Tuexenia 23: 397–399. Göttingen 2003.

Zum Gebrauch des arithmetischen Mittels der pH-Werte von Böden

– Hans Möller –

Zusammenfassung

Der Gebrauch des arithmetischen Mittels der pH-Werte von Böden ist zulässig: Das arithmetische Mittel von pH-Zahlen ist der (negative dekadische) Logarithmus des geometrischen Mittels der Zahlenwerte von H_3O^+-Konzentrationen pro Liter Lösung. Es gibt die zentrale Tendenz der Acidität einer Reihe von Böden bzw. von Bodenausschnitten besser wieder als das arithmetische Mittel der entsprechenden Numeri.

Abstract: About the use of arithmetic mean pH values in soils

Use of the arithmetic mean of pH values in soils is admissable: it represents the (negative common) logarithm of the geometric mean of numerical values of H_3O^+ concentration per liter of solution. This gives the central tendency of acidity in a series of soils or soil samples in a better way than does the arithmetic mean of the corresponding antilogarithms.

Keywords: arithmetic mean of pH values, geometric mean of numerical values of H_3O^+ concentration, median of pH values.

In der Vegetationsökologie ist umstritten, ob das arithmetische Mittel der pH-Werte von Böden bzw. von Bodenausschnitten zulässig ist. So erklärt ELLENBERG (1992, S. 17): „Die pH-Zahlen sind logarithmische Werte; pH 3 beispielsweise bedeutet nicht doppelt so sauer wie pH 6, sondern tausendmal. Man darf die pH-Ziffern also nicht arithmetisch mitteln, wie dies häufig geschieht, sondern muß sie vorher entlogarithmieren. PEECH (1965) und SKYLLBERG (1990) kamen allerdings zu dem Schluß, daß es in vielen Fällen besser sei, die pH-Werte von Boden- oder Humusproben ohne Umrechnung in mg H^+ pro Liter zu mitteln. Die Frage, ob das Entlogarithmieren notwendig ist oder nicht, bedarf dringend der Klärung."

Das arithmetische Mitteln von pH-Zahlen, welche (negative dekadische) Logarithmen (der Zahlenwerte von in mol/Liter Lösung angegebenen H_3O^+-Konzentrationen) darstellen, ist nicht a priori abzulehnen: Das arithmetische Mittel von Logarithmen ist der Logarithmus des in der statistischen Literatur (vgl. z. B. RENNER 1970, WEBER 1980, KÖHLER et al. 1984, SACHS 1992) etablierten geometrischen Mittels:

$$\log M_G = \frac{\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum \log x_i$$

Durch Entlogarithmieren von $\log M_G$ erhält man M_G als Numerus.

Der Numerus = Antilogarithmus ist die Zahl, von welcher der Logarithmus zu bilden ist bzw. gebildet wurde.

Auf Aciditätswerte bezogen gilt:

$$-\log (M_G\,[\text{mol } H_3O^+/l]) = \frac{pH_1 + pH_2 + \ldots + pH_n}{n} = \frac{1}{n} \sum pH_i$$

Das Entlogarithmieren dieser mittleren pH-Zahl unterbleibt i. a. Da die pH-Werte lediglich eine andere Schreibweise der Acidität darstellen als deren Angabe in mol H_3O^+/l, sind M_G [mol H_3O+/l] und $-\log$ (M_G [mol H_3O+/l]) austauschbar.

M_G	=	geometrisches Mittel
x_i	=	der i-te der verschiedenen Numeri
pH_i	=	der i-te der verschiedenen pH-Werte
i	=	Index, läuft von i = 1 bis i = n
n	=	Umfang der Stichprobe
	=	Nummer des letzten Werts

Der Gebrauch des geometrischen Mittels (bzw. des Logarithmus des geometrischen Mittels) ist u. a. angezeigt, wenn die vorgegebenen Werte eine sehr große Variationsbreite haben (vgl. u. a. RENNER 1970, WEBER 1980). Das arithmetische Mittel wird dann durch die hohen Werte so stark beeinflusst, dass es die zentrale Tendenz der betreffenden Datenmenge nicht mehr repräsentiert.

„Die Lageparameter, die man auch Mittelwerte nennt, dienen zur Beschreibung der Lokation (Lage) der angegebenen Datenmenge, man sagt auch, diese Parameter geben die *zentrale Tendenz* der Verteilung wieder" (KÖHLER et al. 1984, S. 30).

Bei einer Streuung über einen größeren Zahlenbereich, etwa über mehrere Zehnerpotenzen, tendieren die Werte zu einer asymmetrischen Verteilung um das arithmetische Mittel ($\bar{x}$), d. h. die Werte sind mehr oder minder deutlich von einer Normalverteilung entfernt. Diese ist aber Voraussetzung für einen sinnvollen Gebrauch des arithmetischen Mittels (vgl. u. a. RENNER 1970, KÖHLER et al. 1984, WEBER 1980, SACHS 1992).

