

Die Bethe-Goldstone-Gleichung bei geschwindigkeitsabhängigen Potentialen

Von M. WEIGEL

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main

(Z. Naturforsch. 19 a, 1268—1273 [1964]; eingegangen am 23. Juli 1964)

The two-nucleon potential is assumed to be a quadratic function of momentum: $v = v_1(r) + \mathbf{p}v_2(r)\mathbf{p}$. The BETHE-GOLDSTONE equation ($l=0$) has been solved for two different choices of v . An analytical, approximate solution is obtained.

Um das Verhalten der Streuphasen in der Nukleon-Nukleon-Streuung wiederzugeben, kann man entweder ein Potential mit einem „hard core“ oder ein geschwindigkeitsabhängiges Potential¹⁻⁵ verwenden. Auch die Energie pro Nukleon in Kernmaterie wurde sowohl für geschwindigkeitsabhängige Kräfte⁶ als auch für ein „hard core“-Potential plus anziehender Wechselwirkung^{7,8} berechnet.

Auf Grund des PAULI-Prinzips erwartet man für die Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung nur dann größere Abweichungen gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall, wenn das Potential einen größeren Impulsaustausch oberhalb der FERMI-Grenze ermöglicht. Außerdem ist die Abweichung auf kleine Abstände beschränkt. Im Falle des „hard core“ weichen die Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung für kleine Abstände stark von den freien Lösungen ab; außerhalb der sogen. „healing distance“ gehen sie in dieselben über.

Es soll das Verhalten der Lösungen der BETHE-GOLDSTONE-Gleichung untersucht werden, wenn man geschwindigkeitsabhängige Potentiale verwendet.

Man hat zwei äquivalente Möglichkeiten für ein rotationsinvariantes, höchstens quadratisch vom Impuls abhängiges Potential:

$$\langle \mathbf{x} | v | \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} | \left(v_1(|\mathbf{x}|) + \frac{\lambda}{m} \mathbf{p} v_2(|\mathbf{x}|) \mathbf{p} \right) | \mathbf{x}' \rangle \quad (1a)$$

oder

$$\langle \mathbf{x} | \tilde{v} | \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{x} | \left(\tilde{v}_1(|\mathbf{x}|) + \frac{\lambda}{m} (\mathbf{p}^2 \tilde{v}_2(|\mathbf{x}|) + \tilde{v}_2(|\mathbf{x}|) \mathbf{p}^2) \right) | \mathbf{x}' \rangle. \quad (1b)$$

Beide fallen zusammen, wenn man setzt ($r = |\mathbf{x}|$):

$$v_2(r) = 2 \tilde{v}_2(r), \quad (2a)$$

$$v_1(r) = \tilde{v}_1(r) - \frac{\lambda}{m} \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \tilde{v}_2(r) + \frac{d^2}{dr^2} \tilde{v}_2(r) \right). \quad (2b)$$

1. Bethe-Goldstone-Gleichung

Nach BETHE und GOLDSTONE gilt für die Reaktionsmatrix⁷:

$$\langle \mathbf{k} | G | \mathbf{k}_0, \mathbf{P} \rangle = \langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}_0 \rangle + (2\pi)^{-3} P \int d\mathbf{k}' \frac{\langle \mathbf{k} | v | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | G | \mathbf{k}_0, \mathbf{P} \rangle}{\varepsilon(\mathbf{P}, \mathbf{k}', \mathbf{k}_0)}. \quad (3)$$

Dabei ist $2\mathbf{P}$ der Schwerpunktsimpuls. Die Integration über \mathbf{k}' ist so zu verstehen, daß $|\mathbf{P} \pm \mathbf{k}'|$ größer als k_F ist. Außerdem gilt $|\mathbf{P} \pm \mathbf{k}_0| < k_F$ (k_F FERMI-Impuls).

$$\varepsilon(\mathbf{P}, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = E(\mathbf{P} + \mathbf{k}_0) + E(\mathbf{P} - \mathbf{k}_0) - E(\mathbf{P} + \mathbf{k}) - E(\mathbf{P} - \mathbf{k}), \quad (4)$$

$E(\mathbf{k})$ ist die Energie des Nukleons mit dem Impuls \mathbf{k} .

