

STRUKTURBILDUNG
IN
SUPERSYMMETRISCHER
KALTER DUNKLER MATERIE
AUF KLEINSTEN SKALEN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe–Universität
in Frankfurt am Main

von
Stefan Josef Hofmann
aus Offenbach

Frankfurt am Main 2002
(D F 1)

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe–Universität als
Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. H. Schmidt-Böcking

Gutachter: Prof. Dr. H. Stöcker
Prof. Dr. Dr. h.c. mult. W. Greiner
PD Dr. habil. D. J. Schwarz

Datum der Disputation:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
	Literatur	24
2	Statistische Ensembles für das Nichtgleichgewicht	27
2.1	Relevante Statistische Ensembles	28
2.1.1	Reduzierte Beschreibung	28
2.1.2	Relevante Statistische Verteilungen	32
2.1.3	Entropie und Thermodynamische Beziehungen in Relevanten Ensembles	34
2.2	Lösungen der Liouville-Gleichung	36
2.2.1	Retardierte Lösungen der Liouville-Gleichung	36
2.2.2	Verallgemeinerte Transportgleichungen für Observablen	40
2.2.3	Entropie-Produktion im Nichtgleichgewichtsprozeß	45
	Anhang A	46
	Anhang B	51
	Anhang C	65
	Literatur	72
3	Die Klassische Kinetische Theorie	75
3.1	Die Verallgemeinerten Kinetischen Gleichungen	76
3.2	Reduzierte Verteilungsfunktionen	78
3.3	BBGKY-Hierarchie	79
3.4	Die Boltzmann-Gleichung	80
	Literatur	86

4	Hydrodynamische Prozesse	89
4.1	Hydrodynamik	89
4.1.1	Lokale Erhaltungssätze	89
4.1.2	Verallgemeinerte Hydrodynamische Gleichungen	90
4.1.3	Näherungen	92
4.2	Transport-Prozesse in Flüssigkeiten	93
4.2.1	Lokale Erhaltungssätze	93
4.2.2	Ideale Hydrodynamik	96
4.2.3	Die Lokalen Kinetischen Koeffizienten	100
4.2.4	Transportkoeffizienten	104
4.2.5	Dissipative Prozesse	106
4.2.6	Relativistische Formulierung Dissipativer Prozesse	109
	Literatur	113
5	Neutralinos	115
5.1	Neutralino–Annihilationen	118
5.1.1	Chemisches Entkoppeln	128
5.2	Elastische Neutralino–Streuungen	133
5.2.1	Kinetisches Entkoppeln	135
	Anhang A	138
	Anhang B	153
	Anhang C	180
	Literatur	183
6	Berechnung der Transportkoeffizienten	185
6.1	Hydrodynamische Beschreibung	186
6.2	Kinetische Beschreibung	188
6.2.1	Die Stromdichte	192
6.2.2	Der Energie–Impuls–Tensor	194
6.3	Die lokalen Transportkoeffizienten	195
6.3.1	Dissipative Prozesse in CDM	198
	Literatur	200

7 Akustische Absorption	201
7.1 Dämpfung durch Dissipation	202
7.2 Dämpfung durch freies Strömen	209
Literatur	212
8 Ergebnisse	213
Literatur	221

Abbildungsverzeichnis

1.1	Illustration des Anisotropie-Spektrums	14
1.2	Gemessenes Anisotropie-Spektrum	16
5.1	Chemisches Entkoppeln der Neutralinos	131
5.2	$\Omega_{\tilde{\chi}} h^2$ als Funktion der Neutralino-Masse	132
5.3	Kinetisches Entkoppeln der Neutralinos	137
7.1	Dämpfungsskala M_d in Sonnenmassen als Funktion der Neutralino-Masse	209
7.2	Dämpfungsskala M_{fs} in Sonnenmassen als Funktion der Neutralino-Masse	211

–I–

EINLEITUNG

Präzisionskosmologie–Eine Neue Ära

Die Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung (CMB) durch Penzias und Wilson (1965) ist die Geburtsstunde der modernen Kosmologie.

Wir stehen heute wieder vor dem Beginn einer neuen Ära in der Kosmologie. Mit Teleskopen, die Licht aus immer früheren Epochen und größeren Raumbereichen detektieren können, machen Kosmologen rasante Fortschritte in Hinblick auf Quantität und Qualität der experimentellen Daten. Kosmologie ist nicht nur eine exakte sondern auch eine präzise Wissenschaft geworden. Der Übergang in die neue Ära ist wieder durch Experimente zur Vermessung des CMB gekennzeichnet. Das erste Experiment der Präzisionskosmologie war die Vermessung des CMB durch den im Jahre 1989 gestarteten COBE (*Cosmic Background Explorer*) Satelliten. Mit COBE fanden Kosmologen heraus, daß die kosmischen Hintergrundstrahlung eine nahezu perfekte Schwarzkörperstrahlung mit einer Temperatur von $T_0 = 2.725 \pm 0.002$ K ist. Die im CMB vorhandenen Temperatur-Anisotropien sind von der Größenordnung ein Teil in 10^5 .

Wie so oft in der Physik, sind die Abweichungen vom Mittelwert interessanter als der Mittelwert selbst. Während die beobachtete thermische Natur und Isotropie im CMB die Urknall-Hypothese unterstützt, können hieraus keine Details eines zu Grunde liegenden kosmologischen Modelles gewonnen werden. Andererseits bezeugen die gemessenen Anisotropien die Existenz von Fluktuationen, die zur gravitativen Strukturbildung geführt haben. Da Experimente zur CMB–Anisotropie Photonen detektieren, die durch die Dynamik und Geometrie des expandierenden Universums beeinflußt werden, können aus den Meßwerten weiterhin so fundamentale Parameter wie die Expansionsrate, die Materiedichte und die Krümmung bestimmt werden. Wir geben im Folgenden kurz den Status einiger kosmologischer Parameter wieder.

Das Hubble–Gesetz besagt, daß die beobachtete Rotverschiebung z mit dem Abstand d wie folgt zusammenhängt: $z = H_0 d$, wobei H_0 die sogenannte Hubble–Konstante bezeichne, also den Wert der Expansionsrate zum Zeitpunkt der Messung. Die Messung der Hubble–Konstante ist mit großen Schwierigkeiten behaftet, da sie intrinsisch von der Abstandsbestimmung abhängt. Die Unsicherheit im Wert der aktuellen Expansionsrate wird für gewöhnlich durch $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ parametrisiert, wobei Experimente die dimensionslose Konstante h durch $0.6 \geq h \geq 0.8$ beschränken. Größere Werte für die Hubble–Konstante $h \approx 0.72$ werden von vielen Experimenten zur Abstandskalibrierung favorisiert (Jacoby et al., 1992; Freedman et al., 1994). Da H_0 eine Skala $H_0^{-1} \approx 10h^{-1} \text{ Gyr}$ für die Expansionszeit des Universums induziert, ist eine akurate Messung essentiell zur Altersbestimmung des Universums.

Ein weiterer Parameter der essentiell in die Altersbestimmung des Universums eingeht, ist die Energiedichte im Universum. Da Massen die Expansion des Universums abbremsen, bedeutet eine größere Energiedichte ein jüngerer Universum. Die im Universum gravitativ wirksame Masse wird für gewöhnlich durch Ω_M parametrisiert, also durch die aktuelle Energiedichte in Einheiten der kritischen Energiedichte $\rho_{\text{krit}} = 3(M_{\text{Pl}}H_0)^2/8\pi = 1.88h^2 \times 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Es gibt weiterhin die Möglichkeit, daß eine nicht verschwindende kosmologische Konstante Λ die Ausdehnung des Universums beschleunigt und zu einem beliebig alten Universum führt. Ein Universum mit $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ ist ausgezeichnet, da es als einziges Universum eine flache Geometrie aufweist.

In den letzten 30 Jahren sind große Anstrengungen unternommen worden, die mittlere Materiedichte im Universum zu ermitteln (Faber und Gallagher, 1979; Dekel et al., 1997; Turner, 2000; Primack, 2001). Die Schwierigkeit besteht dabei darin, die Materiedichte in einem repräsentativen Volumen ($> 10^6 \text{ Mpc}^3$) zu bestimmen. Wir diskutieren im Folgenden kurz die Methoden, mit denen Ω_M bestimmt wird.

Eine bekannte Technik beruht auf der Bestimmung des Masse–zu–Leuchtkraft–Verhältnisses, ausgehend von dem einfachen Zusammenhang $\rho_M = \langle M/L \rangle \mathcal{L}$ zwischen der mittleren Materiedichte und der mittleren Luminosität. Das Problem besteht nun darin, $\langle M/L \rangle$ in einem repräsentativen Volumen oder in einem typischen System zu bestimmen. Die Unsicherheit in der Bestimmung der mittleren Materiedichte ist also mindestens so groß wie die Unsicherheit in der Messung des mittleren Masse–zu–Leuchtkraft–Verhältnisses.

Die Experimente zur Messung von $\langle M/L \rangle$ haben sich auf Galaxien–Cluster konzentriert, da diese ein großes Volumen einnehmen und ihre Masse relativ gut bekannt ist. Allerdings sind Galaxien–Cluster immer noch zu klein, um einen wirklich repräsentativen Ausschnitt des Universum darzustellen. Weiterhin sind sie in eine Umgebung mit $10^2 - 10^3$ -facher Überdichte eingebettet. Ihr Masse–zu–Leuchtkraft–Verhältnis kann daher a priori nicht als repräsentativ angenommen werden.

Das CNOC-1 (Canadian Network for Observational Cosmology) hat 16 Galaxien-Cluster mit Rotverschiebungen im Bereich $0.17 < z < 0.55$ spektroskopiert und Carlberg et al. (1997) bestimmt aus den Daten $\Omega_M = 0.19 \pm 0.04$. Auch wenn Galaxien-Cluster nicht wirklich repräsentativ sind, so ist die Bestimmung von Ω_M aus dem gemessenen Masse-zu-Leuchtkraft-Verhältnis für Cluster am zuverlässigsten.

Eine mehr physikalisch motivierte Methode zur Bestimmung von Ω_M wurde von White et al. (1993) vorgeschlagen. Dabei wird angenommen, daß Galaxien-Cluster in Hinblick auf ihr Baryon-zu-Gesamtmasse-Verhältnis (Ω_B/Ω_M) repräsentativ sind. Die Baryon-Dichte ist aus der Big Bang-Nukleosynthese (BBN) bekannt und erlaubt damit die Bestimmung der mittleren Materiedichte: $\Omega_M = (M/M_B)_{\text{Cluster}} \Omega_B(\text{BBN})$. Systematische Fehlerquellen hängen mit den Fragen zusammen, ob alle Baryonen im Cluster detektiert werden und das Verhältnis M/M_B auf ausreichend großen Skalen bestimmt werden können. White et al. (1993), Mohr et al. (1998) und andere haben argumentiert, daß diese Fragen positiv beantwortet werden können. Aktuelle Übersichtsartikel zur Bestimmung von Ω_M (Dekel et al., 1997; Turner, 2000; Primack, 2001) bewerten die von White et al. (1993) vorgeschlagene Methode als vielversprechend.

Eine Reihe von Experimenten ist mit der Messung der Materieverteilung im Universum beschäftigt. Dabei spielen Messungen von CMB-Anisotropien auf Winkelbereiche von bis zu 0.1 Grad eine besondere Rolle.

CMB-Anisotropien hängen empfindlich von der physikalischen Baryon- und Materiedichte ab, nicht aber vom Masse-zu-Leuchtkraft-Verhältnis. Im Folgenden wird grob die den primären Anisotropien zu Grunde liegende Physik erläutert. Vor einer Rotverschiebung von $z_* \approx 10^3$ sind Photonen heiß genug, um Wasserstoff zu ionisieren. Compton-Streuprozesse halten die Photonen und die Elektronen in thermischen Kontakt, wobei letztere wiederum über elektromagnetische Wechselwirkungen an die Baryonen gekoppelt sind. Da die Compton-Wechselwirkungsrate bis zu z_* größer als die Expansionsrate des Universums ist, sind Photonen und Baryonen im lokalen thermischen Gleichgewicht und können somit hydrodynamisch durch eine einzige Flüssigkeit beschrieben werden. Der Photonen-Druck wirkt der gravitativen Verdichtung der Flüssigkeit entgegen und induziert akustische Störungen. Bei z_* wechselwirken Photonen ein letztes Mal mit den Elektronen und es bildet sich neutraler Wasserstoff. Überdichte und unterdichte Regionen repräsentieren die heißen und kalten Regionen in dieser Epoche. Die nun freien Photonen werden durch die lokalen Gravitationspotentiale rotverschoben. Die resultierenden Fluktuationen in der Energie der Photonen beobachten wir heute als Anisotropien im CMB-Temperaturfeld.

Wir werden im Folgenden etwas quantitativer, da sich die grundlegenden Effekte, die zur Generierung der CMB-Anisotropien sowie deren Evolution bis hin zum Zeitpunkt der Messung führen, durch einfache Gleichungen qualitativ beschreiben lassen. Dazu analysieren wir das Spektrum von akustischen Oszillationen im Im-

pulsraum, d. h. wir zerlegen jede Temperaturfluktuation in ebene Wellen, die durch ihre mitbewegten Wellenzahlen k charakterisiert sind. Für die von der Mode mit der Wellenzahl k verursachte Fluktuation $\theta = \Delta T/T$ gilt dann die Prozeßgleichung $m_{\text{eff}}\ddot{\theta} + k^2\theta/3 \approx m_{\text{eff}}g$ (Hu und Sugiyama, 1995a), also eine Oszillator-Gleichung mit externer Anregung. Der Doppelpunkt bezeichne hierbei die zweifache Ableitung nach der konformen Zeit, die durch $d\eta/dt = 1 + z$ definiert ist und die effektive Masse des Oszillators ist durch $m_{\text{eff}} \approx 1 + 3\rho_B/4\rho_\gamma$ gegeben. Für die Oszillatorfrequenz finden wir die Dispersionsrelation $\omega = kc_s$ mit der Schallgeschwindigkeit $c_s = 1/\sqrt{3m_{\text{eff}}}$. Die lokalen Gravitationspotentiale induzieren eine effektive Schwerebeschleunigung $g = -k^2\Psi/3 - \ddot{\Phi}$, wobei Ψ das klassische Gravitationspotential und $\Phi \approx -\Psi$ die durch die Fluktuationen induzierten Abweichung in der lokalen Krümmung bezeichne. Letztere hängen von den Dichtefluktuationen über die Poisson-Gleichung ab.

Für den Fall eines statischen effektiven Gravitationspotentials ist $g \approx -k^2\Psi/3$. Die Schwerebeschleunigung zwingt Materie, in die lokalen Potentialmulden zu fallen. Wir nehmen weiter an, daß die Energiedichte der Photon-Baryon-Flüssigkeit praktisch vollständig von den Photonen getragen wird, also $m_{\text{eff}} \approx 1$ gilt. Diese Annahme wird durch die BBN gerechtfertigt. Der Einfang von Photonen und Baryonen in den Potentialmulden komprimiert die Flüssigkeit, bis der durch die Photonen generierte Druck die Dynamik umkehrt. Wir nehmen adiabatische Anfangsbedingungen an, d. h. $\theta(0) = -2\Psi/3$ und $\dot{\theta}(0) = 0$. Da eine konstante Gravitationskraft den Nullpunkt der Schwingung nach $\theta = -\Psi$ translatiert, finden wir mit den Anfangsbedingungen $\theta = \Psi/3(\cos ks - 3)$, wobei der akustische Horizont durch $ds/d\eta = c_s$ definiert ist. Zum Zeitpunkt η_* entkoppeln die Photonen kinetisch von den Baryonen und strömen frei auf Geodäten aus den Potentialmulden, was die Photonen um Ψ rotverschiebt. Daher wird $\theta + \Psi$ die effektive Temperatur-Fluktuation genannt. Hier heben sich die Rotverschiebung und die durch das konstante Gravitationspotential hervorgerufene Translation des Nullpunkts der Schwingung gegenseitig auf.

Die Phase der Oszillation wird bei η_* eingefroren. Die zugehörige kritische Wellenzahl $k_A = \pi/s_*$ korrespondiert zum akustischen Horizont zu dieser Zeit. Moden mit größeren Wellenlängen können sich aus den adiabatischen Anfangsbedingungen nicht entwickeln, da sie nicht in den akustischen Horizont passen. Die kritische Mode generiert $\Psi/3$ Fluktuationen nach der gravitativen Rotverschiebung. Diese Kombination von intrinsischen Temperatur-Fluktuationen und der gravitativen Rotverschiebung der zugehörigen Photonen ist der bekannte Sachs-Wolfe-Effekt (Sachs und Wolfe, 1967). Fluktuationen mit kleinen Wellenlängen werden mit unterschiedlichen Phasen der $\cos ks_*$ -Oszillation eingefroren. Die Temperatur-Fluktuationen besitzen als Funktion der mitbewegten Wellenzahl k eine harmonische Folge von Extrema: zu dem m -ten Extrema gehört die Wellenzahl $k_m = mk_A = m\pi/s_*$. Ungerade m repräsentieren damit die Verdichtungsphase, gerade m dagegen die Verdünnungsphase innerhalb des Potentials. Der Abstand von Verdichtungs- und Verdünnungsphasen ist gerade die kritische Wellenzahl, $k_m - k_{m-1} = k_A$. Der akustische Horizont zum Zeitpunkt η_* kann daher aus den CMB-Messungen bestimmt werden.

Baryonen tragen zwar nicht zum Druck in der Photon–Baryon–Flüssigkeit bei, dafür aber zur effektiven Masse der Flüssigkeit $m_{\text{eff}} \approx 1 + 3\rho_{\text{B}}/4\rho_{\gamma}$. Dadurch ändert sich das Verhältnis von Druck und Gravitation. In der Gegenwart von Baryonen führt der gravitative Einfang zu größeren Verdichtungen in der Flüssigkeit in den Potentialmulden und damit zu einer weiteren Translation des Nullpunktes der Oszillation (Hu und Sugiyama, 1995a). Diese relative Verschiebung verstärkt die durch die Verdichtung hervorgerufenen Fluktuationen relativ zu den durch die Verdünnung induzierten Fluktuationen. Ist beispielsweise R eine Konstante, so ist die effektive Temperatur–Fluktuation $\theta + \Psi = 1/3\Psi(1+3R) \cos ks - R\Psi$. Die Maxima in den Fluktuationen und damit die Signaturen für die Verdichtungsphasen sind also um einen Faktor $(1 + 6R)$ relativ zum Sachs–Wolfe–Plateau verstärkt, die Differenz zwischen Maxima und Minima beträgt $2R\Psi$.¹ Da die Maxima über R von $\Omega_{\text{B}}h^2$ abhängen, kann aus den gemessenen Temperatur–Fluktuationen die Baryonen–Dichte im Universum bestimmt werden.

Letztlich beeinflusst auch die Zeitabhängigkeit der effektiven Masse die Oszillation. In der klassischen Mechanik ist das Verhältnis der Schwingungsenergie $m_{\text{eff}}\omega^2 A^2/2$ zur Kreisfrequenz ω der Schwinung eine adiabatische Invariante. Für Änderungen $m_{\text{eff}} \propto \omega^{-2}$ variiert die Amplitude der Schwingung daher wie $A \propto m_{\text{eff}}^{-1/4} \propto (1 + R)^{-1/4}$. Die Schwingung ist also schwach gedämpft.

Realistischere Modelle berücksichtigen natürlich ein zeitabhängiges Potential, das die akustischen Schwingungen antreibt und die Extrema verstärkt, wenn die Frequenz der Anregung mit einer Eigenfrequenz des Oszillators übereinstimmt. Dies ist der Fall, wenn die akustischen Störungen selber die antreibende Kraft durch ihre gravitative Selbstwechselwirkung induzieren (Hu und Sugiyama, 1995b; Hu und White, 1996).

Die Energiedichte des Universums wird für Rotverschiebungen $z > z_{\text{eq}} = 2.4 \times 10^4 \Omega_{\text{M}} h^2$ von Strahlung dominiert. Fluktuationen in der Strahlungsdichte induzieren einen Anregungsmechanismus, der von dem mit adiabatischen Störungen assoziierten Mechanismus wohl unterschieden ist. In beiden Fällen verstärken die Anregungen die Fluktuationen und hinterlassen außerdem eine Signatur des Überganges vom strahlungs- zum materiedominierten Unniversum. Die zugehörige Skala wird durch die Wellenzahl gesetzt, die bei z_{eq} noch in den Horizont paßt: $k_{\text{eq}} = 7.3 \times 10^{-2} \Omega_{\text{M}} h^2 \text{ Mpc}^{-1}$. Adiabatische Fluktuationen mit größeren Wellenzahlen werden um einen Faktor ~ 5 relative zum Sachs–Wolfe–Plateau in der Temperatur verstärkt. Das Verhältnis vom Maximum der effektiven Temperatur–Fluktuation zum Plateauwert legt somit k_{eq} und damit auch $\Omega_{\text{M}} h^2$ fest.

In Wirklichkeit ist die Kopplung der Photonen an die Baryonen nicht-ideal, da die Photonen einen durch Compton–Streuung gegebene freie Weglänge λ_{C} haben. Da

¹In Wirklichkeit wird dieser Effekt allerdings reduziert, weil R für immer frühere Zeiten immer kleiner wird.

die Photonen einen *random walk* durch die Baryonen machen, werden kalte und heiße Regionen vermischt. Die resultierende Dämpfung unterdrückt die Fluktuationen exponentiell, wenn die Diffusionslänge $\lambda_D \sim \sqrt{\eta\lambda_C}$ größer wird als die Wellenlänge (Silk, 1968).

Zum Zeitpunkt der letzten Wechselwirkung zwischen Photonen und Elektronen fällt das Ionisierungsverhalt­nis x_e wegen den Rekombinierungsprozessen und in der Folge wächst die mittlere freie Weglänge der Photonen $\lambda_C \propto (x_e n_B)^{-1}$. Die Diffusionsskala k_D kann daher zur Bestimmung von x_e und $\Omega_B h^2$ genutzt werden.

Es bleibt noch die Evolution der Fluktuationen von $z \approx 10^3$ bis heute zu analysieren. Hier spielen zwei Größen eine Rolle: Die Krümmung des Universums und der Abstand zur kinetischen Ausfrierfläche der Photonen. Die Krümmung ist durch $K = -H_0^2 \Omega_K$ definiert, wobei der relative Beitrag der Krümmung zur Expansionsrate durch $\Omega_K = 1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda$ gegeben ist.

Wir betrachten zunächst den Fall einer positiven Krümmung ($K > 0$, geschlossenes Universum). Photonen strömen frei auf Geodäten analog dem Verlauf von Lang­kreisen zu den Polen einer Kugel. Die positive Krümmung bewirkt nun, daß die gleiche physikalische Längenskala bei festem Abstand zum Beobachter unter einem größeren Winkel als in der euklidischen Geometrie erscheint. Der umgekehrte Effekt tritt für kosmologische Modelle mit negativer Krümmung auf ($K < 0$, offenes Universum) (Doroshkevich und Zel’dovich, 1978; Sugiyama und Gouda, 1992).

Mit wachsendem Abstand zur kinetischen Ausfrierfläche der Photonen wird der Winkelbereich kleiner, unter dem ein Objekt erscheint. Der Abstand $\eta_0 - \eta_*$ zur Ausfrierfläche hängt im wesentlichen von der Expansionsrate des Universums und damit von H_0, Ω_0, Ω_K und Ω_Λ ab. Wir erhalten für den Abstand $d = |K|^{-1/2} \sin[|K|^{1/2}(\eta_0 - \eta_*)]$ für $K > 0$ und mit $\sin \rightarrow \sinh$ den Abstand für $K < 0$. Der Winkel $\theta \sim l^{-1}$ unter dem ein Charakteristikum im CMB erscheint, ist durch $l_{\text{char}} = k_{\text{char}} d$ gegeben. Diese Skalen und insbesondere der durch k_A gegebene Abstand von Über- und Unterdichten ermöglichen die Bestimmung der Krümmung (Hu und White, 1996; Kamionkowski et al., 1994).

Es gibt neben dem oben diskutierten Projektionseffekt noch andere physikalische Effekte, die im Zeitraum zwischen Rekombination und heute die Fluktuationen beeinflussen. Wir konzentrieren uns hier auf gravitative Effekte. Entwickeln sich Fluktuationen in der Metrik, während Photonen durch die entsprechende Region strömen, so werden diese rotverschoben (Sachs und Wolfe, 1967). Skalare Fluktuationen führen in der Zeit–Zeit–Komponente der Metrik zu Fluktuationen in Gravitationspotential Ψ und in der Raum–Raum–Komponente zu Störungen Φ in der Krümmung. Wie bereits weiter oben beschrieben, führen Gradienten im Potential Ψ zum gravitativen Einfang und zur gravitativen Rotverschiebung. Ändert sich die Tiefe einer Potentialmulde während ein Photon sich in der Mulde befindet, so hebt sich die Blauverschiebung vom Fall des Photons in die Mulde nicht länger gegen

die Rotverschiebung von der Flucht aus der Mulde auf. Dies führt zu einer sogenannten *sekundären Anisotropie* in der Temperatur. Für den durch Störungen der Krümmung verursachten Effekt auf die Photonen erinnern wir daran, daß Photonen durch die Expansion des Universums rotverschoben werden. Ganz ähnlich wird die Raum-Zeit von Überdichten gedehnt, die lokal Gravitationsmulden erzeugen. Damit wird auch die Wellenlänge der durch diese Mulden strömenden Photonen gedehnt. Auch der umgekehrte Effekt ist möglich. Zerfällt beispielsweise ein Potential, so wird die Wellenlänge eines Photons in der Mulde blauverschoben und der CMB hin zu höheren Temperaturen.

Von besonderem Interesse ist der sogenannte späte *integrierte Sachs-Wolfe-Effekt* (ISW). In einem offenen kosmologischen Modell oder einem kosmologischen Modell mit von Null verschiedener kosmologischer Konstante Λ beschleunigt sich die Expansion des Universums, wenn Materie nicht mehr die Energiedichte im Universum dominiert (Kofman und Starobinskii, 1985). Der Beitrag von Materie zur Energiedichte gleicht dem von Krümmung, wenn $1 + z_K = \Omega_K/\Omega_0$ und dem von der kosmologischen Konstante, wenn $1 + z_\Lambda = (\Omega_\Lambda/\Omega_0)^{1/3}$. Da das Potential innerhalb einer Expansionsphase zerfällt, kommt es darauf an welche Gleichheit zuerst erreicht wird. Wir definieren daher $z_{K\Lambda} = \max[z_K, z_\Lambda]$. Für adiabatische Modelle zerfällt das Potential für Moden, die den akustischen Horizont zwischen dem kinetischen Ausfrieren bei z_* und $z_{K\Lambda}$ kreuzen. Das hieraus resultierende Maximum der Mode liegt etwa einen Faktor Fünf über den Sachs-Wolfe-Plateau. Allerdings ist der Effekt für den Zerfall von Über- und Unterdichten entgegengesetzt und kann sich sogar wegheben, wenn Photonen ein Vielfaches ihrer Wellenlänge während des Zerfalls zurücklegen können. Der Effekt ist also innerhalb des Horizontes unterdrückt, wenn zum Zeitpunkt des Zerfalls $k > k_{K\Lambda}$ gilt. Für ein festgehaltenes Ω_0 findet die Zerfallsepoche in flachen kosmologischen Modellen ($\Omega_K = 0$) viel später als in offenen Modellen ($\Omega_\Lambda = 0$) statt. Folglich hinterläßt der Effekt für Modelle mit kosmologischer Konstanten eine Signatur auf viel größeren Skalen als in offenen Modellen (Hu und Sugiyama, 1995b). Wir erwarten also eine Charakteristik im CMB bei $l_{K\Lambda}$, die in einem flachen Universum zur Bestimmung von Ω_Λ oder zur Bestimmung von Ω_K in einem offenen Universum benutzt werden kann (Sugiyama und Silk, 1994).

Experimente zu Anisotropien im CMB präsentieren ihre Daten meistens derart, daß sie die Stärke der Multipole angeben, die bei der Entwicklung von $\langle\theta(\eta, \mathbf{x}, \gamma)\theta(\eta, \mathbf{x}, \gamma')\rangle$ nach Legendre-Polynomen auftreten. Diese Stärke wird gewöhnlich mit C_l bezeichnet und repräsentiert die Stärke der Temperatur-Fluktuationen auf Winkelskalen $l \sim \theta^{-1}$. Akurate numerische Rechnungen für die Stärke der Multipole in den Fluktuationen als Funktion von l existieren seit 1981 (Wilson und Silk, 1981; Bond und Efstathiou, 1984; Vittorio und Silk, 1984). Wir diskutieren hier nur die groben Sachverhalte, um die zugrunde liegende Physik herauszustreichen, siehe Abbildung 1.1.

Die Stärke der Multipole in $\langle\theta(\eta, \mathbf{x}, \gamma)\theta(\eta, \mathbf{x}, \gamma')\rangle$ weist Charakteristiken auf, die mit den oben diskutierten physikalischen Skalen k_{char} zusammenhängen. Jede bekannt

physikalische Skala fungiert dabei als Maßstab, der mittels $l_{\text{char}} = k_{\text{char}}d$ mit dem Beobachtungswinkel in Verbindung gebracht werden kann. d ist der zum Winkeldurchmesser gehörende Abstand und hängt von K und $\eta_0 - \eta_{\text{char}}$ ab.

Die vier Skalen $l_{\Lambda K}$, l_{eq} , l_A und l_D bilden eine Art fundamentaler Basis für das Spektrum der Temperatur-Fluktuationen. Die ersten beiden Skalen bezeugen die unterschiedliche Entwicklung des Potentials in den jeweils von Strahlung, Materie und Krümmung oder Λ dominierten Epochen. Sie definieren eine Einhüllende der durch den Zerfall von lokalen Potentials erzeugten Anisotropien. Die exakte Form dieser Einhüllenden variiert mit dem verwendeten Modell, weist aber generell die zwei fundamentalen Skalen auf.

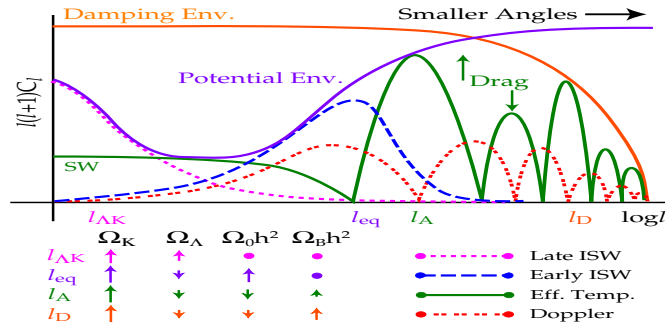


Abbildung 1.1: Anisotropie-Spektrum. Stärke C_l der Multipole in den Anisotropien pro logarithmisches Intervall $l \sim \theta^{-1}$. Die Zerlegung der Anisotropien in unterschiedliche physikalische Effekte erlaubt die Bestimmung von vier fundamentalen Skalen: $l_{\Lambda K}$ und l_{eq} schließen das Sachs-Wolfe-Plateau (SW) im Potential ein, l_A liefert den Abstand zwischen akustischen Über- und Unterdichten, und l_D ist die charakteristische Skala, auf der sich die exponentielle Dämpfung durch Photon-Diffusion bemerkbar macht. Die Abbildung dient nur zur Illustration. Die vier charakteristischen Skalen können zur Bestimmung der vier fundamentalen kosmologischen Parametern $\Omega_K \equiv 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_0$, Ω_Λ , $\Omega_0 h^2$ und $\Omega_B h^2$ kombiniert werden. Der Einfang von Baryonen verstärkt alle von Überdichten erzeugten Maxima der akustischen Oszillationen und kann zur Bestimmung des Spektrums auf der kinetischen Ausfrierfläche und zur Bestimmung von $\Omega_B h^2$ herangezogen werden.

Im adiabatischen Fall setzt sich die Einhüllende aus drei wohlunterschiedenen Beiträgen zusammen: einem durch den späten ISW generierten Abfall, dem Sachs-

Wolfe–Plateau und den durch den frühen ISW generierten Anstieg. Akustische Anregungen erzeugen Oszillationen mit dem durch l_A definierten Abstand. Photon–Diffusion induziert auf der charakteristischen Skala l_D eine exponentielle Dämpfung der Fluktuationen, die praktisch unabhängig von den Anfangsbedingungen ist.

Für das Standard–Modell der Kosmologie und einem Universum mit einem Teilcheninhalt bestehend aus Baryonen, Photonen, kalte Dunkle Materie (CDM) und Neutrinos, können die vier fundamentalen Skalen so kombiniert werden, daß die vier fundamentalen kosmologischen Parameter Ω_K , Ω_Λ , $\Omega_0 h^2$ und $\Omega_B h^2$ bestimmt werden können (Hu und Sugiyama, 1995b; Bond et al., 1994; Seljak, 1994; Jungman et al., 1995). Da $\Omega_0 = 1 - \Omega_K - \Omega_\Lambda$ kein unabhängiger Parameter ist, kann außerdem die Konstante h aus den Messungen bestimmt werden.

Der Abstand l_A zwischen den akustischen Extrema hängt nur schwach von den anderen Parametern ab und liefert zugleich die charakteristischste Eigenschaft des Spektrums. Die Messung von l_A ist daher zur Bestimmung von Ω_K prädestiniert. Die dramatische Änderung in der Potential–Einhüllenden auf der Skala l_{eq} bietet eine sensitive Möglichkeit zur akuraten Bestimmung von $\Omega_0 h^2$. Insbesondere ist das Verhältnis l_{eq}/l_A nahezu unabhängig von Ω_K und Ω_Λ und nur schwach von $\Omega_B h^2$ abhängig und erlaubt so, $\Omega_0 h^2$ zu isolieren. Die Höhen von aufeinanderfolgenden Maxima liefern ein Maß für den Baryoneninhalt multipliziert mit dem Potential auf der kinetischen Ausfrierfläche. Um Ψ_* zu extrahieren, kann das Verhältnis von l_A/l_D herangezogen werden, das unabhängig von Ω_K und Ω_Λ ist und nur schwach von $\Omega_0 h^2$ abhängt und daher die Messung von $\Omega_B h^2$ erlaubt.

Zur Zeit haben 19 Experimente ihre Messung der Temperatur–Fluktuationen im CMB beendet. Davon waren sechs Ballon–Experimente, zwölf bodengestützte Experimente und ein Satelliten–Experiment (COBE). Im Moment nehmen zehn Experimente Daten auf bzw. analysieren ihre Rohdaten. Darunter sind vier Ballon–Experimente (unter ihnen BOOMERanG, MAXIMA und ARCHEOPS), fünf bodengestützte Experimente (z. B. DASI) und ein Satelliten–Experiment (MAP). Geplant sind weitere Experimente, unter denen das dritte Satelliten–Experiment (PLANCK) eine Schlüsselrolle einnimmt.

Die Bestimmung von Ω_M aus dem Verhältnis $\langle M/L \rangle$ oder aus dem Verhältnis M/M_B in Clustern wird durch die Vermessung der CMB–Anisotropien hervorragend ergänzt. Ein weiterer Typus von Experimenten bestimmt Ω_M aus dem Spektrum von Überdichten, die sich aus der gemessenen Galaxienverteilung ergeben. Das Spektrum hängt wesentlich von den beiden kosmologischen Parametern Ω_M und Ω_B/Ω_M ab. Die im Moment erfolgreichste Bestimmung von Ω_M auf diese Art benutzt die 2dFGRS (2-degree Field Galaxy Redshift Survey) Erhebung (Percival et al., 2000), in der die Rotverschiebungen von 160000 Galaxien gemessen wurde. Resultate (Szalay et al., 2001; Dodelson et al., 2002) vom SDSS (Sloan Digital Sky Survey) sind konsistent mit denen aus dem 2dFGRS gewonnen Parametern.

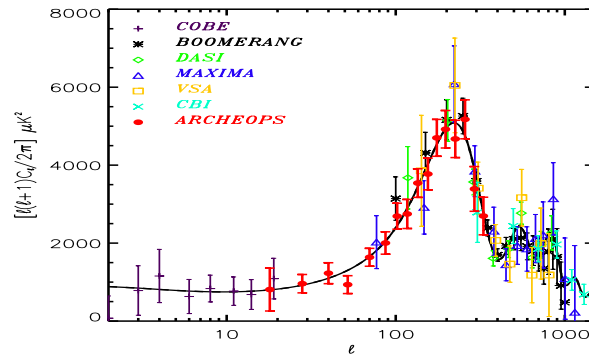


Abbildung 1.2: Anisotropie-Spektrum. Von COBE, BOOMERANG, DASI, MAXIMA, VSA, CBI und ARCHEOPS gemessene Stärke C_l der Multipole in den Anisotropien. Die Kurve gehört zu einem Λ CDM-Modell mit $\Omega_0 = 1.0$, $\Omega_\Lambda = 0.7$, $\Omega_B h^2 = 0.02$ und $h = 0.665$ (Benoit et al., 2002).

Die Bestimmung von kosmologischen Dichteparametern aus den oben diskutierten Experimenten ist in der folgenden Tabelle zusammengefaßt (Turner, 2001):

Cluster	$\Omega_B/\Omega_M = (0.07 \pm 0.007)h^{-3/2}$ (Röntgenspektren)
	$\Omega_B/\Omega_M = (0.08 \pm 0.01)h^{-1}$ (Sunyaev-Zel'dovich)
BBN	$\Omega_B h^2 = 0.020 \pm 0.001$
CMB-Anisotropien	$\Omega_M h = 0.16 \pm 0.04$
	$\Omega_B h^2 = 0.022^{+0.004}_{-0.003}$
Überdichten-Spektrum	$\Omega_M h = 0.20 \pm 0.03$
	$\Omega_B/\Omega_M = 0.15 \pm 0.07$
Hubble-Konstante	$h = 0.72 \pm 0.07$

Das Baryon-zu-Materie-Verhältnis in Clustern kann aus den Röntgenspektren der Cluster und außerdem aus dem Sunyaev-Zel'dovich-Effekt (SZ) im CMB kombiniert

mit Röntgenspektren bestimmt werden. Turner (2001) benutzt für die erst genannte Variante die in (Mohr et al., 1998) aufgeführten 45 Cluster zur Bestimmung des Baryon-Anteils in Clustern, und für die SZ-Variante kombiniert mit Röntgenspektren die in (Grego et al., 2001) aufgeführten Cluster. Eine systematische Fehlerquelle liegt hier in der möglichen Überschätzung der Gasmengen in den Clustern. Auch ist die Gasdynamik in Clustern nicht hinreichend gut verstanden.

Die präziseste Bestimmung der Baryondichte im Universum stammt von Experimenten zur Messung des primordialen Deuterium-zu-Wasserstoff-Verhältnisses (O’Meara et al., 2001), kombiniert mit Rechnungen zur Abundanz von leichten Elementen (Burles et al., 2001). Der in der Tabelle angegebene Wert von $\Omega_B h^2$ stammt von (Burles et al., 2001). Für stärkere Aussagen wäre es wichtig, verlässlichere Werte über das primordiale Vorkommen von ^4He und ^7Li zu kennen und diese mit der durch das primordiale Vorkommen von Deuterium bestimmten Baryonen-Dichte zu vergleichen. Die Präzision und Verlässlichkeit der im Standard-BBN-Szenario vorhergesagten Baryon-Dichte wird in Zukunft durch die Beobachtung von neuen Deuterium-Systemen verbessert werden.

Wir haben bereits ausführlich diskutiert, wie die akustischen Maxima in den CMB-Anisotropien die relevanten kosmologischen Dichteparameter festlegen: die Höhe des ersten Maximums gibt über die gesamte Materiedichte Auskunft und das Verhältnis von geraden und ungeraden Maxima fixiert die Baryondichte (Hu et al., 1997). Die in der Tabelle gezeigten Dichten folgen aus den von DASI innerhalb des ersten Jahres gewonnenen Daten (Pryke et al., 2002). Die vom Ballon-Experiment Boomerang 1998 gemessenen Daten liefern ähnliche Werte für die Dichteparameter (Netterfield et al., 2002). Die Satelliten-Experimenten MAP und Planck werden in Punkto Präzision alle Vorgänger-Experimente zu CMB-Anisotropien bei weitem übertreffen.

Die Hubble-Konstante h ist wichtig für die Transformation von physikalischen Dichten auf Verhältnisse dieser Dichten zur kritischen Dichte. Der in der Tabelle angegebene Wert stammt von dem *Hubble Space Telescope Key Project* (Freedman et al., 2001), das H_0 auf extragalaktischen Abstandsskalen mit einem Fehler von $\pm 10\%$ bestimmen will. Der statistische Fehler wird mit nur $\sigma_h = \pm 0.02$ angegeben, der systematische Fehler stammt hauptsächlich von Unsicherheiten in der Abstandsbestimmung zur Großen Magellanschen Wolke.

Die Konsistenz zwischen den Daten unterschiedlicher Experimente zur Bestimmung der physikalischen Baryon-Dichten ist beeindruckend. Dieser Dichteparameter wird aus der BBN, den CMB-Anisotropien und dem Spektrum der Dichtefluktuationen (LSS) bestimmt:

	$\Omega_B h^2$
BBN	0.020 ± 0.001
CMB	$0.022^{+0.004}_{-0.003}$
LSS	0.022 ± 0.011

Aus den Daten folgt eine Baryon-Dichte von $\rho_B \approx 4 \times 10^{-21} \text{ g cm}^{-3}$. Die Konsistenz der Daten ist deshalb so beeindruckend, weil die den unterschiedlichen Experimenten zu Grunde liegende Physik so unterschiedlich ist: Kernreaktionen als das Universum einige Sekunden alt war, gravitativ getriebene akustische Oszillationen als das Universum etwa 10^5 Jahre alt war, und die Inhomogenitäten in der heute beobachteten Materieverteilung.

Die Konsistenz der Daten zur Bestimmung des Materie-zu-Baryon-Verhältnisses ist ebenfalls überzeugend:

	Ω_M/Ω_B
Cluster (Röntgenspektren)	8.7 ± 1.6
Cluster (SZ)	9.0 ± 1.4
CMB	7.2 ± 2.1
LSS	6.7 ± 3.1

Die Messungen zur Bestimmung des Verhältnisses Ω_M/Ω_B sind also auch konsistent und wiederum nutzen die Experimente ganz unterschiedliche physikalische Effekte: Dynamik von Clustern, gravitativ getriebene akustische Oszillationen, und Inhomogenitäten in der Materieverteilung.

Aus den hier gegebenen Werten konstruiert Turner (2001) die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Ω_M , Ω_B und h . Mit $1 - \sigma$ -Konfidenz folgt daraus

Ω_B	$=$	0.039 ± 0.0075
Ω_M	$=$	0.33 ± 0.035
h	$=$	0.69 ± 0.06

Der Wert für den Baryon-Anteil rührt hauptsächlich von BBN und H_0 . Aus diesen Informationen alleine folgt $\Omega_B = 0.0385 \pm 0.0077$. Genauso folgt der Wert für die Hubble-Konstante aus seiner direkten Messung.

Mit den neuen Satelliten-Experimenten Planck und MAP werden sich die Präzision und Robustheit dieser Werte signifikant verbessern. Durch diese Experimente wird die Unsicherheit in $\Omega_B h^2$ und $\Omega_M h^2$ auf den Prozentbereich reduziert (Eisenstein et al., 1999). Die Analysen der Daten von Experimenten zur Cluster-Dynamik und den heute beobachteten Inhomogenitäten in der Materieverteilung werden sich mindestens um einen Faktor zwei verbessern.

Der Wert der Materiedichte alleine hat wichtige und interessante Konsequenzen (Turner, 2001). Erstens, kombiniert mit der Bestimmung von $\Omega_0 = 1 \pm 0.05$ (Hannay et al., 2000; Netterfield et al., 2002; Pryke et al., 2002) aus den CMB-Anisotropien folgt die Existenz einer weiteren zu Ω_0 beitragenden Komponente, die *Dunkle Energie* genannt wird und homogen mit $\Omega_X = 0.67 \pm 0.06$ im Universum verteilt ist. Dies

unterstützt die direkte Evidenz für Dunkle Energie aus den Supernovae–Beobachtungen (Perlmutter et al., 1999; Riess et al., 1999). Zweitens, der Wert für Ω_M ist um einen Faktor zwei größer, als der aus den Masse–zu–Licht–Verhältnissen in Clustern bestimmte, $\Omega_M = 0.19 \pm 0.04$ (Carlberg et al., 1997) und $\Omega_M = 0.16 \pm 0.05$ (Bahcall et al., 2000). Das bedeutet, daß Baryonen in Cluster doppelt soviel Licht produzieren wie Baryonen im Feld. Daraus folgt, daß der Anteil von Baryonen in Sternen doppelt so groß ist. Der SDSS wird das Masse–zu–Licht–Verhältnis für 10^6 Feld–Galaxien durch schwache Gravitationslinsen–Effekte bestimmen und damit diese Hypothese durch eine verlässliche Abschätzung von $\langle M/L \rangle$ überprüfen.

Die letzten fünf Jahre haben große Fortschritte in unserer Kenntnis der grundsätzlichen Eigenschaften unseres Universum gebracht. Wir wiederholen nochmal die für die weitere Diskussion wichtigsten Argumente. Das Universum ist flach und hat eine kritische Energiedichte von $\rho_{\text{krit}} = 3(H_0 M_{\text{Pl}})^2/8\pi \approx 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$. Es expandiert beschleunigt und bremst nicht ab. Die gesamte Energiedichte setzt sich prozentual folgendermaßen zusammen:

- ① Leuchtende Sterne: 0.5%
- ② Baryonen (gesamt): $(4 \pm 1)\%$
- ③ Nichtbaryonische Materie: $(29 \pm 4)\%$
- ④ Neutrinos: mindestens 0.1% und höchstens 5%.
- ⑤ Dunkle Energie: $(66 \pm 6)\%$
- ⑥ CMB: 0.005%

Es folgt, daß fast 90% der Materie nicht in Baryonen und damit in einer bisher unbekannt Form vorliegt. Diese Schlußfolgerung wird durch ein weiteres, allerdings indirektes Argument unterstützt: **ohne nicht–baryonische Dunkle Materie ist kein Modell für Strukturbildung bekannt, das ausgehend von den durch die gemessenen CMB-Anisotropien induzierten Inhomogenitäten in der Materieverteilung die heute beobachtbaren gravitativen Strukturen im Universum erklären kann.**

Unter Dunkler Materie verstehen wir Materie, deren Existenz im Universum **nur** indirekt durch ihre gravitative Wechselwirkung mit sichtbarer Materie nachgewiesen wurde. Es werden zwei Kategorien von Dunkler Materie unterschieden:

- ☞ Dunkle Materie, die aus nicht sichtbaren Baryonen (einschließlich der Schwarzen Löcher, die den Endzustand eines kollabierenden Sternes darstellen) besteht, heißt **baryonische Dunkle Materie**.

- ☞ Dunkle Materie, die aus massiven Neutrinos oder bisher nicht beobachteten Teilchen oder Felder (einschließlich primordialer Schwarzer Löcher) besteht, heißt **nicht-baryonische Dunkle Materie**.

Die Klassifikation von nicht-baryonischer Dunkler Materie wird weiter verfeinert

- ☞ Nicht-baryonische Dunkle Materie, die zum Zeitpunkt, als der Horizont des Universums ausreichend Materie zur Bildung einer Galaxie umfaßte, relativistisch war, heißt **heiße Dunkle Materie** (HDM, für *hot dark matter*).
- ☞ Nicht-baryonische Dunkle Materie, die zum Zeitpunkt, als der Horizont des Universums ausreichend Materie zur Bildung einer Galaxie umfaßte, nicht-relativistisch war, heißt **kalte Dunkle Materie** (CDM, für *cold dark matter*).

Seit 20 Jahren gibt es eine starke Hypothese: der Großteil dieser *Dunklen Materie* liegt in Form von stabilen oder langlebigen Teilchen vor. Die vielversprechendsten Teilchen-Kandidaten sind eine oder mehrere leichte Neutrinos, Axionen und das leichteste Neutralino.

SuperKamiokande (SuperK) (Fukuda et al., 1999; Fukugita, 2000) und das Sudbury Neutrino Observatory (SNO) (Ahmad et al., 2002a,b) haben in ihren Experimenten eine starke Evidenz für Neutrino-Oszillationen gefunden. Zwei Massendifferenzen konnten identifiziert werden: $\Delta m_{12}^2 \approx 10^{-4} \text{ eV}^2$ (SNO) und $\Delta m_{23}^2 \approx 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ (SuperK). Experimente zu Neutrino-Oszillationen erlauben nur die Messung von Massendifferenzen, die absolute Massenskala kann nicht detektiert werden. Wird die Massen-Hierarchie $m_3 \gg m_2 \gg m_1$ angenommen, so ist $m_3 \approx 0.05 \text{ eV}$ und $m_2 \approx 0.01 \text{ eV}$ und damit $\Omega_\nu \approx 0.1\%$. Dies ist eine untere Schranke für den Beitrag der Neutrinos zur Gesamtenergie im Universum. Kosmologie hat schon lange ihr Urteil über Neutrinos und damit HDM gefällt. HDM kann die heute im Universum beobachtbaren gravitativen Strukturen nicht erklären. Selbst ein Anteil von $\Omega_\nu \approx 0.05$ führt zu inakzeptablen Defiziten in der Strukturbildung auf kleinen Skalen (Croft et al., 1999; Elgarov et al., 2002).

Kosmologie hat auch ihr Urteil über CDM gefällt. Das CDM-Szenario ist praktisch konkurrenzlos und das vielversprechendste Modell zur Strukturbildung auf großen Skalen. Die zwei führenden Teilchen-Kandidaten sind das Axion und das leichteste Neutralino. Das Axion ist ein sehr leichtes Teilchen mit einer Masse von $m \sim (10^{-6} - 10^{-5}) \text{ eV}$ und wurde ursprünglich zur Lösung des starken CP-Problems eingeführt. Es ist kalt, weil es als Bose-Einstein-Kondensat erzeugt wird und nur extrem schwach mit anderer Materie wechselwirkt. Das leichteste Neutralino ist in minimal supersymmetrischen Erweiterungen des Standard-Modelles (MSSM) oft das leichteste supersymmetrische Teilchen. Es liegt im $SU(2)_{EW} \times U(1)_Y$ -Sektor des MSSM und ist eine Linearkombination der fermionischen Partner der neutralen Eichbosonen des Standard-Modelles. Die Neutralino-Masse liegt im Bereich $m \sim (50 - 500) \text{ GeV}$.

Einführung in die vorliegende Arbeit

Die Wechselwirkung von Axionen und Neutralinos mit gewöhnlicher Materie ist so schwach, daß beide Teilchen-Kandidaten in Hinblick auf Strukturbildung im Universum als rein gravitativ wechselwirkende Teilchen angenommen werden können. Dies motiviert eine starke Hypothese: **Kosmologische Beobachtungen alleine können nicht zwischen Axion-CDM und Neutralino-CDM unterscheiden**, siehe z. B. (Turner, 2002). Diese Hypothese wird durch Arbeiten von Gurevich et al. (1997) unterstützt, wonach die ersten rein gravitativ gebundenen Neutralino-Wolken Massen haben müssen, die vergleichbar mit der mittleren Masse eines Axion-Cluster (Kolb und Tkachev, 1996) sind.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es zu zeigen, daß diese Hypothese falsch ist und verworfen werden muß. Wir werden analytisch beweisen, daß die minimale Masse der ersten rein gravitativ gebundenen CDM-Wolken um sechs Größenordnungen größer ist, als die von Kolb und Tkachev (1996) berechnete mittlere Masse eines Axion-Clusters.

Bevor wir die physikalischen Prozesse einführen, die die Existenz einer Massenschwelle erzwingen, wollen wir die Relevanz der vorliegenden Fragestellung diskutieren.

Simulationen zur Strukturbildung auf großen Skalen sind Lösungen des Vielteilchen-Problems mit rein gravitativer Zweiteilchen-Wechselwirkung in der klassischen Formulierung nach Newton. Es ist legitim festzustellen, daß solche Rechnungen hinsichtlich des vorhergesagten Masseanteils in der Halo konvergieren, jedoch in Hinblick auf die lokalen Überdichten keine Konvergenz erreicht wird (Moore et al., 1999; Pearce et al., 2000). Die kleinsten noch numerisch aufgelösten Substrukturen in einer simulierten CDM-Halo haben Massen von $m_{\text{res}} \sim (10^8 - 10^{10})M_{\odot}$. Wird die numerische Auflösung weiter erhöht, so zeigen sich immer kleinere Substrukturen. Numerisch kann keine kleinste Skala berechnet werden, unterhalb derer keine gravitative Strukturen mehr gebildet werden und trotzdem noch ein kosmologisch interessantes Volumen simulierbar wäre. Für die Existenz von Schwellen, unterhalb derer Strukturbildung nicht mehr wirksam ist, gibt es numerisch keine Evidenz, vielmehr scheint sich die Strukturbildung auf immer kleinere Skalen fortzusetzen.

Die genauere Kenntnis von Substrukturen in den Halos und der lokalen Überdichten sind essentiell für Experimente zur direkten² und indirekten³ Suche von CDM-Teilchen. Für Experimente zum direkten Nachweis von CDM-Teilchen folgt deren einfallende Stromdichte aus den lokalen Überdichten. Außerdem können diese Substrukturen als Gravitationslinsen für γ -ray bursts wirken (Gould, 1992; Stanek

²Zum Beispiel CDMS, CREST, DAMA, DRIFT I, EDELWEISS, GENIUS und GENIUS-TF, IGEX, ZEPLIN I.

³Zum Beispiel AMS, ANTARES, CELESTE, HESS, MACRO, MILAGRO, SuperK.

et al., 1993). Für Experimente zum indirekten Nachweis folgt die Stromdichte der Teilchen, die durch CDM–Annihilationen in den Halos entstehen (Bergström et al., 1998, 2001a,b).

Die vorliegende Fragestellung ist also relevant für numerische Simulationen zur Strukturbildung auf großen Skalen und für Experimente, die im Universum nach direkten und indirekten Signaturen für CDM–Teilchen suchen. Mit den hier vorgestellten Methoden wird es möglich sein, basierend auf mikroskopischen Rechnungen die richtigen Anfangsbedingungen für gravitative Strukturbildung zu bestimmen. Beiden Anwendungsschwerpunkten ist gemein, daß sie Strukturbildung auf kleinen Skalen ernst nehmen, die teilchenspezifische Signaturen tragen können und damit eine Unterscheidung der Teilchenkandidaten ermöglichen.

Eine solche teilchenspezifische Signatur ist die oben bereits erwähnte Massenschwelle, unterhalb derer keine gravitativen Strukturen mehr gebildet werden. Die kleinsten rein gravitativ gebundenen CDM–Wolken können im linearen Regime berechnet werden. Das lineare Regime überdeckte das chemische und kinetische Entkoppeln von CDM⁴ und den anschließenden Prozeß des freien Strömens der CDM–Teilchen auf Geodäten bishin zum nichtlinearen Regime, das durch lokale Überdichten gekennzeichnet ist, die wesentlich größer als die mittlere Hintergrunddichte sind.

Der kinetische Entkopplungsprozeß induziert Nichtgleichgewichtsprozesse in CDM, die sich kollektiv als Reibungsphänomene bemerkbar machen. Reibungsphänomene wie Volumenviskosität, Scherviskosität und Wärmeleitung können akustische Überdichten in CDM bishin zur vollständigen Absorption dämpfen. Ist in einer akustischen Störung eine Masse M gebunden, die kleiner als die durch die Reibungsphänomene induzierte Dämpfungsmasse M_d ist, so wird diese akustische Störung durch den lokalen Transport von Energie senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Störung ausgeschmiert. M_d setzt somit eine Schwelle, unterhalb derer gravitative Strukturbildung in CDM nicht möglich ist.

Nach dem letzten thermischen Kontakt von CDM mit dem Wärmebad, strömen die CDM–Teilchen frei auf Geodäten der Raum–Zeit. Dieser Prozeß ermöglicht einen freien Strom von Teilchen aus überdichten in unterdichte Regionen. Ein solcher Ausgleich dämpft die Amplituden der akustischen Störungen weiter, bis diese kollabieren und im nichtlinearen Regime Überdichten bilden, die viel größer als die mittlere Hintergrund–Dichte sind. Notwendige Bedingung dafür, daß eine akustische Störung bis zu diesem Zeitpunkt noch existiert ist, daß sie ausreichend Masse $M > M_{fs}$ in sich vereinigt. M_{fs} bezeichnet dabei die durch den Ausgleich minimal notwendige Masse. Unterhalb dieser Schwelle ist Strukturbildung nicht möglich.

Die beiden Schwellen sind nicht unabhängig. Das Spektrum von akustischen Störungen, die den kinetischen Entkopplungsprozeß überstehen liefert die Anfangsbedin-

⁴Wir konzentrieren uns hier auf CDM, die irgendwann im thermischen Gleichgewicht mit dem Wärmebad war.

gungen für das freie Strömen auf Geodäten. Wir erhalten so die Schwellen–Hierarchie $M \geq M_{\text{fs}} \geq M_{\text{d}}$. Aus der Existenz dieser Schwellen folgt, daß das Fourier–transformierte Spektrum von Überdichten für ausreichend große Impulse abgeschnitten ist. Damit wird zum ersten Mal die Beschreibung des Spektrums auf den kleinsten noch für die Strukturbildung sinnvollen Skalen möglich. Außerdem wird eine charakteristische Eigenschaft dieses Spektrums vorhergesagt, nämlich ein Schwellenimpuls k_{max} . Skalen mit Impulsen $k \sim k_{\text{max}}$ sind rein numerisch nicht zugänglich.

Neben der Kenntnis des Spektrums von Dichtekontrasten auf kleinsten Skalen wird in dieser Arbeit weiterhin gezeigt, daß die unterschiedlichen Teilchenkandidaten für CDM vom Standpunkt der Strukturbildung auf diesen Skalen sehr wohl unterschieden werden können. Da für die numerischen Simulationen lediglich die Zustandsgleichung der Teilchenkandidaten interessant sind und diese nach Definition die gleiche Zustandsgleichung besitzen, können numerische Simulationen keinesfalls unterschiedliche Teilchenkandidaten diskriminieren. Dies ist ein Vorteil der in dieser Arbeit vorgestellten Methode.

Gliederung der Arbeit

Kapitel I ist eine Einführung in die moderne Kosmologie oder genauer in die Präzisionskosmologie. Die Epoche Präzisionskosmologie ist untrennbar mit der kosmischen Hintergrundstrahlung verbunden. Deshalb beschäftigt sich ein großer Teil dieses Kapitels mit der Analyse der im CMB codierten Informationen. Es folgt eine ausführliche Diskussion der Bestimmung von Ω_{M} .

In Kapitel II ist die theoretische Grundlage dieser Arbeit, die Theorie der Nichtgleichgewichtsprozesse in sehr allgemeiner Weise dargelegt. Diese eher abstrakte Formulierung ist so allgemein, daß daraus die klassische kinetische Theorie und die Theorie der hydrodynamischen Prozesse deduziert werden können. Dies geschieht in Kapitel III und Kapitel IV.

Insbesondere wird im letzten Abschnitt von Kapitel IV die relativistische Formulierung von hydrodynamischen Prozessen unter Einbeziehung von schwach dissipativen Phänomenen vorgestellt. Hierbei wird eine geometrische Interpretation von dissipativen Prozessen gegeben, die sich im Folgenden als sehr fruchtbar erweisen wird.

In Kapitel V stellen wir den prominentesten Teilchenkandidaten für CDM vor, das leichteste Neutralino. Die Wechselwirkungen mit Fermionen des Standard–Modelles wird angegeben und die relevanten Wirkungsquerschnitte werden ausführlich in führender Ordnung in der elektroschwachen Kopplung berechnet. Es werden die Temperatur für die chemische und kinetische Entkopplung der Neutralinos vom Wärmebad berechnet. Schließlich wird in den Anhängen zu diesem Kapitel Supersymmetrie und die Konstruktion von renormierbaren supersymmetrische Eichtheorien ausführlich behandelt.

In Kapitel VI wird die Stärke der dissipativen Prozesse in CDM aus einem legitimen Vergleich der hydrodynamischen und der kinetischen Beschreibung berechnet. Der Vergleich ist nicht trivial, da in der kinetischen Beschreibung dissipative Prozesse nicht ausschließlich mit Lorentz-Tensoren in Verbindung gebracht werden können, die senkrecht zum adiabatischen Strom stehen. Die hier vorgestellte Methode gilt allgemein für jede Teilchenart, die sich von einem gegebenen Wärmebad kinetisch entkoppelt. Als Resultat erhalten wir die lokalen Transportkoeffizienten, die die Stärke der dissipativen Prozesse angeben.

In Kapitel VII wird die Absorption von akustischen Störungen behandelt. Die in Kapitel VI berechneten lokalen Transportkoeffizienten bestimmen die Dämpfung der Störungen während des kinetischen Entkopplungsprozesses. Außerdem wird die sich an den Entkopplungsprozess anschließende Dämpfung durch das frei Strömen von CDM-Teilchen auf Geodäten berechnet. Für beide Dämpfungsphänomene wird die minimale Masse berechnet, die in einer akustischen Störung beinhaltet sein muß, um nicht ausgeschmiert zu werden.

In Kapitel VIII fassen wir die Arbeit zusammen und präsentieren nochmals die wichtigsten Resultate der Arbeit. Dieses Kapitel kann auch als roter Faden durch die Arbeit genutzt werden. Wir beenden die Arbeit mit einem Ausblick auf sich anschließende Forschungsprojekte.

Literatur

- Ahmad, Q. R. et al., 2002a, *nucl-ex/0204008*
- Ahmad, Q. R. et al., 2002b, *nucl-ex/0204009*
- Bahcall, N., Lubin, L., und Dorman, V., 2000, *Astrophys. J.* **541**, 1
- Benoit, A. et al., 2002, *Astronomy und Astrophysics Letters*
- Bergström, L., Endsjö, J., und Gondolo, P., 1998, *Phys. Rev. D* **58**, 103519
- Bergström, L., Endsjö, J., und Gunnarson, C., 2001a, *Phys. Rev. D* **63**, 083515
- Bergström, L., Endsjö, J., und Ullio, P., 2001b, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251301
- Bond, J. R. und Efstathiou, G., 1984, *Astrophys. J. Lett.* **285**, L45
- Bond, J. R. et al., 1994, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 13
- Burles, S., Nollett, K. M., und Turner, M. S., 2001, *Astrophys. J.* **2001**, 1
- Carlberg, R. et al., 1997, *Astrophys. J.* **478**, 462
- Croft, R. A. C., Hu, W., und Dave, R., 1999, *Phys. Rev. Lett* **83**, 1092

- Dekel, A., Burnstein, D., und White, S. D. M., 1997, in N. Turok (ed.), *Critical Dialogues in Cosmology*, p. 175, WSPC, Singapore
- Dodelson, S. et al., 2002, *Astrophys. J.* **572**, 140
- Doroshkevich, A. und Zel'dovich, Y. B., 1978, *R. A. Sov. Astron.* **22**, 523
- Eisenstein, D., Hu, W., und Tegmark, M., 1999, *Astrophys. J.* **518**, 2
- Elgarov, O. et al., 2002, astro-ph/0204152, *Phys. Rev. Lett.* (in press)
- Faber, S. und Gallagher, J., 1979, *ARA&A* **17**, 135
- Freedman, W. et al., 2001, *Astrophys. J.* **553**, 47
- Freedman, W. L. et al., 1994, *Nature* **371**, 27
- Fukuda, Y. et al., 1999, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 2644
- Fukugita, M., 2000, in *Structure Formation in the Universe*, Proc. of the NATO ASI
- Gould, A., 1992, *Astrophys. J.* **386**, L5
- Grego, L. et al., 2001, *Astrophys. J.* **552**, 2
- Gurevich, A., Zybin, K. P., und Sirota, V. A., 1997, *Physics-Usppekhi* **40**, 869
- Hannay, S. et al., 2000, *Astrophys. J.* **545**, L5
- Hu, W. und Sugiyama, N., 1995a, *Astrophys. J.* **444**, 489
- Hu, W. und Sugiyama, N., 1995b, *Phys. Rev. D* **51**, 2599
- Hu, W., Sugiyama, N., und Silk, J., 1997, *Nature* **386**, 37
- Hu, W. und White, M., 1996, *Astrophys. J.* **471**, 30
- Jacoby, G. H. et al., 1992, *PASP* **104**, 599
- Jungman, G., Kamionkowski, M., Kosowski, A., und Spergel, D. N., 1995, *Astrophys. J.*
- Kamionkowski, M., Spergel, D. N., und Sugiyama, N., 1994, *Astrophys. J. Lett.* **434**, L1
- Kofman, L. A. und Starobinskii, A. A., 1985, *Sov. Astron. Lett.* **9**, 643
- Kolb, E. und Tkachev, I., 1996, *Astrophys. J.* **460**, L25
- Mohr, J. et al., 1998, *Astrophys. J.* **517**, 627

- Moore, B. et al., 1999, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **310**, 1147
- Netterfield, C. B. et al., 2002, *Astrophys. J.* **571**, 604
- O'Meara et al., 2001, *Astrophys. J.* **552**, 718
- Pearce, F. R. et al., 2000, astro-ph/0010587
- Penzias, A. A. und Wilson, R. W., 1965, *Astrophys. J.* **162**, 419
- Percival, W. J. et al., 2000, *Mon. Not. R. Astron. Sc.*
- Perlmutter, S., Turner, M. S., und White, M., 1999, *Phys. Rev. Lett* **83**, 76
- Primack, J., 2001, in D. Cline (ed.), *Sources and Detection of Dark Matter and Dark Energy in the Universe*, p. 3, Springer-Verlag, Berlin
- Pryke, C. et al., 2002, *Astrophys. J.* **568**, 46
- Riess, A. et al., 1999, *Astron. J.* **116**, 1009
- Sachs, R. K. und Wolfe, A. M., 1967, *Astrophys. J.* **147**, 73
- Seljak, U., 1994, *Astrophys. J. Lett.* **435**, L87
- Silk, J., 1968, *Astrophys. J.* **151**, 459
- Stanek, K. Z., Paczynski, B., und Goodman, J., 1993, *Astrophys. J.* **413**, L7
- Sugiyama, N. und Gouda, N., 1992, *Prog. Theor. Phys.* **88**, 803
- Sugiyama, N. und Silk, J., 1994, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 509
- Szalay, A. S. et al., 2001, astro-ph/0107419
- Turner, M. S., 2000, *Physica Scripta* **T85**, 210
- Turner, M. S., 2001, *Astrophys. J. Lett*
- Turner, M. S., 2002, in K. Sembach, J. Blades, G. Illingworth, und R. Kennicutt (eds.), *Hubble's Science Legacy: Future Optical-Ultraviolet Astronomy from Space*, ASP Conference Series
- Vittorio, N. und Silk, J., 1984, *Astrophys. J. Lett.* **285**, L39
- White, S. D. M. et al., 1993, *Nature* **366**, 429
- Wilson, M. und Silk, J., 1981, *Astrophys. J.* **243**, 14

–II–

STATISTISCHE ENSEMBLES FÜR DAS NICHTGLEICHGEWICHT

In diesem Kapitel formulieren wir die Statistische Mechanik für Vielteilchensysteme im Nichtgleichgewicht¹. Folgende Probleme sind hierbei von Relevanz:

- (1) Es muß ein allgemeines Prinzip zur Konstruktion von statistischen Ensembles für das Nichtgleichgewicht formuliert werden. Diese Ensembles beschreiben die *irreversible Entwicklung* von makroskopischen Systemen. Dazu muß die durch die Liouville-Gleichung beschriebene (reversible) mikroskopische Dynamik mit dem Konzept der maximalen Informations-Entropie als essentielles Prinzip der Thermodynamik in Verbindung gebracht werden.
- (2) Wir müssen eine Vorschrift zur Berechnung der Entropie und anderer thermodynamischer Größen von Nichtgleichgewichtssystemen erklären. Insbesondere muß gezeigt werden, daß die mit der Methode der statistischen Ensembles berechnete Entropie streng monoton wachsend ist.
- (3) Mit der Methode der statistischen Ensembles für das Nichtgleichgewicht sollten Prozessgleichungen für Observablen gefunden werden.

Der hier gewählte Zugang zur Theorie der Nichtgleichgewichtsprozesse basiert auf einer grundlegenden Eigenschaft makroskopischer Systeme, die in engem Zusammenhang mit der Instabilität der klassischen Phasenraum-Trajektorie $X(t) = (q(t), p(t))$ für Vielteilchensysteme steht. Ist die Problemstellung derart, daß wir uns für das Verhalten eines gegebenen Systems in einem nicht zu kleinen (noch zu spezifizierenden) Zeitintervall interessieren, so werden die Details des Anfangszustandes unwichtig und die Anzahl der für die Beschreibung des Systems notwendigen Parameter

¹Wir folgen hier (Zubarev et al., 1996). Die Grundzüge der Statistischen Mechanik von Vielteilchensystemen im Gleichgewicht werden in den Anhängen A und B diskutiert.

reduziert. Diese Idee der *reduzierten Beschreibung* von Vielteilchensystemen wurde von Bogoliubov (1962) vorgeschlagen und entwickelt, insbesondere zur Konstruktion von kinetischen Gleichungen aus der Liouville-Gleichung.

2.1 Relevante Statistische Ensembles

Die Gibbschen Ensembles erlauben die Herleitung aller thermodynamischer Relationen für Gleichgewichtssysteme. Wir werden nun die Gibbschen Ensembles so verallgemeinern, daß eine thermodynamische Beschreibung von Nichtgleichgewichtssystemen möglich wird. Diese verallgemeinerten Gibbschen Ensembles heißen *relevante Ensembles*. Zu ihrer Konstruktion werden wir das Prinzip der maximalen Informations-Entropie benutzen.

2.1.1 Reduzierte Beschreibung

Bevor wir mit der Konstruktion der relevanten Ensembles beginnen, erklären wir zunächst die wichtigsten Eigenschaften von Nichtgleichgewichtsprozessen aus der Perspektive der statistischen Mechanik.

Das Hauptproblem in der statistischen Mechanik von Nichtgleichgewichtsprozessen ist die Herleitung von kinetischen Gleichungen und thermodynamischen Relationen für Nichtgleichgewichtssysteme. Die beeindruckendste Eigentümlichkeit dieses Problems ist, daß wir *nicht-zeitumkehrinvariante* makroskopische Gleichungen aus der *zeitumkehrinvarianten* Liouville-Gleichung herleiten wollen. Das Paradoxe an diesem Vorgehen in der Theorie der irreversiblen Prozesse ist seit langem bekannt. In diesem Zusammenhang seien nur das Paradoxon von Loschmid (1876) und das Paradoxon von Zermelo (1896) genannt, die beide gegen das H-Theorem von Boltzmann in der kinetischen Theorie der Gase gesetzt wurden.

Ein möglicher Ausweg aus diesen und ähnlichen Paradoxien ist die Verwendung von sogenannten groben Verteilungsfunktionen. Kirkwood (1946) leitete so die Fokker-Planck-Gleichung für ein Brownsches Teilchen her und erhielt einen Ausdruck für den Reibungskoeffizient in Abhängigkeit vom Korrelator der Kräfte, die auf das Brownsche Teilchen vom Medium ausgeübt werden. Kirkwoods Methode beinhaltet bereits die wichtige Idee der *reduzierten Beschreibung* von Nichtgleichgewichtssystemen. Die von ihm verwendete Methode ist jedoch schwer auf andere Probleme der kinetischen Theorie und der Thermodynamik von Nichtgleichgewichtssystemen zu verallgemeinern. Wir folgen daher einem anderen Zugang, der die reduzierte Beschreibung auf einem Satz von Observablen aufbaut.

Die Möglichkeit der reduzierten Beschreibung makroskopischer Systeme im Nichtgleichgewicht ist eine empirische Tatsache, die wir zunächst durch ein paar illustrative Beispiele erhellen wollen, bevor wir ein allgemeines Schema formulieren.

Gegeben sei ein verdünntes (nicht-relativistisches) klassisches Gas aus N identischen Teilchen in einem konstanten Volumen V . Die detailreichste statistische Beschreibung eines solchen Systems ist durch die N -Teilchen Verteilungsfunktion gegeben, die wir folgendermaßen notieren: $\rho_N(q, p, t) = \rho_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$. In einem verdünnten Gas wird angenommen, daß der Wechselwirkungsradius r_0 viel kleiner als der mittlere Abstand zwischen zwei Teilchen ist, d. h.

$$nr_0^3 \ll 1, \quad (2.1)$$

wobei $n = N/V$ die durchschnittliche Teilchenzahldichte bezeichne. Diese Ungleichung erlaubt es, Prozesse mit verschiedenen Zeitskalen zu unterscheiden. Im folgenden listen wir solche Prozesse geordnet nach ihren korrespondierenden Zeitskalen auf, beginnend mit der kleinsten Zeitskala. Die erste Zeitskala ist durch die Kollisionszeit $\tau_0 = r_0/\langle v \rangle$ bestimmt, wobei $\langle v \rangle$ die mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens bezeichne. Eine zweite, größere Zeitskala ist durch die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Kollisionen bestimmt, $\tau_f = l_f/\langle v \rangle$, wobei l_f der mittlere freie Weg eines Teilchens sei. Eine dritte Zeitskala ist durch die Relaxationszeit τ_r gegeben. Die Relaxationszeit ist die Zeit, in der sich in einem Volumen, das viele Teilchen enthält, das aber vom makroskopischen Standpunkt aus betrachtet klein ist, ein lokales Gleichgewicht einstellt. Letztlich existiert eine charakteristische Zeitskala, die durch die Zeit τ_{eq} bestimmt ist, welche das System benötigt, um globales Gleichgewicht zu etablieren.

Aus der elementaren Kinetik ist bekannt, daß der mittlere freie Weg durch $l_f/R \sim 1/N(R/r_0)^2$ approximiert werden kann. Damit gilt $\tau_0 \ll \tau_f$. Es ist weiterhin $\tau_f \ll \tau_r$, da sich das lokale Gleichgewicht durch viele Kollisionen einstellt. Die letzte Ungleichung, $\tau_r \ll \tau_{\text{eq}}$ ist evident. Aus diesen Abschätzungen folgt, daß eine Hierarchie von weit auseinander liegenden Relaxationszeiten existiert, die folgende Ungleichungskette

$$\tau_0 \ll \tau_f \ll \tau_r \ll \tau_{\text{eq}} \quad (2.2)$$

erfüllen. Die angegebene Hierarchie erlaubt die Feststellung, daß der Equilibrierungsprozeß eines verdünnten Gases durch drei Stadien verläuft. Jedes Stadium ist durch ein charakteristisches Zeitintervall Δt bestimmt, das die Zeitskala darstellt, in der eine Zustandsänderung des Systems auftritt.

Das charakteristische Zeitintervall des *dynamischen Stadiums* ist durch $\Delta t \leq \tau_0$ bestimmt. Für die Beschreibung von Prozessen auf solch kleinen Skalen benötigen wir die vollständige N -Teilchen Verteilungsfunktion. In diesem Stadium ist eine reduzierte Beschreibung ausgeschlossen.

Das charakteristische Zeitintervall des *kinetischen Stadiums* ist durch $\tau_0 \ll \Delta t \ll \tau_r$ bestimmt. Es wird angenommen, daß das Vielteilchensystem adäquat durch die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ beschrieben werden kann, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Koordinaten und Impulse eines Teilchens festlegt.

Diese Funktion kann als Erwartungswert

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int d\Gamma_N \rho_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N, t) N_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) \quad (2.3)$$

der dynamischen Variablen

$$N_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv N_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_j), \quad (2.4)$$

definiert werden, die die Phasenraumdicke in einem 6-dimensionalen Raum, dem kartesischen Produkt des Ortsraums und des Impulsraums, darstellt. Die zeitliche Entwicklung des Gases im kinetischen Stadium ist durch

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \langle \dot{N}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle (t) \quad (2.5)$$

gegeben, wobei die Zeitableitung $\dot{N}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{N_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}), H\}$ durch die Poisson-Klammer $\{\cdot, \cdot\}$ generiert wird.

Für das Zeitintervall Δt mit $\tau_r \ll \Delta t \ll \tau_{\text{eq}}$ sind weitere Vereinfachungen der Beschreibung möglich, da das System lokales Gleichgewicht erreicht hat. Dieses Stadium heißt *hydrodynamisches Stadium*. Im hydrodynamischen Stadium ist das System durch die lokale Teilchenzahldichte $\langle n(\mathbf{r}) \rangle (t)$, die lokale Impulsdichte $\langle \mathbf{p}(\mathbf{r}) \rangle (t)$ und die lokale Dichte der (kinetischen) Energie $\langle H(\mathbf{r}) \rangle (t)$ beschrieben. Diese Größen sind Erwartungswerte der dynamischen Variablen

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad H(\mathbf{r}) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^N p_j^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (2.6)$$

und können aus den niedrigsten Momenten von $f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ berechnet werden:

$$\langle n(\mathbf{r}) \rangle (t) = \int d\mathbf{p} f_1, \quad \langle \mathbf{p}(\mathbf{r}) \rangle (t) = \int d\mathbf{p} \mathbf{p} f_1, \quad \langle H(\mathbf{r}) \rangle (t) = \frac{1}{2m} \int d\mathbf{p} p^2 f_1. \quad (2.7)$$

In dem hier betrachteten Fall eines verdünnten Gases können die hydrodynamischen Gleichungen, die die Zeitentwicklung des Nichtgleichgewichtszustandes bestimmen, aus der kinetischen Gleichung der Ein-Teilchen Verteilungsfunktion hergeleitet werden.

Letztlich, nach einer zur makroskopischen Relaxationszeit τ_{eq} vergleichbaren Zeit, erreicht das System globales Gleichgewicht. In diesem Stadium ist es alleine durch die durchschnittliche Teilchenzahldichte $n = N/V$ und die globale Temperatur T beschrieben.

Als nächstes wichtiges Beispiel betrachten wir eine Flüssigkeit. Für Flüssigkeiten ist die Kollisionszeit τ_0 von der gleichen Größenordnung wie die Zeit zwischen zwei

aufeinander folgenden Kollisionen τ_f . Daher kann das kinetische Stadium nicht diskriminiert werden, die hydrodynamische Beschreibung bleibt dagegen adäquat hinab bis zu einer Zeitskala vergleichbar mit der molekularen Wechselwirkungszeit. Der makroskopische Nichtgleichgewichtszustand des Systems wird durch Erwartungswerte $\langle P_m(\mathbf{r}) \rangle(t)$ der dynamischen Variablen $\{P_m(\mathbf{r})\} = \{n(\mathbf{r}), \mathbf{p}(\mathbf{r}), H(\mathbf{r})\}$ beschrieben, die zu den lokalen Erhaltungsgrößen Teilchenzahldichte, Impulsdichte und Energiedichte gehören. Im Gegensatz zu verdünnten Gasen beinhaltet die dynamische Variable $H(\mathbf{r})$ für Flüssigkeiten und dichte Gase auch die Dichte der potentiellen Energie aufgrund der Wechselwirkungen.

Da die lokalen dynamischen Variablen $P_m(\mathbf{r})$ Dichten von erhaltenen Größen sind, können ihre Prozeßgleichungen in die Form

$$\dot{P}_m(\mathbf{r}) = \{P_m(\mathbf{r}), H\} = -\operatorname{div} j_m(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

gebracht werden, wobei die lokalen dynamischen Variablen $j_m(\mathbf{r})$ die zugehörigen Flußdichten sind. Die Prozeßgleichungen für die Erwartungswerte sind dann Bilanzgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m(\mathbf{r}) \rangle(t) = -\operatorname{div} \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle(t), \quad (2.9)$$

die als Ausgangspunkt für die Herleitung der hydrodynamischen Gleichungen genommen werden können.

Wir skizzieren nun das allgemeine Schema für die reduzierte Beschreibung von makroskopischen Systemen im Nichtgleichgewicht. Wir nehmen an, daß die reduzierte Beschreibung eines Systems durch bestimmte observable makroskopische Größen gegeben ist. Diese sind Erwartungswerte

$$\langle P_m \rangle(t) = \operatorname{Sp}(\rho(t)P_m) \quad (2.10)$$

von sogenannten *relevanten dynamischen Variablen* P_m bezüglich der Nichtgleichgewichtsverteilung $\rho(t)$, wobei $\rho(t)$ Lösung der Liouville-Gleichung (siehe Anhang A) sei. Das Phasenraum-Integral ist hier und im folgenden mit Sp bezeichnet. In den oben betrachteten Beispielen ist $\{P_m\} = N_1(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ für das verdünnte Gas, also in der klassischen kinetischen Theorie und $\{P_m\} = \{n(\mathbf{r}), \mathbf{p}(\mathbf{r}), H(\mathbf{r})\}$ für Flüssigkeiten, also in der Hydrodynamik.

Die Zeitentwicklung des makroskopischen Nichtgleichgewichtszustandes ist durch die Prozeßgleichungen der Observablen bestimmt, d. h. durch die *verallgemeinerten kinetischen Gleichungen*. Diese Gleichungen ergeben sich aus den Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m \rangle(t) = \operatorname{Sp}(\rho(t)\dot{P}_m) = \operatorname{Sp}(\rho(t)\{P_m, H\}) . \quad (2.11)$$

Es ist wichtig zu bemerken, daß die Gleichungen (2.11) nur dann als ein geschlossenes System von Prozeßgleichungen interpretiert werden können, wenn die Lösung

der Liouville-Gleichung bekannt ist. Diese Lösung ist ein Funktional der makroskopischen Observablen. Im allgemeinen kann der Nichtgleichgewichtszustand zur Zeit t von der Geschichte des Systems abhängen. Für das zu bestimmende Funktional gilt dann

$$\rho(t) = \rho \left[\{ \langle P_m \rangle(\tilde{t}) \} \right], \quad \forall \tilde{t} \leq t. \quad (2.12)$$

Ist eine Lösung der Liouville-Gleichung bekannt, so erhalten wir aus (2.11) die verallgemeinerten kinetischen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m \rangle(t) = \mathcal{F}_m \left[\{ \langle P_n \rangle(\tilde{t}) \} \right], \quad \forall \tilde{t} \leq t, \quad (2.13)$$

wobei \mathcal{F}_m ein Funktional der makroskopischen Observablen bezeichne.

Für den Fall, daß Gedächtniseffekte keine Rolle spielen, finden wir die *Markov-Transport-Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m \rangle(t) = \mathcal{F}_m \left[\{ \langle P_n \rangle(t) \} \right]. \quad (2.14)$$

Hierbei ist wichtig, daß die Zeit-Ableitung der Observablen zu einem Zeitpunkt durch die Werte aller Observablen zum selben Zeitpunkt bestimmt sind².

Das skizzierte allgemeine Schema zur reduzierten Beschreibung von Nichtgleichgewichtsprozessen beinhaltet zwei wichtige Aspekte:

- (1) Der makroskopische Nichtgleichgewichtszustand ist bestimmt durch eine Menge von Observablen, die Erwartungswerte $\langle P_m \rangle(t)$ von bestimmten dynamischen Variablen P_m sind. Diese Variablen ergeben die reduzierte Beschreibung des Systems auf einer gegebenen Zeitskala. Die Existenz von unterschiedlichen Zeitskalen stammt von der Hierarchie grundsätzlicher Relaxationszeiten in makroskopischen Systemen.
- (2) Um ein abgeschlossenes System von verallgemeinerten Prozeßgleichungen für Observablen zu erhalten, ist es notwendig eine spezielle Lösung der Liouville-Gleichung zu berechnen. Diese wird ein Funktional der Observablen sein.

2.1.2 Relevante Statistische Verteilungen

Die Nichtgleichgewichtsverteilung $\rho(t)$ ist durch die vorgegebenen Erwartungswerte $\langle P_m \rangle(t)$ nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr existieren viele Verteilungen, die die

²Für gewöhnlich ist dies der Fall, wenn die Menge $\{P_m\}$ alle dynamischen Variablen enthält, die auf der betrachteten Zeitskala nur wenig variieren. Wenn die Menge $\{\langle P_m \rangle(t)\}$ vollständig ist im Hinblick auf die Beschreibung des Nichtgleichgewichtszustandes des Systems, dann sollten die Änderungsraten der Observablen zu einem Zeitpunkt durch ihre Werte zu diesem Zeitpunkt bestimmt sein. Mit anderen Worten, die makroskopischen Prozeßgleichungen sollten Markov-Gleichungen sein.

gleichen Observablen liefern. Wir interessieren uns im folgenden für die Verteilung, die zum Maximum der Informations-Entropie (siehe Anhang B) für gegebene Erwartungswerte $\langle P_m \rangle(t)$ korrespondiert.