Die Normalverteilung folgt dem Schema $\bar{x} \pm s$ (s = Standardabweichung), d. h. die Einzelwerte weichen vom Mittelwert nach der Plus- und nach der Minusseite in gleicher Weise ab.

Bei einer asymmetrischen Verteilung von Werten um ihr arithmetisches Mittel ist zu überprüfen, ob die in Logarithmen überführten Daten einer (annähernden) Normalverteilung unterliegen. Ist eine solche vorhanden, dann gibt das geometrische Mittel (bzw. dessen Logarithmus als alternativer Ausdruck) die zentrale Tendenz der Datenmenge besser wieder als das arithmetische Mittel der betreffenden Numeri (vgl. u. a. RENNER 1970, WEBER 1980).

Ein solcher Fall ist bei den Daten der Bodenacidität gegeben: Wird der Säuregrad durch die Numeri ausgedrückt, so streuen die entsprechenden Zahlen über Zehnerpotenzen (z. B. bedeutet pH 3: 10^{-3} mol H_3O^+/l, pH 5: 10^{-5} mol H_3O^+/l). Die entsprechenden Werte eines Kollektivs von Bodenproben sind mehr oder minder deutlich von einer Normalverteilung entfernt. Diese Tendenz sei an einem Extrembeispiel demonstriert: Auf der Basis der entlogarithmierten pH-Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ergibt sich ein arithmetisches Mittel von 0,000159 mol H_3O^+/l, was einer pH-Zahl von 3,80 entspricht! Das arithmetische Mittel der aufgeführten pH-Werte hingegen, d. h. der negative Logarithmus des geometrischen Mittels der durch die Numeri ausgedrückten H_3O^+-Konzentrationen, gibt mit 6 die zentrale Tendenz der Aciditätswerte wieder. Die besagten pH-Zahlen folgen einer idealen Normalverteilung.

In der bodenanalytischen Praxis streuen die zu mittelnden Aciditätswerte i. a. geringer als in dem vorgenannten Beispiel. Doch auch in solchen Fällen besteht die Tendenz, dass sich die Numeri asymmetrisch zu ihrem arithmetischen Mittel verhalten und dass das arithmetische Mittel der pH-Zahlen die zentrale Tendenz der Aciditätswerte besser wiedergibt. So resultiert aus den entlogarithmierten pH-Werten 4,0/4,5/4,8/5,0/5,5 eine arithmetisch gemittelte Konzentration von 0,0000321 mol H_3O^+/l, was einer pH-Zahl von 4,49 entspricht. Dieser Wert bezeichnet die zentrale Tendenz der genannten Aciditätswerte weniger gut als das arithmetische Mittel der pH-Zahlen, welches 4,76 ist.

Sind die Daten nicht normal verteilt, wie es bei den obigen durch ihre Numeri ausgedrückten Aciditätswerten der Fall ist, dann stellt der Median (= Zentralwert) eine Alternative zum geometrischen Mittel (bzw. zu dessen Logarithmus) dar. Das geometrische Mittel hat jedoch gegenüber dem Median den Vorteil, dass es alle Werte der Datenmenge berücksichtigt, wobei es, im Gegensatz zum arithmetischen Mittel, nicht einseitig von hohen Werten beeinflusst wird. Andererseits ist es abstrakter als der Median.

Das arithmetische Mitteln der pH-Zahlen von Böden ist eine in der Vegetationsökologie verbreitete Praxis (s. u. a. das obige Zitat aus ELLENBERG 1992), die allerdings wohl meist unreflektiert bleibt. Es war Ziel der vorliegenden Ausführungen, die besagte Praxis „mathematisch zu legitimieren“

Literatur

ELLENBERG, H. (1992): Zeigerwerte der Gefäßpflanzen (ohne Rubus). In: ELLENBERG, H., WEBER, H. E., DÜLL, R., WIRTH, V., WERNER, W., PAULISSEN, D.: Zeigerwerte von Pflanzen in Mitteleuropa. – 2., verb. u. erw. Aufl. – Scripta Geobot. 18: 9–166. Göttingen.

KÖHLER, W, SCHACHTEL, G., VOLESKE, P. (1984): Biometrie. Einführung in die Statistik für Biologen und Agrarwissenschaftler. – Springer; Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: 255 S.

PEECH, M. (1965): Hydrogen ion activity. Methods of soil analysis II. – Am. Soc. Agron. 60: 914–925.

RENNER, E. (1970): Mathematisch-statistische Methoden in der praktischen Anwendung. – Parey, Berlin u. Hamburg: 116 S.

SACHS, L. (1992): Angewandte Statistik. 7., völlig neu bearb. Aufl. – Springer; Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: 846 S.

SKYLLBERG, U. (1990): Correlation between pH and depth in the Mor layer of a Picea abies (L.) Karst. stand on Till soils in Northern Sweden. – Scand. J. Forest. Res. 5: 143–153.

WEBER, E. (1980): Grundriß der biologischen Statistik. 8. Aufl. – G. Fischer; Stuttgart, New York: 652 S.

Prof. Dr. Hans Möller
Wilhelm-Raabe-Str. 2
31832 Springe