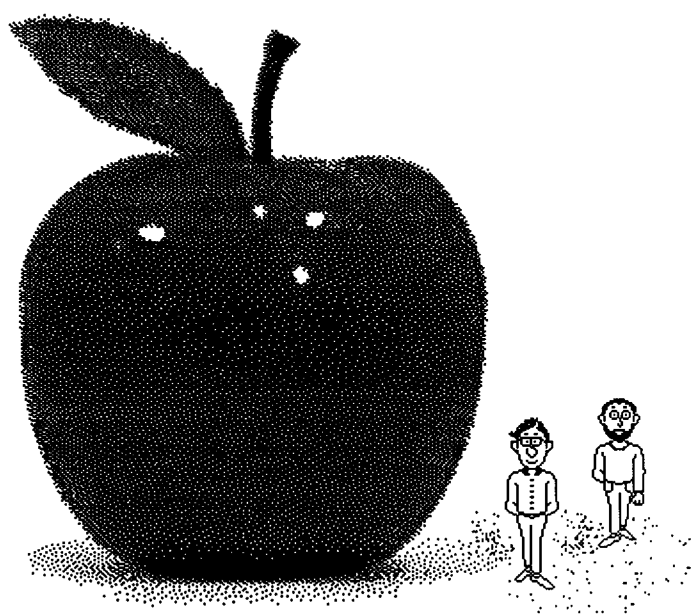
Int. Rep. 90 - 7

Normierung der TM- und TE-Moden für Zylinderresonatoren

P. Hülsmann, M. Kurz

Institut für Angewandte Physik
der
Universität Frankfurt am Main



Frankfurt am Main
April 1990

Normierung der TM- und TE-Moden für Zylinderresonatoren

1) Vorbemerkungen

Die Normierung von Eigenschwingungen eines Hohlraumresonators bringt große Vorteile für die Berechnung von Resonatorkenngrößen (z.B. Güte) mit sich. Die normierten Eigenfunktionen haben die Eigenschaft, daß die zugehörigen Felder Ej, Hj gerade die Energie Wj= 1 enthalten.

2) Normierung der Eigenfunktionen

2.1) Normierung der TM-Eigenfunktionen

Für TM-Moden errechnen sich die Felder aus dem Vektorpotential Ψ (Ψ ist die z-Komponente des Vektorpotentials A) wie folgt:

$$\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial z} \quad ; & H_\rho &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \\
E_\varphi &= \frac{1}{i\omega\varepsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\partial z} \quad ; & H_\varphi &= -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \\
E_z &= \frac{1}{i\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)\Psi \quad ; & H_z &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Das Vektorpotential selbst läßt sich so darstellen:

$$\Psi^{TM}_{mnp} = C^{TM}_{mnp}\, J_m\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin(m\varphi)\\ \cos(m\varphi)\end{Bmatrix}\cos\!\left(p\frac{\pi}{l}z\right) . \tag{2}$$

Die Felder lassen sich nun leicht ausrechnen. C^{TM}_{mnp} ist dabei der zu berechnende Normierungsfaktor.

Zu einem bestimmten Zeitpunkt steckt der gesamte Energieinhalt des Resonators im magnetischen Feld. Die Energie wird dann einfach aus dem Volumenintegral über das Magnetfeld berechnet. Die Berechnung über das elektrische Feld ist zwar genauso möglich, jedoch ist der Weg über das Magnetfeld einfacher, da dieses keine z-Komponente besitzt.

Wie schon oben erwähnt soll die Energie auf eins normiert werden. Damit bleibt das folgende Integral zu lösen:

$$I = \mu \int\limits_{V_0} |H_{mnp}|^2 \, dV = \mu \int\limits_{V_0} \left(|H_{\rho\, mnp}|^2 + |H_{\varphi\, mnp}|^2 \right) dV \tag{3}$$

Explizit führt das auf:

$$1 = \mu \left(C_{mnp}^{TM} \right)^2 \int\limits_0^{R_0} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{L} \left(\frac{m^2}{\rho^2} J_m^2\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0} \rho \right) \begin{Bmatrix} \sin^2(m\varphi) \\ \cos^2(m\varphi) \end{Bmatrix} \cos^2\!\left(p \frac{\pi}{L} z \right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{x_{mn}^2}{R_0^2} \right) J_m'^2\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0} \rho \right) \begin{Bmatrix} \cos^2(m\varphi) \\ \sin^2(m\varphi) \end{Bmatrix} \cos^2\!\left(p \frac{\pi}{L} z \right) \right) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \quad . \tag{4}$$