Sei $\tilde{\rho}(t)$ eine Test-Verteilung mit

$$\langle P_m \rangle(t) = \text{Sp} (\tilde{\rho}(t) P_m) , \quad \text{Sp} \tilde{\rho}(t) = 1 . \quad (2.15)$$

Wir suchen das Maximum der Informations-Entropie unter den gegebenen Nebenbedingungen. Dazu bestimmen wir das globale Extremum des Funktionals

$$\mathcal{S} [\tilde{\rho}(t)] = -\text{Sp} (\tilde{\rho}(t) \ln \tilde{\rho}(t)) - \sum_m F_m(t) \text{Sp} (\tilde{\rho}(t) P_m) - \lambda(t) \text{Sp} \tilde{\rho}(t) , \quad (2.16)$$

wobei $F_m(t)$ und $\lambda(t)$ zeitabhängige Lagrange-Multiplikatoren sind. Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums ist, daß die Variation von $\mathcal{S} [\tilde{\rho}(t)]$ nach $\tilde{\rho}(t)$ verschwindet. Wir erhalten daraus die extremale Verteilung

$$\rho_{\text{rel}} = \exp \left(-\Phi(t) - \sum_m F_m(t) P_m \right) , \quad (2.17)$$

die im weiteren *relevante Verteilung* genannt wird.

Die *Massieu-Planck-Funktion*, $\Phi(t) = 1 + \lambda(t)$, ist durch die Normierungsbedingung für die relevante Verteilung gegeben und hat die Form

$$\Phi(t) = \ln \text{Sp} \left[\exp \left(- \sum_m F_m(t) P_m \right) \right] . \quad (2.18)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren $F_m(t)$ ergeben sich aus den Selbstkonsistenz-Bedingungen

$$\langle P_m \rangle(t) = \langle P_m \rangle_{\text{rel}}(t) \equiv \text{Sp} (\rho_{\text{rel}}(t) P_m) . \quad (2.19)$$

Wie bereits erwähnt werden die $\langle P_m \rangle(t)$ als vorgegeben angenommen.

Die relevante Verteilung (2.17) beschreibt das verallgemeinerte Gibbsche Ensemble, deshalb auch *relevante Ensembles* genannt, für die die Erwartungswerte der relevanten Variablen mit den wahren makroskopischen Observablen des Nichtgleichgewichtssystems übereinstimmen. Wegen der Selbstkonsistenz-Bedingungen, können die Lagrange-Multiplikatoren $F_m(t)$ und die Massieu-Planck-Funktion durch die Observablen $\langle P_m \rangle(t)$ ausgedrückt werden. Damit ist die relevante Verteilung ein Funktional der Observablen

$$\rho_{\text{rel}}(t) = \rho_{\text{rel}} [\{ \langle P_m \rangle(t) \}] , \quad (2.20)$$

d. h. , diese Verteilung ist von der Form (2.12), wie es für Nichtgleichgewichtsverteilungen auch sein muß.

Es ist wichtig zu bemerken, daß $\rho_{\text{rel}}(t)$ **nicht die korrekte mikroskopische Beschreibung von Nichtgleichgewichtsprozessen liefert, da $\rho_{\text{rel}}(t)$ im allgemeinen keine Lösung der Liouville-Gleichung ist.**

Trotzdem sind die Eigenschaften von Nichtgleichgewichtsverteilungen eng verwandt mit den Eigenschaften der relevanten Verteilung, so daß letztere als Ausgangspunkt für die Konstruktion von Lösungen der Liouville-Gleichungen genutzt werden können, die eine reduzierte Beschreibung des Systems liefern.

Das Konzept der relevanten Verteilung wird an drei wichtigen Beispielen in Anhang C illustriert.

2.1.3 Entropie und Thermodynamische Beziehungen in Relevanten Ensembles

Das relevante Ensemble und die zugehörige Verteilung erlauben es, thermodynamische Beziehungen auf Nichtgleichgewichtssysteme zu erweitern. Wie für den Gleichgewichtsfall identifizieren wir das Maximum der Informations-Entropie (siehe Anhang B) unter gegebenen Nebenbedingungen mit der thermodynamischen Entropie. Die zur relevanten Verteilung (2.46) gehörende Informations-Entropie ist

$$S(t) = - \text{Sp} (\rho_{\text{rel}}(t) \ln \rho_{\text{rel}}(t)) = \Phi(t) + \sum_m F_m(t) \langle P_m \rangle_{\text{rel}}(t) . \quad (2.21)$$

Mit den Selbstkonsistenz-Bedingungen (2.19) können wir $S(t)$ auch durch die gegebenen Observablen $\langle P_m \rangle(t)$ ausdrücken:

$$S(t) = \Phi(t) + \sum_m F_m(t) \langle P_m \rangle(t) . \quad (2.22)$$

Diese Beziehung benutzen wir zur Definition der Entropie von Nichtgleichgewichtssystemen. Wir definieren: *Gegeben sei ein makroskopisches System im Nichtgleichgewicht, welches durch eine Menge von Observablen $\{\langle P_m \rangle(t)\}$ reduziert beschrieben sei. Die thermodynamische Entropie eines solchen Systems soll (!) mit der Informations-Entropie in dem relevanten Ensemble übereinstimmen, das durch die Observablen $\{\langle P_m \rangle_{\text{rel}}(t)\}$ mit $\{\langle P_m \rangle_{\text{rel}}(t)\} = \{\langle P_m \rangle(t)\}$ reduziert beschrieben werde.*

Es ist üblich, die dynamische Variable

$$\hat{S}(t) = \Phi(t) + \sum_m F_m(t) P_m \quad (2.23)$$

einzuführen, die auch *Entropie-Operator* genannt wird. Der Name ist insofern berechtigt, als

$$\langle \hat{S}(t) \rangle_{\text{rel}}(t) = S(t) . \quad (2.24)$$

Mit dem Entropie-Operator läßt sich die relevante Verteilung (2.46) folgendermaßen notieren:

$$\rho_{\text{rel}}(t) = e^{-\hat{S}(t)} . \quad (2.25)$$

Wir zeigen im folgenden, daß die genannte Definition der Entropie für Nichtgleichgewichtssysteme sinnvoll ist, d. h. natürliche Erweiterungen von thermodynamischen Beziehungen auf Nichtgleichgewichtssysteme liefert. Wir betrachten gleich die allgemeine Situation, d. h. der Summationsindex kann sowohl diskret sein als auch kontinuierliche Werte annehmen. Die Summation über diesen Index ist dann eine echte Summe für den diskreten Indexbereich und ein Riemann-Integral für den kontinuierlichen Bereich. Außerdem kann der Summationsindex ein Multi-Index sein. Für Dichten von physikalischen Größen haben wir z.B. $P_m = P_i(\mathbf{r})$ und für die Lagrange-Multiplikatoren entsprechend. Weiterhin sind Ableitungen nach indexbehafteten Größen gewöhnliche partielle Ableitungen, falls der Index diskrete Werte annimmt und sonst Funktionalableitungen. Wir benutzen für solche Ableitungen zusammenfassend die für Funktionalableitungen übliche Notation.

Wir variieren beide Seiten von (2.18) bezüglich der $F_m(t)$, benutzen die Selbstkonsistenz-Bedingungen (2.19) und erhalten die Beziehungen

$$\langle P_m \rangle(t) = - \frac{\delta \Phi(t)}{\delta F_m(t)} . \quad (2.26)$$

Diese zeigen, daß die Massieu-Planck-Funktion als thermodynamisches Potential in den Lagrange-Multiplikatoren $\{F_m\}(t)$ interpretiert werden kann. Von diesem Standpunkt aus betrachtet, kann (2.22) als Verallgemeinerung der Legendre-Transformation auf Nichtgleichgewichtssysteme angesehen werden. Für die Variation von (2.22) finden wir mit den Beziehungen (2.26)

$$\delta S(t) = \sum_m F_m(t) \delta \langle P_m \rangle(t) , \quad (2.27)$$

woraus wegen der Unabhängigkeit der Variationen weiter folgt

$$F_m(t) = \frac{\delta S(t)}{\delta \langle P_m \rangle(t)} . \quad (2.28)$$

Aus den Beziehungen (2.26) und (2.28) folgt, daß die Lagrange-Multiplikatoren $F_m(t)$ und die Observablen $\langle P_m(t) \rangle$ thermodynamisch konjugierte Größen sind. Die zugehörigen *Gibbs-Helmholtz-Beziehungen* sind

$$\begin{aligned} S(t) &= \Phi(t) - \sum_m F_m(t) \frac{\delta \Phi(t)}{\delta F_m(t)} , \\ \Phi(t) &= S(t) - \sum_m \langle P_m \rangle(t) \frac{\delta S(t)}{\delta \langle P_m \rangle(t)} . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Im Gegensatz zur Gibbs-Entropie hängt die durch (2.22) definierte thermodynamische Entropie von der Zeit ab. Für die Zeitableitung der thermodynamischen Entropie erhalten wir mit den Beziehungen (2.28) und (2.29)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S(t) &= \sum_m \frac{\delta S(t)}{\delta \langle P_m \rangle(t)} \frac{\partial \langle P_m \rangle(t)}{\partial t} = \sum_m F_m(t) \frac{\partial \langle P_m \rangle(t)}{\partial t} \\ &= \sum_m F_m(t) \langle \dot{P}_m \rangle(t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Im allgemeinen ist die rechte Seite dieser Gleichung von Null verschieden, außer im Gleichgewichtsfall.

Die Gleichung (2.30) ist aus der irreversiblen Thermodynamik (de Groot und Mazur, 1962) bekannt. Dort heißen die $F_m(t)$ *thermodynamische Kräfte* und die Erwartungswerte $\langle \dot{P}_m \rangle(t)$ werden als *makroskopische Flüsse* interpretiert.

2.2 Lösungen der Liouville-Gleichung

In diesem Abschnitt benutzen wir relevante Verteilungen zur Konstruktion von Lösungen der Liouville-Gleichung. Die Lösungen sind Funktionale in zeitabhängigen Observablen und beschreiben die irreversible Entwicklung von Vielteilchensystemen.

2.2.1 Retardierte Lösungen der Liouville-Gleichung

Wir kommen auf die Liouville-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL \right) \rho(t) = 0 \quad (2.31)$$

zurück, wobei $\rho(t)$ die klassische N -Teilchen Verteilungsfunktion sei.

Um eine Lösung der Liouville-Gleichung zu spezifizieren, muß die Verteilungsfunktion zu einem Zeitpunkt \tilde{t} vorgegeben sein. Wir wählen als Anfangsbedingung

$$\rho(\tilde{t}) = \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}). \quad (2.32)$$

Da die in der relevanten Verteilung

$$\rho_{\text{rel}}(t) = \exp \left(-\Phi(t) - \sum_m F_m(t) P_m \right) \quad (2.33)$$

vorkommenden Lagrange-Multiplikatoren $F_m(t)$ die Selbstkonsistenz-Bedingungen

$$\langle P_m \rangle(t) = \langle P_m \rangle_{\text{rel}}(t) \quad (2.34)$$

erfüllen, ist die Wahl (2.32) legitim, weil sie nicht in Konflikt mit der Forderung ist, daß die Erwartungswerte $\langle P_m \rangle_{\text{rel}}(\tilde{t})$ mit den wahren Werten der Observablen $\langle P_m \rangle(\tilde{t})$ übereinstimmen müssen. Die Zeitentwicklung von $\rho(t)$ wird durch die Liouville-Gleichung beschrieben, wohingegen $\rho_{\text{rel}}(t)$ durch die makroskopischen Observablen $\langle P_m \rangle_{\text{rel}}(t)$ von der Zeit abhängt. Daher wird die Nichtgleichgewichtsverteilung $\rho(t)$ zu allen Zeitpunkten, mit Ausnahme zur Zeit \tilde{t} , von der relevanten Verteilung $\rho_{\text{rel}}(\tilde{t})$ differieren.

Wir nehmen zunächst an, daß die Hamilton-Funktion H des Systems und damit auch der Liouville-Operator L nicht explizit von der Zeit abhängen. Die formale Lösung von (2.31) mit der Anfangsbedingung (2.32) ist dann

$$\rho(t) = e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) . \quad (2.35)$$

Das makroskopische System vergißt die irrelevanten Details seines Anfangszustandes nach einer für das System charakteristischen mikroskopischen Zeit τ . Deshalb kann die Abhängigkeit der Lösung (2.35) von der Anfangsverteilung für Zeitintervalle $t - \tilde{t} > \tau$ eliminiert werden. Dazu gehen wir folgendermaßen vor. Wir fixieren einen Zeitpunkt $t_0 < t$ und nehmen an, daß alle Anfangszustände $\rho_{\text{rel}}(\tilde{t})$ mit $(\tilde{t} \in [t_0, t])$ gleich wahrscheinlich sind. Die Nichtgleichgewichtsverteilung kann dann durch die zeitliche Mittelung von (2.35) über \tilde{t} erhalten werden. Als Ansatz für die Nichtgleichgewichtsverteilung wählen wir daher

$$\rho(t) = \frac{1}{t - t_0} \int d\tilde{t} e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) , \quad (2.36)$$

wobei $t - t_0$ hinreichend groß sein muß, so daß unphysikalische Anfangszustände keinen wichtigen Beitrag liefern können³.

Wir starten also vom *Prinzip der gleichen Wahrscheinlichkeiten für die Anfangszustände*, das folgendermaßen formuliert werden kann: *der beobachtbare Nichtgleichgewichtszustand $\rho(t)$ zur Zeit t entsteht durch zeitliche Mittelung einer Lösung der Liouville-Gleichung über das Intervall $[t_0, t]$ mit $t - t_0$ hinreichend groß, so daß sich Korrelationen formieren können. Alle Anfangszustände eines makroskopischen Systems zu Zeitpunkten $\tilde{t} \in [t_0, t]$ sind gleichwahrscheinlich (bezüglich der relevanten Verteilung $\rho_{\text{rel}}(\tilde{t})$).*

Die Gleichung (2.36) ist dabei selbst eine Bestimmungsgleichung für die Verteilung $\rho(t)$, da die relevante Verteilung über die Massieu-Planck-Funktion $\Phi(\tilde{t})$ und die Lagrange-Multiplikatoren $F_m(\tilde{t})$ von den Erwartungswerten $\langle P_m \rangle(\tilde{t})$ abhängt. Also,

$$\rho(t) = \rho \left[\{ \langle P_m \rangle(\tilde{t}) \} \right] , \quad \tilde{t} \leq t . \quad (2.37)$$

Wir haben schon mehrmals bemerkt, daß der Nachteil von relevanten Verteilungen darin besteht, daß diese keine Lösungen der Liouville-Gleichung sind. Aber wie

³Wir werden später immer den formalen Limes $t - t_0 \rightarrow \infty$ vollziehen

sieht es in diesem Zusammenhang mit den gemittelten Verteilungen (2.36) aus? Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &= -\frac{1}{(t-t_0)^2} \int_{t_0}^t d\tilde{t} e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) \\ &\quad -\frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t d\tilde{t} iL e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) + \frac{\rho_{\text{rel}}(t)}{t-t_0}. \end{aligned}$$

Mit (2.36) erhalten wir daraus die Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL \right) \rho(t) = -\frac{\rho(t) - \rho_{\text{rel}}(t)}{t-t_0}, \quad (2.38)$$

die sich von der Liouville-Gleichung (2.31) durch den *Quellterm* auf der rechten Seite unterscheidet. Im Limes $t-t_0 \rightarrow \infty$ verschwindet der Quellterm, vorausgesetzt die Differenz $\rho(t) - \rho_{\text{rel}}(t)$ ist endlich und (2.38) stimmt mit der Liouville-Gleichung überein⁴. Zur Berechnung des Limes der Verteilung (2.36) für $t-t_0 \rightarrow \infty$ benutzen wir ein Theorem von Abel: Für jede absolut beschränkte und hinreichend glatte Funktion $f(t)$ gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} f(t), \quad (2.39)$$

wenn wenigstens einer der Limiten existiert. Wir wollen annehmen, daß die Verteilung $\exp(-i(t-\tilde{t})L) \rho_{\text{rel}}(\tilde{t})$ als Funktion von $\tilde{t} \leq 0$ die Voraussetzungen erfüllt, die das Theorem von Abel stellt⁵. Wir schreiben für die Verteilung (2.36)

$$\lim_{t-t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t d\tilde{t} e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^0 dt_1 e^{it_1 L} \rho_{\text{rel}}(t+t_1) \quad (2.40)$$

und erhalten mit dem Theorem von Abel

$$\rho(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt_1 e^{\varepsilon t_1} e^{it_1 L} \rho_{\text{rel}}(t+t_1), \quad (2.41)$$

wobei der Limes $\varepsilon \rightarrow +0$ nach dem thermodynamischen Limes vollzogen wird, wenn Erwartungswerte berechnet werden.

⁴Wir werden später sehen, daß der Limes $t-t_0 \rightarrow \infty$ nach dem thermodynamischen Limes in der Berechnung von Erwartungswerten bezüglich der Verteilung $\rho(t)$ vollzogen werden muß.

⁵Streng genommen sollten alle diese Limiten-Beziehungen für die Erwartungswerte von dynamischen Variablen formuliert werden, da die Nichtgleichgewichtsverteilungen im Limes lediglich als verallgemeinerte Funktionen im Sinne von Laurent Schwartz (Vladimirov, 1971) definiert werden können.

Es ist üblich, die Nichtgleichgewichtsverteilung folgendermaßen zu notieren:

$$\rho(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}), \quad (2.42)$$

was aus (2.41) durch Transformation der Integrationsvariablen folgt. Die Nichtgleichgewichts-Verteilung in der Form (2.41) und (2.42) wurde erstmals in (Zubarev und Kalashnikov, 1970) hergeleitet⁶.

Es ist interessant, daß die sogenannte *Pre-Limit Verteilung*

$$\rho(t) = \varepsilon \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) \quad (2.43)$$

die inhomogene Liouville-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL \right) \rho(t) = -\varepsilon (\rho(t) - \rho_{\text{rel}}(t)), \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (2.44)$$

mit einem infinitesimalen Quellterm auf der rechten Seite löst⁷. Der Quellterm in (2.44) sorgt dafür, daß die inhomogene Liouville-Gleichung nicht invariant unter Zeitumkehr-Transformationen ist. Obwohl der Quellterm in der Berechnung von Erwartungswerten nach dem thermodynamischen Limes verschwindet, selektiert er die retardierte Lösung der Liouville-Gleichung aus, die die *irreversible Entwicklung* des Systems beschreibt. In diesem Zusammenhang sei auf die Vorlesungen von Peierls (Peierls, 1974) über Transporttheorie verwiesen. Hier heißt es an einer Stelle: “In any theoretical treatment of transport problems, it is important to realize at what point the irreversibility has been incorporated. If it has not been incorporated, the treatment is wrong. A description of the situation which preserves the reversibility in time is bound to give the answer zero or infinity for any conductivity. If we do not see clearly where the irreversibility is introduced, we do not clearly understand what we are doing”. Wir stellen daher fest: Gleichung (2.44) berücksichtigt die Irreversibilität und kann als Ausgangspunkt für die Konstruktion von Nichtgleichgewichtsverteilungen genutzt werden (Zubarev, 1970).

⁶Gleichung (2.42) suggeriert eine einfache Interpretation von Prozessen, die für die Entwicklung des Nichtgleichgewichtszustandes verantwortlich sind. Danach kann die Gleichung (2.42) als die Annahme betrachtet werden, daß die Anfangszustände $\rho_{\text{rel}}(\tilde{t})$ zufällig mit der Wahrscheinlichkeit $W(t, \tilde{t}) = (1/T) \exp[-(t - \tilde{t})/T]$ verteilt sind, wobei $T = \varepsilon^{-1}$. Im klassischen Fall entwickelt sich jedes Mitglied des statistischen Ensembles als isoliertes System frei vom Anfangspunkt entlang der Phasenraum-Trajektorie und springt mit der Wahrscheinlichkeit $W(t, \tilde{t})$ im Intervall $(t - \tilde{t})/T$ von einer Trajektorie zu anderen.

⁷Aus Bequemlichkeit werden wir die Pre-Limit Verteilung ebenfalls mit $\rho(t)$ bezeichnen. Wir verabreden weiter, daß der Limes $\varepsilon \rightarrow +0$ in der Berechnung von Erwartungswerten bzgl. $\rho(t)$ immer durchgeführt wird.

Die Ausdrücke (2.41) und (2.42) für die Nichtgleichgewichtsverteilungen haben eine pathologische Eigenschaft. Da die Verteilung im Limes $\varepsilon \rightarrow +0$ endlich bleiben soll, müssen die Integrale proportional zu ε^{-1} sein. Damit beinhalten diese Ausdrücke ein Problem vom Typ $0/0$, das geklärt werden muß. Dazu nehmen wir an, daß der exponentielle Dämpfungsfaktor $\exp(-\varepsilon(t-\tilde{t}))$ die Beziehung

$$\lim_{\tilde{t} \rightarrow -\infty} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) = 0 \quad (2.45)$$

erfüllt. Wir erhalten aus (2.42)

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t d\tilde{t} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} \right) e^{-i(t-\tilde{t})L} \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) \\ &\stackrel{(2.45)}{=} \rho_{\text{rel}}(t) - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} e^{-i(t-\tilde{t})L} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + iL \right) \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die Nichtgleichgewichtsverteilung unterscheidet sich von der relevanten Verteilung durch das Integral, das wiederum funktional von ρ_{rel} abhängt. Im Prinzip ist (2.46) die gesuchte Konstruktion von Nichtgleichgewichtsverteilungen als Funktionale der Observablen $\langle P_m \rangle(t)$.

Im Folgenden werden wir den Limes $\varepsilon \rightarrow +0$ nicht immer explizit notieren. Es ist aber wichtig zu bemerken, daß eine statistische Verteilung für Nichtgleichgewichtsprozesse immer über den oben beschriebenen Limitierungsprozess gegeben ist.

2.2.2 Verallgemeinerte Transportgleichungen für Observablen

Ist die Nichtgleichgewichtsverteilung einmal gegeben, so können Prozeßgleichungen für die Observablen $\langle P_m \rangle(t)$ hergeleitet werden. Wir beginnen mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m \rangle(t) = \text{Sp} \left(P_m \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) \right) = \text{Sp} \left(\dot{P}_m \rho(t) \right) , \quad (2.47)$$

was aus der inhomogenen Liouville-Gleichung (2.44) folgt. Hierbei ist es wichtig zu bemerken, daß der Quellterm in (2.44) wegen der Selbstkonsistenz-Bedingungen (2.34) keinen Beitrag zu den Prozeßgleichungen für die relevanten Observablen liefert.

Im Prinzip kann der Ausdruck (2.46) zur Berechnung der rechten Seite von (2.47) genutzt werden. Für die Herleitung von verallgemeinerten Prozeßgleichungen ist

es allerdings üblich, eine andere Darstellung der Nichtgleichgewichtsverteilung zu verwenden.

Wir wenden uns erneut der inhomogenen Liouville-Gleichung (2.44) zu und wenden diese auf die Funktion

$$\Delta\rho(t) = \rho(t) - \rho_{\text{rel}}(t) \quad (2.48)$$

an. Einsetzen in (2.44) ergibt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL + \varepsilon \right) \Delta\rho(t) = - \left(\frac{\partial}{\partial t} + iL \right) \rho_{\text{rel}}(t) . \quad (2.49)$$

Die relevante Verteilung hängt lediglich über die Mittelwerte $\langle P_n \rangle(t)$ oder über die Lagrange-Multiplikatoren $F_m(t)$ von der Zeit ab. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_{\text{rel}} &= \sum_n \frac{\delta\rho_{\text{rel}}}{\delta\langle P_n \rangle} \frac{\partial}{\partial t} \langle P_n \rangle = \sum_n \frac{\delta\rho_{\text{rel}}}{\delta\langle P_n \rangle} \text{Sp} \left(\dot{P}_n \rho \right) \\ &= - \sum_n \frac{\delta\rho_{\text{rel}}}{\delta\langle P_n \rangle} \text{Sp} (P_n iL \rho) . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Im nächsten Schritt wollen wir diesen Ausdruck so darstellen, daß die zeitliche Änderung der relevanten Verteilung durch einen Projektions-Operator auf $iL\rho$ gegeben wird. Wir folgen hierbei Kawasaki und Gunton (1973). Für jede dynamische Observable A wird der Projektions-Operator $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)A = \rho_{\text{rel}}(t)\text{Sp}A + \sum_n [\text{Sp}(AP_n) - \langle P_n \rangle(t)\text{Sp}(A)] \frac{\delta\rho_{\text{rel}}(t)}{\delta\langle P_n \rangle(t)} . \quad (2.51)$$

$\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$ heißt *Kawasaki-Gunton-Operator*. $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)A$ ist nur definiert, wenn $\text{Sp}(AP_n)$ und $\text{Sp}(A)$ endlich sind. Dies ist sicherlich erfüllt, wenn A eine statistische Verteilung ρ oder $A = iL\rho$ ist. Die Definition des Kawasaki-Gunton-Operators ist außerdem von der Wahl der relevanten Verteilung abhängig.

Die anderen Eigenschaften von $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$ folgen unmittelbar aus der gegebenen Definition. Sie sollen hier trotzdem zitiert werden:

$$\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)(\alpha A + \beta B) = \alpha \mathcal{P}_{\text{rel}}(t)A + \beta \mathcal{P}_{\text{rel}}(t)B , \quad (2.52)$$

$$\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)\mathcal{P}_{\text{rel}}(\tilde{t}) = \mathcal{P}_{\text{rel}}(t) , \quad (2.53)$$

$$\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)\rho(t) = \rho_{\text{rel}}(t) , \quad (2.54)$$

$$\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = \frac{\partial}{\partial t}\rho_{\text{rel}}(t) , \quad (2.55)$$

für dynamische Observablen A, B aus dem Definitionsbereich und reelle Zahlen α, β . Die Eigenschaft (2.53) ist für beliebige Zeiten t und \tilde{t} gültig und erlaubt $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$ als Projektions-Operator zu betrachten. Die Eigenschaften (2.54) und (2.55) bedeuten,

daß $\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$ jede Lösung der Liouville-Gleichung und ihre Zeitableitung in die entsprechende relevante Verteilung und deren Zeitableitung konvertiert.

Wir benutzen⁸ $\text{Sp}(iL\rho(t)) = 0$ und erhalten für die Zeitableitung der relevanten Verteilung (2.50)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\text{rel}}(t) = -\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)iL\rho(t) = -\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)iL\rho_{\text{rel}}(t) - \mathcal{P}_{\text{rel}}(t)iL\Delta\rho(t) . \quad (2.56)$$

Damit erhalten wir für (2.49)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)iL + \varepsilon \right) \Delta\rho(t) = -\mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)iL \rho_{\text{rel}}(t) , \quad (2.57)$$

wobei

$$\mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{rel}}(t) = 1 - \mathcal{P}_{\text{rel}}(t) \quad (2.58)$$

der zum Kawasaki-Gunton-Operator komplementäre Operator ist.

Bemerkenswert an (2.57) ist, daß die Zeitentwicklung von $\Delta\rho$ durch den *projizierten Liouville-Operator* $\mathcal{C}\mathcal{P}(t)iL$ generiert wird, wohingegen in der Ausgangsgleichung (2.49) die Dynamik durch den gewöhnlichen Liouville-Operator iL erzeugt wird. Damit beschreibt $\Delta\rho$, definiert in (2.48) und (2.57), Effekte, die letztendlich auf die Dynamik mikroskopischer Korrelationen zurückzuführen sind, welche nicht in der relevanten Verteilung enthalten sind. Der Projektions-Operator $\mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{rel}}(t)$ in (2.57) berücksichtigt die Tatsache, daß die Dynamik dieser mikroskopischen Korrelationen getrennt von der makroskopischen Entwicklung des Systems analysiert werden muß, die durch die relevante Verteilung beschrieben wird.

Die formale Integration von (2.57) über $(-\infty, t]$ ergibt

$$\Delta\rho(t) = - \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} U_{\text{rel}}(t, \tilde{t}) \mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{rel}}(\tilde{t}) iL \rho_{\text{rel}}(\tilde{t}) , \quad (2.59)$$

mit dem projizierten Zeitentwicklungsoperator

$$U_{\text{rel}}(t, \tilde{t}) = T \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t d\tau \mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{rel}}(\tilde{\tau}) iL \right\} . \quad (2.60)$$

Die formale Lösung (2.59) zusammen mit (2.48) ermöglicht es nun, die rechte Seite von (2.47) als Funktional in der relevanten Verteilung $\rho_{\text{rel}}(\tilde{t})$ auszudrücken, die wiederum von den Observablen $\langle P_n \rangle(t)(\tilde{t})$ gemäß den Selbstkonsistenz-Bedingungen (2.34) abhängt. Damit erlaubt die hier skizzierte Prozedur, ein geschlossenes System

⁸Für den klassischen Fall kann diese Eigenschaft durch partielle Integration der Poisson-Klammern bewiesen werden.

von verallgemeinerten Transportgleichungen für die Observablen in (2.47) herzuleiten.

Um transparentere Gleichungen zu erhalten, schreiben wir im folgenden den Ausdruck (2.59) um. Dafür benutzen wir (2.25) und die Identität

$$\begin{aligned} \mathcal{CP}_{\text{rel}}(t) iL \rho_{\text{rel}}(t) &= \mathcal{CP}_{\text{rel}}(t) iL e^{-\hat{S}(t)} \\ &= - \int_0^1 dx (\rho_{\text{rel}})^x(t) \mathcal{CP}_{\text{rel}}(t) iL \hat{S}(t) (\rho_{\text{rel}})^{1-x}(t) . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Diese Identität setzt den komplementären Kawasaki-Gunton- Operator (2.58) und einen anderen Projektionsoperator $\mathcal{CP}(t) = 1 - \mathcal{P}(t)$ in Beziehung. Der Operator $\mathcal{CP}(t)$ ist komplementär zum *Mori-Projektionsoperator* $\mathcal{P}(t)$. Die Wirkung von $\mathcal{P}(t)$ auf klassische dynamische Variablen A ist folgendermaßen erklärt:

$$\mathcal{P}(t)A = \langle A \rangle_{\text{rel}}(t) + \sum_n \frac{\delta \langle A \rangle_{\text{rel}}(t)}{\delta \langle P_n \rangle(t)} (P_n - \langle P_n \rangle(t)) . \quad (2.62)$$

Der Mori-Operator besitzt die Eigenschaften

$$\mathcal{P}^2(t) = \mathcal{P}(t), \quad \mathcal{P}(t)P_n = P_n , \quad (2.63)$$

und ist daher ein Projektionsoperator auf dem linearen Raum der relevanten Variablen.

Im klassischen Fall kommutieren alle in (2.61) vorkommenden Variablen und es gilt daher einfach

$$\mathcal{CP}_{\text{rel}}(t) iL \rho_{\text{rel}}(t) = -\mathcal{CP}(t) iL \hat{S}(t) \rho_{\text{rel}}(t) . \quad (2.64)$$

Mit der Identität (2.61) und dem expliziten Ausdruck (2.23) für den Entropieoperator finden wir für (2.59)

$$\Delta \rho(t) = \sum_n \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} F_n(\tilde{t}) U_{\text{rel}}(t, \tilde{t}) \int_0^1 dx (\rho_{\text{rel}})^x(\tilde{t}) I_n \tilde{t} (\rho_{\text{rel}})^{1-x}(\tilde{t}) , \quad (2.65)$$

wobei die dynamischen Variablen

$$I_n(t) = \mathcal{CP}(t) \dot{P}_n = (1 - \mathcal{P}(t)) \dot{P}_n \quad (2.66)$$

orthogonal zu dem linearen Raum der relevanten Variablen sind, d.h. $\mathcal{P}(t)I_n(t) = 0$. Die dynamischen Variablen $I_n(t)$ bestimmen, wie die mikroskopischen Freiheitsgrade die Entwicklung des makroskopischen Nichtgleichgewichtszustandes beeinflussen, der durch eine Menge von relevanten Variablen beschrieben wird. Daher heißen die dynamischen Variablen (2.66) auch *random forces*.

Der gesamte Fluß \dot{P}_m der dynamischen Variablen (2.66) kann immer in einen *systematischen* und einen *zufälligen* Anteil aufgespalten werden:

$$\dot{P}_m = \mathcal{P}(t)\dot{P}_m + \mathcal{C}\mathcal{P}(t)\dot{P}_m = \mathcal{P}(t)\dot{P}_m + I_m(t) . \quad (2.67)$$

Berechnen wir die gemittelten Flüsse auf der rechten Seite von (2.47) mit der Nichtgleichgewichtsverteilung (2.48), so zeigt sich tatsächlich, daß der $\Delta\rho(t)$ -Term keinen Beitrag zur Mittelung des systematischen Anteils der Flüsse liefert. Der Grund hierfür ist, daß die dynamischen Variablen $\mathcal{P}(t)\dot{P}_m$ Linearkombinationen der relevanten Variablen sind und dies trifft somit auch auf ihre Mittelwerte zu. Die Berechnung der Mittelwerte mittels der gesamten Nichtgleichgewichtsverteilung $\rho(t)$ oder mittels ihres relevanten Anteils $\rho_{\text{rel}}(t)$ muß wegen den Selbstkonsistenzbedingungen (2.34) zum gleichen Resultat führen. Daher finden wir für (2.47)

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m \rangle (t) = \langle \dot{P}_m \rangle_{\text{rel}} + \text{Sp} (I_m(t)\Delta\rho(t)) . \quad (2.68)$$

Einsetzen von (2.65) ergibt ein System von *verallgemeinerten Transportgleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle P_m \rangle (t) = \langle \dot{P}_m \rangle_{\text{rel}} + \sum_n \int_{-\infty}^1 d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} \mathcal{L}_{mn}(t, \tilde{t}) F_n(\tilde{t}) , \quad (2.69)$$

wobei die *kinetischen Koeffizienten* durch

$$\mathcal{L}_{mn}(t, \tilde{t}) = \int_0^1 dx \text{Sp} \left(I_m(t) U_{\text{rel}}(t, \tilde{t}) (\rho_{\text{rel}})^x(\tilde{t}) I_n(\tilde{t}) (\rho_{\text{rel}})^{1-x}(\tilde{t}) \right) \quad (2.70)$$

definiert sind.

Obwohl die formale Struktur der Gleichungen (2.69) eher einfach aussieht, sind die verallgemeinerten Transportgleichungen sehr kompliziert. Dies folgt sofort aus dem expliziten Ausdruck für die kinetischen Koeffizienten (2.70). Im allgemeinen beinhalten diese Koeffizienten sogenannte Gedächtniseffekte und entwickeln sich in der Zeit gemäß der projizierten Dynamik, die durch den Zeitentwicklungsoperator $U_{\text{rel}}(t, \tilde{t})$ (2.60) generiert wird. Die verallgemeinerten Transportgleichungen (4.7) sind trotzdem ein wichtiges Resultat der Theorie der Nichtgleichgewichtsprozesse. Sie sind vollkommen *allgemein*, d.h. sie zeigen die allgemeine Struktur von Prozeßgleichungen für eine beliebige Menge von Observablen. Außerdem besitzen die rechten Seiten dieser Gleichungen eine einfache physikalische Interpretation, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden: die über die relevante Verteilung gemittelten Flüsse liefern keinen Beitrag zur Entropie-Produktion und beschreiben daher *reversible* Nichtgleichgewichtsprozesse. Der zweite Term auf der rechten Seite von (4.7) dagegen verursacht Entropie-Produktion im System und beschreibt somit *irreversible* Nichtgleichgewichtsprozesse. Ein weiterer Vorteil der Gleichungen (4.7) ist, daß sie *exakt* sind und damit als Ausgangspunkt zur Konstruktion von genäherten Prozeßgleichungen genutzt werden können. Dies kann entweder durch Störungstheorie oder durch geschicktes Modellieren der kinetischen Koeffizienten geschehen.

2.2.3 Entropie-Produktion im Nichtgleichgewichtsprozeß

In diesem Abschnitt benutzen wir die verallgemeinerten Transportgleichungen (4.7), um die Zeitabhängigkeit der thermodynamischen Entropie in Nichtgleichgewichtsprozeß zu analysieren.

Die Zeitableitung der thermodynamischen Entropie ist durch (2.30) gegeben, wobei die Zeitableitungen der Observablen durch die verallgemeinerten Transportgleichungen (4.7) bestimmt wird. Elimination dieser Ableitungen liefert

$$\frac{d}{dt}S(t) = \sum_m F_m \langle \dot{P}_m \rangle_{\text{rel}} + \sum_{m,n} \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} F_m(t) \mathcal{L}_{mn}(t, \tilde{t}) F_n(\tilde{t}) . \quad (2.71)$$

Wir zeigen zunächst, daß der erste Term auf der rechten Seite verschwindet. Dafür benutzen wir die Identität

$$\langle \{ \hat{S}, A \} \rangle_{\text{rel}} = 0 , \quad (2.72)$$

wobei A wieder irgendeine klassische dynamische Variable ist und das Symbol $\{ \cdot, \cdot \}$ die Poisson-Klammern bezeichnet. Mit der Identität (2.72) erhalten wir

$$\sum_n F_n(t) \langle \dot{P}_n \rangle_{\text{rel}} \equiv \sum_n F_n(t) \langle \{ P_n, H \} \rangle_{\text{rel}} = \langle \{ \hat{S}, A \} \rangle_{\text{rel}} = 0 . \quad (2.73)$$

Damit erhalten wir für die Zeitableitung der thermodynamischen Entropie (2.71)

$$\frac{d}{dt}S(t) = \sum_{m,n} \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} F_m(t) \mathcal{L}_{mn}(t, \tilde{t}) F_n(\tilde{t}) . \quad (2.74)$$

Dieses Ergebnis ist exakt und gilt für jede mögliche Menge von relevanten Variablen, die zur Beschreibung des makroskopischen Nichtgleichgewichtszustandes verwendet werden. Sind diese Variablen ausschließlich Integrale der Bewegung, so verschwinden die Flüsse I_n and folglich auch die durch (2.70) gegebenen kinetischen Koeffizienten. Dann ist die thermodynamische Entropie selbst zeitlich konstant und damit ist das betrachtete physikalische System im thermischen Gleichgewicht.

Im Allgemeinen wird die Änderungsrate der thermodynamischen Entropie zu einem beliebigen Zeitpunkt t von der Historie des gegebenen physikalischen Systems abhängen. Genau dies impliziert ja (2.74). Bis heute ist wenig über das Verhalten der thermodynamischen Entropie bekannt, wenn Gedächtniseffekte berücksichtigt werden müssen. Einige Analysen für spezielle Beispiele lassen jedoch vermuten, daß auch hierfür die Zeitableitung der thermodynamischen Entropie eines makroskopischen Nichtgleichgewichtszustandes positiv ist, wenn über ein hinreichend großes Zeitintervall gemittelt wird.

In vielen Fällen zerfallen jedoch die durch die kinetischen Koeffizienten $\mathcal{L}_{mn}(t, \tilde{t})$ beschriebenen mikroskopischen Korrelationen auf einem Zeitintervall, das sehr viel

kleiner ist als das Zeitintervall auf dem sich die zu den makroskopischen Observablen $\langle P_m \rangle(t)$ konjugierten Lagrange-Multiplikatoren $F_m(t)$ nennenswert ändern. Wir können dann die Gedächtniseffekte in (2.74) vernachlässigen und die Zeitableitung der thermodynamischen Entropie einfacher (nämlich nach Markov) notieren:

$$\frac{d}{dt}S(t) = \sum_{m,n} F_m(t) \mathcal{L}_{mn}(t) F_n(t) , \quad (2.75)$$

wobei die kinetischen Koeffizienten $\mathcal{L}_{mn}(t)$ jetzt durch

$$\mathcal{L}_{mn}(t) = \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} \mathcal{L}_{mn}(t, \tilde{t}) \quad (2.76)$$

definiert sind. Gleichung (2.75) ist bekannt aus der irreversiblen Thermodynamik (de Groot und Mazur, 1962). Man kann zeigen, daß die durch (2.75) beschriebene Entropie-Produktion tatsächlich positiv ist, wenn der Zustand des gegebenen physikalischen System nahe dem Gleichgewichtszustand ist⁹. Für Zustände weit weg vom Gleichgewicht ist die Frage nach dem Vorzeichen der Entropie-Produktion bis heute nicht geklärt, da allgemeine Aussagen über die kinetischen Koeffizienten (2.76) alles andere als evident sind.

Anhang A

In diesem Anhang definieren wir den Zustandsbegriff und die Prozeßgleichungen von klassischen Vielteilchensystemen mit bekannter Hamilton-Funktion. Es werden die Probleme einer rein dynamischen Beschreibung von Vielteilchensystemen benannt und erörtert. Als Alternative zur rein dynamischen Beschreibung wird die statistische Interpretation über Verteilungsfunktionen auf dem Phasenraum von klassischen Vielteilchensystemen erklärt. Die klassische Liouville-Gleichung als Prozeßgleichung und der Liouville-Operator als Zeittranslationsoperator werden eingeführt.

Verteilungsfunktionen auf dem Phasenraum

In der statistischen Mechanik wird der dynamische Zustand eines Systems mit f Freiheitsgraden durch die Menge der generalisierten Koordinaten $(q) = (q_1, \dots, q_f)$ und der kanonisch konjugierten Impulse $(p) = (p_1, \dots, p_f)$ angegeben. Das kartesische

⁹Der Beweis basiert auf bestimmten Symmetriebedingungen für die kinetischen Koeffizienten. Diese sind unter dem Namen *Reziprozitäts-Beziehungen von Onsager* bekannt. Hier sei lediglich erwähnt, daß diese sogenannten Onsager-Beziehungen die Zeitumkehrinvarianz der Bewegungsgleichungen für die mikroskopischen Korrelationen widerspiegeln

Produkt $(q) \times (p)$ beider Mengen fassen wir als Punkt $(q, p) = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ in einem sogenannten $2f$ -dimensionalen Phasenraum $\Gamma(q, p)$ auf. Der so charakterisierte dynamische Zustand eines Systems heißt auch *mikroskopischer Zustand*. Zum Beispiel beschreiben wir ein System von N identischen Teilchen durch $3N$ kartesische Koordinaten $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = (q_1, \dots, q_{3N})$ und die zugehörigen Impulse $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_f) = (p_1, \dots, p_{3N})$. Das kartesische Produkt $(\mathbf{r}) \times (\mathbf{p})$ definiert einen Punkt $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ im $6N$ dimensionalen Phasenraum $\Gamma_N(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Die Zeitentwicklung eines mikroskopischen Zustandes ist durch eine Trajektorie $(q(t), p(t))$ im Phasenraum Γ gegeben. Die Phasenraumvariablen $q_j(t)$ und $p_j(t)$ entwickeln sich in der Zeit gemäß der Hamilton-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}q_j(t) = \frac{\partial}{\partial p_j} H(q, p, t), \quad \frac{d}{dt}p_j(t) = -\frac{\partial}{\partial q_j} H(q, p, t) \quad (j \in \{1, 2, \dots, f\}), \quad (2.A.1)$$

wobei $H(q, p, t)$ die Hamilton-Funktion des Systems sei und $f = 3N$.

Um die Zeitentwicklung eines dynamischen Systems mit bekannter Hamilton-Funktion H und gegebenen mikroskopischen Anfangszustand $(q(t_0), p(t_0))$ vorherzusagen, müssen die Prozeßgleichungen (2.A.1) integriert und die Trajektorie $(q(t), p(t))$ bestimmt werden. Hierfür ist die Existenz von sogenannten *Integralen der Bewegung* C_j wichtig. Jede Trajektorie kann dann durch spezielle Werte c_j der dynamischen Variablen $C_j(q, p)$ charakterisiert werden. Die c_j sind Einschränkungen und definieren den Unterraum $\Gamma(q, p|c_j)$ des Phasenraums $\Gamma(q, p)$, der für die durch c_j charakterisierte Trajektorie zugänglich ist.

Ein dynamisches System heißt *integrabel*, wenn es genau so viele Integrale der Bewegung wie Freiheitsgrade hat. Für integrable Systeme kann eine Lösung der Prozeßgleichungen explizit angegeben werden. Damit ist der dynamische Zustand des Systems über beliebig große Zeitintervalle bekannt. Trotzdem kann der dynamische Zustand von Systemen mit vielen Freiheitsgraden **nicht** durch den beschriebenen, rein dynamischen Zugang bestimmt werden:

- (1) Es ist in der Praxis unmöglich, den exakten mikroskopischen Anfangszustand eines Systems mit vielen Freiheitsgraden beliebig genau festzustellen. Jede so limitierte Genauigkeit kann aber nach hinreichend langer Zeit zu großen Abweichungen führen.
- (2) Jede limitierte Genauigkeit in der (numerischen) Lösung der Prozeßgleichungen verbietet es, eine Trajektorie für größere Zeitintervalle zu spezifizieren.
- (3) In der Regel sind die zu beschreibenden Systeme nicht vollständig isoliert, wodurch weitere Freiheitsgrade und außerdem externe Störungen auftreten können, die nicht durch die Prozeßgleichungen (2.A.1) erfasst werden.

Es ist also im allgemeinen nicht möglich, die Entwicklung eines Systems mit vielen Freiheitsgraden als Transformation von einem Punkt $(q(t_0), p(t_0))$ zu einem anderen Punkt $(q(t), p(t))$ im Phasenraum $\Gamma(q, p)$ zu beschreiben, weil wir die durch (1)-(3) gegebenen Unsicherheiten nicht eliminieren können. Wir wollen solche Systeme mit vielen Freiheitsgraden im weiteren *makroskopische Systeme* nennen. **Das Problem besteht also darin, daß es unmöglich ist, den mikroskopischen Zustand eines makroskopischen Systems beliebig genau zu kennen.**

Daraus folgt, daß wir genau alle mikroskopischen Zustände betrachten müssen, die mit den dem System auferlegten Restriktionen verträglich sind. Unter solchen Restriktionen wollen wir sowohl interne Einschränkungen durch die Integrale der Bewegung und externe Einschränkungen des Phasenraums $\Gamma(q, p)$ verstehen. Die Identifikation des makroskopischen Systems mit einem speziellen mikroskopischen Zustand kann nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit stattfinden.

Auf dieser Diskussion beruht die Interpretation von Prozessen in makroskopischen Systemen. Gibbs (1972) schlug vor, nicht das gegebene System zu analysieren, sondern eine große (eigentlich im Limes unendlich große) Anzahl von Kopien des Systems. Alle Kopien unterliegen identischen externen Bedingungen. Die Menge dieser Kopien heißt *statistisches Ensemble*.

Jede einzelne Kopie wird im Phasenraum $\Gamma(q, p)$ durch einen Punkt $(q, p)_i$ repräsentiert. Jede Kopie bewegt sich auf ihrer eigenen Trajektorie $(q(t), p(t))_i$ im Phasenraum, die durch die Prozeßgleichungen (2.A.1) gegeben ist.

Das statistische Ensemble kann durch eine Verteilungsfunktion $\rho(q, p, t)$ beschrieben werden, die proportional zur Wahrscheinlichkeitsdichte für die Verteilung der Kopien im Phasenraum $\Gamma(q, p)$ ist. Aus Gründen der Einfachheit beziehen wir uns im folgenden o.B.d.A. auf den Spezialfall von N Teilchen und wählen kartesische Koordinaten und die dazu gehörigen Impulse. Die N -Teilchen Verteilungsfunktion $\rho_N(q, p, t) = \rho_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t)$ ist so definiert, daß

$$dW_N(q, p, t) = \rho_N(q, p, t) d\Gamma_N \quad (2.A.2)$$

die Wahrscheinlichkeit angibt, eine Kopie des statistischen Ensembles im Phasenraumpunkt (q, p) zur Zeit t zu finden. Die Definition der Verteilungsfunktion impliziert eine Normierungsbedingung für ρ_N bzgl. der Integration über den Phasenraum

$$\int_{\Gamma} d\Gamma_N \rho_N(q, p, t) = 1. \quad (2.A.3)$$

Diese Bedingung ist für das Phasenraummaß

$$d\Gamma_N = \frac{1}{N!(2\pi)^{3N}} \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j d\mathbf{p}_j \quad (2.A.4)$$

erfüllt. Die Bedeutung dieser Definition wird evident, wenn die klassische statistische Mechanik als Grenzfall der Quantenstatistik betrachtet wird.

Ist die Verteilungsfunktion $\rho(q, p, t)$ bekannt, so können wir Vorhersagen zur Messung einer physikalischen Größen \mathcal{O} machen, die durch den Erwartungswert $\langle \mathcal{O} \rangle(t)$ der zugehörigen dynamischen Variablen $\mathcal{O}(q, p, t)$ beschrieben wird. Es gilt

$$\langle \mathcal{O} \rangle(t) = \int_{V(\Gamma)} d\Gamma_N \rho_N(q, p, t) \mathcal{O}(q, p, t) . \quad (2.A.5)$$

In der statistischen Mechanik wird angenommen, daß diese sogenannte *Ensemble-Mittelung* mit der zeitlichen Mittelung der physikalischen Größe über die Historie eines einzigen Systems übereinstimmt. Diese Annahme heißt *Ergoden-Hypothese*.

Die Klassische Liouville-Gleichung

Die Beschreibung eines statistischen Ensembles durch die Verteilungsfunktion $\rho(q, p, t)$ und die Definition der Ensemble-Mittelung sind nur dann von praktischem Interesse, wenn es uns gelingt, eine Prozeßgleichung für $\rho(q, p, t)$ selbst herzuleiten.

Die Herleitung beruht auf dem **Theorem von Liouville**, welches in unseren Notationen folgenden Inhalt hat. Angenommen zum Zeitpunkt t_0 belegen die Punkte (q^0, p^0) mit $q^0 = q(t_0)$ und $p^0 = p(t_0)$ einen bestimmten Bereich $\Delta\Gamma_{t_0}$ im Phasenraum. Zu einem beliebigen Zeitpunkt t belegen die Punkte (q^t, p^t) mit $q^t = q(t)$ und $p^t = p(t)$ als Lösungen der Prozeßgleichungen (2.A.1) einen Bereich $\Delta\Gamma_t$. Dann gilt

$$\int_{\Delta\Gamma_{t_0}} dq^0 dp^0 = \int_{\Delta\Gamma_t} dq^t dp^t \quad \forall t . \quad (2.A.6)$$

Also bleibt das von den Phasenraum-Punkten eingenommene Phasenraum-Volumen während des Prozesses konstant.

Trotz seiner zentralen Rolle für die statistische Mechanik kann dieses Theorem allein mit elementarer Transformationstheorie von Maßen und den Bewegungsgleichungen von Hamilton (2.A.1) bewiesen werden.

Da die Anzahl der Freiheitsgrade eines jeden mikroskopischen Zustandes konstant ist, gilt weiterhin

$$\rho(q, p, t) dq dp = \rho(\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{t}) d\tilde{q} d\tilde{p} \quad (2.A.7)$$

und mit dem Theorem von Liouville folgt sogar

$$\rho(q, p, t) = \rho(\tilde{q}, \tilde{p}, \tilde{t}) , \quad (2.A.8)$$

d. h. entlang einer beliebigen Trajektorie im Phasenraum bleibt die Verteilungsfunktion konstant.

Mehr als die Beziehung (2.A.7) können wir aus den allgemeinen Prinzipien der statistischen Mechanik hinsichtlich einer Prozeßgleichung für $\rho(q, p, t)$ nicht gewinnen.

Da die gesuchte Gleichung eine Differentialgleichung sein soll, betrachten wir speziell $\tilde{t} = t + \Delta t$. Wir nehmen an, daß dann $\tilde{q} = q + \Delta q$ und $\tilde{p} = p + \Delta p$. Für den betrachteten Spezialfall ist somit

$$\rho(q, p, t) = \rho(q + \Delta q, p + \Delta p, t + \Delta t) . \quad (2.A.9)$$

Wir entwickeln die rechte Seite dieser Gleichung in eine Taylor-Reihe um den Phasenraumpunkt (q, p) zur Zeit t und erhalten im Limes $t \rightarrow 0$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_j^f \left(\dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial p_j} \right) \right] \rho(q, p, t) = 0 . \quad (2.A.10)$$

Dies ist eine Formulierung der *klassischen Liouville-Gleichung* und stellt die gesuchte Prozeßgleichung für die Verteilungsfunktion dar. Nun werden Zeitentwicklungen in Hamilton-Systemen eigentlich durch die Hamilton-Funktion $H(q, p, t)$ des betrachteten Systems generiert. Das ist auch für die Zeitentwicklung der Verteilungsfunktion so, was wir durch Einsetzen von (2.A.1) in die klassische Liouville-Gleichung (2.A.10) explizit zum Ausdruck bringen

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = \{H, \rho\} , \quad (2.A.11)$$

wobei $\{\cdot, \cdot\}$ die Poisson-Klammer bezeichne und $\{H, \cdot\}$ der Zeitableitung entspricht.

Im weiteren erweist sich noch eine andere Formulierung als nützlich. Dazu definieren wir zunächst den sogenannten *Liouville-Operator* L . Sein Definitionsbereich sind alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen ϕ über dem Phasenraum. Die Operationsvorschrift ist

$$L\phi = -i\{\phi, H\} . \quad (2.A.12)$$

L ist offensichtlich linear. Die Liouville Gleichung kann dann folgendermaßen formuliert werden

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL \right) \rho = 0 . \quad (2.A.13)$$

Der Vorteil dieser Formulierung ist evident. Sie erlaubt uns nämlich eine formale Lösung der Liouville-Gleichung zu finden, sofern die Verteilungsfunktion zur Zeit t_0 bekannt ist. Für den Fall, daß L nicht explizit von der Zeit abhängt, ist die Lösung

$$\rho(q, p, t) = e^{-i(t-t_0)L} \rho(q, p, t_0) . \quad (2.A.14)$$

Der Operator $e^{-i(t-t_0)L} \rho(q, p, t_0)$ heißt *Zeitentwicklungs-Operator*. Da es sich um eine Darstellung der Zeittranslationsgruppe handelt, kann seine Wirkung auf den Definitionsbereich von L einfach durch Taylor-Reihenentwicklung erklärt werden.

Mit dem Liouville-Operator lassen sich natürlich auch Bewegungsgleichungen für Observablen $\mathcal{O}(q, p, t)$ formulieren. Differenzieren wir $\mathcal{O}(q, p, t)$ nach der Zeit und benutzen erneut die Prozeßgleichungen (2.A.1), so ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \mathcal{O} = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} + \{\mathcal{O}, H\} , \quad (2.A.15)$$

oder,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{O} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - iL \right) \mathcal{O} . \quad (2.A.16)$$

Sind die Observable $\mathcal{O}(q, p)$ und L nicht explizit zeitabhängig, so läßt sich wieder eine formale Lösung angeben

$$\mathcal{O}(q(t), p(t)) = e^{+i(t-t_0)L} \mathcal{O}(q(t_0), p(t_0)) , \quad (2.A.17)$$

wobei $q(t)$ und $p(t)$ Lösungen von (2.A.1) mit den Anfangsbedingungen $q(t_0) = q_0$ und $p(t_0) = p_0$ seien.

Anhang B

In diesem Anhang wird die Definition der Entropie für klassische Gleichgewichtssysteme gegeben, wie sie von Gibbs eingeführt und durch von Neumann auf Quantensysteme erweitert wurde, Wir diskutieren den Zusammenhang zwischen der von Gibbs und der von Shannon in die Informationstheorie eingeführten Entropie. Diese Beziehung ist insbesondere für die Theorie der Nichtgleichgewichtsprozesse interessant.

Gibbs-Entropie

In der Thermodynamik werden folgende Eigenschaften der Größe Entropie S postuliert:

- (1) S ist eine extensive Zustandsgröße.
- (2) Für ein abgeschlossenes System ist S monoton wachsend. S ist maximal im thermischen Gleichgewicht.
- (3) Für reversible (quasi-statische) Prozesse, gilt die Fundamentalrelation

$$TdS = dU + PdV - \mu dN , \quad (2.B.1)$$

wobei T die Temperatur, U die innere Energie, P den Druck und μ das chemische Potential bezeichne.

Dieses Konzept der thermodynamischen Entropie kann von Systemen im globalen Gleichgewicht (globale Entropie) auf Systeme im Nichtgleichgewicht erweitert werden, vorausgesetzt diese können als kontinuierlich angesehen werden und befinden

sich im lokalen thermischen Gleichgewicht. Die Voraussetzung von lokalem thermischen Gleichgewicht erlaubt die Definition einer lokalen Entropie. Die lokale Entropie hängt von lokalen thermodynamischen Größen genauso ab, wie die globale Entropie von den entsprechenden globalen Gleichgewichts-Größen. Das vorgestellte Konzept ist charakteristisch für die *Thermodynamik irreversibler Prozesse* (de Groot und Mazur, 1962).

Eines der Hauptprobleme der statistischen Mechanik ist es, eine Definition der Entropie bereitzustellen, die konsistent auf Vielteilchensysteme im Gleichgewicht und Nichtgleichgewicht angewendet werden kann. Wie für das Gleichgewicht sollte die lokale Entropie (zu jedem Zeitpunkt) ein Funktional der Verteilungsfunktion sein, also $S = S[\rho]$.

Für klassische Systeme wurde eine solche Definition zuerst von Gibbs (1972) gegeben: die *Gibbs-Entropie* S_{Gibbs} eines statistischen Ensembles, beschrieben durch die Verteilungsfunktion $\rho(q, p, t)$, ist¹⁰

$$S_{\text{Gibbs}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} - \int d\Gamma \rho(q, p, t) \ln \rho(q, p, t) . \quad (2.B.2)$$

Für den Fall, daß das statistische Ensemble die Nichtgleichgewichtszustände eines Systems mit variabler Teilchenzahl präsentiert, ist noch über die möglichen Teilchenzahlen zu summieren.

Es ist leicht zu zeigen, daß die von Gibbs definierte Entropie additiv ist und damit diese in der Thermodynamik geforderte Eigenschaft erfüllt. Auch führt sich zu allen bekannten thermodynamischen Relationen zwischen makroskopischen Größen.

Im Falle von statistischen Ensembles für Nichtgleichgewichtssysteme ist die von Gibbs definierte Entropie für isolierte Systeme jedoch konstant und steht damit in Widerspruch zur in der Thermodynamik geforderten Eigenschaft, daß die Entropie monoton wachsend sein und im Gleichgewichtszustand ihr Maximum erreichen soll.

Die Verteilungsfunktion zur Zeit t_0 sei $\rho(q_0, p_0, t_0)$. Die Liouville-Gleichung liefert für alle Zeiten $\rho(q, p, t) = \rho(q_0, p_0, t_0)$, wobei der Phasenraumpunkt (q, p) auf der Trajektorie durch (q_0, p_0) liege. Mit dem Theorem von Liouville gilt somit

$$\begin{aligned} S_{\text{Gibbs}}(t) &= - \int d\Gamma \rho(q, p, t) \ln \rho(q, p, t) \\ &= - \int d\Gamma^0 \rho(q_0, p_0, t_0) \ln \rho(q_0, p_0, t_0) \\ &= S_{\text{Gibbs}}(t_0) \quad \forall t . \end{aligned} \quad (2.B.3)$$

¹⁰Die so definierte Entropie S ist dimensionslos. Folglich hat die Temperatur T die gleiche Mas-sendimension wie die Energie. Dies ist die in der Statistischen Mechanik gebräuchliche Konvention. Andererseits wird die Temperatur gewöhnlich in Kelvin gemessen. Mit dieser Konvention hat die Entropie S_{therm} dann die Einheit der Boltzmann-Konstante $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{Ws/K}$. Der Zusammenhang beider Konventionen ist durch $S = k_B S_{\text{therm}}$ gegeben.

Wir gelangen zum gleichen Resultat, wenn wir S_{Gibbs} nach der Zeit differenzieren und $\partial\rho/\partial t$ mittels der Liouville-Gleichung eliminieren. Eine simple Rechnung liefert auch hier $dS_{\text{Gibbs}}/dt = 0$.

Dieses Manko war Gibbs durchaus bewußt (Gibbs, 1972). Gibbs versuchte zu beweisen, daß die Entropie eines isolierten Systems trotzdem irgendwie anwachsen kann. Seine Argumentation wurde von P. und T. Ehrenfest (Ehrenfest, 1959) aufgegriffen und verbessert. Sie schlugen vor, die von Gibbs eingeführte Entropie in folgendem Sinne zu vergrößern. Statt die Verteilungsfunktion $\rho(q, p, t)$, die wir im weiteren *feine Verteilungsfunktion* nennen, an jedem Punkt (q, p) des Phasenraums auszuwerten, mittelt man $\rho(q, p, t)$ über ein kleines Volumen $\Delta\Gamma(q, p)$ um (q, p) , also

$$\tilde{\rho}(q, p, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\Delta\Gamma(q, p)} \int_{\Delta\Gamma(q, p)} dq' dp' \rho(q', p', t) . \quad (2.B.4)$$

Diese Verteilungsfunktion $\tilde{\rho}(q, p, t)$ soll *grobe Verteilungsfunktion* heißen. Die Idee und Legitimation hinter der Definition (2.B.4) ist, daß bei einer physikalischen Messung von observablen Größen immer eine solche Mittelung impliziert wird, da Meßgeräte eine endliche Auflösung bezüglich der Orts- und Impulsmessung haben.

Als neue Definition für Entropie wird

$$\tilde{S}(t) \stackrel{\text{def}}{=} - \int d\Gamma \tilde{\rho}(q, p, t) \ln \tilde{\rho}(q, p, t) \quad (2.B.5)$$

angegeben. Damit sind alle guten Eigenschaften der Gibbsschen Definition erhalten und wir zeigen im folgenden, daß $\tilde{S}(t)$ tatsächlich mit der Zeit anwachsen kann.

Wir nehmen an, daß zur Zeit t_0 die feine Verteilungsfunktion mit der groben Verteilungsfunktion übereinstimmt, d. h. $\rho(q, p, t_0) = \tilde{\rho}(q, p, t_0)$. Für einen Zeitpunkt $t > t_0$ ist dann

$$\begin{aligned} \tilde{S}(t) - \tilde{S}(t_0) &= \tilde{S}(t) - S_{\text{Gibbs}}(t_0) \\ &= \tilde{S}(t) - S_{\text{Gibbs}}(t) \\ &= - \int d\Gamma \tilde{\rho}(t) \ln \tilde{\rho}(t) + \int d\Gamma \rho(t) \ln \rho(t) . \end{aligned} \quad (2.B.6)$$

Wir diskretisieren den ersten Summanden und finden

$$\begin{aligned} \int d\Gamma \tilde{\rho}(t) \ln \tilde{\rho}(t) &\xrightarrow{\text{diskret}} \sum_{\Delta\Gamma(q, p)} \Delta\Gamma(q, p) \tilde{\rho}(t) \ln \tilde{\rho}(t) \\ &= \sum_{\Delta\Gamma(q, p)} \ln \tilde{\rho}(q, p, t) \int_{\Delta\Gamma(q, p)} dq' dp' \rho(q', p', t) \\ &= \sum_{\Delta\Gamma(q, p)} \Delta\Gamma(q, p) \rho(q, p, t) \ln \tilde{\rho}(q, p, t) \\ &\xrightarrow{\text{kont}} \int d\Gamma \rho(t) \ln \tilde{\rho}(t) . \end{aligned} \quad (2.B.7)$$

Im vorletzten Schritt haben wir den Mittelwert-Satz der Integralrechnung benutzt. Einsetzen in (2.B.6) liefert

$$\begin{aligned}\tilde{S}(t) - \tilde{S}(t_0) &= \int d\Gamma \rho(t) \ln(\rho(t)/\tilde{\rho}(t)) \\ &\geq \int d\Gamma \rho(t)(1 - \tilde{\rho}(t)/\rho(t)) \\ &= 0 ,\end{aligned}\tag{2.B.8}$$

wobei wir im letzten Schritt die Normierung der Verteilungsfunktionen ρ und $\tilde{\rho}$ benutzt haben. Die über die grobe Verteilungsfunktion definierte Entropie erfüllt somit alle in der Thermodynamik an die Entropie geforderten Eigenschaften.

Die gegebene Definition ist jedoch ebenfalls problematisch.

- (1) Dem Zeitpunkt t_0 kommt eine besondere Rolle zu.
- (2) Die Größe des Volumens $\Delta\Gamma$ um einen beliebigen Phasenraumpunkt ist beliebig.

Je kleiner $\Delta\Gamma$ desto weniger wächst $\tilde{S}(t)$ in einem gegebenen Zeitintervall. Im Limes $\Delta\Gamma \rightarrow 0$ kann sogar $\tilde{S}(t) \rightarrow 0$. Es ist klar, daß die physikalische Entropie nicht von einer willkürlichen Skala abhängen darf.

Die Entropie in der Informationstheorie

Historisch betrachtet hat die Informationstheorie viele Konzepte aus der statistischen Mechanik übernommen. Das ist auch so für den Entropie-Begriff, der von Shannon (Shannon und Weaver, 1949) in die Informationstheorie übernommen wurde. Wir nennen die in der Informationstheorie eingeführte Entropie kurz *Informations-Entropie*. Heute ist die Informationstheorie eine fundierte Theorie und es ist üblich, ihre Konzepte als grundlegend zu betrachten und auf die statistische Mechanik anzuwenden (Jaynes, 1957, 1963). So liefert die Informationstheorie ein Extremalprinzip für die Informations-Entropie, aus dem alle Gibbschen Gleichgewichtsverteilungen hergeleitet werden können.

Die Informations-Entropie kann interpretiert werden als Maß für die durch die statistische Verteilung $\{w_j\}$ generierte Unsicherheit. Tatsächlich, existiert ein $w_s \in \{w_j\}$ mit $w_s = 1$, dann ist $S_{\text{inf}} = 0$. Andererseits, gilt $w_j = 1/K \forall j \in \{1, \dots, K\}$, so ist S_{inf} maximal. Also erhalten wir für den Fall, daß alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind, die größte Unsicherheit und damit die kleinste Menge an Information.

Wir erinnern zunächst an die Definition der Informations-Entropie. Sei $\{w_j\}$ eine diskrete Verteilung von Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von K unterscheidbaren Ereignissen, wobei

$$\sum_{j=1}^K w_j = 1 . \quad (2.B.9)$$

Die Größe

$$S_{\text{inf}} \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{j=1}^K w_j \ln w_j \quad (2.B.10)$$

heißt *Informations-Entropie* oder auch *Shannon-Entropie*¹¹ .

Die Informations-Entropie kann interpretiert werden als Maß für die durch die statistische Verteilung $\{w_j\}$ generierte Unsicherheit. Tatsächlich, existiert ein $w_s \in \{w_j\}$ mit $w_s = 1$, dann ist $S_{\text{inf}} = 0$. Andererseits, gilt $w_j = 1/K \forall j \in \{1, \dots, K\}$, so ist S_{inf} maximal. Also erhalten wir für den Fall, daß alle Ereignisse gleich wahrscheinlich sind, die größte Unsicherheit und damit die kleinste Menge an Information.

Wir kommen nun zur Kontinuums-Formulierung der Informations-Entropie. Für die Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Variablen x mit der Dichte $f(x)$, wobei

$$\int dx f(x) = 1 , \quad (2.B.11)$$

ist die (kontinuierliche) Informations-Entropie

$$S_{\text{inf}} \stackrel{\text{def}}{=} - \int dx f(x) \ln f(x) . \quad (2.B.12)$$

Die Gibbs-Entropie ist somit ein Spezialfall der Informations-Entropie. Für eine kontinuierliche Verteilung von Wahrscheinlichkeiten ist die Entropie (2.B.12) ein Funktional der Verteilungsfunktion.

Von besonderem Interesse für uns sind sogenannte *maximale Verteilungen*, die unter zusätzlichen Bedingungen die Informations-Entropie maximieren. Solche Bedingungen sind, daß die Erwartungswerte bestimmter Zufallsvariablen $A_m(j)$ $m \in \{1, \dots, M\}$ mit vorgegebenen Werten übereinstimmen. Da die maximalen Verteilungen in der statistischen Mechanik ein zentrales Konzept darstellen, wollen wir im folgenden die allgemeine Methode zu ihrer Konstruktion skizzieren.

Wir beginnen wieder mit einer diskreten Verteilung von Wahrscheinlichkeiten für K unterscheidbare Ereignisse. Die zusätzlichen Bedingungen schreiben wir in der Form

$$\langle A_m \rangle = \sum_{j=1}^K A_m(j) \tilde{w}_j , \quad m \in \{1, \dots, M\} , \quad (2.B.13)$$

¹¹Die Informations-Entropie S_{inf} ist gewöhnlich über den Logarithmus zur Basis 2 definiert. In der Statistischen Mechanik ist allerdings die Definition über den natürlichen Logarithmus zweckmäßiger.

wobei die $\langle A_m \rangle$ als bekannt vorausgesetzt werden und die $\{\tilde{w}_j\}$ eine normierte Test-Verteilung für die Wahrscheinlichkeiten ist. Wir suchen das Extremum der Funktion (2.B.10) unter den Nebenbedingungen (2.B.9) und (2.B.13). Dazu suchen wir das globale Extremum der Funktion

$$\mathcal{S} = S_{\text{inf}} - \sum_{m=1}^M \lambda_m \sum_{j=1}^K A_m(j) \tilde{w}_j - \lambda_0 \sum_{j=1}^K \tilde{w}_j, \quad (2.B.14)$$

wobei die *Lagrange-Multiplikatoren*, λ_m $m \in \{1, \dots, M\}$, aus der Nebenbedingung (2.B.13) folgen, während der zusätzliche Lagrange-Multiplikator λ_0 aus der Normierung (2.B.9) bestimmt werden muß.

Als notwendige Bedingung für ein Extremum erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{w}_j} \mathcal{S} = -\ln \tilde{w}_j - \sum_{m=1}^M \lambda_m A_m(j) - (1 + \lambda_0) = 0, \quad (2.B.15)$$

woraus die zugehörige extremale Verteilung folgt

$$w_j = \exp \left(-\Phi - \sum_{m=1}^M \lambda_m A_m(j) \right). \quad (2.B.16)$$

Der Lagrange-Multiplikator λ_0 ist hier durch

$$\Phi = \ln \left[\sum_{j=1}^K \exp \left(- \sum_{m=1}^M \lambda_m A_m(j) \right) \right] \quad (2.B.17)$$

ausgedrückt. Mit der Normierungsbedingung (2.B.9) ergibt sich leicht $\Phi = 1 + \lambda_0$. Die Informations-Entropie der extremalen Verteilung

$$\begin{aligned} S_{\text{inf}} &= \sum_{j=1}^K w_j \left(\Phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m A_m(j) \right) \\ &= \Phi + \sum_{m=1}^M \lambda_m \langle A_m \rangle \end{aligned} \quad (2.B.18)$$

hängt von den Erwartungswerten $\langle A_m \rangle$ über die Lagrange-Multiplikatoren λ_m ab, die mit den Nebenbedingungen (2.B.13) eliminiert werden können.

Wir haben gezeigt, daß die maximale Verteilung ein Extremum für die Informations-Entropie liefert. Es bleibt zu zeigen, daß dieses Extremum wirklich ein Maximum ist.

Gegeben seien zwei normierte Verteilungen $\{w_j\}$ und $\{\tilde{w}_j\}$, wobei erstere die extremale Verteilung (2.B.16) und letztere eine mit den Erwartungswerten $\langle A_m \rangle$ verträgliche, aber sonst beliebige Verteilung sei. Da beide Verteilungen (2.B.13) erfüllen,

gilt

$$\begin{aligned}
S_{\text{inf}} - \tilde{S}_{\text{inf}} &= -\sum_{j=1}^K w_j \ln w_j + \sum_{j=1}^K \tilde{w}_j \ln \tilde{w}_j \\
&= -\sum_{j=1}^K \tilde{w}_j \ln w_j + \sum_{j=1}^K \tilde{w}_j \ln \tilde{w}_j \\
&= \sum_{j=1}^K \tilde{w}_j \ln(\tilde{w}_j/w_j) \\
&\geq \sum_{j=1}^K \tilde{w}_j (1 - w_j/\tilde{w}_j) = 0.
\end{aligned} \tag{2.B.19}$$

Es ist also $S_{\text{inf}} \geq \tilde{S}_{\text{inf}}$, wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn die Verteilungen $\{\tilde{w}_j\}$ und $\{w_j\}$ übereinstimmen. Damit ist die extremale Verteilung (2.B.16) tatsächlich die maximale Verteilung, d. h. sie korrespondiert zum Maximum der Informations-Entropie für gegebene Erwartungswerte (2.B.13).

Gegeben sei jetzt eine kontinuierliche Verteilung von Wahrscheinlichkeiten mit Dichte $f(x)$. Die Nebenbedingungen schreiben wir jetzt in der Form

$$\langle A_m \rangle = \int dx A_m(x) \tilde{f}(x), \quad m \in \{1, \dots, M\}, \tag{2.B.20}$$

wobei die $\langle A_m \rangle$ als bekannt vorausgesetzt werden und $\tilde{f}(x)$ eine normierte Testverteilung für die Wahrscheinlichkeiten ist. Wir suchen das Extremum des Funktionals

$$\mathcal{S}[\tilde{f}] = S_{\text{inf}}[\tilde{f}] - \sum_{m=1}^M \lambda_m \int dx A_m(x) \tilde{f}(x) - \lambda_0 \int dx \tilde{f}(x). \tag{2.B.21}$$

Notwendige Bedingung für eine extremale Verteilung $f(x)$ ist $\delta\mathcal{S} = 0$. Wir erhalten

$$f(x) = \exp \left[-\Phi - \sum_{m=1}^M \lambda_m A_m(x) \right]. \tag{2.B.22}$$

Die Größe

$$\Phi = \ln \left[\int dx \exp \left(- \sum_{m=1}^M \lambda_m A_m(x) \right) \right] \tag{2.B.23}$$

garantiert die Normierung der Verteilung und die übrigen Lagrange-Multiplikatoren λ_m sind durch die Nebenbedingungen (2.B.20) festgelegt.

Statistische Ensembles

Eine zentrale Aufgabe in der statistischen Physik ist die Bestimmung der Verteilungsfunktion $\rho(t)$. Hierbei sind zwei Aspekte interessant:

1. $\rho(t)$ soll eine Lösung der Liouville-Gleichung sein.
2. Die Liouville-Gleichung ist aber eine Differentialgleichung respektive der Zeit. Sie alleine reicht nicht aus, um eine spezielle Lösung für ein gegebenes Ensemble zu bestimmen. Für jede explizite Lösung muß ein Anfangswert vorgegeben werden, der nicht aus der Gleichung heraus bestimmt werden kann.

Wir benötigen also ein zusätzliches Prinzip, daß auf eine spezielle Lösung selektiv ist, indem es den Anfangswert dieser Lösung spezifiziert. Zu diesem Zweck benutzen wir die Maximal-Eigenschaft der Informations-Entropie.

In der statistischen Physik der Vielteilchensysteme im Gleichgewicht ist die Liouville-Gleichung trivial zu lösen. Da Gleichgewichtsverteilungen ρ_{eq} nicht von der Zeit abhängen, müssen diese die Beziehung

$$\{H, \rho_{\text{eq}}\} = 0 \quad (2.B.24)$$

erfüllen. Damit hängt ρ_{eq} lediglich von den Integralen der Bewegung ab. Sind weiterhin die Integrale der Bewegung additiv, so lassen sich weitere Schlüsse über die möglichen Gleichgewichtsverteilungen ziehen. Tatsächlich gibt es nur vier additive Integrale der Bewegung: die Gesamtenergie H , der lineare Gesamtimpuls \mathbf{P} , der Gesamtdrehimpuls \mathbf{L} und die Anzahl N der Teilchen im System. In der statistischen Mechanik ist es üblich, Vielteilchensystemen solchen externen Bedingungen zu unterwerfen, daß $\mathbf{P} = \mathbf{L} = \mathbf{0}$. Dann müssen lediglich zwei Integrale der Bewegung analysiert werden, nämlich die Energie und die Teilchenzahl im System. Wir beschränken uns ohne Verlust der Allgemeinheit auf solche Systeme.

Die Gleichgewichtsverteilung eines solchen Vielteilchensystems mit fester und bekannter Teilchenzahl muß dann von der Form

$$\rho_{\text{eq}} \equiv \rho_{\text{eq}}(H(q, p)) \quad (2.B.25)$$

sein. Ist die Teilchenzahl nicht bekannt, aber für jede Kopie des statistischen Ensembles erhalten, dann gilt

$$\rho_{\text{eq}} \equiv \rho_{\text{eq}}(H_N(q, p), N) \quad , \quad (2.B.26)$$

wobei N als weitere diskrete Variable behandelt wird.

Natürlich hängen Gleichgewichtsverteilungen von Parametern ab, die das System makroskopisch determinieren. Zum Beispiel hängt ρ_{eq} parametrisch vom Volumen V und der Teilchenzahl N ab, wenn letztere für alle Kopien des Ensembles als konstant angenommen werden kann.

Damit hängen Gleichgewichtsverteilungen nicht nur von den Integralen der Bewegung, sondern auch von makroskopischen Bedingungen ab, die durch obige Betrachtung basierend auf der Liouville-Gleichung nicht in Betracht gezogen werden. Wir

benötigen somit weitere Postulate, um die Gleichgewichtsverteilungen eindeutig zu bestimmen.

Traditionsgemäß werden Gleichgewichtsverteilungen basierend auf dem Gibbschen Postulat (Landau und Lifshitz, 1958) der gleichen Wahrscheinlichkeiten für alle erlaubten dynamischen Zustände eines isolierten Systems deduziert. Dieses Postulat bestimmt das sogenannte *mikrokanonische Ensemble* und die zugehörige *mikrokanonische Verteilung*. Von der mikrokanonischen Verteilung können dann alle zu anderen externen Bedingungen gehörenden Gleichgewichtsverteilungen hergeleitet werden.

Dieses in vielen Lehrbüchern zur statistischen Mechanik von Vielteilchensystemen im Gleichgewicht benutzte Schema kann nicht auf die statistische Mechanik von Nichtgleichgewichtssystemen verallgemeinert werden. Deshalb wird hier ein alternatives Schema zur Herleitung von Verteilungsfunktionen, basierend auf dem Konzept der Informations-Entropie, vorgestellt, das für Systeme im Gleichgewicht und im Nichtgleichgewicht anwendbar ist. Insbesondere werden wir zeigen, daß im Gleichgewicht das Maximum der Informations-Entropie mit der Gibbs-Entropie übereinstimmt.

Die extremale Eigenschaft des mikrokanonischen Ensembles

Gegeben sei ein statistisches Ensemble von abgeschlossenen, isolierten Vielteilchensystemen mit konstantem Volumen V und konstanter Teilchenzahl angesehen werden ungefähr die gleiche Energie E , wobei es Abweichungen bis zu $E + \Delta E$ mit $\Delta E \ll E$ geben darf. Ein solches Ensemble repräsentiert einen makroskopischen Zustand mit spezifizierten extensiven Parametern V, N, E .

Sei $\tilde{\rho}(q, p)$ eine normierte Test-Verteilung, die lediglich in der durch die Relation $E \leq H(q, p) \leq E + \Delta E$ definierten Energieschale¹² D von Null verschieden sei. Die zugehörige Informations-Entropie ist

$$S_{\text{inf}}[\tilde{\rho}] = - \int_D d\Gamma_N \tilde{\rho} \ln \tilde{\rho}. \quad (2.B.27)$$

Wir suchen das Extremum dieses Funktionals mit der Nebenbedingung, daß alle erlaubten Verteilungen normiert sein sollen. Dazu suchen wir das globale Extremum des Funktionals

$$\mathcal{S}[\tilde{\rho}] = S_{\text{inf}}[\tilde{\rho}] - \lambda \int_D d\Gamma_N \tilde{\rho}, \quad (2.B.28)$$

¹²Die Energieschale endlicher Dicke ΔE garantiert wohldefinierte Gleichgewichtsverteilungen. Im thermodynamischen Limes, $V \rightarrow \infty$ und $N/V = \text{const.}$, hat der tatsächliche Wert von ΔE keinen Einfluß auf beobachtbare physikalische Größen. ΔE bestimmt lediglich eine additive Konstante in der Entropie, die im Rahmen der klassischen Statistischen Mechanik unbestimmt bleibt.

wobei λ der zur Normierungsbedingung gehörige Lagrange-Multiplikator sei. Notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremums ist

$$\delta\mathcal{S}\Big|_{\tilde{\rho}=\rho_{\text{eq}}} = - \int_D d\Gamma_N (\ln\tilde{\rho} + 1 + \lambda) \Big|_{\tilde{\rho}=\rho_{\text{eq}}} \delta\tilde{\rho} = 0 . \quad (2.B.29)$$

Da die Variation $\delta\tilde{\rho}(q, p)$ beliebig ist, finden wir als extremale Verteilung

$$\rho_{\text{extr}}(q, p|E, N, V) = e^{-(1+\lambda)} , \quad (2.B.30)$$

also eine Konstante in der Energieschale D . Aus der Normierungsbedingung

$$\int_D d\Gamma_N \rho_{\text{extr}}(q, p|E, N, V) = 1 \quad (2.B.31)$$

folgt der Lagrange-Multiplikator λ . Wir finden somit, daß die extremale Verteilung gerade die *mikrokanonische* Gleichgewichtsverteilung

$$\rho_{\text{eq}}(q, p|E, N, V) = W^{-1}(E, N, V) \Delta(H(q, p) - E) , \quad (2.B.32)$$

wobei die Funktion $\Delta(x) = 1 \forall x \in [0, \Delta E]$ ist und sonst verschwindet. Die Größe $W(E, N, V)$ heißt *statistisches Gewicht*. Das statistische Gewicht kann von der Normierungsbedingung für die Verteilung (2.B.32) berechnet werden und hat die Bedeutung eines dimensionslosen Phasenraumvolumens, also der Anzahl der dynamischen Zustände in der Energieschale D :

$$W(E, N, V) = \int d\Gamma_N \Delta(H(q, p) - E) . \quad (2.B.33)$$

In der klassischen statistischen Mechanik kann der Limes $\Delta E \rightarrow 0$ durchgeführt werden und ergibt für die Verteilung (2.B.32)

$$\rho_{\text{eq}}(q, p|E, N, V) = \omega^{-1}(E, N, V) \delta(H(q, p) - E) , \quad (2.B.34)$$

wobei

$$\omega(E, N, V) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta E} W(E, N, V) = \int d\Gamma_N \delta(H(q, p) - E) \quad (2.B.35)$$

die Dichte der dynamischen Zustände auf einer Oberfläche konstanter Energie im Phasenraum ist.

Wir haben das mikrokanonische Ensemble eingeführt, welches Gleichgewichtszustände von (energetisch) isolierten Systemen beschreibt. Es stimmt mit dem Ensemble überein, das aus dem Gibbschen Postulat der gleichen Wahrscheinlichkeiten für alle erlaubten dynamischen Zustände folgt, d. h. die Gleichgewichtsverteilung ist konstant in der Energieschale D und verschwindet außerhalb dieser Schale.

Wie in Abschnitt [AA] läßt sich zeigen, daß die mikrokanonische Verteilung nicht nur eine extremale, sondern sogar die maximale Verteilung bezüglich der Informations-Entropie ist.

Die mikrokanonische Verteilung ist oft für allgemeinere Betrachtungen nützlich, da sie von allen Gibbschen Verteilungen diejenige ist, die am leichtesten mit der Mechanik in Verbindung gebracht werden kann (alle Parameter E , N und V können in der Mechanik eingeführt werden). Es ist evident, daß die mikrokanonische Verteilung (2.B.32) eine stationäre Lösung der Liouville-Gleichung ist, da sie lediglich von einem Integral der Bewegung, nämlich der Energie, abhängt. Es ist wichtig zu berücksichtigen, daß das zusätzliche Gibbsche Postulat nicht zwingend ist, sondern vielmehr die einfachste Hypothese darstellt. Das Problem, diese Hypothese zu rechtfertigen, ist bekannt als *Ergoden-Problem*. Umso wichtiger kann als Argument für das Gibbsche Postulat dienen, daß von allen Verteilungen in der Energieschale D die mikrokanonische Verteilung zum Maximum der Informations-Entropie korrespondiert. Tatsächlich wurde diese extremale Eigenschaft der mikrokanonischen Verteilung zuerst von Gibbs selbst bemerkt (Gibbs, 1972).

