E-Journal (2016)

5. Jahrgang · 1

Forum Interdisziplinäre Begriffsgeschichte (FIB)

Herausgegeben von Ernst Müller
Zentrum für Literatur- und Kulturforschung Berlin

Impressum

Hrsg. von	Ernst Müller, Zentrum für Literatur- und Kulturforschung Berlin (ZfL) *www.zfl-berlin.org*
Gastherausgeberinnen dieser Ausgabe	Eva Axer, Eva Geulen, Alexandra Heimes
Direktorin	Prof. Dr. Eva Geulen
©	2016 · Das Copyright und sämtliche Nutzungsrechte liegen ausschließlich bei den Autoren, ein Nachdruck der Texte auch in Auszügen ist nur mit deren ausdrücklicher Genehmigung gestattet.
Redaktion	Ernst Müller (Leitung), Herbert Kopp-Oberstebrink, Dirk Naguschewski, Tatjana Petzer, Falko Schmieder, Georg Toepfer, Stefan Willer
Wissenschaftlicher Beirat	Faustino Oncina Coves (Valencia), Christian Geulen (Koblenz), Eva Johach (Konstanz), Helge Jordheim (Oslo), Christian Kassung (Berlin), Clemens Knobloch (Siegen), Sigrid Weigel (Berlin)
ISSN	**2195-0598**
Gestaltung	Carolyn Steinbeck · Gestaltung
Layout / Satz	Jana Sherpa
gesetzt in der	ITC Charter

Inhalt

»Analogien«, »Interpretationen«, »Bilder«, »Systeme« und »Modelle«: Bemerkungen zur Geschichte abstrakter Repräsentationen in den Naturwissenschaften seit dem 19. Jahrhundert

Moritz Epple

Trotz eines rasch gewachsenen Interesses an der Geschichte des ›Denkens in Modellen‹ liegt ein detailliertes historisches Verständnis der verschiedenen Weisen und Formen solcher Denkformen in den Wissenschaften noch in einiger Ferne. Dies ergibt sich vor allem daraus, dass im retrospektiven Zugriff oft nicht allzu genau auf den zum Teil überraschend vielfältigen epistemologischen Sprachgebrauch der Akteure geachtet wird. Nicht selten mag dadurch nicht nur der Sprachgebrauch, sondern auch die Denkform selbst nur ungenau in den Blick geraten.

Zur Erläuterung sei auf eine gerne und häufig zitierte Passage aus der Einleitung von Heinrich Hertz in seine *Prinzipien der Mechanik* von 1894 hingewiesen. Hertz formulierte dort:

> *Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, dass die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien der naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände. Damit diese Forderung überhaupt erfüllbar sei, müssen gewisse Übereinstimmungen vorhanden sein zwischen der Natur und unserem Geiste. Die Erfahrung lehrt uns, dass die Forderung erfüllbar ist und dass also solche Übereinstimmungen in der That bestehen. Ist es uns einmal geglückt, aus der angesammelten bisherigen Erfahrung Bilder von der verlangten Beschaffenheit abzuleiten, so können wir an ihnen,* wie an Modellen*, in kurzer Zeit die Folgen entwickeln, welche in der äußeren Welt erst in längerer Zeit oder als Folgen unseres eigenen Eingreifens auftreten werden; wir vermögen so den Thatsachen vorauszueilen und können nach der gewonnenen Einsicht unsere gegenwärtigen Entschlüsse richten. – Die Bilder …*[1]

Ludwig Wittgenstein, auf den die Hertz'schen Überlegungen zu den Bildern der äußeren Wirklichkeit starken Eindruck machten, sollte hieraus etwa zwei Jahrzehnte später mit einer unscheinbaren Veränderung den berühmten Satz 2.12 seines *Tractatus logico-philosophicus* formen: »Das Bild ist ein Modell der Wirklichkeit.«

1 Heinrich Hertz: *Die Prinzipien der Mechanik*, Leipzig 1894, S. 1–2, Hervorhebung ME.

Die Verbindung dieser beiden Texte und Motive ist bisweilen zum Kernstück einer Genealogie des Denkens der wissenschaftlichen Moderne in abstrakten und insbesondere in mathematischen Modellen erklärt worden. In Wittgensteins Formulierung verschwindet allerdings eine Differenz, die im Hertz'schen Text – wenn man ihn genau liest – besteht, eben die zwischen Bildern, die ›wie Modelle‹ sind, und den Modellen selbst. *Nach* Wittgenstein wurde es möglich – freilich zunächst noch immer nicht üblich –, auch in den Naturwissenschaften, von abstrakten, immateriellen Modellen wirklicher Zusammenhänge zu sprechen. Bis zu Hertz und noch in der Wendung seines Vorwortes waren jene Modelle, denen die Bilder *glichen*, ohne ihnen *gleich zu sein*, jedoch nichts Abstraktes, sondern etwas Konkretes, wie es schon seit Jahrhunderten in einer Reihe von handwerklichen, künstlerischen und akademischen Kontexten von der Architektur bis zur Malerei bekannt und erst kurz vorher auch in den Naturwissenschaften zu einiger neuer Prominenz gelangt war: jene materiellen Dinge, in welchen wissenschaftliche Gegenstände zur Anschauung und Darstellung gebracht wurden, die uns heute in großer Zahl in Sammlungen und Museen überliefert sind. Beispiele sind die damals geschäftsmäßig vertriebenen Gips- oder Fadenmodelle mathematischer Objekte (Abb. 1 u. Abb. 2) oder materielle Modelle biologischer und chemischer Dinge (Abb. 3).[2]

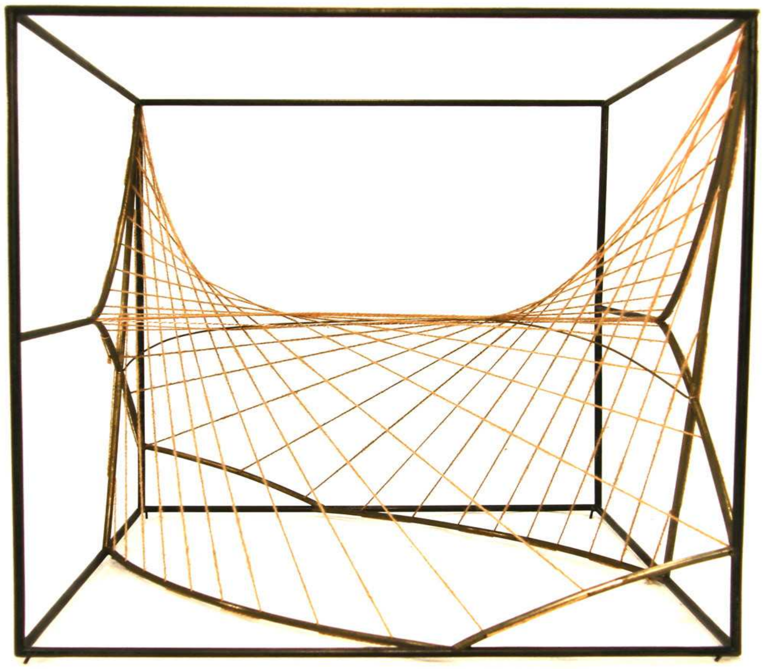

Abb. 1: Modell einer Raumkurve mit singulären Punkten (Sammlung mathematischer Modelle am Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie der TU Wien)

2 Zu den mathematischen Modellen im damaligen Sinn vgl. u. a. Gerd Fischer (Hg.): *Mathematische Modelle,* 2 Bde., Braunschweig/Wiesbaden 1986; Herbert Mehrtens: »Mathematical Models«, in: Soraya de Chadarevian/Nick Hopwood (Hg.): *Models. The Third Dimension of Science*, Stanford 2004, S. 276–306; Anja Sattelmacher: »Geordnete Verhältnisse. Mathematische Anschauungsmodelle im frühen 20. Jahrhundert«, in: *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte* 36/4 (2013), S. 294–312. Vgl. ferner die Übersicht auf http://www.universitaetssammlungen.de/modelle. Weit zurück im Kontext akademischer Lehre geht insbesondere das architektonische Modell, an dem – wie es z. B. im 18. Jahrhundert hieß – »der praktische« Teil der akademischen Ausbildung erfolgte.

Abb. 2: Gipsmodell einer Fläche 3. Ordnung, Sammlung Mathematischer Modelle, Foto: Norbert Kaltwaßer. Copyright: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, 06099 Halle (Saale)

Abb. 3: Modell des Pilzes Puccinia graminis (Getreiderost) [Osterloh], Botanisches Museum Greifswald, Foto: David Ludwig

Die Geschichte der Denkformen, der epistemologischen Motive, die sachlich mit dem in Verbindung stehen, was erst die wissenschaftliche Moderne – nach Wittgenstein und vielen anderen – als (theoretische, auch mathematische) ›Modelle‹ bezeichnet hat, steht hier vor einer Verzweigung ihres möglichen Weges. Eine Geschichte der Modelle im Wortsinn müsste die Spuren der genannten materiellen Gegenstände und ihrer Gebrauchsweisen im Detail verfolgen – auch sie ist noch weitgehend ungeschrieben. Dennoch kennen selbstverständlich auch die Wissenschaften des 19. Jahrhunderts und früherer Zeiten verschiedene Formen von mehr oder weniger abstrakten, mehr oder weniger nicht-materiellen Repräsentationen – Heinrich Hertz' »Bilder« sind nur *ein* spätes Beispiel.

