

**Stochastische Modellierung von Handelsgewinnen eines Großinvestors
für Strategien von endlicher quadratischer Variation**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Informatik und Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Marc-Peter Teusch
aus Laubach a.d. Wetter

Frankfurt am Main, 2010
(D 30)

vom Fachbereich Informatik und Mathematik der

der Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Tobias Weth

Gutachter:

1. Prof. Dr. Christoph Kühn
2. Prof. Dr. Hans Föllmer

Datum der Disputation: 4. Februar 2011

Für Andrea und Lilli

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Einführung	v
I Sans Probabilités	1
1 Heranführung	5
1.1 àglåd Funktionen	5
1.2 Quadratische Variation	8
1.3 Infinatoren	12
2 Vorbereitungen	17
2.1 Integration bezüglich $[x, x]^c$	17
2.2 Glatte zweistellige Funktionen	23
2.3 Integrale mit glatten y -Integranden	25
2.4 2-glatte y und Taylor-Formel	27
3 Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités	29
3.1 Calcul d'Itô sans Probabilités	29
3.2 Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités	31
4 Erweiterung der Zeitmenge	37
II Nicht-lineares Integral und Großinvestorvermögensdynamik	51
5 Stochastische Vorbereitungen	55

5.1	Endliche quadratische Variation	55
5.2	Nicht-lineare Integratoren	63
6	Großinvestorvermögensdynamik	77
6.1	Motivation der Wahl der Begriffe	77
6.2	Definitionen	84
6.3	Vermögensdynamikzerlegung	85
III Approximation durch stetige FV-Prozesse		97
7	Illiquide, ohne Überraschungen	101
7.1	Vorbereitungen	101
7.2	Hauptlemma und Approximationssatz	107
8	Illiquide, mit Überraschungen	115
8.1	Verschiedene Qualitäten des Risikos	115
8.2	Probleme bei überraschenden Sprüngen	118
8.3	Hauptlemma und Approximationssatz	121
9	Replikation von Kleininvestor-Pay-Offs	133
9.1	Vorbereitungen	133
9.2	Replikation von Kleininvestorvermögen	136
9.3	Satz zur Arbitragefreiheit	138
Anhang: Raue Pfade		141
Literaturverzeichnis		152
Quellenverzeichnis		161
Zusammenfassung		163
Danksagung		167
Lebenslauf		169

Abbildungsverzeichnis

1	Abhängigkeit der Kapitel	xvii
1.1	Gegenbeispiel	12
1.2	Infinator-Konstruktion	15
4.1	Erweiterung der Zeitmenge	38
4.2	Standarderweiterung von x und y	40
4.3	Zeitliche Linkssprungverschiebung	43
4.4	Zum Beweis von Lemma 2.2	45
5.1	Kombinatorische Möglichkeiten	59
7.1	delta-Begleiter	104
8.1	Zu großer Sprung	120
8.2	Überbrückung (gepunktet) ist hinreichend steil	123
8.3	Hinreichend kleine Wahl von $c_{i,j,k}$	125
8.4	Gesamtkonstruktion des Approximators nach Satz 8.2 und 8.4	127

Einführung

Mit der Modellierung des Aktienpreises als geometrische Brownsche Bewegung durch Fischer Black, Robert Merton, Paul Samuelson und Myron Scholes beginnt Mitte der 1960er Jahre eine Entwicklung in der Finanztheorie die spätestens seit Blacks und Scholes Arbeit *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* und der darin enthaltenen Black-Scholes-Formel¹ schnell an Fahrt gewinnt.²

Sie ist durch eine Besonderheit begünstigt: Die Wahrscheinlichkeitstheorie konnte in Form der sich unabhängig entwickelnden stochastischen Analysis ein Theoriewerkzeug zur Verfügung stellen, von dem man glauben könnte, dass es zur Beantwortung schwieriger Fragen auf dem Gebiet der Finanztheorie erfunden worden wäre.³

Tatsächlich schreibt Andrei Nikolajewitsch Kolmogorow die erste systematische Untersuchung eines zeitstetigen stochastischen Prozesses Louis Bachelier zu und zwar im Rahmen dessen Untersuchungen zur Preisbildung an der Börse (in Bacheliers Dissertation *Théorie de la Spéculation*)⁴. „Thus, the year 1900 may be considered as the birth date of both *Finance* and *Stochastics*.“⁵

Nach Bacheliers Dissertation gingen aber bis zur Mitte der 1960er Jahre Finanztheorie und stochastische Analysis zunächst eher getrennte Wege. Die stochastische Analysis hat dementsprechend weitere Gründungsdokumente,

¹[11], Formel auf S. 644.