Führen wir jetzt die Wellenfunktion χ durch die Beziehung $G = v\chi$ ein, so gilt für dieselbe im Ortsraum:

$$\chi(\mathbf{x}, \mathbf{k}_0, \mathbf{P}) = \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{x}) + \int d\mathbf{x}' d\mathbf{x}'' T(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \langle \mathbf{x}' | v | \mathbf{x}'' \rangle \chi(\mathbf{x}'', \mathbf{k}_0, \mathbf{P}), \quad (5)$$

¹ J. S. LEVINGER, Proc. Int. Conf. Nuclear Structure (Kingston 1960), North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1960.

² M. RAZAVY, G. FIELD u. J. S. LEVINGER, Phys. Rev. **125**, 269 [1962].

³ O. ROJO u. L. M. SIMMONS, Phys. Rev. **125**, 273 [1962].

⁴ A. M. GREEN, Nucl. Phys. **33**, 218 [1962].

⁵ E. WERNER, Nucl. Phys. **35**, 324 [1962].

⁶ F. PEISCHL u. E. WERNER, Nucl. Phys. **43**, 372 [1963].

⁷ H. A. BETHE u. J. GOLDSTONE, Proc. Roy. Soc., Lond. A **238**, New York **3**, 241 [1958].
551 [1957].

⁸ L. C. GOMES, J. D. WALECKA u. V. F. WEISSKOPF, Ann. Phys.,

$$\text{wobei} \quad \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} P \int d\mathbf{k} \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \frac{\Theta(|\mathbf{P} + \mathbf{k}| - k_F) \Theta(|\mathbf{P} - \mathbf{k}| - k_F)}{\varepsilon(\mathbf{P}, \mathbf{k}, k_0)}; \quad (6)$$

$\Theta(x)$ ist die bekannte Sprungfunktion ($\Theta(x) = 1$ für $x > 0$; $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$).

Da es uns auf das prinzipielle Verhalten der Wellenfunktion ankommt, können wir $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ setzen. Dann separiert Gl. (5) in Polarkoordinaten, und für den radialen Anteil erhält man mit dem Potential (1) folgende Gleichung:

$$R_l(r, k_0) = j_l(k_0 r) + \int_0^\infty A_l(r, r', k_0) V_l(r') R_l(r', k_0) dr'. \quad (7)$$

$$\text{Dabei ist } (\hbar = 1): \quad j_l(x) = x^l \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}, \quad (8 \text{ a})$$

$$V_l(r) = v_1(r) - \frac{\lambda}{m} \left(\left(\frac{d}{dr} v_2(r) \right) \frac{d}{dr} + v_2(r) \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right), \quad (8 \text{ b})$$

$$A_l(r, r', k_0) = \frac{2}{\pi} P \int_{k_F}^\infty r'^2 k^2 dk \frac{j_l(kr) j_l(kr')}{\varepsilon(\mathbf{0}, \mathbf{k}, k_0)}. \quad (8 \text{ c})$$

Führt man jetzt die effektive Massenapproximation ein, so kann man leicht Gl. (7) in eine Integrodifferentialgleichung verwandeln.

$$\text{Mit} \quad \varepsilon(\mathbf{0}, \mathbf{k}, k_0) = \frac{1}{m^*} (k_0^2 - k^2) \quad \text{erhält man:}$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k_0^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - m^* V_l(r) \right\} R_l(r, k_0) = -m^* \int_0^\infty K_l(r, r') V_l(r') R_l(r', k_0) dr', \quad (9)$$

$$\text{wobei} \quad K_l(r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{k_F} r'^2 k^2 j_l(kr) j_l(kr') dk. \quad (10)$$