Die naturwissenschaftlichen Diskurse des 19. Jahrhunderts sprachen neben den ›Bildern‹ von einer ganzen Reihe weiterer Dinge, welche Wissensgegenstände repräsentieren konnten, auch ohne Modelle im damaligen Sinn zu sein. Weite Verbreitung fanden im 19. Jahrhundert in dieser Funktion insbesondere die Begriffe der ›Analogien‹, ›Interpretationen‹ und der ›Systeme‹ von wirklichen oder gedachten Dingen. Die Beispiele, die mit solchen Begriffen verbunden waren, sind häufig für die Wissenschaftsentwicklung von substanzieller Bedeutung gewesen. Sie stehen aber, wie ich im Folgenden andeuten möchte, für ganz unterschiedliche Formen und Funktionen der abstrakten Repräsentation. Den Begriff ›abstrakte Repräsentation‹ verwende ich hierbei etwas vage und naiv als schlichten Oberbegriff für verschiedene Weisen, einen Komplex von wissenschaftlich interessierenden Dingen oder Sachverhalten durch etwas anderes darzustellen und für die wissenschaftliche Praxis zu thematisieren, *ohne* dabei auf materielle, anfassbare Dinge zurückzugreifen, wie dies die ›Modelle‹ in der Sprache des 19. Jahrhunderts taten. Zugleich soll dadurch (*pace* Wittgenstein und unangesehen der inflationären Verwendung des Modellbegriffs seit Mitte des 20. Jahrhunderts) vermieden werden, vorschnell von einem ›Denken in Modellen‹ zu reden. Wir werden noch sehen, dass die in Rede stehenden, abstrakten Repräsentationen bisweilen sehr *konkrete* epistemische Funktionen hatten. Das Wort ›abstrakt‹ sollte hier also nicht überbewertet werden. Insbesondere möchte ich im Folgenden jeweils die spezifische *epistemische Situation* charakterisieren, d. h. die Besonderheiten der Wissensumstände, in welchen der Rückgriff auf eine Form der abstrakten Repräsentation geschah und den Beteiligten vielversprechend erschien.

Ich verstehe diese Bemerkungen in zweierlei Hinsicht als Prolegomena. Zunächst historisch: als Vorbemerkungen zu einer Geschichte des Denkens in abstrakten Repräsentationen, die an *Akteurskategorien* orientiert ist und die in der Variation dieser zeitgenössischen Kategorien ein Feld wichtiger historischer *und* epistemologischer Differenzen sieht, das nicht zu rasch eingeebnet werden sollte. Zum anderen geht es mir auch in epistemologischer Hinsicht um Vorbemerkungen zu einer differenzierten Analyse der Formen und Funktionen abstrakter Repräsentationen in den Wissenschaften der Moderne. In beiden Hinsichten geht es mir insbesondere darum zu zeigen, dass eine Reduktion der Diskussion der historischen Funktion von abstrakten Repräsentationen auf das Problem der Perspektivität oder Relativität (ein ›realer‹ Sachverhalt kann viele – auch inäquivalente – Repräsentationen/Modelle haben, was für ein Denken in Modellen letztlich die Kategorie des Realen in Frage stellt) zu kurz greifen würde. Dieses Problem, das zu Recht als ein wesentliches Signum der wissenschaftlichen Moderne angesehen wurde, ist vielleicht zuerst in Gaston Bachelards *Le nouvel esprit scientifique* und seinen Bemühungen um eine nicht-cartesische Epistemologie mit Entschiedenheit betont worden.[3] Im historischen Material, so hoffe ich plausibel zu machen, ist dies jedoch keineswegs der einzige betonenswerte Aspekt, und zum Teil finden sich geradezu gegenläufige Tendenzen zu dieser Entwicklung. Dies spricht nicht gegen Bachelards These, wohl aber gegen eine Unterschätzung der Komplexität der epistemischen Geschichte der modernen Wissenschaften.

3 Gaston Bachelard: *Le nouvel esprit scientifique*, Paris 1934.

1. Dynamical analogies, physical/mechanical analogies, mathematical analogies

Ich beginne mit einer in der Mitte des 19. Jahrhunderts häufig umkreisten Form abstrakter Repräsentation, die v.a. in den mathematisch verfahrenden Bereichen der Physik von großer Bedeutung war, und die auch noch in Hertz' Mechanik eine terminologisch fixierte Rolle spielte. Es handelt sich um die Analogie, die genauer in verschiedene Spielarten unterteilt werden müsste und manchmal als »physical analogy«, manchmal als »mathematical analogy«, manchmal (und bei Hertz) als »dynamische Analogie« bezeichnet wurde.[4] Eine frühe explizite, epistemologische Reflexion findet sie in einem berühmten Text des schottischen Physikers James Clerk Maxwell, »On Faraday's Lines of Force« aus dem Jahr 1856.[5]

Dieser Text beginnt in der Tat mit einer Beschreibung der problematischen epistemischen Situation jenes Bereiches der Physik, um den es Maxwell ging: »The present state of electrical science seems peculiarly unfavourable to speculation.«[6] Dies galt aus mehreren Gründen: Die Gesetze der statischen Elektrizität und einige Teile der mathematischen Theorie des Magnetismus seien zwar bekannt, aber über andere Teile lägen nicht einmal ausreichend experimentelle Daten vor. Es gebe mathematische Formeln für das Fließen von Strömen in leitenden Materialien sowie für deren gegenseitige Anziehung, aber die Beziehung derselben zu anderen Bereichen der Theorie der Elektrizität und des Magnetismus sei unklar geblieben, usw. In dieser Situation erfordere die Entwicklung einer Theorie der Elektrizität, dass die verschiedenen bekannten Teile mit mathematischer Präzision aufeinander bezogen und Vorschläge für die unbekannten Bereiche gemacht werden müssten, *ohne* jedoch »physikalische Hypothesen«[7] zu machen, d. h. Annahmen über die physischen Sachverhalte, die den elektrischen und magnetischen Erscheinungen zugrunde lagen. Solche Hypothesen unterlagen wegen der nur teilweise bekannten experimentellen Daten zu dieser Zeit immer dem Risiko, fehlerhaft zu sein. Eine »physical theory«, d. h. eine realistische, kausale Erklärung der Elektrizität und des Magnetismus, blieb daher vorerst unerreichbar, nicht prinzipiell, sondern aufgrund der besonderen Lage der Erkenntnis.

In dieser Situation eines hochgradig unvollständigen, partiellen Wissens, so fasste Maxwell zusammen, ging es darum »to obtain physical ideas without adopting a physical theory«.[8] Und um dies zu erreichen, so setzte er fort,

> *we must make ourselves familiar with the existence of physical analogies. By a physical analogy I mean that partial similarity between the laws of one science and those of another which makes each of them illustrate the other.*[9]

Die Beispiele, die Maxwell gleich im Anschluss gab – vor allem ein Beispiel, das er früheren Arbeiten seines Kollegen William Thomson (dem späteren Lord Kelvin) entnahm –, machten deutlich, dass er mit der »partiellen Ähnlichkeit zwischen den Gesetzen« zweier Wissenschaften die Übereinstimmung von

4 Auch die Geschichte des Denkens in Analogien lässt sich sehr weit zurück verfolgen. Die antike wissenschaftliche Tradition kannte die Analogie vor allem als *terminus technicus* der Mathematik, eingeführt als eine Relation der (epistemisch aufschlussreichen) Verhältnisgleichheit A:B=C:D zwischen vier Termen, von denen in der Regel drei bekannt sind und einer unbekannt ist, aber durch die Analogie bestimmt wird. Die lateinische Sprache hat diesen Ausdruck durch das Wort *proportio* wiedergegeben. In metaphorischer Erweiterung ist die Analogie in vielen Wissensgebieten eingeführt worden, wie nicht zuletzt Foucault in seiner Beschreibung des vorklassischen Denkens ausgeführt hat (vgl. Michel Foucault: *Les mots et les choses. Une archéologie des sciences humaines*, Paris 1966, Kap. 2). Wie die Schicksale der Analogie im 17. und 18. Jahrhundert verlaufen, wäre noch genauer zu untersuchen. Im Kontext der physikalischen Wissenschaften treten sie auch vor den hier besprochenen Texten schon ihn ähnlicher Funktion auf, vgl. z. B. Anm. 10.

5 James Clerk Maxwell: »On Faraday's Lines of Force«, in: W. D. Niven (Hg.): *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, Bd. 1, Cambridge 1890, S. 155–229.

6 Ebd., S. 155.

7 Ebd.

8 Ebd., S. 156.

9 Ebd.

deren mathematischer Form meinte. In Thomsons Beispiel ging es darum, dass bestimmte mathematische Formeln, welche den Fluss von Wärme in Körpern regulierten, mit jenen übereinstimmten, welche die Anziehung von Körpern unter dem Einfluss einer gegenseitigen Kraft beschrieben, die umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstandes war. Beide konnten beschrieben werden durch sog. Potentiale, d. h. Lösungen der Laplace'schen Differentialgleichung mit bestimmten Randbedingungen:

> *We have only to substitute source of heat for centre of attraction, flow of heat for accelerating effect of attraction at any point, and temperature for potential, and the solution of a problem in attractions is transformed into that of a problem in heat.*[10]

Maxwell betonte, dass die physischen, kausalen Umstände beider Bereiche sehr verschieden waren und nicht in Analogie standen. Bei der Wärme ging es um ein Phänomen in einem kontinuierlichen materiellen Medium, bei der Anziehung um diskrete materielle Körper, die durch Kräfte über einen leeren Raum hinweg aufeinander wirkten. Es war lediglich die partiell übereinstimmende mathematische Form, welche die Analogie vermittelte. Es ging in der Analogie also um Übersetzung, um Symmetrie, um eine gemeinsame formale Struktur. Anders als das moderne Modell war die Analogie hier also nicht eine asymmetrische Beziehung einer Repräsentation zu einem Repräsentierten, sondern ein Verhältnis gegenseitiger Repräsentation. Wichtig ist auch, dass nicht die mathematische Form selbst zur Repräsentation eines physikalischen Phänomenbereichs erklärt wurde. Vielmehr war die »physical analogy« Maxwells eine symmetrische Relation zwischen verschiedenen, auf gleicher Stufe stehenden Bereichen physikalischer Phänomene. Wenn, wie im Thomson'schen Beispiel, einer der Bereiche der Mechanik angehörte, sprach Maxwell von einer »mechanical analogy«. Hier handelte es sich um eine für die Naturerklärung besonders attraktive Klasse von Analogien, da die Mechanik vorläufig als der bekannteste physikalische Bereich angesehen werden musste. Nachdem durch Thomson und andere die »dynamical theory« zum Schlagwort einer abstrakt theoretischen, mathematisch formulierten Version mechanischer Theorie geworden war, fand sich auch häufig der Ausdruck der »dynamical analogies« in den Texten der englischsprachigen *natural philosophers*.[11]

Die Physik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts diskutierte eine ganze Reihe weiterer Beispiele solcher Analogien. Maxwell selbst arbeitete sich in den Folgejahren daran ab, Analogien für den Elektromagnetismus zu finden. Unter anderem entwarf er die in Abb. 4 angedeutete »mechanical analogy« für die dynamische Wechselwirkung von elektrischem und magnetischem Feld. (Wenn die Sekundärliteratur diese Analogie bisweilen als »mechanical model« bezeichnet hat, handelt es sich genau genommen um einen weiteren Anachronismus.)