Obwohl das mikrokanonische Ensemble viele mathematische Vorteile hat, so daß eine Diskussion von fundamentalen Fragen der statistischen Mechanik möglich wird, ist es für praktische Berechnungen oft untauglich, da die Berechnung des statistischen Gewichts $W(E, N, V)$ sehr kompliziert ist. Statt energetisch isolierte Systeme zu betrachten, ist es üblich, statistische Ensembles zu verwenden, die den Gleichgewichtszustand von Systemen im thermischen Kontakt mit ihrer Umgebung beschreiben.

Die extremale Eigenschaft des kanonischen Ensembles

Das *kanonische Ensemble* beschreibt den Gleichgewichtszustand eines Systems mit einer fixierten Anzahl von Teilchen N und einem konstanten Volumen V im thermischen Kontakt mit einem Wärmebad. Das Wärmebad wird als so groß angenommen, daß sein makroskopischer Zustand während aller Energieflüsse zwischen System und Wärmebad praktisch unverändert bleibt. Im Gleichgewicht kann die Energie eines gegebenen Systems fluktuieren. Folglich muß das statistische Ensemble Kopien des Systems mit allen möglichen Energien beinhalten.

In der klassischen statistischen Mechanik sind die das kanonische Ensemble definierenden Nebenbedingungen durch

$$\int d\Gamma_N \tilde{\rho} H = \langle H \rangle, \quad \int d\Gamma_N \tilde{\rho} = 1 \quad (2.B.36)$$

gegeben. Hierbei sei $\tilde{\rho}(q, p)$ wiederum eine Test-Verteilung. Wir suchen wieder ein Extremum des Entropie-Funktional

$$S_{\text{inf}}[\tilde{\rho}] = - \int d\Gamma_N \tilde{\rho} \ln \tilde{\rho} \quad (2.B.37)$$

unter den aufgeführten Nebenbedingungen. Dazu suchen wir das globale Extremum des Funktionals

$$\mathcal{S}[\tilde{\rho}] = S_{\text{inf}}[\tilde{\rho}] - \beta \int d\Gamma_N \tilde{\rho} H - \lambda \int d\Gamma_N \tilde{\rho} \quad (2.B.38)$$

mit den Lagrange-Multiplikatoren β und λ . Notwendige Bedingung hierfür ist

$$\delta\mathcal{S}\Big|_{\tilde{\rho}=\rho_{\text{eq}}} = - \int d\Gamma_N (\ln\tilde{\rho} + \beta H + 1 + \lambda)\Big|_{\tilde{\rho}=\rho_{\text{eq}}} \delta\tilde{\rho} = 0. \quad (2.B.39)$$

Da die Variation $\delta\tilde{\rho}(q, p)$ beliebig ist, finden wir als extremale Verteilung

$$\rho_{\text{eq}}(q, p|T, N, V) = Z^{-1}(T, N, V) e^{-H(q,p)/T}, \quad (2.B.40)$$

wobei der Lagrange-Multiplikator durch den Parameter $T = 1/\beta$ ersetzt wurde. Die Größe

$$Z(T, N, V) = \int d\Gamma_N e^{-H(q,p)/T} \quad (2.B.41)$$

wird durch die Normierungsbedingung für ρ_{eq} bestimmt und heißt *Zustands-Funktion*. Der Ausdruck (2.B.40) stimmt mit der von Gibbs eingeführten *kanonischen Verteilung* überein, wenn T als Temperatur (in Energie-Einheiten) interpretiert wird.

Für die Entropie des kanonischen Ensembles berechnen wir

$$S(T, N, V) = - \langle \ln\rho_{\text{eq}} \rangle = \frac{\langle H \rangle}{T} + \ln Z(T, N, V). \quad (2.B.42)$$

Es ist üblich, die sogenannte *Freie Energie* durch

$$F = \langle H \rangle_{\text{eq}} - TS \quad (2.B.43)$$

einzuführen. Wir erhalten die wichtige Beziehung

$$F(T, N, V) = -T \ln Z(T, N, V), \quad (2.B.44)$$

das uns die Berechnung des thermodynamischen Potentials $F(T, N, V)$ aus der statistischen Mechanik heraus erlaubt. Damit notieren wir

$$\rho_{\text{eq}}(q, p|T, N, V) = e^{(F-H(q,p))/T}. \quad (2.B.45)$$

Extremale Eigenschaft des großkanonischen Ensembles

Wir betrachten nun ein System mit konstantem Volumen V im Kontakt mit einem Wärmebad und einem Teilchenreservoir. Der Gleichgewichtszustand eines solchen Systems wird durch das *großkanonische Ensemble* beschrieben. Die zugehörige Verteilung heißt entsprechend *großkanonische Verteilung*.

Im Gleichgewicht können sowohl die Energie als auch die Teilchenzahl eines gegebenen Systems fluktuieren. Damit ist das großkanonische Ensemble durch die Erwartungswerte $\langle H \rangle$ und $\langle N \rangle$ charakterisiert. Für klassische Systeme korrespondiert die Gleichgewichtsverteilung zum Maximum der Informations-Entropie

$$S_{\text{inf}}[\tilde{\rho}] = - \sum_N \int d\Gamma_N \tilde{\rho}_N \ln \tilde{\rho}_N \quad (2.B.46)$$

unter den Nebenbedingungen für die Test-Verteilungen $\tilde{\rho}_N(q, p)$

$$\sum_N \int d\Gamma_N \tilde{\rho}_N = 1, \quad \sum_N \int d\Gamma_N \tilde{\rho}_N H_N = \langle H \rangle, \quad \sum_N \int d\Gamma_N \tilde{\rho}_N N = \langle N \rangle, \quad (2.B.47)$$

wobei die Größen $\langle H \rangle$ und $\langle N \rangle$ gegeben seien. Wir suchen das globale Extremum des Funktionals

$$\mathcal{S}[\tilde{\rho}] = S_{\text{inf}}[\tilde{\rho}] - \sum_N \int d\Gamma_N \tilde{\rho}_N (\beta H_N - \nu N + \lambda). \quad (2.B.48)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren β , ν und λ werden aus den Nebenbedingungen (2.B.47) bestimmt. Als notwendige Bedingung für eine extremale Verteilung erhalten wir

$$\delta \mathcal{S} \Big|_{\tilde{\rho}=\rho_{\text{eq}}} = - \sum_N \int d\Gamma_N (\ln \tilde{\rho} + \beta H - \nu N + 1 + \lambda) \Big|_{\tilde{\rho}=\rho_{\text{eq}}} \delta \tilde{\rho}. \quad (2.B.49)$$

Da die Variation $\delta \tilde{\rho}(q, o)$ beliebig ist, finden wir die Verteilung

$$\rho_{\text{eq}}(q, p|T, \mu, V) \equiv \rho_N(q, p|T, \mu, V) = Z^{-1}(T, \mu, V) e^{-(H_N(q,p) - \mu N)/T}, \quad (2.B.50)$$

wobei die Zustandsfunktion

$$Z(T, \mu, V) = \sum_N \int d\Gamma_N e^{-(H_N(q,p) - \mu N)/T} \quad (2.B.51)$$

durch die Normierungsbedingung für ρ_{eq} bestimmt ist. Wir haben die Lagrange-Multiplikatoren β und ν als $\beta = 1/T$ und $\nu = \mu/T$ geschrieben.

Die extremale Verteilung (2.B.50) stimmt mit der großkanonischen Verteilungsfunktion überein, wenn T als Temperatur und μ als chemisches Potential pro Teilchen interpretiert werden.

Für die Entropie des großkanonischen Ensembles berechnen wir

$$S(T, \mu, V) = -\langle \ln \rho_{\text{eq}} \rangle_{\text{eq}} = \frac{1}{T} (\langle H \rangle - \mu \langle N \rangle) + \ln Z(T, \mu, V). \quad (2.B.52)$$

Wir definieren das thermodynamische Potential $\Omega(T, \mu, V)$ durch

$$\Omega = \langle H \rangle - TS - \mu \langle N \rangle \quad (2.B.53)$$

und finden folgende Beziehung zur großkanonischen Zustandsfunktion:

$$\Omega(T, \mu, V) = -T \ln Z(T, \mu, V). \quad (2.B.54)$$

Zusammenfassung und Ausblick

Wir wollen im folgenden unsere Diskussion über die Gibbschen Ensembles zusammenfassen und drei Punkte hervorheben.

- (1) Wir haben gezeigt, daß sämtliche Gleichgewichtsverteilungen aus dem fundamentalen Prinzip über das Maximum der Informations-Entropie unter Nebenbedingungen, die das statistische Ensemble makroskopisch charakterisieren, hergeleitet werden können. Obwohl dieses Prinzip für Systeme im Gleichgewicht äquivalent zum Postulat über gleiche Wahrscheinlichkeiten für alle erlaubten dynamischen Zustände ist, wird es sich hinsichtlich der Erweiterung auf Systeme im Nichtgleichgewicht als wesentlich weitreichender und mächtiger erweisen. In vielen Fällen kann der makroskopische Nichtgleichgewichtszustand eines Systems nämlich als partieller Gleichgewichtszustand in seinen semi-makroskopischen Untersystemen angesetzt werden. Dann erlaubt das Prinzip über das Maximum der Informations-Entropie statistische Ensembles zu konstruieren, die solche partiellen Gleichgewichtszustände unter gegebenen makroskopischen Bedingungen für die Untersysteme repräsentieren.
- (2) Wir haben gesehen, daß einige thermodynamische Größen als Lagrange-Multiplikatoren behandelt und durch die das statistische Ensemble spezifizierenden Nebenbedingungen bestimmt werden. Zum Beispiel werden die Temperatur T und das chemische Potential μ durch die Bedingung bestimmt, daß die mit der Verteilung (2.B.50) berechneten Erwartungswerte von H und N mit den vorgegebenen Werten $\langle H \rangle$ und $\langle N \rangle$ übereinstimmen. Andererseits liefern diese Forderungen thermodynamische *Zustandsgleichungen*, mit denen die innere Energie $U = \langle H \rangle$ und die durchschnittliche Anzahl von Teilchen als Funktionen der natürlichen thermodynamischen Variablen T , μ und V ausgedrückt werden können. Die Interpretation von thermodynamische Größen als Lagrange-Multiplikatoren erscheint in der physikalischen Betrachtungsweise als etwas formal. Wir werden aber sehen, daß im Rahmen der statistischen Mechanik für das Nichtgleichgewicht diese Betrachtungsweise sehr hilfreich ist, weil der auf den extremalen Eigenschaften der Informations-Entropie basierende Zugang es ermöglicht, thermodynamische Beziehungen auf Nichtgleichgewichtssysteme zu erweitern.
- (3) In der bisherigen Betrachtung haben wir nur zwei Integrale der Bewegung berücksichtigt, nämlich die Energie und die Teilchenzahl. Der Zugang über die extremale Eigenschaft der Informations-Entropie erlaubt aber ohne Schwierigkeiten, weitere Integrale der Bewegung zu berücksichtigen, falls diese zur Charakterisierung eines Gleichgewichtszustandes benötigt werden.

Anhang C

In diesem Anhang illustrieren wir das Konzept der relevanten Verteilung an drei wichtigen Beispielen. Wir führen die Verteilung einer klassischen Flüssigkeit im lokalen Gleichgewicht, die relevante Verteilung eines klassischen Gases und die Quasi-Gleichgewichtsverteilung eines aus schwach wechselwirkenden Untersystemen bestehenden Systems ein.

Lokales Gleichgewicht in klassischen Flüssigkeiten

Gegeben sei eine klassische Flüssigkeit aus identischen Teilchen mit der Masse m , beschrieben durch die Hamilton-Funktion

$$H = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|), \quad (2.C.1)$$

wobei $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ die potentielle Energie aufgrund der Wechselwirkung zwischen den Teilchen bezeichne.

Wir betrachten speziell das *hydrodynamische Stadium*. Der Nichtgleichgewichtszustand wird dann durch Dichten der additiven Integrale der Bewegung beschrieben. Für eine einkomponentige Flüssigkeit sind dies die Teilchenzahl-, Impuls- und Energiedichte. Die zugehörigen dynamischen Variablen sind

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= \sum_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), & \mathbf{p}(\mathbf{r}) &= \sum_i \mathbf{p}_i \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \\ H(\mathbf{r}) &= \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right) \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.C.2)$$

Wie im allgemeinen Schema zur Konstruktion der relevanten Verteilung angegeben, führen wir die relevanten dynamischen Variablen $P_m(\mathbf{r})$ und die thermodynamisch konjugierten Parameter $F_m(t, \mathbf{r})$ ein. Sie sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{r}) &= H(\mathbf{r}) & F_0(t, \mathbf{r}) &= \beta(t, \mathbf{r}), \\ P_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{p}(\mathbf{r}) & F_1(t, \mathbf{r}) &= -\beta(t, \mathbf{r}) \mathbf{v}(t, \mathbf{r}), \\ P_2(\mathbf{r}) &= n(\mathbf{r}) & F_2(t, \mathbf{r}) &= -\beta(t, \mathbf{r}) \left(\mu(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{2} m v^2(t, \mathbf{r}) \right). \end{aligned} \quad (2.C.3)$$

Wir erhalten damit für als relevante Verteilung eine *lokale Gleichgewichtsverteilung*

$$\rho_{\text{led}} = \exp \left\{ -\Phi(t) - \int d\mathbf{r} \beta(t, \mathbf{r}) \left[H(\mathbf{r}) - \left(\mu(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{2} m v^2(t, \mathbf{r}) \right) n(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}) \right] \right\} \quad (2.C.4)$$

mit dem Massieu-Planck-Funktional

$$\Phi(t) = \ln \text{Sp} \exp \left\{ - \int d\mathbf{r} \beta(t, \mathbf{r}) \left[H(\mathbf{r}) - \left(\mu(t, \mathbf{r}) - \frac{1}{2} m v^2(t, \mathbf{r}) \right) n(\mathbf{r}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (2.C.5)$$

Im weiteren wird angenommen, daß das System mit einem Teilchenreservoir in Kontakt steht. Damit bedeutet die Operation Sp eine Integration über den Phasenraum und eine nachfolgende Summation über alle Teilchen.

Die Funktionen $\beta(t, \mathbf{r})$, $\mu(t, \mathbf{r})$ und $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, aus denen die Lagrange- Multiplikatoren gebildet werden, sind durch die Selbstkonsistenz-Bedingungen

$$\langle H(\mathbf{r}) \rangle(t) = \langle H(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t), \quad \langle n(\mathbf{r}) \rangle(t) = \langle n(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t), \quad \langle \mathbf{p}(\mathbf{r}) \rangle(t) = \langle \mathbf{p}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t), \quad (2.C.6)$$

festgelegt. Die Operation $\langle \dots \rangle_{\text{led}}$ bedeutet hierbei die Mittelung bezüglich der zur Verteilung (2.C.4) gehörenden Ensembles. Im Folgenden wird gezeigt, daß der Parameter $\beta(t, \mathbf{r})$ als inverse lokale Temperatur betrachtet werden kann, $\mu(t, \mathbf{r})$ als lokales chemisches Potential und $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ als lokale Massen-Geschwindigkeit.

Dazu transformieren wir auf neue Phasenraum-Variablen

$$(q, p) = (\{\mathbf{r}_j\}, \{\mathbf{p}_j\}) \longrightarrow (\{\tilde{\mathbf{r}}_j\}, \{\tilde{\mathbf{p}}_j\}) = (\tilde{q}, \tilde{p}) \quad (2.C.7)$$

mit

$$\mathbf{r}_j = \tilde{\mathbf{r}}_j, \quad \mathbf{p}_j = \tilde{\mathbf{p}}_j + m\mathbf{v}(t, \mathbf{r}_j). \quad (2.C.8)$$

Die Jacobi-Determinante dieser Transformation ist eins und wir erhalten für die Ausdrücke (2.C.2)

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}) &= \tilde{n}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{r}) = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + m\mathbf{v}(t, \mathbf{r})\tilde{n}(\mathbf{r}), \\ H(\mathbf{r}) &= \tilde{H}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} m v^2(t, \mathbf{r}) \tilde{n}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.C.9)$$

Damit läßt sich die lokale Gleichgewichtsverteilung (2.C.4) in eine kompaktere Form bringen

$$\rho_{\text{led}} = \exp \left\{ -\Phi(t) - \int d\mathbf{r} \beta(t, \mathbf{r}) \left[\tilde{H}(\mathbf{r}) - \mu(t, \mathbf{r})\tilde{n}(\mathbf{r}) \right] \right\} \quad (2.C.10)$$

und der Ausdruck (2.18) für das Massieu-Planck-Funktional vereinfacht sich zu:

$$\Phi(t) = \ln \text{Sp} \exp \left\{ - \int d\mathbf{r} \beta(t, \mathbf{r}) \left[\tilde{H}(\mathbf{r}) - \mu(t, \mathbf{r})\tilde{n}(\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (2.C.11)$$

Da die Jacobi-Determinante der Transformation (2.C.8) eins ist, kann die Verteilung (2.C.10) entweder als Funktion der neuen Phasenraum-Variablen (\tilde{q}, \tilde{p}) oder

als Funktion der alten Variablen (q, p) erklärt werden. In letzterem Fall muß lediglich die zu (2.C.8) inverse Transformation in (2.C.10) eingesetzt werden. Wir wollen annehmen, daß $\rho_{\text{led}} = \rho_{\text{led}}(\tilde{q}, \tilde{p}, t)$ gilt. Aus (2.C.10) folgt dann

$$\langle \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t) = \langle \mathbf{p}(\mathbf{t}) \rangle_{\text{led}}(t) - m \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \langle n(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t) = 0. \quad (2.C.12)$$

Mit den Selbstkonsistenz-Bedingungen (2.C.6) finden wir

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = \frac{\langle \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \rangle(t)}{m \langle n(\mathbf{r}) \rangle(t)}, \quad (2.C.13)$$

d. h., $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ ist die Massen-Geschwindigkeit. Damit sind die dynamischen Variablen $\tilde{H}(\mathbf{r})$ und $\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, definiert durch die zu (2.C.9) inverse Transformation, gerade die Energie- und Impulsdichte im mitbewegten Koordinatensystem.

Wir untersuchen jetzt die physikalische Bedeutung der Lagrange-Multiplikatoren $\beta(t, \mathbf{r})$ und $\mu(t, \mathbf{r})$. Dazu betrachten wir einen vollständigen Satz von thermodynamischen Relationen für den lokalen Gleichgewichtszustand. Die allgemeinen thermodynamischen Beziehungen (2.26) für relevante Ensembles liefern

$$\frac{\delta \Phi(t)}{\delta F_m(t, \mathbf{r})} = - \langle P_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t) = - \langle P_m(\mathbf{r}) \rangle(t), \quad (2.C.14)$$

wobei die dynamischen Variablen $P_m(\mathbf{r})$ und Lagrange-Multiplikatoren durch (2.C.3) gegeben sind. Es ist allerdings üblich, das Massieu-Planck-Funktional nach $\beta(t, \mathbf{r})$, $\mu(t, \mathbf{r})$ und $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ zu variieren. Wir erhalten

$$\frac{\delta \Phi(t)}{\delta \beta(t, \mathbf{r})} = - \langle \tilde{H}(\mathbf{r}) \rangle(t) + \mu(t, \mathbf{r}) \langle n(\mathbf{r}) \rangle(t), \quad (2.C.15)$$

$$\frac{\delta \Phi(t)}{\delta \mu(t, \mathbf{r})} = \beta(t, \mathbf{r}) \langle n(\mathbf{r}) \rangle(t), \quad \frac{\delta \Phi(t)}{\delta \mathbf{v}(t, \mathbf{r})} = \mathbf{0}.$$

Das Entropie-Funktional (2.22) für die lokale Gleichgewichtsverteilung (2.C.4) in der kompakten Form (2.C.10) ist in Abhängigkeit von den neuen Phasenraum-Variablen

$$S(t) = \Phi(t) + \int d\mathbf{r} \beta(t, \mathbf{r}) \left(\langle \tilde{H}(\mathbf{r}) \rangle(t) - \mu(t, \mathbf{r}) \langle \tilde{n}(\mathbf{r}) \rangle(t) \right). \quad (2.C.16)$$

Mit den Gleichungen (2.C.15) finden wir für die Variation des Entropie-Funktional

$$\delta S(t) = \int d\mathbf{r} \beta(t, \mathbf{r}) \left(\delta \langle \tilde{H}(\mathbf{r}) \rangle(t) - \mu(t, \mathbf{r}) \delta \langle \tilde{n}(\mathbf{r}) \rangle(t) \right) \quad (2.C.17)$$

und für die Funktional-Ableitungen nach den Erwartungswerten

$$\frac{\delta S(t)}{\delta \langle \tilde{H}(\mathbf{r}) \rangle(t)} = \beta(t, \mathbf{r}), \quad \frac{\delta S(t)}{\delta \langle \tilde{n}(\mathbf{r}) \rangle(t)} = - \beta(t, \mathbf{r}) \mu(t, \mathbf{r}). \quad (2.C.18)$$

Um ein Analogon zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik zu erhalten, führen wir die *Entropiedichte* $S(t, \mathbf{r})$ durch

$$S(t) = \int d\mathbf{r} S(t, \mathbf{r}) \quad (2.C.19)$$

ein und erhalten mit (2.C.17) für die Variation von $S(t, \mathbf{r})$

$$T(t, \mathbf{r}) \delta S(t, \mathbf{r}) = \delta \langle \tilde{H}(\mathbf{r}) \rangle (t) - \mu(t, \mathbf{r}) \delta \langle \tilde{n}(\mathbf{r}) \rangle (t), \quad (2.C.20)$$

wobei $T(t, \mathbf{r}) \equiv \beta^{-1}(t, \mathbf{r})$ ein neuer lokaler Lagrange-Multiplikator ist. Dies ist tatsächlich die gesuchte Verallgemeinerung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für Systeme im lokalen Gleichgewicht. Im Sinne dieser Verallgemeinerung werden die Funktionen $T(t, \mathbf{r})$ und $\mu(t, \mathbf{r})$ als lokale Temperatur und lokales chemisches Potential pro Teilchen interpretiert.

Die relevante Verteilung für klassische Gase

Wir haben bereits im letzten Abschnitt erläutert, daß das kinetische Stadium eines verdünnten klassischen Gases adäquat durch eine Ein-Teilchen-Verteilungsfunktion beschrieben werden kann. Diese Funktion haben wir als Erwartungswert der dynamischen Variablen (2.4) definiert. Wir notieren die Ein-Teilchen Phasenraum-Variablen als $x = (\mathbf{r}, \mathbf{p})$ und $x_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j)$ und benutzen die Schreibweise

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \equiv f_1(x, t) = \langle N_1(x) \rangle (t) \quad (2.C.21)$$

mit der Ein-Teilchen Phasenraumdicke

$$N_1(x) \equiv N_1(x; x_1, \dots, x_N) = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j). \quad (2.C.22)$$

Die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion kann also aus der N -Teilchen Verteilungsfunktion $\rho(x_1, \dots, x_N)$ durch Integration über die Phasenraumvariablen $dx_j \equiv d\mathbf{r}_j d\mathbf{p}_j$ erhalten werden:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= \int \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_N}{N! (2\pi)^{3N}} \rho(x_1, x_2, \dots, x_N, t) N_1(x; x_1, \dots, x_N) \\ &= \int \frac{dx_2 \dots dx_N}{(N-1)! (2\pi)^{3N}} \rho(x, x_2, \dots, x_N, t). \end{aligned} \quad (2.C.23)$$

Da angenommen wird, daß die N -Teilchen Verteilungsfunktion auf eins normiert ist, erhalten wir als Normierungsbedingung für die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion

$$\int dx f_1(x, t) = N. \quad (2.C.24)$$

Diese Normierungsbedingung ist inadäquat, wenn die Teilchenzahl im System nicht fixiert ist. Dann ist es geschickter, die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion auf eins zu normieren. O.B.d.A nehmen wir an, daß die Teilchenzahl im System fixiert sei und benutzen die Normierungsbedingung (2.C.24).

Für die Herleitung der relevanten Verteilung eines verdünnten klassischen Gases wird die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion $f_1(x, t)$ als Observable betrachtet. Die relevante dynamische Variable P_m ist die Ein-Teilchen Phasenraumdicke $N_1(x)$, wobei $m = x$ als kontinuierlicher Index aufgefasst wird.

Statt (2.46) haben wir nun

$$\rho_{\text{rel}} = \exp \left(-\Phi(t) - \int dx a(t, x) N_1(x; x_1, \dots, x_N) \right) . \quad (2.C.25)$$

Die Funktionen $a(t, x)$ sind die Lagrange-Multiplikatoren, die aus den Selbstkonsistenz-Bedingungen

$$\langle N_1(x) \rangle (t) = \langle N_1(x) \rangle_{\text{rel}} (t) \quad (2.C.26)$$

bestimmt werden. Hierbei bedeutet $\langle \dots \rangle_{\text{rel}} (t)$ die Mittelung bezüglich der relevanten Verteilung (2.C.25). Das Massieu-Planck-Funktional $\Phi(t)$ ist durch die Normierungsbedingung bestimmt. Da die Phasenraumdicke $N_1(x)$ eine Summe von δ -Distributionen ist, können die Integrale über die Phasenraum-Variablen x einfach ausgeführt werden. Wir erhalten

$$\rho_{\text{rel}}(x_1, \dots, x_N, t) = \frac{1}{Z(t)} \exp \left(- \sum_{j=1}^N a(t, x_j) \right) \quad (2.C.27)$$

mit der Zustands-Funktion

$$Z(t) = e^{\Phi(t)} = \int d\Gamma_N \exp \left(- \sum_{j=1}^N a(t, x_j) \right) . \quad (2.C.28)$$

Wir zeigen nun, daß die Selbstkonsistenz-Bedingung (2.C.26) explizit nach der Funktion $a(t, x)$ aufgelöst werden können. Dazu setzen wir die Verteilung (2.C.27) in die rechte Seite von (2.C.26) ein und benutzen die Beziehung (2.C.21) zwischen der Ein-Teilchen Verteilungsfunktion und dem Erwartungswert der Ein-Teilchen Phasenraumdicke bzgl. (2.C.27). Wir finden

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= \frac{1}{Z(t)} \int d\Gamma_N \exp \left(- \sum_{j=1}^N a(t, x_j) \right) \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j) \\ &= \frac{N}{Z(t) N! (2\pi)^{3N}} e^{-a(t, x)} \left(\int dx_1 e^{-a(t, x_1)} \right)^{N-1} . \end{aligned} \quad (2.C.29)$$

Andererseits liefert die Berechnung der Zustands-Funktion (2.C.28)

$$Z(t) = \frac{1}{N! (2\pi)^{3N}} \left(\int dx_1 e^{-a(t, x_1)} \right)^N . \quad (2.C.30)$$

Kombinieren wir beide Resultate, so wird

$$f_1(x, t) = N \frac{e^{-a(t, x)}}{\int dx e^{-a(t, x)}}, \quad (2.C.31)$$

und damit

$$a(t, x) = -\ln f_1(x, t). \quad (2.C.32)$$

Einsetzen in (2.C.27) ergibt die relevante N -Teilchen Verteilungsfunktion, ausgedrückt durch Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen:

$$\rho_{\text{rel}}(x_1, \dots, x_N, t) = \frac{1}{Z(t)} \prod_{j=1}^N f_1(x_j, t). \quad (2.C.33)$$

Die Zustands-Funktion (2.C.28) ist durch die Normierungsbedingung (2.C.24) für die Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen gegeben. Wir haben

$$Z(t) = \int d\Gamma_N \prod_{j=1}^N f_1(x_j, t) = \frac{N^N}{N!(2\pi)^{3N}}. \quad (2.C.34)$$

Wir haben also gefunden, daß die relevante N -Teilchen Verteilungsfunktion als Produkt von Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen geschrieben werden kann. Mit anderen Worten, Korrelationen zwischen Teilchen sind im zugehörigen statistischen Ensemble nicht vorhanden. Da Korrelationen mit zunehmender Dichte immer wichtiger werden, kann die relevante Verteilung (2.C.33) nur für ein ausreichend verdünntes Gas eine gute Approximation der wahren Nichtgleichgewichtsverteilung sein.

Die zur relevanten Verteilung (2.C.33) korrespondierende Entropie ist

$$\begin{aligned} S(t) &= - \int d\Gamma_N \rho_{\text{rel}}(x_1, \dots, x_N, t) \ln \rho_{\text{rel}}(x_1, \dots, x_N, t) \\ &= - \int dx f_1(x, t) \ln f_1(x, t) + \ln Z. \end{aligned} \quad (2.C.35)$$

Der erste Summand ist die Boltzmann-Entropie für ein ideales Gas (Ferzinger und Kasper, 1972) und die zusätzliche Konstante $\ln Z$ stammt von der Normierungsbedingung.

Im allgemeinen ist die multiplikative Eigenschaft (2.C.33) der relevanten Verteilungsfunktion nicht erfüllt für die wahre N -Teilchen Nichtgleichgewichtsverteilung. Trotzdem kann die Boltzmann-Entropie durch (2.C.35) definiert werden, wobei $f_1(x, t)$ durch Integration von $\rho(x_1, \dots, x_N, t)$ über alle Phasenraum-Variablen mit Ausnahme von $x = x_1$ erhalten werden kann. Allerdings ist der Ausdruck (2.C.35) nur die Entropie unter Vernachlässigung aller Korrelationen. Die Einbeziehung von Korrelationen in der relevanten Beschreibung ist möglich. Dazu muß aber die Menge der relevanten Variablen erweitert werden.

Die relevante Verteilung für schwach wechselwirkende Untersysteme

Gegeben sei ein System, das in schwach wechselwirkenden Untersysteme aufgeteilt werden kann. Die Aufteilung impliziert, daß der Austausch von Energie und Teilchen zwischen den Untersystemen nur langsam im Vergleich zu anderen das System charakterisierenden Zeitskalen stattfindet. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Untersysteme sich in der Art der Teilchen unterscheiden und zwischen den verschiedenen Arten große Massendifferenzen bestehen.

Für nicht zu kleine Zeitskalen kann der Nichtgleichgewichtszustand eines Systems adäquat durch die Erwartungswerte der relevanten dynamischen Variablen beschrieben werden. Dies sind die Hamilton-Funktionen $H^{(j)}$ der Untersysteme und andere Variablen $C_m^{(j)}$, die das partielle Gleichgewicht in den Untersystemen beschreiben¹³.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit schreiben wir die Hamilton-Funktion des Systems als Summe der Hamilton-Funktionen der Untersysteme¹⁴

$$H = \sum_{j=1}^K H^{(j)}, \quad (2.C.36)$$

wobei K die Anzahl der Untersysteme bezeichne.

Wir konstruieren jetzt das relevante statistische Ensemble für die thermodynamische Beschreibung des gegebenen Nichtgleichgewichtssystems. Dazu folgen wir der in [SS] dargestellten allgemeinen Konstruktion und schreiben die relevante Verteilung in der Form

$$\rho_{\text{rel}}(t) = \exp \left(-\Phi(t) - \sum_{j=1}^K \beta^{(j)}(t) \left(H^{(j)} - \sum_m \lambda_m^{(j)}(t) C_m^{(j)} \right) \right). \quad (2.C.37)$$

Die Lagrange-Multiplikatoren $\beta^{(j)}(t)$ und $\lambda_m^{(j)}(t)$ werden aus den Selbstkonsistenz-Bedingungen

$$\langle H^{(j)} \rangle (t) = \langle H^{(j)} \rangle_{\text{rel}} (t), \quad \langle C_m^{(j)} \rangle (t) = \langle C_m^{(j)} \rangle_{\text{rel}} (t), \quad (2.C.38)$$

bestimmt. Die Massieu-Planck-Funktion $\Phi(t)$ ergibt sich aus der Normierungsbedingung:

$$\Phi(t) = \ln \text{Sp} \exp \left(- \sum_{j=1}^K \beta^{(j)}(t) \left(H^{(j)} - \sum_m \lambda_m^{(j)}(t) C_m^{(j)} \right) \right). \quad (2.C.39)$$

¹³Diese Variablen können zum Beispiel die Integrale der Bewegung der Untersysteme sein.

¹⁴Da die Hamilton-Funktion des Systems eine Erhaltungsgröße liefert, müssen die Wechselwirkungsbeiträge in den $H^{(j)}$ mitgenommen werden. Für den hier angenommenen Fall von schwachen Wechselwirkungen ist es dann irrelevant, zu welchem Untersystem die im Vergleich zu Energie des Untersystems kleine Wechselwirkungsenergie addiert wird. Für den Fall, daß die Wechselwirkungsenergie einen wichtigen Beitrag zur Energiebilanz im Untersystem liefert, sollte sie als separates Energiereservoir behandelt werden.

Die zur relevanten Verteilung (2.C.37) gehörende Entropie ist

$$S(t) = \Phi(t) + \sum_{j=1}^K \beta^{(j)}(t) \left(\langle H^{(j)} \rangle(t) - \sum_m \lambda_m^{(j)}(t) \langle C_m^{(j)} \rangle(t) \right). \quad (2.C.40)$$

Aus der allgemeinen Beziehung (2.28) folgt, daß die Lagrange-Multiplikatoren $\beta^{(j)}(t)$ zu den Erwartungswerten der Energie der Untersysteme thermodynamisch konjugiert sind:

$$\beta^{(j)}(t) = \left(\frac{\partial S(t)}{\partial \langle H^{(j)} \rangle(t)} \right) \langle C_m^{(j)} \rangle(t). \quad (2.C.41)$$

Die Funktion $T^{(j)}(t) \equiv 1/\beta^{(j)}(t)$ kann als Nichtgleichgewichts-Temperatur des Untersystems interpretiert werden, da alle Funktionen $T^{(j)}(t)$ eine Gleichgewichtstemperatur T anstreben, wenn das System das globale Gleichgewicht erreicht. Es ist wichtig zu verstehen, daß die Nichtgleichgewichtstemperatur der Untersysteme nicht notwendig positiv sein muß. Diese Aussage ist keineswegs paradox, da $T^{(j)}(t)$ nicht die Temperatur eines Wärmebades darstellt.

Literatur

- Bogoliubov, N. N., Amsterdam 1962, *Problems of Dynamic Theory in Statistical Physics*, Reprinted in: *Studies in Statistical Mechanics* (J. de Boer und G. E. Uhlenbeck, Editoren) North-Holland
- de Groot, S. R. und Mazur, P., 1962, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam
- Ehrenfest, P., 1959, *Collected scientific papers*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- Ferziger, J. H. und Kasper, H. G., 1972, *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North-Holland, Amsterdam-London
- Gibbs, J., 1972, *Thermodynamics and Statistical Physics*, Pergamon Press, Oxford
- Jaynes, E. T., 1957, *Phys. Rev.* 106
- Jaynes, E. T., 1963, *Information Theory and Statistical Mechanics. In: Statistical Physics. Brandeis Lectures, vol. 3*, Benjamin, New York
- Kawasaki, K. und Gunton, J. D., 1973, *Phys. Rev.* **8A**, 2048
- Kirkwood, J. G., 1946, *J. Chem. Phys.* **14**, 180
- Landau, L. D. und Lifshitz, E. M., 1958, *Statistical Physics*, Pergamon Press, London

- Loschmid, J., 1876, *Wien. Ber.* **73**, 135
- Peierls, R., 1974, in *Lecture Notes in Physics*, Vol. 31, p. 2, Springer, Berlin
- Shannon, C. E. und Weaver, W., 1949, *The Mathematical Theory of Communications*, University of Illinois Press, Urbana
- Vladimirov, V. S., 1971, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York
- Zermelo, E., 1896, *Wien. Ann.* **57**, 485
- Zubarev, D., Morozov, V., und Röpke, G., 1996, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes*, Wiley-VCH Verlag
- Zubarev, D. N., 1970, *Teor. Mat. Fiz.* **3**, 276
- Zubarev, D. N. und Kalashnikov, V. P., 1970, *Teor. Mat. Fiz.* **3**, 126

–III–

DIE KLASSISCHE KINETISCHE THEORIE

Die einfachsten Systeme, die im Rahmen der Statistischen Mechanik des Gleichgewichtes untersucht werden können, sind Systeme, deren Konstituenten nur schwach miteinander wechselwirken. Diese Systeme lassen sich sozusagen leicht um das korrespondierende freie System entwickeln. In der Statistischen Mechanik von Nichtgleichgewichtsprozessen läßt sich eine ähnliche Aussage machen. Für den Fall eines fast freien Systems ist es nämlich möglich, das sogenannte *kinetische Stadium* der Systementwicklung ohne allzu große Probleme zu analysieren. Wir haben bereits in Abschnitt 2.1.1 gezeigt, daß in diesem Stadium alle Vielteilchen-Verteilungsfunktionen bereits durch die Einteilchen-Verteilungsfunktion vollständig bestimmt sind. Das Hauptproblem besteht dann darin, eine kinetische Gleichung für die Einteilchen-Verteilungsfunktion herzuleiten.

Die Fundamente der klassischen Kinetik wurden vor mehr als einem Jahrhundert von Maxwell (1867) und Boltzmann (1964) gelegt. In der Herleitung seiner berühmten kinetischen Gleichung für dünne Gase hat Boltzmann zwei Mechanismen implementiert, die eine zeitliche Variation der Einteilchen-Verteilungsfunktion bewirken: den dynamischen Prozeß der Molekülbewegung und den stochastischen Prozeß von binären Kollisionen. Boltzmann benutzte die Hypothese des sogenannten molekularen Chaos (auch *Stoßzahlansatz* genannt), wonach keine Korrelationen unter Molekülen zwischen den Kollisionen existieren. Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn die Dichte des Gases so klein ist, daß echte Vielteilchenkorrelationen vernachlässigt werden können, d. h. wenn korrelierte Kollisionen zwischen mehr als zwei Teilchen vernachlässigt werden können. Dennoch bleibt die von Boltzmann vorgeschlagene kinetische Theorie nur eine Approximation, zu der es prinzipiell durch Vielteilchenkorrelationen induzierte Korrekturen gibt. Um diese dichteabhängigen Korrekturen in eine kinetische Theorie miteinzubeziehen, entwickelte Bogoliubov in seiner richtungsweisenden Monographie (Bogoliubov, 1946) eine allgemeinere Methode zur

Herleitung von kinetischen Gleichungen. Der grundsätzliche Unterschied zur Arbeit von Boltzmann war, daß Bogoliubov als Ausgangspunkt die Liouville-Gleichung mit einer speziellen Anfangsbedingung verwendete. Er forderte nämlich, daß es anfänglich zwischen den Teilchen keine Korrelationen geben sollte. Diese lediglich zu irgendeinem in der Vergangenheit des betrachteten physikalischen Systems einmalig gestellte Forderung ersetzt den Stoßzahlansatz von Boltzmann.

Die klassische kinetische Theorie kann heute als ein fundierter Zweig der Statistischen Mechanik des Nichtgleichgewichtes betrachtet werden. Es existieren viele Methoden zur Herleitung von kinetischen Gleichung aus den Axiomen der Statistischen Mechanik (Balescu, 1975; Klimontovich, 1982; Resibois und de Leener, 1977). Auch gibt es mathematische Methoden, die es erlauben, analytische Lösungen von kinetischen Gleichungen zu finden oder wenigstens die Berechnung von Transportkoeffizienten zu ermöglichen (Cercignani, 1975; Ferziger und Kasper, 1972).

3.1 Die Verallgemeinerten Kinetischen Gleichungen

Gegeben sei ein System aus N identischen Teilchen in einem Volumen V . Die Phasenraumvariablen notieren wir wieder mit $x_j = (\mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. In praktisch allen relevanten Fällen kann die Hamilton-Funktion folgendermaßen geschrieben werden:

$$H = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_j^2}{2m} + \Phi^{\text{ext}}(\mathbf{r}_j, t) \right) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \Phi_{jk}, \quad (3.1)$$

wobei $\Phi_{jk} = \Phi_{kj} = \Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|)$ die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Teilchen und Φ^{ext} ein externes Potential bezeichne, für das wir $\Phi^{\text{ext}} \equiv 0$ im weiteren annehmen.

Der Ausgangspunkt für die kinetische Beschreibung des Systems ist die Annahme, daß der Nichtgleichgewichtszustand durch die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion $f_1(x, t) = f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ beschreibbar ist, wie bereits in Abschnitt 2.1.1 diskutiert. Aus der Methode der statistischen Ensembles für das Nichtgleichgewicht folgt dann, daß die N -Teilchen Verteilungsfunktion $\rho(\{x\}_N, t) \equiv \rho(x_1, \dots, x_N, t)$ ein Funktional von $f_1(x, t)$ ist. Die relevante Verteilung haben wir bereits in Abschnitt 2.1.2 hergeleitet. Die wahre N -Teilchen Verteilungsfunktion $\rho(\{x\}_N, t) \equiv \rho(x_1, \dots, x_N, t)$ ist Lösung der Liouville-Gleichung mit gebrochener Zeitumkehrinvarianz

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_N \right) \rho(\{x\}_N, t) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \left[\rho(\{x\}_N, t) - \frac{1}{Z} \prod_{j=1}^N f_1(x_j, t) \right], \quad (3.2)$$

wobei L_N den N -Teilchen Liouville-Operator

$$L_N = L_N^{(0)} + L_N^{(1)} \quad (3.3)$$

bezeichne. Der Operator $L_N^{(0)}$ generiert die freie Bewegung der Teilchen und $L^{(1)}$ generiert die Wechselwirkungen. Die explizite Form dieser Operatoren ist durch die Hamilton-Funktion des Systems gegeben. Für die Hamilton-Funktion (3.1) ist

$$L_N^{(0)} = \sum_{j=1}^N L_j^{(0)}, \quad L_j^{(0)} = -i \frac{\mathbf{p}_j}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_j}, \quad (3.4)$$

$$L_N^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N L_j^{(1)}, \quad L_j^{(1)} = i \frac{\partial \Phi_{jk}}{\partial \mathbf{r}_k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_k} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right). \quad (3.5)$$

Wir leiten jetzt eine formal geschlossene kinetische Gleichung für die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion aus (3.2) und der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(x_1, t) = \frac{1}{2\pi} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{dx_{j+1}}{j!(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\{x\}_N, t) \quad (3.6)$$

her. Mit Hilfe von (3.2) kann die Zeitableitung der N -Teilchen Verteilungsfunktion eliminiert werden und wir erhalten¹

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(x_1, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \prod_{j=1}^{N-1} \frac{dx_{j+1}}{j!(2\pi)^3} i L_N \rho(\{x\}_N, t). \quad (3.7)$$

Um die rechte Seite dieser Gleichung durch die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion auszudrücken, integrieren wir (3.2) über das uneigentliche Zeitintervall $(-\infty, t]$ und erhalten

$$\rho(\{x\}_N, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} e^{-i(t-\tilde{t})L_N} \frac{1}{Z} \prod_{j=1}^N f_1(x_j, \tilde{t}). \quad (3.8)$$

Dies kann folgendermaßen geschrieben werden

$$\rho(\{x\}_N, t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-i\tau L_N} \frac{1}{Z} \prod_{j=1}^N f_1(x_j, t - \tau). \quad (3.9)$$

Die Verteilungsfunktion für ein System aus N -Teilchen im Nichtgleichgewicht zu einem Zeitpunkt t wird aus einem unkorrelierten Zustand in der Vergangenheit generiert. Dies kann als verallgemeinerte Fassung von Bogoliubovs *Randbedingung der Abschwächung der Anfangskorrelationen* aufgefasst werden. Im hier diskutierten formalen Rahmen folgt Bogoliubovs Randbedingung unmittelbar aus der Annahme, daß die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion den Nichtgleichgewichtszustand des Systems festlegt.

¹Wegen der speziellen Form der relevanten Verteilung in (3.2) liefert der Quellterm keinen Beitrag.

Einsetzen der formalen Lösung (3.8) in (3.7) und partielle Integration der rechten Seite liefert mit (3.3), (3.4) und (3.5) die *verallgemeinerte kinetische Gleichung*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_1^{(0)} + \int dx_2 iL_{12}^{(1)} f_1(x_2, t) \right) f_1(x_1, t) = \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} \int \prod_{j \neq k}^N \frac{dx_j}{j(2\pi)^3} iL_N^{(1)} e^{-i(t-\tilde{t})L_N} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} + iL_N \right) \frac{1}{Z} \prod_{k=1}^N f_1(x_k, \tilde{t}). \quad (3.10)$$

Der zweite Summand auf der linken Seite beschreibt die freie Bewegung der Teilchen, der dritte Summand die Wechselwirkung mit dem Medium. Die rechte Seite von (3.10) wird oft *verallgemeinertes Kollisionsintegral* genannt.

Die kinetische Gleichung für die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion $f_1(x, t)$ ist nicht-linear und nicht-Markovsch. Für den Fall geringer Teilchendichte oder schwacher Wechselwirkung zwischen den Teilchen existiert ein sogenannter Kleinheitsparameter, der eine Entwicklung des Kollisionsintegrals erlaubt.

3.2 Reduzierte Verteilungsfunktionen

Wir definieren die *reduzierte s-Teilchen Verteilungsfunktion* $f_s(\{x\}_s, t)$ durch die Beziehung

$$f_s(\{x\}_s, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^s} \int \prod_{j=1}^{N-s} \frac{dx_{s+j}}{j(2\pi)^3} \rho(\{x\}_s, x_{s+1}, \dots, x_N, t), \quad s \in \{1, \dots, N-1\}. \quad (3.11)$$

Jede der Funktionen (3.11) kann als Mittelwert $\langle N_s(\{x\}_s) \rangle(t)$ der *s-Teilchen Phasenraumdichte* notiert werden

$$N_s(\{x\}_s) \equiv N_s(\{x\}_s, \{\tilde{x}\}_N) = \sum_{j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_s} \prod_{k=1}^s \delta(x_k - \tilde{x}_{j_k}), \quad (3.12)$$

wobei die Argumente $\{x\}_s = (x_1, \dots, x_s)$ als Indizes von $N_s(\{x\}_s)$ aufgefaßt werden sollen und $\{\tilde{x}\}_N = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ dagegen zeigen soll, daß die *s-Teilchen Dichte* eine Funktion auf dem Phasenraum des Systems ist. Mit der Phasenraumdichte (3.12) kann (3.11) folgendermaßen geschrieben werden:

$$f_s(\{x\}_s, t) = \langle N_s(\{x\}_s) \rangle(t) = \int \prod_{j=1}^N \frac{d\tilde{x}_j}{j(2\pi)^3} N_s(\{x\}_s, \{\tilde{x}\}_N) \rho(\{\tilde{x}\}_N, t). \quad (3.13)$$

Eine wichtige Eigenschaft der reduzierten Verteilungsfunktionen ist die Rekursionsbeziehung

$$f_s(\{x\}_s, t) = \frac{1}{N-s} \int dx_{s+1} f_{s+1}(\{x\}_s, x_{s+1}, t), \quad (3.14)$$

die die Berechnung der s -Teilchen Verteilungsfunktion aus den $s < N$ -Teilchen Verteilungsfunktionen durch Integration über die entsprechenden $N - s$ Phasenraumvariablen erlaubt.

3.3 BBGKY-Hierarchie

Um von der kinetischen Gleichung für die N -Teilchen Verteilungsfunktion zu einer Bestimmungsgleichung für die $N > s$ -Teilchen Verteilungsfunktion zu gelangen, integrieren wir (3.2) über x_{s+1}, \dots, x_N mit ($s \in \{1, \dots, N - 1\}$). Mit den (3.4) und (3.5) erhalten wir das System von Gleichungen

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_s \right) f_s(\{x\}_s, t) + \int dx_{s+1} \sum_{j=1}^s iL_{j,s+1}^{(1)} f_{s+1}(\{x\}_{s+1}, t) \\ & = -\varepsilon \left[f_s(\{x\}_s, t) - \prod_{j=1}^s f_1(x_j, t) \right], \quad (s \in \{1, 2, \dots\}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

wobei der thermodynamische Limes schon durchgeführt wurde².

Jeder der Gleichungen (3.15) mit $s \geq 2$ enthält einen Quellterm, der zu Bogoliubovs Randbedingung der abgeschwächten Anfangskorrelationen korrespondiert. Ein ähnliches System von Gleichungen, allerdings ohne Quellterme, wird *Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon* (BBGKY) *Hierarchie* (Bogoliubov, 1946; Born und Green, 1946; Kirkwood, 1946; Yvon, 1935) genannt. Die fundamentale Bedeutung der durch die Quellterme repräsentierten Randbedingungen wurde zuerst von Bogoliubov (1946) bemerkt.

Für den Fall eines Wechselwirkungspotentials $\Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|)$ mit endlicher Reichweite r_0 , schreiben wir $\Phi(|\mathbf{r}|) = \phi_0 \tilde{\Phi}(|\tilde{\mathbf{r}}|)$, wobei $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r_0$ eine dimensionslose Koordinate ist und ϕ_0 die Intensität der Wechselwirkung bestimmt. Außerdem führen wir in diesem Fall noch die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} und den mittleren Impuls $\bar{p} = m\bar{v}$ eines Teilchens ein. Beide Größen können aus der mittleren kinetischen Energie des Teilchens bestimmt werden. Die Hierarchie (3.15) kann dann durch dimensionslose Größen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\tilde{L}_s^{(0)} + i\lambda\tilde{L}_s^{(1)} \right) \tilde{f}_s(\{\tilde{x}\}_s, \tilde{t}) + \lambda\tilde{n} \int d\tilde{x}_{s+1} \sum_{j=1}^s i\tilde{L}_{j,s+1}^{(1)} \tilde{f}_{s+1}(\{\tilde{x}\}_{s+1}, \tilde{t}) \\ & = -\varepsilon \left[\tilde{f}_s(\{\tilde{x}\}_s, \tilde{t}) - \prod_{j=1}^s \tilde{f}_1(\tilde{x}_j, \tilde{t}) \right], \quad (s \in \{1, 2, \dots\}), \end{aligned} \quad (3.16)$$

²In dem Prelimes-Ausdruck für den Quellterm enthält das Produkt der Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen den zusätzlichen Faktor $N!/N^s(N-s)!$, der im thermodynamischen Limes gegen eins konvergiert.

wobei $\tilde{L}_s^{(0)}$, $\tilde{L}_s^{(1)}$ und $\tilde{L}_{j,s+1}^{(1)}$ die Liouville-Operatoren (3.4) und (3.5) ausgedrückt durch die dimensionslosen Variablen

$$\tilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\mathbf{p}}_j, \tilde{\mathbf{r}}_j), \quad \tilde{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\mathbf{P}}_j}{\tilde{p}_j}, \quad \tilde{r}_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\mathbf{r}}_j}{\tilde{r}_0}, \quad \tilde{t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t}{t_0}, \quad t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r_0}{\bar{v}}. \quad (3.17)$$

seien. Wir haben weiterhin die dimensionslose Ein-Teilchen Verteilungsfunktion

$$\tilde{f}_1(\tilde{x}_j, \tilde{t}) = \left(\frac{\bar{p}^3}{n} \right)^s f_s(\{x\}_s, t). \quad (3.18)$$

Das System von Gleichungen (3.16) enthält zwei Parameter: $\lambda = \phi_0/m\bar{v}^2$ gibt die Intensität der Wechselwirkung bezogen auf die mittlere kinetische Energie der Teilchen an und $\tilde{n} = nr_0^3$ kann als Teilchenzahl im Wechselwirkungsvolumen aufgefasst werden. Damit existieren zwei typische Szenarien, die eine Störungstheorie erlauben: $\lambda \ll 1$, $\tilde{n} \approx 1$ korrespondiert zu einem schwach wechselwirkenden System und $\lambda \approx 1$, $\tilde{n} \ll 1$ dagegen korrespondiert zu einem stark verdünnten Gas.

3.4 Die Boltzmann-Gleichung

Als elementare Anwendung der Hierarchie (3.15) leiten wir als wichtigen Spezialfall die kinetische Gleichung für ein verdünntes Gas her. Es wird also angenommen, daß der dimensionslose Parameter \tilde{n} so klein ist, daß die Hierarchie näherungsweise abgebrochen werden kann.

Wir notieren die ersten beiden Gleichungen der Hierarchie (3.15) explizit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_1^{(0)} \right) f_1(x_1, t) + \int dx_2 iL_{12}^{(1)} f_2(\{x\}_2, t) = 0, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_{12} \right) f_2(\{x\}_2, t) + \int dx_3 (iL_{13}^{(1)} + iL_{23}^{(1)}) f_3(\{x\}_3, t) \\ = \varepsilon [f_2(\{x\}_2, t) - f_1(x_1, t)f_1(x_2, t)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Der zweite Summand auf der linken Seite von (3.19) ist bereits proportional zum Kleinheitsparameter \tilde{n} . Um eine kinetische Gleichung in der Ordnung \tilde{n}^0 zu erhalten, genügt es somit (3.20) in niedrigster Ordnung zu lösen, d.h. die Drei-Teilchen Verteilungsfunktion wird vernachlässigt. Die Bestimmungsgleichung für die Zwei-Teilchen Verteilungsfunktion in dieser Näherung ist dann

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_{12} + \varepsilon \right) f_2^{(0)}(\{x\}_2, t) = \varepsilon f_1(x_1, t)f_1(x_2, t), \quad (3.21)$$

mit der formalen Lösung

$$f_2^{(0)}(\{x\}_2, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 d\tilde{t} e^{\varepsilon \tilde{t}} e^{i\tilde{t}L_2} f_1(x_1, t + \tilde{t}) f_1(x_2, t + \tilde{t}) . \quad (3.22)$$

Selbst in dieser Näherung ist die Abhängigkeit der Zwei-Teilchen Verteilungsfunktion von der Ein-Teilchen Verteilungsfunktion nicht-Markovsch. Die Einbeziehung von Gedächtniseffekten liegt aber außerhalb des Rahmens der hier betrachteten Näherung. Deshalb ist (3.19) in niedrigster Ordnung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_1^{(0)} \right) f_1(x_1, t) = 0 , \quad (3.23)$$

mit der Lösung

$$f_1(x_1, t + \tilde{t}) = e^{-i\tilde{t}L_1^{(0)}} f_1(x_1, t) . \quad (3.24)$$

Einsetzen in (3.22) liefert eine Zwei-Teilchen Verteilungsfunktion, die keine Gedächtniseffekte mehr beinhaltet:

$$f_2^{(0)}(\{x\}_2, t) = S_{-\infty}(12) f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) . \quad (3.25)$$

Die Wirkung des Operators $S_{-\infty}(12)$ auf die Phasenraumvariablen x_1 und x_2 ist durch

$$S_{-\infty}(12) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 d\tau e^{\varepsilon \tau} e^{i\tau L_{12}} e^{-i\tau L_{12}^{(0)}} \quad (3.26)$$

erklärt, wobei $L_{12}^{(0)} = L_1^{(0)} + L_2^{(0)}$ den Liouville-Operator zweier nicht wechselwirkender Teilchen bezeichne. Aus Abels Theorem folgt, daß der ε -Limes in (3.26) durch einen t -Limes ersetzt werden kann

$$S_{-\infty}(12) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} S_{\tau}(12) , \quad (3.27)$$

$$S_{\tau}(12) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\tau L_{12}} e^{-i\tau L_{12}^{(0)}} . \quad (3.28)$$

$S_{\tau}(12)$ heißt *Zwei-Teilchen Strömungsoperator* und bestimmt die durch die Wechselwirkung zwischen den Teilchen generierte Zeitabhängigkeit der Phasenraumvariablen x_1 und x_2 .

Einsetzen der Zwei-Teilchen Verteilungsfunktion (3.25) in (3.19) liefert eine geschlossene kinetische Gleichung für die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion in erster Ordnung im Kleinheitsparameter \tilde{n} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + iL_1^{(0)} \right) f_1(x_1, t) = - \int dx_2 iL_{12}^{(1)} S_{-\infty}(12) f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) . \quad (3.29)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung heißt *Kollisionsintegral*.

Im folgenden wollen wir (3.29) in eine bekanntere Form bringen und die Boltzmann-Gleichung herleiten. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
S_{-\infty}(12) & f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{i\tau L_{12}} e^{-i\tau L_{12}^{(0)}} f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) \\
&= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} f_1\left(\mathbf{r}_1(\tau) - \frac{\tau}{m} \mathbf{p}_1(\tau), \mathbf{p}_1(\tau), t\right) f_1\left(\mathbf{r}_2(\tau) - \frac{\tau}{m} \mathbf{p}_2(\tau), \mathbf{p}_2(\tau), t\right),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

wobei die Variablen

$$\mathbf{r}_j(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\tau L_{12}} \mathbf{r}_j, \quad \mathbf{p}_j(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\tau L_{12}} \mathbf{p}_j, \quad j \in \{1, 2\} \tag{3.31}$$

den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{r}_j(\tau) = \{\mathbf{r}_j, H_{12}\}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{p}_j(\tau) = \{\mathbf{p}_j, H_{12}\} \tag{3.32}$$

mit der Zwei-Teilchen Hamilton-Funktion

$$H_{12} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \Phi_{12} \tag{3.33}$$

genügen. Die Anfangsbedingungen für die Hamilton-Gleichungen sind $\mathbf{r}_j(0) = \mathbf{r}_j$ und $\mathbf{p}_j(0) = \mathbf{p}_j$. Wir wollen nun den in (3.30) beschriebenen Limes vollziehen.

Nach Voraussetzung hat das Wechselwirkungspotential nur eine endliche Reichweite r_0 und führt nicht zur Bildung von Zwei-Teilchen Korrelationen. Die Teilchen bewegen sich bis auf Zeitintervalle mit endlicher Länge τ_0 störungsfrei. Dies impliziert die Existenz von Vektoren

$$\mathbf{P}_j \equiv \mathbf{P}_j(x_1, x_2) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \mathbf{p}_j(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{i\tau L_{12}} \mathbf{p}_j, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{3.34}$$

Genauso gilt

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau (\mathbf{P}_j - \mathbf{p}_j(\tau)) = 0. \tag{3.35}$$

Diese Beziehung erlaubt uns die Existenz der Vektoren

$$\mathbf{R}_j = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \left(\mathbf{r}_j(\tau) - \frac{\tau}{m} \mathbf{p}_j(\tau) \right) \tag{3.36}$$

zu beweisen. Mit $d\mathbf{r}_j(\tau)/d\tau = \mathbf{p}_j(\tau)/m$ finden wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_j(\tau) - \frac{\tau}{m} \mathbf{p}_j(\tau) &= \mathbf{r}_j + \frac{1}{m} \int_0^\tau d\tilde{\tau} \mathbf{p}_j(\tilde{\tau}) - \frac{\tau}{m} \mathbf{p}_j(\tau) \\
&= \mathbf{r}_j(\tau) - \frac{1}{m} \int_0^\tau d\tilde{\tau} (\mathbf{P}_j - \mathbf{p}_j(\tilde{\tau})) + \frac{\tau}{m} (\mathbf{P}_j - \mathbf{p}_j(\tau)).
\end{aligned}$$

Im Grenzfall $\tau \rightarrow -\infty$ und mit (3.35) folgt

$$\mathbf{R}_j \equiv \mathbf{R}_j(x_1, x_2) = \mathbf{r}_j - \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 d\tau (\mathbf{p}_j(\tau) - \mathbf{P}_j) . \quad (3.37)$$

Die physikalische Bedeutung der Vektoren (3.34) und (3.37) ist evident. Die \mathbf{P}_j sind die Impulse der Teilchen zur Zeit $\tau \rightarrow -\infty$, deren Anfangszustände aus der (asymptotisch) unendlich fernen Vergangenheit bis zur Gegenwart $\tau = 0$ in die Zustände x_1 und x_2 evolviert werden. Die \mathbf{R}_j bestimmen die Ortsänderungen der Teilchen durch die Kollisionen. Es ist wichtig, daß \mathbf{P}_j und \mathbf{R}_j von den Phasenraumvariablen x_1 und x_2 beider Teilchen abhängen. Da die Zwei-Teilchen Hamilton-Funktion bezüglich der Teilchenorte lediglich von dem Abstand $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ beider Teilchen abhängt, gilt

$$\mathbf{R}_j(x_1, x_2) = \mathbf{R}_j(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) , \quad \mathbf{P}_j(x_1, x_2) = \mathbf{P}_j(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) . \quad (3.38)$$

Als wichtiges Resultat erhalten wir für (3.30)

$$S_{-\infty}(12) f_1(x_1, t) f_1(x_2, t) = f_1(X_1, t) f_1(X_2, t) , \quad (3.39)$$

mit den Definitionen $X_j = (\mathbf{R}_j, \mathbf{P}_j)$. Wir benutzen die Beziehungen

$$\begin{aligned} iL_1^{(0)} f_1(x_1, t) &= \frac{1}{m} \mathbf{p}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} f_1(x_1, t) , \\ iL_{12}^{(1)} f_1(X_1, t) f_1(X_2, t) &= \{f_1(X_1, t) f_1(X_2, t), \Phi_{12}\} , \end{aligned}$$

wobei $\{\cdot, \cdot\}$ die klassische Poisson-Klammer bezeichne, und bringen die kinetische Gleichung (3.29) in folgende Form

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} \right) f_1(x_1, t) = - \int dx_2 \{f_1(X_1, t) f_1(X_2, t), \Phi_{12}\} . \quad (3.40)$$

Diese kinetische Gleichung für ein verdünntes Gas wurde zuerst von Bogoliubov (Bogoliubov, 1946) hergeleitet. Im folgenden wird gezeigt, daß das Kollisionsintegral von Boltzmann eine Näherung der rechten Seite von (3.40) darstellt.

Für praktische Rechnungen ist die in (3.40) gewählte Darstellung des Kollisionsintegrals oft problematisch, da die Poisson-Klammer Ortsgradienten des Wechselwirkungspotentials Φ_{12} beinhalten und diese für undurchdringliche Teilchen nicht überall definiert werden können. In solchen Fällen hat Φ_{12} einen singulären Anteil. Dies motiviert den Versuch, das Wechselwirkungspotential auf der rechten Seite von (3.40) zu eliminieren.

Wir ersetzen die in (3.40) auftauchende Poisson-Klammer durch

$$\begin{aligned} \{f_1(X_1, t) f_1(X_2, t), \Phi_{12}\} &= \{f_1(X_1, t) f_1(X_2, t), H_{12}\} \\ &- \left\{ f_1(X_1, t) f_1(X_2, t), \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2) \right\} . \end{aligned} \quad (3.41)$$

Nun beinhaltet die Zwei-Teilchen Hamilton-Funktion H_{12} das Wechselwirkungspotential. Wir analysieren jeden der beiden Summanden auf der rechten Seite dieser Beziehung.

Wir nehmen an, daß der Nichtgleichgewichtszustand des Gases homogen im Ortsraum ist, d.h. $f_1(x_1, t) = f_1(\mathbf{p}_1, t)$. Dann verschwindet die Poisson-Klammer, die die Zwei-Teilchen Hamilton-Funktion beinhaltet. Dazu bemerken wir, daß H_{12} für das Zwei-Teilchen Problem ein Integral der Bewegung ist, also $\exp(i\tau L_{12})H_{12} = H_{12}$. Außerdem gilt nach Voraussetzung $\exp(i\tau L_{12})\Phi_{12} \rightarrow 0$ für $\tau \rightarrow -\infty$. Somit ist

$$H_{12} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{i\tau L_{12}} H_{12} = \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2) , \quad (3.42)$$

und folglich

$$\{f_1(P_1, t)f_1(P_2, t), H_{12}\} = \left\{f_1(P_1, t)f_1(P_2, t), \frac{1}{2m} (P_1^2 + P_2^2)\right\} = 0 . \quad (3.43)$$

Für die Berechnung der zweiten Poisson-Klammer nutzen wir aus, daß die Impulse \mathbf{P}_j nur über den Abstand $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ von den Ortskoordinaten abhängt. Daher gilt

$$\left\{f_1(P_1, t)f_1(P_2, t), \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2)\right\} = -\frac{1}{m} (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{21}} f_1(P_1, t)f_1(P_2, t) . \quad (3.44)$$

Einsetzen in die kinetische Gleichung (3.40) liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1, t) = \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}_{12} \int d\mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{12}} f_1(\mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{P}_2, t) . \quad (3.45)$$

Die Integration über \mathbf{r}_{12} wird üblicherweise in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) durchgeführt, wobei $\rho \in [0, \infty)$ den Stoßparameter und $\phi \in [0, 2\pi]$ den *Azimuth* einer Zwei-Teilchen Kollision bezeichne. Die Koordinatenlinie $z \in (-\infty, \infty)$ verläuft entlang des Relativimpulses $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$. In diesem Koordinatensystem gilt

$$(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{12}} f_1(\mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{P}_2, t) = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| \cdot \frac{\partial}{\partial z} f_1(\mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{P}_2, t) , \quad (3.46)$$

so, daß das z -Integral in (3.45) leicht zu berechnen ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\partial}{\partial z} f_1(\mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{P}_2, t) = f_1(\mathbf{P}_1, t) f_1(\mathbf{P}_2, t) \Big|_{z \rightarrow -\infty}^{z \rightarrow +\infty} . \quad (3.47)$$

Nun sind \mathbf{P}_1 und \mathbf{P}_2 die Impulse der einlaufenden Teilchen ($\tau \rightarrow -\infty$), die zum Zeitpunkt $\tau = 0$ an den Orten \mathbf{r}_1 und \mathbf{r}_2 sind und die Impulse \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 besitzen. Da die z -Achse des Koordinatensystems entlang des Relativimpulses $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ gewählt wurde, korrespondiert der Limes $z \rightarrow -\infty$ zum physikalischen Prozeß nicht wechselwirkender Teilchen zum Zeitpunkt $\tau = 0$. Andererseits korrespondiert der Limes

$z \rightarrow \infty$ zu einem echten Streuprozeß, nach dem sich die Teilchen zum Zeitpunkt $\tau = 0$ mit den Impulsen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 bewegen. Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &\rightarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{p}_2 && \text{für } z \rightarrow -\infty, \\ \mathbf{P}_1 &\rightarrow \tilde{\mathbf{p}}_1, \mathbf{P}_2 \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}_2 && \text{für } z \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.48)$$

wobei $\tilde{\mathbf{p}}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \rho, \phi)$ und $\tilde{\mathbf{p}}_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \rho, \phi)$ die einlaufenden Impulse vor dem Streuprozeß mit den auslaufenden Impulsen \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 bezeichne. Damit wird aus (3.45)

$$\frac{\partial}{\partial t} f_1(\mathbf{p}_1, t) = \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int d\mathbf{p}_2 v_{12} [f_1(\tilde{\mathbf{p}}_1, t) f_1(\tilde{\mathbf{p}}_2, t) - f_1(\mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{p}_2, t)] . \quad (3.49)$$

Hierbei bezeichnet $v_{12} = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| / m$ die Relativgeschwindigkeit der Teilchen. Gleichung (3.49) ist die bekannte Boltzmann-Gleichung für ein homogenes Gas.

Für ein inhomogenes Gas hängt die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion von den Koordinaten ab. Um für diesen Fall das Wechselwirkungspotential in (3.40) zu eliminieren, wird die rechte Seite von (3.41) durch Ableitungen der Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen nach der Schwerpunktskoordinate ersetzt. In vielen Anwendungen variiert die Ein-Teilchen Verteilungsfunktion nur wenig über den durch die Reichweite r_0 der Wechselwirkung bestimmten Bereich. Das Kollisionsintegral kann dann nach dem Kleinheitsparameter r_0/l entwickelt werden, wobei l die charakteristische Länge bezeichne, auf der Änderungen der Ein-Teilchen Verteilungsfunktion in die Analyse mit einbezogen werden müssen. In führender Ordnung kann in (3.40) die Ersetzung $f_1(\mathbf{p}, t) \rightarrow f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}, t)$ vorgenommen werden. Dies liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p}_1 \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) & \quad (3.50) \\ = \int_0^\infty d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int d\mathbf{p}_2 v_{12} [f_1(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{p}}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{p}}_2, t) - f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) f_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, t)] , & \end{aligned}$$

die bekannte *kinetische Gleichung von Boltzmann* als zentralen Ausgangspunkt zur Analyse von Nichtgleichgewichtsprozessen in verdünnten Gasen, in denen nur Kollisionen zwischen zwei Teilchen vorkommen. Wie bereits oben erwähnt, kann diese Gleichung benutzt werden, um sowohl das kinetische als auch das hydrodynamische Stadium des betrachteten Prozeßablaufes zu studieren.

Wir wiederholen nochmals alle Annahmen die zur Herleitung der kinetischen Gleichung von Boltzmann aus der Liouville-Gleichung gemacht wurden. Die erste Annahme ist die Abschwächung der Anfangskorrelationen, die in der Liouville-Gleichung und in der BBGKY-Hierarchie als Quellterme auftauchen. Diese Randbedingung bedeutet, daß der Nichtgleichgewichtszustand eines Gases und dessen Zeitentwicklung vollständig durch Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen beschrieben werden können.

Dies bedeutet eine Einschränkung auf Prozesse, in denen weder Bindungszustände noch andere langlebige Korrelationen zwischen Teilchen eine wichtige Rolle spielen.

Die zweite Annahme ist, daß der Dichteparameter \tilde{n} ein Kleinheitsparameter ist, d.h., daß die Reichweite der Wechselwirkung viel kleiner als der mittlere Abstand zwischen den Teilchen ist. Diese Annahme wurde benutzt, um die BNGKY Hierarchie auf der Ebene der Zwei-Teilchen Verteilungsfunktion abzubrechen, so daß Kollisionen zwischen mehr als zwei Teilchen vernachlässigt werden konnten. Die Markovsche Version der Zwei-Teilchen Verteilungsfunktion wird dabei durch den Operator $S_{-\infty}(12)$ generiert, der instantane Kollisionen zwischen zwei Teilchen beschreibt.

Weiterhin wurde angenommen, daß die charakteristische Länge l , auf der die Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen variieren, groß im Vergleich zur Reichweite der Wechselwirkung r_0 ist. Daraus folgt, daß im Kollisionsintegral alle Ein-Teilchen Verteilungsfunktionen am selben Ort ausgewertete werden.

Die Annahmen machen deutlich, in welche Richtungen die Boltzmann-Gleichung verallgemeinert werden kann. Zum Beispiel können im Rahmen der verallgemeinerten Bogoliubovschen Randbedingungen nicht-lokale Effekte in Kollisionen zwischen zwei Teilchen und höhere Terme in in der Entwicklung des Kollisionsintegrals in \tilde{n} berücksichtigt werden.

Literatur

- Balescu, R., 1975, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, New York
- Bogoliubov, N. N., 1946, *Problems of Dynamic Theory in Statistical Physics*, (In Russisch) Gostekhizdat, Moskau-Leningrad, Nachdruck in: *Studies in Statistical Mechanics*, Bd. 1 (J. de Boer und G. E. Uhlenbeck, Hrsg.) North-Holland, Amsterdam 1962
- Boltzmann, L., 1964, *Lectures on Gas Theory*, University of California Press, Berkeley
- Born, M. und Green, H. S., 1946, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **188**, 10
- Cercignani, C., 1975, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scottish Academic Press, Edinburgh und London
- Ferziger, J. H. und Kasper, H. G., 1972, *Mathematical Theory of Transport Processes in Gases*, North-Holland, Amsterdam-London
- Kirkwood, J. G., 1946, *J. Chem. Phys.* **14**, 180

Klimontovich, Y. L., 1982, *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas*, Pergamon Press, Oxford

Maxwell, J. C., 1867, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **157**, 49

Resibois, P. und de Leener, M., 1977, *Classical Kinetic Theory of Fluids*, Wiley, New York

Yvon, J., 1935, *Actualites Scientifiques et Industrielles* 203

HYDRODYNAMISCHE PROZESSE

In diesem Kapitel werden statistische Verteilungen konstruiert, die eine Beschreibung des hydrodynamischen Stadiums physikalischer Prozesse erlauben. Weiterhin werden Prozessgleichungen hergeleitet, die die Zeitentwicklung von Nichtgleichgewichtszuständen in diesem Stadium bestimmen (Zubarev et al., 1996).

4.1 Hydrodynamik

Wir beginnen mit einer Einführung in die allgemeine Theorie hydrodynamischer Prozesse und ihrer Beschreibung durch Verteilungsfunktionen.

4.1.1 Lokale Erhaltungssätze

Gegeben sei ein klassisches System im Nichtgleichgewicht, beschrieben durch die Mittelwerte bestimmter dynamischer Variablen $a_m(\mathbf{r})$. Die zugehörigen Bewegungsgleichungen können wie folgt formuliert werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_m(\mathbf{r}) = \{a_m(\mathbf{r}), H\} = -\nabla \cdot j_m(\mathbf{r}) + R_m(\mathbf{r}) . \quad (4.1)$$

Die dynamischen Variablen $j_m(\mathbf{r})$ heißen *lokale Flüsse* und die $R_m(\mathbf{r})$ *Quellen*¹. Es wird angenommen, daß die Quellen in (4.1) nicht als verallgemeinerte Divergenz geschrieben werden können.

Die Gestalt der Bewegungsgleichungen (4.1) erlauben es, Nichtgleichgewichtsprozesse weiter zu diskriminieren. Für den Fall, daß $R_m(\mathbf{r}) = 0$ in allen Gleichungen

¹Das Symbol $\nabla \cdot j_m(\mathbf{r})$ ist eine verallgemeinerte Divergenz, da $j_m(\mathbf{r})$ nicht notwendigerweise ein Vektor ist.

gilt, sind die dynamischen Variablen $a_m(\mathbf{r})$ Dichten von erhaltenen Größen. Die zugehörigen Prozesse werden durch eine Menge von Mittelwerten $\langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t)$ beschrieben und heißen *hydrodynamische Prozesse* (im weitesten Sinne). Gilt andererseits $\nabla \cdot \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) = 0$ in allen Gleichungen, so handelt es sich bei den zugehörigen Prozessen um reine *Relaxationsprozesse*.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns ausschließlich mit hydrodynamischen Prozessen. Die Bewegungsgleichungen für die relevanten Variablen haben dann die Gestalt von lokalen Erhaltungssätzen:

$$\frac{\partial}{\partial t} a_m(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) . \quad (4.2)$$

4.1.2 Verallgemeinerte Hydrodynamische Gleichungen

Die hydrodynamischen Bewegungsgleichungen können aus

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t) = -\nabla \cdot \langle \mathbf{j}_m(\mathbf{r}) \rangle(t) \quad (4.3)$$

hergeleitet werden, wobei die Mittelwerte bezüglich einer N -Teilchen Verteilungsfunktion für das Nichtgleichgewicht berechnet werden. In dem uns interessierenden Fall können wir von einer lokalen Gleichgewichtsverteilung ausgehen ²

$$\rho_{\text{led}}(q, p, t) = \exp \left(-\Phi(t) - \sum_m \int d\mathbf{r} F_m(\mathbf{r}, t) a_m(\mathbf{r}) \right) . \quad (4.4)$$

Die lokalen Parameter $F_m(\mathbf{r}, t)$ sind Lagrange-Multiplikatoren, die über die Selbstkonsistenz-Bedingungen

$$\langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t) = \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t)_{\text{led}} \quad (4.5)$$

von den Observablen $\langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t)$ abhängen. Das *Massieu-Planck-Funktional* $\Phi(t)$ wird aus der Normierungsbedingung für ρ_{led} bestimmt. Für relevante Verteilungen gilt die Beziehungen

$$\frac{\delta \Phi(t)}{\delta F_m(\mathbf{r}, t)} = -\langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t) , \quad (4.6)$$

gelten, die als verallgemeinerte thermodynamische Beziehungen betrachtet werden können.

Mit den mikroskopischen Erhaltungssätzen (4.2) für die relevanten Variablen können die gesuchten hydrodynamischen Gleichungen als Spezialfall der in Abschnitt 1.2.2

²Ein Beispiel für solch eine Verteilung haben wir bereits in Anhang C zu Kapitel I kennen gelernt.

hergeleiteten verallgemeinerten Transportgleichungen (4.7) gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle (t) &= -\nabla \cdot \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle (t)_{\text{led}} \\ &- \sum_n \int d\tilde{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} \nabla \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \cdot \tilde{\nabla} F_n(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

mit den kinetischen Koeffizienten

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \left\langle J_m(\mathbf{r}, t) (\rho_{\text{led}})^{-1}(t) U_{\text{led}}(t, \tilde{t}) (\rho_{\text{led}})^1(\tilde{t}) J_n(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \right\rangle_{\text{led}}. \quad (4.8)$$

Die dynamischen Variablen

$$J_m(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C}\mathcal{P}(t) j_m(\mathbf{r}) \equiv (1 - \mathcal{P}(t)) j_m(\mathbf{r}) \quad (4.9)$$

repräsentieren die lokalen mikroskopischen Flüsse. Der Operator $\mathcal{C}\mathcal{P}(t)$ ist komplementär zum Mori-Projektionsoperator $\mathcal{P}(t)$, der durch

$$\mathcal{P}(t)A = \langle A \rangle_{\text{led}}(t) + \sum_n \int d\mathbf{r} \frac{\delta \langle A \rangle_{\text{led}}(t)}{\delta \langle a_n(\mathbf{r}) \rangle (t)} (a_n(\mathbf{r}) - \langle a_n(\mathbf{r}) \rangle (t)) \quad (4.10)$$

in Abschnitt 1.2.2, Gleichung (2.62) definiert wurde. Die Zeitabhängigkeit der kinetischen Koeffizienten (4.8) ist durch die lokale Gleichgewichtsverteilung und den Zeitentwicklungsoperator

$$U_{\text{led}}(t, \tilde{t}) = T \exp \left\{ - \int_{\tilde{t}}^t d\tau \mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{led}}(\tau) iL \right\} \quad (4.11)$$

gegeben. Hierbei ist $\mathcal{C}\mathcal{P}_{\text{led}}(\tau)$ der zum Kawasaki-Gunton-Projektionsoperator \mathcal{P}_{led} komplementäre Operator, definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{led}}A &= \rho_{\text{led}}(t) \text{Sp}(A) \\ &+ \sum_n \int d\mathbf{r} [\text{Sp}(A a_n(\mathbf{r})) - \text{Sp}(A) \langle a_n(\mathbf{r}) \rangle (t)] \frac{\delta \rho_{\text{led}}(t)}{\delta \langle a_n(\mathbf{r}) \rangle (t)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

vergleiche Abschnitt 1.2.2, Gleichung (2.51). Da wir ein klassisches System voraus gesetzt haben, ist A eine Funktion auf dem Phasenraum des Systems und $\text{Sp}(\dots)$ bedeutet eine Integration über den gesamten Phasenraum.

Wir werden später sehen, daß der erste Summand auf der rechten Seite von (4.7) von konvektiven Strömen im System herrührt, die typisch für ideale Flüssigkeiten sind. Der zweite Summand auf der rechten Seite von (4.7) dagegen beschreibt irreversible Prozesse wie Wärmeleitung, Diffusion und Reibung. Gleichung (4.7) trägt allen reversiblen und irreversiblen Prozessen Rechnung und ist exakt. Sie dient damit als Ausgangspunkt für die Konstruktion von genäherten hydrodynamischen Gleichungen.

4.1.3 Näherungen

Wenn sich das System dem lokalen Gleichgewicht langsam nähert (im Vergleich zu den Zeitskalen, auf denen irreversible Prozesse Retardierungseffekte generieren), so muß der zweite Term auf der rechten Seite von (4.7) berücksichtigt werden. Ist allerdings die Zeitskala auf der die Korrelatoren (4.8) relaxieren viel kleiner als die charakteristische Zeitskala, auf der sich die thermodynamischen Parameter $F_n(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})$ ändern, so kann wenigstens von den Retardierungseffekten in (4.7) abgesehen werden und wir erhalten die *Markovschen hydrodynamischen Gleichungen*

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle (t) = -\nabla \cdot \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle (t) - \sum_n \int d\tilde{\mathbf{r}} \nabla \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, t) \cdot \tilde{\nabla} F_n(\tilde{\mathbf{r}}, t), \quad (4.13)$$

wobei die kinetischen Koeffizienten $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, t)$ durch

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{r}}, t) = \int_{-\infty}^t d\tilde{t} e^{-\varepsilon(t-\tilde{t})} \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \quad (4.14)$$

gegeben sind. In den Korrelatoren (4.8) hängen die lokale Gleichgewichtsverteilung und die mikroskopischen Flüsse lediglich über die langsam variierenden thermodynamischen Parameter von der Zeit ab. Vernachlässigen wir Gedächtniseffekte in (4.8) so wird $\rho_{\text{led}}(\tilde{t}) \approx \rho_{\text{led}}(t)$ und $J_n(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \approx J_n(\tilde{\mathbf{r}}, t)$. In der gleichen Näherung ist dann $\mathcal{P}_{\text{led}}(\tau) \approx \mathcal{P}_{\text{led}}(t)$, so daß der Zeitentwicklungsoperator (4.11) durch

$$U_{\text{led}}(t - \tilde{t}) = \exp \left[- (t - \tilde{t}) \mathcal{C} \mathcal{P}_{\text{led}}(t) iL \right] \quad (4.15)$$

gegeben ist. Die für die Berechnung der kinetischen Koeffizienten (4.14) relevanten Korrelatoren lassen sich erheblich vereinfachen:

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) = \left\langle J_m(\mathbf{r}, t) (\rho_{\text{led}})^{-1}(t) U_{\text{led}}(t - \tilde{t}) (\rho_{\text{led}})^1 J_n(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t}) \right\rangle_{\text{led}} (t). \quad (4.16)$$

Die Gleichungen (4.15) und (4.16) bestimmen die hydrodynamischen Koeffizienten in der erklärten Näherung. Insbesondere erlaubt die gemachte Näherung nicht-lokale Effekte.

Für den Fall fast konstanter thermodynamischer Parameter auf Längenskalen, auf denen die Korrelatoren (4.16) wesentlich von Null verschieden sind³, kann der letzte Term in (4.13) bis einschließlich zweiter Ordnung in den Ortsgradienten entwickelt werden. Die verallgemeinerten Transportgleichungen sind in dieser Näherung

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle (t) = -\nabla \cdot \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} (t) - \sum_n \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla F_n(\mathbf{r}, t), \quad (4.17)$$

³Dies ist eine typische Situation für Flüssigkeiten, mit Ausnahme in der Nähe von kritischen Punkten.

mit den kinetischen Koeffizienten

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t) = \int d\tilde{\mathbf{r}} \int_{-\infty}^0 d\tilde{t} e^{\varepsilon\tilde{t}} \langle J_m(\mathbf{r}, t) e^{i\tilde{t}L} J_n(\tilde{\mathbf{r}}, t) \rangle_{\text{led}}(t). \quad (4.18)$$

Die Gleichungen (4.17) bedingen folgende Relationen zwischen den gemittelten Flüssen $\langle j_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t)$ und den *thermodynamischen Kräften* $\nabla F_m(\mathbf{r}, t)$:

$$\langle j_m(\mathbf{r}) \rangle(t) = \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}(t) + \sum_n \mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla F_n(\mathbf{r}, t). \quad (4.19)$$

Diese Beziehungen sind bekannt aus der irreversiblen Thermodynamik (de Groot und Mazur, 1962), in der kinetische Koeffizienten als von den Zustandsvariablen abhängige phänomenologische Größen eingeführt werden. Damit ist gezeigt, daß der statistische Zugang zu hydrodynamischen Prozessen die Herleitung von grundlegenden Beziehungen aus der irreversiblen Thermodynamik und die Darstellung von kinetischen Koeffizienten durch Korrelatoren von mikroskopischen Flüssen erlaubt.

4.2 Transport-Prozesse in Flüssigkeiten

Der im letzten Abschnitt dargelegte Formalismus wird nun auf ein einfaches aber realistisches System angewandt. Gegeben sei eine klassische Flüssigkeit (im weitesten Sinn) aus identischen Teilchen mit direkter Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen.

4.2.1 Lokale Erhaltungssätze

Wir beginnen mit den Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Teilchenzahl. Das System sei durch

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|) \quad (4.20)$$

beschrieben, wobei $\Phi(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|)$ die Wechselwirkungsenergie und m die Masse der Teilchen bezeichne. Die Bewegungsgleichungen für die Teilchen sind

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \frac{\mathbf{p}_j}{m}, \quad \dot{\mathbf{p}}_j = \sum_{k \neq j} F_{jk}. \quad (4.21)$$

Hierbei ist

$$F_{jk} = -F_{kj} = -\frac{d\Phi(r_{jk})}{dr_{jk}} \frac{\mathbf{r}_{jk}}{r_{jk}}, \quad r_{jk} = |\mathbf{r}_{jk}| \equiv |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k| \quad (4.22)$$

die vom Wechselwirkungspotential erzeugte Kraft zwischen zwei Teilchen am Ort \mathbf{r}_j und \mathbf{r}_k .