²Darrel Duffie stellt fest, dass „1969 – 1979 seems like a golden age of dynamic asset pricing theory“ ([26], Einleitung).

³Vgl. Shiryaev, Shreve und Sondermann [85].

⁴S. [3].

⁵Shiryaev, Shreve und Sondermann [85].

etwa Kolmogorows eigene Arbeit *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*⁶ und rückblickend wohl mit größter Berechtigung Kiyosi Itôs Arbeit *Differential Equations determining Markov Processes*^{7, 8}.

Die Entdeckung⁹ der Brownschen Bewegung durch Bachelier im finanzwissenschaftlichen Kontext geriet außerdem durch Albert Einsteins Erklärung der beobachtbaren Brownschen Bewegung im atomphysikalischen Kontext, durch Modellierung der Kollisionen sehr vieler kleiner Teilchen,¹⁰ und durch Norbert Wieners ersten strengen Existenzbeweis der Brownschen Bewegung als mathematischer Entität¹¹ etwas ins Hintertreffen. Der wissenschaftliche Zeitgeist verortete die großen Entdeckungen mathematischer Konzepte eben dort, wo er solche vermutete: in der reinen Mathematik und der mathematisch schon relativ hochgerüsteten als Fundamentalwissenschaft anerkannten theoretischen Physik.

Das änderte sich freilich in den letzten Jahren grundlegend. Stochastische Analysis und Finanztheorie stehen heute in einem ähnlichen Verhältnis zueinander wie seit schon geraumer Zeit Analysis und Physik.

Die Finanzmarktkrise macht die Kehrseite dieser Entwicklung deutlich: Man muss sich über die Grenzen der Möglichkeiten im Klaren sein. Mit den quantitativen Modellen wird in den Worten von Hans Föllmer¹² gleichsam ein starker Scheinwerfer auf damit präzise erkennbare Orte gerichtet, mit der Folge, dass u.U. die im Schatten liegende Umgebung nicht mehr wahrgenommen wird. Die Gefahr besteht, dass man sich dessen nicht mehr bewusst ist: Man hält den ausgeleuchteten Bereich für das Ganze, das man dann glaubt,

⁶S. [52].

⁷S. [47].

⁸Vgl. [32] und [82].

⁹Als theoretisches Konzept – die Brownsche Bewegung als beobachtbares Phänomen wurde zuerst von dem schottischen Botaniker Robert Brown als Zitterbewegung von schwimmenden Blütenpollen unter dem Mikroskop wahrgenommen und von ihm erstmals 1828 (s. Bauer [7], S. 346) beschrieben.

¹⁰S. [27].

¹¹S. [91].

¹²S. [33]. Der Scheinwerfer als Bild quantitativer Verfahren geht nach Föllmer auf Alain Connes zurück.

richtig beschrieben und verstanden zu haben.¹³

Genauere Kenntnis der Reichweite und Gültigkeitsbedingungen der Modelle ist nötig. Walter Schachermayer verweist in diesem Zusammenhang auf die Versicherungsbranche, in der wesentlich mehr Mathematiker institutionalisierte Verantwortung tragen, als in der Bankenbranche.¹⁴

Den in Theorie und Praxis verwendeten Modellen stand man im Allgemeinen auch nicht naiv gegenüber. Zwar war etwa das – um zum eigentlichen Thema zurückzukommen – von Samuelson entwickelte der Black-Scholes-Formel zugrundeliegende Marktmodell eines Aktienpreises, der einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt,¹⁵ der Prototyp eines zeitstetigen vollständigen friktionslosen preisprozessstetigen Finanzmarktmodells mit preisnehmenden Investoren. Man war aber seit „Inbetriebnahme“ dieses Paradigmas über die Stärke der es tragenden Annahmen beunruhigt.¹⁶ Nur eine Frage der Zeit war es, dass insbesondere auf oder neben den Trading-Floors der großen Finanzinstitutionen und in den Forschungsarbeiten letztlich alle dieser Annahmen, wenn auch nicht immer alle zusammen, durch schwächere ersetzt wurden.¹⁷

¹³Die hohe Selbstbezüglichkeit, der wirtschaftliche Modellbildungen unterliegen, kommt in dem Maße in dem sie nicht durch Fixpunktüberlegungen eingeholt werden kann, erschwerend hinzu. Dieser Umstand liegt insbesondere dem Bemühen George Soros um seine Theorie der „Reflexivity“ zu Grunde (s. [87], [88]).