10 Ebd., S. 157. Thomson verdankt sein Beispiel vermutlich Michel Chasles: »Mémoire sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale infiniment mince«, in: *Journal de l'Ecole Polytechnique* 15 (1837), S. 266–316 (den Hinweis verdanke ich Jesper Lützen: *Joseph Liouville 1809-1882. Master of Pure and Applied Mathematics*, Heidelberg/New York 1990, S. 141).

11 Zu den »dynamical analogies« vgl. u. a. Ole Knudsen: »Mathematics and Physical Reality in William Thomson's Electromagnetic Theory«, in: P. M. Harman (Hg.): *Wranglers and Physicists: Studies on Cambridge Physics in the Nineteenth Century*, Manchester 1985, S. 149–179 sowie (mit Schwerpunkt auf Maxwell) die Beiträge von Daniel M. Siegel, Jed Z. Buchwald und Norton M. Wise.

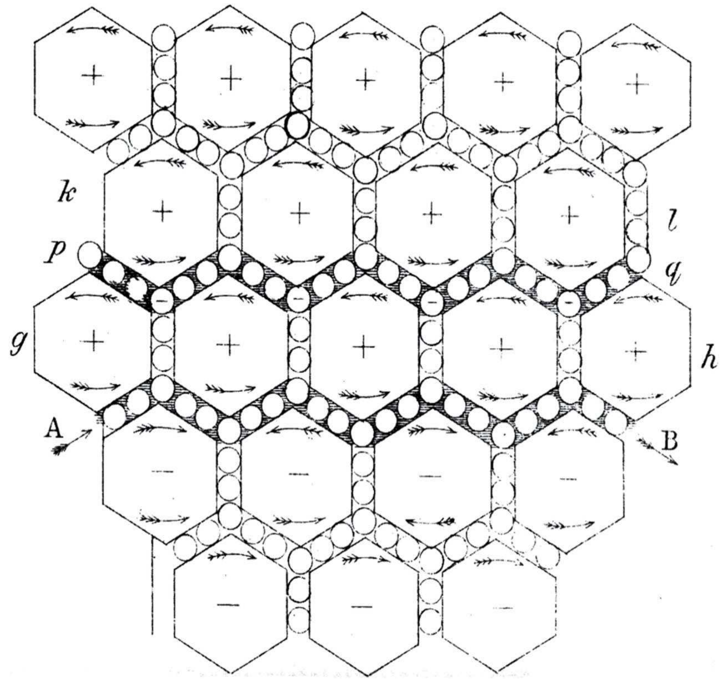

Abb. 4: Eine mechanische Analogie Maxwells[12]

In der epistemischen Situation, in der Maxwell diese Analogie bemühte, fällt es freilich schwer, sie anders als einen Versuch zu deuten, mithilfe der mechanischen Analogie, und kontrolliert durch die mathematischen Gleichungen, etwas über die Mikrostruktur der Wirklichkeit selbst herauszufinden, selbst dann, wenn diese *nicht* mechanisch strukturiert sein sollte. Maxwell stellte seinen Versuch nicht zuletzt auch als ein Gesprächsangebot an jene dar, die den Magnetismus für ein mikromechanisches Phänomen hielten.[13]

Ein besonders interessantes Beispiel einer physikalischen Analogie führte Hermann von Helmholtz im Jahr 1858 in die Literatur ein. Hier ging es um eine Analogie zwischen der Hydrodynamik, d. h. der Kontinuumsmechanik von Flüssigkeiten, und der statischen Theorie der von elektrischen Strömen erzeugten magnetischen Felder:

> *Diese [hydrodynamische] Aufgabe führt zu einer merkwürdigen Analogie der Wirbelbewegungen des Wassers mit den elektromagnetischen Wirkungen elektrischer Ströme. Wenn nämlich in einem einfach zusammenhängenden, mit bewegter Flüssigkeit gefüllten Raume ein Geschwindigkeitspotential existirt, sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleich und gleichgerichtet den Kräften, welche eine gewisse Vertheilung magnetischer Massen an der Oberfläche des Raumes auf ein magnetisches Theilchen im Innern ausüben würde. Wenn dagegen in einem solchen Raume Wirbelfäden existiren, so sind die Geschwindigkeiten der Wassertheilchen gleichzusetzen den auf ein magnetisches Theilchen ausgeübten Kräften geschlossener elektrischer Ströme, welche theils durch die Wirbelfäden im Innern der Masse, theils in ihrer Oberfläche fliessen, und deren Intensität dem Product aus dem Querschnitt der Wirbelfäden und ihrer Rotationsgeschwindigkeit proportional ist.*

12 Vgl. Figure 2 in James Clerk Maxwell: »On Physical Lines of Force«, in: Niven (Hg.): *Scientific Papers of James Clerk Maxwell* (Anm. 5), S. 451–513, hier S. 489.

13 Vgl. etwa Maxwells Verweis auf den »Mechanical Representation of Electric, Magnetic and Galvanic Forces« betitelten, 1847 erschienenen Aufsatz seines Kollegen William Thomson, in Maxwell: »On Physical Lines of Force« (Anm. 12), S. 453.

> *Ich werde mir deshalb im Folgenden öfter erlauben, die Anwesenheit von magnetischen Massen oder electrischen Strömen zu fingiren, blos um dadurch für die Natur von Functionen einen kürzeren und anschaulicheren Ausdruck zu gewinnen, die eben solche Functionen der Coordinaten sind, wie die Potentialfunctionen oder Anziehungskräfte, welche jenen Massen oder Strömen für ein magnetisches Theilchen zukommen.*[14]

Ziel war auch hier wieder der Aufweis analoger formal-mathematischer Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Gegenstandsbereichen. Man beachte aber, dass Helmholtz auch in zwei Hinsichten eine epistemische Asymmetrie ins Spiel bringt: Zum einen erläutert hier der Elektromagnetismus die Hydrodynamik, nicht die Mechanik den Elektromagnetismus. Zum anderen, und diese Asymmetrie ist noch auffallender, erläutert die elektromagnetische Seite der Analogie auch die abstrakten mathematischen Dinge selbst, um die es geht, namentlich die (in bestimmten Situationen auch mehrdeutigen) Potentialfunktionen, die Helmholtz zur Beschreibung der Wirbelbewegungen heranzog.[15] Diese oder eine (eng verwandte) epistemische Asymmetrie sollte später von Felix Klein zum Ausgangspunkt einer umfassenderen physikalischen Repräsentation mathematischer Forschungsdinge gemacht werden, die er freilich Bernhard Riemann und nicht Hermann von Helmholtz zuschrieb.[16]

Fassen wir die epistemischen Funktionen der physikalischen Analogien zusammen: Sie lieferten zunächst eine sehr fruchtbare Heuristik und insbesondere einen Ausweg aus dem forschungspraktischen Dilemma der unsicheren »physical hypotheses«, wie Maxwell schrieb. Insofern kann man in ihnen auch eine erste Distanzierung von einem starken (und mindestens zeitweise uneinlösbaren) Realismuszwang der physikalischen Wissenschaften sehen. Freilich bedeutete der Rückgriff auf die physikalischen Analogien auch eine klare Tendenz zur Betonung von formalen Gemeinsamkeiten in der physischen Welt, zur Herausarbeitung von einheitlichen mathematischen Formen in der Vielfalt der physischen Welt. Diese Tendenz ist deutlich *gegen* eine relativistische Epistemologie gerichtet, ja, sie mag sogar einem Realismus der Physik auf abstrakterer Ebene unmittelbar zuarbeiten. Wo sind die »physical analogies« schließlich auf der Skala zwischen konkreten und abstrakten Denkformen einzuordnen? Hier ist der Befund klar: Es ging vor allem um den Bau von Brücken zwischen verschiedenen *konkreten* Imaginationen, ja, möglicherweise auch um die Bereitstellung konkreter Imaginationen, welche abstrakte mathematische Gegenstände darstellen konnten. Die in den Analogien entwickelten konkreten Imaginationen konnten und sollten zur Entwicklung neuer ›physikalischer Ideen‹ genutzt werden, wie insbesondere in der Ätherphysik der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts verfolgt werden könnte.[17] Die erläuternde Seite der Analogie wurde dann – selbst gegen Maxwells Versicherung – zur gleichsam versuchsweise supponierten Realität. In dieser Weise verwendet, förderte die Analogiebildung trotz allem auch eine Form der perspektivischen Erklärung der physikalischen Wirklichkeit.

14 Hermann von Helmholtz: »Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen«, in: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 55 (1858), S. 25–55, hier S. 27.

15 Vgl. die ausführliche Diskussion dieser Analogie in Moritz Epple: »Topology, Matter, and Space, I. Topological Notions in 19th-Century Natural Philosophy«, in: *Archive for the History of Exact Sciences* 52 (1998), S. 297–392, und Moritz Epple: *Die Entstehung der Knotentheorie. Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Wiesbaden 1999, Kap. 4.

