Abermillionen Rechenschritte für einen Blick in den Körper

In der medizinischen Bildgebung geht nichts ohne Mathematik

von Bastian von Harrach

Gleichungen mit mehreren Unbekannten zu lösen, üben Schüler schon in der Mittelstufe. Für die einen ist es eine spannende mathematische Knobelei, für die anderen eher Quälerei. Doch den wenigsten ist bewusst, wie viele Leben dadurch jeden Tag gerettet werden. Die moderne medizinische Bildgebung beruht darauf, sehr viele Gleichungen nach sehr vielen Unbekannten aufzulösen.

Aus vielen Richtungen wird der Patient in einem Computertomographen geröntgt. Jeder Röntgenstrahl durchquert den Körper und wird dabei abgeschwächt. Wie viel Intensität des Strahls am Ende noch am Detektor ankommt, hängt davon ab, welches Gewebe durchleuchtet wurde. So ergibt sich aus jedem Strahl eine Information über das durchquerte Gewebe und damit eine mathematische Gleichung für eine große Anzahl von unbekannten Variablen, die beschreiben, wie der Körper im Inneren aussieht. Um aus den Absorptionsmessungen vieler Röntgenstrahlen ein Bild des Körperinneren zu rekonstruieren, müssen diese Gleichungen nach den Unbekannten aufgelöst werden. Jedes Pixel des rekonstruierten Bilds entspricht einer Unbekannten, und so müssen Millionen von

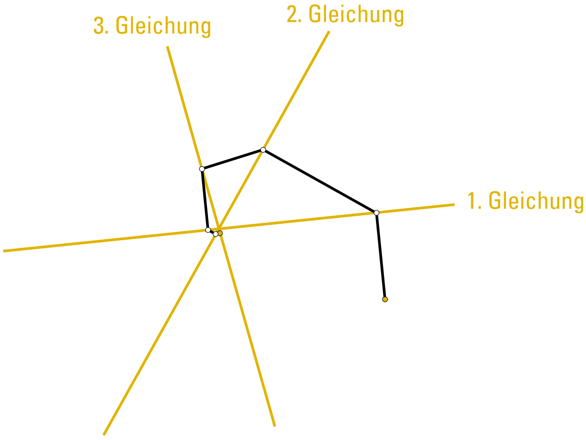
Unbekannten aus Millionen von Gleichungen bestimmt werden – für ein einziges Bild des Patienten. Das ursprüngliche Prinzip der Tomographie (griechisch: tome: »Schnitt« und graphein: »zeichnen«) bestand darin, Bilder einzelner zweidimensionaler Schichten aufzunehmen. Heute wird der Begriff aber auch für dreidimensionale bildgebende Verfahren verwendet.

Computertomographie und große Gleichungssysteme

Millionen Gleichungen kann ein Mensch nicht mehr per Hand lösen. Die moderne Mathematik entwickelt unter dem Namen Numerische Mathematik daher nicht mehr Lösungsverfahren für Menschen, sondern für Computer. Doch selbst die schnellsten Computer kommen bei so vielen Gleichungen und Unbekannten an ihre Grenzen. Direkte Lösungsalgorithmen benötigen grob abgeschätzt so viele Rechenschritte, wie die Anzahl der Unbekannten hoch drei beträgt. Bei jeweils einer Million Unbekannten und Gleichungen wären dies 1 000 000 mal 1 000 000 mal 1 000 000 Rechenschritte. Ein Computer, der eine Milliarde Rechenschritte pro Sekunde schafft, würde dafür immer noch eine Milliarde Sekunden, also über 30 Jahre, benötigen. Ein Petaflops-Supercomputer, der eine Billiarde Rechenschritte pro Sekunde schafft, bräuchte noch über 15 Minuten – und das alles für ein einziges zweidimensionales Schnittbild eines einzigen Patienten.