¹⁴„Schachermayer: ... Es ist ja nicht so, dass die Mathematiker falsch gerechnet hätten. Es lag eher darin, dass Mathematiker zu wenig Einfluss hatten.

DER STANDARD: Was meinen Sie damit?

Schachermayer: Nehmen wir den Vergleich mit den Versicherungsgesellschaften. Im 19. Jahrhundert sind Dutzende Versicherungsgesellschaften bankrott gegangen - nicht zuletzt deshalb, weil sich Lebensversicherungen für pyramidenspielartige Konstruktionen sehr anbieten. Aufgrund dieser Probleme hat sich die klassische Versicherungsmathematik entwickelt, die solche Pyramidenspiele verunmöglichte. Im Versicherungsbereich ist heute eine Unternehmenskultur etabliert, wo Mathematiker einen entsprechend hohen Einfluss haben, im Vorstand vertreten sind und die Bilanz unterschreiben müssen. Deshalb haben sogar Katastrophen wie 9/11 oder große Naturkatastrophen nicht dazu geführt, dass Versicherungsgesellschaften pleite gegangen wären. Die Risiko-Teilung durch die Rückversicherungen hat da bestens funktioniert.“ ([81].)

¹⁵S. [79].

¹⁶S. Frey [42], S. 115.

¹⁷Schon früh zeigten auch u.a. Arbeiten von Mandelbrot ([65]) und Fama ([29]), dass die empirische Verteilung der Aktienpreisrenditen „heavier tails“ haben, als dies bei Normalverteilungsannahmen zu erwarten wäre.

Zeitdiskrete Modelle¹⁸, aus Erkenntnisinteresse, didaktischen Erwägungen oder technischen Implementationsanforderungen entstanden, machten deutlich, dass Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells¹⁹ die Ausnahme, nicht die Regel ist. Auch wurde klar, dass Unvollständigkeit bei den zeitstetigen in der Praxis wichtigen Modellen mit stochastischer Volatilität auftritt.²⁰

Ebenso bleiben einige Phänomene einer theoretischen Untersuchung unzugänglich, wenn friktionslose Märkte unterstellt werden. Transaktionskosten fanden inzwischen entsprechende Beachtung. Die Forschung in diesem Bereich zeigt u.a. auf, wie die Hedgemöglichkeiten zum Teil drastisch einschrumpfen.²¹

An der Annahme, dass der Investor als Preisnehmer am Markt agiert, wurde länger festgehalten. Aber es ist eine Perspektive, die sich mit gutem Gewissen nur in der Modellierung von Kleininvestoren einnehmen lässt. Geht es um die Frage, wie ein Großinvestor zu agieren hat, dessen Ordervolumen signifikante Anteile des umlaufenden Aktienkapitals betrifft, dann bedarf es theoretischer Modelle, in denen eine Beeinflussung des Preisprozesses durch die Großinvestorhandlungen vorkommt. Hier beginnt der Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Mit Robert Jarrow's 1992 erschienenen Arbeit *Market Manipulation, Bubbles, Corners, and Short Squeezes*²² (die 1994 mit der Arbeit *Derivative Security Markets, Market Manipulation, and Option Pricing*²³ fortgeführt wird und weitere Sachverhalte in den Blick nimmt (insbesondere das Replikationsproblem)) wird für den zeitdiskreten Fall ein Modell vorgelegt, das den Rückkopplungseffekt *Handelsstrategie des Großinvestors* \rightarrow *Preisprozess* zulässt. Jarrow untersucht den Fall eines Großinvestors, der durch seine Or-

¹⁸Wie das viel zitierte Cox-Ross-Rubinstein-Modell (s. [19]), welches allerdings noch vollständig ist; die meisten zeitdiskreten Modelle sind es jedoch nicht (vgl. Föllmer und Schied [36], Prop. 5.38, S. 231).

¹⁹Indem jedes Derivat replizierbar ist.

²⁰Vgl. für das Beispiel eines Prozesses mit einem Volatilitätssprung zufälliger Höhe, der vorher und nachher eine geometrische Brownsche Bewegung ist, Föllmer und Leukert [34], S. 267 ff.