16 Felix Klein: *Über Riemann's Theorie der Algebraischen Functionen und ihrer Integrale*, Leipzig 1882.

17 Vgl. Helge Kragh: »The Vortex Atom: A *Victorian Theory of Everything*«, in: *Centaurus* 44 (2002), S. 32–114.

2. Interpretationen der nichteuklidischen Geometrie

Ich gehe nun über zu einem weiteren zentralen Kapitel in der Entwicklung der exakten Wissenschaften im 19. Jahrhundert, zu einer Episode, die retrospektiv, aber ebenfalls anachronistisch, häufig als ein Wandel hin zum Denken in mathematischen Modellen beschrieben worden ist. Gemeint ist die Entstehung und Verbreitung der sogenannten nichteuklidischen Geometrie. Für Gaston Bachelard bildete sie die paradigmatische Entwicklung, an der die Formierung des neuen wissenschaftlichen Geistes der Moderne in manchen Hinsichten am klarsten nachvollzogen werden konnte, und die zugleich die vielleicht früheste Episode dieses Wandels darstellte.[18]

Wieder zeigt sich bei näherem Hinsehen aber, dass die Akteure aus gutem Grund *nicht* von Modellen redeten (wenn sie dies doch taten, dann wieder im hergebrachten Sinn, s. u.) – und auch nicht Bezug nahmen auf die physikalischen Analogien, von denen eben die Rede war. Vielmehr griff der italienische Mathematiker Eugenio Beltrami in einem wichtigen Schritt dieser Entwicklung auf den Begriff der ›Interpretation‹ zurück, genauer: den der Interpretation eines Systems von Grundsätzen oder Prinzipien der Geometrie. Hier gelangte eine bestimmte Form der Pluralität ins Spiel: Ein solches System von Grundsätzen, so implizierte Beltramis Intervention, konnte *mehrere* Interpretationen zulassen. Schon vor Beltrami war die komplementäre Frage aufgeworfen worden: Wie viele mögliche Systeme von Grundsätzen der Geometrie gibt es? Hier deutet sich an, dass ein weiterer epistemologischer Begriff thematisiert wurde: jener der ›Systeme‹ (von Grundsätzen der Geometrie). Darüber hinaus wird uns in dieser Episode schließlich auch der Begriff des ›Bildes‹ im historischen Material wieder begegnen … Wiederum sei zunächst die epistemische Situation kurz skizziert, in der Beltrami seinen »Versuch einer Interpretation der Nichteuklidischen Geometrie« – so die deutsche Übersetzung des italienischen Titels seiner zentralen Schrift in diesem Zusammenhang[19] – machte.

Die allmählichen, verteilten Anfänge jener Entwicklung, die schließlich unter dem Namen der nichteuklidischen Geometrie zusammengefasst wurde, sind wohlbekannt, beschäftigen aber immer noch die Historiker. Ich beschränke mich auf wenige Andeutungen, die für das Verständnis des Hauptpunktes wesentlich sind, und bitte die eingeweihteren Leserinnen und Leser um etwas Geduld.[20]

Wichtig ist zunächst, dass im Lauf der 1820er und frühen 1830er Jahre einige Mathematiker zu der Überzeugung kamen, dass es neben dem tradierten System der Geometrie, das auf eine kontinuierliche Entwicklung seit der Antike zurückblicken konnte und als das vielleicht klarste Musterbeispiel einer beweisenden und zugleich die Wirklichkeit beschreibenden Wissenschaft galt, noch (mindestens) ein weiteres System der Geometrie gab, das mathematisch entfaltet werden konnte. Mathematische Außenseiter wie Janos Bolyai waren sich ebenso wie gestandene Wissenschaftler – Nikolai Lobatschewski in Kasan und Carl Friedrich Gauss in Göttingen – einig, dass eine Geometrie entwickelt werden konnte, in der das immer wieder diskutierte Euklidische Axiom der Parallelen *nicht* galt.

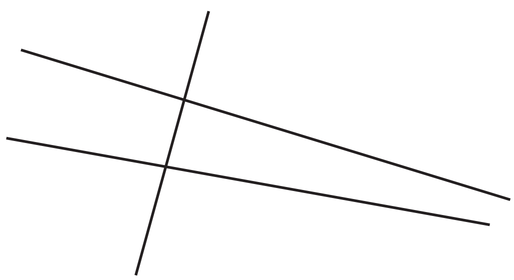

Abb. 5: Euklids Axiom der Parallelen. Schneiden zwei Geraden eine dritte, und ist die Summe der Innenwinkel zwischen ihnen auf einer Seite kleiner als zwei rechte Winkel, so werden sich die beiden Geraden auf dieser Seite treffen, wenn man sie ins Unbestimmte verlängert.

18 Vgl. das erste Kapitel »Les dilemmes de la philosophie géométrique« in Bachelard: *Nouvel esprit* (Anm. 3).
19 Eugenio Beltrami: »Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea«, *in: Giornale di Mathematiche* VI (1868), S. 285–315.
20 Für das Folgende vgl. z. B. Jeremy J. Gray: *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, Oxford [2]1989.

Im 18. Jahrhundert hatten mehrere Geometer (besonders Girolamo Saccheri in einer 1733 kurz vor seinem Tod veröffentlichten Schrift mit dem sprechenden Titel *Euclides ab omni naevo vindicatus*) logische Alternativen zu diesem Axiom diskutiert, in der Absicht und Hoffnung, diese – unter Beibehaltung der sonstigen Axiome der Geometrie – als absurd zu erweisen. In dieser Diskussion ergab sich eine Dreiteilung der möglichen Fälle, die man z. B. an Abb. 6 erläutern kann: Zwei gleich lange Strecken AB und CD stehen senkrecht auf einer dritten Strecke AC, die freien Endpunkte werden durch eine vierte Strecke BD verbunden.

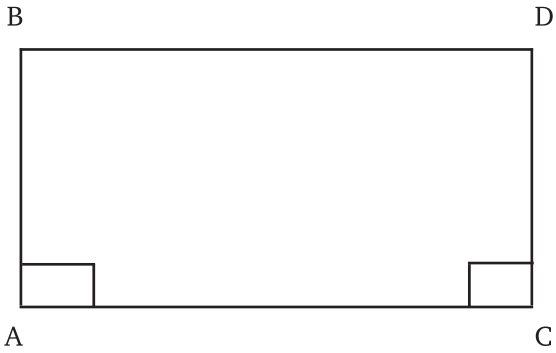

Abb. 6

Dann sind drei Fälle möglich:

1. Die Winkel <ABD und <CDA sind gleich und kleiner als ein rechter Winkel
(Hypothese des spitzen Winkels)

2. Die Winkel <ABD und <CDA sind gleich jeweils ein rechter Winkel
(Hypothese des rechten Winkels, diese Hypothese ist gleichwertig zum Parallelenaxiom)

3. Die Winkel <ABD und <CDA sind gleich und größer als ein rechter Winkel
(Hypothese des spitzen Winkels)

Der dritte Fall führte nach einigen Zwischenschritten zu einem Widerspruch mit der Annahme, dass Geraden ins Unendliche verlängert werden konnten, was zwar kein ausdrückliches Axiom der traditionellen Geometrie war, aber von den meisten an der Diskussion Beteiligten als sicher angenommen wurde. Der zweite Fall war der der traditionellen Geometrie. Für den ersten Fall ließ sich – so glaubten die Geometer des 18. Jahrhunderts, die sich mit dieser Frage beschäftigten – ebenfalls ein Widerspruch finden. Dieser ergab sich jedoch bemerkenswerterweise erst nach einer länglichen und recht subtilen Argumentation, deren Schwächen für Kenner unübersehbar waren.

An eben diesem Punkt meldeten die oben Genannten ihren Dissens an. Bolyai, Lobatschewski, Gauss und einige wenige andere glaubten, dass die Hypothese des spitzen Winkels *nicht* widerlegt werden konnte, sondern sich im Gegenteil zu einem gültigen System der Geometrie ausbauen ließ. Dieses System – und das ist der epistemisch ausschlaggebende Punkt – war inhaltlich verschieden vom traditionellen System der Geometrie. So gab es in der neuen Geometrie z. B. durch einen Punkt einer Ebene außerhalb einer darin verlaufenden Gerade mehrere nichtschneidende Geraden (und nicht nur eine wie im hergebrachten System der Geometrie), die Winkelsumme eines Dreiecks war stets kleiner als 180 Grad usw. Es konnten mithin nicht gleichzeitig beide Systeme der Geometrie als korrekte Beschreibung der Struktur des wirklichen Raumes gelten und in diesem Sinn wahr sein – eine bis dahin unerhörte epistemische Situation und eine völlig neue Problematik für die Geometrie.

Lobatschewski und Gauss betrachteten diese Problematik als eine empirisch, etwa durch astronomische Beobachtungen zu entscheidende Frage, eine Haltung, die einige Jahrzehnte später den Empirismus in den Naturwissenschaften stark befördern sollte. Freilich blieb es (aus mehreren Gründen) vorerst unmöglich, eine solche empirische Entscheidung sicher zu treffen. Der ›junge Wilde‹ Bolyai wiederum glaubte, einen spekulativen Beweis dafür zu besitzen, dass die abweichende neue Form der Geometrie die wahre war – leider ist uns dieser ›Beweis‹ jedoch nicht überliefert.

Für die historische Situation wichtig war freilich auch, dass die weitaus überwiegende Zahl der mathematisch Gebildeten von der Wahrheit der traditionellen Geometrie Euklids und seiner Nachfolger fest überzeugt war.[21] Der später (nicht zuletzt von Bachelard) so gefeierte epistemologische Stachel der alternativen Geometrie tat zunächst den wenigsten weh. In der Tat: Wer konnte sicher sein, dass sich in der Hypothese des spitzen Winkels nicht doch noch irgendwo ein Fehler verbarg, den man nur noch nicht gefunden hatte? Gauss blieb vorsichtig, er äußerte sich nur in Briefen an befreundete Wissenschaftler und nie im Druck zu diesem Thema. Bolyai war so gut wie unbekannt; Lobatschewski war zwar Professor und Rektor an der renommierten Universität von Kasan, aber diese war weit von den Zentren der europäischen Gelehrsamkeit entfernt.