2. Behandlung spezieller Potentiale

Ausgehend von Gl. (7) und (9) wollen wir uns auf solche Potentiale beschränken, die bei der Streuung im Vakuum eine explizite Lösung zulassen. Man kann vermuten, daß für kleine Abstände diese Lösungen eine gute erste Approximation darstellen und auf dieser Basis (7) bzw. (9) näherungsweise lösen. Weiterhin ist bekannt⁸, daß nichtsinguläre, lokale Wechselwirkungen nur geringfügige Abweichungen bedingen, und wir wollen deshalb außerhalb der „Reichweite“ von $v_2(r)$ das lokale Potential vernachlässigen.

Als Potential wählen wir²:

$$v_1(r) = -V_0 \Theta(b-r) - g \frac{\lambda}{m} \frac{\delta(r-b)}{r}, \quad v_2(r) = -\Theta(b-r). \quad (11)$$

Das Potential legt folgende Aufspaltung nahe (k_0 unterdrückt):

$$R_l(r) = \Theta(r-b) F_l(r) + \Theta(b-r) G_l(r). \quad (12)$$

Die Beziehung (9) lautet damit [$G_l(b) = F_l(b)$]:

$$\begin{aligned} & \delta(r-b) \left(\frac{d}{dr} (F_l(r) - G_l(r) + \lambda^* G_l(r)) + g \frac{\lambda^*}{2r} (G_l(r) + F_l(r)) \right) + \Theta(r-b) L(r, k_0) F_l(r) \\ & \quad + (1 - \lambda^*) \Theta(b-r) L(r, k') G_l(r) \\ & = - \int_0^l dr' K_l(r, r') \left((1 - \lambda^*) (k_0^2 - k'^2) + \lambda^* L(r', k_0) \right) G_l(r') + \lambda^* K_l(r, b) \left(\frac{d}{dr'} + \frac{g}{b} \right) G_l(r') \Big|_{r'=b}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{wobei} \quad \lambda^* = \frac{m^*}{m} \lambda; \quad k'^2 = \frac{m^* V_0 + k_0^2}{1 - \lambda^*}; \quad L(r, k) \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (14 \text{ a, b})$$

Beziehung (13) ergibt die Randbedingungen bei $r=b$:

$$F_l(b) = G_l(b); \quad \frac{d}{dr} F_l(r)|_{r=b} = (1-\lambda^*) \frac{d}{dr} G_l(r)|_{r=b} - \frac{g}{b} \lambda^* G_l(b). \quad (15 \text{ a, b})$$

Für die Streuung im Vakuum ($k_F=0$) kann man (13) exakt lösen². Es ergibt sich:

$$R_{lV}(r) = \Theta(b-r) d_l j_l(k' r) + \Theta(r-b) (j_l(k_0 r) - \text{tg } \delta_l n_l(k_0 r)). \quad (16)$$

Die Konstanten d_l und $\text{tg } \delta_l$ ergeben sich aus den Randbedingungen (15).

Wir beschränken uns auf den Fall $l=0$. Hierfür ist es zweckmäßiger, die Funktion $u(r) = r R_0(r)$ zu betrachten:

$$u(r) = \Theta(b-r) u_2(r) + \Theta(r-b) u_1(r). \quad (17)$$

Diese Funktion genügt folgender Gleichung:

$$\Theta(b-r) u_2(r) + \Theta(r-b) u_1(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} + \int_0^b dr' \frac{r}{r'} \frac{A_0(r, r')}{m^*} \left(-m^* V_0 + \lambda^* \frac{d^2}{dr'^2} \right) u_2(r') - \frac{\lambda^* r}{m^* b} A_0(r, b) \left(\frac{d}{dr'} - \frac{1}{r'} (1-g) \right) u_2(r') \Big|_{r'=b}. \quad (18)$$