²¹Vgl. u.a. Soner, Shreve und Cvitanic [86] und Levental und Skorohod [60].

²²S. [49].

²³S. [50].

ders in einem Markt mit einem risikobehafteten Wertpapier den Preis des Papiers beeinflusst, und zwar so, dass der der Order zugehörige Kauf oder Verkauf des Wertpapiers dem Preiseinfluss der Order bereits unterliegt und dass (1) eine Kauforder preiserhöhend, (2) eine Verkauforder im Wesentlichen preismindernd wirkt.²⁴

Jarrow geht der Frage nach, ob der Investor dadurch Marktmanipulationsmöglichkeiten besitzt, die sich auf das Realvermögen beziehen.²⁶ Er zeigt erstens: Im Allgemeinen bestehen neben dem Short Squeeze weitere Manipulationsmöglichkeiten (etwa der Art „Establishing a Trend and Trading against It“)²⁷, wenn der Preisprozess nicht nur von dem zum Zeitpunkt t aktuellen Großinvestorbestand $\alpha(t, \omega)$, sondern von den Großinvestorbeständen zu den bisherigen Zeitpunkten $0, \dots, t$ abhängt. Zweitens: Bis auf den Short Squeeze gibt es in dem Fall, dass der Preisprozess nur von dem aktuellen Bestand des Großinvestors abhängt, keine Marktmanipulationsmöglichkeiten für den Großinvestor, wenn der Markt für den Kleininvestor bei konstanten Großinvestorbeständen arbitragefrei ist.

Rüdiger Frey präsentiert in der Arbeit *Perfect Option Hedging for a Large Trader*²⁸ sein Modell als zeitstetige Version des Set-up, das Jarrow in [49] und [50] eingeführt hat und das insbesondere in Form der Reaktionsfunktion ψ (s.u.) einen direkten Preiseffekt der Bestandsveränderung des Großinvestors mit sich bringt.²⁹ Frey erweitert Jarrows Ergebnisse und zeigt, dass

²⁴Jarrows Modell lässt die Manipulationsmöglichkeit des „Short Squeeze“²⁵ zu; in diesem Sinn ist Bedingung (2) abgeschwächt.

²⁶Jarrow unterscheidet das Realvermögen, das durch Liquidierung der Position erzielbar ist, vom Papiervermögen, das durch den (höheren) Wertpapierpreis vor Liquidierung gegeben ist.

²⁷„It is characterized by the speculator using his market power to create a trend (a bubble), and then selling against the trend before it collapses.“ [49], S. 325.

²⁸S. [42].

²⁹Die Auswirkung der Handelsstrategie eines großen Investors, wurde außerdem im Rahmen der Modellierung des Insider-Handels eines informierten Investors untersucht. Der Preiseinfluss ergibt sich bei Kyle [59] und Back [4] aus Gleichgewichtsmodellen und ist qualitativ ähnlich wie der Preiseinfluss in Freys Modell. Anders als in Freys Ansatz entstehen bei Cvitanic und Ma [21] und Cuoco und Cvitanic [20] die Feedbackeffekte auf den Preisprozess erst indirekt durch die Abhängigkeit des Drift- und Volatilitätsparameters von der Handelsstrategie des großen Investors. DeMarzo und Urosevic [25] zeigen, dass ein auf diese Weise reagierender Aktienpreisprozess als Equilibriumspreisprozess vorliegen kann. Sie geben zudem Gründe für ein etwaiges IPO-Underpricing und andere beobacht-

es auch im Fall des zeitstetigen Handels möglich ist, Hedgingstrategien zur Replikation von Pay-Offs gewisser pfadunabhängiger Derivate (einschließlich europäischer Call- und Put-Optionen) zu finden.

Frey geht von einem Marktmodell mit folgenden Eigenschaften aus: Fundamentale Quelle der Unsicherheit ist der Prozess F , Lösung einer stochastischen Differentialgleichung $dF_t = \eta F_t dW_t$, wobei W eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf dem die üblichen Bedingungen erfüllenden Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) ist, filtriert durch die Vervollständigung der durch W erzeugten Filtration. Der abgezinste Aktienpreis zur Zeit t ist durch $X_t = \psi(t, F_t, \alpha_t)$ gegeben. $\alpha_t \in I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnet dabei den Bestand des Großinvestors zur Zeit $t \in [0, T]$, und ψ ist stetig differenzierbar mit Werten in \mathbb{R}_+ .