Die zur Teilchenzahldichte gehörende dynamische Variable ist

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) . \quad (4.23)$$

Da sich die Teilchenorte gemäß (4.21) mit der Zeit ändern, finden wir für die Zeitableitung von $n(\mathbf{r})$

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{r}) \quad (4.24)$$

mit der Teilchenstromdichte

$$\mathbf{j}_n(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{p}_j}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) . \quad (4.25)$$

Wir leiten nun die lokale Erhaltung des Impulses her. Dazu führen wir die dynamische Variable

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = m \mathbf{j}_n(\mathbf{r}) \quad (4.26)$$

ein. Für die Zeitableitung von (4.26) inden wir mit den Hamilton-Gleichungen (4.21)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \sum_j \frac{1}{m} \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{jk} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)) , \quad (4.27)$$

wobei $\mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_j$ den Tensor mit Komponenten $\mathbf{p}_j^a \mathbf{p}_j^b$ bezeichnet. Der zweite Term auf der rechten Seite in (4.27) ist symmetrisiert in j und k . Gleichung (4.27) hat noch nicht die Gestalt eines lokalen Erhaltungssatzes. Dazu muß der zweite Term noch als Divergenz geschrieben werden. Dies gelingt mit der Beziehung

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = -\nabla \cdot \int_0^1 ds \mathbf{r}_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j + s \mathbf{r}_{jk}) . \quad (4.28)$$

Damit kann der letzte Term in (4.27) als Divergenz eines Tensors dargestellt werden und wir erhalten den lokalen Erhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{r}) . \quad (4.29)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ den Spannungstensor

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \sum_j \frac{1}{m} \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \mathbf{F}_{jk} \otimes \mathbf{r}_{jk} \int_0^1 ds \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j + s \mathbf{r}_{jk}) . \quad (4.30)$$

Für den Fall, daß $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| \gg r_{jk} \forall k$ gilt, kann die delta-Funktion nach dem Kleinheitsparameter s entwickelt werden. Physikalisch ist diese Situation interessant, wenn sich die dynamischen Variablen auf Skalen vergleichbar der effektiven Reichweite

der Wechselwirkung praktisch nicht ändern. Dann erhalten wir in nullter Ordnung im Kleinheitsparameter s

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \sum_j \left(\frac{1}{m} \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_j - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{d\Phi(r_{jk})}{dr_{jk}} \frac{1}{r_{jk}} \mathbf{r}_{jk} \otimes \mathbf{r}_{jk} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) . \quad (4.31)$$

Wir formulieren nun die lokale Energieerhaltung. Dazu definieren wir

$$e(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Phi(r_{jk}) \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (4.32)$$

als zur Energiedichte korrespondierende dynamischen Variable. Die Zeitableitung von (4.32) liefert mit den Bewegungsgleichungen (4.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} e(\mathbf{r}) &= -\nabla \cdot \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Phi(r_{jk}) \right) \frac{1}{m} \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j \neq k} \frac{1}{m} (\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_k) \cdot \mathbf{F}_{jk} (\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)) . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite kann wieder mit (4.28) in eine Divergenz umgeformt werden. Wir erhalten so den lokalen Erhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial t} e(\mathbf{r}) = -\nabla \cdot \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) , \quad (4.34)$$

wobei die dynamischen Variablen

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) &= \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Phi(r_{jk}) \right) \frac{1}{m} \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{j \neq k} \frac{1}{m} [(\mathbf{p}_j + \mathbf{p}_k) \cdot \mathbf{F}_{jk}] \mathbf{r}_{jk} \int_0^1 ds \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j + s\mathbf{r}_{jk}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

die Energiestromdichte darstellt. Für kurzreichweitige Kräfte können wieder die nichtlokalen Korrekturen in (4.35) vernachlässigt werden. Dann wird

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) &= \sum_j \left(\frac{1}{2m} \mathbf{p}_j \otimes \mathbf{p}_j + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \Phi(r_{jk}) \mathbf{1} \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \sum_{k \neq j} \frac{d\Phi(r_{jk})}{dr_{jk}} \frac{1}{r_{jk}} \mathbf{r}_{jk} \otimes \mathbf{r}_{jk} \right) \frac{1}{m} \cdot \mathbf{p}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{1}$ den Einheitstensor.

Die lokalen Erhaltungssätze (4.24), (4.29) und (4.34) können folgendermaßen zusammengefaßt werden

$$\frac{\partial}{\partial t} a_m(\mathbf{r}) + \nabla \cdot j_m(\mathbf{r}) = 0, \quad (m \in \{0, 1, 2\}), \quad (4.37)$$

mit den lokalen relevanten Variablen $a_m(\mathbf{r})$ und Flüssen $j_m(\mathbf{r})$, definiert durch

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{r}) &= e(\mathbf{r}), & a_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}(\mathbf{r}), & a_2(\mathbf{r}) &= n(\mathbf{r}) \\ j_0(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_e(\mathbf{r}), & j_1(\mathbf{r}) &= \mathbf{T}(\mathbf{r}), & j_2(\mathbf{r}) &= \mathbf{j}_n(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Wie aus diesen Definitionen folgt, ist der zweite Term in (4.37) die Divergenz eines Vektors oder die Divergenz eines Tensors zweiter Stufe.

4.2.2 Ideale Hydrodynamik

Mit der vollständigen Menge von Erhaltungssätzen (4.37) können nun die Transportgleichungen für eine einkomponentige Flüssigkeit hergeleitet werden.

In dem hier betrachteten Fall sind die lokalen Lagrange-Multiplikatoren $F_n(\mathbf{r}, t)$ zu den in (4.17) definierten relevanten Variablen konjugiert. Um explizite Ausdrücke für diese Parameter zu erhalten, schreiben wir die lokale Gleichgewichtsverteilung der Flüssigkeit in der Form

$$\begin{aligned} \rho_{\text{led}}(q, p, t) = \exp \left\{ -\Phi(t) - \int d\mathbf{r} \beta(\mathbf{r}, t) \left[e(\mathbf{r}) - \left(\mu(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} m v^2(\vec{r}, t) \right) n(\mathbf{r}) \right. \right. \\ \left. \left. - \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

wobei $\beta(\mathbf{r}, t)$ die lokale inverse Temperatur bezeichnet, $\mu(\mathbf{r}, t)$ das lokale chemische Potential und $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ die lokale Massengeschwindigkeit. In der Notation von früher (4.4) ist

$$\begin{aligned} F_0(\mathbf{r}, t) &= \beta(\mathbf{r}, t), & F_1(\mathbf{r}, t) &= -\beta(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \\ F_2(\mathbf{r}, t) &= -\beta(\mathbf{r}, t) \left(\mu(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{2} m v^2(\vec{r}, t) \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Die einfachste Näherung der hydrodynamischen Gleichungen (4.17) besteht darin, den letzten Term auf der rechten Seite zu vernachlässigen. In Hinblick auf die Gleichungen (4.3) bedeutet dies, daß die Mittelwerte der Stromdichten $\mathbf{j}_e(\mathbf{r})$, $\mathbf{j}_n(\mathbf{r})$ und $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ bezüglich der lokalen Gleichgewichtsverteilung (4.39) gebildet werden. Wir zeigen weiter unten, daß die zugehörigen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle (t) = -\nabla \cdot \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} (t) \quad (4.41)$$

mit den Bewegungsgleichungen für eine ideale Flüssigkeit übereinstimmen.

Für die Berechnung der gemittelten Flüsse in einem lokalen Gleichgewichtszustand ist es geschickt, die kanonische Transformation der Phasenraumvariablen⁴

$$\mathbf{p}_j = \tilde{\mathbf{p}}_j + m\mathbf{v}(\tilde{\mathbf{r}}) , \quad \mathbf{r}_j = \tilde{\mathbf{r}}_j \quad (4.42)$$

durchzuführen. Dies ist eine Transformation auf das mit der Massengeschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mitbewegte Bezugssystem. Die hydrodynamischen Variablen $a_m(\mathbf{r})$ transformieren sich unter (4.42) wie folgt:

$$\begin{aligned} e(\mathbf{r}) &= \tilde{e}(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}(\mathbf{r})v^2(\mathbf{r}) , \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + \tilde{\rho}(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) , \quad n(\mathbf{r}) = \tilde{n}(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die transformierten Größen haben die gleiche Form wie die entsprechenden Größen zuvor, allerdings ist \mathbf{r}_j durch $\tilde{\mathbf{r}}_j$ und \mathbf{p}_j durch $\tilde{\mathbf{p}}_j$ ersetzt. Wir haben weiterhin die dynamische Variable

$$\rho(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} m n(\mathbf{r}) \quad (4.44)$$

eingeführt, also die Massendichte. Die lokalen Stromdichten transformieren sich folgendermaßen unter (4.42):

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + \left[\tilde{e}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}(\mathbf{r})v^2(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \right] \mathbf{v}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}v^2(\mathbf{r})\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}) , \\ \mathbf{T}(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) + \text{Sym} \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) \right) + \tilde{\rho}(\mathbf{r}) \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}) \right) , \\ \mathbf{j}_n(\mathbf{r}) &= \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + \tilde{n}(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) . \end{aligned} \quad (4.45)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (4.43) in (4.39) finden wir die lokale Gleichgewichtsverteilung durch die neuen Phasenraumvariablen ausgedrückt:

$$\rho_{\text{led}}(\tilde{q}, \tilde{p}, t) = \exp \left\{ -\Phi(t) - \int d\mathbf{r} \beta(\mathbf{r}, t) [\tilde{e}(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}, t)\tilde{n}(\mathbf{r})] \right\} . \quad (4.46)$$

Für das Massieu-Planck-Funktional finden wir

$$\Phi(t) = -\ln \text{Sp} \left(- \int d\mathbf{r} \beta(\mathbf{r}, t) [\tilde{e}(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r}, t)\tilde{n}(\mathbf{r})] \right) . \quad (4.47)$$

Das Massieu-Planck-Funktional kann als Ausgangspunkt genommen werden, um alle thermodynamischen Relationen für eine Flüssigkeit im Nichtgleichgewicht herzuleiten.

⁴Die Massengeschwindigkeit und andere thermodynamische Größen hängen natürlich von der Zeit ab. Im Folgenden werden wir diese Abhängigkeit aus Gründen der Übersichtlichkeit oft nicht explizit notieren.

Der entscheidende Vorteil der Transformation der lokalen Gleichgewichtsverteilung auf die neuen Phasenraumvariablen ist, daß sich die Mittelwerte auf der rechten Seite von (4.41) nun leicht berechnen lassen. Wir zeigen zunächst, daß im mitbewegten Bezugssystem

$$\langle \tilde{\mathbf{j}}_n(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = 0, \quad \langle \tilde{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = 0, \quad \langle \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = P(\mathbf{r})\mathbf{1}, \quad (4.48)$$

wobei alle Mittelungen bezüglich der Verteilung (4.46) zu bilden sind und

$$P(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle p(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = \frac{1}{3} \text{Sp}(\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r})) \quad (4.49)$$

den hydrostatischen Druck bezeichne. Der Beweis der Beziehungen ist elementar. Wir bemerken zunächst, daß die Variablen $n(\mathbf{r})$ und $e(\mathbf{r})$ invariant unter Impulsumkehr $\mathbf{p}_j \rightarrow -\mathbf{p}_j$ sind. Das gilt auch für die transformierten Größen $\tilde{n}(\mathbf{r})$ und $\tilde{e}(\mathbf{r})$ als Funktionen von $\tilde{\mathbf{p}}_j$. Damit ist die lokale Gleichgewichtsverteilung (4.46) eine gerade Funktion von den Impulsen. Andererseits sind die Stromdichten $\tilde{\mathbf{j}}_n(\mathbf{r})$ und $\tilde{\mathbf{j}}_e(\mathbf{r})$ ungerade Funktionen unter $\tilde{\mathbf{p}}_j \rightarrow -\tilde{\mathbf{p}}_j$. Daraus folgt, daß die Mittelwerte dieser Stromdichten bezüglich der Verteilung (4.46) verschwinden. Die Nebendiagonalelemente der Komponenten des Spannungstensors $\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{r})$ verschwinden aus ähnlichen Gründen.

Mit den Gleichungen (4.48) können wir jetzt bequem alle uns interessierenden Mittelwerte berechnen:

$$\langle e(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = \langle \tilde{e}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} + \frac{1}{2} \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} v^2(\mathbf{r}), \quad \langle j(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (4.50)$$

$$\langle j_e(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = \left(\langle \tilde{e}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} + P(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} v^2(\mathbf{r}) \right) \mathbf{v}(\mathbf{r}), \quad (4.51)$$

$$\langle \mathbf{T}(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} = P(\mathbf{r})\mathbf{1} + \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}} (\mathbf{v}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r})). \quad (4.52)$$

Mit den Ausdrücken (4.50)–(4.52) sind wir nun in der Lage, aus Gleichung (4.41) ein System von hydrodynamischen Gleichungen herzuleiten. Es gibt mehrere zueinander äquivalente Systeme von Gleichungen, abhängig von der Wahl der Menge von Variablen, die den Nichtgleichgewichtszustand einer Flüssigkeit vollständig beschreiben. Wir wählen zum Beispiel die mittlere Massendichte $\rho(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle(t)$, die Massengeschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ und die mittlere Energiedichte im mitbewegten Bezugssystem $\epsilon(\mathbf{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{e}(\mathbf{r}) \rangle(t)$:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.53)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\rho^{-1} \nabla P, \quad (4.54)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -(\epsilon + P) \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (4.55)$$

wobei

$$\frac{D}{Dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (4.56)$$

die sogenannte *substantielle Ableitung* bezeichne.

Wir analysieren als nächstes die Zeitabhängigkeit der Entropie der idealen Flüssigkeit

$$S(t) = -\langle \ln \rho_{\text{led}} \rangle_{\text{led}}(t) = \Phi(t) + \sum_m \int d\mathbf{r} F_m(\mathbf{r}, t) \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t), \quad (4.57)$$

vorausgesetzt die hydrodynamischen Prozessen werden durch die Gleichungen (4.41) beschrieben. Die Zeitableitung der Entropie ist

$$\frac{dS(t)}{dt} = \sum_m \int d\mathbf{r} F_m(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t), \quad (4.58)$$

da aus (4.6) die Beziehung

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\sum_m \int d\mathbf{r} \frac{\partial F_m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle(t) \quad (4.59)$$

folgt. Die Zeitableitung auf der rechten Seite von (4.58) kann mit der Transportgleichung (4.3) eliminiert werden:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\sum_m \int d\mathbf{r} F_m(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle(t). \quad (4.60)$$

Es ist üblich, die Zeitabhängigkeit der Entropiedichte

$$S(t) = \int_V d\mathbf{r} S(\mathbf{r}, t) \quad (4.61)$$

zu analysieren. Für die Entropiedichte folgt wegen (4.60) eine Bilanz-Gleichung der Form

$$\frac{\partial S(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\sum_m F_m(\mathbf{r}, t) \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle(t) \right) + \sum_m \langle j_m(\mathbf{r}) \rangle(t) \cdot \nabla F_m(\mathbf{r}, t). \quad (4.62)$$

Die Bilanz-Gleichung für die Entropiedichte ist eine Konsequenz der Erhaltungssätze, da wir lediglich von den exakten Transportgleichungen (4.3) Gebrauch gemacht haben. Wir nehmen im weiteren an, daß die gemittelten Stromdichten durch ihre Mittelwerte im lokalen Gleichgewicht genähert werden können. Wir erhalten dann

$$\frac{DS(\mathbf{r}, t)}{Dt} = -S(\mathbf{r}, t) \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (4.63)$$

Die Bilanz-Gleichung für die gesamte Entropie ist

$$\frac{dS(t)}{dt} = - \oint d(\mathbf{V}) \cdot S(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (4.64)$$

wobei das Integral über die Oberfläche (\mathbf{V}) des Systems berechnet wird. Damit ist gezeigt, daß die Entropie eines lokalen Gleichgewichtszustandes sich nur ändern kann, wenn ein Entropie-Fluß durch die Oberfläche des Systems existiert. Es gibt also keine Quellen oder Senken für Entropie im System. Die im System ablaufenden Prozesse sind somit reversible Transportprozesse.

4.2.3 Die Lokalen Kinetischen Koeffizienten

Die lokale Gleichgewichtsverteilung ermöglicht die Definition von thermodynamischen Funktionen, die den Zustand einer Flüssigkeit im Nichtgleichgewicht bestimmen. Es ist mit dieser Verteilungsfunktion jedoch nicht möglich, irreversible Prozesse zu beschreiben. Dazu muß der letzte Term in (4.7) in die Analyse miteinbezogen werden.

Wir beschränken uns weiterhin auf die Untersuchung langsam ablaufender hydrodynamischer Prozesse, die durch die lokalen Markovschen Gleichungen (4.17) mit den kinetischen Koeffizienten (4.18) beschrieben werden. Da wir bereits die expliziten Ausdrücke (4.40) für die thermodynamischen Parameter $F_m(\mathbf{r}, t)$ haben, besteht das verbleibende Problem in der Berechnung der lokalen kinetischen Koeffizienten. Wir analysieren zunächst die Struktur der lokalen mikroskopischen Flüsse $J_m(\mathbf{r}, t)$ für eine klassische einkomponentige Flüssigkeit.

Die allgemeine Definition der lokalen Flüsse wurde bereits in (4.9) gegeben. In unserem Fall sei

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{CP} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}), \quad \mathbf{J}_1(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{CP} \mathbf{T}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{J}_2(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{CP} \mathbf{J}_n(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.65)$$

Die letzte Beziehung folgt aus der Tatsache, daß die mit der Teilchenzahl assoziierte Stromdichte $\mathbf{j}_n(\mathbf{r})$ proportional zur Impulsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ und daher eine relevante dynamische Variable $a_m(\mathbf{r})$ ist. Für den Mori-Projektionsoperator \mathcal{P} gilt aber $\mathcal{P}a_m(\mathbf{r}) = a_m(\mathbf{r})$ für alle dynamischen Variablen. Damit gilt also tatsächlich $\mathbf{J}_2(\mathbf{r}) = 0$ und alle kinetischen Koeffizienten mit $m = 2$ oder $n = 2$ verschwinden. Daraus folgt weiterhin, daß die Bewegungsgleichung für die mittlere Teilchenzahldichte $\langle n(\mathbf{r}) \rangle(t)$ oder für die mittlere Massendichte $\rho(\mathbf{r}, t) = m \langle n(\mathbf{r}) \rangle(t)$ keine Terme beinhalten wird, die Dissipation beschreiben.

Das Hauptproblem in der Berechnung der lokalen kinetischen Koeffizienten $\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r})$ ist ihre Abhängigkeit von dem Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Um die Rechnung zu vereinfachen, transformieren wir wieder in das mit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ mitbewegte Bezugssystem und drücken die kinetischen Koeffizienten durch Korrelationsfunktionen für eine ruhende

Flüssigkeit aus. Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, wie sich die interessanten dynamischen Größen unter der kanonischen Transformation (4.42) verhalten. Für eine bessere Leslichkeit schreiben wir für (4.42) im weiteren symbolisch (Kawasaki und Gunton, 1973)

$$U\mathbf{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p}_j - m\mathbf{v}(\mathbf{r}_j), \quad U\mathbf{r}_j \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_j. \quad (4.66)$$

Damit ist erklärt wie der Operator U auf Phasenraumvariablen wirkt. Natürlich existiert auch der zu U inverse Operator U^{-1}

$$U^{-1}\mathbf{p}_j = \mathbf{p}_j + m\mathbf{v}(\mathbf{r}_j), \quad U^{-1}\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j. \quad (4.67)$$

Die bezüglich der lokalen Gleichgewichtsverteilung berechneten Mittelwerte erfüllen

$$\langle \tilde{A} \rangle_{\text{led}}(t) = \langle UA \rangle(t). \quad (4.68)$$

Wie zuvor ergibt sich \tilde{A} aus A durch die Ersetzungen $\mathbf{p}_j \rightarrow U\mathbf{p}_j$ und $\mathbf{r}_j \rightarrow U\mathbf{r}_j$.

Im gerade beschriebenen Formalismus kann die Verteilungsfunktion (4.39) folgendermaßen geschrieben werden

$$\rho_{\text{led}} = U\rho_{\text{led}}^{(0)}, \quad (4.69)$$

$$\rho_{\text{led}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ -\Phi - \int d\mathbf{r} \beta(\mathbf{r}) [e(\mathbf{r}) - \mu(\mathbf{r})n(\mathbf{r})] \right\}. \quad (4.70)$$

Die Verteilungsfunktionen $\rho_{\text{led}}^{(0)}$ und (4.46) stimmen formal miteinander überein, allerdings hängen die Phasenraumvariablen in $\rho_{\text{led}}^{(0)}$ nicht explizit von der Massengeschwindigkeit ab. Aus den Beziehungen

$$\text{Sp}(A\rho_{\text{led}}) = \text{Sp}(U^{-1}A\rho_{\text{led}}) = \text{Sp}(U^{-1}AU\rho_{\text{led}}^{(0)}) = \text{Sp}(\rho_{\text{led}}^{(0)}U^{-1}A) \quad (4.71)$$

folgt

$$\langle A \rangle_{\text{led}}(t) = \langle U^{-1}A \rangle_{\text{led}}^{(0)}, \quad (4.72)$$

wobei $\langle \dots \rangle_{\text{led}}^{(0)}$ den Mittelwert bezüglich der Verteilung (4.70) bezeichnet. Ersetzen wir A durch UA in (4.72), so folgt $\langle \tilde{A} \rangle_{\text{led}} = \langle A \rangle_{\text{led}}^{(0)}$, d.h. $\langle A \rangle_{\text{led}}^{(0)}$ ist der Mittelwert von A im mitbewegten Bezugssystem.

Mit Hilfe der Beziehungen (4.66) und (4.72) transformieren wir nun die kinetischen Koeffizienten (4.18) in das mitbewegte Bezugssystem. Zunächst einmal ist

$$\langle J_m(\mathbf{r}) \exp(itL) J_n(\tilde{\mathbf{r}}) \rangle_{\text{led}} = \left\langle [U^{-1}J_m(\mathbf{r})] \exp(itU^{-1}LU) [U^{-1}J_n(\tilde{\mathbf{r}})] \right\rangle_{\text{led}}^{(0)}. \quad (4.73)$$

Der entscheidende Punkt ist hierbei, daß die Mittelung auf der rechten Seite dieser Gleichung bezüglich der Verteilung $\rho_{\text{led}}^{(0)}$ geschieht und diese nicht von dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} abhängt. Weiterhin benutzen wir die in (Kawasaki und Gunton, 1973) bewiesene Identität

$$\mathcal{P} = U\mathcal{P}^{(0)}U^{-1}, \quad (4.74)$$

wobei

$$\mathcal{P}^{(0)}A \stackrel{\text{def}}{=} \langle A \rangle_{\text{led}}^{(0)} + \sum_m \int d\mathbf{r} \frac{\delta \langle A \rangle_{\text{led}}^{(0)}}{\delta \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}^{(0)}} \left(a_m(\mathbf{r}) - \langle a_m(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}^{(0)} \right) \quad (4.75)$$

gerade den Mori-Projektionsoperator im Ruhesystem der Flüssigkeit definiert. Wir beginnen mit

$$U^{-1}J_m(\mathbf{r}) = U^{-1} \left(1 - U\mathcal{P}^{(0)}U^{-1} \right) j_m(\mathbf{r}) = \left(1 - \mathcal{P}^{(0)} \right) U^{-1}j_m(\mathbf{r}) . \quad (4.76)$$

Für die Stromdichten $U^{-1}J_m$ ergibt sich mit (4.45)

$$U^{-1}\mathbf{j}_e = \mathbf{j}_e + \left(e + \frac{1}{2}\rho v^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{j} \right) \mathbf{v} + \frac{1}{2}v^2\mathbf{j} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} , \quad (4.77)$$

$$U^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{T} + \text{Sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{j}) + \rho(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) . \quad (4.78)$$

Für den Mori-Projektionsoperator im Ruhesystem der Flüssigkeit gilt ebenfalls $\mathcal{P}^{(0)}a_m(\mathbf{r}) = a_m(\mathbf{r})$ und folglich sind alle Linearkombinationen von dynamischen Variablen $a_m(\mathbf{r})$ Element von Kern($\mathcal{C}\mathcal{P}^{(0)}$). Wir erhalten

$$U^{-1}\mathbf{J}_0(\mathbf{r}) = \mathcal{C}\mathcal{P}^{(0)}U^{-1}\mathbf{j}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{J}_q(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) , \quad (4.79)$$

$$U^{-1}\mathbf{J}_1(\mathbf{r}) = \mathcal{C}\mathcal{P}^{(0)}U^{-1}\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) , \quad (4.80)$$

wobei neue mikroskopische Flüsse eingeführt wurden:

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}\mathcal{P}^{(0)}\mathbf{j}_e(\mathbf{r}) , \quad \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}\mathcal{P}^{(0)}\mathbf{T}(\mathbf{r}) . \quad (4.81)$$

Wir werden später sehen, daß $\mathbf{J}_q(\mathbf{r})$ als Wärmestromdichte und $\mathbf{\Pi}(\mathbf{r})$ als viskoser Spannungstensor interpretiert werden kann. Die neu eingeführten mikroskopischen Flüsse sind von der Massengeschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ unabhängig.

Die dynamischen Variablen $\mathcal{P}^{(0)}\mathbf{j}_e$ und $\mathcal{P}^{(0)}\mathbf{T}$ in (4.81) können mit der Definition von $\mathcal{P}^{(0)}$ (4.75) berechnet werden. Wir finden

$$\mathcal{P}^{(0)}\mathbf{j}_e(\mathbf{r}) = \frac{\epsilon + P}{\langle \rho \rangle} \mathbf{j}(\mathbf{r}) , \quad (4.82)$$

$$\mathcal{P}^{(0)}\mathbf{T}(\mathbf{r}) = \left[P + \left(\frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right)_{\langle n \rangle} \Delta e(\mathbf{r}) + \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_{\epsilon} \Delta n(\mathbf{r}) \right] \mathbf{1} , \quad (4.83)$$

mit $\epsilon = \langle e(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}^{(0)}$, $\Delta e(\mathbf{r}) = e(\mathbf{r}) - \langle e(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}^{(0)}$ und $\Delta n(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) - \langle n(\mathbf{r}) \rangle_{\text{led}}^{(0)}$. Die mikroskopischen Flüsse (4.81) sind somit

$$\mathbf{J}_q(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) - \frac{\epsilon + P}{\langle \rho \rangle} \mathbf{j}(\mathbf{r}) , \quad (4.84)$$

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = \check{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) + \mathbf{\Pi}(\mathbf{r})\mathbf{1} , \quad (4.85)$$

wobei wir den viskosen Spannungstensor in einen spurlosen Anteil

$$\check{\mathbf{T}}(\mathbf{r}) = \mathbf{T}(\mathbf{r}) - \frac{1}{3} \text{Sp}(\mathbf{T}) \mathbf{1} \quad (4.86)$$

und eine skalare Funktion $\Pi(\mathbf{r})$ multipliziert mit dem Einheitstensor zerlegen. Diese Funktion ist durch

$$\Pi(\mathbf{r}) = \Delta p(\mathbf{r}) - \left(\frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right)_{\langle n \rangle} \Delta \epsilon(\mathbf{r}) - \left(\frac{\partial P}{\partial \langle n \rangle} \right)_{\epsilon} \Delta n(\mathbf{r}) \quad (4.87)$$

gegeben. Hierbei beschreibt die dynamische Variable

$$\Delta p(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3} \left(\text{Sp}(\mathbf{T}(\mathbf{r})) - \langle \text{Sp}(\mathbf{T}(\mathbf{r})) \rangle_{\text{led}}^{(0)} \right) \quad (4.88)$$

die Fluktuationen im Druck.

Die Gleichungen (4.79) zusammen mit (4.84) und (4.85) liefern die in den Korrelationsfunktionen (4.73) benötigten transformierten mikroskopischen Flüsse. Es bleibt noch zu untersuchen, wie sich der Liouville-Operator L unter den kanonischen Transformationen der Phasenraumvariablen transformiert. Wir finden

$$U^{-1}LU = L + \tilde{L}, \quad (4.89)$$

wobei der zusätzliche Operator \tilde{L} von dem Geschwindigkeitsfeld abhängt:

$$i\tilde{L} = \sum_{j=1}^N \left[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}) \right) \cdot \left((\mathbf{p} + m\mathbf{v}(\mathbf{r})) \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \right]. \quad (4.90)$$

Für den Fall, daß \mathbf{v} konstant ist und der transformierte Liouville-Operator (4.89) auf dynamische Variablen wirkt, die nur vom Relativabstand der Teilchen abhängen, so ist $\tilde{L} = 0$ erlaubt. Wegen der $\tilde{\mathbf{r}}$ -Integration in Gleichung (4.18) für die kinetischen Koeffizienten wirkt der Operator (4.89) immer auf diese kinetische Variablen. Der Operator \tilde{L} muß allerdings berücksichtigt werden, wenn Geschwindigkeitsgradienten in den kinetischen Koeffizienten wichtig werden. Wir nehmen an, daß Geschwindigkeitsgradienten hinreichend klein sind und die entsprechenden Korrekturen zu den kinetischen Koeffizienten vernachlässigt werden können. Dann stimmt der transformierte Liouville-Operator $U^{-1}LU$ mit dem ursprünglichen Liouville-Operator L überein. Dies ist konsistent, da die Gleichungen (4.17) nur anwendbar sind, wenn die thermodynamischen Variablen $\beta(\mathbf{r}, t)$ und $\mu(\mathbf{r}, t)$ räumlich fast konstant sind. Aus Selbstkonsistenz-Gründen müssen die Korrelationsfunktionen (4.73) bezüglich der Verteilung

$$\rho^{(0)}(q, p, t | \mathbf{r}) = \exp \left\{ -\Phi^{(0)}((\mathbf{r}, t)) - \beta(\mathbf{r}, t) [H - \mu(\mathbf{r}, t)N] \right\} \quad (4.91)$$

mit der Massieu-Planck Funktion

$$\Phi^{(0)}((\mathbf{r}, t)) = -\ln \text{Sp} \left(\exp \left\{ -\beta(\mathbf{r}, t) [H - \mu(\mathbf{r}, t)N] \right\} \right) \quad (4.92)$$

berechnet werden. Die Verteilung (4.79) ist eine Näherung von (4.70) und heißt *Gibbsche Gleichgewichtsverteilung* mit den lokalen thermodynamischen Größen Temperatur $T(\mathbf{r}, t) = 1/\beta(\mathbf{r}, t)$ und chemisches Potential $\mu(\mathbf{r}, t)$. Im folgenden ist die parametrische Abhängigkeit der kinetischen Koeffizienten von $\beta(\mathbf{r}, t)$ und $\mu(\mathbf{r}, t)$ stets impliziert, wird aber nicht explizit notiert.

Wir finden somit für die kinetischen Koeffizienten

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t) = V \int_{-\infty}^0 d\tilde{t} e^{\tilde{t}} \langle (U^{-1} J_m) e^{i\tilde{t}L} (U^{-1} J_n) \rangle^{(0)}(t), \quad (4.93)$$

wobei $\langle \dots \rangle^{(0)}(t)$ die Mittelung bezüglich (4.91) und die dynamischen Variablen

$$J_m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{R} J_m(\mathbf{R}) \quad (4.94)$$

die über das Systemvolumen gemittelten mikroskopischen Flüsse bezeichnen ⁵.

4.2.4 Transportkoeffizienten

Für angewandte Probleme ist es üblich, die kinetischen Koeffizienten (4.93) durch skalare Transportkoeffizienten auszudrücken. Dies funktioniert, da für eine isotrope Flüssigkeit alle Korrelatoren als Skalare multipliziert mit Linearkombinationen von Einheitstensoren geschrieben werden können.

Wir schreiben im folgenden

$$\mathcal{L}_{mn}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{L}_{mn}(U^{-1} J_m, U^{-1} J_n). \quad (4.95)$$

Wegen (4.79) und (4.85) ist

$$U^{-1} \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}_q + \Pi \mathbf{v} + \check{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{v}, \quad U^{-1} \mathbf{J}_1 = \Pi \mathbf{1} + \check{\mathbf{T}}. \quad (4.96)$$

Die über das Systemvolumen gemittelt tensoriellen mikroskopischen Flüsse sind

$$\begin{aligned} \Pi &= \Delta p - \left(\frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right)_{\langle n \rangle} \frac{\Delta H}{V} - \left(\frac{\partial P}{\partial \langle n \rangle} \right)_{\epsilon} \frac{\Delta N}{V}, \\ \mathbf{J}_q &= \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{j}_e(\mathbf{r}) - \frac{\epsilon + P}{\langle \rho \rangle} \frac{\mathbf{P}}{V}, \\ \check{\mathbf{T}} &= \frac{1}{V} \int_V d\mathbf{r} \mathbf{T} - \frac{1}{3} p \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (4.97)$$

⁵Dabei wird lediglich über die Teilchenorte gemittelt. Die thermodynamischen Parameter in den Flüssen werden alle am Punkt \mathbf{r} ausgewertet.

wobei \mathbf{P} die Summe über alle Teilchenimpulse ist und die dynamische Variable

$$p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \int \mathbf{dr} p(\mathbf{r}) = \frac{1}{3V} \int \mathbf{dr} \text{Sp}(T(\mathbf{r})) \quad (4.98)$$

entspricht dem mittlerem Druck.

Die kinetischen Koeffizienten (4.95) hängen bilinear von den Flüssen ab und können daher durch die tensoriellen mikroskopischen Flüsse ausgedrückt werden. Wichtig und ungemein nützlich für praktische Rechnungen ist, daß die kinetischen Koeffizienten (4.95) für eine isotrope Flüssigkeit verschwinden, wenn sie von zwei mikroskopischen Flüssen unterschiedlicher Tensorstufe abhängen ⁶. Wir finden mit (4.95)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{00})^{ab} &= \mathcal{L}(\mathbf{J}_q^a, \mathbf{J}_q^b) + \mathcal{L}(\Pi, \Pi) \mathbf{v}^a \mathbf{v}^b + \mathcal{L}(\check{\mathbf{T}}^{ac}, \check{\mathbf{T}}^{bd}) v_c v_d, \\ (\mathcal{L}_{11})^{abcd} &= \mathcal{L}(\Pi, \Pi) \delta^{ac} \delta^{bd} + \mathcal{L}(\check{\mathbf{T}}^{ac}, \check{\mathbf{T}}^{bd}), \\ (\mathcal{L}_{01})^{abd} &= (\mathcal{L}_{10})^{bda} = \mathcal{L}(\Pi, \Pi) v^a \delta^{bd} + \mathcal{L}(\check{\mathbf{T}}^{ab}, \check{\mathbf{T}}^{cd}) v_c. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Wir nutzen erneut die Isotropie aus und schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{J}_q, \mathbf{J}_q) &= T^2 \lambda \mathbf{1}, \\ \mathcal{L}(\check{\mathbf{T}}, \check{\mathbf{T}}) &= T \eta \mathbf{\Delta}, \\ \mathcal{L}(\Pi, \Pi) &= T \zeta, \end{aligned} \quad (4.100)$$

wobei $T = 1/\beta$ die Temperatur bezeichne, λ , η und ζ sind Skalare. Die Komponenten des Tensors $\mathbf{\Delta}$ sind

$$(\mathbf{\Delta})_{abcd} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{2}{3} \delta_{ac} \delta_{bd}. \quad (4.101)$$

Der letzte Summand garantiert

$$\mathcal{L}(\text{Sp}(\check{\mathbf{T}}), \check{\mathbf{T}}) = \mathcal{L}(\check{\mathbf{T}}, \text{Sp}(\check{\mathbf{T}})) = 0. \quad (4.102)$$

Einsetzen von (4.100) in (4.99) liefert die kinetischen Koeffizienten ausgedrückt durch skalare Transportkoeffizienten und Einheitstensoren

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{00})_{ab} &= T^2 \lambda \delta_{ab} + T \eta (\mathbf{\Delta})_{abcd} v_c v_d + T \zeta v_a v_b, \\ (\mathcal{L}_{11})_{abcd} &= T \eta (\mathbf{\Delta})_{abcd} + T \zeta \delta_{ac} \delta_{bd}, \\ (\mathcal{L}_{01})_{abd} &= (\mathcal{L}_{10})_{bda} = T \eta (\mathbf{\Delta})_{abcd} v^c + T \zeta v_a \delta_{bd}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

⁶In der irreversiblen Thermodynamik ist eine analoge Aussage bekannt als Theorem von Curie (de Groot und Mazur, 1962).

Wir konvertieren diese Gleichungen und drücken die skalaren Transportkoeffizienten durch die aus den mikroskopischen Flüßen konstruierten Korrelationsfunktionen aus. Mit den Gleichungen (4.100) und (4.102) erhalten wir

$$\lambda = \frac{1}{3T^2} \mathcal{L}(\mathbf{J}_q, \mathbf{J}_q) = \frac{V}{3T^2} \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} \langle \mathbf{J}_q e^{itL} \mathbf{J}_q \rangle^{(0)}, \quad (4.104)$$

$$\eta = \frac{1}{10T} \mathcal{L}(\check{\mathbf{T}}, \check{\mathbf{T}}) = \frac{V}{10T} \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} \langle \check{\mathbf{T}} e^{itL} \check{\mathbf{T}} \rangle^{(0)}, \quad (4.105)$$

$$\zeta = \frac{1}{T} \mathcal{L}(\Pi, \Pi) = \frac{V}{T} \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} \langle \Pi e^{itL} \Pi \rangle^{(0)}. \quad (4.106)$$

Die physikalische Interpretation der Skalare λ , η und ζ wird klar, wenn wir die Ausdrücke (4.103) für die kinetischen Koeffizienten in die hydrodynamischen Gleichungen einsetzen. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, daß (4.104) den *Wärmeleitungskoeffizienten*, (4.105) den *Koeffizienten der Scherviskosität* und (4.106) den *Koeffizienten der Volumenviskosität* bestimmt.

Die Gleichungen (4.104)–(4.106) und andere Ausdrücke für Transportkoeffizienten als Funktionen von Korrelatoren heißen *Green–Kubo-Formeln*. Sie wurden zuerst von Green (Green, 1952) hergeleitet, der dazu die Theorie der stochastischen Prozesse benutzte. In Greens Artikel wurde die Mittelung bezüglich des mikrokanonischen Ensembles durchgeführt. Daher fehlen die zu ΔH und ΔN proportionalen Terme in der Gleichung (4.97) für den Fluss Π . Das mikrokanonischen Ensemble ist allerdings für praktische Rechnungen eher ungeeignet, da in jedem Fall Energie- und Teilchenzahlerhaltung gefordert werden muß.

4.2.5 Dissipative Prozesse

Aus den Gleichungen (4.103) für die lokalen kinetischen Koeffizienten wird nun ein vollständiges System von hydrodynamischen Gleichungen für eine einkomponentige Flüssigkeit hergeleitet. Dazu formulieren wir die Transportgleichungen (4.17) für die mittlere Energiedichte $e(\mathbf{r}, t) = \langle e(\mathbf{r}) \rangle(t)$ und die mittlere Impulsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{j}(\mathbf{r}) \rangle(t)$. Mit den Definitionen (4.38) für die relevanten variablen und (4.40) für die thermodynamische konjugierten Parameter wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} e &= -\nabla \cdot \langle \mathbf{j}_e \rangle_{\text{led}} - \nabla_a \mathcal{L}_{00}^{ab} \nabla_b + \nabla_a \mathcal{L}_{01}^{abc} \nabla_b \beta v_c, \\ \frac{\partial}{\partial t} j_a &= -\nabla_b \langle T_{bc} \rangle_{\text{led}} + \nabla_b \mathcal{L}_{11}^{abcd} \nabla_c \beta v_d - \nabla_b \mathcal{L}_{10}^{abc} \nabla_c \beta. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Wir substituieren die Ausdrücke (4.103) für die kinetischen Koeffizienten und ordnen nach Gradienten $\nabla \otimes \mathbf{v}$ und $\nabla T = (1/T^2)\nabla T$. Dies ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} e = -\nabla \cdot (\langle \mathbf{j}_e \rangle_{\text{led}} + \mathbf{q} + \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}) , \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} = -\nabla \cdot (\langle \mathbf{T} \rangle_{\text{led}} + \boldsymbol{\pi}) , \quad (4.109)$$

wobei der *Wärmestrom* $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ und der *viskose Spannungstensor* $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t)$ durch

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\lambda \nabla T , \quad (4.110)$$

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}, t) = -\eta \overset{\vee}{\nabla} \mathbf{v} - \zeta \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (4.111)$$

gegeben sind. Der spurlose Tensor $\overset{\vee}{\nabla} \mathbf{v}$ ist aus den Ableitungen der Massengeschwindigkeit konstruiert:

$$\left(\overset{\vee}{\nabla} \mathbf{v} \right)_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_a v_b + \nabla_b v_a - \frac{2}{3} \delta_{ab} \nabla \cdot \mathbf{v} . \quad (4.112)$$

Mit den Gleichungen (4.50) für die mittlere Energie- und Impulsdichte und den Ausdrücken für die Flüsse $\langle \mathbf{j}_e \rangle_{\text{led}}$ und $\langle \mathbf{T} \rangle_{\text{led}}$ lassen sich die Gleichungen (4.108) und (4.109) in

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) = -\nabla \cdot \left[\left(\varepsilon + P + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) \mathbf{v} + \mathbf{q} + \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v} \right] , \quad (4.113)$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla (P + \pi) \quad (4.114)$$

überführen, wie sie üblicherweise in der Hydrodynamik notiert werden. Die Gleichungen (4.113) und (4.114) bilden zusammen mit dem Massen-Erhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = -\nabla \cdot \rho \mathbf{v} \quad (4.115)$$

ein vollständiges System von Prozessgleichungen zur hydrodynamischen Beschreibung von klassischen Flüssigkeiten. Gleichung (4.114) heißt *Navier-Stokes-Gleichung* und beschreibt die makroskopische Dynamik in einer Flüssigkeit.

In vielen Fällen ist es günstiger, eine Bilanzgleichung für die Entropie statt (4.113) für die Energiedichte zu verwenden. Um diese herzuleiten, benutzen wir die thermodynamische Beziehung

$$\rho T ds = d\varepsilon - \frac{\varepsilon + P}{\rho} d\rho , \quad (4.116)$$

die die Änderung der Entropie pro Masse $s(\varepsilon, \rho)$ im mitbewegten Bezugssystem zur Änderung der Energie- und Massendichte in Beziehung setzt. Daraus folgt

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\varepsilon + P}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} . \quad (4.117)$$

Die substantiellen Ableitungen $D\varepsilon/Dt$ und $D\rho/Dt$ können aus (4.113) und (4.115) und die Ableitung $\partial\mathbf{v}/\partial t$ mit der Navier-Stokes-Gleichung (4.114) berechnet werden. Wir erhalten

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \boldsymbol{\pi} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) . \quad (4.118)$$

Im Prinzip müssen jetzt nur noch die Ausdrücke (4.110) und (4.111) für den Wärmestrom und den viskosen Spannungstensor eingesetzt werden. Das Endergebnis sieht jedoch einfacher aus, wenn wir den zweiten Summanden in (4.118) zunächst folgendermaßen umformen:

$$\boldsymbol{\pi} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) = \boldsymbol{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2} \check{\nabla} \mathbf{v} + \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{v} \right] . \quad (4.119)$$

Als Bilanzgleichung für die Entropie pro Masse finden wir die Gleichung

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) s = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \frac{1}{2} \eta (\check{\nabla} \mathbf{v}) \cdot (\check{\nabla} \mathbf{v}) + \zeta (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 . \quad (4.120)$$

Wie bereits erwähnt kann diese Gleichung statt der Bilanzgleichung (4.113) für die Energiedichte benutzt werden.

Wir zeigen nun noch, wie die Entropiedichte $S = \rho s$ einer Flüssigkeit sich in der Zeit ändert, wenn dissipative Prozesse existieren. Ausgangspunkt ist die Bilanzgleichung

$$\frac{DS}{Dt} = \rho \frac{Ds}{Dt} + s \frac{D\rho}{Dt} . \quad (4.121)$$

Die substantiellen Ableitungen auf der rechten Seite können mit dem Massenerhaltungssatz (4.115) und Gleichung (4.120) berechnet werden. Wir erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t} S(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_S(\mathbf{r}, t) = \sigma_S(\mathbf{r}, t) . \quad (4.122)$$

Hierbei bedeutet der Vektor

$$\mathbf{j}_S(\mathbf{r}, t) = S\mathbf{v} - \frac{\lambda}{T} \nabla T \quad (4.123)$$

den *Entropiestrom* und die skalare Größe

$$\sigma_S(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{T^2} \lambda (\nabla T)^2 + \frac{1}{2T} \eta (\check{\nabla} \mathbf{v}) \cdot (\check{\nabla} \mathbf{v}) + \frac{1}{T} \zeta (\nabla \mathbf{v})^2 \quad (4.124)$$

die durch Wärmeleitung und Viskositäten verursachte *lokale Entropieproduktion*. Wir werden später zeigen, daß alle Transportkoeffizienten positiv sind und daher $\sigma_S \geq 0$ gilt. Damit ist (4.122) konsistent mit dem Postulat über das Anwachsen der Entropie, da die gesamte Entropieproduktion stets positiv ist.

Die in den hydrodynamischen Gleichungen auftretenden Transportkoeffizienten hängen von den lokalen thermodynamischen Parametern wie der Temperatur und dem

chemischen Potential ab. Im allgemeinen hängen also die Transportkoeffizienten von den Orten ab. In vielen Fällen variieren sie aber nur wenig und können als räumlich konstant angenommen werden. Dann vereinfacht sich die Navier-Stokes-Gleichung (4.114) zu

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \eta \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) . \quad (4.125)$$

Ist außerdem die Massendichte konstant, so folgt aus (4.115) $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ und der letzte Summand auf der rechten Seite von (4.125) verschwindet.

4.2.6 Relativistische Formulierung Dissipativer Prozesse

Eine konsistente relativistische Formulierung bestimmter dissipativer hydrodynamischer Prozesse gelang Eckart 1940, siehe (Eckart, 1940). Landau und Lifshitz fanden 1959 eine alternative Formulierung (Landau und Lifshitz, 1991).

Der Energie-Impuls-Tensor \mathbf{T} und die Teilchenstromdichte \mathbf{J} sind im adiabatischen Limes, d. h. alle Raum-Zeit-Gradienten sind vernachlässigbar, durch

$$\mathbf{J}^{(0)} = n \mathbf{V} , \quad (4.126)$$

$$\mathbf{T}^{(0)} = \rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - P \mathbf{h} \quad (4.127)$$

gegeben. Hierbei bezeichnen n , ρ und P die Teilchenzahl-, die Energiedichte und den Druck der idealen Flüssigkeit. \mathbf{V} sei die Vierergeschwindigkeit mit der Normierung $V^2 = 1$ und $\mathbf{h} = \mathbf{g} - \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ der Projektionsoperator auf die Ebene senkrecht zu V .

Sind die adiabatischen Prozesse für die Dynamik der Flüssigkeit wesentlich wichtiger als die dissipativen Prozesse, so werden die erhaltenen Tensoren (4.126) und (4.127) folgendermaßen modifiziert:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(0)} + \mathbf{J}^{(1)} , \quad (4.128)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{T}^{(1)} . \quad (4.129)$$

Die geforderte Einschränkung auf schwach dissipative Prozesse bedeutet, daß die Korrekturen $\mathbf{J}^{(1)}$ und $\mathbf{T}^{(1)}$ im Vergleich zu den adiabatischen Tensoren $\mathbf{J}^{(0)}$ und $\mathbf{T}^{(0)}$ an allen Raum-Zeit-Punkten klein sind. Aus der Natürlichkeit der Theorie folgt, daß die Tensoren $\mathbf{J}^{(1)}$ und $\mathbf{T}^{(1)}$ lediglich aus Raum-Zeit-Gradienten bis einschließlich erster Ordnung konstruiert werden.

Der Ansatz für die erhaltenen Tensoren (4.128) und (4.129) liefert ohne weitere Forderungen keine eindeutige Definition von n , U , ρ und damit P . Die durch die Dissipation bewirkten Effekte können vielmehr durch geeignete Transformationen

der Vierergeschwindigkeit unterschiedlich zwischen den Tensoren $\mathbf{J}^{(1)}$ und $\mathbf{T}^{(1)}$ verteilt werden. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, fordern wir (Weinberg, 1971)

$$n \equiv \mathbf{U} \cdot \mathbf{J} , \quad (4.130)$$

$$\rho \equiv (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T} , \quad (4.131)$$

$$\mathbf{U} \equiv \|\mathbf{J}\|^{-1} \mathbf{J} . \quad (4.132)$$

In (4.130) ist die Anzahldichte als nullte Komponente von \mathbf{J} im mitbewegten Bezugssystem definiert und in (4.131) die Energiedichte als Komponente T^{00} von \mathbf{T} im mitbewegten Bezugssystem. Die Vierergeschwindigkeit hat per definitionem dieselbe Raum-Zeit-Richtung wie die Teilchenstromdichte ⁷. Die Forderungen (4.130)–(4.132) haben eine klare geometrische Interpretation: aus (4.130) folgt, daß $\mathbf{J}^{(1)}$ senkrecht auf \mathbf{U} steht. Aus (4.131) folgt, daß $\mathbf{T}^{(1)}$ auf die zu \mathbf{U} senkrechte Ebene projiziert. Schließlich folgt aus (4.132) und (4.131), daß sogar $\mathbf{J}^{(1)} \equiv 0$ und $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}^{(1)} \equiv 0$ gilt.

Die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeit folgen aus der Erhaltung der Tensoren (4.128) und (4.129)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 , \quad (4.133)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 . \quad (4.134)$$

Wie schon im letzten Abschnitt leiten wir zunächst eine Bilanzgleichung für die Entropie, präziser für die Entropie pro Teilchen σ her. Mit (4.128) und $\mathbf{J}^{(1)} \equiv 0$ wird aus (4.133)

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\frac{\dot{n}}{n} , \quad (4.135)$$

wobei der Punkt über einem Tensor die Ableitung $\mathbf{U} \cdot \nabla$ bezeichne, die im mitbewegten Bezugssystem mit der Zeitableitung übereinstimmt. Durch Kontraktion von (4.134) mit \mathbf{U} und mit (4.127), (4.129) und (4.135) folgt

$$\dot{\rho} - \frac{w}{n} \dot{n} = (\mathbf{U} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{T}^{(1)} . \quad (4.136)$$

Hierbei ist $w \stackrel{\text{def}}{=} \rho + P$ die relativistische Verallgemeinerung der Enthalpie. Die Quellen für Änderungen des Energie-Impuls-Tensors in Stromrichtung sind also durch zeitliche veränderliche Energie- und Teilchenzahldichten gegeben. Nun folgt aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik für die Variation der Entropie pro Teilchen

$$Td\sigma = d\rho - \frac{w}{n} dn , \quad (4.137)$$

⁷Diese Wahl der Geschwindigkeit korrespondiert zu Eckarts Formulierung (?) und wurde in (Weinberg, 1971) zur Beschreibung von Systemen verwandt, in denen Strahlung dissipative Prozesse induziert. In (Landau und Lifshitz, 1991) hingegen wird die Vierergeschwindigkeit so fixiert, daß sie mit der Geschwindigkeit des Energie-Impuls-Flusses übereinstimmt.

für ein adiabatisches System mit Temperatur T . Einsetzen in (4.136) liefert eine Bilanzgleichung für die Entropie pro Teilchen

$$nT \dot{\sigma} = -(\mathbf{U} \otimes \nabla) \cdot \mathbf{T}^{(1)}. \quad (4.138)$$

Eine Änderung der Entropie pro Teilchen entlang des adiabatischen Flusses wird also durch Änderungen des Energie- und Impulsflusses in dieser Richtung generiert. Aus (4.139) läßt sich auch eine Bilanzgleichung für die durch $\mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} n\sigma\mathbf{U} - T^{-1}\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}^{(1)}$ definierte Entropiestromdichte ⁸ herleiten:

$$T^2 \nabla \cdot \mathbf{S} = -(\mathbf{U} \otimes \nabla T - T \nabla \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}^{(1)}. \quad (4.139)$$

Im folgenden wird $\mathbf{T}^{(1)}$ so konstruiert, daß die rechte Seite von (4.139) für jeden möglichen Zustand der Flüssigkeit positiv definit ist, d. h. die Rate der Entropieproduktion pro Einheitsvolumen ist stets positiv. Außerdem gibt es noch folgende Konstruktionselemente

- (I) Eine hydrodynamische Beschreibung setzt voraus, daß alle den Zustand eines Flüssigkeitselementes beschreibenden Variablen wie ρ , P , \mathbf{U} usw. innerhalb des Flüssigkeitselementes konstant sind. Vom kinetischen Standpunkt her bedeutet dies, daß die Flüssigkeit lokal im Gleichgewicht ist. Folglich muß der Tensor $\mathbf{T}^{(1)}$ eine Linearkombination von $\nabla\rho$, ∇P , $\nabla \otimes \mathbf{U}$ usw. sein.
- (II) (I) läßt sich weiter einschränken: tatsächlich können nur Linearkombinationen von ∇T und $\nabla \otimes U$ in der Konstruktion von $\mathbf{T}^{(1)}$ verwendet werden, da andernfalls die Quellen der Entropieproduktion auf der rechten Seite von (4.139) Produkte von ∇T , $\nabla \otimes U$ mit $\nabla\rho$, ∇P , $\nabla \otimes \mathbf{U}$ usw. enthielten. Solche Produkte können nicht für jeden möglichen Zustand des betrachteten Flüssigkeitselementes positiv sein. Es existierten dann Zustände, für die $\nabla \cdot \mathbf{S} < 0$ wäre im Widerspruch zum n. Hauptsatz der Thermodynamik.

Natürlich können bestimmte Kombinationen von $\nabla\rho$, ∇P , $\nabla \otimes \mathbf{U}$ usw. mit der Zustandsgleichung oder den Prozessgleichungen der Flüssigkeit als Linearkombination von ∇T und $\nabla \otimes U$ geschrieben werden. Diese sind aber bereits berücksichtigt in der allgemeinsten Linearkombination von ∇T und $\nabla \otimes U$.

- (III) Wir sind interessiert an der Beschreibung schwach dissipativer Prozesse im Sinne von $\mathbf{T}^{(1)} \ll \mathbf{T}^{(0)}$. Dies rechtfertigt die Konstruktion von $\mathbf{T}^{(1)}$ bis einschließlich erster Ordnung in ∇T und $\nabla \otimes U$. Dann dürfen die adiabatischen Bewegungsgleichungen (4.126) und (4.127) zur Vereinfachung von $\mathbf{T}^{(1)}$ verwendet werden.

⁸Die Definition ist gerechtfertigt: $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = n\sigma$, d. h. die Projektion von \mathbf{S} entlang des adiabatischen Flusses ist die Entropiedichte. Im mitbewegten Bezugssystem ist dies die nullte Komponenten von \mathbf{S} . Senkrecht hierzu erhält $T\mathbf{S}$ im mitbewegten Bezugssystem Beiträge mit den Komponenten $T^{(1)0i}$, also durch dissipative Prozesse generierte Impulsströme.

Insbesondere folgt aus (4.130) und (4.128) für adiabatische Prozesse

$$\dot{T} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n^{-1} \left[n \left(\frac{\partial \rho}{\partial n} \right)_T - w \right] \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (4.140)$$

also $\dot{T} \sim \nabla \cdot \mathbf{U}$. Da wir für die Konstruktion von $\mathbf{T}^{(1)}$ bereits $\nabla \cdot \mathbf{U}$ berücksichtigt haben, kann \dot{T} zur Konstruktion von $\mathbf{T}^{(1)}$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit vernachlässigt werden.

Für die Konstruktion von $\mathbf{T}^{(1)}$ wählen wir als Bezugssystem das mitbewegte Bezugssystem. In diesem Bezugssystem lassen sich sehr schnell die nichtverschwindenden Komponenten von $\mathbf{T}^{(1)}$ bestimmen. Es sind dies $T^{(1) i\nu}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $\nu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der Dreiervektor \vec{Q} mit den Komponenten $T^{(1) i0}$ kann nur eine Linearkombination von ∇T und $\dot{\mathbf{U}}$ sein. Wir schreiben⁹

$$\vec{Q} = -\chi \vec{\nabla} T - \xi \dot{\mathbf{U}}, \quad (4.141)$$

wobei χ und ξ zunächst beliebige reelle Koeffizienten sind.

Die Matrix $\widetilde{\mathbf{W}}$ mit den Komponenten $T^{(1) ij}$ kann nur eine Linearkombination von $\vec{\nabla} \otimes \vec{U}$ und \dot{T} sein. \dot{T} ist allerdings proportional zu $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}$. Also läßt sich \mathbf{W} als Linearkombination von $\text{Sym}(\vec{\nabla} \otimes \vec{U})$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{U}$ schreiben:

$$\widetilde{\mathbf{W}} = -\eta \text{Sym}(\vec{\nabla} \otimes \vec{U}) - \zeta \vec{\nabla} \cdot \vec{U}, \quad (4.142)$$

mit zwei weiteren reellen Koeffizienten η und ζ .

Die Entropieproduktion pro Einheitsvolumen in diesem Bezugssystem ist mit (4.139) und (4.141), (4.142) durch

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{T} (\vec{\nabla} \otimes \vec{U}) \cdot \widetilde{\mathbf{W}} + \frac{1}{T} \dot{\mathbf{U}} \cdot \vec{Q} + \frac{1}{T^2} \vec{\nabla} T \cdot \vec{Q} \\ &= \frac{\eta}{2T} \widetilde{\mathbf{W}} \cdot \widetilde{\mathbf{W}} + \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \vec{U})^2 + \vec{Q} \cdot \left(\frac{1}{T^2} \vec{\nabla} T + \frac{1}{T} \dot{\mathbf{U}} \right) \end{aligned} \quad (4.143)$$

gegeben. Dies ist genau dann für alle Zustände der Flüssigkeit positiv, wenn $\xi \equiv T\chi$ gilt und $\eta \geq 0$, $\zeta \geq 0$ und $\chi \geq 0$.

Nun sollen die im mitbewegten Bezugssystem formulierten Beziehungen für $\mathbf{T}^{(1)}$ und $\nabla \cdot \mathbf{S}$ Lorentz-invariant notiert, d. h. durch Lorentz-Tensoren ausgedrückt werden. Der Dreiervektor \vec{Q} (4.141) wird zum Vierervektor

$$\mathbf{Q} = \nabla T - T \dot{\mathbf{U}}, \quad (4.144)$$

⁹Im Hinblick auf die Erweiterung zum Vierervektor wäre $\vec{Q} \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\nabla} T - \xi/\chi \dot{\mathbf{U}}$ die konventionelle Definition.

wobei der Koeffizient χ sinnvollerweise nicht mehr im Vierervektor \mathbf{Q} auftritt, sondern in allen Ausdrücken mit \mathbf{Q} explizit als Vorfaktor auftritt. Der zu η proportionale Anteil der 3-Matrix $\widetilde{\mathbf{W}}$ (4.142) wird zum Lorentz-Tensor

$$\mathbf{W} = \text{Sym}(\nabla \otimes \mathbf{U}) , \quad (4.145)$$

und der zu ζ proportionale Anteil wird kanonisch verallgemeinert. Die Koeffizienten η und ζ treten in allen Ausdrücken mit \mathbf{W} und $\nabla \cdot \mathbf{U}$ als Vorfaktoren auf.

Aus den Lorentz-Tensoren \mathbf{Q} , \mathbf{W} und $\nabla \cdot \mathbf{U}$ wird der Lorentz-Tensor $\mathbf{T}^{(1)}$ konstruiert. $\mathbf{T}^{(1)}$ kann aber keine Linearkombination dieser Tensoren sein, da sonst $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}^{(1)} \neq 0$ im Widerspruch zu (4.131) gelten würde. Vom geometrischen Standpunkt her betrachtet, müssen noch die longitudinalen Anteile, also die Projektionen der Tensoren \mathbf{Q} , \mathbf{W} und $\text{Sp}(\mathbf{W})$ entlang \mathbf{U} , eliminiert werden. Dies gelingt mit dem Projektionsoperator \mathbf{h} . Wir definieren die transversalen Lorentz-Tensoren durch: $\mathbf{Q}^{(T)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{h} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{W}^{(T)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{h} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{h}$ und der Lorentz-Skalar $\text{Sp}(\mathbf{W})$ multipliziert einfach \mathbf{h} . $\mathbf{T}^{(1)}$ ist eine Linearkombination dieser transversalen Lorentz-Tensoren mit ζ , η und χ als Koeffizienten. Wir erhalten:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \zeta \mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{U} + \eta \mathbf{W}^{(T)} + \chi \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}^{(T)}) . \quad (4.146)$$

Die Koeffizienten ζ , η und χ heißen wieder *Koeffizient der Volumenviskosität*, *Koeffizient der Scherviskosität* und *Wärmeleitungskoeffizient*.

Die Rate der Entropie-Produktion pro Einheitsvolumen kan nun ebenfalls für jedes legitime Bezugssystem formuliert, d. h. ausgedrückt durch die transversalen Lorentz-Tensoren werden. Aus (4.146) folgt, daß der einzige nichtverschwindende transversale Anteil in der Entropiestromdichte \mathbf{S} der transversale Wärmestrom $\mathbf{Q}^{(T)}$ ist. Wir finden somit

$$\mathbf{S} = \sigma \mathbf{J} - \frac{\chi}{T} \mathbf{Q}^{(T)} . \quad (4.147)$$

Entropie strömt also entlang der adiabatischen Stromfäden, weil jedes Teilchen im Strom Entropie trägt. Senkrecht dazu ergibt lediglich der Wärmestrom einen Entropiestrom. Allerdings sind die Quellen für den Entropiestrom durch alle transversalen Lorentz-Strukturen gegeben:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{\eta}{2T} \mathbf{W}^{(T)} \cdot \mathbf{W} + \frac{\zeta}{T} (\nabla \cdot \mathbf{U})^2 + \frac{\chi}{T^2} \mathbf{Q}^{(T)} \cdot \mathbf{Q} . \quad (4.148)$$

Literatur

de Groot, S. R. und Mazur, P., 1962, *Non-Equilibrium Thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam

Eckart, C., 1940, *Phys. Rev.* **58**, 919

- Green, M. S., 1952, *J. Chem. Phys.* **20**, 1281
- Kawasaki, K. und Gunton, J. D., 1973, *Phys. Rev.* **8A**, 2048
- Landau, L. D. und Lifshitz, E. M., 1991, *Hydrodynamik*, Akademie Verlag, Berlin
- Weinberg, S., 1971, *Astrophys. J.* **168**, 175
- Zubarev, D., Morozov, V., und Röpke, G., 1996, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes*, Wiley–VCH Verlag

–V–

NEUTRALINOS

Der $SU(2)_{EW} \times U(1)_Y$ -Sektor der minimal supersymmetrischen Erweiterung¹ des Standard-Modelles (MSSM) enthält die vier Bosonen B^0, W_3^0, H_1^0, H_2^0 und deren supersymmetrische Partner, das Bino \tilde{B}^0 , Wino \tilde{W}_3^0 und zwei Higgsinos $\tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0$. Diese supersymmetrischen Partner bilden den sogenannten *Neutralino*-Sektor des MSSM. Neutralinos tragen die gleichen Quantenzahlen, insbesondere sind sie neutrale Fermionen. Folglich können Neutralinos mischen, d. h. die korrespondierende Massenmatrix kann nicht-diagonale Einträge besitzen.

Die Neutralino-Massenmatrix M erhält lediglich einen Parameter μ vom $\mu H_1^0 H_2^0$ -Term im supersymmetrischen Sektor des MSSM. Da die Natur auf uns zugänglichen Energieskalen weder elektroschwache- noch Supersymmetrie verwirklicht hat, besitzt das MSSM außerdem Anteile, die Supersymmetrie *sanft* brechen. Dies sind Supersymmetrie verletzende Terme, die keine manifest quadratisch divergenten Beiträge induzieren. Solche Beiträge liefern zwei weitere Parameter: die Massen M_1 und M_2 der Binos und Winos. In der Basis $\{\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0\}$ ist die Neutralino-Massenmatrix durch

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -m_Z \sin \theta_W \cos \beta & m_Z \sin \theta_W \sin \beta \\ 0 & M_2 & m_Z \cos \theta_W \cos \beta & -m_Z \cos \theta_W \sin \beta \\ -m_Z \sin \theta_W \cos \beta & m_Z \cos \theta_W \cos \beta & \delta_{33} & -\mu \\ m_Z \sin \theta_W \sin \beta & -m_Z \cos \theta_W \sin \beta & -\mu & \delta_{44} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei $\tan \beta = \langle H_2 \rangle / \langle H_1 \rangle$ das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Bosone² und m_Z die Masse des Z -Bosons bezeichne. δ_{33} und δ_{44} be-

¹Die supersymmetrische Erweiterung der Poincaré-Gruppe, ihre Darstellungstheorie und die Konstruktion von renormierbaren supersymmetrischen Eichtheorien bishin zur minimal supersymmetrischen Erweiterung des Standard-Modelles werden ausführlich in den Kapiteln X-Y behandelt.

²Diese Definition folgt der Konvention, wonach H_1 die Masse der d -Quarks und H_2 die Masse der u -Quarks generiert. Eine andere häufig gewählte Konvention folgt durch die Ersetzungen $Z_{13} \leftrightarrow Z_{14}$, $\tan \beta \rightarrow \langle H_1 \rangle / \langle H_2 \rangle$ und $\mu \rightarrow -\varepsilon$.

zeichnen Strahlungskorrekturen, die wichtig werden, wenn beide Higgsinos ungefähr die gleiche Massen besitzen.

Die Eigenwerte von M sind die Massen der vier physikalischen Neutralino-Zustände $\tilde{\chi}_i^0$, ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$). Diese Eigenvektoren sind in der Basis $\{\tilde{B}^0, \tilde{W}_3^0, \tilde{H}_1^0, \tilde{H}_2^0\}$ durch

$$\tilde{\chi}_i^0 = Z_{i1} \tilde{B}^0 + Z_{i2} \tilde{W}_3^0 + Z_{i3} \tilde{H}_1^0 + Z_{i4} \tilde{H}_2^0 \quad (5.1)$$

gegeben, wobei die Z_{ij} die Mischungskoeffizienten bezeichnen und Elemente einer reellen orthogonalen 4×4 -Matrix sind, die die Massenmatrix der Neutralinos diagonalisiert. Die Neutralinos sind konventionsgemäß so indiziert, daß $\tilde{\chi}_1^0$ das leichteste Neutralino bezeichne³. Das leichteste Neutralino wird oft und hier ebenfalls als das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) angenommen. Wird weiterhin R -Parität vorausgesetzt, so ist das leichteste Neutralino stabil. Ein stabiles LSP mit den Quantenzahlen des leichtesten Neutralinos ist ein attraktiver Teilchenkandidat fuer kalte dunkle Materie.

Die nicht-diagonalen Beiträge in M sind mit Ausnahme der zu μ proportionalen Einträge vergleichbar mit m_Z und damit kleiner als 1 TeV. Sie können daher oft vernachlässigt werden. Deswegen lassen sich sofort qualitative Aussagen zu den Eigenwerten von M machen:

- (1) Falls $M_{1,2} \sim 1$ TeV oder größer und $\mu \sim m_Z$, dann wäre $Z_{i3,4} > Z_{i1,2}$, d. h. das leichteste Neutralino wäre Higgsino-artig.
- (2) Falls $\mu \sim 1$ TeV oder größer und $M_{1,2}$ kleiner, dann wäre $Z_{i1,2} > Z_{i3,4}$, d. h. das leichteste Neutralino wäre eher mit den supersymmetrischen Partnern der neutralen Eichbosonen zu vergleichen.
- (3) Falls $\mu \sim M_{1,2} \gg m_Z$, dann wäre das leichteste Neutralino eine gleichberechtigte Mischung von Higgsinos und den supersymmetrischen Partnern der neutralen Eichbosonen.
- (4) Falls $\mu \sim M_{1,2} \sim m_Z$, dann wäre das leichteste Neutralino eine komplizierte Mischung, die sensitiv von dem Wert von $\tan \beta$ abhinge.

Wir nehmen weiterhin an, daß die minimal supersymmetrische Erweiterung des Standard-Modelles in eine sogenannte große vereinheitlichte Theorie (GUT) eingebettet werden kann. Dies impliziert die Existenz einer einzigen Massenskala für skalare Teilchen, die Supersymmetrie bricht. Wir werden die supersymmetrische Erweiterung des Standard-Modelles zusammen mit der Annahme der Existenz einer einbettenden GUT mit cMSSM abkürzen. Im cMSSM hängen die Massen der

³Für $Z_{11} = Z_{12} = 0$ ist $\tilde{\chi}_1^0$ ein reines Higgsino, für $Z_{11} = \cos \theta_W$, $Z_{12} = \sin \theta_W$ ein reines Photino und für $Z_{11} = -\sin \theta_W$, $Z_{12} = \cos \theta_W$ ist $\tilde{\chi}_1^0$ ein reines Zino.

Neutralinos nur noch von drei Parametern ab: $\tan\beta$, μ und M_1 . Im Parameterraum der cMSSM gilt weiterhin fast überall $Z_{11} \approx 1$, also $\tilde{\chi}_1^0 \equiv \tilde{\chi} \approx \tilde{B}^0$ ⁴.

Die Wechselwirkung eines reinen Binos mit einem Standard-Modell-Fermion F wird durch den Austausch des zu F gehörenden links- und rechtshändigen supersymmetrischen Partners $\tilde{F}_{L,R}$ vermittelt:

$$\mathcal{L}_{bc} = -\sqrt{2}g \bar{F} \left(b_F \tilde{F}_L \mathcal{P}_R - c_F \tilde{F}_R \mathcal{P}_L \right) \tilde{\chi} + \text{h.c.} , \quad (5.2)$$

wobei g die elektroschwache Kopplungskonstante und $\mathcal{P}_{L,R}$ den links- bzw. rechtshändigen Chiralitätsoperator bezeichne. Die links- und rechtshändigen Vertizes sind durch

$$b_F \stackrel{\text{def}}{=} Z_{11} (Y_F/2) \tan\theta_W + Z_{12} T_{3F} , \quad (5.3)$$

$$c_F \stackrel{\text{def}}{=} Z_{11} Q_F \tan\theta_W \quad (5.4)$$

definiert. Hierbei seien Y_F , T_{3F} und Q_F die schwache Hyperladung, der schwache Isospin und die elektrische Ladung der involvierten Fermionen.

Streuprozessen der Art $\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \leftrightarrow F + \bar{F}$ und $\tilde{\chi} + \{F, \bar{F}\} \rightarrow \tilde{\chi} + \{F, \bar{F}\}$ werden auf Baumgraphenniveau effektiv durch

$$\mathcal{L}_b^{\text{eff}}(z_1, z_2) = i^2 (-\sqrt{2}g)^2 \sum_F b_F^2 \left[\bar{F} \mathcal{P}_R \tilde{\chi} \tilde{F}_L \right] (z_1) \left[\tilde{\chi} \mathcal{P}_L F \tilde{F}_L^* \right] (z_2) , \quad (5.5)$$

$$\mathcal{L}_c^{\text{eff}}(z_1, z_2) = i^2 (-\sqrt{2}g)^2 \sum_F c_F^2 \left[\bar{F} \mathcal{P}_L \tilde{\chi} \tilde{F}_R \right] (z_1) \left[\tilde{\chi} \mathcal{P}_R F \tilde{F}_R^* \right] (z_2) \quad (5.6)$$

generiert, so daß

$$\exp \left(i \int d^4z \mathcal{L}_{bc} \right) \xrightarrow{\mathcal{O}(g^2)} \int d^4z_1 d^4z_2 \left(\mathcal{L}_b^{\text{eff}} + \mathcal{L}_c^{\text{eff}} \right) (z_1, z_2) . \quad (5.7)$$

Die oben angegebenen Streuprozesse sind die Annihilation von Neutralinos in Fermion-Antifermion Paare des Standardmodelles und elastische Streuung von Fermionen des Standardmodelles an Neutralinos. Erstere bestimmen die Anzahldichte der Neutralinos zu einem beliebigen Zeitpunkt und letztere halten die Neutralinos im lokalen thermischen Gleichgewicht.

⁴Im weiteren verwenden wir oft den Begriff Neutralino für ein reines Bino. Dieser Sprachgebrauch ist unpräzise, bezieht sich aber auf die im cMSSM akkurate Approximation $\tilde{\chi}_1^0 \equiv \tilde{\chi} \approx \tilde{B}^0$.

5.1 Neutralino–Annihilationen

In diesem Abschnitt berechnen wir die Rate für die Streuprozesse $\tilde{\chi}(k_1) + \tilde{\chi}(k_2) \rightarrow F(p_1) + \bar{F}(p_2)$ in führender Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ in der elektroschwachen Kopplungskonstanten. Unsere Aufgabe besteht zunächst in der Berechnung der Übergangsamplitude

$$\tilde{\mathcal{T}}_{\text{ann}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle F(p_1) \bar{F}(p_2) | \tilde{\chi}(k_1) \tilde{\chi}(k_2) \rangle . \quad (5.8)$$

Die hier gewählte Notation für den Eingangszustand ist nur eine Abkürzung:

$$| \tilde{\chi}(k_1) \tilde{\chi}(k_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(| \tilde{\chi}(k_1) \bar{\tilde{\chi}}(k_2) \rangle - | \bar{\tilde{\chi}}(k_1) \tilde{\chi}(k_2) \rangle \right) . \quad (5.9)$$

Damit wird der Tatsache Rechnung getragen, daß Neutralinos durch Majorana–Spinoren beschrieben werden. Bei der Berechnung der wechselwirkenden Korrelatoren auf Baumgraphen–Niveau muß weiterhin (5.7) berücksichtigt werden. Für eine übersichtliche Organisation ist es günstig, die Korrelatoren in ihren b - und c -Anteil aufzuspalten und damit den Austausch von linkshändigen und rechtshändigen Sfermionen separat zu behandeln. Wir definieren somit die Amplituden

$$\mathcal{T}_L(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle F(p_1) \bar{F}(p_2) | \tilde{\chi}(k_1) \bar{\tilde{\chi}}(k_2) \rangle_L , \quad (5.10)$$

$$\mathcal{T}_L(u) \stackrel{\text{def}}{=} \langle F(p_1) \bar{F}(p_2) | \bar{\tilde{\chi}}(k_1) \tilde{\chi}(k_2) \rangle_L , \quad (5.11)$$

$$\mathcal{T}_R(t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle F(p_1) \bar{F}(p_2) | \tilde{\chi}(k_1) \bar{\tilde{\chi}}(k_2) \rangle_R , \quad (5.12)$$

$$\mathcal{T}_R(u) \stackrel{\text{def}}{=} \langle F(p_1) \bar{F}(p_2) | \bar{\tilde{\chi}}(k_1) \tilde{\chi}(k_2) \rangle_R . \quad (5.13)$$

Hierbei bezeichnen der Index L (R) des Austausch eines linkshändigen (rechtshändigen) Sfermion und t, u die den Kanal kennzeichnenden Mandelstam–Variablen.

Wir berechnen zuerst (5.10). Mit dem LSZ–Reduktionsformalismus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_L(t) = & \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \exp[-i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2)] \\ & \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \exp[-i(p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2)] \\ & \bar{U}_a^F(p_1) (i\partial_{y_1} - m_F)_{ab} \bar{V}_c^{\tilde{\chi}}(k_2) (i\partial_{x_2} - M_{\tilde{\chi}})_{cd} \\ & \langle 0 | \text{T} \bar{F}_g(y_2) F_b(y_1) \bar{\tilde{\chi}}_e(x_1) \tilde{\chi}_d(x_2) | 0 \rangle_{\text{L,int}} \\ & (i\partial_{x_1} - M_{\tilde{\chi}})_{ef} \bar{U}_f^{\tilde{\chi}}(k_1) (i\partial_{y_2} - m_F)_{gh} V_h^F(p_2) . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Für die Entwicklung der Vierpunktfunktion nach freien Korrelatoren benutzen wir die Lagrange–Dichte (5.5) zur Beschreibung der Wechselwirkung durch Austausch

von linkshändigen Sfermionen, die zum Ausgangskanal korrespondieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \langle 0 \mid \text{T} \bar{F}_g(y_2) F_b(y_1) \bar{\chi}_e(x_1) \tilde{\chi}_d(x_2) \mid 0 \rangle_{\text{L,int}} \stackrel{\mathcal{O}(g^2)}{=} -(\sqrt{2}g b_F)^2 \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \\ & \langle 0 \mid \text{T} \bar{F}_g(y_2) F_b(y_1) \bar{\chi}_e(x_1) \tilde{\chi}_d(x_2) [\bar{F}_r (\mathcal{P}_R)_{rs} \tilde{\chi}_s \tilde{F}_L] (z_1) [\bar{\chi}_u (\mathcal{P}_L)_{uv} F_v \tilde{F}_L^*] (z_2) \mid 0 \rangle . \end{aligned}$$

Mit dem Theorem von Wick erhalten wir im einzelnen für die

Fermion–Korrelationen

$$\langle 0 \mid \text{T} \bar{F}_g(y_2) F_b(y_1) \bar{F}_r(z_1) F_v(z_2) \mid 0 \rangle = -i (S_F^F)_{vg} (z_2 - y_2) i (S_F^F)_{br} (y_1 - z_1) ,$$

Sfermion–Korrelation

$$\langle 0 \mid \text{T} \tilde{F}_L(z_1) \tilde{F}_L^*(z_2) \mid 0 \rangle = i \Delta_F^L(z_1 - z_2) ,$$

Neutralino–Korrelationen

$$\langle 0 \mid \text{T} \bar{\chi}_e(x_1) \tilde{\chi}_d(x_2) \tilde{\chi}_s(z_1) \bar{\chi}_u(z_2) \mid 0 \rangle = i (S_F^{\tilde{\chi}})_{se} (z_1 - x_1) i (S_F^{\tilde{\chi}})_{du} (x_2 - z_2) ,$$

wobei S_F^F den freien Dirac–Propagator der Dirac–Fermionen, $S_F^{\tilde{\chi}}$ den freien Dirac–Propagator des Neutralinos (Majorana–Fermion) und Δ_F^L den freien Feynman–Propagator der linkshändigen Sfermionen bezeichne.