Die Randbedingungen bei $r=b$ lauten:

$$u_1(b) = u_2(b); \quad \frac{d}{dr} u_1(r)|_{r=b} = (1-\lambda^*) \frac{d}{dr} u_2(r)|_{r=b} + \frac{\lambda^*}{b} (1-g) u_2(b). \quad (19)$$

Gl. (18) bedingt das bekannte asymptotische Verhalten ($k_F \neq 0$):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(u_1(r) - \frac{\sin k_0 r}{k_0} \right) = 0. \quad (20)$$

Durch Anwendung des Operators $(d^2/dr^2) + k_0^2$ und partielle Integration des Integrals der rechten Seite ergibt sich aus (18) folgende Integrodifferentialgleichung für $u(r)$:

$$\Theta(r-b) \left(\frac{d^2}{dr^2} + k_0^2 \right) u_1(r) + (1-\lambda^*) \Theta(b-r) \left(\frac{d^2}{dr^2} + k'^2 \right) u_2(r) = \left(-m^* V_0 + \lambda^* \frac{d^2}{dr^2} \right) \int_0^b M(r, r') u_2(r') dr' - \lambda^* u_2(b) \left(\frac{d}{dr'} - \frac{1}{b} (1-g) \right) M(r, r') \Big|_{r'=b}, \quad (21)$$

wobei

$$M(r, r') = -\frac{1}{\pi} \int_{-k_F}^{+k_F} \sin k r \sin k r' dk \quad (22)$$

ist. Benutzt man

$$\frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\sin k r \sin k r'}{k^2 - k_0^2} dk = \frac{1}{k_0} \left(\Theta(r-r') \cos k_0 r \sin k_0 r' + \Theta(r'-r) \sin k_0 r \cos k_0 r' \right), \quad (23)$$

so kann man (18) auf folgende Weise umschreiben:

$$u_1(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} - \frac{(1-\lambda^*) (k_0^2 - k'^2)}{k_0} \cos k_0 r \int_0^b \sin k_0 r' u_2(r') dr' \quad (24)$$

$$+ \lambda^* u_2(b) \left(\cos k_0 r \cos k_0 b - \frac{(1-g)}{k_0 b} \cos k_0 r \sin k_0 b \right) + \int_0^b P_1(r, r') u_2(r') dr' + \lambda^* u_2(b) P_2(r, b),$$

$$(1-\lambda^*) u_2(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} - (1-\lambda^*) (k_0^2 - k'^2) \left(\cos k_0 r \int_0^r \frac{\sin k_0 r'}{k_0} u_2(r') dr' + \frac{\sin k_0 r}{k_0} \int_r^b \cos k_0 r' u_2(r') dr' \right) - \lambda^* u_2(b) \left(\sin k_0 r \sin k_0 b + \frac{(1-g)}{k_0 b} \cos k_0 b \sin k_0 r \right) + \int_0^b dr' P_1(r, r') u_2(r') + \lambda^* u_2(b) P_2(r, b). \quad (25)$$

Dabei ist:

$$P_1(r, r') = \frac{2}{\pi} P \int_0^{k_F} (\lambda^* (k^2 - k_0^2) + (1 - \lambda^*) (k'^2 - k_0^2)) \frac{\sin k r \sin k r'}{k_0^2 - k^2} dk,$$

$$P_2(r, r') = \frac{2}{\pi} P \int_0^{k_F} \left(k \cos k r' - \frac{(1-g)}{b} \sin k r' \right) \frac{\sin k r}{k_0^2 - k^2} dk. \tag{26}$$

Aus den Gln. (24) und (25) geht hervor, daß bis auf Quadratur nur die Integralgleichung (24) im Bereich $[0, b]$ gelöst werden muß. Es ist nahe-liegend⁸, daß für kleine Abstände die Lösung des Vakuumstreuproblems eine gute Approximation dar-stellt. Dieselbe erfüllt auch die Randbedingung (19) und ist nach (16) explizit bekannt:

$$u_v(r) = \Theta(b-r) d_0 \frac{\sin k' r}{k'} + \Theta(r-b) \left(\frac{\sin k_0 r}{k_0} + \frac{\text{tg } \delta_0}{k_0} \cos k_0 r \right). \tag{27}$$

Die Konstanten d_0 und $\text{tg } \delta_0$ bestimmen sich aus (19).