Jarrow folgend ist bei Frey die Reaktionsfunktion ψ ein nicht abgeleiteter Grundbestandteil des Modells. Frey weist aber daraufhin, dass ψ auch als implizit definierbarer Bestandteil eines „temporary equilibrium approach“ aufgefasst werden kann. Dieser Ansatz geht zurück auf Hans Föllmer und Martin Schweizer. Sie zeigen in der Arbeit *A Microeconomic Approach to Diffusion Models for Stock Prices*,³⁰ dass in diskreter Zeit interessante stochastische Prozesse anhand der Annahme eines Gleichgewichts entstehen können, die unter Anwendung eines Invarianzprinzips gegen zeitstetige Prozesse konvergieren. Weiterhin, dass diese Prozesse sehr unterschiedliche Qualitäten aufweisen, je nachdem welche Art von Finanzmarktteilnehmern³¹ am Markt aufeinandertreffen. Das für das Verständnis der Ansätze von Jarrow und Frey wichtigste Zusammenspiel ist das zwischen einem Referenzhändler (der etwa viele Kleininvestoren repräsentiert) und einem großen Investor (etwa einem Portfoliohedger).

In Frey und Stremme [43] und Platen und Schweizer [74] verwendete explizite Modelle werden in Frey [42] diskutiert. Sie zeigen, dass die Reaktionsfunktion ψ nicht vom Himmel fallen muss. Dabei wird die Nachfrage des Referenzhändlers zur Zeit t durch $D(t, F_t, x)$ gegeben, wobei F_t ein Prozess ist, der den Wert einer fundamentalen Zustandsvariable zur Zeit t wieder-

bare Effekte im Zusammenhang mit einem Großinvestor an.

³⁰S. [38]. Vgl. auch (mit Korrekturen) Föllmer [31].

³¹Und in welchen Proportionen.

gibt.³² x ist der Aktienpreis.

Es wird angenommen, dass zum Zeitpunkt t der große Investor (der Portfoliohedger) einen Anteil α der verfügbaren Aktien im Bestand hält. Dann ist der Equilibriumspreis X_t durch die Gleichung

$$D(t, F_t, X_t) + \alpha = 1$$

gegeben.

In den von Frey diskutierten Modellen hat die Gleichung eine eindeutige Lösung, so dass X_t als Funktion von t , F_t und α dargestellt werden kann: $X_t = \psi(t, F_t, \alpha)$.³³

Dietmar Baum³⁴ definiert ausgehend von den Reaktionsfunktionsansätzen von Jarrow und Frey ein allgemeines Wertpapier $\psi(t, \omega, p)$ insbesondere durch die Forderungen, dass es im Großinvestorbestandsparameter p stetig und isoton ist und dass es ein P -äquivalentes Maß P^* gibt, bezüglich dem für jedes p der Prozess $\psi(t, \omega, p)$ ein càdlàg Lokalmartingal ist. Der Unterscheidung zwischen Papier- und Realwert von Schönbucher und Wilmott³⁵, gibt er folgende Gestalt: Der Realwert zum Zeitpunkt t des Portfolios des Großinvestors, R_t , bestehend aus π^0 Bonds und π^1 Aktien ist durch

$$R_t = \pi_t^0 + \int_0^{\pi_t^1} \psi(t, x) dx$$

³²Zum Beispiel kann F_t den fundamentalen Wert des Unternehmens repräsentieren dessen Aktien gehandelt werden. Es gibt aber weitere mögliche Interpretationen.

³³In Platen und Schweizer [74] ist ψ durch

$$\psi(t, f, \alpha) = f \cdot \exp(\lambda \alpha)$$

mit einer negativen Konstanten λ gegeben. In Frey und Stremme [43] führt das Modell zu der Reaktionsfunktion

$$\psi(t, f, \alpha) = D^* \cdot f / (1 - \alpha)$$

mit einer positiven Konstanten D^* . In beiden Modellen ist ψ eine glatte Funktion, die in f isoton ist. Das Modell von Platen und Schweizer weist die eher untypische Eigenschaft auf, dass die Ableitung ψ_α von ψ nach dem Bestand des Large Traders negativ ist. In Freys Modell mit einer explizit gegebenen glatten Reaktionsfunktion ψ werden dementsprechend die Annahmen $\psi_f(t, f, \alpha) > 0$ und $\psi_\alpha(t, f, \alpha) \neq 0$ getroffen.