Für die Übergangsamplitude (5.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_L(t) &= \\ & i (\sqrt{2}g b_F)^2 \int d^4 z_1 \int d^4 z_2 \Delta_F^L(z_1 - z_2) \\ & \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \int d^4 y_1 \int d^4 y_2 \exp[-i(k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 - p_1 \cdot y_1 - p_2 \cdot y_2)] \\ & \bar{U}_a^F(p_1) (i\cancel{\partial}_{y_1} - m_F)_{ab} (S_F^F)_{br} (y_1 - z_1) (\mathcal{P}_R)_{rs} (S_F^{\tilde{\chi}})_{se} (z_1 - x_1) (-i\cancel{\partial}_{x_1} - M_{\tilde{\chi}})_{ef} U_f^{\tilde{\chi}}(k_1) \\ & \bar{V}_c^{\tilde{\chi}}(k_2) (i\cancel{\partial}_{x_2} - M_{\tilde{\chi}})_{cd} (S_F^{\tilde{\chi}})_{du} (x_2 - z_2) (\mathcal{P}_L)_{uv} (S_F^F)_{vg} (z_2 - y_2) (-i\cancel{\partial}_{y_2} - m_F)_g hV_h^F(p_2) . \end{aligned}$$

Mit den Bewegungsgleichungen für die Dirac–Fermionen und das Majorana–Fermion und der Fourier–Transformierten des freien Sfermion–Propagators folgt weiter

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{T}}_L(t) &= i (\sqrt{2}g b_F)^2 \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{\chi}}(k_2) (\mathcal{P}_L)_{cd} V_d^F(p_2) \\ & \int d^4 z_1 \exp[-i(k_1 - p_1) \cdot z_1] \int d^4 z_2 \exp[-i(k_2 - p_2) \cdot z_2] \\ & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp[-i(z_1 - z_2) \cdot q] \Delta_F^L(q) \\ & = i(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \mathcal{T}_L(t) , \end{aligned} \tag{5.15}$$

mit

$$\mathcal{T}_L(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2g^2 b^2 \Delta_F^L(t) \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{X}}(k_2) (\mathcal{P}_L)_{cd} V_d^F(p_2) . \quad (5.16)$$

Aus (5.16) folgen sofort alle weiteren Amplituden: die Amplitude $\mathcal{T}_R(t)$ für den Austausch eines rechtshändigen Sfermiones erhalten wir durch die Ersetzung $L \leftrightarrow R$ und $b \rightarrow c$. Die entsprechenden Amplituden $\mathcal{T}_L(u)$ und $\mathcal{T}_R(u)$ für den Austausch eines links- und rechtshändigen Sfermiones im u -Kanal folgen durch $k_1 \leftrightarrow k_2$. Wir fassen die Amplituden zusammen:

$$\mathcal{T}_L(t) = 2g^2 b^2 \Delta_F^L(t) \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{X}}(k_2) (\mathcal{P}_L)_{cd} V_d^F(p_2) , \quad (5.17)$$

$$\mathcal{T}_L(u) = 2g^2 b^2 \Delta_F^L(u) \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_2) \bar{V}_c^{\tilde{X}}(k_1) (\mathcal{P}_L)_{cd} V_d^F(p_2) , \quad (5.18)$$

$$\mathcal{T}_R(t) = 2g^2 c^2 \Delta_F^R(t) \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_L)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{X}}(k_2) (\mathcal{P}_R)_{cd} V_d^F(p_2) , \quad (5.19)$$

$$\mathcal{T}_R(u) = 2g^2 c^2 \Delta_F^R(u) \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_L)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_2) \bar{V}_c^{\tilde{X}}(k_1) (\mathcal{P}_R)_{cd} V_d^F(p_2) . \quad (5.20)$$

Wir definieren die Amplitude

$$\mathcal{T}_{\text{ann}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{T}_L(t) - \mathcal{T}_L(u) + \mathcal{T}_R(t) - \mathcal{T}_R(u)) , \quad (5.21)$$

die bis auf die Energie- und Impulserhaltung erzwingende Dirac-Distribution einschließlich Normierung mit (5.8) übereinstimmt. Wir definieren weiterhin

$$\mathcal{I}_{XY}(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{T}_X(a) \mathcal{T}_Y^\dagger(b) , \quad X, Y \in \{L, R\} , \quad a, b \in \{t, u\} . \quad (5.22)$$

Das Betragquadrat von (5.21) ist ohne weitere Überlegungen

$$\begin{aligned} 2 |\mathcal{T}_{\text{ann}}|^2 &= |\mathcal{T}_L(t)|^2 + |\mathcal{T}_L(u)|^2 + |\mathcal{T}_R(t)|^2 + |\mathcal{T}_R(u)|^2 \\ &\quad - \mathcal{I}_{LL}(t, u) + \mathcal{I}_{LR}(t, t) - \mathcal{I}_{LR}(t, u) \\ &\quad - \mathcal{I}_{LL}(u, t) + \mathcal{I}_{LR}(u, t) - \mathcal{I}_{LR}(u, u) \\ &\quad - \mathcal{I}_{RL}(t, t) + \mathcal{I}_{RL}(t, u) - \mathcal{I}_{RR}(t, u) \\ &\quad - \mathcal{I}_{RL}(u, t) + \mathcal{I}_{RL}(u, u) - \mathcal{I}_{RR}(u, t) . \end{aligned} \quad (5.23)$$

Wir beginnen mit dem Betragsquadrat von (5.17). Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \left[\bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_1) \right]^\dagger &= \left[U_j^F \dagger(p_1) (\gamma_0)_{ja} (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{X}}(k_1) \right]^\dagger \\ &= U_b^{\tilde{X} \dagger}(k_1) (\mathcal{P}_R)_{ba} (\gamma_0)_{aj} U_j^F(p_1) \\ &= U_b^{\tilde{X} \dagger}(k_1) (\gamma_0)_{ba} (\mathcal{P}_L)_{aj} U_j^F(p_1) \\ &= \bar{U}_a^{\tilde{X}}(k_1) (\mathcal{P}_L)_{ab} U_b^F(p_1) \end{aligned} \quad (5.24)$$

und genauso

$$\left[\bar{V}^{\tilde{\chi}}(k_2) \mathcal{P}_L V^F(p_2) \right]^\dagger = \bar{V}^F(p_2) \mathcal{P}_R V^{\tilde{\chi}}(k_2) . \quad (5.25)$$

Die Multiplikation von (5.17) mit ihrem hermiteisch konjugierten und Summation über die Spins der einlaufenden Neutralinos und auslaufenden Fermionen des Standard-Modelles liefert ein Produkt von zwei Spuren $S_L^{(1)}(t)$ und $S_L^{(2)}(t)$. Die Berechnung dieser Spuren ist elementar:

$$\begin{aligned} S_L^{(1)}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{Spin}} \left| \bar{U}^F(p_1) \mathcal{P}_R U^{\tilde{\chi}}(k_1) \right|^2 = \sum_{\text{Spin}} \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{U}_c^{\tilde{\chi}}(k_1) (\mathcal{P}_L)_{cd} U_d^F(p_1) \\ &= \left(\sum_{\text{Spin}} U_d^F \bar{U}_a^F \right) (p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} \left(\sum_{\text{Spin}} U_b^{\tilde{\chi}} \bar{U}_c^{\tilde{\chi}} \right) (k_1) (\mathcal{P}_L)_{cd} \\ &= (\not{p}_1 + m_F)_{da} (\mathcal{P}_R)_{ab} (\not{k}_1 + M_{\tilde{\chi}})_{bc} (\mathcal{P}_L)_{cd} \\ &= \frac{1}{4} \text{Sp} [(\not{p}_1 + m_F) (1 + \gamma_5) (\not{k}_1 + M_{\tilde{\chi}}) (1 - \gamma_5)] \\ &= 2k_1 \cdot p_1 = M_{\tilde{\chi}}^2 + m_F^2 - t \end{aligned} \quad (5.26)$$

und genauso

$$S_L^{(2)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{Spin}} \left| \bar{V}^{\tilde{\chi}}(k_2) \mathcal{P}_L U^F(p_2) \right|^2 = 2k_1 \cdot p_1 = M_{\tilde{\chi}}^2 + m_F^2 - t . \quad (5.27)$$

Wir erhalten für das Betragsquadrat von (5.17), summiert über alle Spins:

$$\sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_L(t)|^2 = 4 (g b_F)^4 \left(\frac{t - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{t - M_F^2} \right) . \quad (5.28)$$

Daraus folgen die Betragsquadrate der Amplituden (5.18)–(5.20) wie folgt: das Betragsquadrat der Amplitude (5.18) folgt durch $t \rightarrow u$. Aus diesen beiden Amplituden folgen dann die Amplituden für den Austausch eines rechtshändigen Sfermionens im t - und u -Kanal durch $b \rightarrow c$. Wir fassen unsere Resultate für die Betragsquadrate zusammen:

$$\sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_L(t)|^2 = 4 (g b_F)^4 \left(\frac{t - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{t - M_F^2} \right) , \quad (5.29)$$

$$\sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_L(u)|^2 = 4 (g b_F)^4 \left(\frac{u - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{u - M_F^2} \right) , \quad (5.30)$$

$$\sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_R(t)|^2 = 4 (g c_F)^4 \left(\frac{t - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{t - M_F^2} \right) , \quad (5.31)$$

$$\sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_R(u)|^2 = 4 (g c_F)^4 \left(\frac{u - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{u - M_F^2} \right) . \quad (5.32)$$

Die Interferenzterme sind komplizierter zu berechnen. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) &= 4(g b_F)^4 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{L}}(u) \\ &\quad \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_{\text{R}})_{ab} U_b^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{\chi}}(k_2) (\mathcal{P}_{\text{L}})_{cd} V_d^F(p_2) \\ &\quad \bar{V}_r^F(p_2) (\mathcal{P}_{\text{R}})_{rs} V_s^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{U}_p^{\tilde{\chi}}(k_2) (\mathcal{P}_{\text{L}})_{pq} U_q^F(p_1) . \end{aligned} \quad (5.33)$$

In Hinblick auf die Spin-Summen ist (5.33) problematisch, da Produkte der Art $(\bar{U}^{\text{T}} \otimes \bar{V})(p)$ und $(V \otimes U^{\text{T}})(p)$ auftreten. Wir schreiben daher die skalaren Spinorprodukte $\bar{U}_a^F(p_1) \mathcal{P}_{\text{R}} U_b^{\tilde{\chi}}(k_1)$ und $\bar{U}_p^{\tilde{\chi}}(k_2) \mathcal{P}_{\text{L}} U_q^F(p_1)$ als ihre Transponierten und erhalten so Produkte der Art $(U^{\text{T}} \otimes V)(p)$. Diese Produkte sind unproblematisch im Hinblick auf die Spin-Summen. Der Interferenzterm (5.33), summiert über alle Spins, wird somit

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) &= 4(g b_F)^4 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{L}}(u) \\ &\quad (\mathcal{P}_{\text{L}}^{\text{T}})_{qp} \left(\sum_{\text{Spin}} \bar{U}_p^{\tilde{\chi} \text{T}} \bar{V}_c^{\tilde{\chi}} \right) (k_2) (\mathcal{P}_{\text{L}})_{cd} \left(\sum_{\text{Spin}} V_d^F \bar{V}_r^F \right) (p_2) \\ &\quad (\mathcal{P}_{\text{R}})_{rs} \left(\sum_{\text{Spin}} V_s^{\tilde{\chi}} U_b^{\tilde{\chi} \text{T}} \right) (k_1) (\mathcal{P}_{\text{R}}^{\text{T}})_{ba} \left(\sum_{\text{Spin}} \bar{U}_q^F U_a^F \right)^{\text{T}} (p_1) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Kombination $(U^{\text{T}} \otimes V)(p)$ und ähnliche andere sind typisch für Diagramme, in denen Majorana-Fermionen auftreten. Aus den Beziehungen $U = C\bar{V}^{\text{T}}$ und $V = C\bar{U}^{\text{T}}$ zwischen U - und V -Spinoren von Majorana-Fermionen folgen die benötigte Formeln für die Spin-Summe von $(\bar{U}^{\text{T}} \otimes \bar{V})(p)$ und $(V \otimes U^{\text{T}})(p)$.

$$\left(\sum_{\text{Spin}} \bar{U}^{\text{T}} \otimes \bar{V} \right) (p) = C^{-1} (\not{p} - M_{\tilde{\chi}}) , \quad (5.35)$$

$$\left(\sum_{\text{Spin}} V \otimes U^{\text{T}} \right) (p) = (\not{p} - M_{\tilde{\chi}}) C^{\text{T}} , \quad (5.36)$$

wobei C der Ladungskonjugationsoperator in der chiralen Darstellung ist, also $C = -i\gamma^2\gamma^0$. Damit können die Spin-Summen in (5.33) berechnet werden und wir erhalten für diesen Interferenzterm

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) &= \frac{1}{4} (g b_F)^4 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{L}}(u) \\ &\quad \left((1 - \gamma_5)^{\text{T}} \right)_{qp} (C^{-1})_{pi} (\not{k}_2 - M_{\tilde{\chi}})_{ic} (1 - \gamma_5)_{cd} (\not{p}_2 - m_F)_{dr} \\ &\quad (1 + \gamma_5)_{rs} (\not{k}_1 - M_{\tilde{\chi}})_{sj} (C^{\text{T}})_{jb} \left((1 + \gamma_5)^{\text{T}} \right)_{ba} (\not{p}_1 - m_F)_{dr} \\ &= \frac{1}{4} (g b_F)^4 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{L}}(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sp} \left[C^{-1} (1 - \gamma_5) C C^{-1} (\not{k}_2 - M_{\tilde{\chi}}) (1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_F) \right. \\
& \quad \left. (1 + \gamma_5) (\not{k}_1 - M_{\tilde{\chi}}) C C^{-1} (1 + \gamma_5) C C^{-1} (\not{p}_1 - m_F) C \right] \\
&= \frac{1}{4} (g b_F)^4 \Delta_F^L(t) \Delta_F^L(u) \\
& \text{Sp} \left[(1 - \gamma_5) (\not{k}_2 - M_{\tilde{\chi}}) (1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_F) \right. \\
& \quad \left. (1 + \gamma_5) (\not{k}_1 - M_{\tilde{\chi}}) (1 + \gamma_5) (\not{p}_1 - m_F) \right] \\
&= (g b_F)^4 \Delta_F^L(t) \Delta_F^L(u) \\
& \quad M_{\tilde{\chi}}^2 \text{Sp} [(1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_F) (1 + \gamma_5) (\not{p}_1 - m_F)] \\
&= 8 (g b_F)^4 \Delta_F^L(t) \Delta_F^L(u) M_{\tilde{\chi}}^2 p_1 \cdot p_2 \\
&= 4 (g b_F)^4 \frac{(s - 2m_F^2)}{(t - M_{\tilde{F}}^2) (u - M_{\tilde{F}}^2)} M_{\tilde{\chi}}^2 . \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir die Interferenzterme

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RR}}(t, u) \stackrel{c \leftrightarrow b}{\longleftarrow} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) , \tag{5.38}$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(u, t) \stackrel{u \leftrightarrow t}{\longleftarrow} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) , \tag{5.39}$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RR}}(u, t) \stackrel{u \leftrightarrow t}{\longleftarrow} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RR}}(t, u) . \tag{5.40}$$

Als nächstes berechnen wir den Interferenzterm

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\text{LR}}(t, t) &= 4g^4 b_F^2 c_F^2 \Delta_F^L(t) \Delta_F^L(t) \\
& \quad \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_R)_{ab} U_b^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{\chi}}(k_2) (\mathcal{P}_L)_{cd} V_d^F(p_2) \\
& \quad \bar{V}_r^F(p_2) (\mathcal{P}_L)_{rs} V_s^{\tilde{\chi}}(k_2) \bar{U}_p^{\tilde{\chi}}(k_1) (\mathcal{P}_r)_{pq} U_q^F(p_1) . \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Dieser Interferenzterm bereitet in Hinblick auf die Spin-Summen keine Schwierigkeiten, da nur gewöhnliche Kombinationen von U - und V -Spinoren auftreten. Wir finden:

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, t) &= \frac{1}{4} g^4 (b_F c_F)^2 \Delta_F^L(t) \Delta_F^L(t) \\
& \quad \text{Sp} [(1 + \gamma_5) (\not{k}_1 + M_{\tilde{\chi}}) (1 + \gamma_5) (\not{p}_1 + m_F)] \\
& \quad \text{Sp} [(1 - \gamma_5) (\not{k}_2 - M_{\tilde{\chi}}) (1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_F)] \\
&= 16g^4 (b_F c_F)^2 \frac{(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2) (t - M_{\tilde{F}}^2)} . \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Im Nenner steht in dem einen Faktor eigentlich die Masse der linkshändigen Sfermionen und im anderen die der rechtshändigen Sfermionen. Da im cMSSM angenommen

wird, daß alle Skalare die gleiche Masse haben, tritt in dieser Rechnung nur diese universelle Masse auf. Die rechtshändigen und linkshändigen Sfermionen unterscheiden sich im cMSSM also nur hinsichtlich ihrer Ankopplung an andere Teilchen.

Aus (5.42) folgen die Interferenzterme

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(t, t) &= \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, t) , \\ \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(u, u) &= \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(u, u) \stackrel{u \leftrightarrow t}{=} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, t) . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Wir berechnen noch den verbleibenden Interferenzterm

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, u) &= 4g^4 (b_{FCF})^2 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{R}}(u) \\ &\quad \bar{U}_a^F(p_1) (\mathcal{P}_{\text{R}})_{ab} U_b^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{V}_c^{\tilde{\chi}}(k_2) (\mathcal{P}_{\text{L}})_{cd} V_d^F(k_1) \\ &\quad \bar{V}_r^F(p_2) (\mathcal{P}_{\text{L}})_{rs} V_s^{\tilde{\chi}}(k_1) \bar{U}_p^{\tilde{\chi}}(k_2) (\mathcal{P}_{\text{R}})_{pq} U_q^F(p_1) . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Wir schreiben die Skalare $\bar{U}^F(p_1) \mathcal{P}_{\text{R}} U^{\tilde{\chi}}(k_1)$ und $\bar{U}^{\tilde{\chi}}(k_2) \mathcal{P}_{\text{R}} U^F(p_1)$ als ihre Transponierten und erhalten hinsichtlich der Spin-Summen wieder Produkte der Art $(\bar{U}^{\text{T}} \otimes \bar{V})(p)$ und $(V \otimes U^{\text{T}})(p)$. Mit (5.35) lassen sich die Spinsummen dieser Produkte wieder berechnen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, u) &= \frac{1}{4} g^4 (b_{FCF})^2 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{R}}(u) \\ &\quad \text{Sp} \left[(1 + \gamma_5) (\not{p}_1 - m_F) (1 + \gamma_5) (\not{k}_2 - M_{\tilde{\chi}}) \right. \\ &\quad \left. (1 - \gamma_5) (\not{p}_2 - m_F) (1 - \gamma_5) (\not{k}_1 - M_{\tilde{\chi}}) \right] \\ &= g^4 (b_{FCF})^2 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{R}}(u) \\ &\quad \text{Sp} [(1 + \gamma_5) (\not{k}_2 - M_{\tilde{\chi}}) (1 - \gamma_5) (\not{k}_1 - M_{\tilde{\chi}})] \\ &= 8g^4 (b_{FCF})^2 \Delta_F^{\text{L}}(t) \Delta_F^{\text{R}}(u) m_F^2 k_1 \cdot k_2 \\ &= 4g^4 (b_{FCF})^2 \frac{s - 2M_{\tilde{\chi}}^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2) (u - M_{\tilde{F}}^2)} m_F^2 . \end{aligned} \quad (5.45)$$

Aus dem Interferenzterm (5.45) folgen sofort die Interferenzterme

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(u, t) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, u) , \quad (5.46)$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(u, t) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(t, u) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, u) . \quad (5.47)$$

Bei der Beziehung wurde wieder die Existenz einer universellen Masse für skalare Teilchen ausgenutzt.

Wir fassen unsere Ergebnisse (5.37)–(5.47) für die Interferenzterme zusammen

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LL}}(u, t) = 4g^4 b_F^4 \frac{M_{\tilde{\chi}}^2 s - 2(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)}, \quad (5.48)$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RR}}(t, u) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RR}}(u, t) = 4g^4 c_F^4 \frac{M_{\tilde{\chi}}^2 s - 2(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)}, \quad (5.49)$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, t) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(t, t) = 16g^4 (b_F c_F)^2 \frac{(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(t - M_{\tilde{F}}^2)}; \quad (5.50)$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(u, u) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(u, u) = 16g^4 (b_F c_F)^2 \frac{(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(u - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)}, \quad (5.51)$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, u) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(u, t) = 4g^4 (b_F c_F)^2 \frac{m_{\tilde{F}}^2 s - 2(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)}, \quad (5.52)$$

$$\sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{LR}}(u, t) = \sum_{\text{Spin}} \mathcal{I}_{\text{RL}}(t, u) = 4g^4 (b_F c_F)^2 \frac{m_{\tilde{F}}^2 s - 2(m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)}. \quad (5.53)$$

Die gesamte Amplitude (5.23) für Neutralino–Annihilationen in ein beliebiges Fermion des Standard–Modelles, summiert über alle Spins, ist somit:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_{\text{ann}}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} [|\mathcal{T}_{\text{L}}(t)|^2 + |\mathcal{T}_{\text{L}}(u)|^2 + |\mathcal{T}_{\text{R}}(t)|^2 + |\mathcal{T}_{\text{R}}(u)|^2] \\ &+ \sum_{\text{Spin}} [-\mathcal{I}_{\text{LL}}(t, u) - \mathcal{I}_{\text{RR}}(t, u) + \mathcal{I}_{\text{LR}}(t, t) + \mathcal{I}_{\text{LR}}(u, u) - 2\mathcal{I}_{\text{LR}}(t, u)]. \end{aligned}$$

Einsetzen der Betragsquadrate (5.29)–(5.32) und der Interferenzterme (5.48)–(5.53) liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_{\text{ann}}|^2 &= 2g^4 \left\{ (b_F^4 + c_F^4) \left[\left(\frac{t - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2}{t - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 + \left(\frac{u - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2}{u - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 - 2M_{\tilde{\chi}}^2 s}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2(b_F c_F)^2 \left[\left(\frac{2m_F M_{\tilde{\chi}}}{t - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2m_F M_{\tilde{\chi}}}{u - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 - 2m_{\tilde{F}}^2 s}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)} \right] \right\}. \quad (5.54) \end{aligned}$$

Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\sigma_{\text{ann}}/dt$ muß noch der einfallende Neutralino–Strom q_{com} im Massenzentrum bestimmt werden. Es

ist $|q^{\text{com}}|^2 = |k_1^{\text{com}}|^2 = 1/4s - M_{\tilde{\chi}}^2$. Außerdem eliminieren wir die Madelstam-Variable u durch $u(s, t) = 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) - s - t$ und benutzen den Zusammenhang $G_F/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2$ zwischen Fermis Konstante und der Kopplungskonstante der elektroschwachen Wechselwirkung, wobei M_W die Masse der geladenen Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung bezeichne. Wir finden

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{ann}}}{dt}(s, t) &= \frac{1}{\pi} \frac{(G_F M_W^2)^2}{s(s - 4M_{\tilde{\chi}}^2)} \\ &\quad \left\{ (b_F^4 + c_F^4) \left[\left(\frac{t - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2}{t - M_{\tilde{F}}^2} \right) + \left(\frac{s + t - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2}{s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 - 2M_{\tilde{\chi}}^2 s}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2(b_F c_F)^2 \left[\left(\frac{2m_F M_{\tilde{\chi}}}{t - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2m_F M_{\tilde{\chi}}}{s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 - 2m_{\tilde{F}}^2 s}{(t - M_{\tilde{F}}^2)(s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{ann}}(s)$ ist das bestimmte Integral des differentiellen Wirkungsquerschnittes über das Intervall $[t_-, t_+]$, wobei die Integrationsgrenzen durch $t_{\pm} = \left(\sqrt{s/4 - M_{\tilde{\chi}}^2} \mp \sqrt{s/4 - m_{\tilde{F}}^2} \right)^2$ gegeben sind. Für das zugehörige unbestimmte Integral $\sigma_{\text{ann}}(s, t)$ erhalten wir durch elementare Integration

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ann}}(s, t) &= \frac{1}{\pi} \frac{(G_F M_W^2)^2}{s(s - 4M_{\tilde{\chi}}^2)} \\ &\quad \left\{ (b_F^4 + c_F^4) \left[2t - \left(2(M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2) + \frac{2M_{\tilde{\chi}}^2 s - (2m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{s + 2(M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2)} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \ln \left| \frac{s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2}{t - M_{\tilde{F}}^2} \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2)^2 \left(\frac{1}{t - M_{\tilde{F}}^2} + \frac{1}{s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - 2(b_F c_F)^2 \left[\frac{2m_{\tilde{F}}^2 s - (2m_F M_{\tilde{\chi}})^2}{s + 2(M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_{\tilde{F}}^2)} \ln \left| \frac{s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2}{t - M_{\tilde{F}}^2} \right| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 \left(\frac{1}{t - M_{\tilde{F}}^2} + \frac{1}{s + t - 2(M_{\tilde{\chi}}^2 + m_{\tilde{F}}^2) + M_{\tilde{F}}^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Annihilationsrate, ist es nicht erforderlich mit dem exakten Ausdruck für den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{ann}}(s)$ zu arbeiten, da zwei Kleinheitsparameter existieren, die eine Taylor–Reihenentwicklung von $\sigma_{\text{ann}}(s)$ erlauben. Dies ist zum einen das Massenverhältnis $m_F/M_{\tilde{\chi}}$ und zum anderen die Geschwindigkeit v der Neutralinos, definiert durch $s(v) = 4M_{\tilde{\chi}}^2/(1 - (v/2)^2)$. Die Taylor–Reihenentwicklung von $\sigma_{\text{ann}}(s)$ bis einschließlich $\mathcal{O}(m_F^2/M_{\tilde{\chi}}^2)$ und bis einschließlich $\mathcal{O}(v^2)$ ergibt

$$v\sigma_{\text{ann}}(v) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{G_{\text{F}} M_{\text{W}}^2}{M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left[(b_F^2 + c_F^2)^2 m_F^2 + (b_F^4 + c_F^4) \frac{2}{3} \frac{M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} M_{\tilde{\chi}}^2 v^2 \right]. \quad (5.55)$$

Die thermische Mittelung von (5.55) bezüglich einer Boltzmann–Verteilung der nicht–relativistischen Neutralinos erhalten wir durch die Ersetzung ⁵ $v^2 \rightarrow 6 T/M_{\tilde{\chi}}$. Die Rate für Neutralino–Annihilationen in alle Fermionen des Standard–Modelles ist dann

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{ann}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F \in \text{SM}} \langle v\sigma(v) \rangle n_{\tilde{\chi}} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{F \in \text{SM}} \left(\frac{G_{\text{F}} M_{\text{W}}^2}{M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left[(b_F^2 + c_F^2)^2 m_F^2 \right. \\ &\quad \left. + (b_F^4 + c_F^4) 4M_{\tilde{\chi}}^2 \frac{M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} \frac{T}{M_{\tilde{\chi}}} \right] n_{\tilde{\chi}}. \quad (5.56) \end{aligned}$$

Der erste Term in (5.56) trägt praktisch nur für top–Quarks bei. Die drei linkshändigen leptonischen Dublettes $[(\nu_e)_L, (e)_L]$, $[(\nu_\mu)_L, (\mu)_L]$ und $[(\nu_\tau)_L, (\tau)_L]$ haben die Quantenzahlen $[(Y, Q), (Y, Q)] = [(-1, 0), (-1, -1)]$. Damit haben die Koeffizienten $(b_F^2 + c_F^2)^2/\tan^4\theta_{\text{W}}$ und $(b_F^4 + c_F^4)/\tan^4\theta_{\text{W}}$ für die leptonischen Dublettes die Werte $[1/16, 25/16]$ und $[1/16, 17/16]$. Die drei linkshändigen hadronischen Dublettes $[(u)_L, (d)_L]$, $[(c)_L, (s)_L]$ und $[(t)_L, (b)_L]$ haben die Quantenzahlen $[(Y, Q), (Y, Q)] = [(1/3, 2/3), (1/3, -1/3)]$. Damit haben die Koeffizienten $(b_F^2 + c_F^2)^2/\tan^4\theta_{\text{W}}$ und $(b_F^4 + c_F^4)/\tan^4\theta_{\text{W}}$ für die drei hadronischen Dublettes die Werte $[(17/36)^2, (5/36)^2]$ und $[2/81, 17/16 \cdot 1/81]$. Summiert über alle Fermionen des Standard–Modelles erhalten

⁵Die thermische Mittelung von v^2 ist zunächst durch

$$\langle v^2 \rangle = \frac{T}{n_{\tilde{\chi}}^2} \frac{g}{(2\pi)^4} \int_{4M_{\tilde{\chi}}^2}^{\infty} ds (s - 4M_{\tilde{\chi}}^2)^{\frac{3}{2}} K_1(\sqrt{s}/T)$$

gegeben. Die Bessel–Funktion K_1 wird bis zur führenden Ordnung im Inversen ihres Argumentes entwickelt und das Integral bis einschließlich $\mathcal{O}(T/M_{\tilde{\chi}})$. Wir finden $\langle v^2 \rangle = 6 T/M_{\tilde{\chi}} (1 + \mathcal{O}(T/M_{\tilde{\chi}}))$.

wir somit

$$\Gamma_{\text{ann}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{G_F M_W^2}{M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left[\left(\frac{17}{36} \right)^2 m_t^2 + \frac{1507}{108} M_{\tilde{\chi}}^2 \frac{M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} \frac{T}{M_{\tilde{\chi}}} \right] n_{\tilde{\chi}}. \quad (5.57)$$

Für die Berechnung der Summe in (5.56) haben wir wieder die Existenz einer universellen Skala für die Masse der Skalare angenommen. Die Rate (5.57) hängt daher direkt nur von zwei Parametern des cMSSM ab: der Neutralino-Masse und der als universelle angenommenen Sfermion-Masse.

Bei der Berechnung der Annihilationsrate (5.55) haben wir Endzustände mit Eich- und Higgs-Bosonen nicht berücksichtigt, also Prozesse wie $\tilde{\chi}\tilde{\chi} \leftrightarrow \{WW, ZZ, HH, HW, HZ\}$ wurden nicht berechnet. Dies ist eine gute Näherung im cMSSM, da solche Prozesse erst wichtig werden, wenn $Z_{11} \approx Z_{12} \approx 0$ (also ein Higgsino-artiges Neutralino vorliegt) oder das Neutralino eine echte Mischung ist. Für unseren Fall und allgemeiner für den Fall, daß $Z_{13} \approx Z_{14} \approx 0$ gilt, sind Annihilationen in Eich- und Higgsbosonen im Vergleich zu Annihilationen in Fermionen des Standard-Modelles subdominant. Da wir uns weiterhin in Hinblick auf den Parameterraum des cMSSM auf ein reines Bino ($Z_{11} = 1$) eingeschränkt haben, gibt es auf Baumgraphenniveau keinen Z^0 -Austausch.

5.1.1 Chemisches Entkoppeln

Für Temperaturen $T \gg M_{\tilde{\chi}}$ ist die Rate, $\Gamma(\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \rightarrow F + \bar{F})$ mit der Neutralinos in Fermionen des Standard-Modelles annihilieren, gleich der Rate $\Gamma(F + \bar{F} \rightarrow \tilde{\chi} + \tilde{\chi})$ mit der die Fermionen des Standard-Modelles in Neutralinos annihilieren, also $\Gamma(\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \rightarrow F + \bar{F}) = \Gamma(F + \bar{F} \rightarrow \tilde{\chi} + \tilde{\chi})$. Die Sprechweise für diesen Sachverhalt ist, daß Neutralinos und die Fermionen des Standard-Modelles im chemischen Gleichgewicht sind. Der Grund hierfür ist, daß alle an diesen Prozessen partizipierenden Teilchen für $T \gg M_{\tilde{\chi}}$ relativistisch sind und damit für die entsprechenden Teilchenzahldichten $n_{\tilde{\chi}, F \in \text{SM}} \sim T^3$ gilt. Als Folge bleibt die Anzahl der Neutralinos konstant, $n_{\tilde{\chi}} a^3 = \text{const.}$

Die Expansionsrate H des Universums ist viel kleiner, als die oben angegebenen Streuraten, also $\Gamma(\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \rightarrow F + \bar{F}) \gg H$. Die betrachteten Annihilationsraten sind also relevant.

Für Temperaturen $T \leq M_{\tilde{\chi}}$ können relativistischen Fermionen ($T \gg m_F$) nicht mehr in die nun nicht-relativistischen Neutralinos annihilieren, wenn die Schwerpunktsenergie der Streuung kleiner als die Neutralino-Masse ist. Neutralino-Annihilation in Fermionen mit $m_F \leq M_{\tilde{\chi}}$ ist aber weiterhin möglich, da die Ruhemasse der

Neutralinos bereits ausreicht, das entsprechende Fermion–Antifermion–Paar zu erzeugen. Folglich wird $\Gamma(\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \rightarrow F + \bar{F}) > \Gamma(F + \bar{F} \rightarrow \tilde{\chi} + \tilde{\chi})$. Neutralinos und die betreffenden Fermion–Spezies sind nicht länger im chemischen Gleichgewicht. Die Anzahl der Neutralinos wird kleiner, da die Neutralino–Annihilationen in diese Fermionen nicht länger durch entsprechende Rückreaktionen kompensiert werden können. Zu Beginn des chemischen Entkoppelns ist $\Gamma(\tilde{\chi} + \tilde{\chi} \rightarrow F + \bar{F}) > H$, die Anzahl der Neutralinos wird mit der Rate Γ_{ann} weiter reduziert.

Da die Expansionsrate im strahlungsdominierten FRW–Universum proportional zur Temperatur im Quadrat ist, die Annihilationsrate Γ_{ann} für $T < M_{\tilde{\chi}}$ aber exponentiell mit $x \stackrel{\text{def}}{=} M_{\tilde{\chi}}/T$ fällt, existiert eine Temperatur T_{cd} mit $\Gamma_{\text{ann}}(T_{\text{cd}}) = H(T_{\text{cd}})$. Für Temperaturen $T < T_{\text{cd}}$ ist dann $\Gamma_{\text{ann}} < H$ und $d(n_{\tilde{\chi}} a^3)/dT \approx 0$. Die Bedingung $\Gamma_{\text{ann}}(T_{\text{cd}}) = H(T_{\text{cd}})$ liefert eine Abschätzung für die Temperatur T_{cd} , ab der $n_{\tilde{\chi}} a^3$ wieder konstant wird.

Wir bestimmen im folgenden die Temperatur T_{cd} , bei der Neutralinos chemisch entkoppeln von den Fermionen des Standard–Modelles. Dazu schreiben wir abkürzend

$$\langle v\sigma_{\text{ann}} \rangle = c_{\Gamma} \frac{M_{\tilde{\chi}}^2}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} \frac{M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} \frac{1}{x}, \quad (5.58)$$

wobei wir $m_F/M_{\tilde{\chi}} \ll 1 \forall F \neq t$ angenommen und daher den ersten Summanden in (5.55) vernachlässigt haben. Weiterhin schreiben wir für $n_{\tilde{\chi}} = c_n M^3 x^{-3/2} \exp(-x)$ und für die Hubble–Rate $H = c_H M_{\text{Pl}}^{-1} M^2 x^{-2}$. Die Bedingung zur Abschätzung von $T_{\text{cd}} = M_{\tilde{\chi}} x_{\text{cd}}^{-1}$ liefert die algebraische Gleichung

$$x^{1/2} \exp(x) = \frac{c_n c_{\Gamma}}{c_H} M_{\text{Pl}} \frac{M_{\tilde{\chi}}^3 (M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4)}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^4}. \quad (5.59)$$

Diese Gleichung kann iterativ gelöst werden und wir finden ⁶

$$x_{\text{cd}}^{(1)} \approx x_{\text{cd}}^{(0)} - \frac{1}{2} \ln x_{\text{cd}}^{(0)}, \quad (5.60)$$

$$x_{\text{cd}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left[\frac{c_n c_{\Gamma}}{c_H} M_{\text{Pl}} \frac{M_{\tilde{\chi}}^3 (M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4)}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^4} \right], \quad (5.61)$$

wobei der massenunabhängige Faktor im Argument des natürlichen Logarithmus $c_n c_{\Gamma}/c_H = 1.6 \times 10^{-4}$ ist.

Abbildung (5.1) zeigt (5.60) als Funktion der als universell angenommenen Sfermion–Masse, die zu den supersymmetrischen Partnern der fermionischen Annihilations–

⁶Im nächsten Iterationschritt erhalten wir $x_{\text{cd}}^{(2)} \approx x_{\text{cd}}^{(0)} - 1/2 \ln[x_{\text{cd}}^{(0)} - 1/2 \ln x_{\text{cd}}^{(0)}]$. Das Verfahren konvergiert also ausreichend schnell, so daß $x_{\text{cd}}^{(1)}$ eine ausreichend präzise Lösung darstellt.

produkten gehört. Die abgebildeten drei Kurven entsprechen den angegebenen Werten für die Masse der Neutralinos, die als freier Parameter eingeht ⁷. Je größer die gewählte Masse der Neutralinos, umso größer ist T_{cd} , weil die Annihilationsrate proportional zur thermischen Anzahldichte der Neutralinos und diese proportional zu $\exp(-M_{\tilde{\chi}}/T)$ ist. Für jede Wahl der Neutralino-Masse wächst T_{cd} streng monoton mit $M_{\tilde{F}}$, weil die Masse der Austauscheteilchen deren Reichweite und damit die Entfernung definiert, die zwei Neutralinos maximal haben dürfen, wenn sie annihilieren können sollen. Eine größere Sfermion-Masse bedeutet eine geringere Reichweite. Dem entgegen arbeitet jedoch die Hubble-Expansion des Universums. Folglich wird $x_{\text{cd}}^{(1)}$ mit wachsender Sfermion-Masse kleiner und die Temperatur T_{cd} , bei der Neutralinos chemisch vom Wärmebad entkoppeln, größer.

Für Temperaturen $T < T_{\text{cd}}$ ist die Anzahl der Neutralinos im Universum konstant. Die Anzahldichte von Neutralinos heute ist dann durch $n_{\tilde{\chi}}(T_0) \approx n_{\tilde{\chi}}(T_{\text{cd}})s(T_0)/s(T_{\text{cd}})$ gegeben, wobei $T_0 = 2.725$ K ist und s die Entropiedichte bezeichne. Aus der Anzahldichte $n_{\tilde{\chi}}(T_0)$ folgt das Verhältnis $\Omega_{\tilde{\chi}}$ der Neutralino-Energiedichte $\rho_{\tilde{\chi}}(T_0)$ zur kritischen Energiedichte $\rho_{\text{krit}} \stackrel{\text{def}}{=} 3/(8\pi)(M_{\text{Pl}} H(T_0))^2$.

In Abbildung (5.2) ist $\omega_{\tilde{\chi}} \equiv \Omega_{\tilde{\chi}} h^2$ als Funktion der Neutralino-Masse für die angegebenen Sfermion-Massen gezeigt. Für größere Sfermion-Masse ist auch $\omega_{\tilde{\chi}}$ bei fixierter Neutralino-Masse größer, weil Neutralinos aufgrund der dann kleineren Reichweite der Sfermionen vom Wärmebad früher chemisch entkoppeln und damit den Annihilationsprozessen weniger Zeit zur Verfügung steht. Für gegebene Sfermion-Masse ist $\omega_{\tilde{\chi}}$ mit wachsenden Neutralino-Massen streng monoton fallend, weil die Anzahldichte der Neutralinos für $T < M_{\tilde{\chi}}$ exponentiell in der Neutralino-Masse unterdrückt ist. Wird die konservative Annahme $\Omega_{\tilde{\chi}} \leq 1$ und $h < 0.8$ gemacht, so kann $\omega_{\tilde{\chi}}$ nicht im dunkel schattierten Bereich verlaufen. Im heller schattierten Bereich liegen Werte für $\omega_{\tilde{\chi}}$, wie sie typischerweise von Λ CDM-Modellen favorisiert werden. Im Rahmen unserer Betrachtung sind CDM-Modelle mit von Null verschiedener kosmologischer Konstante nicht vereinbar mit Sfermion-Massen $M_{\tilde{F}} > 400$ GeV.

⁷ $M_{\tilde{\chi}}$ ist allerdings folgender Bedingung unterworfen: aus dem LEP-Experiment folgt unabhängig von $\tan\beta$ und $M_{\tilde{F}}$, daß $M_{\tilde{\chi}} > 37$ GeV, siehe (Barate et al., 2001). Andererseits soll das leichteste Neutralino das LSP sein und deswegen muß $M_{\tilde{\chi}} < M_{\tilde{F}}$ gelten.

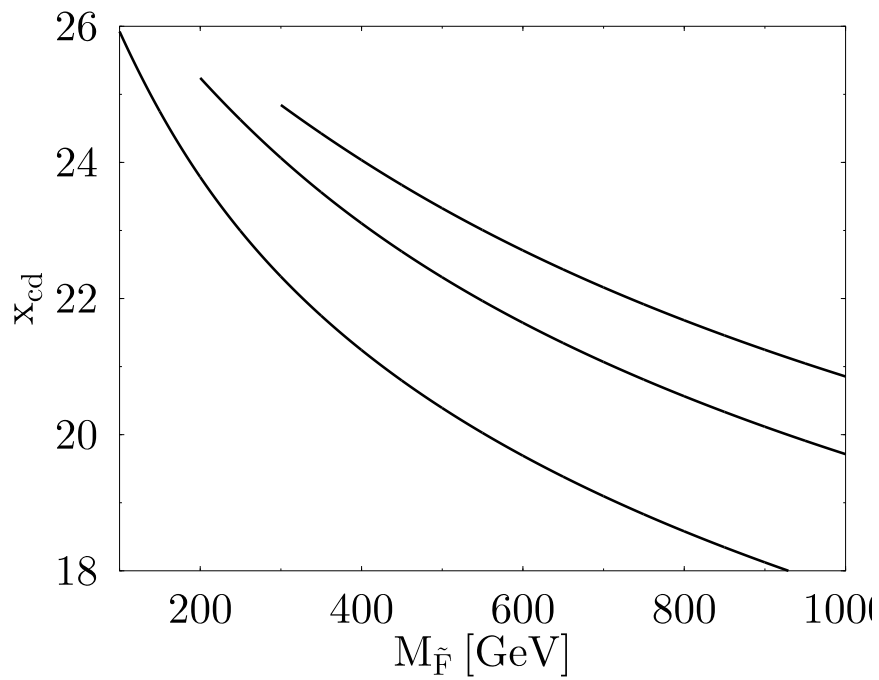


Abbildung 5.1: Das Verhältnis $M_{\tilde{\chi}}/T_{cd}$ für die Temperatur, bei der Neutralinos chemisch vom Wärmebad entkoppeln, als Funktion der Sfermion-Masse. Die drei Kurven entsprechen drei Neutralino-Massen, und zwar von unten nach oben $M_{\tilde{\chi}} = 50, 100, 200$ GeV.

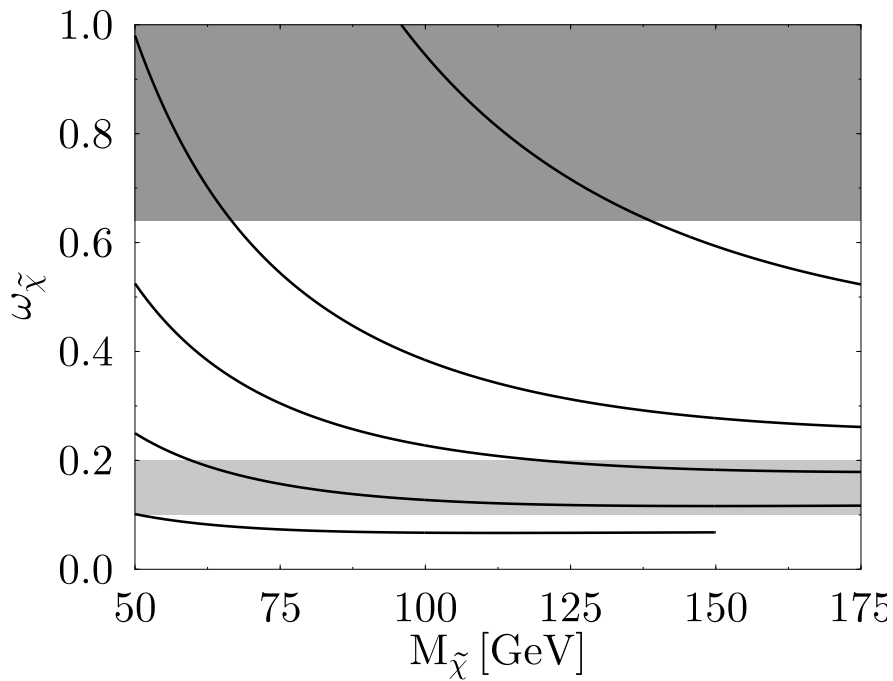


Abbildung 5.2: $\omega_{\tilde{\chi}} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_{\tilde{\chi}} h^2$ als Funktion der Neutralino-Masse. Die Kurven entsprechen von unten nach oben aufsteigend unterschiedlichen Werten für die Sfermion-Masse $M_{\tilde{F}} = 150, 200, 250, 300, 400$ GeV. Im dunkel schattierten Bereich darf $\omega_{\tilde{\chi}}$ nicht verlaufen, wenn die konservative Annahme $\Omega \leq 1$ und $h < 0.8$ getroffen wird. Im heller schattierten Bereich liegen Werte von $\omega_{\tilde{\chi}}$, wie sie für Λ CDM-Modelle typisch sind.

5.2 Elastische Neutralino–Streuungen

In diesem Abschnitt berechnen wir die Rate für die Streuprozesse $\tilde{\chi} + \{F, \bar{F}\} \rightarrow \tilde{\chi} + \{F, \bar{F}\}$ in führender Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ in der elektroschwachen Kopplungskonstanten. Wir bezeichnen die betreffende Übergangsamplitude mit \mathcal{T}_{el} . Das Betragsquadrat dieser Amplitude, summiert über alle Spins ergibt sich aus (5.54) durch die Ersetzungen $s \rightarrow t$, $t \rightarrow u$ und $u \rightarrow s$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_{\text{el}}|^2 &= 2g^4 \left\{ (b_F^4 + c_F^4) \left[\left(\frac{s - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{s - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 + \left(\frac{u - M_{\tilde{\chi}}^2 - m_F^2}{u - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 - 2M_{\tilde{\chi}}^2 t}{(s - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2(b_F c_F)^2 \left[\left(\frac{2m_F M_{\tilde{\chi}}}{u - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 + \left(\frac{2m_F M_{\tilde{\chi}}}{s - M_{\tilde{F}}^2} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2m_F M_{\tilde{\chi}})^2 - 2m_F^2 t}{(s - M_{\tilde{F}}^2)(u - M_{\tilde{F}}^2)} \right] \right\}. \quad (5.62) \end{aligned}$$

Da wir uns insbesondere für elastische Neutralino–Streuungen nach dem QCD–Phasenübergang interessieren, wollen wir (5.62) gleich vereinfachen: Quarks liegen nach dem QCD–Phasenübergang nur noch in hadronischen Bindungszuständen vor und scheiden als elementare Streupartner aus. Damit ist nur die elastische Streuung der Leptonen an den Neutralinos relevant. Für die Massen aller Leptonen gilt jedoch $m_F \equiv m_L \ll M_{\tilde{\chi}}$, sogar das Tau mit einer Masse von 1784 MeV ist mindestens um eine Größenordnung leichter als das LSP. Wir vernachlässigen daher Terme in (5.62) proportional zu $(m_L/M_{\tilde{\chi}})^2$ ⁸. Wir eliminieren die Madelstam–Variable u mit $u(s, t) = 2M_{\tilde{\chi}}^2 - s - t$. Weiterhin benutzen wir, daß die Geschwindigkeit der Neutralinos $v \ll 1$ für $T \ll M_{\tilde{\chi}}$ und nähern $s \approx M_{\tilde{\chi}}^2 + 2M_{\tilde{\chi}} E_L$, wobei E_L die Energie des Leptons L bezeichnet. Wir finden

$$\sum_{\text{Spin}} |\mathcal{T}_{\text{el}}|^2 \approx 4g^4 (b_L^4 + c_L^4) \left(\frac{2M_{\tilde{\chi}} E_L}{M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left[1 + \left(1 + \frac{t}{2M_{\tilde{\chi}} E_L} \right)^2 - \frac{t}{2E_L^2} \right]. \quad (5.63)$$

Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\sigma_{\text{el}}/dt$ muß noch der einfallende Leptonen–Strom q_{com} im Massenzentrum bestimmt werden. Es ist $|q_{\text{com}}|^2 = 1/(4s)(s - 4M_{\tilde{\chi}}^2)^2 \approx E_L^2$. Wir benutzen wieder den Zusammenhang $G_F/\sqrt{2} =$

⁸Eine exakte Berechnung des totalen Wirkungsquerschnitts σ_{el} für elastische Lepton–Streuungen an Neutralinos hat gezeigt, daß diese Näherung bereits in (5.62) erlaubt ist.

$g^2/8M_W^2$ zwischen Fermis Konstant und der Kopplungskonstanten der elektroschwachen Wechselwirkung und finden

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt}(E_L, t) \approx \frac{4}{\pi} (b_L^4 + c_L^4) \left(\frac{G_F M_W^2}{M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left[1 - \frac{t}{4E_L^2} \right]. \quad (5.64)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt σ_{el} ist das bestimmte Integral des differentiellen Wirkungsquerschnittes über das Intervall $[t_-, t_+]$, wobei die Integrationsgrenzen durch $t_{\pm} = \left(\sqrt{s/4 - M_{\tilde{\chi}}^2} \mp \sqrt{s/4 - m_F^2} \right)^2$ gegeben sind. Im Rahmen der verwendeten Näherungen ist $t_- = 0$ und $t_+ = -4E_L^2$. Durch elementare Integration erhalten wir

$$\sigma_{\text{el}}(E_L) \approx \frac{24}{\pi} (b_L^4 + c_L^4) \left(\frac{G_F M_W^2}{M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 E_L^2. \quad (5.65)$$

Die exakte Rechnung liefert für verschwindende Lepton–Massen den Lorentz–invarianten Wirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}}(s) = & \frac{2}{\pi} (b_L^4 + c_L^4) \left(\frac{G_F M_W^2}{s - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left\{ \right. \\ & \left[1 + \left(\frac{s - M_{\tilde{\chi}}^2}{s - M_L^2} \right)^2 + \frac{2M_{\tilde{\chi}}^2}{s - M_L^2} \right] \left(2 - 2M_{\tilde{\chi}}^2 + \frac{M_{\tilde{\chi}}^4}{s} \right) \\ & - 2 \left[M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2 + (s - 2M_{\tilde{\chi}}^2 + M_L^2) \frac{2M_{\tilde{\chi}}^2}{s - M_L^2} \right] \ln \left(\frac{s^2 - 2M_{\tilde{\chi}}^2 + M_L^2 s}{M_L^2 s - M_{\tilde{\chi}}^4} \right) \\ & \left. + (M_{\tilde{\chi}}^2 - M_L^2)^2 \left(\frac{s}{M_L^2 s - M_{\tilde{\chi}}^4} - \frac{1}{s - 2M_{\tilde{\chi}}^2 + M_L^2} \right) \right\}. \quad (5.66) \end{aligned}$$

Eine Taylor–Reihenentwicklung von (5.66) in $(s - M_{\tilde{\chi}}^2)/(M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)$ liefert in führender Ordnung

$$\sigma_{\text{el}}(s) = \frac{6}{\pi} (b_L^4 + c_L^4) \left(\frac{G_F M_W^2}{M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 \left(\frac{s - M_{\tilde{\chi}}^2}{M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 + \mathcal{O} \left[\left(\frac{s - M_{\tilde{\chi}}^2}{M_L^2 - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^3 \right]. \quad (5.67)$$

Benutzen wir nun wieder die sehr gute Näherung $v \ll 1$ für $T \ll M_{\tilde{\chi}}$ und damit $s \approx M_{\tilde{\chi}}^2 + 2M_{\tilde{\chi}} E_L$, so erhalten wir aus (5.67) wieder (5.65).

Für die Berechnung der elastischen Streurrate benutzen wir den genäherten Wirkungsquerschnitt (5.65). Die relativistische Verallgemeinerung der Relativgeschwindigkeit (Moeller–Geschwindigkeit) zwischen Leptonen und Neutralinos ist im Massenzentrum durch $v = \sqrt{(p_L \cdot p_{\tilde{\chi}})^2 - (m_L M_{\tilde{\chi}})^2} / E_L E_{\tilde{\chi}}$ gegeben. Im Rahmen der von uns vorgenommenen Näherungen ist $v \approx 1$ und damit $v\sigma_{\text{el}}(E_L) \approx \sigma_{\text{el}}(E_L)$. Dies hat enorme Vorteile bei der thermischen Mittelung von $v\sigma_{\text{el}}(E_L)$ bezüglich der Maxwell–Boltzmann–Verteilungen der Leptonen und Neutralinos. Die Mittelungen separieren

und es verbleibt eine Mittelung bezüglich der Lepton–Verteilung. Mit der Anzahl–dichte der Leptonen $n_L = 3\zeta(3)/(4\pi^2)g_L T^3$, wobei g_L die Freiheitsgrade des Leptons L bezeichne, finden wir für die Rate der elastischen Streuungen aller Leptonen mit den Neutralinos

$$\Gamma_{\text{el}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{L \in \text{SM}} \langle v \sigma_{\text{el}} \rangle n_L = \frac{288}{\pi^3} \sum_{L \in \text{SM}} g_L (b_L^4 + c_L^4) \left(\frac{G_{\text{F}} M_{\text{W}}^2}{M_{\tilde{L}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2} \right)^2 T^5. \quad (5.68)$$

Die drei linkshändigen leptonischen Dublettes $[(\nu_e)_L, (e)_L]$, $[(\nu_\mu)_L, (\mu)_L]$ und $[(\nu_\tau)_L, (\tau)_L]$ haben die Quantenzahlen $[(Y, Q), (Y, Q)] = [(-1, 0), (-1, -1)]$. Damit hat der Koeffizient $(b_L^4 + c_L^4)/\tan^4 \theta_{\text{W}}$ für die leptonischen Dublettes den Wert $[1/16, 17/16]$.

5.2.1 Kinetisches Entkoppeln

Für Temperaturen $T < T_{\text{cd}}$ ist die Anzahl der Neutralinos im Universum konstant. Sie werden durch die elastischen Streuungen $\tilde{\chi} + \{L, \bar{L}\} \rightarrow \tilde{\chi} + \{L, \bar{L}\}$ im thermischen Gleichgewicht gehalten. Die Leptonen fungieren dabei als Wärmebad, das jede Abweichung der Neutralinos vom thermischen Gleichgewicht ausgleicht, vorausgesetzt der Kontakt mit dem Wärmebad ist häufig genug. Diese Voraussetzung wird im weiteren präzisiert.

Wir behandeln die Fragen, wie lange Neutralinos benötigen, denen eine charakteristische Störung aufgeprägt wurde, diese Störung durch Kontakt mit den Wärmebad wieder abzubauen und wann die Expansion des Universum den Kontakt zwischen Neutralinos und dem Wärmebad in Analogie zur chemischen Entkopplung gänzlich unterbindet.

Die Beantwortung der ersten Frage verlangt, die Relaxationszeit τ_{relax} des Neutralino–Systems zu berechnen. Die Relaxationszeit ist gegeben als das Produkt aus der Anzahl N der elastischen Streuungen die nötig sind, um eine charakteristische Störung abzubauen und der Zeit $\tau_{\text{coll}} \stackrel{\text{def}}{=} 1/\Gamma_{\text{el}}$, die im Mittel zwischen zwei elastischen Streuungen vergeht. Die Anzahl der zum Abbau einer Störung benötigten elastischen Streuungen hängt vom dem mittleren Impulsübertrag bei einer elastischen Streuung ab. Wir berechnen daher den Mittelwert der Mandelstam–Variablen t , definiert durch

$$\langle t \rangle (E_L) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{\sigma_{\text{el}}(E_L)} \int_{-4E_L^2}^0 dt t \frac{d\sigma_{\text{el}}}{dt}(E_L, t). \quad (5.69)$$

Wir finden $\langle t \rangle \equiv (\Delta P_{\tilde{\chi}})^2 \approx 2E_L^2$, wobei $\Delta P_{\tilde{\chi}}$ die mittlere Impulsänderung eines Neutralinos durch eine elastische Streuung mit einem Lepton bezeichne. Aus dem Äquipartitionstheorem folgt $E_L = 3/2T$ und damit $\Delta P_{\tilde{\chi}}/P_{\tilde{\chi}} \approx 3/\sqrt{2}T/M_{\tilde{\chi}} \ll 1$. Der typische Impulsübertrag bei einer einzigen elastischen Streuung ist also klein im Vergleich zum mittleren Impuls der Neutralinos. Folglich wird eine große Anzahl $N(T)$

von elastischen Streuungen benötigt, um die Neutralinos im lokalen thermischen Gleichgewicht zu halten, oder eine vorhandene Störung abzubauen. Als charakteristische Störung nehmen wir eine proportional zum mittleren Impulsbetrag $P_{\tilde{\chi}}$ an. Dann ist $N(T) \approx \sqrt{2/3} M_{\tilde{\chi}}/T$. Die Relaxationszeit ist somit

$$\tau_{\text{relax}}(T) \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\tilde{\chi}}}{T} \tau_{\text{coll}}(T). \quad (5.70)$$

Da $\tau_{\text{coll}}(T) \equiv 1/\Gamma_{\text{el}} \sim 1/T^5$ ist $\tau_{\text{relax}}(T) \sim 1/T^6$.

Da die Hubble-Zeit $1/H$ im strahlungsdominierten Universum umgekehrt proportional zur Temperatur im Quadrat ist, existiert eine Temperatur T_{kd} mit $1/H(T_{\text{kd}}) = \tau_{\text{relax}}(T_{\text{kd}})$. Die so definierte Temperatur liefert eine Abschätzung dafür, wann die Neutralinos kinetisch vom Wärmebad entkoppeln. Wir schreiben abkürzend für $N = c_N M_{\tilde{\chi}}/T$, für die elastische Streurrate $\Gamma_{\text{el}} = c_{\Gamma} T^5/(M_{\tilde{L}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2$ und für die Hubble-Rate $H = c_H 1/M_{\text{Pl}} T^2$. Die Temperatur, bei der Neutralinos kinetisch von den Leptonen entkoppeln ist dann durch

$$T_{\text{kd}} = \left[\frac{c_N c_H}{c_{\Gamma}} \frac{M_{\tilde{\chi}} (M_{\tilde{L}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2}{M_{\text{Pl}}} \right]^{1/4} \quad (5.71)$$

gegeben⁹. Für den masseunabhängigen Vorfaktor finden wir $c_N c_H / c_{\Gamma} \approx 83$.

In Abbildung (5.3) ist die Temperatur T_{kd} , bei der Neutralinos kinetisch von den Fermionen im Wärmebad entkoppeln, in Abhängigkeit von der Masse gezeigt, die zu den supersymmetrischen Partnern dieser Fermionen gehört. Die Neutralino-Masse ist hier unter der Bedingung ¹⁰ $37 \text{ GeV} < M_{\tilde{\chi}} < M_{\tilde{F}}$ frei gewählt und zwar von unten

⁹In (Boehm et al., 2001) und (Chen et al., 2001) wird fälschlicherweise angenommen, daß $\tau_{\text{coll}} \approx \tau_{\text{relax}}$ ist. Wir schreiben für die Relaxationszeit

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{c_N}{c_{\Gamma}} M_{\tilde{\chi}} \frac{(M_{\tilde{L}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2}{T^{5+\alpha}}$$

wobei in unserer Rechnung (Hofmann et al., 2001) $c_N = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 1$ gilt. Mit der falschen Annahme $\tau_{\text{coll}} \approx \tau_{\text{relax}}$ dagegen wird $c_N = 1$, $\alpha = 0$. Die Temperatur T_{kd} bei der Neutralinos kinetisch vom Wärmebad entkoppeln ist dann

$$T_{\text{kd}} = \left[\frac{c_N c_H}{c_{\Gamma}} \frac{M_{\tilde{\chi}}^{\alpha} (M_{\tilde{L}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2}{M_{\text{Pl}}} \right]^{\frac{1}{3+\alpha}}.$$

Mit der falschen Annahme, daß Neutralinos Abweichungen vom Gleichgewicht durch eine einzige elastische Streuung mit dem Wärmebad abbauen können, wird die Entkopplungstemperatur typischerweise um eine Größenordnung unterschätzt.

¹⁰ $M_{\tilde{\chi}} > 37 \text{ GeV}$ ist eine von $\tan\beta$ und $M_{\tilde{F}}$ unabhängige experimentelle Schranke vom LEP-Experiment (Barate et al., 2001).

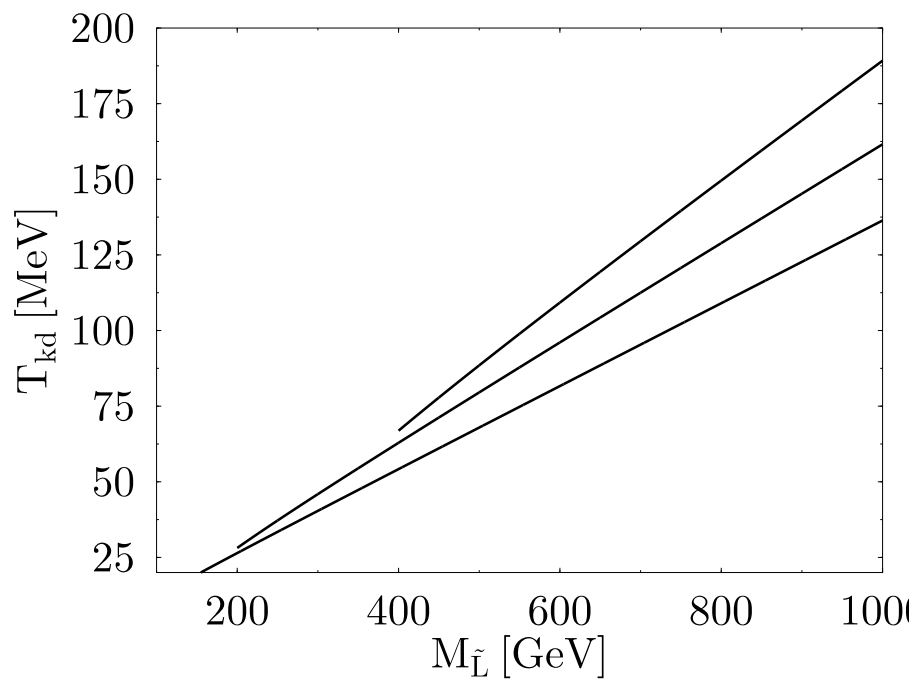


Abbildung 5.3: Die Temperatur, bei der Neutralinos kinetisch von den Fermionen im Wärmebad entkoppeln, in Abhängigkeit von der als universell angenommenen Sfermion-Masse. Die drei dargestellten Kurven entsprechen unterschiedlichen Neutralino-Massen und zwar (von unten nach oben) $M_{\tilde{\chi}} = 50, 100, 200$ GeV

nach oben: $M_{\tilde{\chi}} = 50, 100, 200$ GeV. Die Kurven sind Geraden mit der Steigung $(c_N c_H / c_\Gamma M_{\tilde{\chi}} / M_{\text{Pl}})^{1/4}$. Je schwerer ein Neutralino ist, desto geringer ist bei einer gegebenen Temperatur der Impulstransfer mit dem Wärmebad. Folglich ist die Anzahl der zum Ausgleich einer Störung benötigten elastischen Streuungen mit dem Wärmebad umso größer und damit auch die Relaxationszeit.

Für die Berechnung von (5.71) haben wir angenommen, daß alle Leptonen bis auf das Tau–Lepton relativistisch sind. Allerdings wurden Pionen nicht berücksichtigt, die bei Temperaturen oberhalb von 130 MeV als relativistische Streupartner zur Verfügung stehen. Oberhalb des QCD–Phasenübergangs stehen auch alle Quarks als Streupartner zur Verfügung.

Ab der Temperatur T_{kd} können sich Störungen formieren, die nicht mehr ausgeglichen werden können. Die Neutralinos sind trotzdem noch im Kontakt mit dem Wärmebad, allerdings immer seltener, so daß die Relaxationszeit zum Abbau einer charakteristischen Störung größer sein kann als die Zeit, in der Neutralinos überhaupt noch elastisch streuen. Tatsächlich existiert eine Temperatur T_{ls} , ab der die Neutralinos frei auf Geodäten strömen. Diese Temperatur kann durch $\Gamma_{\text{el}}(T_{\text{ls}}) = H(T_{\text{ls}})$ abgeschätzt werden. Mit den gleichen Abkürzungen wie oben finden wir

$$T_{\text{ls}} = \left[\frac{c_H}{c_\Gamma} \frac{(M_{\tilde{L}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2}{M_{\text{Pl}}} \right]^{1/3}, \quad (5.72)$$

wobei $c_H / c_\Gamma \approx 115$.

Anhang A

In diesem Anhang wird das Hierarchie–Problem als Motivation für Supersymmetrie erläutert. Außerdem werden Supersymmetrie–Algebren und ihre Darstellungstheorie eingeführt. Insbesondere werden Supermultipletts masseloser und massiver Teilchen diskutiert. Wir folgen hier (Wess und Bagger, 1992; Bailin und Love, 1994; Weinberg, 2000).

Supersymmetrie

Das Standard–Modell der Teilchenphysik–die renormierbare Quantenfeldtheorie der Leptonen, Quarks und Eichbosonen basierend auf der lokalen Eichgruppe $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ –beschreibt akkurat alle physikalischen Phänomene, die mit heutigen Beschleunigern experimentell untersucht werden können. Das Standard–Modell wird als Niederenergie–Näherung einer bisher unbekannteren fundamentalen Theorie verstanden, in der Gravitation vereinigt mit der starken und den elektroschwachen

Wechselwirkungen auftritt. Die Vereinigung aller Wechselwirkungen wird bei Energien im Bereich von 10^{16} – 10^{19} GeV erwartet¹¹. Diese Energie-Skala heißt auch *fundamentale Skala*. Das Standard-Modell ist charakterisiert durch eine Energie-Skala von circa 300 GeV, also einer wesentlich kleineren Skala als die fundamentale Skala. Es stellt sich somit die Frage, wie die enorme Hierarchie zwischen beiden Skalen generiert und stabilisiert wird. Diese Frage ist bekannt als *Hierarchie-Problem*.

Die stärkste Motivation für Supersymmetrie vom theoretischen Standpunkt her ist wohl, daß Supersymmetrie eine Lösung für das Hierarchie-Problem anbietet. Die lokale Eichsymmetrie $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ erfordert, daß die physikalischen Massen von Leptonen, Quarks und Eichbosonen proportional zur Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung sind, die wiederum proportional zur Masse der Skalarfelder ist, die für den Zusammenbruch der elektroschwachen Symmetrie verantwortlich sind. Die Krux des Hierarchie-Problems ist, daß Skalarfelder im Gegensatz zu Fermion- und Eichfeldern durch keine Symmetrie des Standardmodells davor geschützt werden, nackte Massen von der Größenordnung der fundamentalen Skala zu erhalten. Damit lägen dann alle Massen in der Nähe der fundamentalen Skala.

Dieser Widerspruch zur Beobachtung kann aufgelöst werden, indem das Standard-Modell in eine supersymmetrische Theorie eingebettet wird. Dann würden die Skalarfelder mit Fermionen in sogenannten *Supermultipletts* zusammengefaßt, die zur chiralen Darstellung einer Eichgruppe gehörten. Supersymmetrie garantierte dann verschwindende nackte Massen sowohl für Skalare als auch für Fermionen. Sämtliche Massen des Standard-Modelles lägen auf der Skala, bei der Supersymmetrie gebrochen würde. Die hierin liegende Hoffnung, eine Lösung des Hierarchie-Problems zu liefern, ist die stärkste Motivation, Supersymmetrie in eine realistische Theorie einzubauen.

Allerdings ist keines der in supersymmetrischen Theorien geforderten neuen Teilchen bisher detektiert worden. Es muß auch festgestellt werden, daß bisher keine vollständig befriedigende supersymmetrische Version des Standard-Modelles existiert.

Das Hierarchie-Problem

Das Hierarchie-Problem konstituiert sich auf der Tatsache, das Massen von Skalarfeldern aufgrund von Strahlungskorrekturen nicht stabilisiert werden können (Witten, 1981). Auch Fermionmassen erhalten Strahlungskorrekturen

$$\delta m_F = \frac{3\alpha}{4\pi} m_F \ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_F^2} \right). \quad (5.A.1)$$

¹¹Wir sehen hier von Szenarien mit großen Extradimensionen ab, die eine Vereinigung aller Wechselwirkungen bei wesentlich kleineren Energien erlauben.

Hierbei ist Λ ein Ultraviolett-Regulator, der die Skala angibt, auf der wir neue Physik erwarten. Da Strahlungskorrekturen für Fermionmassen lediglich logarithmisch divergent sind, bleiben die Korrekturen selbst für $\Lambda \sim M_{\text{Pl}}$ natürlich, d. h. $\delta m_{\text{F}} \leq m_{\text{F}}$.

Im Gegensatz hierzu sind Korrekturen zu Skalarmassen quadratisch divergent. Auf dem 1-Schleifenniveau ist

$$\delta m_{\text{H}}^2 \sim (g_{\text{F}}^2, g^2, \lambda) \int d^4k \frac{1}{k^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) \Lambda^2, \quad (5.A.2)$$

wobei die in der Schleife propagierenden Fermionen mit g_{F} ankoppeln, die Eichbosonen mit g und die Skalare mit λ . Im Standard-Modell hat das Higgs-Feld einen nichtverschwindenden Erwartungswert v und generiert über die spontane Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie die Massen der Eichbosonen und Fermionen. So erhalten die geladenen W -Bosonen Massen in der Form $M_{\text{W}} \sim gv$. Andererseits gilt für die Masse des Higgs-Bosons $m_{\text{H}} \sim \sqrt{\lambda}v$. Folglich erwarten wir $M_{\text{W}} \sim m_{\text{H}}$. Gibt es jedoch neue Physik im Bereich der fundamentalen Skala, so ist $\Lambda \gg M_{\text{W}}$ und die 1-Schleifenkorrektur destabilisiert die Skala des Standard-Modells. Das Standard-Modell verliert so seine Natürlichkeit

$$\Lambda \gg M_{\text{W}} \longrightarrow \delta m_{\text{H}} \gg m_{\text{H}}. \quad (5.A.3)$$

Prinzipiell kann die nackte Masse m_{H} so gewählt werden, daß sie einen negativen Term enthält, der die 1-Schleifenkorrektur exakt aufhebt und eine natürliche elektroschwache Masse ermöglicht. Für Korrekturen im Bereich der Planck-Skala bedeutet dies, daß die nackte Masse auf 32 Stellen genau eingestellt sein muß. Die 2-Schleifenkorrektur ist allerdings proportional zu $\alpha^2 \Lambda^4$ und müsste ebenfalls durch entsprechende Justierung der nackten Masse akkurat aufgehoben werden. Obwohl eine solche Serie von Aufhebungen technisch möglich ist, stellt diese auf empfindlichste Feineinstellung der nackten Masse beruhende Lösung des Hierarchie-Problems ein unbefriedigender Ansatz dar.

Eine alternative und elegantere Lösung zu diesem Problem existiert, indem neue Teilchen postuliert werden, die ähnliche Massen und Kopplungen haben wie die für die Strahlungskorrekturen verantwortlichen Teilchen, sich allerdings im Spin um eine halbe Einheit unterscheiden. Dies ist hilfreich, da sich 1-Schleifenkorrekturen von Fermionen und Bosonen mit gleichen Massen und Kopplungen lediglich in einem relativen Vorzeichen unterscheiden. Wir erhalten dann für ein solches Paar von Teilchen in der 1-Schleifenkorrektur

$$\delta m_{\text{H}}^2 \sim \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) (\Lambda^2 + m_{\text{B}}^2) - \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) (\Lambda^2 + m_{\text{F}}^2) = \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{4\pi}\right) (m_{\text{B}}^2 - m_{\text{F}}^2). \quad (5.A.4)$$

Für gleiche Massen von Bosonen und Fermionen verschwinden die Strahlungskorrekturen identisch. Die Stabilität der elektroschwachen Skala erfordert aber lediglich

$$|m_{\text{B}}^2 - m_{\text{F}}^2| \leq 1 \text{TeV}^2. \quad (5.A.5)$$

Supersymmetrie bietet nun gerade die Möglichkeit, alle benötigten neuen Teilchen einzuführen und damit die destabilisierenden Strahlungskorrekturen elegant aufzuheben.

Supersymmetrie-Algebren

Vor der Einführung von Supersymmetrie war es Folklore, daß Generatoren von physikalischen Symmetrien ausschließlich als bosonisch angenommen wurden. Die allgemeinst mögliche Lie-Algebra von (bosonischen) Symmetrie-Generatoren einer Quantenfeldtheorie wird durch ein mächtiges Theorem von Coleman und Mandula (1967) stark eingeschränkt. Demnach kann diese nur aus den Generatoren P der Translationen in der Raum-Zeit und den Generatoren J der homogenen Lorentz-Gruppe bestehen, sowie aus Generatoren interner Symmetrien, die mit P und J kommutieren und außerdem als Spin- und Impulsunabhängige hermitesche Matrizen dargestellt werden können¹². Unter einem Symmetrie-Generator wird hier jeder hermitesche Operator verstanden, der mit der S -Matrix kommutiert, dessen Kommutatoren wieder Symmetrie-Generatoren sind, der Einteilchen-Zustände auf Einteilchen-Zustände abbildet und dessen Wirkung auf Vielteilchen-Zustände als direkte Summe der Wirkung auf Einteilchen-Zustände geschrieben werden kann. Für den Beweis des Theorems werden folgende Annahmen über eine relativistische Quantenfeldtheorie gemacht:

Annahme 1: Für jedes M existiere nur eine endliche Anzahl von Teilchen mit einer kleineren Masse als M .

Annahme 2: Jeder Zweiteilchen-Zustand streue bei fast allen Energien (d. h. bei allen Energien mit Ausnahme einer isolierten Menge).

Annahme 3: Die Amplituden für elastische Streuungen zweier Teilchen seien analytische Funktionen der Streuwinkel bei fast allen Energien und Winkel¹³.

Ein Theorem von Haag, Lopuszanski und Sohnius (Haag et al., 1975; Ferrara, 1987) lockert die Einschränkung auf Lie-Algebren im Theorem von Coleman und

¹²In Theorien mit ausschließlich masselosen Teilchen gibt es zusätzlich zu den Generatoren P und J noch Generatoren, die die Lie-Algebra der konformen Gruppe aufspannen.

¹³Streng genommen ist diese Annahme für Theorien mit Infrarot-Divergenzen nicht erfüllt. In der QED zum Beispiel verschwinden alle Raten für Prozesse, die geladene Teilchen und reelle Photonen enthalten, mit Ausnahme der elastischen Vorwärtsstreuungen. Dieses Problem kann in Abelschen Eichtheorien vermieden werden, in dem das Theorem von Coleman und Mandula auf die entsprechende Theorie mit fiktiver Masse der Eichbosonen angewandt wird, und dann lediglich mit Größen gearbeitet wird, die im Limes verschwindender Eichbosonen Masse endlich bleiben. Dieses Problem existiert nicht in Nicht-Abelschen Eichtheorien wie der QCD, da hier alle masselosen Teilchen gefangen sind.

Mandula und erweitert seine Aussagen auf die allgemeinst mögliche *graduierete Lie-Algebra*. Die Elemente t_a einer graduierten Lie-Algebra erfüllen Kommutator- und Antikommutator-Relationen der Form

$$t_a t_b - (-1)^{\eta_a \eta_b} t_b t_a = i \sum_c C_{ab}^c t_c . \quad (5.A.6)$$

Hierbei ist η_a für jedes a entweder $+1$ oder 0 und heißt die *Graduierung* des Generators t_a . Die C_{ab}^c heißen wieder *Strukturkonstanten*. Generatoren t_a mit $\eta_a = 1$ heißen *fermionisch*, alle anderen heißen *bosonisch*. Die Gleichungen (5.A.6) sind Kommutatoren von bosonischen Operatoren mit bosonischen und mit fermionischen Operatoren und Antikommutatoren für fermionische Operatoren mit fermionischen Operatoren.

Graduierte Lie-Algebren, die für die Physik interessant sein könnten, sind durch Symmetrien der Raum-Zeit stark eingeschränkt. Gegeben sei eine graduierte Lie-Algebra von Symmetrie-Generatoren, die mit der S -Matrix einer relativistischen Quantenfeldtheorie kommutieren. Sei Q ein beliebiger fermionischer Symmetrie-Generator, so ist auch $U^{-1}(\Lambda)QU(\Lambda)$ ein fermionischer Symmetrie-Generator, wobei $U(\Lambda)$ eine entsprechende unitäre Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe mit einem beliebigen Element Λ bezeichne. Daher ist $U^{-1}(\Lambda)QU(\Lambda)$ eine Linearkombination des vollständigen Satzes von fermionischen Symmetrie-Generatoren. Folglich spannt dieser Satz von fermionischen Symmetrie-Generatoren den zu der unitären Darstellung gehörenden Darstellungsraum auf. Jeder dieser Generatoren kann daher danach klassifiziert werden, zu welcher irreduziblen Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe er gehört.

Die Darstellungen der homogenen Lorentz-Gruppe können durch ihre Kommutator-Beziehungen mit den Generatoren

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{J} + i\mathbf{K}) , \quad \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \quad (5.A.7)$$

spezifiziert werden. Hierbei bezeichnen \mathbf{J} und \mathbf{K} die hermiteschen Generatoren für Rotationen und Boosts. Die Generatoren \mathbf{A} und \mathbf{B} sind so gewählt, daß sie untereinander eine abgeschlossene Lie-Algebra bilden

$$[A_i, A_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} A_k , \quad [B_i, B_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} B_k , \quad [A_i, B_j] = 0 , \quad (5.A.8)$$

wobei $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ und ϵ der total antisymmetrische Tensor zweiter Stufe ist. Daraus folgt, daß Darstellungen der homogenen Lorentz-Gruppe wie Zustände mit zwei unabhängigen Spins durch ein Paar von positiven ganzen oder halbganzen Zahlen A und B gekennzeichnet sind. Jedes Element der Darstellung wird durch ein Paar von Indizes a und b mit $a \in \{-A, -A + 1, \dots, A\}$ und $b \in \{-B, -B + 1, \dots, B\}$ gekennzeichnet. Damit gilt: jeder Satz von $(2A + 1)(2B + 1)$ Operatoren

$Q_{a,b}^{AB}$, die eine (A, B) -Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe bilden, genügen den Kommutator-Beziehungen

$$[\mathbf{A}, Q_{ab}^{AB}] = - \sum_c \mathbf{J}_{ac}^{(A)} Q_{cb}^{AB}, \quad [\mathbf{B}, Q_{cb}^{AB}] = - \sum_c \mathbf{J}_{bc}^{(B)} Q_{ac}^{AB}, \quad (5.A.9)$$

wobei $\mathbf{J}^{(j)}$ für den Drehimpuls j die Komponenten

$$\left(J_1^{(j)} \pm i J_2^{(j)} \right)_{mn} = \delta_{m,n\pm 1} \sqrt{(j \mp n)(j \pm n + 1)}, \quad \left(J_3^{(j)} \right)_{mn} = \delta_{mn} n. \quad (5.A.10)$$

Durch hermitesche Konjugation von (5.A.9) folgt, daß die hermiteisch Adjungierten Q_{ab}^{AB*} der Operatoren, die sich nach der (A, B) -Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe transformieren, durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Operatoren \tilde{Q}_{ba}^{BA} abgebildet werden, die sich unter der (B, A) -Darstellung transformieren,

$$Q_{ab}^{AB*} = (-1)^{A-a} (-1)^{B-b} \tilde{Q}_{-b-a}^{BA}. \quad (5.A.11)$$

Das Theorem von Haag, Lopuszanski und Sohnius besagt nun zum Teil, daß die fermionischen Symmetrie-Generatoren ausschließlich zur $(0, 1/2)$ und $(1/2, 0)$ Darstellung gehören können. Aus (5.A.11) folgt, daß der hermiteisch Adjungierte eines $(0, 1/2)$ oder $(1/2, 0)$ Operators eine Linearkombination von entweder $(1/2, 0)$ oder $(0, 1/2)$ Operatoren ist, so daß der vollständige Satz von fermionischen Symmetrie-Generatoren in $(0, 1/2)$ Generatoren Q_{ar} und ihre $(1/2, 0)$ hermiteisch Adjungierten Q_{ar}^* aufgeteilt werden kann. Hierbei ist $a \in \{-1/2, 1/2\}$ ein Spinorindex und r diskriminiert unterschiedliche zwei-komponentige Generatoren mit gleichem Verhalten unter homogenen Lorentz-Transformationen. Das Theorem besagt weiterhin, daß die fermionischen Generatoren so definiert werden können, daß die folgenden Antikommutator-Relationen gelten:

$$\{Q_{ar}, Q_{bs}^*\} = 2\delta_{rs} \sigma_{ab}^\mu P_\mu, \quad (5.A.12)$$

$$\{Q_{ar}, Q_{bs}\} = Z_{rs} e_{ab}, \quad (5.A.13)$$

wobei $Z_{rs} = -Z_{sr}$ bosonische Generatoren bezeichnen und σ_μ und e die 2×2 -Matrizen (mit Zeilen und Spalten durch $+1/2, -1/2$ abgezählt)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & e &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.A.14)$$

Die fermionischen Generatoren kommutieren mit P

$$[P_\mu, Q_{ar}] = [P_\mu, Q_{ar}^*] = 0, \quad (5.A.15)$$

und die Z_{rs} und Z_{rs}^* sind zentrale Ladungen dieser Algebra, d. h. sie kommutieren mit allen fermionischen Generatoren und untereinander.

Wir skizzieren im folgenden den Beweis des Theorems von Haag, Lopuszanski und Sohnius. Sei Q_{ab}^{AB} ein von Null verschiedener fermionischer Symmetrie-Generator, der zu einer irreduziblen (A, B) -Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe gehöre. Wie bereits erwähnt gehört nach (5.A.11) der dazu hermiteisch Adjungierte zur (B, A) -Darstellung. Für den Antikommutator dieser Operatoren gilt daher

$$\begin{aligned} \{Q_{ab}^{AB}, Q_{a'b'}^{AB}\} &= (-1)^{A-a'} (-1)^{B-b'} \sum_{C=|A-B|}^{A+B} \sum_{D=|A-B|}^{A+B} \sum_{c=-C}^C \sum_{d=-D}^D \\ &\times (ABC|a, -b', c) (ABD| -a', b, d) X_{cd}^{CD}, \end{aligned} \quad (5.A.16)$$

wobei $(ABJ|a, b, m)$ der Clebsch-Gordan-Koeffizient für die Kopplung von zwei Spins A und B mit Projektionen a und b entlang der Quantisierungsachse zum Gesamtspin J mit Projektion m ist. X^{CD} ist ein Operator, der zur (CD) -Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe gehört und durch

$$\begin{aligned} X_{cd}^{CD} &= \sum_{a=-A}^A \sum_{b=-B}^B \sum_{a'=-A}^A \sum_{b'=-B}^B (-1)^{A-a'} (-1)^{B-b'} \\ &\times (ABC|a, -b', c) (ABD| -a', b, d) \{Q_{ab}^{AB}, Q_{a'b'}^{AB}\} \end{aligned} \quad (5.A.17)$$

gegeben ist. Nicht alle diese Operatoren sind von Null verschieden. Aber für $J = m = A + B$ und $J = -m = A + B$ sind die einzigen von Null verschiedenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten die mit $a = A, b = B$ bzw. $a = -A, b = -B$. Diese Koeffizienten haben den Wert eins. Setzen wir in (5.A.17) $C = D = c = -d = A + B$, so finden wir

$$X_{A+B, -A-B}^{A+B, A+B} = (-1)^{2B} \{Q_{A, -B}^{AB}, Q_{A, -B}^{AB*}\}. \quad (5.A.18)$$

Dies kann nur verschwinden, wenn $Q_{A, -B}^{AB} = 0$, was zur Folge hätte, daß alle $Q_{a, b}^{AB}$ verschwinden. Falls also von Null verschiedene (A, B) fermionische Generatoren existieren, dann müssen deren Antikommutatoren mit ihren Adjungierten durch von Null verschiedene bosonische Symmetrie-Generatoren in der $(A + B, A + B)$ -Darstellung gegeben sein.

Das Theorem von Coleman und Mandula besagt, daß die bosonischen Symmetrie-Generatoren aus den $(1/2, 1/2)$ Generatoren P der Raum-Zeit Translationen, den $(1, 0) + (0, 1)$ Generatoren J der eigentlichen Lorentz-Transformationen und den $(0, 0)$ Generatoren T der internen Symmetrien gebildet werden. Daraus folgt, daß die fermionischen Symmetrie-Generatoren nur zu den (A, B) -Darstellungen mit $A + B \leq 1/2$ gehören können. Diese Operatoren können folglich nur zur $(1/2, 0)$ - oder zur $(0, 1/2)$ -Darstellung gehören. Sie wandeln also Bosonen in Fermionen um und umgekehrt und können damit keine Skalare sein. Bezeichnen wir die linear unabhängigen $(0, 1/2)$ fermionischen Generatoren mit Q_{ar} , so gehört der Antikommutator $\{Q_{ar}, Q_{bs}^*\}$ zur $(0, 1/2) \times (1/2, 0) = (1/2, 1/2)$ -Darstellung und muß daher proportional zum einzigen $(1/2, 1/2)$ bosonischen Generator sein – dem Viererimpuls

P . Lorentz-Invarianz liefert dann die Beziehung

$$\{Q_{ar}, Q_{bs}^*\} = 2N_{rs} \sigma_{ab}^\mu P_\mu, \quad (5.A.19)$$

wobei N eine numerische Matrix ist.

Die letzte Aussage muß noch begründet werden. Dazu benutzen wir den Isomorphismus zwischen der Lorentz-Gruppe und der Lie-Gruppe $SL(2, C)$ der 2×2 Matrizen λ mit komplexen Einträgen und $\det \lambda = 1$. Die $(0, 1/2)$ fermionischen Generatoren transformieren sich unter Lorentz-Transformationen Λ (eigentlich einer unitären Darstellung von Lorentz-Transformationen) wie folgt:

$$U^{-1}(\Lambda) Q_{ar} U(\Lambda) = \sum_b \lambda_{ab} Q_{br}, \quad (5.A.20)$$

wobei Λ die durch

$$\Lambda^\nu_\mu \sigma_\nu = \lambda \sigma_\mu \lambda^\dagger \quad (5.A.21)$$

definierte Lorentz-Transformation ist. (5.A.20) gilt für $(0, 1/2)$ Operatoren, wie wir für infinitesimale Lorentz-Transformationen $\Lambda = 1 + \omega$ mit $\omega = -\omega^T$ nachrechnen. (5.A.21) ist erfüllt für

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} \omega_{ij} + \omega_{k0} \right) \sigma_k, \quad (5.A.22)$$

hingegen gilt

$$U(\Lambda) = 1 + \frac{1}{2} i \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} = 1 + \frac{1}{2} i \epsilon_{ijk} \omega_{ij} J^k - i \omega_{i0} K_i. \quad (5.A.23)$$

Gleichsetzen der Koeffizienten von ω_{ij} und ω_{i0} in (5.A.20) liefert

$$[\mathbf{J}, Q_a] = -\frac{1}{2} \sum_b \sigma_{ab} Q_b, \quad [\mathbf{K}, Q_a] = -\frac{1}{2} \sum_b \sigma_{ab} Q_b \quad (5.A.24)$$

und damit

$$[\mathbf{B}, Q_a] = -\frac{1}{2} \sum_b \sigma_{ab} Q_b, \quad [\mathbf{A}, Q_a] = 0. \quad (5.A.25)$$

Dies beweist, daß jeder Operator, der (5.A.20) genügt, zur $(0, 1/2)$ -Darstellung gehört. Da die σ_μ einen vollständigen Satz von 2×2 Matrizen bilden, kann der Antikommutator $\{Q_{ar}, Q_{bs}^*\}$ in der Form $N_{rs}^\mu (\sigma_\mu)_{ab}$ notiert werden, wobei N^μ eine Matrix von Operatoren ist. (5.A.20) und (5.A.21) zeigen, daß diese Operatoren Vierervektoren sind und somit nach dem Theorem von Coleman und Mandula proportional zum Viererimpuls sein müssen. Mit $N_{rs}^\mu = 2N_{rs} P^\mu$ erhalten wir dann (5.A.19).

Mittels einer linearen Transformation der Q_{ar} können die Antikommutatoren jetzt in die Form (5.A.12) gebracht werden. Zunächst bemerken wir, daß die Matrix N hermiteisch und positiv definit ist. Die erste Eigenschaft folgt unmittelbar durch

hermitesche Konjugation von (5.A.19). Für den Beweis der zweiten Eigenschaft nutzen wir zunächst aus, daß die Q_{ar} linear unabhängig sind. Für jede von Null verschiedene Linearkombination $Q \equiv \sum_r d_a c_r Q_{ar}$ existiert dann ein Zustand $|\Psi\rangle$ mit $Q|\Psi\rangle \neq 0$. Der Erwartungswert von (5.A.19) bezüglich dieses Zustandes liefert

$$0 < \langle \Psi | \{Q, Q^*\} | \Psi \rangle = 2 \left\langle \Psi \left| \sum_{ab} \sigma_{ab}^\mu P_\mu d_a d_b^* \right| \Psi \right\rangle \sum_{rs} c_r c_s^* N_{rs} . \quad (5.A.26)$$

Daraus folgt sofort, daß $\sum_{rs} c_r c_s^* N_{rs}$ nicht für jedes c_r verschwinden kann. Da der Operator $\sum_{ab} \sigma_{ab}^\mu P_\mu d_a d_b^*$ positiv auf dem Hilbert-Raum der physikalischen Zustände ist, muss N positiv definit sein.

Wir definieren nun neue fermionische Generatoren durch

$$\tilde{Q}_{ar} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_s N_{rs}^{-1/2} Q_{as} . \quad (5.A.27)$$

Diese Definition ist sinnvoll, da N positiv definit ist. Da N auch hermitisch ist, erhalten wir für die Antikommutatoren

$$\{\tilde{Q}_{ar}, \tilde{Q}_{bs}^*\} = 2\delta_{rs} \sigma_{ab}^\mu P_\mu . \quad (5.A.28)$$

Im weiteren nehmen wir implizit immer diese Definition der fermionischen Generatoren an und unterdrücken die Tilde. Mit dieser Definition erhalten die Antikommutatoren tatsächlich die Gestalt (5.A.12).

