile zerlegen:

$$q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}, q_m, \ldots, q_2, q_1, r_1, \ldots, r_n, r_n, \ldots, r_1, q_1, \ldots, q_m, q_{m+1}, q_m, \ldots, q_1, r_1, \ldots, r_n, r_n, \ldots, r_1.$$

Es gehört also ein solcher Kettenbruch zu jeder der drei in Satz 14, 18 und 21 auftretenden Arten und es besteht der Satz:

22. *Zu jedem regulären Kettenbruch, dessen Periode aus einem spitzsymmetrischen und einem flachsymmetrischen Teil besteht, gehört eine ambige Klasse mit einer Form* $(m, n, -m)$, *für deren Determinante die Gleichung* $x^2 - Dy^2 = -\sigma^2$ *lösbar ist. Der assoziierte Stamm ist gleichzeitig involutorisch, selbstkonjugiert und umkehrbar.*

Es ist z. B. der reguläre Kettenbruch $\mathfrak{K}(\overline{2, 1, 1, 2, 1, 3, 1}, \ldots) = \omega$ Lösung der Gleichung $33\omega^2 - 59\omega - 67 = 0$. Die entsprechende Form $(66, -59, -134)$ ist eigentlich äquivalent mit der Form $(50, -125, 66)$, gehört also zu einer ambigen Klasse. Zu dieser Klasse gehört auch die Form $(106, 33, -106)$ und für die Determinante $D = 106^2 + 33^2 = 25 \cdot 493$ ist die Gleichung $x^2 - Dy^2 = -4$ lösbar $(x = 111, y = 1)$. Die Periode des assoziierten $\mathfrak{E}\mathfrak{K}$ ist 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 4. Sie ist involutorisch, selbstkonjugiert und umkehrbar.

(Eingegangen am 15. Mai 1918.)