Als erste Approximation führe ich in (24) und (25) auf der rechten Seite $u_{2v}(r)$ ein. Die Integra-tionen lassen sich elementar durchführen.

Es ergibt sich:

$$u_1^{(1)}(r) = \frac{\sin k_0 r}{k_0} + \frac{\text{tg } \delta_0}{k_0} \cos k_0 r + F(r), \tag{28 a}$$

$$u_2^{(1)}(r) = d_0 \frac{\sin k' r}{k'} + \frac{1}{1-\lambda^*} F(r). \tag{28 b}$$

$F(r)$ ist im Anhang angegeben.

3. Numerische Ergebnisse

Wir verwenden im wesentlichen die von RAZAVY, FIELD und LEVINGER² vorgeschlagenen Potential-parameter. Das zweite Potential ($g=1$) simuliert recht gut für höhere Energien die Streuphasen des „hard-core“-Potentials ($r_c=0,295 f$, s. Tab. 1, 2).

Gl. (24) kann man durch Iteration, beginnend mit $u_{2v}(r)$, lösen. Ein Maß für die Güte der Lösung ist die Befriedigung der Randbedingungen (19) bei $r=b$. Numerisch wurde gezeigt, daß (28) in den meisten Fällen ausreichend ist. Die Randbedingun-gen sind bis auf wenige Prozent erfüllt.

In Abb. 1, 2, 3 und in Tab. 3 sind die Lösungen für zwei Potentiale dargestellt. Die Abb. 1 stellt die Funktionen

$$g(r) = u(r) - u_0(r) \quad \text{und} \quad g_v(r) = u(r) - u_v(r)$$

für das Potential W_1 dar. Es ergibt sich praktisch der Fall eines rein anziehenden Potentials⁷, da das

	$b(f)$	$V_0(\text{MeV})$	λ	g
Potential W_1	2,4	16,9	-0,21	0,0
Potential W_2	0,5	51	-1,64	1,0

Tab. 1. Potentialparameter².

E (MeV)	δ_0 Potential W_1	δ_0 Potential W_2	δ_0 „hard core“ 0,295 f
30	0,750	-0,181	-0,178
60	0,474	-0,255	-0,251
90	0,273	-0,311	-0,308
150	0,002	-0,397	-0,397
210	-0,141	-0,465	-0,470
300	-0,196	-0,547	-0,562

Tab. 2. Streuphasen ($l=0; m^*/m=1$).

Potential nur schwach impulsabhängig ist ($|\lambda|$ ist klein). Die Abweichungen von der freien Lösung sind sehr gering, so daß hier an sich eine Iteration beginnend mit $u_0(r)$ an Stelle von $u_v(r)$ angebrach-ter gewesen wäre. Für das Ergebnis spielt das in diesem Falle keine Rolle. In Abb. 2 und 3 und in Tab. 3 ist für das Potential W_2 für zwei Fälle $k_F u(r)$, $k_F u_0(r)$ und $k_F u_v(r)$ dargestellt. Die Lö-sungen zeigen das typische Verhalten eines abstoßen-den Potentials⁸. Die Abweichungen von $u(r)$ ge-genüber $u_0(r)$ betragen bei $r=b$ rund 20%. In Abb. 2 ist das Verhalten der BETHE-GOLDSTONE-Lö-sung $k_F u_c(r)$ für das „hard core“-Potential ($r_c=0,259 f$) qualitativ zum Vergleich mit angegeben. Für den FERMI-Impuls wurde der Wert $k_F=1,28333 f^{-1}$ verwendet.