Iterative Lösungsverfahren

Eine enorme Beschleunigung erreicht man durch sogenannte iterative Verfahren. Dabei wird nicht versucht, direkt die exakte Lösung des Gleichungssystems zu bestimmen, sondern ausgehend von einer genäherten Lösung tastet man sich in jedem Schritt näher an die exakte Lösung heran. Ein lösbares Gleichungssystem mit drei linearen Gleichungen für zwei Unbekannte kann man sich so veranschaulichen, dass der Schnittpunkt dreier Geraden in einem zweidimensionalen Raum gesucht wird. Ein nach dem polnischen Mathematiker Stefan Kaczmarz benanntes iteratives Lösungsverfahren startet mit der Projektion eines Punkts auf die erste Gerade, bewegt sich von dort senkrecht zur zweiten Geraden, dann senkrecht zur dritten Geraden, wieder senkrecht zur ersten Geraden und wiederholt dieses Vorgehen immer wieder.



Millionen lineare Gleichungen für Millionen Unbekannte stellt sich der Mathematiker als einen Millionen-dimensionalen Raum vor, in dem sich Hyperebenen der Kodimension Eins schneiden. Der Schnittpunkt all dieser Hyperebenen ist das gesuchte Bild des Patienten. Mit dem Kaczmarz-Verfahren lassen sich auch solche Probleme effizient lösen, und zwar auch dann, wenn durch Mess- und Modellierungsfehler kein exakter Schnittpunkt existiert. Unter dem Namen Algebraic Reconstruction Technique ermöglichte dieses mathematische Verfahren die Entwicklung der Computertomographie. Dafür erhielten der Elektrotechniker Godfrey N. Hounsfield und der Physiker Allan M. Cormack 1979 den Nobelpreis für Medizin. Neben iterativen Verfahren werden heute auch die noch schnelleren direkten gefilterten Rückprojektionsmethoden eingesetzt, die auf den Arbeiten des österreichischen Mathematikers Johann Radon basieren.

Nicht-lineare Probleme und neuartige Tomographieverfahren

Alle im klinischen Alltag verwendeten bildgebenden Verfahren – Computertomographie, Kernspintomographie (MRT) und Positronen-Emissions-Tomographie – beruhen auf mathe-

Literatur

Gebauer, B., & Scherzer, O. (2008), Impedance-acoustic tomography, SIAM Journal on Applied Mathematics, 69(2), 565–576.

Harrach, B. (2009), On uniqueness in diffuse optical tomography, Inverse problems, 25(5), 055010.

Harrach, B., & Ullrich, M. (2015), Resolution guarantees in electrical impedance tomography, IEEE transactions on medical imaging, 34(7), 1513–1521.

Hochbruck, M., & Sautter, J.M. (2002), Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie, Mathematische Semesterberichte, 49(1), 95–113.

Holder, D. S. (Ed.) (2004), Electrical impedance tomography: methods, history and applications, CRC Press.

Mueller, J. L., & Siltanen, S. (Eds.) (2012), Linear and nonlinear inverse problems with practical applications, Society for Industrial and Applied Mathematics.

matischen inversen Problemen, also der Lösung großer Gleichungssysteme mit vielen Unbekannten. Bei vielen in der Forschung befindlichen neuartigen Verfahren sind diese Gleichungssysteme jedoch nicht mehr linear wie im Fall der Computertomographie. Das bedeutet, dass die Gleichungen nicht mehr Geraden oder Hyperebenen entsprechen, sondern kompliziertere Formen annehmen.

Ein Beispiel ist die elektrische Impedanztomographie, die statt Röntgenstrahlen schwache, für den Menschen unschädliche elektrische Ströme verwendet. Die Informationen über das Körperinnere ergeben sich aus der unterschiedlichen elektrischen Leitfähigkeit der Gewebe und lassen sich mathematisch berechnen. Anders als Röntgenstrahlen fließen elektrische Ströme jedoch nicht auf geraden Linien durch den Körper, sondern ihr Weg hängt von der unbekannten inneren Leitfähigkeitsverteilung ab. Mathematisch führt die Impedanztomographie deshalb auf nicht-lineare Koeffizientenprobleme in partiellen Differentialgleichungen. Um deren stabile Lösung bemüht sich die aktuelle Forschung intensiv. Die ersten kommerziellen Serienmodelle ermöglichen die intensivmedizinische Überwachung der Lungenfunktion künstlich beatmeter Patienten.