Als nächstes zeigen wir, daß die fermionischen Generatoren Q mit dem Viererimpuls P vertauschen. Der Kommutator von einem $(1/2, 1/2)$ -Operator wie P mit einem $(0, 1/2)$ -Operator wie Q kann nur ein $(1/2, 0)$ - oder ein $(1/2, 1)$ -Operator sein. Aus dem Theorem von Coleman und Mandula folgt aber, daß es keine $(1/2, 1)$ -Symmetrie-Operatoren gibt. Damit kann der Kommutator von P und Q nur zu dem $(1/2, 0)$ -Symmetrie-Operator Q^* proportional sein. Wegen Lorentz-Invarianz folgt

$$[(\sigma \cdot P)_{ab}, Q_{cr}] = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 \mid a \ c \ 0 \right) \sum_s K_{rs} Q_{bs}^* , \quad (5.A.29)$$

wobei K eine numerische Matrix ist. Damit wird

$$\left[(\sigma \cdot P)_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \left[(\sigma \cdot P)_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \left\{ Q_{\frac{1}{2}r}, Q_{\frac{1}{2}s}^* \right\} \right] \right] = -4 (\sigma \cdot P)_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} (KK^\dagger)_{rs} . \quad (5.A.30)$$

Mit (5.A.12) folgt, daß die linke Seite eine Linearkombination von $[P_\mu, [P_\nu, P_\sigma]]$ ist, die allesamt verschwinden. Dagegen ist $(\sigma \cdot P)_{-1/2-1/2}$ von Null verschieden, daher muß $KK^\dagger = 0$ und damit $K = 0$. Aus (5.A.29) folgt schließlich, daß $[P_\mu, Q_{ar}] = [P_\mu, Q_{ar}^*] = 0$.

Wir wenden uns nun dem Antikommutator von zwei Q s zu. Der Antikommutator von zwei $(0, 1/2)$ -Symmetrie-Generatoren muß eine Linearkombination von $(0, 1)$ -

und $(0,0)$ -Symmetrie-Generatoren sein. Das Theorem von Coleman und Mandula besagt, daß die einzig möglichen $(0,1)$ -Symmetrie-Generatoren Linearkombinationen der Generatoren J der homogenen Lorentz-Transformationen sein können. Nun kommutieren die Q s mit P und folglich auch ihr Antikommutator. Es gibt aber keine nicht-triviale Linearkombination der J s, die mit P kommutieren würden. Damit bleiben noch die $(0,0)$ -Operatoren, die mit P und J kommutieren. Lorentz-Invarianz erzwingt dann (5.A.13). Die internen Symmetrie-Generatoren Z_{rs} sind antisymmetrisch in r und s , weil der gesamte Ausdruck symmetrisch unter Vertauschung von a und r mit b und s sein muß und die Matrix e antisymmetrisch unter Zeilen- und Spaltenvertauschung ist.

Als Letztes muss noch gezeigt werden, daß die Z s zentrale Ladungen der Algebra sind. Aus (5.A.13) und (5.A.15) folgt unmittelbar

$$[P_\mu, Z_{rs}] = 0 . \quad (5.A.31)$$

Wir benutzen im weiteren die verallgemeinerte Jacobi-Identität für Generatoren einer graduierten Lie-Algebra. Zunächst für zwei Q s und ein Q^* :

$$0 = [\{Q_{ar}, Q_{bs}\}, Q_{ct}^*] + \text{Permutationen} . \quad (5.A.32)$$

Wegen (5.A.12) und (5.A.15) verschwinden der zweite und dritte Summand und es bleibt

$$[Z_{rs}, Q_{ct}^*] = 0 , \quad (5.A.33)$$

Jetzt benutzen wir die verallgemeinerte Jacobi-Identität für ein Z , ein Q und ein Q^* :

$$0 = -[Z_{rs}, \{Q_{at}, Q_{bu}^*\}] + \{Q_{bu}^*, [Z_{rs}, Q_{at}]\} - [Q_{at}, [Q_{bu}^*, Z_{rs}]] . \quad (5.A.34)$$

Wegen (5.A.31) und (5.A.33) verschwinden der erste und dritte Summand und es bleibt

$$\{Q_{bu}^*, [Z_{rs}, Q_{at}]\} = 0 . \quad (5.A.35)$$

Nun ist $[Z_{rs}, Q_{at}]$ ein $(0, 1/2)$ -Generator und muß daher eine Linearkombination der Q s sein:

$$[Z_{rs}, Q_{at}] = \sum_u M_{rstu} Q_{au} . \quad (5.A.36)$$

Damit wird (5.A.35)

$$(\sigma \cdot P)_{ab} M_{rstu} = 0 , \quad \forall r, s, t, u . \quad (5.A.37)$$

Daraus folgt, daß $M = 0$ und

$$[Z_{rs}, Q_{at}] = 0 . \quad (5.A.38)$$

Mit (5.A.13) und ihrer Adjungierten und den Kommutator-Beziehungen (5.A.33) und (5.A.38) und deren Adjungierten ergibt sich

$$[Z_{rs}, Z_{tu}] = [Z_{rs}, Z_{tu}^*] = [Z_{rs}^*, Z_{tu}^*] = 0 , \quad (5.A.39)$$

womit der Beweis des mächtigen Theorems von Haag, Lopuszanski und Sohnius vollständig ist.

Eine Supersymmetrie–Algebra mit N fermionischen Symmetrie–Generatoren heißt *N-erweiterte Supersymmetrie*. Gibt es nur einen fermionischen Symmetrie–Generator, so folgt aus der Beziehung $Z_{rs} = -Z_{sr}$, daß $Z = 0$ und

$$\{Q_a, Q_b^*\} = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu, \quad (5.A.40)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = 0. \quad (5.A.41)$$

Diese Beziehungen sind bekannt als *einfache Supersymmetrie* oder $N = 1$ Supersymmetrie.

Supermultipletts masseloser Teilchen

Supersymmetrie verlangt, daß die bekannten Teilchen zusammen mit neuen Teilchen in irreduziblen Darstellungen der Supersymmetrie–Algebra auftreten. Da diese nicht im Standard–Modell enthaltenen neuen Teilchen bisher nicht detektiert wurden, muß Supersymmetrie gebrochen sein, so daß die Masse der bisher unbekanntem Teilchen viel größer als die der Leptonen, Quarks und Eichbosonen und folglich von der gleichen Größenordnung wie die Massendifferenzen in den Supermultipletts sind. Für Energien, bei denen Supersymmetrie eine exakte oder nahezu exakte Symmetrie der Natur ist, können die Massendifferenzen und damit auch die Massen der Leptonen, Quarks und Eichbosonen und ihrer Superpartner vernachlässigt werden. Daher kommt den Supermultipletts masseloser Teilchen eine besondere Bedeutung zu.

Gegeben sei der Zustand eines masselosen Teilchens in einem Supermultiplett. Die anderen Zustände des Multipletts erhalten wir durch sukzessive Anwendung von Q bzw. Q^* auf den gegebenen Zustand. Da Q und Q^* mit P kommutieren, besitzen alle Zustände im Supermultiplett den gleichen Vierer–Impuls. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit transformieren wir in ein Inertialsystem, in dem $P^1 = P^2 = 0$ und $P^0 = P^3 = E$ gilt. Dann gilt

$$\sigma \cdot P = E(\sigma_0 + \sigma_3) = 2E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.A.42)$$

was bis auf den Faktor $2E$ die Projektionsmatrix auf den Unterraum mit Helizität $+1/2$ ist. Mit der Antikommutator–Beziehung (5.A.12) folgt, daß $\{Q_{(-1/2)}, Q_{(-1/2)}^*\}$ angewandt auf einen beliebigen Zustand des Multipletts dann Null ergibt. Dies gilt dann auch für $Q_{(-1/2)}$ und $Q_{(-1/2)}^*$. Die Konstruktion aller Zustände im Multiplett aus einem gegebenen Zustand erfolgt somit ausschließlich mit $Q_{(1/2)}$ und $Q_{(1/2)}^*$. Die Indizierung der fermionischen Generatoren ist so gewählt, daß

$$[J_3, Q_a] = -aQ_a \quad (5.A.43)$$

gilt. $Q_{(1/2)}$ und $Q_{(1/2)}^*$ erniedrigen bzw. erhöhen die Helizität um $1/2$.

Wir untersuchen zunächst die $N = 1$ -Supersymmetrie und berechnen die Basis-Zustände des Darstellungsraumes mittels einer Höchstgewichtskonstruktion. Gegeben sei ein Supermultiplett mit der maximalen Helizität λ_{\max} und der Zustand $|\lambda_{\max}\rangle$ mit diesem höchsten Gewicht und dem Impuls P . Dann gilt

$$Q_{(1/2)}^* |\lambda_{\max}\rangle = 0, \quad Q_{(1/2)} |\lambda_{\max}\rangle \sim |\lambda_{\max} - 1/2\rangle. \quad (5.A.44)$$

Wir definieren präziser

$$Q_{(1/2)} |\lambda_{\max}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{4E} |\lambda_{\max} - 1/2\rangle. \quad (5.A.45)$$

Aus der Antikommutator-Beziehung (5.A.12) und (5.A.42) und (5.A.44) folgt, daß dieser Zustand wie $|\lambda_{\max}\rangle$ normiert ist

$$\langle \lambda_{\max} - 1/2 | \lambda_{\max} - 1/2 \rangle = \langle \lambda_{\max} | \lambda_{\max} \rangle, \quad (5.A.46)$$

und damit insbesondere von Null verschieden ist. (5.A.41) zeigt weiterhin, daß $Q^2 = 0$ und somit $Q_{1/2} |\lambda_{\max} - 1/2\rangle = 0$. Andererseits ist

$$\begin{aligned} Q_{1/2}^* |\lambda_{\max} - 1/2\rangle &= (4E)^{-1/2} Q_{1/2}^* Q_{1/2} |\lambda_{\max}\rangle = (4E)^{-1/2} \{Q_{1/2}^*, Q_{1/2}\} |\lambda_{\max}\rangle \\ &= (4E)^{-1/2} |\lambda_{\max}\rangle, \end{aligned} \quad (5.A.47)$$

also wieder der Zustand mit dem höchsten Gewicht. Als wichtiges Resultat erhalten wir, daß das Supermultiplett aus zwei Zuständen mit Helizität λ_{\max} und $\lambda_{\max} - 1/2$ besteht. In dieser Basis können die Operatoren $Q_{1/2}$ und $Q_{1/2}^*$ durch die Matrizen

$$Q_{1/2} = \sqrt{4E} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{1/2}^* = \sqrt{4E} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.A.48)$$

dargestellt werden. Die Operatoren $Q_{-1/2}$ und $Q_{-1/2}^*$ dagegen können als Null dargestellt werden.

Für Theorien mit $N = 1$ Supersymmetrie ist dies der einzige Typ von Supermultipletts masseloser Zustände. Es gibt keine masselosen Teilchen, die nicht mit genau einem Superpartner in einem Supermultiplett zusammen gefasst werden. Aus der CPT -Invarianz folgt, daß zu jedem Supermultiplett masseloser Teilchen mit Helizitäten λ_{\max} und $\lambda_{\max} - 1/2$ ein Anti-Supermultiplett mit Helizitäten $-\lambda + 1/2$ und $-\lambda$ gehört. Insbesondere gehören zu einem Teilchen und Antiteilchen mit Helizitäten $+1/2$ und $-1/2$ je ein masseloses Teilchen und Antiteilchen mit Helizitäten $+1$ und -1 oder mit verschwindender Helizität.

In der $N = 1$ -Supersymmetrie kommutiert der fermionische Generator Q mit den Generatoren der $SU(3) \times SU(2)$. Der Grund hierfür ist, daß halbeinfache Gruppen wie $SU(3) \times SU(2)$ keine nichttriviale eindimensionale Darstellung haben. Die

Leptonen und Quarks gehören zu anderen Darstellungen der Eichgruppe als Eichbosonen. Folglich können Fermionen und Eichbosonen nicht in einem Supermultiplett liegen. Für Energien, die es erlauben, die $SU(2) \times U(1)$ Symmetriebrechung zu vernachlässigen, können damit masselose Leptonen und Quarks für jede Farbe und jeden Geschmack nur mit ihren masselosen Superpartnern (den sogenannten *Sleptonen* und *Squarks*) mit Helizität Null und der gleichen Farbe und dem gleichen Geschmack in Supermultipletts zusammengefasst werden, während die masselosen Eichbosonen zusammen mit ihren masselosen Superpartnern (den sogenannten *Gauginos*) mit Helizitäten $\pm 1/2$ eine adjungierte Darstellung von $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ bilden.

Da es neben den drei Wechselwirkungen, die im Standard-Modell zusammengefasst sind, noch Gravitation gibt, muß außerdem noch ein masseloses Teilchen mit Helizität ± 2 , das sogenannte *Graviton* existieren. Masselose Teilchen mit Helizität $\lambda \geq 1/2$ und kleinen Impulsen koppeln an erhaltene Größen. So koppeln masselose Teilchen mit $\lambda = \pm 1$ und kleinem Impuls an interne Symmetrie-Generatoren, masselose Teilchen mit $\lambda \pm 3/2$ und kleinem Impuls können an die Supersymmetrie-Generatoren Q koppeln und masselose Teilchen mit $\lambda = \pm 2$ und kleinem Impuls koppeln an den Viererimpuls P . Dagegen gibt es keine erhaltene Größen, an die ein masseloses Teilchen mit $\lambda \geq 2$ ankoppeln könnte. Folglich kann das Graviton nicht in einem Supermultiplett zusammen mit Teilchen mit Helizität $\lambda = \pm 5/2$ liegen. Es wird mit einem masselosen Teilchen mit $\lambda = \pm 3/2$ (dem sogenannten *Gravitino*) in einem Supermultiplett zusammengefasst. Die Quantenfeldtheorie dieses Supermultipletts heißt *Supergravitation*.

Supermultipletts massiver Teilchen

Auch wenn die bekannten Leptonen, Quarks und Eichbosonen und deren Superpartner bei hinreichend großen Energien wie masselose Teilchen behandelt werden können, lohnt es sich in Hinblick auf Theorien, welche die elektroschwache und starke Wechselwirkung vereinigen, Darstellungen für massive Zustände zu konstruieren.

Wie im vorigen Abschnitt erhalten wir alle Einteilchen-Zustände in einem Supermultiplett durch sukzessive Anwendung von Q und Q^* auf einen beliebigen Zustand im Supermultiplett. Alle so konstruierten Zustände haben den gleichen Viererimpuls. Anders als im masselosen Fall wählen wir für Massen $M \geq 0$ als Inertialsystem das Ruhesystem der Teilchen. Dann ist

$$\sigma \cdot P = M\sigma_0 = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.A.49)$$

Für jeden Zustand $|\Psi\rangle$ im Supermultiplett mit dieser Viererimpuls folgt aus der Antikommutatorbeziehung (5.A.12)

$$\{Q_{ar}, Q_{bs}^*\} |\Psi\rangle = 2M \delta_{ab} \delta_{rs} |\Psi\rangle. \quad (5.A.50)$$

Im Gegensatz zum masselosen Fall verschwindet hier keine Komponente von Q oder Q^* auf dem gesamten Multipllett, so daß es zwei Sorten von Leiteroperatoren gibt: $Q_{1/2}$ und $Q_{-1/2}^*$ erniedrigen die Spinprojektion entlang der Quantisierungsachse um $1/2$, $Q_{-1/2}$ und $Q_{1/2}^*$ hingegen erhöhen die Spinprojektion um $1/2$.

Wir analysieren wieder nur die $N = 1$ Supersymmetrie. Wir zeigen zunächst, daß jedes Supermultipllett mindestens ein Spin-Multipllett aus Zuständen $|jm\rangle$ mit den Eigenschaften

$$Q_a|jm\rangle = 0, \quad \forall m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}, a \in \{\pm 1/2\} \quad (5.A.51)$$

enthält.

Sei $|\Psi\rangle \neq 0$ ein Zustand im Supermultipllett. Wir definieren weitere von Null verschiedene Zustände durch

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (2M)^{-1/2} Q_{1/2} |\Psi\rangle & Q_{1/2}|\Psi\rangle \neq 0 \\ |\Psi\rangle & Q_{1/2}|\Psi\rangle = 0 \end{cases}, \\ |\Psi''\rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (2M)^{-1/2} Q_{-1/2} |\Psi'\rangle & Q_{-1/2}|\Psi'\rangle \neq 0 \\ |\Psi'\rangle & Q_{-1/2}|\Psi'\rangle = 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (5.A.52)$$

Da die Q_a antikommutieren, ist $Q_{1/2}|\Psi'\rangle = 0$, genauso $Q_a|\Psi''\rangle = 0$ für $a = \pm 1/2$. Ist für einen Zustand $|\Psi''\rangle$ die Bedingung $Q_a|\Psi''\rangle = 0$ erfüllt, so gilt dies auch für jeden Zustand $U(R)|\Psi''\rangle$, wobei $U(R)$ eine unitäre Darstellung der Drehgruppe bezeichne. Daraus folgt, daß diese Zustände in der Basis $|j, m\rangle$ von Spin-Multipletts entwickelt werden können, die (5.A.51) erfüllen.

Gegeben sei nun ein Spin-Multipllett, daß (5.A.51) erfüllt und wie folgt normiert sei:

$$\langle j, m' | j, m \rangle = \delta_{m'm}. \quad (5.A.53)$$

Für $j \geq 0$ erhalten wir durch Anwendung der Spin- $1/2$ -Operatoren¹⁴ Q_a^* auf diese Zustände neue Zustände mit Spin $j \pm 1/2$:

$$|j \pm 1/2, m\rangle = (2M)^{-1/2} \sum_a (1/2, j, j \pm 1/2 | m, a, m - a) Q_a^* |j, m - a\rangle, \quad (5.A.54)$$

wobei $(j_1, j_2, j | m_1, m_2, m)$ den Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Kopplung zweier Spins j_1 und j_2 mit Projektionen entlang der Quantisierungsachse m_1 und m_2 zum Gesamtspin j mit Projektion m bezeichne. Mit den Gleichungen (5.A.50)–(5.A.54

¹⁴Die Q_a transformieren sich unter Drehungen wie Felder, die ein Teilchen mit dem Spin $1/2$ und der Projektion a entlang der Quantisierungsachse vernichten. Daher transformieren sich die Q_a^* wie Felder, die ein solches Teilchen erzeugen und besitzen damit das gleiche Transformationsverhalten wie das Teilchen selbst. Präziser, $[J_i, Q_a] = -(1/2) \sum_b (\sigma_i)_{ab} Q_b$, also $[J_i, Q_a^*] = (1/2) \sum_b (\sigma_i)_{ba} Q_b^*$. Ein Spin- $1/2$ Teilchen im Zustand $|a\rangle$ transformiert sich zum Vergleich folgendermaßen: $J_i|a\rangle = (1/2) \sum_b (\sigma_i)_{ba} |b\rangle$.

und den Orthonormierungsrelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten läßt sich zeigen, daß diese Zustände adäquat normiert sind:

$$\langle j \pm 1/2, m | j \pm 1/2, m' \rangle = \delta_{mm'} , \quad \langle j \pm 1/2, m | j \mp 1/2, m' \rangle = 0 . \quad (5.A.55)$$

Folglich sind die Zustände $|j \pm 1/2, m\rangle$ von Null verschieden mit Ausnahme von $j = 0$, da dann kein Zustand $|j - 1/2, m\rangle$ existiert. Es können noch weitere Zustände durch zweifache Anwendung von Q^* auf $|j, m\rangle$ konstruiert werden. Da jedes Q_a^* mit sich selbst antikommutiert, kann der einzige weitere von Null verschiedene Zustand durch die Kombination $Q_{1/2}^* Q_{-1/2}^* = -Q_{-1/2}^* Q_{1/2}^*$ konstruiert werden. Dieser Operator kann auch als $(1/2)e_{ab}Q_a^*Q_b^*$ explizit rotationsinvariant notiert werden. Als zweites Spin-Multiplett erhalten wir

$$|j, m\rangle^b \stackrel{\text{def}}{=} (2M)^{-1} Q_{1/2}^* Q_{-1/2}^* |j, m\rangle , \quad (5.A.56)$$

das sich von $|jm\rangle$ dadurch unterscheidet, daß es nicht (5.A.51) erfüllt, sondern

$$Q_a^* |jm\rangle^b = 0 , \quad \forall m \in \{-j, -j+1, \dots, j\} , a = \pm 1/2 . \quad (5.A.57)$$

Wieder folgt aus (5.A.50)–(5.A.53), daß diese Zustände ebenfalls adäquat normiert sind:

$${}^b\langle j, m' | j, m \rangle^b = \delta_{m'm} , \quad \langle j, m' | j, m \rangle^b = 0 . \quad (5.A.58)$$

Die konstruierten Zustände spannen den Darstellungsraum der Supersymmetrie-Algebra auf. Die Orthonormalitätsrelationen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten erlauben es, (5.A.54) zu invertieren:

$$Q_a^* |j, m\rangle = (2M)^{1/2} \sum_{\pm} (1/2, j, j \pm 1/2 | m+a, a, m) |j \pm 1/2, m+a\rangle . \quad (5.A.59)$$

Aus Gleichung (5.A.50) folgt weiterhin, daß für jeden Zustand $|\Psi\rangle$ im Supermultiplett

$$\left[Q_a, Q_{\frac{1}{2}}^* Q_{-\frac{1}{2}}^* \right] |\Psi\rangle = 2M \sum_b e_{ab} Q_b^* |\Psi\rangle \quad (5.A.60)$$

gilt. Mit (5.A.51) und (5.A.56) folgt dann

$$\begin{aligned} Q_a |j, m\rangle^b &= \sum_b e_{ab} Q_b^* |j, m\rangle \\ &= (2M)^{1/2} \sum_b e_{ab} \sum_{\pm} (1/2, j, j \pm 1/2 | m+b, b, m) |j \pm 1/2, m+b\rangle . \end{aligned} \quad (5.A.61)$$

Mit (5.A.50), (5.A.51) und (5.A.54) folgt

$$Q_a |j \pm 1/2, m\rangle = (2M)^{1/2} (1/2, j, j \pm 1/2 | m, a, m-a) |j, m-a\rangle , \quad (5.A.62)$$

und mit (5.A.54), (5.A.40) und (5.A.56) ist

$$Q_a^* |j \pm 1/2, m\rangle = (2M)^{1/2} \sum_b e_{ab} (1/2, j, j \pm 1/2 | m, b, m-b) |j, m-b\rangle^b . \quad (5.A.63)$$

Die Gleichungen (5.A.51), (5.A.57), (5.A.59), und (5.A.61)–(5.A.63) erklären die Wirkung der fermionischen Generatoren auf alle Zustände im Supermultiplett.

Insbesondere erhalten wir für $j = 0$ als interessanten Spezialfall das kollabierte Supermultiplett

$$\begin{aligned} Q_a|0,0\rangle &= 0, & Q_a^*|0,0\rangle^b &= 0, \\ Q_a^*|0,0\rangle &= (2M)^{1/2}|1/2, a\rangle, & Q_a|0,0\rangle^b &= (2M)^{1/2}\sum_b e_{ab}|1/2, b\rangle, \\ Q_a|1/2, b\rangle &= (2M)^{1/2}\delta_{ab}|0,0\rangle, & Q_a^*|1/2, b\rangle &= (2M)^{1/2}e_{ab}|0,0\rangle^b. \end{aligned} \quad (5.A.64)$$

Dies ist das einfachste Supermultiplett von Zuständen beliebiger Masse: zwei spinlose Teilchen und ein Teilchen mit Spin 1/2.

Anhang B

Wir haben uns im Anhang A mit der $N = 1$ Supersymmetrie–Algebra vertraut gemacht und Implikationen für das Teilchenspektrum analysiert. In diesem Anhang wenden wir uns der Konstruktion von supersymmetrischen Feldtheorien zu (Wess und Bagger, 1992; Bailin und Love, 1994; Weinberg, 2000).

Supersymmetrische Feldtheorien

Die Feld–Supermultipletts wurden ursprünglich direkt konstruiert, d. h. durch wiederholte Anwendung der Jacobi–Identitäten, ganz ähnlich wie in der Konstruktion von Supermultipletts aus Einteilchen–Zuständen. Im Anhang C wird diese Methode zur Konstruktion von Supermultipletts demonstriert, die lediglich Skalare und Fermionen enthalten. Salam und Strathdee haben eine mächtige Methode (Salam und Strathdee, 1974; Ferrara, 1987) entwickelt, die die Konstruktion von Feld–Supermultipletts und von supersymmetrischen Wirkungen erheblich erleichtert. Dabei werden Supermultipletts aus Feldern in sogenannte *Superfelder* zusammengefaßt, die von Raum–Zeit–Koordinaten (gerade Koordinaten) und fermionischen Koordinaten (ungerade Koordinaten) abhängen¹⁵. Superfelder werden im nächsten Abschnitt eingeführt und in den folgenden Abschnitten zur Konstruktion von supersymmetrischen Feldtheorien verwandt. Wir beschränken die Darstellung wieder auf den Fall von $N = 1$ –Supersymmetrie.

¹⁵Das Rechnen mit Superfeldern erfordert Kenntnisse der Analysis auf Supermannigfaltigkeiten, die auch *Superanalysis* genannt wird, siehe zum Beispiel (Constantinescu und de Groot, 1994).

Allgemeine Superfelder

Die im letzten Abschnitt beschriebene direkte Konstruktion von Supermultipletts aus Feldern ist etwas mühsam, aber vor allem liefert sie kein Verfahren zur Konstruktion von supersymmetrischen Wirkungen. Hierfür muss nämlich erklärt werden, wie aus Produkten von Supermultipletts neue Supermultipletts konstruiert werden können. Die Konstruktion von supersymmetrischen Wirkungen wird durch den von Salam und Strathdee (1974) entwickelten Formalismus erheblich vereinfacht. Danach werden die Felder in allen Supermultipletts zu einem einzigen Superfeld zusammengefaßt.

Ähnlich wie der Viererimpuls P Translationen der Raum–Zeit–Koordinaten X generiert, können die vier Supersymmetrie–Generatoren Q und Q^* als Generatoren für Translationen der vier fermionischen c –Zahl Koordinaten betrachtet werden. Da wir Lorentz–invariante Wirkungen konstruieren wollen, fassen wir die fermionischen Supersymmetrie–Generatoren in einem vierkomponentigen Majorana–Spinor Q zusammen, entsprechend werden die fermionischen Superraum–Koordinaten in einem vierkomponentigen Majorana–Spinor θ zusammengefaßt. Translationen der fermionischen Koordinaten können nicht einfach durch $\partial/\partial\theta$ generiert werden (analog zu P), da die fermionischen Supersymmetrie–Generatoren von Null verschiedene Antikommutatoren besitzen. Salam und Strathdee fanden, daß die Supersymmetrie–Algebra erfüllt wäre, wenn für die Kommutatoren oder Antikommutatoren der Q s mit einem beliebigen bosonischen oder fermionischen Superfeld $S(x, \theta)$ gilt:

$$[Q, S] = i\mathcal{L}S, \quad (5.B.1)$$

wobei \mathcal{L} den Differentialoperator

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial\theta} + \gamma^\mu \theta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (5.B.2)$$

auf der Supermannigfaltigkeit mit den Koordinaten (x, θ) bezeichne. Mit $\bar{\theta} = \theta^T \gamma_5 \epsilon$ sind die Komponenten von \mathcal{L} explizit durch

$$\mathcal{L}_\alpha = \sum_\beta (\gamma_5 \epsilon)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_\beta} + \sum_\beta (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \theta_\beta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (5.B.3)$$

gegeben. Die von Salam und Strathdee gegebene Definition von \mathcal{L} erfüllt tatsächlich die Supersymmetrie–Algebra. Dazu berechnen wir zunächst

$$\{\mathcal{L}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\beta\} = (\gamma_5 \epsilon \gamma^\mu \gamma_5 \epsilon)_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (5.B.4)$$

Nun ist aber $\gamma^T = -\mathcal{C}\gamma\mathcal{C}^{-1}$, wobei $\mathcal{C} = -\gamma_5 \epsilon$ die Ladungskonjugations–Matrix bezeichne. Folglich stimmen beide Summanden auf der rechten Seite von (5.B.4) überein und wir erhalten

$$\{\mathcal{L}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\beta\} = 2(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (5.B.5)$$

Aus (5.B.5), (5.B.1) und den verallgemeinerten Jacobi-Identitäten folgt

$$\left[\left\{ Q_\alpha, \bar{Q}_\beta \right\}, S \right] = \left\{ \mathcal{L}_\alpha, \bar{\mathcal{L}}_\beta \right\} S = 2\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu S = -2i\gamma_{\alpha\beta}^\mu [P_\mu, S] . \quad (5.B.6)$$

Es ist üblich, die Kommutator- und Antikommutator-Beziehungen (5.B.1) als Variationen von S unter infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen zu schreiben. Aus (5.C.15), (5.B.1) und (5.B.2) folgt

$$\delta S = \bar{\alpha} \mathcal{L} S = -\bar{\alpha} \frac{\partial S}{\partial \theta} + \bar{\alpha} \gamma^\mu \theta \frac{\partial S}{\partial x^\mu} . \quad (5.B.7)$$

Die Ableitung nach den fermionischen (ungeraden) Koordinaten wirkt immer von links. Insbesondere ist M eine Linearkombination von 1, $\gamma_5 \gamma$ und γ_5 , für die $\bar{\theta} M \theta$ von Null verschieden ist. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\bar{\theta} M \theta) = 2M \theta . \quad (5.B.8)$$

Da die Komponenten von θ antikommutieren, verschwindet jedes Produkt von zwei gleichen Komponenten. Nun hat aber θ lediglich vier Komponenten, folglich ist jede Funktion von θ ein Polynom von der Ordnung $\mathcal{O}(\theta^4)$. Nun ist $\theta \otimes \theta$ durch eine Linearkombination von $\bar{\theta}\theta$, $\bar{\theta}\gamma_5\theta$ und $\bar{\theta}\gamma_5\theta$ gegeben. $\theta \otimes \theta \otimes \theta$ ist proportional zu $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)\theta$ und letztlich ist $\theta \otimes \theta \otimes \theta \otimes \theta$ zu $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2$ proportional. Als wichtiges Resultat erhalten wir, daß die allgemeinste Funktion der Koordinaten x und θ folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} S(x, \theta) = & C(x) - i\bar{\theta}\gamma_5\omega(x) - \frac{i}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\theta) M(x) - \frac{1}{2} (\bar{\theta}\theta) N(x) \\ & + \frac{i}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta) V^\mu(x) - i (\bar{\theta}\gamma_5\theta) \left(\bar{\theta} \left[\lambda(x) + \frac{1}{2} \not{\partial}\omega(x) \right] \right) \\ & - \frac{1}{4} (\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \left(D(x) + \frac{1}{2} \partial^2 C(x) \right) . \end{aligned} \quad (5.B.9)$$

Ist $S(x, \theta)$ ein Skalarfeld, so sind $C(x)$, $M(x)$, $N(x)$ und $D(x)$ auch skalare oder pseudoskalare Felder, $\omega(x)$ und $\lambda(x)$ sind vierkomponentige Spinorfelder und $V(x)$ ist ein Vektorfeld.

Als nächstes studieren wir das Verhalten von $S(x, \theta)$ unter Supersymmetrie-Transformationen und erhalten so die Transformationsgesetze für die Komponentenfelder in (5.B.9). Mit den Gleichungen (5.B.7) und (5.B.8) und den in (Weinberg, 2000) algebraischen Beziehungen für Majorana-Spinoren erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta S = & i\bar{\alpha}\gamma_5\omega + \left(\bar{\theta} [-\not{\partial}C + i\gamma_5 M + N - i\gamma_5 \not{V}] \alpha \right) \\ & - \frac{1}{2} i (\bar{\theta}\theta) (\bar{\alpha}\gamma_5 [\lambda + \not{\partial}\omega]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}i (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta) (\bar{\alpha}\gamma_\mu\lambda) + \frac{1}{2}i (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\nu\theta) (\bar{\alpha}\partial_\nu\omega) \\
& + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta) \left(\bar{\theta} \left[i\rlap{/}\partial M - \gamma_5\rlap{/}\partial N - i\partial^\mu\rlap{/}\Psi\gamma_\mu + \gamma_5 \left(D + \frac{1}{2}\partial^2 C \right) \right] \alpha \right) \\
& - \frac{1}{4}i (\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \left(\bar{\alpha}\gamma_5 \left[\rlap{/}\partial\lambda + \frac{1}{2}\partial^2\omega \right] \right) .
\end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit (5.B.9) folgen für die Terme bis einschließlich $\mathcal{O}(\theta^2)$ die Transformationsregeln für die Komponentenfelder

$$\delta C = i\bar{\alpha}\gamma_5\omega, \quad (5.B.10)$$

$$\delta\omega = (-i\gamma_5\rlap{/}\partial C - M + i\gamma_5 N + \rlap{/}\Psi)\alpha, \quad (5.B.11)$$

$$\delta M = -\bar{\alpha}[\lambda + \rlap{/}\partial\omega], \quad (5.B.12)$$

$$\delta N = i\bar{\alpha}\gamma_5[\lambda + \rlap{/}\partial\omega], \quad (5.B.13)$$

$$\delta V_\mu = \bar{\alpha}\gamma_\mu\lambda + \bar{\alpha}\partial_\mu\omega. \quad (5.B.14)$$

Für die Terme der Ordnungen $\mathcal{O}(\theta^3)$ und $\mathcal{O}(\theta^4)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\delta \left[\lambda + \frac{1}{2}\rlap{/}\partial\omega \right] &= \frac{1}{2} \left[-\rlap{/}\partial M - i\gamma_5\rlap{/}\partial N + \partial^\mu\rlap{/}\Psi\gamma_\mu + i\gamma_5 \left(D + \frac{1}{2}\partial^2 C \right) \right] \alpha, \\
\delta \left[D + \frac{1}{2}\partial^2 C \right] &= i \left(\bar{\alpha}\gamma_5 \left[\rlap{/}\partial\lambda + \frac{1}{2}\partial^2\omega \right] \right).
\end{aligned}$$

Kombinieren wir die letzten beiden Gleichungen mit den Transformationsregeln (5.B.10) und (5.B.11) für C und ω , so erhalten wir für die Komponentenfelder λ und D die wesentlich einfacheren Transformationsverhalten

$$\delta\lambda = \left(\frac{1}{2}[\partial_\mu\rlap{/}\Psi, \gamma^\mu] + i\gamma_5 D \right) \alpha, \quad (5.B.15)$$

$$\delta D = i\bar{\alpha}\gamma_5\rlap{/}\partial\lambda. \quad (5.B.16)$$

Der Vorteil des von Salam und Strathdee entwickelten Superfeld-Formalismus ist, daß aus gegebenen Supermultipletts leicht neue konstruiert werden können. Gegeben seien zwei Superfelder S_1 und S_2 , die beide (5.B.7) befriedigen. Für ihr Produkt $S \equiv S_1 S_2$ gilt

$$\begin{aligned}
\delta S &= (\delta S_1) S_2 + S_1 (\delta S_2) \\
&= ((\bar{\alpha}\mathcal{L}) S_1) S_2 + S_1 ((\bar{\alpha}\mathcal{L}) S_2) = (\bar{\alpha}\mathcal{L}) S.
\end{aligned} \quad (5.B.17)$$

Damit ist S selbst ein Superfeld. Es ist evident, daß eine Linearkombination von Superfeldern wieder ein Superfeld ist. Dasselbe gilt für Raum-Zeit-Ableitungen und komplexe Konjugation von Superfeldern. Allerdings ist nicht für jede Funktion $f(\theta)$ das Produkt $f(\theta)S(x, \theta)$ mit einem Superfeld $S(x, \theta)$ wieder ein Superfeld. Dasselbe gilt für die Differentiation eines Superfeldes nach den fermionischen Koordinaten.

Wir führen eine weitere Superderivation ein:

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial \theta} - \gamma^\mu \theta \frac{\partial}{\partial x^\mu} . \quad (5.B.18)$$

Der einzige Unterschied in den Definitionen von \mathcal{D} und \mathcal{L} ist das Vorzeichen vor den Raum–Zeit–Ableitungen. Dies führt zum verschwinden des Antikommutators zwischen beiden Superderivationen:

$$\{\mathcal{D}, \mathcal{L}\} = 0 . \quad (5.B.19)$$

Sei nun α wieder ein Majorana–Spinor. Dann kommutiert $\bar{\alpha}\mathcal{L}$ mit \mathcal{D} . Für jedes Superfeld $S(x, \theta)$ gilt somit

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D} S &\equiv -i [\bar{\alpha} Q, \mathcal{D} S] = -i \mathcal{D} [\bar{\alpha} Q, S] \\ &= \mathcal{D} (\bar{\alpha} \mathcal{L}) S = (\bar{\alpha} \mathcal{L}) \mathcal{D} S . \end{aligned} \quad (5.B.20)$$

Also ist $\mathcal{D} S$ auch ein Superfeld. Wir finden als wichtiges Resultat: *Jedes Polynom von Superfeldern und ihren Superderivationen ist ein Superfeld.*

Es ist evident, daß ein Superfeld auch aus Raum–Zeit–Ableitungen eines anderen Superfeldes konstruiert werden kann, da sich diese aus höheren Superderivationen automatisch ergeben. Da der einzige Unterschied zwischen \mathcal{D} und \mathcal{L} der Vorzeichenunterschied vor ∂ ist, ist der Antikommutator der \mathcal{D} 's bis auf ein Vorzeichen gleich dem der \mathcal{L} 's:

$$\{\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}\} = -2\gamma \cdot \partial . \quad (5.B.21)$$

Wir kommen nun zur Konstruktion von supersymmetrischen Wirkungen im Superfeld–Formalismus. Aus dem Antikommutator (5.B.5) folgt, daß es keine nicht–konstante supersymmetrische Lagrange–Dichte gibt. Auch wenn die Lagrange–Dichte nicht supersymmetrisch ist, kann die Wirkung supersymmetrisch sein. Dies ist dann der Fall, wenn die transformierte Lagrange–Dichte als Divergenz geschrieben werden kann und damit nicht zur transformierten Wirkung beiträgt. Die Transformationsregeln (5.B.10)–(5.B.16) für die Komponentenfelder zeigen, daß ohne zusätzliche Restriktionen an ein allgemeines Superfeld die einzige Superfeldkomponente, deren supersymmetrische Variation eine Divergenz gibt, die D –Komponente ist. Damit die D –Komponente von einem beliebigen Superfeld ein Skalar ist, muß das Superfeld selbst ein Skalar sein. Daher kann eine supersymmetrische Wirkung ohne weitere Einschränkungen an das allgemeine Superfeld lediglich ein Integral über den D –Term eines skalaren Superfeldes Λ sein:

$$\mathcal{S} = \int \text{vol}^{(4)} [\Lambda]_D . \quad (5.B.22)$$

Allerdings wäre keine Wirkung dieser Art physikalisch befriedigend, wenn nicht bestimmte Einschränkungen an die zur Konstruktion verwendeten Superfelder gestellt

werden. Für ein allgemeines Superfeld $S(x, \theta)$ ist die einzige bilineare Wirkung mit höchstens zweiten Ableitungen der Komponentenfelder von der Form

$$\mathcal{S}_0 \sim \int \text{vol}^{(4)} [S^* S]_D . \quad (5.B.23)$$

Es bereitet keine Schwierigkeiten die D -Komponente dieses Produktes von Superfeldern zu berechnen:

$$\begin{aligned} [S^* S]_D &= -(\partial^\mu C^*) (\partial_\mu C) + (1/2) (\partial^\mu \bar{\omega}) \gamma_\mu \omega \\ &\quad + C^* D + D^* C - \bar{\omega} \lambda - \bar{\lambda} \omega \\ &\quad + M^* M + N^* N - |V|^2 . \end{aligned} \quad (5.B.24)$$

Die Terme quadratisch in C oder ω sehen vielversprechend aus und können als kinetische Lagrange-Dichten für masselose Felder mit Spin-0 und Spin-1/2 interpretiert werden. Problematisch sind die Terme mit D oder λ , da sie weder als kinetische noch als Wechselwirkungs-Lagrange-Dichte interpretiert werden können. Es zeigt sich sogar, daß die Quantisierung dieser Terme C und ω sogar zum Verschwinden bringt. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, daß allgemeinen Superfeldern sehr wohl Einschränkungen auferlegt werden können, die zu physikalisch sinnvollen Theorien führen. Insbesondere erlauben diese eingeschränkten Superfelder die Konstruktion von supersymmetrischen Wirkungen, die nicht ausschließlich D -Komponenten von Funktionen von Superfeldern sind.

Chirale Superfelder

Im letzten Abschnitt haben wir besprochen, daß die Existenz der D - und λ -Komponentenfelder eines Superfeldes die Konstruktion von physikalisch sinnvollen Lagrange-Dichten verhindert. Gegeben sei daher ein Superfeld mit den Einschränkungen

$$D \equiv \lambda \equiv 0 . \quad (5.B.25)$$

Diese Einschränkung ist nur dann sinnvoll, wenn sie unter Supersymmetrie-Transformationen bestehen bleibt. Aus (5.B.16) und (5.B.15) folgt, daß die Einschränkung $D \equiv 0$ invariant unter Supersymmetrie-Transformationen ist, wenn $\lambda \equiv 0$ gilt. Letztere ist nur dann invariant, wenn außerdem $dV = 0$ und damit

$$V(x) = dZ(x) . \quad (5.B.26)$$

Gleichung (5.B.14) mit $\lambda = 0$ zeigt, daß diese Bedingung unter Supersymmetrie-Transformationen erhalten bleibt. Die Komponenten dieses sogenannten reduzierten Superfeldes, d. h. mit den durch (5.B.25) und (5.B.26) auferlegten Einschränkungen,

verhalten sich unter Supersymmetrie-Transformationen wie folgt:

$$\delta C = i\bar{\alpha} \gamma_5 \omega , \quad (5.B.27)$$

$$\delta \omega = (-i\gamma_5 \not{\partial} C - M + i\gamma_5 N + \not{\partial} Z) \alpha , \quad (5.B.28)$$

$$\delta M = -\bar{\alpha} \not{\partial} \omega , \quad (5.B.29)$$

$$\delta N = i\bar{\alpha} \gamma_5 \not{\partial} \omega , \quad (5.B.30)$$

$$\delta Z = \bar{\alpha} \omega . \quad (5.B.31)$$

Ein Vergleich mit (5.C.18) zeigt, daß dies mit dem Supermultiplett übereinstimmt, das wir in Abschnitt X durch direkte Konstruktion gewonnen haben, wenn die Identifikationen

$$C = A , \quad \omega = -i\gamma_5 \psi , \quad M = G , \quad N = -F , \quad Z = B . \quad (5.B.32)$$

vorgenommen werden. Manche Autoren nennen Superfelder mit den Einschränkungen (5.B.25) und (5.B.26) *chiral*. Andere Autoren reservieren diesen Ausdruck für Felder, die proportional zu $1 \pm \gamma_5$ sind, in Analogie zur Terminologie bei Dirac-Spinoren. Wir verwenden im Weiteren die erst genannte Sprechweise. Dies kann folgendermaßen begründet werden: jeder Dirac-Spinor kann in eine Summe von Dirac-Spinoren zerlegt werden, die links- und rechtshändig sind. Es ist also keine weitere Namensgebung für diese Summe notwendig. Im Gegensatz hierzu können ausschließlich Superfelder mit den Einschränkungen (5.B.25) und (5.B.26) als Summe von links- und rechtshändigen Superfeldern geschrieben werden.

Wir notieren chirale Superfelder mit $X(x, \theta)$ und ihre Komponentenfelder mit A, B, F, G und ψ anstatt mit C, Z, N, M und ω , um sie von allgemeinen Superfeldern $S(x, \theta)$ zu unterscheiden. Mit den Gleichungen (5.B.25), (5.B.26) und (5.B.32) in (5.B.9) erhalten wir für ein allgemeines chirales Superfeld

$$\begin{aligned} X(x, \theta) = & A(x) - \bar{\theta} \psi(x) + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\theta) F(x) - \frac{i}{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) G(x) \\ & + \frac{i}{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \gamma^\mu \theta) \partial_\mu B(x) + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \gamma_5 \not{\partial} \psi(x)) \\ & - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2 \partial^2 A(x) . \end{aligned} \quad (5.B.33)$$

Für die Zerlegung des allgemeinen chiralen Superfeldes (5.B.33) in links- und rechtshändige Superfelder definieren wir neue Komponentenfelder durch

$$\phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A + iB}{\sqrt{2}} , \quad \psi_L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi , \quad \mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F - iG}{\sqrt{2}} , \quad (5.B.34)$$

$$\tilde{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A - iB}{\sqrt{2}} , \quad \psi_R \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi , \quad \tilde{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F + iG}{\sqrt{2}} . \quad (5.B.35)$$

Das allgemeine chirale Superfeld kann nun folgendermaßen in Superfelder zerlegt werden:

$$X(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\Phi(x, \theta) + \tilde{\Phi}(x, \theta) \right], \quad (5.B.36)$$

mit dem *linkshändigen* Superfeld

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta) &= \phi(x) - \sqrt{2}\bar{\theta} \psi_L(x) + \mathcal{F}(x) \left(\bar{\theta} \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \theta \right) \right) + \frac{1}{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \gamma^\mu \theta) \partial_\mu \phi(x) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \not{\partial} \psi_L(x)) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2 \partial^2 \phi(x) \end{aligned} \quad (5.B.37)$$

und dem *rechtshändigen* Superfeld

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(x, \theta) &= \tilde{\phi}(x) - \sqrt{2}\bar{\theta} \psi_R(x) + \tilde{\mathcal{F}}(x) \left(\bar{\theta} \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \theta \right) \right) - \frac{1}{2} (\bar{\theta} \gamma_5 \gamma^\mu \theta) \partial_\mu \tilde{\phi}(x) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta) (\bar{\theta} \not{\partial} \psi_R(x)) - \frac{1}{8} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2 \partial^2 \tilde{\phi}(x). \end{aligned} \quad (5.B.38)$$

Die Komponentenfelder von Φ und $\tilde{\Phi}$ spannen jeweils den Darstellungsraum der Supersymmetrie–Algebra auf:

$$\delta \psi_L = \sqrt{2} (\partial^\mu \phi) \gamma_\mu \alpha_R + \sqrt{2} \mathcal{F} \alpha_L, \quad (5.B.39)$$

$$\delta \mathcal{F} = \sqrt{2} \bar{\alpha}_L \not{\partial} \psi_L, \quad (5.B.40)$$

$$\delta \phi = \sqrt{2} \bar{\alpha}_R \psi_L, \quad (5.B.41)$$

$$\delta \psi_R = \sqrt{2} (\partial^\mu \tilde{\phi}) \gamma_\mu \alpha_L + \sqrt{2} \tilde{\mathcal{F}} \alpha_R, \quad (5.B.42)$$

$$\delta \tilde{\mathcal{F}} = \sqrt{2} \bar{\alpha}_R \not{\partial} \psi_R, \quad (5.B.43)$$

$$\delta \tilde{\phi} = \sqrt{2} \bar{\alpha}_L \psi_R. \quad (5.B.44)$$

Das Superfeld Φ hat als Komponentenfelder zwei komplexe bosonische Felder ϕ und \mathcal{F} , oder vier unabhängige bosonische Komponenten und ein Majorana–Fermion ψ , oder vier unabhängige fermionische Komponenten. Dies ist ein Spezialfall des allgemeinen Satzes, daß jeder Darstellung der Supersymmetrie–Algebra eine gleiche Anzahl von unabhängigen bosonischen wie fermionischen Komponenten besitzen muß.

Ob ein Superfeld linkshändig (rechtshändig) ist, hängt also entscheidend davon ab, welche Abhängigkeiten zugelassen sind. Daraus folgt, daß jede Funktion eines linkshändigen (rechtshändigen) Superfeldes wieder ein linkshändiges (rechtshändiges) Superfeld ist. Dies trifft allerdings nicht auf die komplexe Konjugation oder auf Raum–Zeit–Ableitungen von linkshändigen (rechtshändigen) Superfeldern zu.

Die Existenz von linkshändigen (rechtshändigen) Superfeldern in Feldtheorien erlaubt neuartige Konstruktionen von supersymmetrischen Wirkungen. Wie Gleichung

(5.B.40) zeigt, transformiert sich \mathcal{F} unter Supersymmetrie- Transformationen zu einer Ableitung, so daß das Raum-Zeit-Integral über den \mathcal{F} -Term eines linkshändigen (rechtshändigen) Superfeldes invariant unter Supersymmetrie ist. Wir machen daher für die Wirkung einer supersymmetrischen Feldtheorie den Ansatz

$$\mathcal{S} = \int \text{vol}^{(4)} \{ [f]_{\mathcal{F}} + [f]_{\mathcal{F}}^* + [K]_D \} , \quad (5.B.45)$$

wobei f und K beliebige linkshändige Superfelder seien.

Die Funktion f ist auf alle Fälle linkshändig, wenn sie lediglich von linkshändigen Feldern abhängt, aber nicht von komplex konjugierten rechtshändigen Feldern. Superderivationen von chiralen Superfeldern sind nicht chiral. Andererseits liefern zwei rechtshändige Ableitungen auf ein Superfeld S , das kein linkshändiges Superfeld ist, ein linkshändiges Superfeld

$$\mathcal{D}_R \otimes (\mathcal{D}_R \otimes \mathcal{D}_R S) = 0 . \quad (5.B.46)$$

Jedoch ergibt jeder so konstruierte \mathcal{F} -Term der Funktion f einen Beitrag in der Wirkung, der auch durch einen D -Term eines Superfeldes generiert werden kann. Da die Superderivationen antikommutieren, ist das allgemeinste, durch zweifache Wirkung einer rechtshändigen Superderivation auf ein Superfeld konstruierte, linkshändige Superfeld von der Gestalt $(\mathcal{D}_R^T \epsilon \mathcal{D}_R) S$. Ist eines der linkshändigen Superfelder in f von dieser Gestalt, dann gilt $f = (\mathcal{D}_R^T \epsilon \mathcal{D}_R) h$, wobei h ein Superfeld sei. Andererseits ist aber

$$(\mathcal{D}_R^T \epsilon \mathcal{D}_R) (\theta_R^T \epsilon \theta_R) = -4 . \quad (5.B.47)$$

Abgesehen von den Raum-Zeit-Ableitungen, die ohnehin keinen Beitrag zur Wirkung liefern, ist $(\mathcal{D}_R^T \epsilon \mathcal{D}_R) h$ der Koeffizient vor $-(\theta_R^T \epsilon \theta_R)/4$ in h . Nun ist aber wiederum, abgesehen von Raum-Zeit-Ableitungen, $[f]_{\mathcal{F}}$ der Koeffizient vor $(\theta_L^T \epsilon \theta_L)$ in f und damit ist $[(\mathcal{D}_R^T \epsilon \mathcal{D}_R) h]_{\mathcal{F}}$ gleich dem Koeffizienten vor $-(\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2/4$ in h . Folglich ist

$$\int \text{vol}^{(4)} [(\mathcal{D}_R^T \epsilon \mathcal{D}_R) h]_{\mathcal{F}} = 2 \int \text{vol}^{(4)} [h]_D . \quad (5.B.48)$$

Damit ist es nicht notwendig, linkshändige Superfelder der Gestalt $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} S$ in f zu implementieren, da alle Terme dieser Gestalt in der Menge aller möglichen D -Terme bereits enthalten sind. Läßt sich f lediglich als Funktion von elementaren linkshändigen Superfeldern schreiben, die keine Superderivationen oder Raum-Zeit-Ableitungen von anderen Superfeldern sind, so heißt f *Superpotential*.

Die Funktion K dagegen ist im allgemeinen eine reelle Funktion von den linkshändigen Superfeldern¹⁶ und den dazu gehörigen komplex konjugierten rechtshändigen Superfeldern, und hängt außerdem von Superderivationen und Raum-Zeit-Ableitungen ab. K heißt *Kahler-Potential*.

¹⁶Jedes rechtshändige Feld kann durch komplexe Konjugation eines linkshändigen Superfeldes gewonnen werden. Deshalb bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn K lediglich von linkshändigen Superfeldern und deren komplex Konjugierten abhängt.

Renormierbare Chirale Superfeldtheorien

Wir arbeiten nun einige Details einer allgemeinen renormierbaren chiralen Superfeldtheorie aus. Diese Theorie wird in der supersymmetrischen Erweiterung des Standard-Modelles enthalten sein.

Die Lagrange-Dichte jeder renormierbaren Quantenfeldtheorie kann nur aus Operatoren mit Massendimension kleiner oder gleich vier bestehen. Aus (5.B.5) folgt, daß \mathcal{L} und damit auch $\partial/\partial\theta$ die Massendimension $1/2$ besitzt, also hat \mathcal{D} die Massendimension $1/2$ und θ die Massendimension $-1/2$. Die \mathcal{F} - und \mathcal{D} -Anteile eines Superfeldes S sind Koeffizienten vor Ausdrücken der Ordnung $\mathcal{O}(\theta^2)$ und $\mathcal{O}(\theta^4)$. Sei $m(S)$ die Massendimension von S . Dann gilt also $m([S]_{\mathcal{F}}) = m(S) + 1$ und $m([S]_{\mathcal{D}}) = m(S) + 2$. Als wichtiges Resultat erhalten wir, daß die Funktionen f und K in (5.B.45) in einer renormierbaren Theorie aus Operatoren mit einer maximalen Massendimension von drei und zwei bestehen.

Die Massendimension eines elementaren¹⁷ skalaren Superfeldes Φ ist die von einem elementaren skalaren Feld, also $m(\Phi) = 1$. Folglich kann f höchstens aus drei Faktoren Φ und / oder Vierergradienten und / oder zwei Superderivationen \mathcal{D} bestehen. Wie im vorangegangenen Abschnitt besprochen, kann jeder linkshändige Ausdruck in f , der Superderivationen enthält, durch einen entsprechenden Ausdruck in K ersetzt werden, so daß in der Konstruktion von f von Superderivationen abgesehen werden kann. Außerdem kann auch von Raum-Zeit-Ableitungen abgesehen werden, da diese durch Superderivationen generiert werden können. Folglich kann $f(\Phi)$ maximal ein kubisches Polynom in Φ sein, das weder Superderivationen noch Raum-Zeit-Ableitungen enthält.

Ähnlich kann gezeigt werden, daß in einer renormierbaren Feldtheorie K maximal eine quadratische Funktion von Φ und Φ^* sein kann und wiederum alle Derivationen auf Superfelder vernachlässigt werden können. Jedes K , das nur eine Funktion von Φ oder von Φ^* ist, wäre ein chirales Superfeld. Chirale Superfelder haben aber per Definitionem keine D -Anteile. Folglich existieren nur von Null verschiedene $[K]_D$, wenn diese Funktionen von Φ und Φ^* sind. K ist somit von der Form

$$K(\Phi, \Phi^*) = \sum_{mn} g_{mn} \Phi_m^* \Phi_n, \quad (5.B.49)$$

wobei die konstanten Koeffizienten die hermitesche Matrix g bilden.

Für die Bestimmung des D -Anteils von K berechnen wir zunächst den $\mathcal{O}(\theta^4)$ Ausdruck in $\Phi_n^* \Phi^m$. Es stellt sich heraus, daß die gesamte θ - Abhängigkeit in dem Vorfaktor $(\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2$ zusammengefaßt werden kann:

$$[\Phi_n^* \Phi_m]_{\theta^4} = -\frac{1}{4} (\bar{\theta} \gamma_5 \theta)^2 \left[\frac{1}{2} \phi_n^* \partial^2 \phi_m + \frac{1}{2} (\partial^2 \phi_m^*) \phi_n \right]$$

¹⁷Ein Feld heißt hier wieder *elementar*, wenn es nicht als Derivation eines anderen Feldes geschrieben werden kann.

$$\begin{aligned}
 & -\overline{\psi}_n \gamma^\mu \partial_\mu \psi_m + (\partial_\mu \overline{\psi}_n) \gamma^\mu \psi_m \\
 & \left. 2\mathcal{F}_n^* \mathcal{F}_m - (\partial^\mu \phi_n^*) (\partial_\mu \phi_m) \right]. \quad (5.B.50)
 \end{aligned}$$

Der D -Anteil eines Superfeldes ist nun der Koeffizient vor $-(1/4)(\overline{\theta}\gamma_5\theta)^2$, von dem $(1/2)\partial^2$, angewendet auf den von θ unabhängigen Ausdruck, subtrahiert wird. Also,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} [K(\Phi, \Phi^*)]_D &= \sum_{nm} g_{nm} \left[-(\partial^\mu \phi_n^*) (\partial_\mu \phi_m) + \mathcal{F}_n^* \mathcal{F}_m \right. \\
 & \left. -\frac{1}{2} \overline{\psi}_{nL} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{mL} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \overline{\psi}_{nL}) \gamma^\mu \psi_{mL} \right]. \quad (5.B.51)
 \end{aligned}$$

Wir wollen als nächstes die Matrix g in die Definition der Superfelder Φ subsumieren. Dazu führen wir neue Superfelder Φ' ein, die durch $\Phi = N\Phi'$ definiert werden. Dann können wir immer noch eine Gleichung der Gestalt (5.B.49) notieren, allerdings mit einer transformierten Koeffizientenmatrix $g' = N^\dagger g N$. Damit die neuen Superfelder die richtige Algebra erfüllen, muß die hermitesche Matrix g positiv-definit sein. Dann kann aber N so gewählt werden, daß $g' = 1$ gilt. Wir unterdrücken im weiteren den Hochstrich und finden K in Abhängigkeit der neuen Superfelder

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} [K(\Phi, \Phi^*)]_D &= \sum_n \left[-(\partial^\mu \phi_n^*) (\partial_\mu \phi_n) + \mathcal{F}_n^* \mathcal{F}_n \right. \\
 & \left. -\frac{1}{2} \overline{\psi}_{nL} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{nL} + \frac{1}{2} (\partial_\mu \overline{\psi}_{nL}) \gamma^\mu \psi_{nL} \right]. \quad (5.B.52)
 \end{aligned}$$

Die ϕ und ψ enthaltenden Ausdrücke in (5.B.52) sind die korrekten kinetischen Lagrange-Dichten für komplexe Skalarfelder und Majorana-Spinorfelder.

Für die Berechnung des \mathcal{F} -Anteils in f ist es günstig, eine Darstellung dieser Superfelder zu wählen, die deren Abhängigkeit von θ_L und θ_R explizit macht. Wir definieren

$$x_\pm \stackrel{\text{def}}{=} x \pm \theta_R^T \epsilon \gamma \theta_L \quad (5.B.53)$$

und erhalten für die linkshändigen Superfelder (5.B.37) und rechtshändigen Superfelder (5.B.38) die Darstellung

$$\Phi(x, \theta) = \phi(x_+) - \sqrt{2} \theta_L \epsilon \psi_L(x_+) + \mathcal{F}(x_+) \theta_L^T \epsilon \theta_L, \quad (5.B.54)$$

$$\tilde{\Phi}(x, \theta) = \tilde{\phi}(x_-) + \sqrt{2} \theta_R \epsilon \psi_R(x_-) - \tilde{\mathcal{F}}(x_-) \theta_R^T \epsilon \theta_R. \quad (5.B.55)$$

Die Entwicklung von $\phi(x_+)$ und $\tilde{\phi}(x_-)$ in Potenzen von $x - x_\pm$ endet mit Ausdrücken in quadratischer Ordnung, die Entwicklung von $\psi_{L,R}(x_\pm)$ endet in erster Ordnung und die Entwicklung von $\mathcal{F}(x_+)$ und $\tilde{\mathcal{F}}(x_-)$ endet in nullter Ordnung. Alle Ausdrücke höherer Ordnung besitzen drei und mehr Faktoren θ_L oder θ_R und tragen daher nicht zu (5.B.54) und (5.B.55) bei.

Da der \mathcal{F} -Anteil in f als Koeffizient vor $\theta_L^T \epsilon \theta_L$ auftritt, berechnen wir f bis einschließlich zweiter Ordnung in θ_L :

$$\begin{aligned} [f(\Phi(x, \theta))]_{\theta_L} &= \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\phi(x))}{\partial \phi_n(x) \partial \phi_m(x)} (\theta_L^T \epsilon \psi_{nL}(x)) (\theta_L^T \epsilon \psi_{mL}(x)) \\ &\quad + \sum_n \frac{\partial f(\phi(x))}{\partial \phi_n(x)} \mathcal{F}_n(x) (\theta_L^T \epsilon \theta_L) . \end{aligned} \quad (5.B.56)$$

In der Entwicklung wurde x_+ durch x ersetzt, da $\theta_R^T \epsilon \gamma \theta_L$, multipliziert mit zwei Faktoren θ_L , verschwindet. Der erste Ausdruck auf der rechten Seite kann mit

$$(\theta_L^T \epsilon \psi_{nL}(x)) (\theta_L^T \epsilon \psi_{mL}(x)) = -\frac{1}{2} ((\bar{\psi}_n)_L \psi_{mL}) (\theta_L^T \epsilon \theta_L) \quad (5.B.57)$$

weiter vereinfacht werden. Der Koeffizient vor $\theta_L^T \epsilon \theta_L$ ist der \mathcal{F} -Anteil

$$[f(\Phi)]_{\mathcal{F}} = -\frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\phi_n)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} (\bar{\psi}_{nL} \psi_{mL}) + \sum_n \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \mathcal{F}_n . \quad (5.B.58)$$

Die vollständige Lagrange-Dichte ist die Summe von (5.B.52), (5.B.58) und dem komplex konjugierten von (5.B.58):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_n \left[-(\partial^\mu \phi_n^*) (\partial_\mu \phi_n) + \mathcal{F}_n^* \mathcal{F}_n \right. \\ &\quad \left. -\frac{1}{2} (\bar{\psi}_{nL} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{nL}) + \frac{1}{2} ((\partial_\mu \bar{\psi}_{nL}) \gamma^\mu \psi_{nL}) \right] \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} (\bar{\psi}_{nL} \psi_{mL}) - \frac{1}{2} \sum_{nm} \left(\frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right)^* (\bar{\psi}_{nL} \psi_{mL})^* \\ &\quad + \sum_n \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \mathcal{F}_n + \sum_n \left(\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \right)^* \mathcal{F}_n^* . \end{aligned} \quad (5.B.59)$$

Die Wirkung ist quadratisch in den Hilfsfeldern \mathcal{F}_n mit konstanten Koeffizienten vor dem Ausdruck $|\mathcal{F}|^2$. Folglich können die Hilfsfelder durch Variation der Lagrange-Dichte (5.B.59) nach den Hilfsfeldern eliminiert werden. Die Lagrange-Dichte wird stationär für

$$\mathcal{F}_n = - \left(\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \right)^* . \quad (5.B.60)$$

Einsetzen in die Lagrange-Dichte (5.B.59) liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_n \left[-(\partial^\mu \phi_n^*) (\partial_\mu \phi_n) - \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{nL} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_{nL}) + \frac{1}{2} ((\partial_\mu \bar{\psi}_{nL}) \gamma^\mu \psi_{nL}) \right] \\ &\quad -\frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} (\bar{\psi}_{nL} \psi_{mL}) - \frac{1}{2} \sum_{nm} \left(\frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right)^* (\bar{\psi}_{nL} \psi_{mL})^* \\ &\quad - \sum_n \left(\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \right)^* \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} . \end{aligned} \quad (5.B.61)$$

Damit ist die potentielle Energie der skalaren Felder durch $V(\phi) = \sum_n |\partial f(\phi)/\partial\phi_n|^2$ gegeben.

Die durch die Elimination (5.B.60) der Hilfsfelder erhaltene Wirkung ist nicht mehr invariant unter Supersymmetrie-Transformationen der Felder ψ_{nL} und ϕ_n . Das ist klar, da (5.B.60) sich nicht mehr nach $\delta\mathcal{F}_n = \sqrt{2} \bar{\alpha}_L \not{\partial} \psi_{nL}$ transformiert. Aus demselben Grund sind auch die Kommutatoren der Supersymmetrie-Transformationen von ϕ_n und ψ_{nL} nicht mehr durch die Antikommutatoren der Supersymmetrie-Generatoren gegeben, d. h. sie bilden auch keine Darstellung der Supersymmetrie-Algebra. Dies ist aber kein Widerspruch zur Existenz von Operatoren Q , die die Supersymmetrie-Algebra erfüllen und auch Supersymmetrie-Transformationen generieren. Der Kommutator von $-i\bar{\alpha}Q$ mit einem beliebigen Quantenfeld ϕ_n oder ψ_{nL} im Heisenberg-Bild generiert nämlich eine Supersymmetrie-Transformation mit dem Kleinheitsparameter α . Sei \mathcal{F}_n durch (5.B.60) gegeben. Dann ist der Kommutator von $-i\bar{\alpha}Q$ mit \mathcal{F}_n tatsächlich durch $\delta\mathcal{F}_n = \sqrt{2} \bar{\alpha}_L \not{\partial} \psi_{nL}$ gegeben, weil im Heisenberg-Bild ψ_{nL} der Bewegungsgleichung

$$\not{\partial}\psi_{nL} = - \sum_m \left(\frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial\phi_n \partial\phi_m} \right)^* \psi_{mR}, \quad (5.B.62)$$

folgt. Außerdem erfüllen auch die transformierten Quantenfelder die Superalgebra, wenn die Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden.

Eichinvariante Wirkungen für Chirale Superfelder

Die Theorien der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen sind allesamt quantisierte Eichtheorien. Eine realistische supersymmetrische Erweiterung der bekannten Eichtheorien muß daher invariant gegenüber Supersymmetrie- und bestimmten Eichtransformationen sein.

Gegeben seien Abelsche oder nicht-Abelsche Eichgruppen, unter denen sich der Supersymmetrie-Generator Q invariant transformiert¹⁸. Jedes Komponentenfeld in einem Supermultiplett muß sich auf die gleiche Art und Weise unter der Eichgruppe transformieren. Insbesondere gilt für ein linkshändiges Superfeld

$$\begin{pmatrix} \phi_n(x) \\ \psi_{nL}(x) \\ \mathcal{F}_n(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \sum_m \left[\exp \left(i \sum_A \Lambda^A(x) t_A \right) \right]_{nm} \begin{pmatrix} \phi_m(x) \\ \psi_{mL}(x) \\ \mathcal{F}_m(x) \end{pmatrix}. \quad (5.B.63)$$

Hierbei bezeichnen die t_A hermitesche Matrizen, die die Algebra der Eichgruppe darstellen und $\Lambda^A(x)$ bezeichnen reelle Funktionen der Raum-Zeit-Koordinaten, die die Eichgruppe parametrisieren.

¹⁸ $N = 1$ Supersymmetrie hat nur einen Generator (Majorana-Spinor), der somit nur die triviale Darstellung einer halbeinfachen Eichgruppe aufspannen kann.

Das linkshändige Superfeld (5.B.37) beinhaltet Ableitungen von Komponentenfeldern, so daß sein Transformationsverhalten unter der Eichgruppe komplizierter als (5.B.63) ist. In Abhängigkeit von θ_L und x_+ ist dies aber nicht der Fall und das Superfeld transformiert sich folgendermaßen:

$$\Phi_n(x, \theta) \longrightarrow \sum_m \left[\exp \left(i \sum_A \Lambda^A(x) t_A \right) \right]_{nm} \Phi_m(x, \theta). \quad (5.B.64)$$

Alle Ausdrücke in der Wirkung, die ausschließlich von linkshändigen Superfeldern und nicht von deren Ableitungen oder komplex Konjugierten abhängen, wie der \mathcal{F} -Anteil $\int \text{vol}^{(4)} [f(\Phi)]_{\mathcal{F}}$, sind invariant unter den lokalen Eichtransformationen (5.B.64), vorausgesetzt sie sind invariant unter den entsprechenden globalen Transformationen. Die Notwendigkeit, Eichfelder in renormierbare Theorien chiraler Superfelder einzuführen, rührt her von den D -Anteilen der Wirkung, die Produkte von Φ und Φ^* beinhalten. Da die Matrizen t_A hermiteisch sind, folgt

$$\Phi_n^\dagger(x, \theta) \longrightarrow \sum_m \Phi_m^\dagger(x, \theta) \left[\exp \left(-i \sum_A \Lambda^A(x_+)^* t_A \right) \right]_{mn}. \quad (5.B.65)$$

Das Problem besteht in dem Unterschied zwischen $\Lambda(x_+)^* = \Lambda(x_-)$ und $\Lambda(x_+)$. Daher ist keine Funktion von Φ und Φ^\dagger invariant unter lokalen Eichtransformationen. Wegen des Unterschiedes zwischen x_+ und x_- sind wir gezwungen, einen Zusammenhang $\Gamma(x, \theta)$ mit dem Transformationsverhalten

$$\Gamma(x, \theta) \longrightarrow \exp \left(+i \sum_A \Lambda^A(x_+)^* t_A \right) \Gamma(x, \theta) \exp \left(-i \sum_A \Lambda^A(x_+) t_A \right) \quad (5.B.66)$$

herzustellen. Jede global eichinvariante Funktion von Φ und $\Phi^\dagger \Gamma$, die keine Ableitungen oder hierzu komplex konjugierte Ausdrücke beinhaltet, ist auch lokal eichinvariant. Die eichinvariante Version $(\Phi^\dagger \Gamma \Phi)_D$ des D -Anteils in der im letzten Abschnitt konstruierten Lagrange-Dichte dient als offensichtliches Beispiel.

Jede sich nach (5.B.66) transformierende Funktion kann als Zusammenhang zur Konstruktion von eichinvarianten Lagrange-Dichten chiraler Superfelder benutzt werden. Für Rechnungen ist es nützlich, Γ durch Felder auszudrücken, deren Verhalten unter Eichtransformationen nicht von einer speziellen Darstellung der Algebra der Eichgruppe abhängen, unter der sich das chirale Superfeld transformiert. Wir wählen daher

$$\Gamma(x, \theta) = \exp \left(-2 \sum_A t_A V^A(x, \theta) \right), \quad (5.B.67)$$

wobei V^A eine Menge von reellen Superfelder sind, die nicht von der Darstellung der Algebra abhängen.

Es gibt noch eine weitere Symmetrie supersymmetrischer Eichtheorien, die wir zur Konstruktion von V^A ausnutzen: Gegeben sei eine wie weiter oben spezifizierte Funktion von Φ und $\Phi^\dagger \Gamma$, die unter globalen Eichtransformationen invariant ist. Dann

ist sie nicht nur unter den lokalen Eichtransformationen (5.B.64)–(5.B.66) invariant, sondern auch unter einer größeren Gruppe erweiterter Eichtransformationen

$$\Phi_{nL}(x, \theta) \longrightarrow \sum_m \left[\exp \left(i \sum_A t_A \Omega^A(x, \theta) \right) \right]_{nm} \Phi_{mL}(x, \theta) \quad (5.B.68)$$

und

$$\Gamma(x, \theta) \longrightarrow \exp \left(-i \sum_A t_A \Omega^A(x, \theta) \right) \Gamma(x, \theta) \exp \left(+i \sum_A t_A \Omega^A(x, \theta) \right), \quad (5.B.69)$$

wobei $\Omega^A(x, \theta)$ ein beliebiges linkshändiges Superfeld bezeichne also eine beliebige Funktion von x_+ und θ_L . Dann gilt

$$V^A(x, \theta) \longrightarrow V^A(x, \theta) + \frac{i}{2} \left(\Omega^A(x, \theta) - \Omega^A(x, \theta)^* \right) + \dots, \quad (5.B.70)$$

wobei die Punkte Ausdrücke bezeichnen, die von Kommutatoren stammen, die von erster oder höherer Ordnung in der Eichkopplung sind. Da Ω ein beliebiges linkshändiges Superfeld sein kann, gilt mit (5.B.37)

$$\begin{aligned} \Omega^A(x, \theta) &= W^A(x, \theta) - \sqrt{(2)} \left(\bar{\theta} P_L w^A(x) \right) + \mathcal{W}^A(x) \left(\bar{\theta} P_L \theta \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \gamma_\mu \theta \right) \partial^\mu W^A(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right) \left(\bar{\theta} \not{\partial} P_L w^A(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right)^2 \partial^2 W^A(x), \end{aligned} \quad (5.B.71)$$

wobei W^A und \mathcal{W}^A komplexe Funktionen von x seien, w^A bezeichne einen Majorana-Spinor und $P_L \stackrel{\text{def}}{=} 1/2(1 + \gamma_5)$ sei der linkshändige Projektionsoperator mit $P_L w^A = w_L^A$. Für das komplex konjugierte Superfeld erhalten wir

$$\begin{aligned} \Omega^A(x, \theta)^* &= W^{A*}(x, \theta) - \sqrt{(2)} \left(\bar{\theta} P_R w^A(x) \right) + \mathcal{W}^{A*}(x) \left(\bar{\theta} P_R \theta \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \gamma_\mu \theta \right) \partial^\mu W^{A*}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right) \left(\bar{\theta} \not{\partial} P_R w^A(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{8} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right)^2 \partial^2 W^{A*}(x). \end{aligned} \quad (5.B.72)$$

Die reellen Superfelder V^A sind wie in (5.B.9) durch Komponentfelder gegeben:

$$\begin{aligned} V^A(x, \theta) &= C^A(x) - i \left(\bar{\theta} \gamma_5 \omega^A(x) \right) - \frac{i}{2} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right) M^A(x) - \frac{1}{2} \left(\bar{\theta} \theta \right) N^A(x) \\ &\quad + \frac{i}{2} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \gamma^\mu \theta \right) V_\mu^A(x) - i \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right) \left(\bar{\theta} \left[\lambda^A(x) + \frac{1}{2} \not{\partial} \omega^A(x) \right] \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(\bar{\theta} \gamma_5 \theta \right)^2 \left(D^A(x) + \frac{1}{2} \partial^2 C^A(x) \right), \end{aligned} \quad (5.B.73)$$

mit reellen Funktionen C^A , M^A , N^A und V_μ^A und Majorana–Spinoren ω^A und λ^A . Einsetzen von (5.B.71)–(5.B.73) in (5.B.70) liefert das Verhalten der Komponentenfelder unter erweiterten Eichtransformationen

$$\begin{aligned} C^A(x) &\longrightarrow C^A(x) - \text{Im}W^A(x) , \\ \omega^A(x) &\longrightarrow \omega^A(x) + (1/\sqrt{2})w^A(x) , \\ V_\mu^A(x) &\longrightarrow V_\mu^A(x) + \partial_\mu \text{Re}W^A(x) , \\ M^A(x) &\longrightarrow M^A(x) - \text{Re}\mathcal{W}^A(x) , \end{aligned} \tag{5.B.74}$$

$$\begin{aligned} N^A(x) &\longrightarrow N^A(x) - \text{Im}\mathcal{W}^A(x) , \\ \lambda^A(x) &\longrightarrow \lambda^A(x) , \\ D^A(x) &\longrightarrow D^A(x) , \end{aligned} \tag{5.B.75}$$

wobei wieder Ausdrücke in erster oder höherer Ordnung in der Eichkopplung unterdrückt wurden. Wir fixieren jetzt die Eichung und wählen die sogenannte *Wess–Zumino–Eichung* (Wess und Zumino, 1974; Ferrara und Zumino, 1974; Salam und Strathdee, 1974):

$$C^A \equiv \omega^A \equiv M^A \equiv N^A \equiv 0 . \tag{5.B.76}$$

In der Wess–Zumino–Eichung finden wir für das reelle Superfeld ausgedrückt durch die Komponentenfelder

$$\begin{aligned} V^A(x, \theta) &= \frac{i}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta) V_\mu^A(x) - i (\bar{\theta}\gamma_5\theta) (\bar{\theta}\lambda^A(x)) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 D^A(x) . \end{aligned} \tag{5.B.77}$$

In nullter Ordnung in den Eichkopplungen brauchen wir jetzt nur noch $\text{Im}W^A \equiv C$, $w^A \equiv -\sqrt{2}\omega^A$ und $\mathcal{W}^A \equiv M^A - iN^A$ zu fordern. Für Abelsche Eichtheorien ist die Konstruktion beendet, da die Strukturkonstanten hier verschwinden. Für nicht–Abelsche Eichtheorien ist die Lage komplizierter, da zu $\text{Im}W^A$, w^A und \mathcal{W}^A Ausdrücke in erster Ordnung in der Eichkopplung addiert werden müssen, um Kommutatoren von Ausdrücken in nullter Ordnung zu eliminieren und so weiter. Es ist keineswegs trivial, in allen Ordnungen die Wess–Zumino–Eichung zu erfüllen. Wir geben uns hier mit dem Resultat zufrieden, daß dies möglich ist.

Aus den Transformationsregeln (5.B.10)–(5.B.13) folgt, daß die Wess–Zumino–Eichung (5.B.76) nicht invariant unter Supersymmetrie–Transformationen ist. Die Wirkung ist in dieser Eichfixierung weder invariant unter den erweiterten Eichtransformationen noch unter Supersymmetrie–Transformationen. Supersymmetrie–Transformationen der Wirkung führen uns aus der Wess–Zumino–Eichung heraus. Dieses Manko kann aber durch spezielle erweiterte Eichtransformationen wieder beseitigt werden. Allerdings bleibt die Wirkung invariant unter den gewöhnlichen Eichtransformationen (5.B.64)–(5.B.66), die die Wess–Zumino–Eichung erhalten. Die letzte Aussage beweisen wir im Folgenden.

Gegeben sei ein Eichsuperfeld in Wess–Zumino–Eichung. Wir untersuchen sein Verhalten unter infinitesimalen Eichtransformationen. $\Omega^A(x_+)$ ist in diesem Fall ein linkshändiges Superfeld von der Gestalt (5.B.37), allerdings fehlen die ψ_L - und \mathcal{F} -Anteile. Die ϕ -Komponenten sind durch reelle Funktionen Λ^A gegeben:

$$\Omega^A(x_+) = \Lambda^A(x) + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\mu\theta) \partial^\mu - \frac{1}{8} (\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \partial^2 \Lambda^A(x) \quad (5.B.78)$$

wobei Λ^A als Kleinheitsfunktionen angenommen werden. Mit der Baker–Hausdorff–Formel erhalten wir für infinitesimale Eichtransformationen aus (5.B.66) das Transformationsverhalten der Komponentenfelder (5.B.77)

$$V_\mu^A(x, \theta) \longrightarrow \sum_{BC} C_{BC}^A V_\mu^B(x) \Lambda^C(x) + \partial_\mu \Lambda^A(x) , \quad (5.B.79)$$

$$\lambda^A(x) \longrightarrow \sum_{BC} C_{BC}^A \lambda^B(x) \Lambda^C(x) , \quad (5.B.80)$$

$$D^A(x) \longrightarrow \sum_{BC} C_{BC}^A D^B(x) \Lambda^C(x) . \quad (5.B.81)$$

Die Gleichung (5.B.79) ist das Transformationsgesetz für Yang–Mills Eichfelder. Die Gleichungen (5.B.80) und (5.B.81) zeigen, daß sich λ^A und D^A wie Materiefelder unter der adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformieren. Die Majorana–Spinoren λ^A heißen *Gauginos*, die reellen Skalare D^A werden sich als ein weiterer Satz von Hilfsfeldern herausstellen.

Nun bleibt nur noch die Matrix Γ zu berechnen, die zur Konstruktion von eichinvarianten Funktionen chiraler Superfelder benötigt wird. Die Entwicklung des Exponentials bricht nach $\mathcal{O}(\theta^4)$ ab und wir erhalten in der Wess–Zumino–Eichung

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \theta) &= 1 - i (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta) \sum_A t_A V_\mu^A(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\mu\theta) (\bar{\theta}\gamma_5\gamma^\nu\theta) \sum_{AB} t_A t_B V_\mu^A(x) V_\nu^A(x) \\ &\quad + 2i (\bar{\theta}\gamma_5\theta) \sum_A t_A (\bar{\theta}\lambda^A(x)) + \frac{1}{2} (\bar{\theta}\gamma_5\theta)^2 \sum_A t_A D^A(x) . \end{aligned} \quad (5.B.82)$$

Es macht dann keine Schwierigkeiten, den Ausdruck $[\Phi^\dagger \Gamma \Phi]_{\theta^4}$ und daraus, wie im letzten Abschnitt den D -Anteil $[\Phi^\dagger \Gamma \Phi]_D$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\Phi^\dagger \Gamma \Phi]_D &= - (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \overline{\psi_L} \gamma^\mu D_\mu \psi_L + \frac{1}{2} (\overline{D_\mu \psi_L}) \gamma^\mu \psi_L + \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} \\ &\quad + i\sqrt{2} \sum_A (\overline{\psi_L} t_A \lambda^A) \phi - i\sqrt{2} \sum_A \phi^\dagger (\overline{\lambda^A} t_A \psi_L) \\ &\quad - \sum_A D^A (\phi^\dagger t_A \phi) , \end{aligned} \quad (5.B.83)$$

wobei wir gleich eichinvariante Ableitungen

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \partial - i \sum_A t_A V^A \quad (5.B.84)$$

eingeführen, damit die Eichinvarianz des D -Anteils evident wird.

Gleichung (5.B.83) ist die eichinvariante kinetische Lagrange-Dichte für die skalaren und Spinor-Komponenten eines linkshändigen Superfeldes zusammen mit Yukawa-Kopplungen der Gauginos an diese Komponenten und Ausdrücke in den Hilfsfeldern \mathcal{F} und D^A .

Eichinvariante Wirkung für Supereichfelder

Ein natürlicher Ansatz für die Lagrange-Dichte der Felder V_μ^A , λ^A und D^A ist

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{4} \sum_A f_A^2 - \frac{1}{2} \sum_A \bar{\lambda}_A (\not{D}\lambda)_A + \frac{1}{2} \sum_A D_A^2. \quad (5.B.85)$$

Im allgemeinen ist der Feldstärketensor von der Form

$$f_A = dV_A + \sum_{BC} C_{ABC} V_B \otimes V_C. \quad (5.B.86)$$

Für eine Abelsche Eichgruppe verschwinden alle Strukturkonstanten. Die eichkovariante Ableitung D eines Gaugino-Feldes ist in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe durch

$$(D\lambda)_A = \partial\lambda_A + \sum_{BC} C_{ABC} V_B \lambda_C \quad (5.B.87)$$

gegeben. Im weiteren untersuchen wir, ob die eichinvariante Lagrange-Dichte (5.B.85) invariant unter Supersymmetrie-Transformationen ist.

Da die Lagrange-Dichte (5.B.85) manifest eichinvariant ist, können wir die Frage nach ihrem Verhalten unter Supersymmetrie-Transformationen in jeder möglichen Eichung untersuchen. Wir wählen eine spezielle Version der Wess-Zumino-Eichung, nämlich $V_A^\mu(X) = 0$ im Raum-Zeit-Punkt X . Im Punkt $x = X$ gilt dann für die Variation der Komponentenfelder unter infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen mit (5.B.14)–(5.B.16)

$$\delta V_A^\mu = \bar{\alpha} \gamma^\mu \lambda_A, \quad (5.B.88)$$

$$\delta \lambda_A = \left(\frac{1}{4} f_{A\mu\nu} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + i\gamma_5 D_A \right) \alpha, \quad (5.B.89)$$

$$\delta D_A = i\bar{\alpha} \gamma_5 \not{\partial} \lambda_A. \quad (5.B.90)$$

Für den Feldstärketensor finden wir

$$\delta f_{A\mu\nu} = -\bar{\alpha} (\gamma_\mu \partial_\nu - \gamma_\nu \partial_\mu) \lambda_A, \quad (5.B.91)$$

da die Ausdrücke quadratisch in V im Punkt $x = X$ eine verschwindende Variation besitzen. Mit vielleicht einer Ausnahme liefern die Ausdrücke in (5.B.85) eine supersymmetrische Wirkung. Die mögliche Ausnahme rührt her vom zweiten Summanden auf der rechten Seite von der eichinvarianten Ableitung des Gaugino-Feldes (5.B.87). Wir definieren

$$\mathcal{L}_{\lambda V \lambda} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \sum_{ABC} C_{ABC} \bar{\lambda}_A \not{V}_B \lambda_C . \quad (5.B.92)$$

Die Variation hiervon im Punkt $x = X$ ist

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{\lambda V \lambda} &= -\frac{1}{2} \sum_{ABC} C_{ABC} \bar{\lambda}_A (\delta \not{V}_B) \lambda_C \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ABC} C_{ABC} (\bar{\lambda}_A \gamma_\mu \lambda_C) (\bar{\alpha} \gamma^\mu \lambda_B) . \end{aligned} \quad (5.B.93)$$

Mit Hilfe von gewöhnlichen Fierz-Identitäten und der Vertauschungseigenschaft der Spinoren kann das Produkt von Bilinearformen auf der rechten Seite von (5.B.93) in zwei symmetrische Ausdrücke zerlegt werden, die jeweils mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten C_{ABC} kontrahiert werden. Als Ergebnis erhalten wir daher $\delta \mathcal{L}_{\lambda V \lambda} = 0$. Folglich liefert (5.B.85) tatsächlich eine eichinvariante supersymmetrische Wirkung.