Beltramis Intervention vom Jahr 1868 fiel in eben diese epistemische Situation der Geometrie. In den Jahren unmittelbar zuvor waren einige der brieflichen Äußerungen von Gauss posthum ediert worden und das Interesse an den obskuren Texten Lobatschewskis und Bolyais war etwas gewachsen. Die Hauptfrage blieb aber: Was sollte man mit ihnen anfangen? Beltrami entschied sich für den Versuch, sie zu *interpretieren*. Was genau hatte Beltrami mit seiner Interpretation im Sinn? Dies ist der Punkt, auf den es hier hauptsächlich ankommt.

Beltramis Interesse galt vor allem mathematischen Gegenständen in der gewöhnlichen, traditionellen Geometrie, welche innere Verhältnisse aufwiesen, die denen der Lobatschewski-Bolyai'schen Geometrie (ab jetzt kurz: LB-Geometrie) entsprachen oder zumindest nahe kamen. Beltrami fand mehrere solcher Gegenstände. Im ersten Schritt seiner Argumentation verwies er auf gekrümmte Flächen im dreidimensionalen Raum der gewöhnlichen euklidischen Geometrie, insbesondere auf Flächen, die durch die Rotation einer geeigneten gekrümmten Kurve um eine räumliche Achse erzeugt werden konnten und eine konstante negative Flächenkrümmung besaßen.[22] Abb. 7 gibt ein etwas später entstandenes Modell einer solchen Fläche wieder. Deutete man Punkte einer Fläche konstanter negativer Krümmung als Punkte in einer Ebene der LB-Geometrie (ab hier: LB-Ebene), und ›kürzeste Linien‹ (geodätische Linien, Linien geringster Krümmung) in einer solchen Fläche als Geraden der LB-Ebene, so galt für diese mit der gewöhnlichen Längen- und Winkelmessung in gewissen begrenzten Bereichen die LB-Geometrie. Es blieb freilich ein gewisser Makel: Die bekannten, konkreten Flächen konstanter negativer Krümmung im dreidimensionalen euklidischen Raum konnten nicht die ganze LB-Ebene darstellen (u. a. kam es zu mehrfachen Selbstschnitten von geodätischen Linien, und generell konnten die fern liegenden Randbereiche einer LB-Ebene nicht dargestellt werden).

21 Man vergleiche beispielsweise die Bibliographie der Schriften zu Euklids Parallelenaxiom in Paul Stäckel/Friedrich Engel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig 1895. Die weitaus überwiegende Zahl der bis ca. 1860 aufgelisteten Publikationen suchte die Wahrheit der traditionellen Geometrie nachzuweisen.

22 Die Flächenkrümmung war u. a. durch Gauss etwa zur selben Zeit zu einem interessanten Forschungsgegenstand der Geometrie geworden, in der auch die alternativen Geometrien zuerst artikuliert wurden. Hierfür gab es freilich auch andere handfeste Gründe, namentlich die geodätischen Arbeiten dieses Zeitraums. Vgl. Erhard Scholz: *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Basel 1980.

Abb. 7: Drehfläche der Traktrix mit konstanter negativer Krümmung, Konstrukteur: stud. math. Bacharach, München 1877 (in: Modellsammlung, Mathematisches Institut, Universität Göttingen)

Deshalb ging Beltrami in seiner Argumentation einen Schritt weiter und betrachtete das Innere eines Kreises mit einer von der gewöhnlichen *abweichenden* Längen- und Winkelmessung. Auch ein solcher ›Hilfskreis‹ konnte bei richtiger Wahl seiner metrischen Bestimmungen eine Fläche konstanter negativer Krümmung darstellen, welche nun nicht mehr im dreidimensionalen euklidischen Raum gedacht und *insofern* als eine abstrakte Fläche von konstant negativer Krümmung vorgestellt werden konnte. Auch diese konnte nun wiederum als LB-Ebene interpretiert werden. Beltramis Interpretation verband hier also zwei Repräsentationsschritte miteinander: Der (mit geeigneten Bestimmungen der Längen- und Winkelmessung versehene) Hilfskreis repräsentierte eine (unbegrenzte) Fläche konstanter negativer Krümmung, welche ihrerseits wiederum eine (vollständige) Ebene der LB-Geometrie darstellte. Er fasste zusammen:

> *Aus dem Vorhergehenden folgt, dass die geodätischen Linien [der als Fläche konstanter negativer Krümmung aufgefassten LB-Ebene, ME] in ihrem vollständigen (reellen) Verlauf durch die Sehnen des begrenzenden Kreises repräsentiert werden, während die Verlängerungen dieser Sehnen außerhalb dieses Kreises keine (reelle) Repräsentation tragen. Auf der anderen Seite werden zwei reelle Punkte der [LB-]Ebene durch zwei ebenfalls reelle innere Punkte des begrenzenden Kreises repräsentiert, die* eine *Sehne dieses Kreises bestimmen. Man sieht also, dass zwei* beliebig gewählte *reelle Punkte der [LB-]Ebene* immer eine geodätische Linie *bestimmen, welche auf dem Hilfskreis durch die Sehne repräsentiert wird, welche durch die beiden ihnen korrespondierenden Punkte verläuft. […]*
> *Was mehr ist, die Theoreme [der nichteuklidischen Planimetrie] sind nur dann einer konkreten Interpretation zugänglich, wenn man sie statt auf die [euklidische] Ebene präzise auf diese Flächen [konstanter negativer Krümmung] bezieht, wie wir gleich im Detail zeigen werden.*[23]

23 Meine Übersetzung beruht auf der zeitgenössischen französischen Übersetzung des Beltrami'schen »Saggio« von Charles Hoüel; vgl. Eugenio Beltrami: »Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne«, in: *Annales scientifiques de l'école normales supérieure* 6 (1869), S. 251–288, hier S. 259, Hervorhebungen im Original.

Durch diese zweistufige Repräsentation hatte Beltrami nun auch für seine Interpretation eine epistemische Symmetrie hergestellt: Alle Elemente der LB-Geometrie (Figuren wie Sachverhalte) fanden nun ein Gegenstück in beiden Stufen der Interpretation, in der (abstrakten) Fläche konstanter negativer Krümmung ebenso wie im Inneren des Hilfskreises mit seinen metrischen Bestimmungen. Wie in den physikalischen Analogien erläuterten nun auch in der Interpretation der nichteuklidischen Geometrie zwei Imaginationen einander *wechselseitig*. Um diese epistemische Symmetrie zu erreichen, war Beltrami bereit, ein gewisses Maß an imaginativer Konkretion aufzugeben: Seine unbegrenzte Fläche konstanter negativer Krümmung war eine Imagination, die (anders als die Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung, mit denen er seine Überlegungen begonnen hatte) keinen Platz mehr in der Welt der traditionellen geometrischen Imaginationen fand. Es handelte sich um eines jener frühen epistemischen Dinge der Mathematik jenseits der Sphäre der gewöhnlichen Anschauungen, wie sie für die mathematische Moderne so charakteristisch werden sollten.[24] Freilich bestand Beltrami darauf, dass auch diese Imagination noch konkret war, wie der letzte Satz des obigen Zitates zeigt.

Abb. 8: Ein (Papier-)Modell der nichteuklidischen Geometrie von Eugenio Beltrami, ca. 1869–1872

In der Tat zeigt sich Beltramis Interesse an der Konkretisierung des problematischen Gegenstandes ›nichteuklidische Ebene‹ noch in anderer Weise: Er fertigte (im Wortsinn der Zeit) mehrere Modelle der nichteuklidischen Ebene an, aus Papier, die er mehrfach in seiner Korrespondenz beschrieb, und von denen mindestens ein Exemplar noch heute existiert, am Istituto Matematico der Universität von Pavia.[25]

Beltrami war es übrigens auch, der wiederum etwa 20 Jahre später, im Jahr 1889, die oben erwähnte Schrift Saccheris wieder zurück in die breitere Aufmerksamkeit der Mathematiker und Wissenschaftshistoriker brachte.

Beltramis gelungener Versuch der Interpretation der nichteuklidischen Geometrie trug – zusammen mit zwei weiteren im Jahr 1868 veröffentlichten Texten, der zuvor unpublizierten Antrittsvorlesung von Bernhard Riemann »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, und Hermann von Helmholtz' »Ueber die Thatsachen, welche der Geometrie zum Grunde liegen« – wesentlich dazu bei, dieses obskure Objekt wachsender mathematischer Begierde zugänglich zu machen. In der Übersetzung in andere Sprachen wurde die ›Interpretation‹ dabei häufig zum ›Bild‹.

So verwendete Felix Klein in seinem Aufsatz »Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie« von 1871, in dem er sich dem neuen Thema zuwandte, einleitend das Beltrami'sche Motiv der Interpretation, um dann aber recht konsequent die Terminologie des ›Bildes‹ für die Repräsentation der nichteuklidischen Geometrien zu benutzen, wie in folgendem Zitat, das eine von dem englischen Geometer Arthur

24 Vgl. Epple: *Entstehung der Knotentheorie* (Anm. 15), Kapitel 7.

25 Vgl. Luciano Boi/Livia Giacardi/Rossana Tazzioli: *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère. Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868–1881)*, Paris 1998. Zu Beltramis Papiermodellen vgl. A. Capelo/M. Ferrari: »La ›cuffia‹ di Beltrami: storia e descrizione«, in: *Bollettino di storia delle scienze matematiche* (2) 2 (1982), S. 233–247, und Livia Giacardi: »Problematiche emergenti dalla corrispondenza inedita Beltrami-Hoüel. Parte prima: Eugenio Beltrami artigiano della pseudosfera«, in: *Quaderno di Matematica, Università di Torino* 77 (1984), S. 1–31. Für diese Hinweise danke ich Rossana Tazzioli. (Abb. 8: Bildrechte: Dipartimento di Matematica, Università di Pavia) Die Fotografie wurde freundlicherweise zur Verfügung gestellt von Professor Maurizio Cornalba am Dipartimento di Matematica, Università di Pavia.)