Um zu "vernünftigen" Ergebnissen zu kommen, ist es vorteilhaft, die nachfolgenden drei Integrale genauer zu betrachten. Da der Normierungsfaktor für alle möglichen Moden bestimmt werden soll müssen Fallunterscheidungen für die verschiedenen auftretenden Werte von m, p = 0, 1, 2, ... ; n=1, 2, 3, ... getroffen werden.

$$\int\limits_0^L \cos^2\!\left(p \frac{\pi}{l} z \right) dz = \frac{1}{2} \int\limits_0^L \left(1 + \cos\!\left(2p \frac{\pi}{L} z \right) \right) dz = \begin{cases} L & \text{für } p = 0 \\ \frac{1}{2} L & \text{für } p \neq 0 \end{cases} = \frac{1}{2} (1 + \delta_{po}) L$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^2(m\varphi) \, d\varphi = (1 + \delta_{mo}) \pi$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(m\varphi) \, dz = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \cos(2m\varphi) \right) dz = \begin{cases} 0 & \text{für } m = 0 \\ \pi & \text{für } m \neq 0 \end{cases} = (1 - \delta_{mo}) \pi$$

Damit vereinfacht sich Gleichung 4 ($\cancel{XX}$) zu:

$$1 = \mu \left(C_{mnp}^{TM} \right)^2 (1 + \delta_{po}) \pi \frac{L}{2} \int\limits_0^{R_0} \left(\frac{m^2}{\rho^2} J_m^2\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0} \rho \right) \begin{Bmatrix} (1 + \delta_{mo}) \\ (1 - \delta_{mo}) \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. \left(\frac{x_{mn}^2}{R_0^2} \right) J_m'^2\!\left(\frac{x_{mn}}{R_0} \rho \right) \begin{Bmatrix} (1 - \delta_{mo}) \\ (1 + \delta_{mo}) \end{Bmatrix} \right) \rho \, d\rho \quad . \tag{5}$$

Damit bleibt nur noch die Integration über ρ auszuführen. Dabei erweisen sich die folgenden Beziehungen zwischen Besselfunktionen von ganzzahligem Index als nützlich (Die Besselfunktionen sind stets vom Argument x):

$$J'_m = \frac{m}{x} J_m - J_{m+1} \qquad \text{a)}$$

$$J'_m = -\frac{m}{x} J_m + J_{m+1} \qquad \text{b)}$$

$$\frac{2m}{x} J_m = J_{m-1} - J_{m+1} \qquad \text{c)}$$

Die Integration soll nun für $m \neq 0$ ausgeführt werden. Damit verschwinden die δ_{m0} und man erhält nach Anwendung von a) und c) auf den Integranden:

$$I_\rho = \int_0^{R_0} \left(\frac{2m^2}{\rho^2} J_m^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) - \frac{x_{mn}^2}{R_0^2} J_{m-1}\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) J_{m+1}\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\right) \rho \, d\rho \quad . \qquad (6)$$

Der erste Term des Integranden wird jetzt mit Hilfe von c) umgewandelt. Damit erhält man für I_ρ:

$$I_\rho = \int_0^{R_0} \frac{x_{mn}^2}{2R_0^2} \left(J_{m-1}^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) - J_{m+1}^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) + J_{m+1}^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\right) \rho \, d\rho \quad . \qquad (7)$$

Man kann nun in einer Integraltafel [Ab] nachschlagen und findet dort eine Lösung für ein Inetgral, das gerade die ersten beiden Terme des Integranden umfaßt (die Schreibweise von Gleichung (7) ist dadurch motiviert). Der Wert dieses Integrals ist null für alle möglichen m. Es bleibt also nur noch der letzte Term zu integrieren. Wir haben also noch das folgende Integral zu lösen (siehe z.B. [Si]):

$$I_\rho = \int_0^{R_0} \frac{x_{mn}^2}{2R_0^2} J_{m+1}^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) \rho \, d\rho = \frac{x_{mn}^2}{2} \left[J'^2_{m+1}\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right) + \left(1 - \frac{(m+1)^2}{(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho)^2}\right) J_{m+1}^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)\right]_0^{R_0} \quad . \qquad (8)$$