Wir können die supersymmetrische Wirkung (5.B.85) auch direkt konstruieren. Dazu muß das Superfeld mit den Komponentenfelder $f_{A\mu\nu}$, λ_A und D_A bestimmt werden. Unter einer verallgemeinerten Eichtransformation verhält sich V_A nach (5.B.70), wobei die Transformation durch ein allgemeines linkhändiges Superfeld Ω_A generiert wird. Allerdings ist diese Transformation nicht eichinvariant, da $\Omega_A^* \neq \Omega_A$. Wir definieren das Superfeld

$$\begin{aligned} 2 \sum_A t_A W_{AL\alpha}(x, \theta) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta\gamma} \epsilon_{\beta\gamma} \mathcal{D}_{R\beta} \mathcal{D}_{R\gamma} \left[\exp \left(-2 \sum_A t_A V_A(x, \theta) \right) \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{D}_{L\alpha} \exp \left(2 \sum_A t_A V_A(x, \theta) \right) \right] . \end{aligned} \quad (5.B.94)$$

$W_{AL\alpha}$ ist linkshändig, da $\mathcal{D}_R \otimes \mathcal{D}_R \otimes \mathcal{D}_R$ verschwindet und damit

$$\mathcal{D}_R \otimes W_{AL}(x, \theta) \equiv 0 . \quad (5.B.95)$$

Weiterhin gilt $\mathcal{D}_R \otimes \mathcal{D}_R \otimes \mathcal{D}_L \Omega_A \sim \mathcal{D}_R \Omega_A \equiv 0$. Mit dieser Beziehung folgt, daß W_{AL} im verallgemeinerten Sinne eichinvariant ist:

$$\begin{aligned} \sum_A t_A W_{AL}(x, \theta) &\longrightarrow \exp \left(-i \sum_A t_A \Omega_A(x, \theta) \right) \sum_A t_A W_{AL}(x, \theta) \\ &\quad \times \exp \left(+i \sum_A t_A \Omega_A(x, \theta) \right) . \end{aligned} \quad (5.B.96)$$

Für die Berechnung des Spinor–Superfeldes im Punkt $x = X$ wählen wir wieder die Wess–Zumino–Eichung in der Form $V_A(X) = 0$. Da W_{AL} eichinvariant ist, notieren wir das Ergebnis gleich allgemein in einem beliebigen Raum–Zeit–Punkt

$$W_{AL}(x, \theta) = \lambda_{AL}(x_+) + \frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma^\nu \theta_L f_{A\mu\nu}(x_+) + (\theta_L \epsilon \theta_L) \not{D} \lambda_{AR}(x_+) - i \theta_L D_A(x_+). \quad (5.B.97)$$

Daraus kann nun ein Lorentz– und eichinvarianter \mathcal{F} –Anteil bilinear in W konstruiert werden

$$-\left[\sum_{A\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} W_{AL\alpha} W_{AL\beta} \right]_{\mathcal{F}} = \sum_A \left[-2 (\bar{\lambda}_A \not{D} P_R \lambda_A) - \frac{1}{2} f_A^2 + \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} + D_A^2 \right]. \quad (5.B.98)$$

Die eichinvariante Lagrange–Dichte (5.B.85) ist durch den Realteil dieses \mathcal{F} –Anteils gegeben:

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\sum_{A\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} W_{AL\alpha} W_{AL\beta} \right]_{\mathcal{F}}. \quad (5.B.99)$$

Bleibt noch der Imaginärteil des \mathcal{F} –Anteils:

$$-\text{Im} \left[\sum_{A\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} W_{AL\alpha} W_{AL\beta} \right]_{\mathcal{F}} = -i \sum_A \bar{\lambda}_A \not{D} \gamma_5 \lambda_A + \frac{1}{4} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}. \quad (5.B.100)$$

Beide Ausdrücke auf der rechten Seite können als Ableitungen geschrieben werden. In Abelschen Theorien liefert (5.B.100) keinen Beitrag zur Wirkung. In nicht–Abelschen Theorien jedoch existieren Instanton–Lösungen, die es erlauben, daß ein Raum–Zeit–Integral über die Dichte (5.B.100) einen von Null verschiedenen Wert besitzen kann. Wir müssen daher einen neuen Term in der Lagrange–Dichte zulassen:

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{g^2 \theta}{16\pi^2} \text{Im} \left[\sum_{A\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} W_{AL\alpha} W_{AL\beta} \right]_{\mathcal{F}}, \quad (5.B.101)$$

wobei θ einen reellen Parameter bezeichne, g die wie gewöhnlich definierte Eichkopplung¹⁹. Für einfache Eichgruppen ist dann

$$\int \text{vol}^{(4)} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} = 64\pi^2 \kappa / g^2, \quad (5.B.102)$$

¹⁹Gegeben sei eine einfache Eichgruppe. t_A , t_B und t_C seien in der $SU(2)$ –Unteralgebra der Eichgruppe. Dann wird g durch $C_{ABC} = g \epsilon_{ABC}$ definiert.

mit der ganzen Zahl κ . κ heißt *Windungszahl* und klassifiziert die topologische Klasse der Eichfeldkonfiguration. Für Instantonen mit Windungszahl κ liefert die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_θ eine Phase zum Wirkungsexponential

$$\left[\exp \left(i \int \text{vol}^{(4)} \mathcal{L}_\theta \right) \right]_\kappa = \exp(i\kappa\theta) . \quad (5.B.103)$$

θ hat also einen mit der Periode 2π periodischen Einfluß.

Häufig wird die Eichkopplung g in den Eichfeldern absorbiert, so daß die Strukturkonstanten nicht mehr von g abhängen. Stattdessen wird dann die Lagrange-Dichte mit einem Vorfaktor $1/g^2$ multipliziert. Wir wählen im Weiteren diese Notation mit den transformierten Eichfeldern und Strukturkonstanten ohne diese anders zu bezeichnen. Die vollständige Lagrange-Dichte ist dann durch

$$\mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_\theta = \text{Re} \left[\frac{i\tau}{8\pi} \sum_{A\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} W_{AL\alpha} W_{AL\beta} \right]_{\mathcal{F}} \quad (5.B.104)$$

gegeben. τ heißt komplexer Kopplungsparameter und ist definiert als

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} . \quad (5.B.105)$$

Renormierbare Eichtheorien mit chiralen Superfeldern

Wir benutzen nun die Ergebnisse der letzten drei Abschnitten zur Konstruktion der allgemeinsten renormierbaren Wirkung von wechselwirkenden chiralen Superfeldern. Addition von (5.B.83), (5.B.99), (5.B.101) liefert die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[\Phi^\dagger \exp \left(-2 \sum_A t_A V_A \right) \Phi \right]_D - \frac{1}{2} \text{Re} \sum_A (W_{AL}^T \epsilon E_{AL})_{\mathcal{F}} \\ &\quad - \frac{g^2 \theta}{16\pi^2} \sum_A \text{Im} (W_{AL}^T \epsilon E_{AL})_{\mathcal{F}} \\ &= - \sum_n (D_\mu \phi)_n^* (D^\mu \phi)_n - \frac{1}{2} \sum_n \bar{\psi}_n \gamma^\mu (D_\mu \psi)_n + \sum_n \mathcal{F}_n^* \mathcal{F}_n \\ &\quad - \text{Re} \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} (\psi_{nL}^T \epsilon \psi_{mL}) + 2 \text{Re} \sum_n \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \mathcal{F}_n \\ &\quad - 2\sqrt{2} \text{Im} \sum_{Anm} (t_A)_{nm} (\bar{\psi}_{nL} \lambda_A) \phi_m + 2\sqrt{2} \text{Im} \sum_{Anm} (t_A)_{nm} (\bar{\psi}_{nR} \lambda_A) \phi_m^* \\ &\quad - \sum_{Anm} \phi_n^* (t_A)_{nm} \phi_m D_A - \sum_A \zeta_A D_A + \frac{1}{2} \sum_A D_A D_A \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_A f_A^2 - \frac{1}{2} \sum_A \bar{\lambda}_A (\not{D} \lambda)_A + \frac{g^2 \theta}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (5.B.106)$$

Hierbei ist $f(\phi)$ das Superpotential – eine eichinvariante komplexe Funktion der ϕ_n (aber nicht ihrer komplex Konjugierter), die aufgrund der Renormierbarkeitsforderung ein kubisches Polynom ist. Weiterhin bezeichne ζ_A Konstanten, die nur dann von Null verschieden sind, wenn die Elemente der Eichalgebra $U(1)$ –Generatoren sind. Die eichinvarianten Ableitungen sind durch

$$D\psi_L \stackrel{\text{def}}{=} \left(\partial - i \sum_A t_A V_A \right) \psi_L , \quad (5.B.107)$$

$$D\phi \stackrel{\text{def}}{=} \left(\partial - i \sum_A t_A V_A \right) \phi , \quad (5.B.108)$$

$$(D\lambda)_A \stackrel{\text{def}}{=} \left(\delta_{AC} \partial + \sum_{BC} C_{ABC} V_B \right) \lambda_C \quad (5.B.109)$$

definiert, der eichinvariante Feldstärke–Tensor ist

$$f_A = dV_A + \sum_{BC} C_{ABC} V_B \otimes V_C . \quad (5.B.110)$$

Die Lagrange–Dichte ist quadratisch in den Hilfsfeldern mit konstanten Koeffizienten vor $|\mathcal{F}|^2$ und D_A^2 . Folglich können die Hilfsfelder durch Variation der Lagrange–Dichte (5.B.106) nach den Hilfsfeldern eliminiert werden. Die Lagrange–Dichte ist stationär für

$$\mathcal{F}_n = -(\partial f(\phi)/\partial \phi_n)^* , \quad (5.B.111)$$

$$D_A = \zeta_A + \sum_{mn} \phi_n^* (t_A)_{nm} \phi_m . \quad (5.B.112)$$

Einsetzen in (5.B.106) liefert die Lagrange–Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & - \sum_n (D_\mu \phi)_n^* (D^\mu \phi)_n \\ & - \frac{1}{2} \sum_n \overline{\psi_{nL}} \gamma^\mu (D_\mu \psi_L)_n + \frac{1}{2} \overline{(D_\mu \psi_L)_n} \gamma^\mu \psi_{nL} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{nm} \frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} (\psi_{nL}^T \epsilon \psi_{mL}) + \frac{1}{2} \sum_{nm} \left(\frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial \phi_n \partial \phi_m} \right)^* (\psi_{nL}^T \epsilon \psi_{mL})^* \\ & - \sum_n \left| \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \right|^2 \\ & + i\sqrt{2} \sum_{Anm} (\overline{\psi_{nL}} (t_A)_{nm} \lambda_A) \phi_m - i\sqrt{2} \sum_{Anm} \phi_n^* (\overline{\lambda_A} (t_A)_{nm} \psi_{mL}) \\ & - \frac{1}{2} \sum_A \left(\zeta_A + \sum_{nm} \phi_n^* (t_A)_{nm} \phi_m \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_A f_A^2 \\ & - \frac{1}{2} \sum_A \overline{\lambda_A} (\not{D}\lambda)_A + \frac{g^2 \theta}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \sum_A f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (5.B.113)$$

Wegen Lorentz-Invarianz verschwindet der Vakuumerwartungswert der Felder ψ_{nL} , λ_A und f_A . Der Vakuumerwartungswert der ϕ_n hingegen verschwindet nicht, sondern ist auf Baumgraphen-Niveau durch das Minimum des Potentials

$$V(\phi) = \sum_n \left| \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_A \left(\zeta_A + \sum_{nm} \phi_n^* (t_A)_{nm} \phi_m \right)^2 \quad (5.B.114)$$

gegeben. Da das Potential für alle Feldkonfigurationen positiv ist, genügt es nach einer Feldkonfiguration zu suchen, für die das Potential verschwindet. Existiert eine solche Konfiguration, so liefert sie automatisch ein Minimum des Potentials. $V(\phi)$ verschwindet in $\phi_n = \phi_{n0}$ genau dann, wenn

$$\mathcal{F}_{n0} = - \left[\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n} \right]_{\phi=\phi_0}^* , \quad (5.B.115)$$

$$D_{A0} = \zeta_A + \sum_{nm} \phi_{n0}^* (t_A)_{nm} \phi_{m0} = 0 . \quad (5.B.116)$$

Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß Supersymmetrie nicht spontan gebrochen ist, denn aus (5.B.39) folgt $\langle 0 | \delta \psi_{nL} | 0 \rangle = \sqrt{2} \langle 0 | \mathcal{F}_n | 0 \rangle \alpha_L$ und aus (5.B.15) folgt $\langle 0 | \delta \lambda_A | 0 \rangle = i \langle 0 | D_A | 0 \rangle \gamma_5 \alpha$.

Das MSSM

In diesem Abschnitt werden wir zumindest in groben Zügen die Bestandteile von supersymmetrischen Erweiterungen des Standard-Modells vorstellen und analysieren. Insbesondere konzentrieren wir uns auf die weiter unten erläuterte minimale supersymmetrische Erweiterung des Standard-Modells (MSSM).

Keiner der Fermionen im Standard-Modell gehört zur adjungierten Darstellung der Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Folglich können sie nicht Superpartner der bekannten Eichbosonen sein und müssen daher Komponenten chiraler Superfelder sein. Wir definieren U_i und D_i , \bar{U}_i und \bar{D}_i , N_i , E_i und \bar{E}_i als die linkshändigen Superfelder, deren ψ_L -Komponenten die linkshändigen Felder der Quarks mit Ladungen $+2e/3$ und $-e/3$, der Antiquarks mit Ladungen $-2e/3$ und $+e/3$, der Leptonen mit Ladung 0 , $-e$ und der Antileptonen mit Ladung $+e$. Der Index $i \in \{1, 2, 3\}$ kennzeichnet wie gewöhnlich die Generationen²⁰. Die Superfelder U_i und D_i bilden $SU(2)$ -Dubletts, N_i und E_i ebenfalls. Die anderen Superfelder bilden $SU(2)$ -Singuletts. Die Quark-Superfelder bilden $SU(3)$ -Tripletts und die Antiquarks entsprechend Antitripletts. Die Leptonen bilden $SU(3)$ -Singuletts. Die durch die skalaren Komponenten beschriebenen Teilchen heißen *Squarks*, *Antisquarks*, *Sleptonen* und *Antisleptonen*. Au-

²⁰So bezeichnen zum Beispiel die Spinor-Komponenten von U_1 , U_2 und U_3 jeweils die linkshändigen Felder der u , c und t Quarks.

ßerdem gibt es noch die Spin-1/2 Superpartner (*Gauginos*) der zu $SU(3)$, $SU(2)$ und $U(1)$ gehörenden Eichbosonen. Sie heißen *Gluino*, *Wino* und *Bino*²¹.

Außerdem wird noch ein Mechanismus benötigt, der die spontane Brechung von $SU(2) \times U(1)$, und damit die Massen aller Leptonen und Quarks sowie der Eichbosonen W^\pm und Z^0 , generiert. Die einfachste Realisierung hierfür besteht darin, zwei weitere $SU(2)$ -Dubletts linkshändiger Superfelder einzuführen

$$H_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}, \quad (5.B.117)$$

die in der Lagrange-Dichte als Linearkombinationen der eichinvarianten \mathcal{F} -Anteile

$$\left[(D_i H_1^0 - U_i H_1^-) \right]_{\mathcal{F}}, \quad \left[(E_i H_1^0 - N_i H_1^-) \right]_{\mathcal{F}}, \quad (5.B.118)$$

und

$$\left[(D_i H_2^+ - U_i H_2^0) \right]_{\mathcal{F}} \quad (5.B.119)$$

aufzutreten. Ein von Null verschiedener Erwartungswert der skalaren Komponente von H_1^0 generiert die Massen der geladenen Leptonen und Quarks mit Ladung $-e/3$. Ein von Null verschiedener Erwartungswert der skalaren Komponente von H_2^0 generiert die Massen der Quarks mit Ladungen $+2e/3$. Diese Erwartungswerte generieren ebenfalls die Masse der Eichbosonen W^\pm und Z^0 . Supersymmetrie verbietet, daß die komplex Konjugierten der linkshändigen Superfelder H_1 und H_2 im Superpotential auftreten. Deshalb kann der Erwartungswert der skalare Komponenten von H_1^0 keine Masse für die Quarks mit Ladung $+2/3e$ generieren, und der Erwartungswert der skalaren Komponente von H_2^0 kann keine Masse für die Quarks mit Ladung $-e/3$ oder die geladenen Leptonen generieren. Dies ist der Grund für die Einführung von zwei $SU(2)$ -Dubletts linkshändiger Superfelder H_1 und H_2 .

Natürlich kann es mehr als ein H_1 - und/oder H_2 - Dubletts geben. Ihre Anzahl ist aber durch die Forderung, daß die Theorie keine Anomalien aufweise, beschränkt. Die Eichsymmetrien des nicht-supersymmetrischen Standard-Modells sind frei von Anomalien. Diese quantenmechanische Konsistenz überträgt sich nicht ohne weiteres auf die supersymmetrische Erweiterung, da dort neue Spinoren in der Lagrange-Dichte auftreten²². Probleme könnten von den Ausdrücken mit *Higgsinos*-den Spin-1/2 Komponenten der Superfelder (H_1^0, H_1^-) und (H_2^+, H_2^0) herrühren. Tatsächlich

²¹Die Energieskala, auf der Supersymmetrie gebrochen ist, sollte erheblich über 300 GeV liegen, also über der Skala, auf der $SU(2) \times U(1)$ gebrochen wird. Dann sollte es einen relevanten Energiebereich geben, in dem Supersymmetrie, aber nicht $SU(2) \times U(1)$, gebrochen ist. In diesem Bereich werden die Massen der Gauginos durch die $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie kontrolliert. Die neutralen elektroschwachen Gauginos mit definierter Masse sind dann Superpartner des $SU(2)$ -Triplets W^0 und des $SU(2)$ -Singulets B , anstatt Superpartner des Z^0 und Photons. Die neutralen elektroschwachen Gauginos heißen dann *Wino* und *Bino*. Wenn $SU(2) \times U(1)$ -Brechung in Betracht gezogen wird, dann mischen Wino und Bino.

²²Die Gauginos bereiten in dieser Hinsicht keine Probleme, weil ihre linkshändigen Komponenten zur adjungierten Darstellung der Theorie gehören und diese für alle Eichgruppen reell ist.

produziert jedes (H_1^0, H_1^-) -Dublett eine $SU(2)$ - $SU(2)$ - $U(1)$ -Anomalie, genauso jedes (H_2^+, H_2^0) -Dublett. Die von (H_1^0, H_1^-) und (H_2^+, H_2^0) generierten Anomalien unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen. Für die Anomalie-Freiheit der Theorie ist es daher zwingend, daß genauso viele (H_1^0, H_1^-) wie (H_2^+, H_2^0) -Dubletts auftreten.

Die bisherige Konstruktion hat gegenüber dem nicht-supersymmetrischen Standard-Modell einen entscheidenden Nachteil. Im nicht-supersymmetrischen Standard-Modell kann es keine mit der Renormierbarkeit der Theorie verträgliche Wechselwirkung geben, die Baryonzahl- oder Leptonzahlerhaltung verletzt. Dagegen gibt es einige supersymmetrische $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ invariante \mathcal{F} -Anteile, die beide Erhaltungssätze verletzen, ohne die Eichsymmetrie zu zerstören:

$$\left[(D_i N_j - U_i E_j) \bar{D}_k \right]_{\mathcal{F}}, \left[(E_i N_j - N_i E_j) \bar{E}_k \right]_{\mathcal{F}} \quad (5.B.120)$$

und auch

$$\left[\bar{D}_i \bar{D}_j \bar{U}_k \right]_{\mathcal{F}}. \quad (5.B.121)$$

Es ist unmöglich, den Sleptonen und Squarks erhaltene Lepton- und Baryonzahlen zuzuordnen, wenn die \mathcal{F} -Anteile (5.B.120) und (5.B.121) zur Konstruktion einer Lagrange-Dichte verwandt werden. Zum Beispiel würde der Austausch des im \bar{D} -Superfeld enthaltenen skalaren Bosons zwischen den Vertizes (5.B.120) und (5.B.121) zum Prozess $u_L d_R u_R \rightarrow \bar{e}_R$ führen, der als Zerfall $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ observabel wäre. Um solche Probleme zu vermeiden, muß eine weitere Annahme gemacht werden, die einige oder alle Wechselwirkungen vom Typ (5.B.120) und (5.B.121) ausschließt.

Es ist nicht notwendig, alle Wechselwirkungen (5.B.120) und (5.B.121) auszuschließen. Nehmen wir zum Beispiel lediglich Baryonenzahlerhaltung mit der üblichen Konvention an: den linkshändigen Superfelder U_i und D_i wird die Baryonzahl $+1/3$ zugeordnet, den \bar{U}_i und \bar{D}_i die Baryonzahl $-1/3$ und die L_i , \bar{E}_i , H_1 und H_2 erhalten die Baryonzahl 0. Dies erlaubt die Wechselwirkungen (5.B.120) und verbietet gleichzeitig (5.B.121). Die Wechselwirkungen (5.B.120) verletzen alleine nicht die Leptonzahlerhaltung, vorausgesetzt den skalaren Komponenten der Superfelder werden geeignete Leptonzahlen zugeordnet. Dazu wird den Superfeldern N_i und E_i die Leptonzahl 0, den Superfeldern U_i , D_i , \bar{U}_i und \bar{D}_i die Leptonzahl -1 , -2 den Superfeldern \bar{E}_i , 0 den Superfeldern H_1 und H_2 und -1 und $+1$ den θ_L und θ_R zugeordnet. Alle Quarks und Leptonen haben dann konventionelle Leptonzahlen: die als Koeffizienten vor θ_L in N_i und E_i auftretenden fermionischen Komponenten ν_{iL} und e_{iL} haben Leptonzahl $0 + 1 = +1$, die fermionischen Komponenten \bar{e}_{iR} der Superfelder \bar{E}_i haben Leptonzahl $-2 + 1 = -1$, und Quarks und Antiquarks haben Leptonzahl $-1 + 1 = 0$. Die fermionischen Komponenten von H_1 und H_2 (die sogenannten *Higgsinos*) haben Leptonzahl $0 + 1 = 1$. Andererseits haben die skalaren Komponenten der Superfelder dieselben Leptonzahlen wie die Superfelder selbst, d. h. die Zuweisung ist unüblich. Der \mathcal{F} -Anteil eines linkshändigen Superfeldes ist der Koeffizient vor θ_L^2 . Damit haben die Wechselwirkungen (5.B.120) die Leptonzahlen $-1 + 0 - 1 + 2 = 0$

und $0 + 0 - 2 + 2 = 0$, die Wechselwirkungen (5.B.118) von H_1 haben Leptonzahl $-1 + 0 - 1 + 2 = 0$ und $0 + 0 - 2 + 2 = 0$, und die Wechselwirkungen (5.B.119) von H_2 haben die Leptonzahl $-1 + 0 - 1 + 2 = 0$. Folglich erhalten diese Wechselwirkungen die Leptonenzahl. Weiterhin haben die skalaren Komponenten von H_1 und H_2 die Leptonzahl 0, so daß auch ihr Vakuumserwartungswert die Leptonzahlerhaltung respektiert. Mit dieser Zuweisung von Leptonzahlen verbietet Leptonzahlerhaltung jede renormierbare, die Baryonzahlerhaltung nicht respektierende Wechselwirkung. Die Wechselwirkung (5.B.121) hat Leptonzahl $-1 - 1 - 1 + 2 = -1$ und ist damit verboten.

Gewöhnlich wird allerdings angenommen, daß globale Symmetrien wie Lepton- und Baryonzahlerhaltung die Wechselwirkungen (5.B.120) und (5.B.121) ausschließen. Dies würden auch von Symmetrien garantiert, die lediglich die Erhaltung einer Linearkombination von Lepton- und Baryonzahl erhalten. Ein bekannter Vertreter dieser Symmetrien ist die Kombination Baryonzahl minus Leptonzahl, die außerdem frei von Anomalien ist.

Es gibt starke und begründete Zweifel an der Existenz von exakten kontinuierlichen globalen Symmetrien. In der Stringtheorie folgt nämlich aus deren Vorhandensein die Existenz eines masselosen Spin-1 Teilchens, das an den zur Symmetrie gehörenden Strom koppelt. Dann muß diese Symmetrie aber eine lokale sein (Banks und Dixon, 1988; Polchinsky, 1998). Die Wechselwirkungen (5.B.120) und (5.B.121) können allerdings durch eine *diskrete* globale Symmetrie verhindert werden, der Erhaltung der sogenannten *R-Parität*. Sie ist durch

$$\Pi_R \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^F (-1)^{3(B-L)} \quad (5.B.122)$$

definiert. Hierbei ist $(-1)^F$ gleich +1 für alle Bosonen und -1 für alle Fermionen. B und L bezeichnen die Baryon- und Leptonzahl. Die *R-Parität* ist per definitionem +1 für Quarks, Leptonen, Eichbosonen und Higgs-Bosonen, und -1 für deren Superpartner. Da $(-1)^F$ immer erhalten ist, ist *R-Parität* eine Erhaltungsgröße, wenn $B - L$ erhalten ist²³. Natürlich kann *R-Parität* auch dann erhalten sein, wenn $B - L$ nicht erhalten ist. Allerdings verbietet die Erhaltung der *R-Parität* die Wechselwirkungen (5.B.120) und (5.B.121). Folglich impliziert die Erhaltung der *R-Parität* für renormierbare Wechselwirkungen separat Baryon- und Leptonzahlerhaltung.

Alle von Supersymmetrie geforderten neuen Teilchen haben negative *R-Parität*. Falls also *R-Parität* exakt und ungebrochen ist, muß das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) stabil gegen Zerfall sein. Alle anderen neuen Teilchen werden

²³Der Wert von $(-1)^{3(B-L)}$ ist -1 für Lepton- und Quark-Superfelder und +1 für alle anderen Superfelder. Die Erhaltung der *R-Parität* ist somit äquivalent zu einer Transformation, bei der alle Lepton- und Quark-Superfelder das Vorzeichen wechseln während dem sich die anderen Superfelder identisch transformieren. Diese Invarianz-Prinzip wurde in (Dimopoulos, 1981) eingeführt, um die Wechselwirkungen (5.B.120) und (5.B.121) auszuschließen.

nach Zerfallsketten in gewöhnliche Teilchen und LSP's zerfallen. Die Phänomenologie der unterschiedlichen supersymmetrischen Modelle hängt damit entscheidend von der Wahl des LSPs ab.

Die allgemeinste renormierbare Lagrange-Dichte für die weiter oben diskutierten Superfelder, die Supersymmetrie und R -Parität oder $B - L$ respektiert, besteht

- ① aus dem gewöhnlichen eichinvarianten kinetischen Term für die chiralen Superfelder $(\Phi^* \exp(-V) \Phi)_D$ für jedes Lepton, Quark und Higgs,
- ② aus dem eichinvarianten kinetischen Term für die Eichsuperfelder $\epsilon(WW)_{\mathcal{F}}$ für jedes $SU(3)_-$, $SU(2)_-$ und $U(1)$ -Eichfeld,
- ③ die supersymmetrischen Yukawa-Kopplungen, durch Linearkombinationen von (5.B.118) und (5.B.119) gegeben und 4. einem neuen \mathcal{F} -Term für die Kopplung von H_1 und H_2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y = & \sum_{ij} h_{ij}^D \left[(D_i H_1^0 - U_i H_1^-) \bar{D}_j \right]_{\mathcal{F}} + \sum_{ij} h_{ij}^E \left[(E_i H_1^0 - N_i H_1^-) \bar{E}_j \right]_{\mathcal{F}} \\ & + \sum_{ij} h_{ij}^U \left[(D_i H_2^+ - U_i H_2^0) \bar{U}_j \right]_{\mathcal{F}} + \mu \left[H_2^+ H_1^- - H_2^0 H_1^0 \right]_{\mathcal{F}} \\ & + \text{H. C.} \end{aligned} \tag{5.B.123}$$

Später müssen wir noch Terme hinzufügen, die Supersymmetrie adäquat brechen.

Der Koeffizient μ in (5.B.123) hat die Dimension der Masse und ist der einzige dimensionsbehaftete Parameter, der in der supersymmetrischen Erweiterung des Standard-Modells auftritt. Die Existenz dieses prinzipiell erlaubten Parameters stellt ein neues Hierarchie-Problem dar. Der μ -Term in (5.B.123) kann vermieden werden, wenn wir Leptonzahl-Erhaltung fordern. Mit der weiter oben beschriebenen unkonventionellen Zuweisung von Leptonzahlen wären die Wechselwirkungen (5.B.120), aber nicht die Wechselwirkungen (5.B.123) erlaubt. Dann hätte der μ -Term die Leptonzahl $+2$ und wäre verboten. Eine andere Möglichkeit, den μ -Term zu verhindern, ist $U(1)$ -Peccei-Quinn-Symmetrie (Peccei und Quinn, 1977) anzunehmen. Dann hätten die Superfelder H_1 und H_2 die gleichen Quantenzahlen, z. B. $+1$, während die θ_L und θ_R neutral wären. Die Wechselwirkungen (5.B.118) und (5.B.119), die die Massen der Leptonen und Quarks generieren, sind dann erlaubt, wenn wir den linkshändigen Superfeldern der Antisleptonen und Antisquarks die Peccei-Quinn-Quantenzahl -1 zuweisen, und die linkshändigen Superfelder der Sleptonen und Squarks neutral blieben. Diese Wahl verbietet dann sowohl die Wechselwirkungen (5.B.120) und (5.B.121). Allerdings ist der μ -Term aus phänomenologischer Sicht attraktiv. Theorien, die Supersymmetrie-Verletzung durch Graviton-Austausch generieren, liefern einen natürlichen Mechanismus zur Behebung dieses neuen Hierarchie-Problems.

Es ist möglich, grobe Schranken für die Massen der neuen Teilchen zu erhalten, vorausgesetzt Supersymmetrie löst das anfangs besprochene Hierarchie-Problem. In der supersymmetrischen Erweiterung des Standard-Modells ohne Supersymmetrie-Brechung heben sich die durch Schleifen von Leptonen, Quarks, W - oder Z -Bosonen generierten Beiträge zu den Massen der skalaren Komponenten von H_1 und H_2 gegen entsprechende Schleifen mit Sleptonen, Squarks, Winos oder Zino weg. Ist Supersymmetrie gebrochen, sollte der Beitrag δm_H^2 dieser Schleifendiagramme zu den quadratischen Massen der skalaren Komponenten von H_1 und H_2 proportional zu einer Summe von Ausdrücken der Größenordnung $(g_s^2/8\pi^2)\Delta m_s^2$ sein, wobei g_s die Yukawa- oder Eichkopplung des Higgs-Skalars an das Supermultiplett s sei und Δm_s die Massenaufspaltung im Supermultiplett bezeichne. Damit diese Korrekturen nicht durch schwer zu realisierende Feineinstellungen natürlich gehalten werden müssen, sollte δm_H^2 nicht viel sein größer als der Koeffizient von der Größenordnung $(300 \text{ GeV})^2$ vor dem Term, der im Standard-Modell für die beobachtete $SU(2) \times U(1)$ -Brechung verantwortlich ist. Dann sollte $\delta m_H^2 < (1 \text{ TeV})^2$ gelten. Zum Beispiel koppeln das top-Quark und das stop-Quark mit $g_s \sim 1$ an H_2 , so daß $\Delta m^2 \leq 8\pi^2 \text{ TeV}^2$ und damit die Masse des top-Squarks kleiner als 10 TeV sein sollte. Im MSSM ist dies sogar die obere Schranke für alle Fermionmassen. Da andererseits diese Teilchen noch nicht beobachtet wurde, sollte eine untere Schranke von 100 GeV für die Masse der Fermionen existieren.

Anhang C

In diesem Anhang demonstrieren wir die direkte Konstruktion von Feld-Supermultipletts am Beispiel des einfachsten Supermultipletts beliebiger Masse: zwei spinlose Teilchen und ein Teilchen mit Spin 1/2. Der spinlose Einteilchen-Zustand $|0, 0\rangle$ wird durch den fermionischen Generator Q annihiliert, nicht jedoch durch Q^* , siehe (5.A.64). Das Skalarfeld $\phi(x)$, daß diesen Zustand aus dem Vakuum erzeugt, sollte folglich mit Q , aber nicht mit Q^* kommutieren

$$[Q_a, \phi(x)] = 0, \quad (5.C.1)$$

$$\zeta_a \stackrel{\text{def}}{=} -i \sum_b e_{ab} [Q_b^*, \phi(x)] \neq 0. \quad (5.C.2)$$

Die antisymmetrische Matrix e (5.A.14) garantiert, daß der zweikomponentige Spinor ζ zur $(1/2, 0)$ -Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe gehört²⁴.

Mit der Antikommutator-Beziehung (5.A.40) und (5.C.1) folgt

$$\{Q_b, \zeta_a(x)\} = -2(\sigma^\mu e)_b a \partial_\mu \phi(x). \quad (5.C.3)$$

²⁴Ein freies Feld, das zur $(1/2, 0)$ Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe gehört, kann lediglich masselose Teilchen mit Helizität $+1/2$ erzeugen. Dies ist in Übereinstimmung mit (5.A.64), daß masselose Einteilchen-Zustände $|0, 0\rangle$ in einem Supermultiplett zusammen mit einem Zustand mit Helizität $+1/2$ auftreten.

Andererseits ergibt sich mit (??) und der Antikommutator-Beziehung (5.A.41)

$$-i \sum_c e_{ac} \{Q_b^*, \zeta_c\} = \{Q_b^*, [Q_a^*, \phi], =\} - \{Q_a^*, [Q_b^*, \phi], =\} i \sum_c e_{bc} \{Q_a^*, \zeta_c\} . \quad (5.C.4)$$

Der letzte Term in dieser Gleichungskette muß also antisymmetrisch gegen $a \leftrightarrow b$ und damit proportional zu e sein:

$$i \{Q_b^*, \zeta_a(x)\} = 2\delta_{ab} \mathcal{F}(x) . \quad (5.C.5)$$

Aus der geforderten Lorentz-Invarianz folgt, daß \mathcal{F} ein Skalarfeld ist.

Als nächstes müssen die Kommutatoren der Supersymmetrie-Generatoren mit $\mathcal{F}(x)$ berechnet werden. Mit (5.C.5) und (5.A.41) ist

$$\delta_{ab} [Q_c^*, \mathcal{F}] = (i/2) [Q_c^*, \{Q_b^*, \zeta_a\}] = (i/2) [\{Q_c^*, \zeta_a\}, Q_b^*] = -\delta_{ac} [Q_b^*, \mathcal{F}] . \quad (5.C.6)$$

Für $a = b \neq c$ finden wir, daß der Kommutator verschwindet:

$$[Q_c^*, \mathcal{F}(x)] = 0 . \quad (5.C.7)$$

Mit (5.C.5), (5.A.40) und (5.C.3) gilt

$$\begin{aligned} \delta_{ab} [Q_c, \mathcal{F}] &= (i/2) [Q_c, \{Q_b^*, \zeta_a\}] = (i/2) [\{Q_c, Q_b^*\}, \zeta_a] - (i/2) [Q_b^*, \{Q_c, \zeta_a\}] \\ &= -\sigma_{an}^\mu \partial_\mu \zeta_a + i(\sigma^\mu e)_{ca} [Q_b^*, \partial_\mu \phi] \\ &= -\sigma_{an}^\mu \partial_\mu \zeta_a + \sum_d e_{bd} (\sigma^\mu e)_{ca} \partial_\mu \zeta_d . \end{aligned} \quad (5.C.8)$$

Kontraktion mit δ liefert

$$[Q_c, \mathcal{F}(x)] = -\sum_a \sigma_{ca}^\mu \partial_\mu \zeta_a(x) . \quad (5.C.9)$$

Aus den Gleichungen (5.C.1)–(5.C.9) folgt, daß die Felder ϕ , ζ und \mathcal{F} eine vollständige Darstellung der Supersymmetrie-Algebra bilden. Da dieser Felder nicht hermiteisch sind, bilden die komplex konjugierten Felder ebenfalls eine Darstellung.

Alternativ können diese algebraischen Relationen auch als Supersymmetrie-Transformationen geschrieben werden, die einen beliebigen bosonischen oder fermionischen Feldoperator $\mathcal{O}(x)$ transformieren. Für infinitesimale Supersymmetrie-Transformationen gilt nämlich

$$\delta \mathcal{O}(x) = \left[\sum_a (\epsilon_a^* Q_a + \epsilon_a Q_a^*), \mathcal{O}(x) \right] , \quad (5.C.10)$$

wobei ϵ einen fermionischen Spinor (mit C -Zahl Einträgen) bezeichne, der als Kleinheitsparameter fungiert. Die algebraischen Relationen (5.C.1)–(5.C.9) sind dann äquivalent zu

$$\delta \phi(x) = -i \sum_{ab} \epsilon_a e_{ab} \zeta_b(x) , \quad (5.C.11)$$

$$\delta \zeta_a(x) = -2 \sum_b \epsilon_b^* (\sigma^\mu e)_{ba} \partial_\mu \phi(x) - 2i \epsilon_a \mathcal{F}(x) , \quad (5.C.12)$$

$$\delta \mathcal{F}(x) = -\sum_{ab} \epsilon_b^* \sigma_{ba}^\mu \partial_\mu \zeta_a(x) . \quad (5.C.13)$$

Diese Transformationen wollen wir nun durch vierkomponentige Dirac–Spinoren ausdrücken. Dazu definieren wir einen vierkomponentigen Majorana–Spinor²⁵, der wieder als Kleinheitsparameter der Transformation dienen soll, durch

$$\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -i \begin{pmatrix} \epsilon \\ \sum_b e_{ab} \epsilon_b^* \end{pmatrix}. \quad (5.C.14)$$

(5.C.10) wird dann

$$i\delta O(x) = [\bar{\alpha}Q, \mathcal{O}(x)]. \quad (5.C.15)$$

Wir führen weiterhin vier reelle bosonische Felder A , B , F und G durch

$$A + iB \equiv \sqrt{2}\phi, \quad F - iG \equiv \sqrt{2}\mathcal{F}, \quad (5.C.16)$$

und einen weiteren vierkomponentigen Majorana–Spinor

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta_a \\ -\sum_b e_{ab} \zeta_b^* \end{pmatrix} \quad (5.C.17)$$

ein. Die Transformationen (5.C.11)–(5.C.13) können nun in der folgenden Form notiert werden:²⁶

$$\begin{aligned} \delta A &= \bar{\alpha}\psi, & \delta B &= -i\bar{\alpha}\gamma_5\psi, \\ \delta\psi &= \partial_\mu(A + i\gamma_5 B)\gamma^\mu\alpha + (F - i\gamma_5 G)\alpha, \end{aligned} \quad (5.C.18)$$

$$\delta F = \bar{\alpha}\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \quad \delta G = -i\bar{\alpha}\gamma_5\gamma^\mu\partial_\mu\psi. \quad (5.C.19)$$

Diese Transformationen lassen die Wirkung

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \int \text{vol}^{(4)} \left\{ -\frac{1}{2}(\partial A) \cdot (\partial A) - \frac{1}{2}(\partial B) \cdot (\partial B) - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma \cdot \partial\psi \right. \\ &+ \frac{1}{2}(F^2 + G^2) + m \left((FA + GB - \frac{1}{2}\bar{\psi}\psi) \right) \\ &\left. + g \left[F(A^2 + B^2) + 2GAB - \bar{\psi}(A + i\gamma_5 B)\psi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.C.20)$$

invariant. Die Transformationen (5.C.18) und die Wirkung (5.C.20) wurden von Wess und Zumino zuerst gefunden (Wess und Zumino, 1974; Ferrara, 1987). Die durch (5.C.20) gegebene supersymmetrische Feldtheorie heißt auch wechselwirkendes *Wess–Zumino–Modell*.

Die Felder \mathcal{F} , F und G sind Hilfsfelder, d. h. sie können durch andere Felder im Supermultiplett ausgedrückt und damit aus dem Modell eliminiert werden.

²⁵Mit der hier getroffenen Phasenkonvention wird der vierkomponentige Majorana–Spinor aus einem $(1/2, 0)$ zweikomponentigen Spinor gebildet. Natürlich läßt sich auch aus einem $(0, 1/2)$ zweikomponentigen Spinor ein vierkomponentiger Majorana–Spinor bilden.

²⁶Der Zusammenhang zwischen den 2×2 Pauli–Matrizen σ und den 4×4 Dirac–Matrizen ist zur Erinnerung

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -ie\sigma^T e \\ i\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Literatur

- Bailin, D. und Love, A., 1994, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institut of Physics Publishing
- Banks, T. und Dixon, L., 1988, *Nucl. Phys.* **B307**, 93
- Barate, R. et al., 2001, *Phys. Lett. B* **499**, 67
- Boehm, C., Fayet, P., und Schaeffer, R., 2001, *Phys. Lett. B* **518**, 8
- Chen, X., Kamionkowski, M., und Zhang, X., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 021302
- Coleman, S. und Mandula, J., 1967, *Phys. Rev.* **159**, 1251
- Constantinescu, F. und de Groote, H. F., 1994, *Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren*, Teubner, Stuttgart
- Dimopoulos, S., 1981, *Nucl. Phys* **B193**, 150
- Ferrara, S. (ed.), 1987, *Supersymmetry*, North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore
- Ferrara, S. und Zumino, B., 1974, *Nucl. Phys* **B79**, 413
- Haag, R., Lopuszanski, J. T., und Sohnius, M., 1975, *Nucl. Phys.* **B88**, 257
- Hofmann, S., Schwarz, D. J., und Stöcker, H., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 083507
- Peccei, R. D. und Quinn, H., 1977, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440
- Polchinsky, J., 1998, *String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge
- Salam, A. und Strathdee, J., 1974, *Nucl. Phys.* **B76**, 477
- Weinberg, S., 2000, *The Quantum Theory of Fields, Bd.III*, Cambridge University Press, Cambridge
- Wess, J. und Bagger, J., 1992, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press
- Wess, J. und Zumino, B., 1974, *Nucl. Phys.* **B70**, 13
- Witten, E., 1981, *Nucl. Phys. B* **188**, 513

BERECHNUNG DER TRANSPORTKOEFFIZIENTEN

In diesem Kapitel berechnen wir die lokalen Transportkoeffizienten (4.104)-(4.106) für die CDM-Flüssigkeit. Die hier vorgestellte Methode (Hofmann et al., 2001) zur Berechnung der lokalen Transportkoeffizienten gilt für jede Flüssigkeit, die von einem gegebenen Wärmebad entkoppelt. Eine Grundidee dieser Methode ist, die Koeffizienten durch einen legitimen Vergleich (Weinberg, 1971) der kinetischen und hydrodynamischen Beschreibung des betrachteten Vielteilchensystems zu bestimmen. Die Gleichungen (4.104)-(4.106) werden somit als Definitionen betrachtet und stellen keine Rechenvorschrift mehr dar.

In der kinetischen Beschreibung wird angenommen, daß das Vielteilchensystem adäquat durch eine Einteilchen-Verteilungsfunktion beschrieben werden kann, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Koordinaten und Impuls eines Teilchens festlegt. Das charakteristische Zeitintervall des kinetischen Stadiums eines Nichtgleichgewichtsprozesses ist nach unten durch die Kollisionszeit und nach oben durch die Relaxationszeit beschränkt.

In der hydrodynamischen Beschreibung wird zusätzlich angenommen, daß das Vielteilchensystem im lokalen Gleichgewicht ist. Die System beschreibenden Größen in diesem Stadium sind das nullte, erste und zweite Moment der Verteilungsfunktion bezüglich des Impulses. Das hydrodynamische Stadium schließt sich an das kinetische Stadium an und ist nach unten durch die makroskopische Relaxationszeit beschränkt.

Es ist somit klar, daß die hydrodynamischen Gleichungen aus der kinetischen Gleichung der Einteilchen-Verteilungsfunktion hergeleitet werden können. Insbesondere können die in der hydrodynamischen Beschreibung dissipativer Prozesse auftretenden Tensoren berechnet werden. Die kinetische Theorie kann dann als Bindeglied zwischen der zur Grunde liegenden Quantenfeldtheorie und der zur Formulierung

kollektiver dissipativer Effekte verwendeten hydrodynamischen Beschreibung benutzt werden.

Die in diesem Kapitel vorgestellte Methode (Hofmann et al., 2001) erlaubt die Bestimmung der gesuchten Transportkoeffizienten durch einen legitimen Vergleich der hydrodynamischen mit der kinetischen Beschreibung.

6.1 Hydrodynamische Beschreibung

Je nach Temperatur kann der Teilcheninhalt des Universums und die Wechselwirkungen dieser Teilchen untereinander durch eine unterschiedliche Anzahl von Flüssigkeiten kollektiv beschrieben werden, vorausgesetzt eine hydrodynamische Beschreibung ist zulässig. Vom kinetischen Standpunkt her ist diese Beschreibung legitim, wenn sich die betreffenden Vielteilchensystemen durch Einteilchen-Verteilungsfunktionen beschreiben lassen und sich lokales thermisches Gleichgewicht etabliert hat. Die in einer Flüssigkeit zusammengefassten Vielteilchensysteme bestehen in der Regel aus unterschiedlichen Teilchenspezies, deren Dynamik kollektiv generiert wird. Die Eigenschaften der unterschiedlichen Teilchenspezies und deren Wechselwirkungen untereinander und mit allen anderen Teilchen bestimmen zu jedem Zeitpunkt deren Zugehörigkeit zu einer bestimmten Flüssigkeit in einem expandierenden Universum. Eine solche Zuordnung kann nicht aus der Hydrodynamik heraus getroffen werden, sondern nur aus der zu Grunde liegenden Quantenfeldtheorie.

Das uns interessierende physikalische System ist kalte dunkle Materie (CDM), die wir für die hydrodynamischen Beschreibung nicht weiter teilchenphysikalisch charakterisieren brauchen. Allerdings wollen wir voraussetzen, daß eine Temperatur existiere, oberhalb dieser CDM im thermischen Gleichgewicht vorlag. Damit ist das Axion als Teilchenkandidat ausgeschlossen, das aufgrund der Größe der Peccei-Quinn-Skala praktisch nie im thermischen Gleichgewicht war. Für Temperaturen $T > T_{\text{cd}}$ kann der Teilcheninhalt des Universums vom Standpunkt der Strukturbildung in eine relativistische Strahlungsflüssigkeit (R) im thermischen Gleichgewicht zusammengefaßt werden. Für Temperaturen $T \in (T_{\text{kd}}, T_{\text{cd}})$ sind die CDM-Flüssigkeit und die Strahlungsflüssigkeit stark gekoppelt. Beiden Flüssigkeiten kann die gleiche Temperatur T_{R} und die gleiche Vierergeschwindigkeit \mathbf{V} zugeordnet werden. Beide Größen sind strikt nur für die Strahlungsflüssigkeit ohne weitere Umstände wohldefiniert, da nur die Strahlungsflüssigkeit im Intervall $(T_{\text{kd}}, T_{\text{cd}})$ im exakten thermischen Gleichgewicht bleibt, während sich um T_{kd} durch den Entkopplungsprozeß Störungen des Gleichgewichts in der CDM-Flüssigkeit aufbauen. Die Strahlungsflüssigkeit fungiert also als Wärmebad für die im thermischen Kontakt stehende CDM-Flüssigkeit. Dieser Kontakt hängt allerdings von der Expansionsrate des Universums ab und ist damit zeitabhängig. Tatsächlich beginnt die CDM-Flüssigkeit um T_{kd} von der Strahlungsflüssigkeit zu entkoppeln. Die um den Entkopplungsprozeß entstandenen

Abweichungen vom lokalen thermischen Gleichgewicht können nicht mehr thermisch ausgeglichen werden. Für $T < T_{\text{kd}}$ sind beide Flüssigkeiten entkoppelt. Die in der CDM-Flüssigkeit zusammengefaßten Teilchen wechselwirken nun überhaupt nicht mehr. Die CDM-Flüssigkeit strömt frei. Da $\Omega_{\text{CDM}} = a/a_{\text{eq}}\Omega_{\text{R}} \ll \Omega_{\text{R}}$ für $T \gg T_{\text{eq}}$ gilt, bleibt die Strahlungsflüssigkeit während des Entkopplungsprozesses im lokalen thermischen Gleichgewicht.

Der Zustand der Strahlungsflüssigkeit ist somit im betrachteten Zeitraum durch die Lorentz-Tensoren

$$\mathbf{J}_{\text{R}} = n_{\text{R}} \mathbf{V}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{T}_{\text{R}} = \rho_{\text{R}} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - P_{\text{R}} \mathbf{h}, \quad (6.2)$$

wobei n_{R} , ρ_{R} und P_{R} die Anzahldichte, Energiedichte und den Druck der Strahlungsflüssigkeit bezeichnen und $\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{g} - \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ ist wieder der Projektionsoperator auf die Ebene senkrecht zu \mathbf{V} .

Die Zustandsbeschreibung der CDM-Flüssigkeit während des Entkopplungsprozesses ist schwieriger, da die Expansion des Universums den Ausgleich von dissipative Prozessen behindert (schließlich sogar in gänzlich verhindert) und somit Abweichungen vom lokalen thermischen Gleichgewicht generiert werden. Das Fundament zur hydrodynamischen Beschreibung schwach dissipativer Prozesse haben wir in Abschnitt 4.2.6 gelegt. Danach sind die den Zustand der CDM-Flüssigkeit beschreibenden Lorentz-Tensoren durch

$$\mathbf{J} = n \mathbf{U} + \mathbf{J}^{(1)}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{T} = \rho(T, n) \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - P(T, n) \mathbf{h} + \mathbf{T}^{(1)}, \quad (6.4)$$

wobei n und T die Anzahldichte und die Temperatur in der CDM-Flüssigkeit bezeichnen. $\rho(T, n)$ und $P(T, n)$ sind die Energiedichte und der Druck und \mathbf{U} bezeichne das Geschwindigkeitsfeld. Der Projektor \mathbf{h} ist natürlich bezüglich \mathbf{U} definiert. Die Temperatur T in der CDM-Flüssigkeit ist nicht notwendig identisch mit der Temperatur T_{R} der Strahlungsflüssigkeit. $T \equiv T_{\text{R}}$ gilt genau dann, wenn beide Flüssigkeiten im lokalen thermischen Gleichgewicht sind, also insbesondere die CDM-Flüssigkeit. Im adiabatischen Grenzfall verschwinden alle Raum-Zeit-Gradienten, d.h. $\mathbf{J}^{(1)} \equiv \mathbf{0}$ und $\mathbf{T}^{(1)} \equiv \mathbf{0}$. Dann gilt $T \equiv T_{\text{R}}$ und $\mathbf{U} \equiv \mathbf{V}$.

Prinzipiell werden schwach dissipative Prozesse formal durch die Existenz zusätzlicher Lorentz-Tensoren $\mathbf{J}^{(1)}$ und $\mathbf{T}^{(1)}$ in die hydrodynamische Beschreibung miteinbezogen. Die Verteilung von dissipativen Phänomenen wie z. B. Wärmeleitung auf diese Tensoren ist allerdings nicht eindeutig. Damit sind auch die den Zustand der Flüssigkeit beschreibenden Größen nicht eindeutig definiert. Um Eindeutigkeit zu erzwingen, folgen wir dem Zugang von Eckart (Eckart, 1940), der durch die Forderungen (4.130)–(4.132) gegeben ist. Diese bedeuteten für die zusätzlichen Lorentz-Tensoren (4.146)

$$\mathbf{J}^{(1)} \equiv \mathbf{0}, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{T}^{(1)} = \zeta \mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{U} + \eta \mathbf{W}^{(T)} + \chi \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}^{(T)}) . \quad (6.6)$$

Die Tensoren wurden in Abschnitt X definiert, wir wiederholen hier lediglich die Phänomenologie. Die lokalen Koeffizienten ζ , η und χ heißen *Koeffizient der Volumenviskosität*, *Koeffizient der Scherviskosität* und *Wärmeleitungskoeffizient*. Die Volumenviskosität wird verursacht durch Quellen des lokalen Geschwindigkeitsfeldes in der Ebene senkrecht zum adiabatischen Fluß. Die Scherviskosität beschreibt das Wegbiegen von Stromfäden in Richtung der zum adiabatischen Fluß senkrechten Ebene. Die Wärmeleitung ist durch die Wärmestromdichte in der Ebene senkrecht zum adiabatischen Fluß in dem durch \mathbf{h} und \mathbf{U} bestimmten lokalen Volumen gegeben.

6.2 Kinetische Beschreibung

Wir sind nun an der kinetischen Beschreibung schwach dissipativer Prozesse interessiert. Zur Konkretisierung dieser Einschränkung könnten wir wieder bestimmte Bedingungen an die in der hydrodynamischen Beschreibung verwendeten Lorentz-Tensoren \mathbf{J} und \mathbf{T} stellen. Dies ist im kinetischen Zugang aber nicht natürlich, da hier \mathbf{J} und \mathbf{T} als erstes und zweites Moment der Einteilchen-Verteilungsfunktion F bezüglich des Impulses definiert sind. Die grundlegende Größe ist also F und die Einschränkung auf schwach dissipative Prozesse bedeutet in dieser Arbeit folgende Einschränkung für F :

$$F = F^{(0)} + F^{(1)} \quad \text{mit} \quad |F^{(1)}| \ll F^{(0)} , \quad (6.7)$$

wobei $F^{(0)}$ die Bose-Einstein- bzw. Fermi-Dirac-Verteilung bezeichne. Der Ansatz (6.7) ist also gleichbedeutend mit der Aussage, daß sich die durch F beschriebenen Teilchen fast im thermischen Gleichgewicht befinden.

Das von uns betrachtete physikalische System besteht aus einer relativistischen Flüssigkeit im globalen Gleichgewicht und Neutralinos nahe am lokalen Gleichgewicht. Die Flüssigkeit modelliert den kollektiven Fluß aller relativistischen Teilchen entlang des Stromfadens mit dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{V} bei der lokalen Temperatur T_R . Die Neutralinos bleiben über Wechselwirkungen mit der Flüssigkeit nahe am Gleichgewicht. Den Neutralinos wird in der kinetischen Beschreibung weiterhin ein lokales pseudochemisches Potential α zugeordnet. Die Fermi-Dirac-Verteilung der Neutralinos ist dann

$$F^{(0)} = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{p \cdot V}{T_R} - \alpha\right) + 1} . \quad (6.8)$$

Die hier vorgestellte Methode gilt generell für Systeme, die sich aus einem Subsystem von Teilchen nahe dem thermischen Gleichgewicht und einer als Wärmebad fungierenden Flüssigkeit zusammensetzen. Die Beschreibung setzt voraus, daß die durch F

beschriebenen Teilchen selbst einmal Teil der Flüssigkeit waren oder zumindestens durch Wechselwirkungen mit der Flüssigkeit fast in dem durch die Flüssigkeit gegebenen thermodynamischen Zustand gehalten werden. Die Wechselwirkungen mit der Flüssigkeit sind durch die der kinetischen Beschreibung zu Grunde liegende Quantenfeldtheorie definiert.

Die Flüssigkeit definiert lokal eine durch \mathbf{V} definierte Vorzugsrichtung. Wir definieren für den Impuls \mathbf{p} der Neutralinos parallele \mathbf{p}_{\parallel} und transversale Anteile \mathbf{p}_{\perp} durch: $\mathbf{p}_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \omega \mathbf{V}$ mit $\omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \cdot \mathbf{V}$ und $\mathbf{p}_{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} |\tilde{\mathbf{p}}| \mathbf{n}$, wobei $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$ und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$ gilt. Es ist dann $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\parallel} + \mathbf{p}_{\perp} = \omega \mathbf{V} + |\tilde{\mathbf{p}}| \mathbf{n}$. Ein von Null verschiedener Vierervektor \mathbf{p}_{\perp} existiert immer, jedoch gilt im lokalen thermischen Gleichgewicht, daß der thermische Mittelwert von \mathbf{p}_{\perp} bezüglich der Gleichgewichtsverteilung (6.8) verschwindet. In der hydrodynamischen Beschreibung haben wir gezeigt, daß dissipative Prozesse ausschließlich durch zu \mathbf{V} transversale Lorentz-Strukturen gegeben sind. Entlang des durch \mathbf{V} definierten Stromfadens gibt es keine dissipativen Effekte und damit auch keine Abweichung vom lokalen thermischen Gleichgewicht.

Das Problem besteht nun darin, $F^{(1)}$ zu bestimmen. F soll Lösung der Boltzmann-Gleichung (3.49) sein, also

$$(\mathbf{p} \cdot \nabla) F = J(F, F) , \quad (6.9)$$

wobei J das Kollisionsintegral bezeichne. Einsetzen von (6.7) liefert in erster Ordnung in $F^{(1)}$ unter Vernachlässigung aller Ableitungen von $F^{(1)}$

$$(\mathbf{p} \cdot \nabla) F^{(0)} = \mathcal{L} [F^{(1)}] . \quad (6.10)$$

\mathcal{L} ist ein lineares Funktional in $F^{(1)}$ und durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [H(\mathbf{p})] \stackrel{\text{def}}{=} & \int d\mathbf{e} \int d\mathbf{p}_1 \quad |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1| \sigma(\theta, |\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|) \\ & \left[F^{(0)}(\tilde{\mathbf{p}}) H(\tilde{\mathbf{p}}_1) + F^{(0)}(\tilde{\mathbf{p}}_1) H(\tilde{\mathbf{p}}) \right. \\ & \left. - F^{(0)}(\mathbf{p}) H(\mathbf{p}_1) + F^{(0)}(\mathbf{p}_1) H(\mathbf{p}) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

für alle impulsabhängigen Funktionen H definiert. Wir haben hier die Raum-Zeit-Abhängigkeit nicht explizit notiert. Der Dreier-Einheitsvektor \mathbf{e} und der Streuwinkel θ sind folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{e} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}_1}{|\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}_1|} , \quad \cos \theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}_1}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1|} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}_1}{|\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{p}}_1|} . \quad (6.12)$$

Die Bestimmungsgleichung (6.10) für $F^{(1)}$ ist nur dann korrekt, wenn $F^{(0)}$ als lokale Maxwell-Verteilung geschrieben werden kann. Andernfalls ist $J(F^{(0)}, F^{(0)}) \neq 0$.

$F^{(1)}$ wird eine Funktion von ω^1 , \mathbf{p}_\perp oder \mathbf{n} und \mathbf{x} sein. Wir entwickeln $F^{(1)}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{x})$ in Polynome von \mathbf{n} und \mathbf{h} :

$$F^{(1)}(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) + \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) + \dots \quad (6.13)$$

Hierbei ist \mathbf{A} eine skalare Funktion, die nach unseren Erfahrungen mit den Quelldichten des Geschwindigkeitsfeldes zusammenhängen sollte. Der Vierervektor \mathbf{B} sollte proportional zur transversalen Wärmestromdichte $\mathbf{Q}^{(T)}$ und die 4×4 -Matrix sollte proportional zum transversalen Scherungstensor $\mathbf{W}^{(T)}$ sein. Die Punkte deuten weitere Polynome an, die über die hier und in der hydrodynamischen Beschreibung gemachten Näherungen hinausführen und deshalb vernachlässigt werden. Wir unterdrücken im weiteren die Punkte.

Die Bestimmungsgleichung (6.10) für $F^{(1)}$ stellt uns vor das Problem, die Wirkung von \mathcal{L} auf die Entwicklung (6.13) zu erklären. Dazu nutzen wir aus, daß F invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Nun gibt es lokal immer eine durch \mathbf{V} definierte Vorzugsrichtung. Sei G_x die Menge aller Lorentz-Transformationen die $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ invariant lassen. Dies sind aber gerade alle Drehungen um die durch $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ definierte Achse. Also ist G_x isomorph zur Lie-Gruppe $SO(3)$. Wir können diesen Sachverhalt auch so formulieren: G_x ist bezüglich $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ die kleine Gruppe, deren Darstellung eine Darstellung der Lorentz-Gruppe induziert. Aus (6.10) folgt, daß das lineare Funktional \mathcal{L} ein Skalar bezüglich der kleinen Gruppe G_x ist. Daher operiert \mathcal{L} auf den von den Polynomen in \mathbf{n} und \mathbf{h} aufgespannten Unterräumen lokal wie ein Vielfaches des Einheitsoperators. Wir notieren:

$$\mathcal{L} [F^{(1)}] = -\omega \left[\kappa_0 \mathbf{A} + \kappa_1 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} + \kappa_2 \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) \right] . \quad (6.14)$$

Der Vorfaktor ω wurde nur aus Gründen der Konvention aus den Funktionen $\kappa_j(\omega, \mathbf{x})$, $j \in \{0, 1, 2\}$ herausgezogen.

Die kinetische Gleichung (6.10) ist jetzt eine Bestimmungsgleichung für die Tensoren \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} . Da die Entwicklung (6.14) von $\mathcal{L} [F^{(1)}]$ eine Entwicklung nach irreduziblen Polynomen in \mathbf{n} sind, können die Tensoren \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} aus dieser Entwicklung herausprojiziert werden. Dazu definieren wir eine zweidimensionale Hyperfläche $S \stackrel{\text{def}}{=} \{p \mid p^2 = M^2, p^0 \geq 0 \text{ and } \omega = \text{const.}\}$ und ein Maß $d\Omega$ auf S mit

$$\int_S d\Omega = 1 . \quad (6.15)$$

Die irreduziblen Polynome in \mathbf{n} und \mathbf{h} sind bezüglich $d\Omega$ orthogonal und es gelten folgende Normierungsrelationen:

$$\int_S d\Omega \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = -\frac{1}{3} \mathbf{h} , \quad (6.16)$$

¹Im mitbewegten Bezugssystem ist $\omega = p^0$ die Energie der Neutralinos.

$$\int_S d\Omega \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) \otimes \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) = \frac{1}{15} \text{Sym}(\mathbf{h} \otimes \mathbf{h}) - \frac{1}{9} \mathbf{h} \otimes \mathbf{h}. \quad (6.17)$$

Für das nullte, erste und zweite Moment von $\mathcal{L}[F^{(1)}]$ bezüglich \mathbf{n} erhalten wir mit (6.16)–(6.17)

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\omega\kappa_0} \int_S d\Omega \mathcal{L}[F^{(1)}] = -\frac{1}{\omega\kappa_0} \int_S d\Omega (\mathbf{p} \cdot \nabla) F^{(0)}, \quad (6.18)$$

$$\mathbf{B} = +\frac{3}{\omega\kappa_1} \int_S d\Omega \mathbf{n} \mathcal{L}[F^{(1)}] = +\frac{3}{\omega\kappa_1} \int_S d\Omega \mathbf{n} (\mathbf{p} \cdot \nabla) F^{(0)}, \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -\frac{15}{2} \frac{1}{\omega\kappa_2} \int_S d\Omega \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) \mathcal{L}[F^{(1)}] \\ &= -\frac{15}{2} \frac{1}{\omega\kappa_2} \int_S d\Omega \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) (\mathbf{p} \cdot \nabla) F^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \nabla) F^{(0)} &= \frac{\omega}{T_R} \Phi' \left[\frac{1}{\omega} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{V}) - \frac{1}{T_R} (\mathbf{p} \cdot \nabla) T_R \right. \\ &\quad \left. - \frac{T_R}{\omega} (\mathbf{p} \cdot \nabla) \alpha \right], \end{aligned} \quad (6.21)$$

wobei $\Phi'(\omega/T_R - \alpha)$ die äußere Ableitung von $F^{(0)}$ bezeichne. Für die Berechnung der Tensoren \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} benötigen wir die Integrale

$$\int_S d\Omega \mathbf{p} = \omega \mathbf{V}, \quad (6.22)$$

$$\int_S d\Omega \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} = \omega^2 \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - \frac{1}{3} (\omega^2 - M^2) \mathbf{h}, \quad (6.23)$$

$$\int_S d\Omega \mathbf{n} \otimes \mathbf{p} = -\frac{1}{3} (\omega^2 - M^2) \mathbf{h}, \quad (6.24)$$

$$\int_S d\Omega \mathbf{n} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} = -\frac{1}{3} \omega (\omega^2 - M^2) [\text{Sym}(\mathbf{h} \otimes \mathbf{V}) - \mathbf{V} \otimes \mathbf{h}], \quad (6.25)$$

$$\int_S d\Omega \left(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{h} \right) \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} = \frac{1}{15} (\omega^2 - M^2) \mathbf{W}^{(T)}. \quad (6.26)$$

Für den Beweis der Beziehungen (6.22)–(6.26) werden lediglich die Definitionen von \mathbf{p}_{\parallel} und \mathbf{p}_{\perp} und die Normierungsrelationen (6.16)–(6.17) benutzt. Folgende Ersetzungen können dazu im Integranden vorgenommen werden: $(\mathbf{p} \cdot \nabla) T_R \rightarrow \omega (\mathbf{V} \cdot \nabla) T_R$ und $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{V} \rightarrow (\omega^2 - M^2) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{V}$. Wir erhalten für die gesuchten Tensoren

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\kappa_0} \frac{\omega \Phi'}{T_R} \left[\frac{\dot{T}_R}{T_R} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{M^2}{\omega^2} \right) \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{T_R}{\omega} \dot{\alpha} \right], \quad (6.27)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\kappa_1} \frac{\omega \Phi'}{T_R} \left(1 - \frac{M^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \cdot \left[\frac{1}{T_R} \mathbf{Q} + \frac{T_R}{\omega} \nabla \alpha \right], \quad (6.28)$$

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{\kappa_2} \frac{\omega \Phi'}{T_R} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M^2}{\omega^2}\right) \mathbf{W}^{(T)}. \quad (6.29)$$

Der Skalar (6.27) entspricht nicht unseren Erwartungen– wir hatten ja aufgrund der hydrodynamischen Beschreibung erwartet, daß $\mathbf{A} \sim \nabla \cdot \mathbf{V}$ sein sollte. Der zweite Summand in (6.27) zeigt die erwartete Abhängigkeit, die anderen Terme dagegen sind proportional zur Änderung von T_R und α entlang des adiabatischen Stromes. Für diese Größen können daher adiabatische Relationen hergeleitet werden, die diese zu $\nabla \cdot \mathbf{V}$ in Beziehung setzen. Für adiabatische Prozesse gilt Hofmann et al. (2001) $\dot{T} = -T (\partial P / \partial \rho)_n \nabla \cdot \mathbf{V}$ und $T \dot{\alpha} = -(\partial P / \partial n)_\rho \nabla \cdot \mathbf{V}$ gilt. Auch der Vierervektor \mathbf{B} entspricht nicht unseren Erwartungen– aufgrund der hydrodynamischen Beschreibung hatten wir erwartet, daß $\mathbf{B} \sim \mathbf{Q}^{(T)}$ sein sollte. Der erste Summand in (6.28) zeigt diese Proportionalität, jedoch ist der zweite Summand proportional zur Änderung des pseudochemischen Potential α in einer zum adiabatischen Fluß senkrechten Richtung. Die Variation von α in der Ebene \mathbf{h} wird durch die transversale Wärmestromdichte $\mathbf{Q}^{(T)}$ generiert, genauer gilt $T \mathbf{h} \cdot \nabla \alpha = -(w/nT) \mathbf{Q}^{(T)}$. Wir erhalten als erstes Ergebnis:

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{\kappa_0} \frac{\omega \Phi'}{T_R} \left[(P, \rho | n) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{M^2}{\omega^2}\right) + \frac{1}{\omega} (P, n | \rho) \right] \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (6.30)$$

$$\mathbf{B} = +\frac{1}{\kappa_1} \frac{\omega \Phi'}{T_R} \left(1 - \frac{M^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \left[\frac{\omega}{T_R} - \frac{w}{nT_R} \right] \mathbf{Q}^{(T)}, \quad (6.31)$$

$$\mathbf{C} = -\frac{1}{\kappa_2} \frac{\omega \Phi'}{T_R} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M^2}{\omega^2}\right) \mathbf{W}^{(T)}. \quad (6.32)$$

6.2.1 Die Stromdichte

In der kinetischen Beschreibung ist die Stromdichte \mathbf{J}_{kin} der CDM–Teilchen als erstes Moment von F bezüglich \mathbf{p} definiert:

$$\mathbf{J}_{\text{kin}} \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{p^0} \mathbf{p} F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{x}). \quad (6.33)$$

\mathbf{J}_{kin} kann als lineares Funktional von F betrachtet werden. Dann folgt aus unserem Ansatz (6.7), daß $\mathbf{J}_{\text{kin}}[F] = \mathbf{J}_{\text{kin}}^{(0)} + \mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}$ mit $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}[F^{(0)}]$ und $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}[F^{(1)}]$. Die adiabatische Stromdichte ist

$$\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(0)} = n_{\text{kin}}^{(0)} \mathbf{V}, \quad \text{mit} \quad n_{\text{kin}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi \int_M^\infty d\omega \left(\omega^2 - M^2\right)^{1/2} \omega \Phi. \quad (6.34)$$

Hierbei bezeichne $n_{\text{kin}}^{(0)}$ die Anzahldichte der CDM–Teilchen in der kinetischen Beschreibung. Diese Definition ist gerechtfertigt, da das Integral für $T_{\text{R}}/M \ll 1$ gegen $g(MT_{\text{R}}/2\pi)^{3/2} \exp(-M/T_{\text{R}} - \alpha)$ konvergiert. Dieser Grenzwert ist aber gerade die Teilchenzahldichte für nichtrelativistische Teilchen.

Die Stromdichte $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}$ ist ebenfalls ein lineares Funktional. Einsetzen von (6.13) liefert drei Vierervektoren $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}[\mathbf{A}]$, $\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]$ und $\mathbf{J}_{\mathbf{C}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 1/3 \mathbf{h})]$. Der Vierervektor $\mathbf{J}_{\mathbf{C}}^{(1)}$ ist allerdings Null, da das Integral auf S über eine ungerade Potenz von \mathbf{n} und $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 1/3 \mathbf{h}$ verschwindet. Der Vierervektor $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{(1)}$ ist parallel zu \mathbf{V} und damit zu $\mathbf{J}^{(0)}$. Wir schreiben daher $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}^{(1)} = n_{\text{kin}}^{(1)} \mathbf{V}$, wobei die Proportionalitätskonstante unten definiert ist. Der Vierervektor $\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{(1)}$ schließlich ist parallel zu \mathbf{B} und damit auch zur transversalen Wärmestromdichte $\mathbf{Q}^{(T)}$. Wir nennen daher $\mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{(1)}$ Diffusionsstromdichte und schreiben hierfür \mathbf{J}_{diff} . Insgesamt finden wir

$$\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)} = n_{\text{kin}}^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{J}_{\text{diff}} , \quad (6.35)$$

wobei die durch \mathbf{A} generierte Modifikation $n_{\text{kin}}^{(1)}$ der Teilchenzahldichte und die durch \mathbf{B} generierte Diffusionsstromdichte \mathbf{J}_{diff} folgendermaßen definiert sind:

$$n_{\text{kin}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi \int_M^\infty d\omega (\omega^2 - M^2)^{1/2} \omega \mathbf{A} , \quad (6.36)$$

$$\mathbf{J}_{\text{diff}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{4\pi}{3} \int_M^\infty d\omega (\omega^2 - M^2) \mathbf{B} . \quad (6.37)$$

Es erweist sich als nützlich, folgende Notation einzuführen:

$$f_a^{(ij)} \stackrel{\text{def}}{=} -4\pi \int_M^\infty d\omega (\omega^2 - M^2)^{i/2} \omega^j \frac{\Phi'}{T_{\text{R}} \kappa_a} , \quad i, j \in Z , a \in \{0, 1, 2\} . \quad (6.38)$$

Der Index a bezeichnet die Stufe der zu $1/\kappa_a$ proportionalen Lorentz–Tensoren (6.30)–(6.32). Das Indexpaar (ij) gibt mit $i + j$ die Massendimension der Funktionen $f_a^{(ij)}$ an. In der Notation (6.38) erhalten wir

$$n_{\text{kin}}^{(1)} = \left[f_0^{(1,2)} (P, \rho | n) - f_0^{(3,0)} \frac{1}{3} + f_0^{(1,1)} (P, n | \rho) \right] \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad (6.39)$$

$$\mathbf{J}_{\text{diff}} = \frac{1}{3T_{\text{R}}} \left[f_1^{(3,0)} - f_1^{(3,-1)} \frac{w}{n} \right] \mathbf{Q}^{(T)} . \quad (6.40)$$

Die Existenz eines von Null verschiedenen Lorentz–Tensors $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}$, für den außerdem noch $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)} \cdot \mathbf{V} = n_{\text{kin}}^{(1)} \neq 0$ gilt, zeigt bereits, daß ein Vergleich der hier vorgestellten kinetischen Beschreibung mit der hydrodynamischen Beschreibung nicht ohne Weiteres möglich ist. Besonders schwer wiegt hier, daß $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}$ einen Beitrag in Richtung des adiabatischen Flusses enthält und damit thermodynamische Information beinhaltet.

6.2.2 Der Energie–Impuls–Tensor

In der kinetischen Beschreibung ist der Energie–Impuls–Tensor \mathbf{T}_{kin} als zweites Moment von F bezüglich \mathbf{p} definiert:

$$\mathbf{T}_{\text{kin}} \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^0} \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} F(\omega, \mathbf{n}, \mathbf{x}) . \quad (6.41)$$

\mathbf{T}_{kin} kann als lineares Funktional von F betrachtet werden. Dann folgt aus unserem Ansatz (6.7), daß $\mathbf{T}_{\text{kin}} = \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(0)} + \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}$ mit $\mathbf{T}_{\text{kin}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{kin}}[F^{(0)}]$ und $\mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{kin}}[F^{(1)}]$. Der adiabatische Energie–Impuls–Tensor ist

$$\mathbf{T}_{\text{kin}}^{(0)} = \rho_{\text{kin}}^{(0)} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - P_{\text{kin}}^{(0)} \mathbf{h} , \quad \text{mit} \quad (6.42)$$

$$\rho_{\text{kin}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi \int_M^\infty d\omega \left(\omega^2 - M^2\right)^{1/2} \omega^2 \Phi , \quad (6.43)$$

$$P_{\text{kin}}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4\pi}{3} \int_M^\infty d\omega \left(\omega^2 - M^2\right)^{3/2} \Phi . \quad (6.44)$$

Hierbei bezeichne $\rho_{\text{kin}}^{(0)}$ die Energiedichte der CDM–Teilchen und $P_{\text{kin}}^{(0)}$ ihren Druck in der kinetischen Beschreibung. Die Definition von $\rho_{\text{kin}}^{(0)}$ ist gerechtfertigt, da das Integral für $T_{\text{R}}/M \ll 1$ gegen $n_{\text{kin}}^{(0)}M$ mit $n_{\text{kin}}^{(0)} = g(MT_{\text{R}}/2\pi)^{(3/2)} \exp(-M/T_{\text{R}} - \alpha)$ konvergiert. Dieser Grenzwert ist aber gerade die Energiedichte nichtrelativistischer Teilchen. Die Definition von $P_{\text{kin}}^{(0)}$ ist berechtigt, da das Integral für $T_{\text{R}}/M \ll 1$ gegen $n_{\text{kin}}^{(0)}T_{\text{R}}$ konvergiert. Dieser Grenzwert ist aber gerade der Druck nichtrelativistischer Teilchen.

Der Lorentz–Tensor $\mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}$ ist ebenfalls ein lineares Funktional. Einsetzen von (6.13) liefert drei Lorentz–Tensoren $\mathbf{T}_{\mathbf{A}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}[\mathbf{A}]$, $\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}]$ und $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}[\mathbf{C} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - 1/2 \mathbf{h})]$.

Da \mathbf{A} ein Lorentz–Skalar ist, wird die Tensorstruktur von $\mathbf{T}_{\mathbf{A}}^{(1)}$ durch (6.23) generiert und ist damit identisch mit der Tensorstruktur von $\mathbf{T}^{(0)}$. Die Koeffizienten vor $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ und \mathbf{h} können damit als Energiedichte $\rho_{\text{kin}}^{(1)}$ und Druck $P_{\text{kin}}^{(1)}$ interpretiert werden, die durch Quellen und Senken im Geschwindigkeitsfeld \mathbf{V} generiert werden. In der Notation (6.38) finden wir

$$\mathbf{T}_{\mathbf{A}}^{(1)} = \rho_{\text{kin}}^{(1)} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} - P_{\text{kin}}^{(1)} \mathbf{h} , \quad \text{mit} \quad (6.45)$$

$$\rho_{\text{kin}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \left[f_0^{(1,3)}(P, \rho | n) - f_0^{(3,1)} \frac{1}{3} + f_0^{(1,2)}(P, n | \rho) \right] \nabla \cdot \mathbf{V} , \quad (6.46)$$

$$P_{\text{kin}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \left[f_0^{(3,1)}(P, \rho | n) - f_0^{(5,-1)} \frac{1}{3} + f_0^{(1,2)}(P, n | \rho) \right] \nabla \cdot \mathbf{V} . \quad (6.47)$$

Die Zustandsgrößen n , ρ und P stammen von den adiabatischen Relationen, die zur Elimination von \dot{T} , $\dot{\alpha}$ und $\mathbf{h} \cdot \nabla \alpha$ benutzt wurden. \mathbf{A} generiert einen Beitrag zu $\mathbf{T}_{\mathbf{A}}^{(1)}$ mit der Eigenschaft $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{A}}^{(1)} = \rho_{\text{kin}}^{(1)} \neq 0$. Damit unterscheidet sich der in der kinetischen Beschreibung auftretende Tensor $\mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}$ wesentlich von dem zur Beschreibung dissipativer hydrodynamischer Prozesse verwendeten Tensor $\mathbf{T}^{(1)}$.

Die Tensorstruktur von $\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)}$ wird durch (6.25) generiert und ist daher proportional zur transversalen Wärmestromdichte $\text{Sym}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{Q}^{(T)})$. Die Tensorstruktur von $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{(1)}$ wird durch (6.26) generiert und ist daher proportional zum transversalen Scherungstensor $\mathbf{W}^{(T)}$. Wir erhalten

$$\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)} = \frac{1}{3T_{\text{R}}} \left[f_1^{(3,1)} - f_1^{(3,0)} \frac{w}{n} \right] \text{Sym}(\mathbf{V} \otimes \mathbf{Q}^{(T)}) , \quad (6.48)$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{(1)} = \frac{1}{15} f_2^{(5,-1)} \mathbf{W}^{(T)} . \quad (6.49)$$

Die Lorentz-Tensoren $\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)}$ und $\mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{(1)}$ sind transversal im Sinne von $(\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)} = (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \cdot \mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{(1)} = 0$. Im Hinblick auf den Vergleich mit der hydrodynamischen Beschreibung bereiten sie daher keine Probleme.

6.3 Die lokalen Transportkoeffizienten

Ein direkter Vergleich der hydrodynamischen und kinetischen Beschreibung zur Bestimmung der lokalen Transportkoeffizienten (4.104)–(4.106) ist nicht möglich, da die in der kinetischen Beschreibung berechneten Lorentz-Tensoren (6.35) und (6.45)–(6.49) wesentlich verschieden von denen in Eckarts Formulierung der Hydrodynamik nicht-idealer Flüssigkeiten verwendeten sind. Wir stellen die wesentlichen Unterschiede im folgenden zusammen:

$$\mathbf{J}^{(1)} = \mathbf{0} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)} = n_{\text{kin}}^{(1)} \mathbf{V} + \mathbf{J}_{\text{diff}} , \quad (6.50)$$

$$(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad (\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}) \cdot \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)} = \rho_{\text{kin}}^{(1)} . \quad (6.51)$$

Zunächst fällt auf, daß in $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}$ ein Term proportional zum lokalen Geschwindigkeitsfeld auftritt, der einen Beitrag zur Anzahldichte $\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}_{\text{kin}}$ liefert und durch den Lorentz-Skalar \mathbf{A} generiert wird. Dieser Term alleine bedeutete kein Problem, der Zusammenhang zwischen der hydrodynamischen Definition der Anzahldichte und der kinetischen wäre einfach $n \equiv n_{\text{kin}}^{(0)} + n_{\text{kin}}^{(1)}$. Die Tatsache, daß $F^{(1)}$ einen Beitrag generiert, der zur adiabatischen Anzahldichte n beiträgt, ist ein Artefakt der kinetischen Beschreibung. In der hydrodynamischen Beschreibung sind alle Abweichungen vom adiabatischen Verhalten in der Formulierung nach Eckart geometrisch durch transversale Tensoren charakterisiert. In dieser Formulierung ist es also gleichbedeutend, von Störungen des lokalen thermodynamischen Gleichgewichtes oder von

transversalen Tensorstrukturen zu sprechen. Diesen Vorteil verlieren wir in der kinetischen Beschreibung. Der Grund hierfür ist, daß eine Entwicklung von $F^{(1)}$ nach Polynomen in \mathbf{n} und \mathbf{h} nur dann vollständig ist, wenn ein Term proportional zur identischen Abbildung in dieser Entwicklung auftritt. Dieser Term ist in unserem Fall proportional zur Quelldichte des Geschwindigkeitsfeldes und damit nicht transversal. Außerdem tritt in $\mathbf{J}^{(1)}$ noch ein Term proportional zur transversalen Stromdichte auf, der durch den Vierervektor \mathbf{B} generiert wird. Damit besitzt $\mathbf{J}_{\text{kin}}^{(1)}$ eine nichtverschwindende transversale Tensorstruktur, die nicht so einfach wie der durch \mathbf{A} generierte Beitrag in $\mathbf{J}^{(0)}$ subsumiert werden kann. Wir hatten bereits bei der Formulierung beider Beschreibungen zugelassen, daß die jeweils verwendeten Vierergeschwindigkeiten nicht übereinstimmen müssen. In der hydrodynamischen Beschreibung nach Eckart (Eckart, 1940) war das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{U} alleine durch den adiabatischen Fluß bestimmt. Solch eine Restriktion für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{V} kann in der kinetischen Beschreibung nicht formuliert werden, da die Stromdichte \mathbf{J}_{kin} als erstes Moment von F bezüglich des Teilchenimpulses eingeführt wird und damit eine abgeleitete Größe ist. Ein Vergleich zwischen der hydrodynamischen und der kinetischen Beschreibung ist nur möglich, wenn eine Transformation von \mathbf{V} nach \mathbf{U} existiert, so daß $\mathbf{J}_{\text{kin}} = n\mathbf{U}$ mit $n \equiv n_{\text{kin}}^{(0)} + n_{\text{kin}}^{(1)}$ gilt. Wir finden

$$\mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{U} - n^{-1} \mathbf{J}_{\text{diff}} . \quad (6.52)$$

Die Transformation (6.52) eliminiert die Diffusionsstromdichte aus \mathbf{J}_{kin} . Der Unterschied (6.50) zur hydrodynamischen Beschreibung ist damit aufgehoben. Allerdings generiert (6.52) neue Beiträge zum Energie–Impuls–Tensor, die wir im Folgenden untersuchen wollen.

Die Transformation (6.52) mit $n \equiv n_{\text{kin}}^{(0)} + n_{\text{kin}}^{(1)}$ generiert einen Beitrag im Energie–Impuls–Tensor, dessen Tensorstruktur mit der Tensorstruktur von $\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)}$ übereinstimmt:

$$\rho_{\text{kin}}^{(0)} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} = \rho_{\text{kin}}^{(0)} \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \frac{\rho_{\text{kin}}^{(0)}}{n} \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{J}_{\text{diff}}) + \mathcal{O}(\mathbf{J}_{\text{diff}} \otimes \mathbf{J}_{\text{diff}}) . \quad (6.53)$$

Die Transformation bewirkt auch eine Modifikation der Wärmeleitung, \mathbf{J}_{diff} ist ja proportional zur transversalen Wärmestromdichte im Volumen $\mathbf{U} \otimes \mathbf{h}$. Diese Modifikation bereitet keine weiteren Schwierigkeiten, da die auftretenden Tensoren legitim sind. Da wir uns auf schwach dissipative Prozesse eingeschränkt haben, vernachlässigen wir alle Terme, die Produkte von $\nabla \cdot \mathbf{U}$, $\mathbf{Q}^{(T)}$ und $\mathbf{W}^{(T)}$ beinhalten. Damit wird aus (6.52) in $\mathbf{T}^{(1)}$ einfach $\mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{U}$.