Cayley entwickelte Technik der projektiven Geometrie mit der Beltrami'schen Konstruktion verknüpfte: »Für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie erhalten wir nach dem Vorstehenden sofort ein Bild, wenn wir einen beliebigen reellen Kegelschnitt hinzeichnen und auf ihn eine projectivische Massbestimmung gründen.«[26] Die Ausdrücke ›Abbild‹ und ›anschauliches Bild‹ finden sich auch vielfach in den autographierten Vorlesungen »Nicht-euklidische Geometrie« von 1893, die Kleins Vorstellungen von der nichteuklidischen Geometrie einer neuen Generation von Mathematikern nahebrachten.[27] In Übereinstimmung mit seiner allgemeinen mathematischen Orientierung ging es Klein explizit darum, diese Geometrien zu ›versinnlichen‹ – ein weiteres häufig gebrauchtes Stichwort für Funktion der Bilder der nichteuklidischen Geometrien. Wie bei Beltrami berührt sich auch hier die gewählte Sprache mit dem hauptsächlichen epistemologischen Interesse an den *materiellen* Modellen dieser Zeit.

Als Kleins Vorlesungen von 1893 im Jahr 1928 in einer von Walter Rosemann komplett überarbeiteten Fassung zum ersten Mal posthum im Druck erschienen, fand sich darin neben der weiter vielfach verwendeten Terminologie des Bildes, Abbildes usw. auch das Wort Modell im modernen Sinn. So liest man etwa in anachronistischer semantischer Verschiebung von dem »Modell der ebenen hyperbolischen Geometrie, das bereits Beltrami bekannt war«[28], wobei nun gerade nicht mehr das – Rosemann vermutlich unbekannte – Papiermodell Beltramis gemeint war, sondern dessen ›Interpretation‹ der LB-Geometrie. Woher genau Rosemann den modernen Sprachgebrauch übernommen hat, muss hier offenbleiben. Eine mögliche Quelle sind die Vorlesungen Hermann Weyls über Raum – Zeit – Materie (zuerst erschienen 1918), die ebenfalls dem neuen Gebrauch folgten.[29]

Die epistemischen Funktionen der Beltrami'schen Interpretation und der Bilder der nichteuklidischen Geometrie *vor* der semantischen Verschiebung des Modellbegriffs schlossen also – ganz wie die physikalischen Analogien der Zeit – vor allem eine Heuristik von Forschungsgegenständen mit unklarem Status ein. Und wie dort ist auch hier sehr klar, dass die ›Interpretation‹ genannte Repräsentation dem noch problematischen System der geometrischen Prinzipien konkrete Imaginationen vertrauterer mathematischer Gegenstände hinzufügte. Dieser Schritt war durchaus als Plausibilitäts- bzw. ›Existenz‹sicherung der nichteuklidischen Geometrie(n) deutbar, wobei sich diese Funktion aber historisch allmählich verschieben sollte: Die Bilder/Interpretationen der nichteuklidischen Geometrie führten in dem Maße zu einer *Relativierung* des Realen, in dem im Lauf einer längeren Debatte, an der sich viele Autoren beteiligten, klar wurde, dass die Zuordnungen der epistemisch symmetrischen, verschiedenen Bilder der Geometrie(n) zu den *faits accomplis* der Erfahrung nicht determinierend für die Bilder waren, dass also mathematisch inäquivalente ›Bilder‹ geometrischer Verhältnisse – verschiedene Systeme geometrischer Grundsätze, um noch einmal Beltramis Wendung aufzugreifen – denselben Tatsachen zugeordnet werden konnten (vgl. hierzu unten mehr).

Wie wir gesehen haben, ging es auch in der Konstruktion der Interpretationen und Bilder der nichteuklidischen Geometrie um die Herstellung von epistemischen Symmetrien. Was in der Interpretation oder im Bild galt und existierte, existierte und galt auch in jenem Denkgebiet, das interpretiert oder abgebildet wurde. Die Geometer des letzten Drittels des 19. Jahrhunderts (neben Klein sind hier besonders Wilhelm Killing und Henri Poincaré zu nennen) überboten sich darin, weitere ›Bilder‹ der nichteuklidischen Geometrien zu entwerfen und die ›Abbildungen‹ zwischen denselben zu studieren. Dabei entstand ein zunehmend breit gefächertes Repertoire der verschiedenen möglichen Darstellungen ›derselben‹ geometrischen Verhältnisse in verschiedenen Bildern. Poincaré etwa spielte unter der

26 Felix Klein: »Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie«, in: *Mathematische Annalen* 4 (1871), S. 573–625, hier S. 611.

27 Felix Klein: *Nicht-euklidische Geometrie*. Autographierte Ausarbeitung von Friedrich Schilling, 2 Bde., Göttingen 1893. Die Vorlesungen wurden im Wintersemester 1889/1890 und im Sommersemester 1890 gehalten.

28 Felix Klein: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*. Für den Druck neu bearbeitet von W. Rosemann, Berlin 1928, S. 309.

29 Für diesen Hinweis danke ich Erhard Scholz.

Überschrift »Interpretation des géométries non euclidiennes« explizit auch die naheliegende Idee der Übersetzung zwischen solchen Bildern mit passendem Lexikon durch.[30]

Die Pluralität geometrischer Systeme besaß mithin (mindestens) zwei Dimensionen: Nicht nur gab es inzwischen unterschiedliche, mathematisch inäquivalente Geometrien, sondern jede dieser Geometrien ließ wiederum mehrere Interpretationen bzw. Bilder zu, zwischen denen epistemische Symmetrie bestand. Auf diese Weise kamen insbesondere auch die (symmetrischen und asymmetrischen) Relationen zwischen verschiedenen möglichen Repräsentationen unterschiedlicher möglicher geometrischer Systeme selbst in den Blick. Bachelard sollte später sagen: Nicht eine Repräsentation räumlicher Verhältnisse macht die Wissenschaft Geometrie aus, sondern das ganze Bündel von aufeinander bezogenen, nicht völlig äquivalenten Repräsentationen solcher Verhältnisse; Geometrie ist nicht die Wissenschaft der eindeutig bestimmten mathematischen Form des Räumlichen, sondern die Wissenschaft der Vielfalt der möglichen mathematischen Formen des Räumlichen und ihrer komplexen Beziehungen untereinander.[31]

3. Systeme und Spielräume: Einige Bemerkungen Felix Hausdorffs, ca. 1900

Um einen näheren Blick darauf zu werfen, wie weit sich die Diskussion der Repräsentationen von epistemischen Dingen in der Geometrie um die Jahrhundertwende über die Grenzen traditioneller Anschauung und Imagination hinausbewegen konnte, sei nun ein kurzer Blick auf den Umgang des Mathematikers und Erkenntniskritikers Felix Hausdorff mit dem Thema der nichteuklidischen Geometrie geworfen. Hausdorff, geboren 1868, war zu diesem Zeitpunkt außerplanmäßiger Extraordinarius an der Universität Leipzig. Endgültige berufliche Anerkennung als Mathematiker erhielt er erst später durch seinen Ruf als planmäßiger Extraordinarius an die Bonner Universität im Jahr 1910 und seine bahnbrechende Monographie *Grundzüge der Mengenlehre* aus dem Jahr 1914. In den Leipziger Jahren versuchte er sich neben seiner mathematischen Laufbahn auch als nietzscheanischer Schriftsteller unter dem Pseudonym *Paul Mongré* und als radikaler Vertreter der wissenschaftlichen und mathematischen Moderne.[32] In der erkenntniskritischen Monographie *Das Chaos in kosmischer Auslese* von 1898 führte Mongré die noch junge Sprache der Cantor'schen Theorie der unendlichen Mengen in die literarische Metaphorik ein, u. a. auch die Vorstellung einer beliebigen Abbildung zwischen Mengen; er demonstrierte dies insbesondere in einer radikalen und umfassenden Kritik an der Metaphysik des Zeitbegriffs.[33]

Im Jahr 1903 hielt Hausdorff seine Leipziger Antrittsvorlesung als Extraordinarius über das Thema »Das Raumproblem«, im Wintersemester 1903/1904 folgte eine Vorlesung über »Zeit und Raum«.[34] In diesen Texten gab sich Hausdorff als Mongré zu erkennen, der Mathematiker trat nun mit dem Erkenntniskritiker in offenen Austausch. Aus etwa derselben Zeit stammt der undatierte, allgemeinverständliche Aufsatz »Nichteuklidische Geometrie«, der in einer »Naturforscherzeitschrift« erscheinen sollte, aber dann nicht gedruckt wurde.[35] In diesem Aufsatz zog Hausdorff – nicht zuletzt in Bezug auf die wenige Jahre zuvor erschienene Schrift *Grundlagen der Geometrie* von David Hilbert – den bereits von Beltrami gebrauchten Begriff des Systems heran, um die noch immer neuen, abweichenden Geometrien zu beschreiben:

---

30 Vgl. Henri Poincaré: *Science et Hypothese*, Paris 1902, S. 57–58.

31 Bachelard: *Nouvel esprit* (Anm. 3), Kap. 1.

32 Zum Stichwort der mathematischen Moderne nach wie vor maßgeblich Herbert Mehrtens: *Moderne – Sprache – Mathematik*, Frankfurt a. M. 1990; vgl. inzwischen auch Jeremy J. Gray: *Plato's Ghost. The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton 2008.