	$k=0,0 k_F$			$k=0,5 k_F$		
$k_F r$	$k_F u_0(r)$	$k_F u_v(r)$	$k_F u(r)$	$k_F u_0(r)$	$k_F u_v(r)$	$k_F u(r)$
0,64 = $k_F b$	0,64	0,36	0,44	0,63	0,37	0,41
0,80	0,80	0,52	0,63	0,78	0,52	0,60
1,28	1,28	1,00	1,19	2,20	0,97	1,09
2,08	2,08	1,81	2,09	1,73	1,59	1,73
3,21	3,21	2,92	3,26	2,00	2,01	2,06
4,65	4,65	4,37	4,66	1,46	1,65	1,47
6,42	6,42	6,14	6,39	-0,13	0,14	-0,17
8,50	8,50	8,22	8,51	-1,79	-1,67	-1,78
10,91	10,91	10,63	10,91	-1,47	-1,66	-1,47

Tab. 3. Wellenfunktionen ($m^*/m=0,5; r \geq b$).

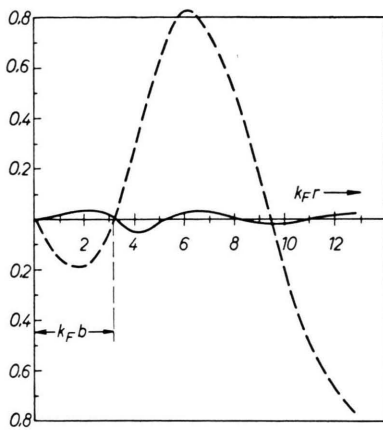


Abb. 1. $k_F g(r) = k_F [u(r) - u_0(r)]$ (durchgezogene Kurve) und $k_F g_v(r) = k_F [u(r) - u_v(r)]$ (gestrichelte Kurve) als Funktion von $k_F r$ bei Verwendung des Potentials W_1 . Parameter: $k_0 = 0,5 k_F$; $k = 0,582 k_F$; $d_0 = 1,206$; $\text{tg } \delta_0 = 0,391$; $m^*/m = 0,5$.

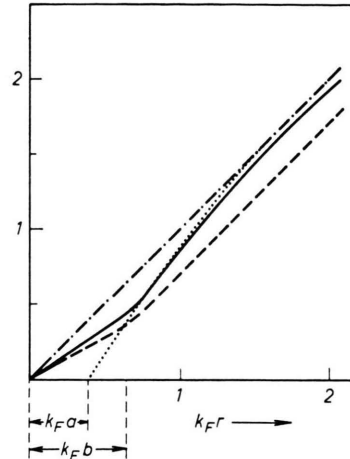


Abb. 2. Die Funktionen $k_F u(r)$ (durchgezogene Kurve), $k_F u_v(r)$ (isoliertes Nukleonenpaar, gestrichelte Kurve) und $k_F u_0(r)$ (keine Wechselwirkung, strichpunktierte Kurve) als Funktion von $k_F r$ bei Verwendung des Potentials W_2 . Parameter: $k_0 = 0,0 k_F$; $k' = 0,453 k_F$; $d_0 = 0,574$; $k_F/k_0 \cdot \text{tg } \delta_0 = -0,279$; $m^*/m = 0,5$. Außerdem ist das qualitative Verhalten der „hard core“-Lösung $k_F u_c(r)$ (punktierte Kurve) angegeben ($r_c = 0,295 f$).