Wir wenden uns nun der unterschiedlichen Definition der Energiedichte (6.51) in der hydrodynamischen und kinetischen Beschreibung zu. In der kinetischen Beschreibung generiert der Lorentz–Skalar \mathbf{A} einen Beitrag mit der Tensorstruktur $\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}$. In der mehr geometrischen Formulierung von Eckart sollte diese Tensorstruktur nur in der adiabatischen Beschreibung auftreten. Mit anderen Worten: vom Standpunkt

der hydrodynamischen Beschreibung aus beinhaltet $F^{(0)}$ nicht die gesamte adiabatische Physik. Das Problem läßt sich auch nicht so trivial lösen, wie das Problem mit der unterschiedlichen Definition für die Anzahldichte, da ρ als Funktion der Temperatur T_R und der Anzahldichte n vorliegt. Tatsächlich ist die Temperatur in der hydrodynamischen und der kinetischen Beschreibung unterschiedlich definiert. In der kinetischen Beschreibung ist mit der Temperatur T_R die Temperatur der Teilchen gemeint, die während der kinetischen Entkopplung der CDM–Teilchen und danach im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht sind, das sind die Photonen und alle Leptonen. In der hydrodynamischen Beschreibung ist die Temperatur erst durch die Forderung $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}^{(1)} = 0$ fixiert und dies induziert eine eindeutige Definition der Energiedichte. Gleichsetzen von $\rho(T, n)$ und $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}_{\text{kin}}(T_R, n_{\text{kin}})$ liefert für die Differenz der Temperaturen

$$T_R - T = (\rho, T | n)^{-1} \left[n_{\text{kin}}^{(1)} (\rho, n | T) - \rho_{\text{kin}}^{(1)} \right] + \mathcal{O} \left(n_{\text{kin}}^{(1) 2}, \rho_{\text{kin}}^{(1) 2}, n_{\text{kin}}^{(1)} \rho_{\text{kin}}^{(1)} \right), \quad (6.54)$$

wobei wir wegen der Einschränkung auf schwach dissipative Prozesse die Taylor–Reihen–Entwicklung nur bis einschließlich erster Ordnung in $n_{\text{kin}}^{(1)}$ und $\rho_{\text{kin}}^{(1)}$ berechnen. Da alle Ableitungen an der Stelle (T, n) ausgewertet werden, unterdrücken wir den Index *kin* im Weiteren. Die Transformation (6.52) mit $n \equiv n_{\text{kin}}^{(0)} + n_{\text{kin}}^{(1)}$ und die Entwicklung (6.54) erlauben uns nun, den Energie–Impuls–Tensor \mathbf{T}_{kin} in der kinetischen Beschreibung durch T , n und \mathbf{U} auszudrücken:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{kin}}(T, n) &= \rho(T, n) \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - P(T, n) \mathbf{h} \\ &+ \left[(P, n | \rho) n_{\text{kin}}^{(1)} + (P, \rho | n) \rho_{\text{kin}}^{(1)} - P_{\text{kin}}^{(1)} \right] (T, n) \mathbf{h} \\ &+ \mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)}(T, n) - \frac{w}{n} \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{J}_{\text{diff}})(T, n) \\ &+ \mathbf{T}_{\mathbf{C}}^{(1)}(T, n). \end{aligned} \quad (6.55)$$

Zunächst stellen wir fest, daß alle in (6.55) auftretenden Tensoren legitim im Sinne der hydrodynamischen Beschreibung sind. Die erste Zeile ist der adiabatische Energie–Impuls–Tensor. In der zweiten Zeile finden sich alle durch den Lorentz–Skalar \mathbf{A} generierten Beiträge. Da $n_{\text{kin}}^{(1)}$, $\rho_{\text{kin}}^{(1)}$ und $P_{\text{kin}}^{(1)}$ proportional zu $\nabla \cdot \mathbf{U}$ sind, ist die zweite Zeile proportional zu $\mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{U}$ und liefert somit einen Beitrag zum Koeffizienten der Volumenviskosität. Die dritte Zeile ist proportional zu $\text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}^{(T)})$ und liefert damit einen Beitrag zum Wärmeleitungskoeffizienten. Die letzte Zeile schließlich ist proportional zu $\mathbf{W}^{(T)}$ und damit zum Koeffizienten der Scherungsviskosität. Die Transformation des Energie–Impuls–Tensors auf die in Eckarts Formulierung verwendeten Zustandsgrößen liefert ein $\mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)}$ mit der Eigenschaft $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}_{\text{kin}}^{(1)} = 0$, d. h. alle dissipativen Phänomene werden jetzt auch in der kinetischen Beschreibung durch zum adiabatischen Fluß transversale Lorentz–Strukturen repräsentiert.

Der geometrische Inhalt der Bilanzgleichungen für den Energie–Impuls–Tensor und den Entropiestrom ist damit enger an die Existenz dissipativer Phänomene geknüpft.

Aus dem legitimen Vergleich mit (6.6) folgen die lokalen Transportkoeffizienten der Volumenviskosität ζ , der Scherviskosität η und der Wärmeleitung χ :

$$\begin{aligned} \zeta &= f_0^{(1,3)} (P, \rho | n)^2 + f_0^{(1,1)} (P, n | \rho)^2 - \frac{2}{3} f_0^{(3,1)} (P, \rho | n) + \frac{1}{9} f_0^{(5,-1)} \\ &\quad + 2 f_0^{(1,2)} (P, \rho | n) (P, n | \rho) - \frac{2}{3} f_0^{(3,0)} (P, n | \rho) , \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\eta = \frac{1}{15} f_2^{(5,-1)} , \quad (6.57)$$

$$T \chi = \frac{1}{3} \left[f_1^{(3,1)} - 2 \frac{w}{n} f_1^{(3,0)} + \left(\frac{w}{n} \right)^2 f_1^{(3,-1)} \right] . \quad (6.58)$$

Die lokalen Transportkoeffizienten (6.56)–(6.58) beschreiben schwach dissipative Prozesse ganz allgemein für eine Teilchenart mit $\mathbf{p} = \omega \mathbf{V} + |\mathbf{p}| \mathbf{n}$ in Wechselwirkung mit einem Wärmebad, das lokal als adiabatische Flüssigkeit mit dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{V} modelliert wird.

6.3.1 Dissipative Prozesse in CDM

Dissipative Phänomene in CDM treten unmittelbar vor und während der kinetischen Entkopplung auf. In diesem Stadium ist die Relaxationszeit τ der CDM vergleichbar zur Hubble-Zeit $1/H$. Kollektive dissipative Phänomene formieren sich also gerade erst und können durch eine Relaxationszeit–Näherung des linearen Funktionals \mathcal{L} adäquat beschrieben werden:

$$\mathcal{L} [F^{(1)}] \approx -\omega \tau^{-1} F^{(1)} . \quad (6.59)$$

Diese Näherung bedeutet für die Funktionen $\kappa_a(\omega, \mathbf{x}) = \tau^{-1}$, $\forall a \in \{0, 1, 2\}$. Für (nicht–relativistische) CDM ist τ eine Funktion der Energie der Leptonen und unabhängig von ω . Folglich sind alle $f_a^{(i,j)}$ proportional zu τ , also mit der elastischen Streurrate unterdrückt. Die lokalen Transportkoeffizienten sind in dieser Näherung allesamt proportional zu τ . Je größer die Rate der elastischen Streuungen ist, umso schwächer sind dissipative Prozesse. Das ist auch anschaulich klar, da dissipative Phänomene durch den Kontakt mit dem Wärmebad geschwächt werden. Für nicht–relativistische CDM ist $\omega \approx M(1 + 1/2v^2)$ und $d\omega \approx Mv dv$, wobei v den Betrag der Dreiergeschwindigkeit bezeichne. Daraus folgt

$$f_a^{(i,j)} \approx i!! (MT)^{(i-3)/2} M^j n \tau \equiv f^{i,j} , \quad \forall a \in \{1, 2, 3\} \quad (6.60)$$

für i ungerade. n bezeichne die adiabatische Teilchenzahldichte der CDM–Teilchen:

$$n \approx g (MT/2\pi)^{3/2} \exp(\alpha - M/T), \quad (6.61)$$

vorausgesetzt $F^{(0)}$ kann als Maxwell–Verteilung angenommen werden. In dieser Näherung ist $n_{\text{kin}}^{(1)}$ durch die Änderungsrate von n im dem Zeitraum τ gegeben, den CDM zum relaxieren benötigt, also $n_{\text{kin}}^{(1)} \approx -n\tau \nabla \cdot \mathbf{U} = \dot{n}\tau$. Da die Funktionen $f^{(i,j)} \sim n\tau$ und $\rho_{\text{kin}}^{(1)}$ und $P_{\text{kin}}^{(1)}$ proportional zu $\nabla \cdot \mathbf{U}$ sind, müssen diese sogar linear von $n_{\text{kin}}^{(1)}$ abhängen. Wir finden $\rho_{\text{kin}}^{(1)} \approx Mn_{\text{kin}}^{(1)}$ und $P_{\text{kin}}^{(1)} \approx 5/3Tn_{\text{kin}}^{(1)}$. Für den Temperaturunterschied in der hydrodynamischen und kinetischen Beschreibung finden wir $T(T_{\text{R}}/T - 1) \approx Tn_{\text{kin}}^{(1)}/n$. Alle Probleme beim Vergleich beider Beschreibungen werden durch ein von Null verschiedenes $n_{\text{kin}}^{(1)}$ generiert. Die Existenz einer Diffusionsstromdichte \mathbf{J}_{diff} ist nicht wirklich ein Problem, da diese keine adiabatischen Beiträge generiert. $n_{\text{kin}}^{(1)}$ hingegen induziert adiabatische Beiträge und zerstört damit den in der hydrodynamischen Beschreibung erreichten Zusammenhang zwischen dissipativen Phänomenen und transversalen Tensoren.

Für die lokalen Transportkoeffizienten (6.56)–(6.58) finden wir in $\mathcal{O}(\tau)$ und bis Ordnung T/M

$$\zeta \approx \frac{5}{3}nT\tau, \quad \eta \approx nT\tau, \quad \chi \approx 0. \quad (6.62)$$

Der Koeffizient der Wärmeleitung verschwindet, da sich die durch den Vierervektor \mathbf{B} generierten Beiträge $(w/n)\text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{J}_{\text{diff}})$ und $\mathbf{T}_{\mathbf{B}}^{(1)}$ in $\mathcal{O}(\tau)$ und $\mathcal{O}(T/M)$ gegenseitig wegheben. Wärmeleitung transversal zum adiabatischen Strom verursacht einen Temperaturgradienten in dieser Richtung im Volumen $\mathbf{U} \otimes \mathbf{h}$ und eine zeitliche Variation von \mathbf{U} in dieser Richtung. Beide Phänomene können nur durch Diffusion von CDM–Teilchen senkrecht zum adiabatischen Fluß verursacht werden. Die damit verbundene Stromdichte muß nach Voraussetzung viel kleiner als die adiabatische Stromdichte sein. Tatsächlich gilt für die Diffusionsstromdichte $\mathbf{J}_{\text{diff}} \sim (T/M)n\tau \mathbf{Q}^{(T)}$, d.h. sie ist nicht nur mit der elastischen Streurrate, sondern zusätzlich durch den Faktor T/M unterdrückt. Der Faktor T/M kann als thermischer Mittelwert von $(\Delta P_{\bar{\chi}}/P_{\bar{\chi}})^2$ interpretiert werden. Damit ist \mathbf{J}_{diff} proportional zum Verhältnis zwischen der mittleren kinetischen Energie der Dynamik in transversaler Richtung und der kinetischen Energie im adiabatischen Fluß. Dieses Verhältnis unterdrückt die Wärmeleitung in führender Ordnung im Vergleich zu den anderen dissipativen Prozessen. Der Koeffizient der Volumenviskosität ist proportional zum Druck auf die Fläche \mathbf{h} , der durch Quellen im Geschwindigkeitsfeld erzeugt wird. Diese Quellen sind durch \dot{n}/n gegeben. Das Volumenintegral über \dot{n}/n liefert die Teilchenzahlerhaltung. Lokal können die Quellterme \dot{n}/n sehr wohl von Null verschieden sein, da \mathbf{p}_{\perp} von Null verschieden ist. CDM–Teilchen können damit einen adiabatischen Stromfaden verlassen und generieren so dissipative Prozesse. Der Koeffizient der Scherviskosität schließlich zeigt dieselbe Proportionalität. Allerdings wird hier der Druck zum Umbiegen von Stromfäden in die durch \mathbf{h} definierte Ebene benutzt.

Literatur

Eckart, C., 1940, *Phys. Rev.* **58**, 919

Hofmann, S., Schwarz, D. J., und Stöcker, H., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 083507

Weinberg, S., 1971, *Astrophys. J.* **168**, 175

AKUSTISCHE ABSORPTION

In diesem Kapitel behandeln wir die Absorption von akustischen Störungen in der CDM-Flüssigkeit. Akustische Störungen sind Anregungen der CDM-Flüssigkeit, die durch ebene Wellen beschrieben werden mit Amplituden, die im Vergleich zu den korrespondierenden adiabatischen Größen der Flüssigkeit als klein angenommen werden. Die Ursache dieser Störungen werden zum Beispiel in (Mukhanov et al., 1992) behandelt. Wir konzentrieren uns hier auf die Absorption akustischer Störungen (Landau und Lifshitz, 1991; Weinberg, 1971).

Ist die CDM-Flüssigkeit noch im thermischen Kontakt mit dem Wärmebad, so werden akustische Störungen aufgrund der im letzten Kapitel berechneten dissipativen Prozesse in der CDM-Flüssigkeit gedämpft (Weinberg, 1971; Hofmann et al., 2001), während die CDM-Flüssigkeit vom Wärmebad entkoppelt. Ist die CDM-Flüssigkeit vollständig thermisch entkoppelt vom Wärmebad, so bricht die Beschreibung der Flüssigkeit als Vielteilchensystem mit schwacher Dissipation zusammen.

Nach dem Entkoppeln strömt die Flüssigkeit frei und ihre Stromfäden folgen Geodäten. Freies Strömen stellt einen weiteren Mechanismus zur Dämpfung (Bond und Szalay, 1983) bereit. Ist der physikalische Abstand, den ein CDM-Teilchen in der Zeit t auf einer Geodäte zurücklegen kann, größer als die physikalische Wellenlänge einer akustischen Störung zu dieser Zeit, so werden die CDM-Teilchen aus der überdichten in die unterdichte Region strömen und so jede durch die akustische Störung gebildete Struktur ausschmieren.

Beide Dämpfungsmechanismen können mit einer Massenskala in Verbindung gebracht werden, die angibt, wieviel Energie mit einer akustischen Störung mindestens assoziiert werden muß, damit diese nicht absorbiert wird. Damit ist eine Massenschwelle (Schwarz et al., 2001) berechnet, aus der die kleinste Masse einer akustischen Störung in der CDM-Flüssigkeit folgt, die zur gravitativen Strukturbildung beitragen kann.

Die so berechneten ersten rein gravitativ gebundenen CDM–Vielteilchensysteme (CDM–Wolken) (Hofmann et al., 2001) liefern die benötigten Anfangsbedingungen für Modelle und Simulationen zur Berechnung der Strukturbildung im Universum auf großen Skalen. Es ist somit eine Verbindung gelungen zwischen den Feldtheorien, die die Wechselwirkung der CDM–Teilchenkandidaten definieren und makroskopischen Observablen, die eine Diskriminierung der unterschiedlichen CDM–Teilchenkandidaten erlaubt.

7.1 Dämpfung durch Dissipation

Gegeben sei zunächst eine ideale CDM–Flüssigkeit. Die CDM–Flüssigkeit wird adiabatisch durch die Anzahldichte n , das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{U} , die Energiedichte ρ , den Druck P und die Temperatur T charakterisiert. Eine akustische Störung resultiert in additive Modifikationen der adiabatischen Größen. Solche Modifikationen werden als klein vorausgesetzt im Vergleich zu den adiabatischen Größen und durch die entsprechenden Störterme δn , $\delta \mathbf{U}$, $\delta \rho$, δP und δT in die Beschreibung mit einbezogen. Wir beginnen mit der Störung des Energie–Impuls–Tensors, der den adiabatischen Zustand der CDM–Flüssigkeit beschreibt. In erster Ordnung in den Störgrößen finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(0)} &\longrightarrow \mathbf{T}^{(0)} + \delta \mathbf{T}^{(0)} , \\ \delta \mathbf{T}^{(0)} &= \delta \rho \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \delta P \mathbf{h} + w \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \delta \mathbf{U}) . \end{aligned} \quad (7.1)$$

Wir definieren einen zu \mathbf{U} senkrechten Einheitsvektor durch $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$ mit der Norm $\|\mathbf{n}\| = -1$ ein. Die Störterme in (7.1) können dann aus der Entwicklung (7.1) herausprojiziert werden. Wir finden $\delta \rho = (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \delta \mathbf{T}^{(0)}$, $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{T}^{(0)} = \delta P$ und für den Mischterm $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{T}^{(0)} = w$.

Nun formieren sich aber vor der kinetischen Entkopplung der CDM–Flüssigkeit vom Wärmebad Abweichungen vom Gleichgewichtszustand, die durch schwach dissipative Prozesse verursacht werden. In unserer Beschreibung der CDM–Flüssigkeit haben wir diese Prozesse durch den Tensor $\mathbf{T}^{(1)}$ miteinbezogen. Auch diese Prozesse werden durch akustische Störungen beeinflusst, folglich wird auch der Tensor $\mathbf{T}^{(1)}$ modifiziert. Die Störungstheorie für $\mathbf{T}^{(1)}$ bedarf einer Vorbemerkung. Die Tensorstruktur von $\mathbf{T}^{(1)}$ ist durch Ableitungen von T und \mathbf{U} gegeben, die mit dem Projektionsoperator \mathbf{h} kontrahiert werden. Zur Berechnung von $\delta \mathbf{T}^{(1)}$ in linearer Störungstheorie ersetzen wir $T \longrightarrow T + \delta T$ und $\mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{U} + \delta \mathbf{U}$, wobei lediglich die Störterme δT und $\delta \mathbf{U}$ von der Raum–Zeit abhängen. In der Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{U}$, dem Schertensor \mathbf{W} und der Wärmestromdichte \mathbf{Q} liefern somit nur die Störterme von Null verschiedene Beiträge. In dem Projektionsoperator \mathbf{h} muß für die lineare Störungstheorie folglich nur die adiabatische Geschwindigkeit \mathbf{U} berücksichtigt werden. Wir erhalten dann

$$\delta \mathbf{T}^{(1)} = \zeta (\nabla \cdot \delta \mathbf{U}) \mathbf{h} + \eta \delta \mathbf{W}^{(T)} + \chi \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \delta \mathbf{Q}^{(T)}) \quad (7.2)$$

mit den Definitionen

$$\delta \mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sym}(\nabla \otimes \delta \mathbf{U}) - \frac{2}{3} \mathbf{g} (\nabla \cdot \delta \mathbf{U}) , \quad (7.3)$$

$$\delta \mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \delta T - T \delta \dot{\mathbf{U}} . \quad (7.4)$$

In der Definition der gestörten Wärmestromdichte $\delta \mathbf{Q}$ fällt der Term proportional zu $\delta T \dot{\mathbf{U}}$ heraus, da $\dot{\mathbf{U}} = 0$. Für die Projektionen finden wir $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) \cdot \delta \mathbf{T}^{(1)} = 0$, $(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{T}^{(1)} = -\zeta (\nabla \cdot \delta \mathbf{U}) + \eta (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{W}$ und $(\mathbf{U} \otimes \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{T}^{(1)} = \chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{Q}$.

Wir leiten die Absorptionsrate für akustische Störungen aus den Bewegungsgleichungen für den Energie–Impuls–Tensor $\delta \mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \delta \mathbf{T}^{(0)} + \delta \mathbf{T}^{(1)}$ der Störungen her. Diese Bewegungsgleichungen (Silk, 1968; Weinberg, 1971) sind durch die Erhaltung der Energie und des Impulses in Richtung des adiabatischen Flusses und senkrecht dazu bestimmt. Für die mathematische Formulierung dieses Sachverhaltes definieren wir eine Ableitung $\nabla_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}(\mathbf{U} \cdot \nabla)$ in Richtung des adiabatischen Flusses und eine Ableitung $\nabla_{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla - \nabla_{\parallel}$ senkrecht dazu. Die Erhaltungssätze sind dann durch die Viererdivergenz des Energie–Impuls–Tensors der Störungen und anschließende Projektion in die entsprechende Richtung gegeben. Die Kontraktionen von $\delta \mathbf{T}$ mit $\mathbf{U} \otimes \nabla = \mathbf{U} \otimes \nabla_{\parallel} + \mathbf{U} \otimes \nabla_{\perp}$ und $\mathbf{n} \otimes \nabla = \mathbf{n} \otimes \nabla_{\parallel} + \mathbf{n} \otimes \nabla_{\perp}$ liefern somit die separaten Erhaltungssätze für Prozesse in Richtung von \mathbf{U} und für Prozesse in der durch \mathbf{n} definierten Ebene:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{U} \otimes \nabla) \cdot \delta \mathbf{T} \\ &= (\mathbf{U} \cdot \nabla_{\parallel}) \delta \rho + w \nabla_{\perp} \cdot \delta \mathbf{U} + \chi \nabla_{\perp} \cdot \delta \mathbf{Q}^{(T)} , \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{n} \otimes \nabla) \cdot \delta \mathbf{T} \\ &= w (\mathbf{U} \cdot \nabla_{\parallel}) (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{U}) + (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp}) \delta P + \chi (\mathbf{U} \cdot \nabla_{\parallel}) (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{Q}^{(T)}) \\ &\quad + \zeta (\mathbf{n} \cdot \nabla_{\perp}) (\nabla_{\perp} \cdot \delta \mathbf{U}) + \eta (\mathbf{n} \otimes \nabla_{\perp}) \delta \mathbf{W}^{(T)} . \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Variation der Energiedichte–Störung in Richtung des adiabatischen Stromfadens wird verursacht durch Quellen¹ für den Wärmetransport senkrecht zum adiabatischen Fluß und durch Quellen, die Störungen im Geschwindigkeitsfeld in transversaler Richtung erzeugen. Letztere transportieren Energie und Impuls von Stromfaden zu Stromfaden. Die transversalen Störungen im Geschwindigkeitsfeld wiederum variieren in Richtung des adiabatischen Stromfadens, weil die Wärmestromdichte in dieser Richtung variiert. Schließlich ändert sich der Druck senkrecht zu den Stromfäden, weil Volumenviskosität die Quellen der Geschwindigkeitsstörung in dieser Richtung ändert und Scherviskosität das gestörte Geschwindigkeitsfeld in die gleiche Richtung umbiegt.

¹Der Begriff *Quelle* wird in diesem Kapitel immer für die Divergenz eines Tensorfeldes benutzt und hat im allgemeinen nichts mit der Produktion von Teilchen zu tun.

Um ein vollständiges System von Bewegungsgleichungen zu erhalten, muß (7.5)–(7.6) durch den Erhaltungssatz für die Teilchenzahl ergänzt werden. Mit $\delta\mathbf{J} = \delta n \mathbf{U} + n \delta\mathbf{U}$ folgt

$$0 = \nabla \cdot \delta\mathbf{J} = (\mathbf{U} \cdot \nabla_{\parallel})\delta n + n(\nabla_{\perp} \cdot \delta\mathbf{U}) . \quad (7.7)$$

Die Variation der Störungen in der Teilchenzahldichte im adiabatischen Stromfaden wird somit durch Quellen für Störungen im transversalen Geschwindigkeitsfeld generiert, die Teilchenzahldichte senkrecht zum adiabatischen Fluß transportieren. Die geometrischen Aussagen der Bewegungsgleichungen (7.5)–(7.7) und der Bewegungsgleichung für δn sind damit geklärt.

Die lokalen Erhaltungssätze liefern drei Prozessgleichungen für fünf Größen, die lokal den Zustand der gestörten Flüssigkeit beschreiben. Das Problem, die Zeitentwicklung der Störgrößen zu berechnen, ist somit nicht ohne weitere Informationen lösbar. In Anlehnung an die adiabatische Zustandsbeschreibung nehmen wir an, daß $\delta\rho$ und δP linear von δT und δn abhängen. Dann gilt

$$\delta\rho = (\rho, T |_n) \delta T + (\rho, n |_T) \delta n , \quad (7.8)$$

$$\delta P = (P, T |_n) \delta T + (P, n |_T) \delta n . \quad (7.9)$$

Die Beziehungen (7.8) und (7.9) reduzieren die Anzahl der unabhängigen Störterme in den Erhaltungssätzen (7.5)–(7.7) um zwei. Damit sind (7.5)–(7.7) ein vollständiges System von Bestimmungsgleichungen für δn , $\nabla_{\perp} \cdot \delta\mathbf{U}$ und δT .

Die akustischen Störungen der CDM-Flüssigkeit werden durch ebene Wellen beschrieben:

$$\delta Z(t, \mathbf{x}) = Z_1 \exp(i\omega t) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) , \quad Z \in \{n, \mathbf{U}, \rho, P, T\} . \quad (7.10)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert ein System von algebraischen Bestimmungsgleichungen für n_1 , $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1$ und T_1 . Im mitbewegten Bezugssystem gilt:

$$0 = \omega n_1 - n (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) , \quad (7.11)$$

$$0 = \omega \rho_1 - w (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) + i\chi [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) T_1 - \omega T (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1)] , \quad (7.12)$$

$$0 = \omega w (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_1) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) P_1 - i\chi \omega [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) T_1 - \omega T (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_1)] \\ + i\eta [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_1) + 1/3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1)] + i\zeta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) \quad (7.13)$$

Die Beziehungen (7.8) und (7.9) übersetzen sich in die algebraischen Relationen

$$\rho_1 = (\rho, T |_n) T_1 + (\rho, n |_T) n_1 , \quad (7.14)$$

$$P_1 = (P, T |_n) T_1 + (P, n |_T) n_1 . \quad (7.15)$$

Die geschwindigkeitsabhängigen Terme in (7.11) und (7.12) sind Projektionen von \mathbf{U}_1 auf den Wellenzahlvektor \mathbf{k} der Störungen. Diese Ausdrücke beschreiben die Ausbreitung einer Störung in Richtung \mathbf{U}_1 und heißen daher *longitudinale Störungen*.

In (7.13) treten aber auch Projektionen von \mathbf{U}_1 und \mathbf{k} bezüglich des Vierervektors \mathbf{n} auf. Diese Projektionen müssen in Projektionen auf den Wellenzahlvektor \mathbf{k} und senkrecht dazu umgeschrieben werden. Bezüglich der durch \mathbf{k} gegebenen Vorzugsrichtung definieren wir zweckmäßig $\mathbf{n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n}_{\parallel} + \mathbf{n}_{\perp}$ mit $\mathbf{n}_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})\mathbf{k}/k^2$ und $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_{\perp} = 0$. Setzen wir diese Zerlegung von \mathbf{n} in parallele und senkrechte Anteile bezüglich des Wellenzahlvektors \mathbf{k} in (7.13) ein, so separiert (7.13) in zwei algebraische Gleichungen:

$$0 = \omega w (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) - k^2 P_1 - i \chi \omega [k^2 T_1 - \omega T_1 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1)] + i (4/3 \eta + \zeta) k^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1) , \quad (7.16)$$

$$0 = (\omega w + i \chi \omega^2 T + i \eta k^2) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_1) \quad (7.17)$$

Gleichung (7.17) liefert die Dispersionsrelation für *transversalen Störungen*, berechnet in erster Ordnung perturbativer Hydrodynamik:

$$\omega = -i(\eta/w) k^2 . \quad (7.18)$$

Die transversalen Störungen werden folglich mit der Rate

$$\Gamma_{\perp} \stackrel{\text{def}}{=} (\eta/w) k^2 \quad (7.19)$$

gedämpft. Das ist konsistent mit dem Resultat aus der nichtrelativistischen Hydrodynamik (Landau und Lifshitz, 1991), wobei die Massendichte im Ruhesystem der Flüssigkeit durch die Enthalpie $w = \rho + P$ ersetzt werden muß.

Interessanter ist natürlich die Dispersionsrelation für die longitudinalen Störungen, die durch die drei Bestimmungsgleichungen (7.11), (7.12) und (7.16) für n_1 , $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1$ und T_1 beschrieben werden. Wir definieren die Koeffizientenmatrix

$$\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \omega & -n & 0 \\ \omega (\rho, n | T) & -\omega - i \chi \omega T & \omega (\rho, T | n) + i \chi k^2 \\ -k^2 (P, n | T) & \omega w + i \chi \omega^2 T_1 + i (4/3 \eta + \zeta) k^2 & -k^2 [(P, T | n) + i \chi \omega] \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

und fassen die unabhängigen Störterme zu einem Tripel $(n_1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1, T_1)$ zusammen. Die Bestimmungsgleichungen sind jetzt

$$0 = \mathcal{A} \cdot (n_1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}_1, T_1) . \quad (7.21)$$

Die gesuchte Dispersionsrelation ergibt sich aus der Forderung, daß (7.21) eine eindeutige Lösung besitzt, also $\det \mathcal{A} = 0$. Bis einschließlich $\mathcal{O}(\zeta, \eta, \chi)$ erhalten wir als Bestimmungsgleichung für die gesuchte Dispersionsrelation

$$0 = \omega^3 - v_s^2 k^2 \omega + i \frac{\zeta + \frac{4}{3} \eta}{w} k^2 \omega^2 + \frac{i \chi}{w (\rho, T | n)} [T (\rho, T | n) \omega^4 + w k^2 \omega^2 - 2T (P, T | n) k^2 \omega^2 - n (P, n | T) k^4] , \quad (7.22)$$

wobei v_s die isentrope Schallgeschwindigkeit bezeichne:

$$\begin{aligned} v_s^2 &\stackrel{\text{def}}{=} (P, \rho |_\sigma) \\ &= (T/w) (P, T |_n) (P, \rho |_n) + (w/n) (P, n |_T) . \end{aligned} \quad (7.23)$$

In allen Termen proportional zu den lokalen Transportkoeffizienten benutzen wir die adiabatische Dispersionsrelation $\omega^2 = v_s^2 k^2$. Für den Realteil der Frequenz gilt dann $\text{Re } \omega = v_s k$. Einsetzen von $\omega = v_s k + i \text{Im } \omega$ in (7.22) liefert eine Bestimmungsgleichung für den Imaginärteil der Frequenz in erster Ordnung in den lokalen Transportkoeffizienten: $\omega^3 - v_s^2 k^2 \omega = 2i v_s^2 k^2 \text{Im } \omega$. Wir notieren die Lösung für den Imaginärteil in der Form $\text{Im } \omega = -L k^2$, wobei L die für Absorption charakteristische Längenskala

$$\begin{aligned} L &= \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{2w} \\ &+ \frac{\chi}{2w} (\rho, T |_n)^{-1} \left[w - 2T (P, T |_n) + v_s^2 T (\rho, T |_n) - \frac{n}{v_s^2} (P, T |_n) \right] \end{aligned} \quad (7.24)$$

in $\mathcal{O}(\zeta, \eta, \chi)$ bezeichne. Für CDM verschwindet die Wärmeleitung in $\mathcal{O}(\tau)$ und $\mathcal{O}(T/M)$ und das Quadrat der isentropen Schallgeschwindigkeit ist $v_s^2 = 5/3 T/M + \mathcal{O}((T/M)^2)$. Folglich gilt für jeden Typ schwach wechselwirkender CDM

$$L = 9/10 v_s^2 \tau + \mathcal{O}(v_s^4) \tau . \quad (7.25)$$

Es ist wichtig, daß die charakteristische Längenskala L für die durch elastische Streuprozesse verursachte Absorption von Störungen proportional zur Relaxationszeit $\tau \approx M/T \tau_{\text{coll}} \gg \tau_{\text{coll}}$ ist. Die Relaxationszeit berücksichtigt, daß der Impulsübertrag zwischen der nicht-relativistischen CDM und den relativistischen Teilchen des Wärmebades von der Größenordnung T/M ist und damit viele elastische Streuungen benötigt werden, um eine Störung zu dämpfen. Typischerweise werden $M/T \gg 1$ Streuungen hierfür benötigt. Die Autoren (Boehm et al., 2001; Chen et al., 2001) nehmen an, daß $\tau \approx \tau_{\text{coll}}$ ist. Diese Annahme bedeutet, daß ein einziger Kontakt von CDM mit dem Wärmebad ausreicht, um eine Störung zu dämpfen. Wir haben bereits gezeigt, daß dies für CDM nicht zutrifft und L damit um einen Faktor M/T unterschätzt wird². Longitudinale akustische Störungen in der CDM-Flüssigkeit werden exponentiell mit der Rate $\Gamma = 9/10(kv_s)^2 \tau$ gedämpft. Die Dämpfung ist

²Für Neutralino-CDM ist $M/T \geq 10^4$ für $T \approx T_{\text{kd}}$. Der Unterschied in der Absorptionsrate ist eine Potenz in T_{kd}/T . Es ist

$$\Gamma(T) = \left(\frac{k^2 v_s^2}{H} \right) (T_{\text{kd}}) \left(\frac{T_{\text{kd}}}{T} \right)^{\alpha-3} ,$$

wobei wir $\alpha = 6$ finden. Wird fälschlicherweise $\tau \approx \tau_{\text{coll}}$ angenommen, so folgt $\alpha = 5$. Für das Zeitintegral über die Absorptionsrate im Dämpfungsexponential (7.26) macht der Unterschied in

für Zeiten $t \in [0, t_{\text{kd}}]$ effektiv, da die CDM-Flüssigkeit nach dem kinetischen Entkoppeln frei strömt. Interessant für die weitere Analyse ist das Spektrum der Moden bezüglich des Wellenzahlvektors \mathbf{k} , die bis zum Entkoppeln nicht weggedämpft sind und der Zustand $Z(t_{\text{kd}}, \mathbf{x})$ dieser Störungen. Da die CDM-Flüssigkeit während $t \in [0, t_{\text{kd}}]$ praktisch im lokalen thermischen Gleichgewicht ist, multiplizieren sich in jedem der N Zeitschritte Δt die Exponentiale $\exp(-\Gamma(t)\Delta t)$, die die Amplitude von δZ dämpfen. Zum Zeitpunkt der Entkopplung können diese Exponentiale dann für $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ und $N\Delta t \rightarrow t_{\text{kd}}$ zusammengefaßt werden: die Amplitude Z_1 einer Störung δZ zum Zeitpunkt t_{kd} ist durch

$$Z_1 \exp\left(-\int_0^{t_{\text{kd}}} dt \Gamma(t)\right) \quad (7.26)$$

gegeben. Die obere Integrationsgrenze ist streng genommen durch den Zeitpunkt $\min\{t_{\text{kd}}, t(k) \text{ mit } \text{Re } \omega \tau = 1\}$ gegeben, wobei $t(k)$ für jede Mode angibt, wann der Relaxationszeit-Ansatz zusammenbricht. Ist für eine bestimmte Menge von Moden $t(k) < t_{\text{kd}}$, so können wir mit den gemachten Näherungen lediglich die Amplituden berechnen, mit denen diese Moden in die nichtlineare Evolution starten. Die Zeitentwicklung dieser Moden bis hin zum kinetischen Entkoppeln kann dann im Rahmen der gewählten Beschreibung nicht erfolgen. Tatsächlich ist aber $\text{Re } \omega \tau = v_s k < 1$ für alle interessanten Moden mit Wellenlängen $\lambda < 1/H$. Daraus folgt $(k/H)(T_{\text{kd}}) < 1/v_s$. Für Neutralino-CDM ist $1/v_s \geq 10^4$.

Bei der Berechnung des Integrals muß die Expansion des Universum berücksichtigt werden. Wir benutzen im Integranden für die Relaxationszeit die Beziehung $\tau(T) = H^{-1}(T_{\text{kd}})(T_{\text{kd}}/T)^6$. Für $t \in [0, t_{\text{kd}}]$ ist das Universum strahlungsdominiert und es gilt folglich $k(T) = k(T_{\text{kd}})(T/T_{\text{kd}})$, d. h. die Wellenlänge jeder Mode wird rotverschoben. Einsetzen in (7.26) liefert für $\delta(k) \stackrel{\text{def}}{=} |\delta Z/Z_1|$

$$\delta(k) = \exp\left[-\frac{9}{50} \left(\frac{v_s k}{H}\right)_{T=T_{\text{kd}}}^2\right]. \quad (7.27)$$

Der Dämpfungsterm (7.27) kann auch als Funktion der Wellenlänge λ der Moden notiert werden. Als charakteristische Wellenlänge für durch elastische Streuungen induzierte Dämpfung der Störungen δZ in der CDM-Flüssigkeit definieren wir $\lambda_d \stackrel{\text{def}}{=} (6\pi/5\sqrt{2})v_s(T_{\text{kd}})R_H(T_{\text{kd}})$ und erhalten

$$\delta(\lambda) = \exp\left[-(\lambda_d/\lambda)^2\right]. \quad (7.28)$$

der Potenz α jedoch nur wenig aus:

$$\int_0^{t_{\text{kd}}} dt \Gamma(t) = \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{kv_s}{H}\right)^2 (T_{\text{kd}}).$$

Für Neutralino–CDM erhalten wir typischerweise $\lambda_d \approx 10^{-2} R_H(T_{\text{kd}})$. Moden, die zum Zeitpunkt des kinetischen Entkoppelns eine Wellenlänge $\lambda(T_{\text{kd}}) < \lambda_d$ besitzen, werden stark gedämpft.

In der Kosmologie werden akustische Störungen gewöhnlich nicht durch die zeitabhängige Wellenzahl $k \sim 1/a \sim t^{-1/2}$ oder Wellenlänge $\lambda \sim a \sim t^{1/2}$ gekennzeichnet, sondern durch eine Konstante in der Zeit: die Ruhemasse M der CDM in einer Kugel mit Radius λ , definiert durch

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{2\pi}{k} \right)^3 n_{\text{CDM}} M_{\text{CDM}}, \quad (7.29)$$

wobei n_{CDM} die Anzahldichte der CDM–Teilchen und M_{CDM} ihre Masse bezeichne. Der Dämpfungsterm (7.28) kann dann in Abhängigkeit dieser Masse notiert werden:

$$\delta(M) = \exp \left[- (M_d/M)^{2/3} \right]. \quad (7.30)$$

Hierbei bezeichne M_d die charakteristische Masse für durch elastische Streuungen induzierte Dämpfung:

$$\begin{aligned} M_d &= \frac{3^2 (2\pi)^4}{5^3 \sqrt{2}} v_s^3(T_{\text{kd}}) M_{\tilde{\chi}} n_{\tilde{\chi}}(T_{\text{kd}}) R_H^3(T_{\text{kd}}) \\ &\approx 2.6 \cdot 10^{-8} \frac{(1\text{GeV})^3}{(M_{\tilde{\chi}} T_{\text{kd}})^{3/2}} \omega_{\tilde{\chi}} M_{\odot}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Für Neutralino–CDM ist typischerweise $M_d \approx 10^{-9} M_{\odot}$.

In Abbildung (7.1) ist die Dämpfungsskala M_d in Sonnenmassen als Funktion der Neutralino–Masse gezeigt. Die unterschiedlichen Kurven entsprechen von unten nach oben anwachsenden Slepton–Massen.

Je größer die Slepton–Masse, desto größer ist die Dämpfungsskala M_d , weil die Anzahldichte der Neutralinos mit der Slepton–Masse wächst. Größere Slepton–Massen bedeuten auch, daß die Rate der elastischen Streuungen von Leptonen an Neutralinos kleiner werden, weil die zum Austausch benötigten Slep-tonen eine kleinere Reichweite haben. Die Stärke der dissipativen Prozesse wird durch die lokalen Koeffizienten (6.62) parametrisiert, die wiederum umgekehrt proportional zur elastischen Streur-rate sind. Folglich werden dissipative Prozesse mit größerer Slepton–Masse wichtiger, genauer, sie wachsen mit der vierten Potenz der Slepton–Masse. Jede Kurve fällt streng monoton mit wachsender Neutralino–Masse, weil die Anzahldichte der Neutralinos exponentiell in der Neutralino–Masse gedämpft ist. Außerdem wächst die Temperatur T_{kd} , bei der Neutralinos kinetisch vom Wärmebad entkoppeln, mit wachsender Neutralino–Masse. Nun ist die Relaxationszeit umgekehrt proportional zur sechsten Potenz der Temperatur und wird folglich mit wachsendem T_{kd} schnell kleiner. Das heißt, dissipative Prozesse werden schwächer. Damit wird die Masse M_d , die in einer akustischen Störung vorhanden sein muß, um nicht vollständig weggedämpft zu werden, kleiner.

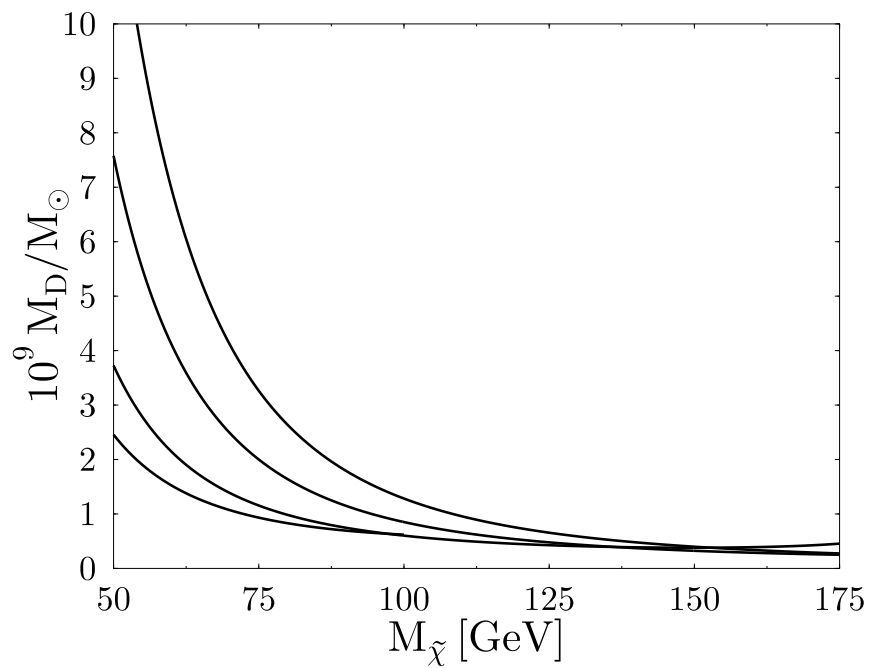


Abbildung 7.1: Die Dämpfungsskala M_D in Sonnenmassen als Funktion der Neutralino-Masse $M_{\tilde{\chi}}$ für unterschiedliche Slepton-Massen $M_{\tilde{L}} = 150, 200, 300, 400$ GeV. Die Slepton-Masse wächst von unten nach oben.

7.2 Dämpfung durch freies Strömen

Für Temperaturen $T < T_{\text{ls}}$ (5.72) haben die CDM-Teilchen den thermischen Kontakt zum Wärmebad vollständig verloren und sind wechselwirkungsfrei. Jedes CDM-Teilchen bewegt sich daher frei auf einer Geodäte der Raum-Zeit. Störungen in der CDM beeinflussen die Raum-Zeit-Metrik und folglich die Geodäten. Sind die physikalischen Wellenlängen der Störungen groß in einem noch zu spezifizierenden Sinne, so kann CDM als ideale Flüssigkeit mit einem effektiven Druck modelliert werden. Sind die physikalischen Wellenlängen der Störungen dagegen klein ³, so wird die Bewegung der CDM-Teilchen auf den Geodäten der Raum-Zeit jede Struktur ausschmieren, da die Teilchen sich frei von einer überdichten Region in eine unterdichtete Region bewegen und damit jede Dichtestörung ausgleichen können.

Wir präzisieren im folgenden unsere phänomenologische Betrachtung dieses zweiten Dämpfungsmechanismus. Sei $l_{\text{fs}}(t)$ der physikalische Abstand, den ein CDM-Teilchen in der Zeit t auf einer Geodäte zurücklegen kann. Sei weiterhin $\lambda(t) \equiv 2\pi/k(t)$ die physikalische Wellenlänge einer (akustischen) Störung zu diesem Zeitpunkt. Für $l_{\text{fs}}(t) > \lambda(t)$ können CDM-Teilchen von der überdichten in die unterdichtete Region propagieren und damit die Dichtestörung ausgleichen und jede vorhandene Struktur ausschmieren. Mit anderen Worten, alle Störungen mit physikalischen Wellenlängen $\lambda(t) < l_{\text{fs}}(t)$ werden durch diesen Mechanismus gedämpft. Der physikalische Abstand, den ein CDM-Teilchen auf einer Geodäte in der Zeit $t \in [t_{\text{ls}}, t_{\text{eq}}]$ zurücklegen kann, ist

$$l_{\text{fs}}(t) = a(t) \int_0^t d\tilde{t} \frac{v(\tilde{t})}{a(\tilde{t})}. \quad (7.32)$$

Für $T < T_{\text{ls}}$ sind die CDM-Teilchen nichtrelativistisch, sodaß für ihre Geschwindigkeit $v \sim 1/a$ gilt. Wir setzen $v(t) = v(t_{\text{ls}})a(t_{\text{ls}})/a(t)$ und $a(t) \sim t^{1/2}$ für ein strahlungsdominiertes Universum in (7.32) ein und erhalten

$$l_{\text{fs}}(a) = \frac{a_{\text{ls}}}{a} v_{\text{ls}} \ln \left(\frac{a}{a_{\text{ls}}} \right) R_H(a), \quad (7.33)$$

wobei wir $a_{\text{ls}} \equiv a(t_{\text{ls}})$ gesetzt haben und $v_{\text{ls}} \equiv v(t_{\text{ls}}) = \sqrt{3T_{\text{ls}}/M_{\tilde{\chi}}}$ die mittlere Geschwindigkeit der CDM-Teilchen nach ihrer letzten elastischen Streuung bezeichne. Für Neutralinos finden wir typischerweise $l_{\text{fs}} \approx 10^{-8} R_H$ im Materie-Strahlungsgleichgewicht, was heute einer Länge von etwa $5 \cdot 10^{-4}$ pc entspricht. In einer Kugel mit diesem Radius würde eine Masse von $M_{\text{fs}} \approx 10^{-6} M_{\odot}$ an Neutralinos gravitativ gebunden sein.

In Abbildung (7.2) ist die Dämpfungsskala M_{fs} in Sonnenmassen als Funktion der Neutralino-Masse für unterschiedliche Slepton-Massen gegeben.

³Für Neutralino-CDM fanden wir typischerweise nach (7.28) Wellenlängen $\lambda \geq 10^{-2} R_H$ beim kinetischen Entkoppeln.

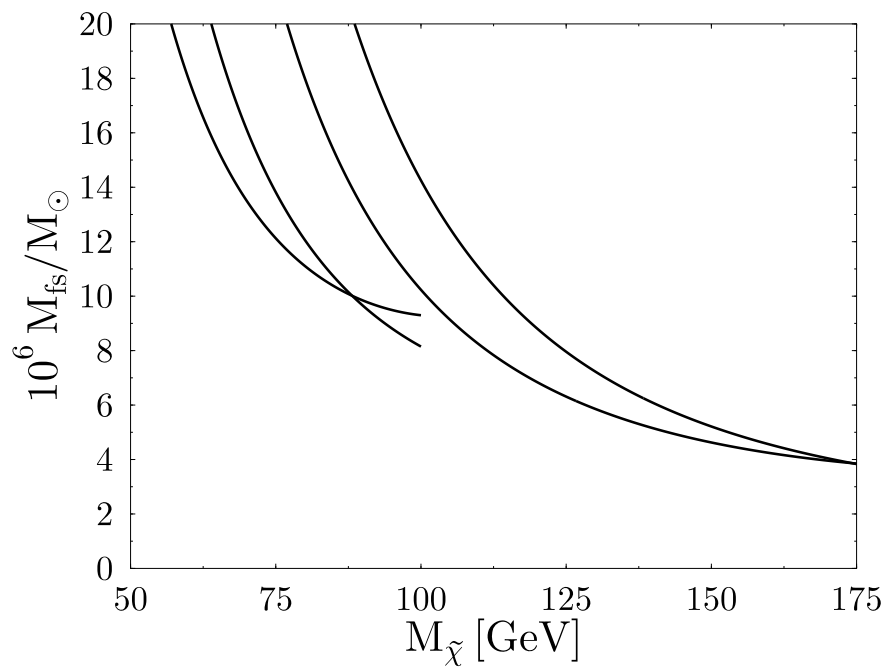


Abbildung 7.2: Die Dämpfungsskala M_{fs} in Sonnenmassen als Funktion der Neutralino-Masse $M_{\tilde{\chi}}$ für unterschiedliche Slepton-Massen $M_{\tilde{L}} = 150, 200, 300, 400$ GeV. Die Slepton-Masse wächst von unten nach oben.

Die Dämpfungsskala wächst mit der Slepton-Masse $M_{\tilde{L}}$ bei gegebener Neutralino-Masse $M_{\tilde{\chi}} < M_{\tilde{L}}$, weil die Anzahldichte der Neutralinos mit der Slepton-Masse wächst. Für eine gegebene Slepton-Masse sind die Kurven streng monoton fallen, weil die Anzahldichte der Neutralinos exponentiell in der Neutralino-Masse unterdrückt ist. Wir finden, daß der durch die freie Bewegung der Neutralinos auf Geodäten induzierte Dämpfungsmechanismus eine Massenschwelle⁴ von typischerweise $M_{\text{fs}} \approx 10^{-6} M_{\odot}$ impliziert⁵ (Schwarz et al., 2001). Akustische Störungen mit kleineren Energien werden durch freies Strömen von Neutralinos aus überdichte in unterdichte Regionen ausgeschmiert.

Für das Verhältnis der beiden unterschiedlichen Dämpfungsskalen gilt

$$\frac{M_{\text{fs}}}{M_{\text{d}}} \sim \ln^3 \left(\frac{a}{a_{\text{ls}}} \right). \quad (7.34)$$

Dieses Verhältnis wird für $a > 2.2 a_{\text{ls}}$ größer als eins. Folglich beginnt der durch freies Strömen induzierte Dämpfungsmechanismus über den durch Dissipation verursachten zu dominieren, sobald das Universum seine Größe nach dem letzten Kontakt zwischen Neutralinos und dem Wärmebad ungefähr verdoppelt hat.

Literatur

- Boehm, C., Fayet, P., und Schaeffer, R., 2001, *Phys. Lett. B* **518**, 8
- Bond, J. R. und Szalay, A. S., 1983, *Astrophys. J.* **274**, 443
- Chen, X., Kamionkowski, M., und Zhang, X., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 021302
- Gurevich, A., Zybin, K. P., und Sirota, V. A., 1997, *Physics-Uspekhi* **40**, 869
- Hofmann, S., Schwarz, D. J., und Stöcker, H., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 083507
- Landau, L. D. und Lifshitz, E. M., 1991, *Hydrodynamik*, Akademie Verlag, Berlin
- Mukhanov, V., Feldmann, H., und Brandenberger, R., 1992, *Phys. Rep.* **215**, 203
- Schwarz, D. J., Hofmann, S., und Stöcker, H., 2001, in *HEP 2001*
- Silk, J., 1968, *Astrophys. J.* **151**, 459
- Weinberg, S., 1971, *Astrophys. J.* **168**, 175

⁴Dieses Resultat ist nur eine Abschätzung. Für die akurate Bestimmung der Dämpfungsskala M_{fs} muß die freie Boltzmann-Gleichung gelöst werden. Als Anfangsbedingung ist dabei die Massenschwelle M_{d} zu berücksichtigen.

⁵In (Gurevich et al., 1997) wird eine minimale Masse für die ersten rein gravitativ gebundenen Neutralino-Systeme von $\sim 10^{-13} (150 \text{ GeV}/M_{\tilde{\chi}}) M_{\odot}$ abgeschätzt. Dabei machen die Autoren die ungerechtfertigte Annahme, daß chemisches und kinetisches Entkoppeln vom Wärmebad für Neutralinos gleichzeitig passieren.

–VIII–

ERGEBNISSE

In diesem Kapitel fassen wir die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammen, wobei wir stets das Bino als CDM–Teilchen einsetzen und auf die allgemeinen Gleichungen in den vorangegangenen Kapiteln verweisen.

Die auf dem Λ CDM–Modell beruhenden numerischen Simulationen der gravitativen Strukturbildung ist auf Skalen $M \gg 10^{10} M_{\odot}$ sehr erfolgreich, insbesondere konvergieren die Verfahren hinsichtlich des vorhergesagten Masseanteils der Halos an der Gesamtmasse von Galaxien (Moore et al., 1999; Pearce et al., 2000). Jedoch konvergieren die Simulationen nicht bezüglich der lokalen Überdichten von CDM in den Halos, vielmehr setzt sich gravitative Strukturbildung auf immer kleinere Skalen fort. Numerisch kann keine Massen–Schwelle berechnet werden, unterhalb derer keine CDM–Strukturen mehr gravitativ gebildet werden.

Die Kenntnis der lokalen Überdichten in den CDM–Wolken und die Verteilung der CDM–Wolken ist für Experimente zum direkten und indirekten Nachweis von CDM–Teilchen essentiell. Zum direkten Nachweis von CDM–Teilchen folgt deren in die Detektoren einfallende Stromdichte aus den lokalen Überdichten. Außerdem können die lokalen Überdichten als Gravitationslinsen wirken. (Gould, 1992; Stanek et al., 1993). Zum indirekten Nachweis folgt die in die Detektoren einfallende Stromdichte der Teilchen, die durch CDM–Teilchen–Annihilationen in den CDM–Wolken erzeugt werden (Bergström et al., 1998, 2001a,b).

In dieser Arbeit werden Massen–Schwellen analytisch berechnet, unterhalb derer akustische Störungen nicht zur gravitativen Strukturbildung beitragen können. Das Massen–Spektrum von lokalen Überdichten wird damit nach unten beschränkt. Die Grundidee ist hierbei, daß akustische Störungen, die durch CDM propagieren durch zwei Mechanismen gedämpft werden:

- (I) Während der kinetischen Entkopplung formieren sich Nichtgleichgewichtsprozesse, die sich kollektiv als Reibungsphänomene konstituieren. Im lineare Regime sind dies die Volumenviskosität (4.104), die Scherungsviskosität (4.105)

und die Wärmeleitung (4.106). Die dissipativen Prozesse deponieren Energie und Impuls der akustischen Störungen in die Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Störungen und schmieren diese so aus.

- (II) Nach dem kinetischen Entkopplungsprozeß strömt CDM frei auf Geodäten. Dies ermöglicht einen Strom von Teilchen von überdichten in unterdichte Regionen, so daß die Amplituden der lokalen Überdichten weiter gedämpft werden.

Der Mechanismus (I) ist während der kinetischen Entkopplung effektiv. Es gilt also zuerst den Zeitraum zu berechnen, den das kinetische Entkoppeln der CDM–Teilchen vom Wärmebad beansprucht. Der thermische Kontakt von CDM–Teilchen mit dem Wärmebad ist durch die Rate der elastischen Streuungen (5.68) der CDM–Teilchen an den fermionischen Konstituenten des Wärmebades gegeben:

$$\Gamma_{\text{el}} \approx 10^{-2} M_{\tilde{\chi}} \frac{M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2} x^{-5},$$

wobei wir das Bino in (5.68) eingesetzt haben. Der erste Faktor kann als Stärke interpretiert werden, mit der elastische Streuungen stattfinden. Der zweite Faktor zeigt die Abhängigkeit von Parametern des MSSM, also von der Bino– und der als universell angenommenen Sfermion–Masse. Das Monom in $x = M_{\tilde{\chi}}/T$ gibt die Temperatur–Abhängigkeit der elastischen Streurrate an. In der Literatur (Boehm et al., 2001; Chen et al., 2001) wurde fälschlicherweise angenommen, daß die Relaxationszeit τ_{relax} der CDM gleich der Kollisionszeit τ_{coll} , also $\tau_{\text{relax}} \approx \tau_{\text{coll}} \equiv 1/\Gamma_{\text{el}}$. In (Hofmann et al., 2001; Schwarz et al., 2001) konnten wir jedoch zeigen, daß der mittlere Impulsübertrag pro Kollision $\langle t \rangle \approx E_{\tilde{F}}^2$ ist, wobei $E_{\tilde{F}} \sim T$ die mittlere Energie eines Fermions im Wärmebad bezeichne. Es wird also eine große Anzahl von elastischen Kollisionen benötigt, um CDM im lokalen thermischen Gleichgewicht zu halten, bzw. lokales thermisches Gleichgewicht zu etablieren. Binos entkoppeln kinetisch bei der Temperatur (5.71)

$$T_{\text{kd}} \approx \left[10^2 \frac{M_{\tilde{\chi}}^\alpha (M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2}{M_{\text{Pl}}} \right]^{\frac{1}{3+\alpha}},$$

wobei (Boehm et al., 2001; Chen et al., 2001) $\alpha = 0$ und wir $\alpha = 1$ finden. Eine Analyse des MSSM–Parameterraums liefert typischerweise $T_{\text{kd}} = (10 - 100)$ MeV, siehe Abbildung 5.3.

In der Literatur (Gurevich et al., 1997) wird oft angenommen, daß chemisches und kinetisches Entkoppeln von Binos gleichzeitig stattfindet. Diese Aussage ist falsch. Für die Frage wann Binos chemisches entkoppeln und damit wann die Anzahl der Binos im Universum fixiert ist, muß die Annihilationsrate von Binos in alle Fermionen

berechnet werden. Wir finden hierfür (5.57)

$$\Gamma_{\text{ann}} \approx 10^{-3} M_{\tilde{\chi}} \frac{M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} \frac{M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^2} x^{-\frac{5}{2}} e^{-x} .$$

Der numerische Faktor kann wieder als Stärke interpretiert werden, mit denen Annihilationen ablaufen, der zweite Faktor zeigt die Abhängigkeit von MSSM-Parametern und die Reihe in x gibt die Abhängigkeit von der Temperatur an. Der wichtige Unterschied zur elastischen Streurrate liegt in der exponentiellen Unterdrückung in $1/T$. Die Annihilationsrate fällt also wesentlich schneller als die elastische Streurrate. Für die Temperatur T_{cd} , bei der Binos vom Wärmebad chemisch entkoppeln finden wir mit (5.60)

$$x_{\text{cd}} \approx \ln \left[10^{-4} \frac{M_{\text{Pl}} (M_{\tilde{F}}^4 + M_{\tilde{\chi}}^4) M_{\tilde{\chi}}^3}{(M_{\tilde{F}}^2 + M_{\tilde{\chi}}^2)^4} \right] .$$

Eine Analyse des MSSM-Parameterraums liefert $x_{\text{cd}} = M_{\tilde{\chi}}/T_{\text{cd}} \approx 22$, siehe Abbildung 5.1. Damit ist T_{cd} im GeV-Bereich.

Der letzte thermischen Kontakt zwischen Binos und den Fermionen des Wärmebades passiert bei der Temperatur (5.72)

$$T_{\text{ls}} \approx \left[10^2 \frac{(M_{\tilde{F}}^2 - M_{\tilde{\chi}}^2)^2}{M_{\text{Pl}}} \right]^{\frac{1}{3}} ,$$

also typischerweise bei $T_{\text{ls}} = (1 - 10)\text{MeV}$

Die drei Temperaturskalen $T_{\text{cd}} > T_{\text{kd}} > T_{\text{ls}}$ sind für die thermische Geschichte von CDM-Teilchen im Universum essentiell. Die erste Temperatur bestimmt ω_{CDM} (siehe Abbildung 5.2 für $\omega_{\tilde{\chi}}$), die zweite die Dauer der Dämpfung von akustischen Störungen in CDM durch dissipative Prozesse und die dritte gibt die Temperatur an, ab der CDM-Teilchen auf Geodäten frei strömen.

Wir setzen die Diskussion der Dämpfung durch dissipative Prozesse in CDM fort. Diese Nichtgleichgewichtsprozesse konstituieren sich als kollektive Reibungsphänomene. Wir benutzen deshalb Hydrodynamik zur phänomenologischen Beschreibung dissipativer Prozesse in CDM. Für $T \gg T_{\text{cd}}$ können CDM und das Wärmebad in eine ideale Flüssigkeit zusammengefaßt werden. Für $T_{\text{cd}} > T > T_{\text{kd}}$ können CDM und Wärmebad als zwei Flüssigkeiten beschrieben werden, die so stark gekoppelt sind, daß die CDM-Flüssigkeit im lokalen thermischen Gleichgewicht bleibt. Für $T \sim T_{\text{kd}}$ entkoppelt die CDM-Flüssigkeit von der Strahlungsflüssigkeit, die das Wärmebad modelliert. Letztere bleibt im lokalen thermischen Gleichgewicht, da $\Omega_{\text{CDM}} = (a/a_{\text{eq}})\Omega_{\text{rad}} \ll \Omega_{\text{rad}}$ für $T \gg T_{\text{eq}}$, wobei der Index *rad* für Strahlung

steht. Die CDM-Flüssigkeit kann Abweichungen von lokalen thermischen Gleichgewicht nicht länger an die Strahlungsflüssigkeit weitergeben. Folglich formieren sich Nichtgleichgewichtsprozesse, denen durch zusätzliche Lorentz-Tensoren $\mathbf{J}^{(1)}$ und $\mathbf{T}^{(1)}$ in der Stromdichte \mathbf{J}_{CDM} und im Energie-Impuls-Tensor \mathbf{T}_{CDM} Rechnung getragen wird. Die Aufteilung von dissipativen Effekten auf diese zusätzlichen Lorentz-Tensoren ist vieldeutig (Eckart, 1940; Weinberg, 1971; Landau und Lifshitz, 1991). Wir fixieren diese Vieldeutigkeit so, daß alle dissipativen Effekte in \mathbf{T}_{CDM} auftreten und \mathbf{J}_{CDM} weiterhin die adiabatische Stromdichte ist. Für $\mathbf{T}^{(1)}$ erhalten wir so (4.146)

$$\mathbf{T}^{(1)} = \zeta \mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{U} + \eta \mathbf{W}^{(\text{T})} + \chi \text{Sym}(\mathbf{U} \otimes \mathbf{Q}^{(\text{T})})$$

Hierbei ist \mathbf{U} das adiabatische Geschwindigkeitsfeld und \mathbf{h} die Ebene senkrecht zum adiabatischen Strom. Die einzelnen Terme haben dann die folgende Bedeutung: der erste Summand heißt *Volumenviskosität* und gibt die Quellstärke des Geschwindigkeitsfeldes in die Ebene senkrecht zum adiabatischen Strom. Der zweite Summand heißt *Scherviskosität* und beschreibt das Wegbiegen des Geschwindigkeitsfeldes vom adiabatischen Strom in die dazu senkrechte Ebene. Der dritte Summand heißt *Wärmeleitung* und beschreibt die Wärmestromdichte in der Ebene senkrecht zum adiabatischen Strom im dem durch diese Ebene und das Geschwindigkeitsfeld definierten Volumen. Es ist wichtig, daß alle dissipativen Effekte durch Lorentz-Tensoren beschrieben werden, die senkrecht zum adiabatischen Strom stehen.

Die Stärke der dissipativen Prozesse ist in dieser Theorie in den lokalen Koeffizienten ζ , η und χ , siehe (4.104)–(4.106), parametrisiert. Ein geschickter Weg diese Koeffizienten zu bestimmen, wurde zuerst in (Silk, 1968) vorgeschlagen und für den Spezialfall von relativistischer Teilchen in (Weinberg, 1971) ausführlich durchgeführt. Eine allgemeine Methode zur Bestimmung der lokalen Transportkoeffizienten für dissipative Prozesse in relativistischer und nicht-relativistischer Materie ist in (Hofmann et al., 2001) dargestellt. Die Idee ist, die phänomenologische Beschreibung von CDM adäquat mit der entsprechenden kinetischen Beschreibung zu vergleichen. Konkret werden die in der hydrodynamischen Beschreibung schwach dissipativer Prozesse auftretenden Lorentz-Tensoren mit den in der kinetischen Theorie berechneten Lorentz-Tensoren verglichen. Dieser Vergleich ist nicht-trivial und ihm wird daher das gesamte Kapitel VI gewidmet.

Das Hauptproblem dieser eigentlich sehr praktischen Methode ist, daß die adäquate kinetische Beschreibung der Formation von Nichtgleichgewichtsprozessen Lorentz-Tensoren liefert, die nicht alle transversal zum adiabatischen Strom sind. Für die kinetische Beschreibung des Entkopplungsprozesses bei $T \sim T_{\text{kd}}$ machen wir den Ansatz (6.7) für die Phasenraum-Verteilung von CDM-Teilchen

$$F_{\text{CDM}} \equiv \underbrace{F^{(0)}}_{\text{Equilibrium}} + \underbrace{F^{(1)}}_{\text{Abweichung}} \quad \text{mit} \quad |F^{(1)}| \ll F^{(0)},$$

wobei $F^{(0)}$ durch (6.8) gegeben und $F^{(1)}$ Lösung der Boltzmann-Gleichung (3.49)

mit dem Kollisionsintegral (6.11) ist:

$$(p \cdot \nabla) F^{(0)} = \underbrace{L[F^{(1)}]}_{\text{linear}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{p} = \omega \mathbf{V} + |\mathbf{p}| \mathbf{n} .$$

Hierbei wurde der Impuls \mathbf{p} der CDM-Teilchen in einen Anteil parallel zum Geschwindigkeitsfeld \mathbf{V} aller relativistischen Teilchen und einen hierzu senkrechten Anteil zerlegt. Wir machen den Ansatz (6.13)

$$F^{(1)}(\omega, n, x) = \mathbf{A}(\omega, x) + \mathbf{B}(\omega, x) \cdot \mathbf{n} + \mathbf{C}(\omega, x) \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + 1/3\mathbf{h}) .$$

Das lineare Funktional L operiert auf den von den Polynomen \mathbf{n} und \mathbf{h} aufgespannten invarianten Unterräumen lokal wie ein vielfaches des Einheitsoperators, siehe (6.14). Die Entwicklung (6.14) kann somit als eine Entwicklung von $L[F^{(1)}]$ nach irreduziblen Polynomen in \mathbf{n} betrachtet werden. Es kann ein Maß auf diesen Unterräumen definiert werden, das die Projektion auf die Entwicklungskoeffizienten \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} erlaubt. Die Boltzmann-Gleichung erlaubt dann, diese Koeffizient zu berechnen. Für die Tensorstrukturen erhalten wir (6.30)–(6.32) $\mathbf{A} \sim \nabla \cdot \mathbf{V}$, $\mathbf{B} \sim \mathbf{Q}^{(T)}$ und $\mathbf{C} \sim \mathbf{W}^{(T)}$. Der Koeffizient \mathbf{A} ist nicht transversal und generiert sowohl zum ersten als auch zum zweiten Moment von F_{CDM} bezüglich \mathbf{p} Beiträge, die nicht durch transversale Lorentz-Strukturen repräsentiert werden, siehe (6.39) und (6.45).

Ein Vergleich zwischen hydrodynamischer und kinetischer Beschreibung ist dennoch möglich. Beide Beschreibungen benutzen unterschiedliche Definitionen der unabhängigen thermodynamischen Variablen. Während in der kinetischen Theorie alle thermodynamischen Größen bezüglich des Wärmebades definiert sind, werden durch die Fixierung der Vieldeutigkeit in der hydrodynamischen Beschreibung die thermodynamischen Variablen umdefiniert. Mit (6.54) gelingt es uns, den in der kinetischen Theorie berechneten Energie-Impuls-Tensor durch die in der hydrodynamischen Beschreibung verwendeten thermodynamischen Variablen auszudrücken. Wir erhalten aus (6.55) in $\mathcal{O}(1/\Gamma_{\text{el}})$ und bis einschließlich $\mathcal{O}(T/M_{\text{CDM}})$:

$$\mathcal{T}^{(1)} = \underbrace{\frac{5}{3} \frac{\rho_{\text{CDM}}}{\Gamma_{\text{el}}}}_{=\zeta} \mathbf{h} \nabla \cdot \mathbf{U} + \underbrace{\frac{\rho_{\text{CDM}}}{\Gamma_{\text{el}}}}_{=\eta} \mathbf{W}^{(T)} .$$

Volumen- und Scherviskosität sind umgekehrt proportional zur elastischen Streurate und proportional zur CDM-Energiedichte. Dieses Resultat läßt sich leicht physikalisch interpretieren. Elastische Streuungen zwischen CDM-Teilchen und den Teilchen des Wärmebades ermöglichen ersteren gerade, Abweichungen vom lokalen thermischen Gleichgewicht an das Wärmebad zu transferieren. Dissipation wird aber durch Nichtgleichgewichtsprozesse hervorgerufen, die wiederum durch den thermischen Kontakt von CDM mit dem Wärmebad geschwächt werden. Je größer die lokale Energiedichte, um so mehr Energie kann transversal zum adiabatischen Strom

transportiert werden und damit die Formation von transversalen Störungen unterstützen. Wärmeleitung ist für nichtrelativistische Teilchen erwartungsgemäß ein subdominanter Prozeß und verschwindet in führender Ordnung.

Nachdem die dissipativen Prozesse in CDM berechnet sind, können wir die Dämpfung von akustischen Störungen in CDM analysieren. Die Raum–Zeit–Abhängigkeit dieser Störungen ist durch (7.10) gegeben:

$$\delta \{n, T, \rho, P, U\}_{\text{CDM}}(t, x) \propto \exp(-i \omega t) \exp(i k \cdot x) .$$

Für die Dämpfung benötigen wir $\text{Im } \omega$. Aus der Bedingung, daß (7.11), (7.12) und (7.16) eindeutig lösbar sind, erhalten wir die gesuchte Dispersionsrelation für $\omega(k)$ und schreiben $\text{Im } \omega = -L(\zeta, \eta)k^2$, mit der für akustische Absorptionen charakteristischen Längenskala (7.24)

$$L(\zeta, \eta) = \frac{\zeta + \frac{4}{3}\eta}{2(\rho + P)_{\text{CDM}}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\Gamma_{\text{el}}} .$$

Die Dämpfung von Dichtestörungen im Zeitintervall $[0, t(T_{\text{kd}})]$ ist dann

$$\begin{aligned} \delta(k) &\propto \exp\left(-\int_0^{t(T_{\text{kd}})} dt L(\zeta, \eta) k^2\right) \\ &= \exp\left[-\frac{9}{50} \left(\frac{v_s k}{H}\right)_{T=T_{\text{kd}}}^2\right] . \end{aligned}$$

In der Kosmologie werden akustische Störungen in der Regel nicht durch die zeitabhängige Wellenzahl $k \sim 1/a \sim t^{-1/2}$ gekennzeichnet, sondern durch eine Konstante in der Zeit: der Masse M aller CDM–Teilchen in einem Kugel mit Radius $2\pi/k$, siehe (7.29). Die Dämpfung kann dann durch eine sogenannte Dämpfungsmasse M_{D} charakterisiert werden:

$$\delta(M) \propto \exp\left[-\left(\frac{M_{\text{d}}}{M}\right)^{\frac{2}{3}}\right] ,$$

wobei die Dämpfungsmasse durch

$$M_{\text{d}} \approx 10^2 (v_s R_{\text{H}})^3 (T_{\text{kd}}) \rho_{\text{CDM}}(T_{\text{kd}})$$

gegeben ist. Setzen wir wieder das Bino als CDM–Teilchen ein, so finden wir für die Dämpfungsmasse

$$M_{\text{d}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \frac{(1 \text{ GeV})^3}{(M_{\tilde{\chi}} T_{\text{kd}})^{3/2}} (\Omega_{\tilde{\chi}} h^2) M_{\odot} .$$

Eine Analyse des MSSM-Parameterraums liefert typischerweise $M_d \approx 10^{-9} M_\odot$, siehe Abbildung 7.1.

Die in einer akustischen Störung beinhaltenen CDM-Teilchen müssen eine Gesamtmasse $M > M_d$ besitzen, um nicht durch die im kinetischen Entkopplungsprozeß generierte Volumen- und Scherungsviskosität absorbiert zu werden. Die Dämpfungsmasse M_d liefert eine durch das kinetische Entkoppeln induzierte Massenschwelle, unterhalb derer akustische Störungen nicht zur gravitativen Strukturbildung beitragen können.

Für Temperaturen $T < T_{\text{is}}$ bewegen sich die CDM-Teilchen frei auf Geodäten der Raum-Zeit. Wir bezeichnen mit $l_{\text{fs}}(t)$ den physikalischen Abstand, den CDM-Teilchen in der Zeit t zurücklegen können und mit $\lambda(t) \equiv 2\pi/k(t)$ die physikalische Wellenlänge einer akustischen Störung zu diesem Zeitpunkt. Für $l_{\text{fs}}(t) > \lambda(t)$ ist der Dämpfungsmechanismus (II) effizient. Die durch diesen Mechanismus induzierte Dämpfungsmasse M_{fs} folgt aus (7.33)

$$M_{\text{fs}} \approx M_d \ln^3 \left(\frac{a}{a_{\text{is}}} \right),$$

also gilt insbesondere $M_{\text{fs}} > M_d$ für $T < T_{\text{is}}$. Eine Analyse des MSSM-Parameterraums liefert typischerweise $M_{\text{fs}} \approx 10^{-6} M_\odot$ bei $T = T_{\text{eq}}$, siehe Abbildung 7.2.

Damit erhalten wir als wichtiges Ergebnis: die ersten rein gravitativ gebundenen Neutralino-Wolken müssen Massen $M \geq M_{\text{min}} \approx 10^{-6} M_\odot$ besitzen und es gilt die Schwellen-Hierarchie (Hofmann et al., 2001; Schwarz et al., 2001)

$$M_{\text{min}} \geq M_{\text{fs}} \approx 10^{-6} M_\odot > M_d \approx 10^{-9} M_\odot.$$

Kolb und Tkachev (1996) finden für die mittlere Masse der ersten rein gravitativ gebundenen Axion-Cluster ¹

$$M_{\text{mc}} \sim 10^{-12} M_\odot$$

Damit können die zwei prominentesten Teilchen-Kandidaten für CDM vom Standpunkt der gravitativen Strukturbildung auf kleinsten Skalen wohl unterschieden werden.

Die Skalen M_{min} und M_{mc} sind in Simulationen zur gravitativen Strukturbildung auf großen Skalen nicht zugänglich. Die kleinsten noch auflösbaren substrukturen in CDM-Halos haben Massen $M_{\text{res}} \approx (10^8 - 10^{10}) M_\odot$. Auf diesen Skalen können Teilchen-Kandidaten für CDM nicht unterschieden werden, da diese nach Definition alle durch eine Zustandsgleichung mit $w = 0$ (also verschwindender Druck) beschrieben werden. Weiterhin kann bei diesen Simulationen keine Konvergenz in Hinblick auf die lokalen Überdichten erreicht werden. Experimente zur direkten und indirekten Suche von CDM-Teilchen benötigen aber genau diese Information.

¹Das Axion war niemals im thermischen Gleichgewicht mit Strahlung. Die hier vorgestellte Methode funktioniert nur für Teilchen, die irgendwann im thermischen Gleichgewicht mit der Strahlung waren.

Ausblick

Die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden und Resultate sollen in Zukunft zur Bestimmung von konsistenten Anfangsbedingungen für numerische Simulationen zur Strukturbildung auf großen Skalen verwendet werden. Dafür muß die *Transferfunktion* berechnet werden, die das primordiale Spektrum von Überdichten mit dem Spektrum von Überdichten bei T_{eq} in Beziehung setzt. Unser Resultat zeigt, daß die Transferfunktion sich aus drei Faktoren zusammensetzt: einem exponentiellen Dämpfungsterm, der seine Ursache im kinetischen Entkopplungsprozeß hat, einem Faktor, der der anschließenden Dämpfung durch freies Strömen auf Geodäten Rechnung trägt und einem Faktor, der das logarithmische Wachstum von Dichtestörungen während der strahlungsdominierten Epoche beschreibt. Das Maximum der Transferfunktion ist dabei durch die Masse der ersten rein gravitativ gebundenen CDM-Wolken gegeben.

Für die direkte Suche von CDM-Teilchen sind die Charakteristiken und die Verteilung der CDM-Wolken eine essentielle Information zur Planung und Interpretation der Daten. Mit unseren Rechnungen ist es möglich, die Größe und die Überdichte der heute existierenden CDM-Wolken abzuschätzen. Als ersten Schritt wollen wir hierfür das einfachste nichtlineare Kollapsmodell mit sphärischer Symmetrie verwenden.

Mit den berechneten Überdichten können zum ersten Mal indirekte Signaturen zuverlässig vorhergesagt werden. So erwarten zum Beispiel Bergström et al. (2001b), daß der Photonen-Strom von WIMP-Annihilationen proportional zum mittleren Quadrat der WIMP-Überdichte ist. Die heute vorhandenen lokalen Überdichten können in einem konsistenten Szenario der Strukturbildung nur mit den von uns berechneten Anfangsbedingungen vorhergesagt werden. Wir wollen in diesem Zusammenhang die Annihilation von Binos in genau zwei Photonen in den von uns berechneten CDM-Wolken analysieren. Diese Untersuchungen sind für die Experimente EGRET und GLAST interessant.

Unsere numerischen Ergebnisse haben wir unter der Annahme erhalten, daß das LSP ein reines Bino ist. Im allgemeinen ist das LSP allerdings eine Linearkombination aus Bino, Wino und den beiden Higgsinos des MSSM. Dies hat insbesondere zur Folge, daß Neutralinos prinzipiell coannihilieren können. Dies gilt auch für die Sfermionen. Der Einfluß von solchen Prozessen auf die Strukturbildung auf kleinsten Skalen soll in Zukunft genau analysiert werden. Dies erfordert, den gesamten Parameterraum des MSSM zu berücksichtigen. Damit wird das LSP nicht nur zur Illustration der hier vorgestellten Methode benutzt, sondern auch auf seine Eignung als CDM-Teilchen in aller Allgemeinheit hin untersucht.

Literatur

- Bergström, L., Endsjö, J., und Gondolo, P., 1998, *Phys. Rev. D* **58**, 103519
- Bergström, L., Endsjö, J., und Gunnarson, C., 2001a, *Phys. Rev. D* **63**, 083515
- Bergström, L., Endsjö, J., und Ullio, P., 2001b, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 251301
- Boehm, C., Fayet, P., und Schaeffer, R., 2001, *Phys. Lett. B* **518**, 8
- Chen, X., Kamionkowski, M., und Zhang, X., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 021302
- Eckart, C., 1940, *Phys. Rev.* **58**, 919
- Gould, A., 1992, *Astrophys. J.* **386**, L5
- Gurevich, A., Zybin, K. P., und Sirota, V. A., 1997, *Physics-Uspeski* **40**, 869
- Hofmann, S., Schwarz, D. J., und Stöcker, H., 2001, *Phys. Rev. D* **64**, 083507
- Kolb, E. und Tkachev, I., 1996, *Astrophys. J.* **460**, L25
- Landau, L. D. und Lifshitz, E. M., 1991, *Hydrodynamik*, Akademie Verlag, Berlin
- Moore, B. et al., 1999, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **310**, 1147
- Pearce, F. R. et al., 2000, astro-ph/0010587
- Schwarz, D. J., Hofmann, S., und Stöcker, H., 2001, in *HEP 2001*
- Silk, J., 1968, *Astrophys. J.* **151**, 459
- Stanek, K. Z., Paczynski, B., und Goodman, J., 1993, *Astrophys. J.* **413**, L7
- Weinberg, S., 1971, *Astrophys. J.* **168**, 175

Danksagung

Ich danke meiner Freundin Kerstin für ihre Liebe und ihre mächtige Unterstützung.

Ich danke meiner Familie und meinen Freunden für ihre Unterstützung und ihre Geduld und entschuldige mich, daß ich sie hier nicht gebührend aufzuzählen vermag.

Ich danke Herrn PD Dr. habil. D. J. Schwarz für die Idee zu dieser Arbeit. Seine Begeisterungsfähigkeit und Kompetenz in wissenschaftlichen und privaten Aspekten waren von unschätzbare Hilfe. Ohne ihn wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. Stöcker für seine Unterstützung, die mir gewährte Freiheit und seinen Zuspruch. Sein kreativer Geist war eine ständige Motivation zur Wachsamkeit.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. mult. W. Greiner für die Aufnahme an das Institut für Theoretische Physik und sein beständiges Interesse an meiner Arbeit. Seine Ausbildung war prägend und es war interessant, als sein Vorlesungsassistent oft auf der anderen Seite zu stehen.

Ich danke Prof. Dr. Kulze für meine Ausbildung in Mathematik und das Verständnis, worauf es ankommt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. H. F. de Groote für meine Erleuchtung, daß Geometrie zu neuen Vorstellungswelten führen kann. Seine Vorlesungen und Seminare bleiben in Erinnerung. Auch für die Einsicht, daß der Beweis von Coleman und Mandula gar nicht einfach ist, danke ich ihm herzlich.

Ich danke allen Kollegen und Freunde, insbesondere der KosmART- und LXD-Gruppe für viele Dinge, über die es sich zu staunen lohnt.

Vielen Dank an alle konstruktiven Mitarbeiter, die mit der technische Realisierung von Ideen diese erst brauchbar machen.

Ich danke der Marie-Curie-Stiftung für die teilweise Finanzierung dieser Arbeit und dem Land Hessen für meine Anstellung.

Curriculum Vitae von Stefan Josef Hofmann

Geburtsdatum	06. 07. 1971
Geburtsort	Offenbach am Main, Deutschland
Akademische Ausbildung	
Juni 1991	Abitur, Rudolf Koch Gymnasium, Offenbach
Oktober 1991	Studienbeginn an der Johann Wolfgang Goethe – Universität
Mai 1993	Vordiplom in Physik mit <i>sehr gut</i> bestanden.
Januar 1995	Eintritt in das Institut für Theoretische Physik
Mai 1997	Diplom in Physik mit <i>Auszeichnung</i> Titel der Diplom–Arbeit: “Die Ioffe–Zeit–Verteilung von Quarks im Photon” Anleitung: Prof. A. Schäfer und Prof. Dr. Dr. hc. mult. W. Greiner
Oktober 1998	Beginn der Promotion am Institut für Theoretische Physik Titel der Promotionsarbeit: “Strukturbildung in Supersymmetrischer Kalter Dunkler Materie auf Kleinsten Skalen“ Anleitung: Prof. H. Stöcker, Prof. Dr. Dr. hc. mult. W. Greiner und PD Dr. habil. D. J. Schwarz
Stipendien	
1993 - 1997	Stipendiat der “Studienstiftung des Deutschen Volkes”
Forschungs–aufenthalte	
Februar 1997	Prof. A. Schäfer und Prof. L. Mankiewicz (DAAD), Polnische Akademie der Wissenschaften, Warschau, Polen
Januar 2002	Prof. W. Bauer (DAAD/NSF), Michigan State University, East Lansing, USA
Feb 2002	Prof. B. Müller (Triangle Nuclear Theory), Duke University, Durham, USA
Juli–September 2002	Prof. L. Csernai (Marie Curie Fellowship), Universitetet i Bergen, Bergen, Norway
Professionelle Karriere	
1995 - 2002	Vorlesungsassistent in Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik, Quantenfeldtheorien
2001	Mitorganisator der Konferenz “Strange Quarks in Matter 2001” (22.09. - 27.09, 2001)

Akademische Lehrer

Prof. Dr. Banks
Prof. Dr. Bethge
Prof. Dr. Constantinescu
Prof. Dr. Dreizler
Prof. Dr. Dvali
Prof. Dr. Fink
Prof. Dr. Geisel
Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Greiner
Prof. Dr. de Groot
Prof. Dr. Kulze
Prof. Dr. Linde
Prof. Dr. Mankiewicz
Prof. Dr. Dr. h. c. Martiensen
Dr. Neise
Prof. Dr. Olive
AOR Dr. Reinhardt
Prof. Dr. Schäfer
Prof. Dr. Schmidt-Böcking
Prof. Dr. Soff
PD Dr. habil. Schwarz
Prof. Dr. Silk
Prof. Dr. Stock
Prof. Dr. Stöcker
Prof. Dr. Veneziano
Prof. Dr. Weidmann