33 Vgl. Moritz Epple: »Felix Hausdorff's Considered Empiricism«, in: José Ferreiros/Jeremy J. Gray (Hg.): *The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy*, Oxford 2006, S. 263–289; Moritz Epple: »Spielräume des Denkens: Felix Hausdorff und Paul Mongré«, in: Astrid Schwarz/Alfred Nordmann (Hg.): *Das bunte Gewand der Theorie. Vierzehn Begegnungen mit philosophierenden Forschern*, Freiburg 2009, S. 235–262; dort auch weitere Informationen zur Biographie.

34 Beide Texte werden erscheinen in Felix Hausdorff: *Gesammelte Werke*, Bd. 6, hg. v. Moritz Epple und Egbert Brieskorn, Heidelberg 2017.

35 Auch dieser Aufsatz wird in Band 6 der *Werke* Hausdorffs (Anm. 34) erscheinen.

> *Unter einer einzelnen nichteuklidischen Geometrie verstehen wir jedes System geometrischer Sätze, das in irgend einer mehr oder minder belangreichen Beziehung von einem bestimmten System, der euklidischen Geometrie abweicht; nichteuklidische Geometrie, als mathematische Disciplin, stellt sich die Prüfung und vergleichende Betrachtung aller dieser einzelnen Systeme zur Aufgabe.*[36]

Es ist eben diese Wendung, welche Bachelard Anlass gab, für dieses wissenschaftliche Feld vom neuen wissenschaftlichen Geist zu sprechen. Hausdorff forcierte nun auch das zugleich epistemologische wie ontologische Problem, das mit dieser Wendung verbunden war:

> *Jenes bestimmte einzige System aber, das sozusagen als Normalsystem zu Grunde gelegt wird und dem sich bereits in der Namensgebung alle übrigen als bloße Negationen, Abnormitäten, Spielarten gegenüberstellen, ist logisch betrachtet um kein Jota berechtigter, natürlicher, denknothwendiger als die andern; in dieser Hinsicht kann die Mathematik nicht scharf genug dem bei vielen Philosophen beliebten Vorurtheil widersprechen, das den euklidischen Raum mit all seinen speciellen Eigenthümlichkeiten als ›Product logischer Setzung‹ a priori deduciren will.*[37]

Fiel diese bloß vermeintliche Natürlichkeit oder Denknotwendigkeit der tradierten Geometrie weg, so stellte sich das Problem der *empirischen Gültigkeit* der geometrischen Systeme ebenso neu wie das der unvermeidlichen Spielräume (der Erfahrung, der Anschauung, des Denkens)[38] in der Konstruktion solcher Systeme. Angesicht dieser *Spielräume* verlor fast jede konkrete Bestimmung des geometrischen Raumes ihre Verbindlichkeit:

> *So seltsam reactionär das klingen mag: selbst Sätze wie diejenigen, welche von der Unendlichkeit und Unbegrenztheit der Welt in Raum und Zeit reden, sind doch streng genommen sehr voreilige Schlüsse aus der Mitte des Universums auf seine Ränder und haben etwa den Werth, den die Meinungen einer Qualle im Atlantischen Ozean über die Gestalt der amerikanischen Küste beanspruchen könnten.*[39]

Hausdorff empfand – wie andere Vertreter der mathematischen Moderne auch – im Zurückweisen solcher Verbindlichkeiten eine Befreiung. Diese lag vor allem in einer Befreiung des *Sprachgebrauchs*, welche nicht zuletzt durch das Hin- und Herspielen (und Übersetzen) zwischen den verschiedenen Analogien, Interpretationen und Bildern mathematischer Dinge eingeübt worden war, welche die vorangehenden Jahrzehnte angehäuft hatten:

> *Gerade die moderne Mathematik verdankt wesentliche und aufklärende Einsichten dem Radicalismus, mit dem sie [im mathematischen Sprachgebrauch] verfahren ist, und der für den uneingeweihten Betrachter allerdings etwas Willkürliches, die liebsten Gewohnheiten verletzendes hat. Da wird mit ›Zahlen‹ gerechnet, bei denen* 2a=a *sein kann […]; die kürzesten Linien auf einer Fläche werden nach Bedürfniss als ›Gerade‹ bezeichnet, eine Gerade des gewöhnlichen Raums als ein ›Punkt‹ eines vierdimensionalen Raums gedeutet u.s.w. Ja warum thut das die Mathematik? […] weil ein sachgemässer Name die wichtigsten Zusammenhänge zwischen scheinbar entfernten Gebieten aufdecken, ein unsachge-*

36 Felix Hausdorff: »Nichteuklidische Geometrie«, S. 4. Das Manuskript findet sich im Nachlass Hausdorffs an der Universitätsbibliothek Bonn, Kapsel 48, Fasz. 994.

37 Ebd., S. 5.

38 Die Unterscheidung dieser drei Arten von Spielräumen in der Konstruktion mathematischer Raumbegriffe findet sich in Felix Hausdorff: »Das Raumproblem«, in: *Ostwalds Annalen der Naturphilosophie* 3 (1903), S. 1–23, vgl. dazu Epple: »Spielräume« (Anm. 33).

39 Hausdorff: »Nichteuklidische Geometrie« (Anm. 36), S. 7.

> *mässer sie verschleiern kann. Die Übertragung eines Sprachgebrauchs auf ungewöhnliche, abweichende Fälle dient insbesondere dazu, die zahlreichen Voraussetzungen einzeln sichtbar zu machen, die in der gewöhnlichen Begriffssphäre ungelöst schwimmen; sie ist geradezu das ›logische Experiment‹ […], die chemische Analyse der Begriffe.*[40]

Zugleich konnte der freie Sprachgebrauch der Mathematik *anschauliche Vorstellungen* wecken, indem die Mathematik – wie in den Interpretationen und Bildern der nichteuklidischen Geometrien – »nämlich ihre reinen Gedankengebilde auch anschaulich vorzustellen sucht und hierin mit freier Benutzung der Wirklichkeitselemente verfährt«.[41] Freilich durfte hier nicht durch die Hintertür der Anschauung wieder ein fester Grund der mathematischen Sprache suggeriert werden. Anders als noch etwa Klein betonte Hausdorff, dass »das Wort ›anschaulich‹ zu vielerlei und eigentlich bei Jedem etwas Anderes bedeutet«.[42] Dennoch war der Gebrauch dieser je individuellen Anschauung, Imagination oder Phantasie als Hilfsmittel zur Heranführung an die Gedankendinge der Mathematik legitim. Zum »Beltrami-Cayley'schen Bild der pseudosphärischen Geometrie« kommentierte Hausdorff: »Wir können uns für diese Verhältnisse [des formalen Systems der pseudosphärischen Geometrie, ME] eine anschauliche Analogie verschaffen, die, gegenwärtig nur als hülfreiches Symbol, sich später als das wahre Äquivalent der Sache erweisen wird«.[43] Das Bild »versinnlichte«[44], »die Sache« selbst war das formale System der pseudosphärischen (bzw. LB-) Geometrie. Auch die Modelle kamen in Hausdorffs Darstellung z. B. im »Krystalmodell« – also immer noch als tastbar gedacht! – mit entsprechender epistemischer Funktion vor.

Die Grundtendenz der Hausdorffschen Ausführungen war freilich nicht nur ein Plädoyer für befreite Konstruktion mathematischer Gedankendinge. Zweck der auf dem freien Sprachgebrauch beruhenden »chemischen Analyse der Begriffe« und der Erkundung des (Denk-, Anschauungs- und Erfahrungs-) Spielraums mathematischer Beschreibungen des Wirklichen war schließlich auch eine »Selbstkritik der Wissenschaft«[45] – Wissenschaft verstanden als der Versuch einer rationalen Ordnung des Wirklichen durch den menschlichen Intellekt. Paul Mongrés *Das Chaos in kosmischer Auslese* endet mit den – freilich erläuterungsbedürftigen[46] – Sätzen:

> *Die ganze wunderbare und reichgegliederte Structur unseres Kosmos zerflatterte beim Übergang zum Transcendenten in lauter chaotische Unbestimmtheit; beim Rückweg zum Empirischen versagt dementsprechend bereits der Versuch, die allereinfachsten Bewusstseinsformen als nothwendige Incarnationen der Erscheinung aufzustellen. Damit sind die Brücken abgebrochen, die in der Phantasie aller Metaphysiker vom Chaos zum Kosmos herüber und hinüber führen, und ist das* Ende der Metaphysik *erklärt, – der eingeständlichen nicht minder als jener verlarvten, die aus ihrem Gefüge auszuscheiden der Naturwissenschaft des nächsten Jahrhunderts nicht erspart bleibt.*[47]

40 Ebd., S. 10.
41 Ebd., S. 12.
42 Ebd.
43 Ebd., S. 34.
44 Ebd., S. 35.
45 Felix Hausdorff: *Sant Ilario – Gedanken aus der Landschaft Zarathustras*, Leipzig 1897, S. 342.
46 Vgl. Epple: »Considered Empiricism« und Epple: »Spielräume« (beide Anm. 33).
47 Felix Hausdorff: *Das Chaos in kosmischer Auslese*, Leipzig 1898, S. 209.

4. Bilder und dynamische Modelle: Noch einmal Heinrich Hertz

Im letzten Schritt der Überlegungen sei nochmals knapp auf Heinrich Hertz' Gebrauch der Ausdrücke ›Bild‹ und ›Modell‹ eingegangen.[48] Zur Erinnerung: Für Hertz waren stets mehrere ›Bilder‹ desselben Wirklichen möglich, mit der starken Einschränkung, dass jedes dieser Bilder in einer ›Folgenäquivalenz‹ zur Kausalität des Wirklichen stehen musste. Diese epistemologische Struktur ist jener der Bilder der nichteuklidischen Geometrie eng verwandt. Wo dort die Äquivalenz zwischen den Folgerungsbeziehungen innerhalb eines geometrischen Systems einerseits und jenen in dessen Bildern (oder Interpretationen) andererseits eine logisch-mathematische war, ging es Hertz um kausale Beziehungen zwischen Ursachen und Wirkungen. Hier wie dort halfen die Bilder zum Verständnis einer Sache, die an sich selbst für den menschlichen Geist schwer zugänglich war.