Hybride Tomographie – hoher Kontrast und hohe Auflösung

Röntgenstrahlen, Magnetfelder, Ultraschall, elektrischer Strom und sogar Infrarotstrahlung – die moderne Forschung kennt viele Möglichkeiten, den Menschen tomographisch zu durchleuchten. Ein aktueller Ansatz besteht auch darin, Techniken schon im Messprozess zu kombinieren. So besitzen Tumorzellen in Brustgewebe eine deutlich höhere elektrische Leitfähigkeit als das umliegende Gewebe. Mit elektrischen Strömen oder Mikrowellen lassen sie sich mit hohem Kontrast erkennen, aber die Auflösung ist noch zu gering. Werden die Ströme oder Mikrowellen jedoch zur Aufheizung des Tumorgewebes verwendet, so kann durch thermische Expansionseffekte eine Ultraschallwelle im Gewebe erzeugt werden. Aus der Messung des Ultraschallsignals lässt sich dann mathematisch leichter ein hochaufgelöstes Bild berechnen.

Zeigt das Bild die Realität?

Bilder vermitteln Objektivität. Aber zeigen die vom Computer berechneten Bilder wirklich die Realität? In der medizinischen Bildgebung hängen an dieser Frage Menschenleben. Auf der mathematischen Ebene lässt sich diese Frage in mehreren Stufen beantworten. Zuerst muss sichergestellt sein, dass die erfolgten Messungen überhaupt die gewünschte Bildinformation enthalten. Dies führt auf fundamentale theoretische Identifizierbarkeits- und Eindeutigkeitsfragen. Eine Konvergenz- und Stabilitätsanalyse untersucht, wie stark sich Messfehler auf das rekonstruierte Bild auswirken. Die Ergebnisse sind oft zunächst idealisierter Natur und zeigen, ob man sich der Realität beliebig gut annähern kann, wenn man nur genug Messungen mit ausreichender Genauigkeit durchführt. Noch anwendungsrelevanter ist daher die Frage nach Auflösungsgarantien: Lässt sich mit dem Messverfahren mit gegebener Genauigkeit und Modellunsicherheiten garantieren, dass im Körper Anomalien ab einer gewissen Größe und ab einem ausreichenden Kontrast gefunden werden? Für den Patienten kann die Sicherheit nie hoch genug sein. Das erreicht man nur durch modernste Technik und modernste Mathematik. ●

Der Autor

Prof. Dr. Bastian von Harrach, Jahrgang 1977, studierte Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Mainz. Nach seiner Promotion 2006 in Mainz war er an der Universität Mainz und am Johann Radon-Institut der Österreichischen Akademie der Wissenschaften tätig. Nach Professuren an der Technischen Universität München, der Universität Würzburg und der Universität Stuttgart folgte er im Oktober 2015 dem Ruf auf eine W3-Professur für Numerik partieller Differentialgleichungen an die Goethe-Universität. Sein Forschungsschwerpunkt sind mathematische inverse Koeffizientenprobleme in partiellen Differentialgleichungen, die bei neuartigen Tomographieverfahren wie der elektrischen Impedanztomographie, der diffusiven optischen Tomographie und bei hybriden Verfahren auftreten. Seine Arbeitsgruppe behandelt theoretische Identifizierbarkeitsfragen und untersucht, welche Informationen sich aus den Messungen berechnen lassen. Ebenso entwickelt sie praktische Rekonstruktionsalgorithmen mit mathematisch rigoros abgesicherten Konvergenzeigenschaften und Auflösungsgarantien.

harrach@math.uni-frankfurt.de

http://numerical.solutions