Dieser Ausdruck wird jetzt weiter umgeformt mit Hilfe von b) und c), was schließlich auf den endgültigen Wert des Integrals führt.

$$I_\rho = \frac{x_{mn}^2}{2} J_{m+1}^2\left(\frac{x_{mn}}{R_0}\rho\right)$$

Integriert man für den Fall m=0, zeigt es sich, daß man den gleichen Wert für das Integral erhält. Es steht lediglich an Stelle der 2 in der obigen Gleichung eine $\sqrt{2}$.

Jetzt kann der Normierungsfaktor mit Hilfe der δ_{jo} für alle möglichen Werte von m, n, p angegeben werden. Wir erhalten so:

$$C_{mnp}^{TM} = \frac{2}{\sqrt{\mu\,(1+\delta_{po})(1+\delta_{mo})\;L\;\pi\;x_{mn}^2\;J_{m+1}^2(x_{mn})}} \tag{9}$$

Damit ist der Normierungsfaktor für TM-Moden in Zylinderresonatoren bestimmt.

2.2) Normierung der TE-Eigenfunktionen

Für die TE-Moden erhält man die Felder wiederum aus der z-Komponente des Vektorpotent A gemäß den nachfolgenden Beziehungen (10):

$$H_\rho = \frac{1}{i\omega\mu}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial z} \quad ; \qquad E_\rho = -\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{i\omega\mu}\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\partial z} \quad ; \qquad E_\varphi = \frac{\partial\Psi}{\partial\rho}$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\Psi \quad ; \qquad E_z = 0 \tag{10}$$

Das Vektorpotential für die TE-Moden lautet:

$$\Psi_{mnp}^{TE} = C_{mnp}^{TE}\,J_m\!\left(\frac{x'_{mn}}{R_o}\,\rho\right)\begin{Bmatrix}\sin(m\varphi)\\ \cos(m\varphi)\end{Bmatrix}\,\sin\!\left(p\,\frac{\pi}{L}\,z\right) . \tag{11}$$

Hier ist es zweckmäßig, die Integration über das elektrische Feld auszuführen, da dieses keine z-Komponente hat. Die Vorgehensweise ist dabei ganz analog zum Fall der TM-Moden. Es ist noch zu beachten, daß p nur Werte von eins an annehmen kann, da das Vektorpotential sonst nicht existierte. Wir finden so:

$$1 = \varepsilon \left(C_{mnp}^{TE}\right)^2 \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{L} \left(\frac{m^2}{\rho^2} J_m^2\left(\frac{x'_{mn}}{R_0}\rho\right) \begin{Bmatrix} \sin^2(m\varphi) \\ \cos^2(m\varphi) \end{Bmatrix} \sin^2\left(p\frac{\pi}{L}z\right) + \right.$$

$$\left. \left(\frac{x'^2_{mn}}{R_0^2}\right) J'^2_m\left(\frac{x'_{mn}}{R_0}\rho\right) \begin{Bmatrix} \cos^2(m\varphi) \\ \sin^2(m\varphi) \end{Bmatrix} \sin^2\left(p\frac{\pi}{L}z\right)\right) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \quad . \tag{12}$$

Lösen der Integrale und auflösen nach der Normierungskonstante ergibt schließlich:

$$C_{mnp}^{TE} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon \left(1 + \delta_{mo}\right) L \, \pi \left(x'^2_{mn} - m^2\right) J_m^2\left(x'_{mn}\right)}} \tag{13}$$

Damit sind die Normierungskonstanten für beide Typen von Hohlraumschwingungen bestimmt. Mit den so erhaltenen normierten Eigenfunktionen lassen sich Eigenwertprobleme in der Mikrowellentechnik leichter formulieren und behandeln.

Literaturhinweise:

[Ab] Abramowitz/Stegun Handbook of Math. Functions, 1965
Dover Publications, New York, S. 484, 11.3.33

[Si] K. Simonyi Theoretische Elektrotechnik, 1980, 8. Auflage
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
S. 239, 112