³⁴S. [9].

³⁵S. [84].

gegeben. Der Papierwert dagegen ist durch $\pi_t^0 + \psi(t, \pi_t^1)$ definiert.

Die Unterscheidung in Real- und Papierwert ist ebenfalls zentral in Dietmar Baums und Peter Banks Paper *Hedging and Portfolio Optimization in Financial Markets with a Large Trader*³⁶ in der der Ansatz von Jarrow und Frey in Richtung parameterabhängiger Semimartingalfamilien weitergeführt wird. (Beispielsweise ist ja in Freys Arbeit aufgrund der Voraussetzungen der Brownschen Bewegung und der Differenzierbarkeit $X_t^\alpha = \psi(t, F_t, \alpha)$ Semimartingalfamilie.) In diesem Setting untersuchen Bank und Baum insbesondere die Möglichkeit, die Handelsstrategien von Großinvestoren durch adaptierte stetige FV³⁷-Strategien zu approximieren.³⁸ Wie nämlich eine von ihnen aus der Itô-Wentzell-Formel³⁹ gewonnene Zerlegung der Dynamik des Investorvermögens zeigt, lassen sich bei Verwendung von adaptierten stetigen FV-Strategien illiquiditätsinduzierte Transaktionskosten vermeiden. Wie bei Frey ist allerdings vorausgesetzt, dass die Großinvestorstrategie ein Semimartingal ist.

Die Arbeit soll an dieser Stelle fortgesetzt werden. Eine weitere Voraussetzung, von der bisher noch wenig die Rede war, die aber neben der perfekten Elastizität der Märkte eine der fragwürdigsten Annahmen darstellt, soll dabei aufgegeben werden: Der stetige Aktienpreisprozess.

Es sollen in der vorliegenden Arbeit also illiquide Finanzmärkte mit springenden Preisprozessen – allerdings unter bestimmten Bedingungen an die Qualität der Sprünge – untersucht werden. Es können dabei glücklicherweise viele der schon geebneten Wege beschrritten werden. Die Approximation durch zahme Strategien ist besonders durch Bank und Baum inspiriert.⁴⁰ Wege sich bezüglich einer nicht-linearen Integration von stetigen Integratoren zu lösen, für die Hiroshi Kunita Pionierarbeit geleistet hat, sind besonders durch René Carmona und David Nualart sowie Christoph Kühn in der Arbeit *Nonlinear Stochastic Integration with a Nonsmooth Family of Integrators* ge-

³⁶S. [6].

³⁷D.i. von endlicher Variation auf Kompakta.

³⁸Eine ähnliche Approximation aber mit unstetigen Prozessen, deren Pfade Treppenfunktionen sind, wird in Levental und Skorohod [60] verwendet.

³⁹Sie tritt im Fall einer Semimartingalfamilie an die Stelle der Itô-Formel.

⁴⁰S. [6].

ebnet worden.⁴¹

Zusammenfassend gilt, dass in illiquiden Finanzmärkten der Preis etwa einer Aktie nicht nur von externen Faktoren abhängt, sondern auch von den Beständen der Großinvestoren.⁴² Eine stochastische Modellierung von Preisprozessen in illiquiden Märkten kann sich daher in der Regel nicht mit stochastischen Prozessen mit einem Zeitparameter t begnügen, sondern wird auch den Bestandsparameter x einzubeziehen haben. An die Stelle des Werkzeugs „Itô-Formel“ tritt im Fall von zwei Parametern die „Itô-Wentzell-Formel“. Da mit ihr die Zerlegung der Investorvermögensdynamik gelingt, ist sie etwa in Bank und Baum [6] von besonderer Bedeutung.

Wesentliche Ergebnisse meiner Arbeit sind:

- Ähnlich wie in Föllmers pfadweisem Itô-Kalkül (s.u.) wird die Existenz eines pfadweisen nicht-linearen Integrals und einer pfadweisen Itô-Wentzell-Formel nachgewiesen (Teil I, Kap. 3).
- Die den pfadweisen Itô-Wentzell-Kalkül vorbereitende Aussagen können auf eine erweiterte Zeitmenge übertragen werden. Die Erweiterung wird im stochastischen Teil der Arbeit dienstbar gemacht (Teil I, Kap. 4).
- Ein *zahmer* nicht-linearer Integrator wird eingeführt und gezeigt, dass er wichtige Stetigkeitseigenschaften besitzt (Teil II, Kap. 5).
- Aktienpreise werden durch zahme Integratoren modelliert (Teil II, Kap. 6).
- Es wird gezeigt, dass es für eine allgemeine Großinvestorhandelsstrategie hinreicht, dass der vorhersehbare Bestandsprozess θ eine wohldefinierte quadratische Variation i.S.d. Definition 5.4 (S. 56) besitzt (insbesondere muss nicht vorausgesetzt werden, dass θ Semimartingal ist) (Teil II, Kap. 6).