In diesem Rahmen entwarf Hertz darüber hinaus noch einen sehr eigenwilligen, technischen Sinn des Begriffs Modell, der sich von dem noch immer gebräuchlichen Sinn des Modells als konkreter, materieller Repräsentation eines wissenschaftlichen Gegenstandes (wie eingangs gesehen, war Hertz dieser Sinn nicht fremd) absetzte. Wieder war hierbei auch der Begriff des ›Systems‹ – bzw. einer Vielzahl von Systemen wesentlich. In diesem neuen, technischen Sinn legte Hertz fest:

> *Definition. Ein materielles System heißt dynamisches Modell eines zweiten Systems, wenn sich die Zusammenhänge des ersteren durch solche Koordinaten darstellen lassen, dass den Bedingungen genügt ist:*
> *1. dass die Zahl der Koordinaten des ersten Systems gleich der Zahl der Koordinaten des andern Systems ist,*
> *2. dass nach passender Zuordnung der Koordinaten für beide Systeme die gleichen Bedingungsgleichungen bestehen,*
> *3. dass der Ausdruck für die Größe einer Verrückung in beiden Systemen bei jener Zuordnung der Koordinaten übereinstimme.*[49]

Und er schloss:

> *Folgerung 1. Ist ein System Modell eines zweiten Systems, so ist auch umgekehrt das zweite System Modell des ersten. Sind zwei Systeme Modelle eines dritten, so sind sie auch Modelle voneinander. Das Modell des Modells eines Systems ist auch Modell des ursprünglichen Systems.*[50]

Wie in den früheren Kontexten der physikalischen Analogien war auch hier die Pointe eine – definitorisch erzwungene, vollständige – Reflexivität, Symmetrie und Transitivität der Modellbeziehung. Voneinander Modell zu sein war eine Äquivalenzrelation zwischen ›materiellen Systemen‹. Auch das technisch fixierte Modell von Hertz war mithin kein Modell im modernen, reduktiven und relativierenden Sinn. Und wie im Fall der Proliferation der Bilder der nichteuklidischen Geometrien war auch Hertz bewusst, dass es stets *viele* Modelle desselben Systems geben konnte bzw. tatsächlich gab:

48 Vgl. Jesper Lützen: *Mechanistic Images in Geometric Forms. Heinrich Hertz's Principles of Mechanics*, Oxford 2005.
49 Hertz: *Prinzipien der Mechanik* (Anm. 1), S. 197.
50 Ebd.

> *Folgerung 3. Ein System ist noch nicht vollständig bestimmt dadurch, dass es Modell eines gegebenen Systems ist. Unendlich viele, physikalisch gänzlich verschiedene Systeme können Modelle eines und desselben Systems sein. Ein System ist Modell unendlich vieler, gänzlich verschiedener Systeme.*[51]

Damit bestand ein gewisses, durch die Forderung der Äquivalenz begrenztes Maß an Perspektivität in den Modellen. Diese war vor allem in epistemischer Hinsicht wünschenswert und nützlich, denn es galt der zentrale ›Lehrsatz‹, dass die dynamischen Zustände von Systemen, die voneinander Modell waren, in gegenseitiger Korrespondenz standen,[52] so dass Einsichten in die Dynamik eines Systems durch Untersuchung eines (äquivalenten) Modellsystems gewonnen werden konnten. Mitten in diesen definitorisch festgelegten Überlegungen brachte Hertz nun noch einmal den in der Einleitung zu seinem Buch gebrauchten Begriff der mentalen Bilder materieller Vorgänge ins Spiel, in einer Anmerkung, die kaum anders denn als kryptisch zu bezeichnen ist:

> *Anmerkung 2. Das Verhältnis eines dynamischen Modells zu dem System, als dessen Modell es betrachtet wird, ist dasselbe, wie das Verhältnis der Bilder, welche sich unser Geist von den Dingen bildet, zu diesen Dingen. Betrachten wir nämlich den Zustand des Modells als eine Abbildung des Zustandes des Systems, so sind die Folgen der Abbildung, welche nach den Gesetzen dieser Abbildung eintreten müssen, zugleich die Abbildung der Folgen, welche sich an dem ursprünglichen Gegenstand nach den Gesetzen dieses ursprünglichen Gegenstandes entwickeln müssen. Die Übereinstimmung zwischen Geist und Natur lässt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modelle voneinander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, dass der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten.*[53]

Nimmt man die Hertz'sche Anmerkung ernst, so ist sie eine anspruchsvolle, empirisch freilich ganz und gar ungesicherte kognitionswissenschaftliche Hypothese, gleichsam eine Art Mechanik des Geistes.

Bei aller Perspektivität bleibt Hertz' Diskussion von Bildern und Modellen einer strengen und letztlich tief in den dargestellten epistemologischen Traditionen des 19. Jahrhunderts verankerten Vorstellung verpflichtet – der Vorstellung einer Korrespondenz zwischen kausal strukturierter Wirklichkeit, Tätigkeit des Geistes und wissenschaftlicher Theoriebildung. Erreicht wird dies durch die konsequente Betonung der epistemischen Symmetrie der Abbild- bzw. Modellbeziehung. Den epistemologischen Bruch, den – wie wir besonders an Hausdorff gesehen haben – die Geometrie bereits durchlebt hatte oder mindestens kurze Zeit später durchlebte, vollzog Hertz *nicht*.

5. Epilog: Der Aufstieg der (modernen) mathematischen Modelle

Die Konjunktur (und Inflation) des modernen Begriffs des mathematischen Modells als Akteurskategorie ist eine Angelegenheit des mittleren 20. Jahrhunderts, der ich hier nicht weiter nachgehen kann. Sie war nur denkbar nach dem von Bachelard notierten Bruch, welcher den *nouvel esprit scientifique* des 20. Jahrhunderts hervorbrachte. Wollte man die Geschichte dieser Konjunktur im Einzelnen erzählen, müsste man nicht nur weiter verfolgen, wie der Begriff des Modells in der Geometrie seine moderne, abstrakte Bedeutung erhielt, die wir u. a. in Rosemanns Pseudo-Klein aus dem Jahr 1928 vorgefunden haben.

---

51 Ebd.
52 Vgl. ebd., S. 198.
53 Ebd., S. 199.

Es wäre insbesondere auch den epistemologischen Verschiebungen in der mathematischen Ökonomie derselben Zeit nachzugehen. Auch dort finden sich in etlichen Texten des frühen 20. Jahrhunderts die »mechanical analogies« im Stil des 19. Jahrhunderts,[54] bevor der moderne Sinn des Modells in Gebrauch kam. Mehrere Historiker der mathematischen Ökonomie verweisen auf Jan Tinbergens Aufsatz »Quantitative Fragen der Konjunkturpolitik« aus dem Jahr 1935 als den Ort, an welchem das Konzept des mathematischen Modells in die ökonomische Theorie eingeführt wurde, ein Konzept, das sich dann in der Ökonomie schnell verbreitete.[55]

Solange die epistemologische Geschichte jener Verschiebungen im Verständnis und Gebrauch von abstrakten Repräsentationen in den Naturwissenschaften noch nicht geschrieben ist, welche schließlich zur Verdrängung des älteren und zur Konjunktur des modernen Modellbegriffs führten, bleibt dem Historiker nur, vorsichtig an die epistemischen Funktionen der Analogien, Interpretationen, Bilder und nicht zuletzt der anfassbaren Modelle der Naturwissenschaften und Mathematik des 19. Jahrhunderts zu erinnern.

Die für uns Heutige letztlich irreversible Einsicht in die Perspektivität und Relativität wissenschaftlicher Repräsentationen, in die unumgängliche und epistemisch *nicht* harmlose Reduktion der Komplexität des Realen im theoretischen Modell – ja, nicht einmal im biologischen Modellsystem – drängte sich im Denken der physikalischen Wissenschaften des vorletzten Jahrhunderts noch *nicht* auf. Hier standen andere epistemische Funktionen der Analogien, Bilder und materiellen Modelle im Vordergrund: ihr kollektiver oder individueller heuristischer Wert, die Entlastung bzw. der Ersatz, den sie für kausale Hypothesen dort anbieten konnten, wo solche (noch) nicht vorlagen, die epistemische Symmetrie oder Äquivalenz zwischen verschiedenen konkreten Repräsentationen derselben vermuteten abstrakteren Strukturen, die Herausarbeitung von einheitlichen mathematischen Formen der Natur.

Dagegen kam in den Interpretationen, Systemen und Bildern der nichteuklidischen Geometrie neben diesen Funktionen noch etwas anderes ins Spiel: der Umgang mit inäquivalenten Repräsentationen eines Wirklichen, welche eben deshalb als freie Imaginationen neu interpretiert, versinnlicht und bewertet werden mussten. Damit war insbesondere dort, wo die Frage der Beziehung zwischen derartigen Imaginationen und dem wissenschaftlich erschlossenen Wirklichen gestellt wurde, eine hartnäckige epistemologische Problematik aufgeworfen, die schließlich doch eine »Selbstkritik der Wissenschaft«[56] erzwang, die erst die »Naturwissenschaft des nächsten Jahrhunderts«[57] zu Ende führen sollte.

54 Vgl. u. a. Mary S. Morgan: *The World in the Model. How Economists Work and Think,* Cambridge 2012.

55 Vgl. Gerard Alberts: *Jaren van berekening, toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening 1945–1960*, Amsterdam 1998; Marcel Boumans: *How Economists Model the World into Numbers*, London/New York 2005.

56 Hausdorff: *Sant Ilario* (Anm. 45), S. 342.

57 Hausdorff: *Das Chaos in kosmischer Auslese* (Anm. 47), S. 209.