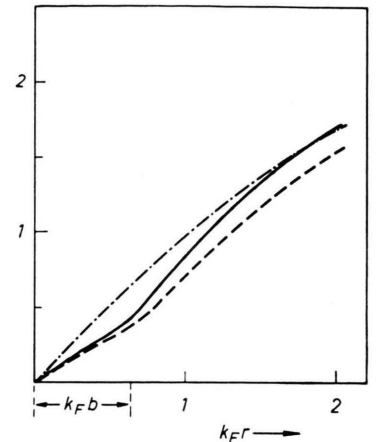


Abb. 3. Die Funktionen $k_F u(r)$ (durchgezogene Kurve), $k_F u_v(r)$ (gestrichelte Kurve) und $k_F u_0(r)$ (strichpunktierte Kurve) als Funktion von $k_F r$ bei Verwendung des Potentials W_2 . Parameter: $k_0 = 0,5 k_F$; $k = 0,585 k_F$; $d_0 = 0,586$; $\text{tg } \delta_0 = -0,139$; $m^*/m = 0,5$.

Für fördernde Diskussionen möchte ich Herrn Prof. Dr. F. BECK und Herrn Prof. Dr. G. SÜSSMANN danken. Dem „Deutschen Rechenzentrum“ in Darmstadt danke ich für die Hilfe bei der numerischen Auswertung.

Anhang

$F(r)$ ist nach (24), (25) und (28):

$$F(r) = \frac{2}{\pi} P \int_0^b dr' \int_0^{k_F} dk d_0 \frac{\sin k' r' \lambda^* (k^2 - k_0^2) + (1 - \lambda^*) (k'^2 - k_0^2)}{k_0^2 - k^2} \sin k r \sin k r' + \lambda^* d_0 \frac{\sin k' b}{k'} \frac{2}{\pi} P \int_0^{k_F} dk \frac{\sin k r}{k_0^2 - k^2} \left(k \cos k b - \frac{(1-g)}{b} \sin k b \right). \quad (\text{A } 1)$$

Ausführung der Integrationen ergibt⁹:

$$F(r) = \frac{d_0}{\pi k'} \left\{ -\lambda^* \gamma(r, b, k', -k') + \frac{1 - \lambda^*}{2 k_0} (k'^2 - k_0^2) \left[\frac{1}{k' - k_0} (\gamma(r, b, k_0, -k') - \gamma(r, b, k', -k')) + \frac{1}{k' + k_0} (\gamma(r, b, k', -k') - \gamma(r, b, -k_0, -k')) \right] - \frac{\lambda^*}{2} \sin k' b \left(\alpha(r+b) + \alpha(r-b) + \lambda^* \sin k' b \frac{1-g}{k_0 b} \gamma(r, b, k_0, 0) \right) \right\}. \quad (\text{A } 2)$$

Dabei sind folgende Definitionen vereinbart:

$$\gamma(r_1, r_2, k_1, k_2) = \frac{1}{2} f_1(r_1, r_2, k_1) \cos(r_2(k_1 + k_2) - r_1 k_1) - f_2(r_1, r_2, k_1) \sin(r_2(k_1 + k_2) - r_1 k_1) - f_1(-r_1, r_2, k_1) \cos(r_2(k_1 + k_2) + r_1 k_1) + f_2(-r_1, r_2, k_1) \sin(r_2(k_1 + k_2) + r_1 k_1), \quad (\text{A } 3 \text{ a})$$

$$\alpha(r) = f_1(0, r, k_0) \sin k_0 r + f_2(0, r, k_0) \cos k_0 r, \quad (\text{A } 3 \text{ b})$$

⁹ F. TÖLKE, Praktische Funktionenlehre, Bd. I, Springer-Verlag, Berlin 1943.

$$\begin{aligned} f_1(r_1, r_2, k) &= \text{Ci}(|(r_1 - r_2)(k_F - k)|) - \text{Ci}(|(r_1 - r_2)(k_F - k)|), \\ f_2(r_1, r_2, k) &= \text{Si}((r_1 - r_2)(k_F - k)) - \text{Si}((r_1 - r_2)(k + k_F)). \end{aligned} \quad (\text{A } 4 \text{ a, b})$$

Man kann nach einigen Umformungen das richtige asymptotische Verhalten nachweisen:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(F(r) + \frac{\text{tg } \delta_0}{k_0} \cos k_0 r \right) = 0. \quad (\text{A } 5)$$

Zum normalen Skin-Effekt unter Berücksichtigung der magnetischen Widerstandsänderung

VON RUDOLF KLEIN *

Institut für Theoretische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig

(Z. Naturforschg. **19 a**, 1273—1276 [1964]; eingegangen am 26. Juni 1964)

The penetration of a magnetic field into an infinite metallic half-space is altered due to the presence of the magnetoresistance of the medium. MAXWELL'S equations modified by the magnetic field dependence of the conductivity are solved for the case where the field at the surface is switched on immediately and is constant afterwards. It is shown that due to magnetoresistance the field runs into the medium quicker compared to the case of the pure normal skin effect. The induced eddy current has its maximum value no longer at the surface of the specimen. The results are discussed in connection with pulse methods for the measurement of magnetoresistance in high fields.

Zur Messung der magnetischen Widerstandsänderung in starken Feldern verwendet man Impulsmethoden¹. An der Probenoberfläche liegt ein zeitlich veränderliches Feld, das in die Probe eindringt und dort orts- und zeitabhängig ist. Die Formeln des reinen Skin-Effekts aus der MAXWELLSCHEN Theorie sind nicht anwendbar, da die spezifische Leitfähigkeit σ eine Funktion des Magnetfeldes ist, dessen genaues Verhalten gerade durch das Vorhandensein der zu messenden magnetischen Widerstandsänderung gegenüber dem Fall des reinen Skin-Effekts modifiziert wird.

Bei der Durchführung der Experimente interessiert in diesem Zusammenhang die Wirbelstromaufheizung und die Zeit, die das Magnetfeld benötigt, um über dem Probenquerschnitt praktisch konstant zu sein. Wir wollen an einem vereinfachten mathematischen Modell zeigen, daß gerade auf Grund der Existenz einer magnetischen Widerstandsänderung das Magnetfeld schneller in die Probe eindringt. Ferner wird gezeigt, daß das Maximum des durch das Magnetfeld induzierten Stromes immer im Innern der Probe liegt.

Zur Lösung dieses Problems ist das gekoppelte System aus MAXWELLSCHEN Gleichungen und BOLTZMANN-Gleichung zu lösen:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \quad \text{rot } \mathbf{F} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{H}}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{\hbar} \left\{ \mathbf{F} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right\} \cdot \text{grad } f \\ + \mathbf{v} \cdot \text{grad } f = -\frac{f - f_0}{\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dazu kommt der Ausdruck für die Stromdichte

$$\mathbf{J} = \frac{e}{4\pi^3} \int \mathbf{v} f d\mathbf{k}. \quad (3)$$

Da die bei den Experimenten verwendeten Frequenzen sehr klein sind gegenüber der reziproken Relaxationszeit der Elektronen ($1/\tau$), kann man in der BOLTZMANN-Gleichung (2) das Glied $\partial f / \partial t$ vernachlässigen. Ferner spielt die explizite Ortsabhängigkeit der Verteilungsfunktion f nur eine untergeordnete Rolle, da sich auf der mittleren freien Weglänge $l = \tau v_0$ die Feldstärken nicht stark ändern. Daher ist das Glied $\mathbf{v} \cdot \text{grad } f$ als eine kleine Korrektur anzusehen, und man darf mit einem lokalen OHMSCHEN Gesetz $\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{H}) \mathbf{F}$ rechnen. Die Leitfähigkeit ist also als eine bekannte Funktion von \mathbf{H} anzusehen, wie sie etwa auch bei einem ortsunabhängigen Problem vorliegt. Nicht bekannt ist jedoch die

* Jetzt: Laboratories RCA Ltd., Zürich, Schweiz.

¹ P. KAPITZA, Proc. Roy. Soc., Lond. A **123**, 292 [1929]. — B. LÜTHI, Helv. Phys. Acta **33**, 161 [1960].