⁴¹S. [58], [13], [56].

⁴²Temporäre Gleichgewichtsmodelle, wie sie Föllmer und Schweizer untersuchen, zeigen, dass diese Abhängigkeit implizit aus Gleichgewichtsbedingungen definiert sein kann und dass so ihre explizite Einführung als „model primitive“ nicht vom Himmel fällt. Gleichwohl soll Jarrow, Frey, Bank und Baum gefolgt werden und die Reaktionsfunktion als zugrundeliegend angenommen werden.

- Damit wird die Handelsstrategie nur noch der allgemeinsten sinnvollen Voraussetzung unterworfen. Denn wie Bemerkung 6.11 auf S. 94 f. zeigt, ist eine Definition des Vermögensprozesses ohne wohldefinierte quadratische Variation nicht möglich: Andere Handelsstrategien verursachen explodierende bzw. nichtkonvergierende Kostenterme. In dem einfachen Fall, in dem eine zeitstetige Preisfamilie P affin von den Beständen des Großinvestors abhängig ist, mit $c > 0$ etwa durch $P(\vartheta, t) := (1 + \vartheta c)P(0, t)$, und eine stetige Handelsstrategie θ gewählt wird, zeigt Bemerkung 6.11, dass das Vermögen des Großinvestors durch $V_t^n = L(\theta_0, 0) + \beta_0 + \bar{I}_t^n - \frac{c}{2} \sum_{\tau_n^t} (\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i})^2$ approximiert wird. Da sich \bar{I}_t^n dem nicht-linearen Intergral $\int_0^t L(\theta_s, ds)$ annähert, ist die Definition eines Vermögensprozesses nur möglich, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\tau_n^t} (\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i})^2$ existiert.⁴³ (Teil II, Kap. 6.)
- Optionale Prozesse, deren realisierte Power-Variation entlang von Stoppzeiten nicht explodiert, besitzen fast sicher *làglåd* Pfade, d.h. der linke und der rechte Limes existiert zu jedem Zeitpunkt als Element in \mathbb{R} (Satz 5.6, S. 56). Folglich kann man sich auf Handelsstrategien mit *làglåd* Pfaden beschränken⁴⁴.
- In einem ohne Überraschungen springenden Finanzmarkt wird gezeigt, dass zahme die Handelsstrategien approximierende Strategien existieren, so dass der Illiquidität geschuldete Transaktionskosten entfallen (Teil III, Kap. 7).
- In einem mit Überraschungen springenden Finanzmarkt wird gezeigt, dass – unter gewissen Voraussetzungen an die Sprünge, in die die Risikoneigung des Großinvestors einbezogen werden muss – Handelsstrategien unter kontrollierbarem Risiko durch zahme Strategien approxi-

⁴³Es besteht eine Analogie zu dem Fall proportionaler Transaktionskosten wie in Campi und Schachermayer [12]. Dort wird ein vorhersehbarer Prozess finiter Variation, der aber weder links- noch rechtsstetig sein muss, vorausgesetzt. Hätte er nicht endliche Variation würden unendliche Transaktionskosten anfallen: „The economic rationale behind it is that a portfolio process having trajectories with infinite variation would be a very stupid investment strategy, as the transaction costs would add up to infinity for the trajectories with infinite variation. Therefore we may restrict to portfolio processes with a.e. trajectory of finite variation.“ ([12], S. 585).

⁴⁴Prozesse mit *làglåd* Pfaden, die zu einem Zeitpunkt zwei Sprünge haben können, spielen auch in neueren Arbeiten zu proportionalen Transaktionskosten eine Rolle, siehe wieder [12].

miert werden können, so dass keine Transaktionskosten entstehen (Teil III, Kap. 8).

- Unter weiteren Bedingungen an den Finanzmarkt wird gezeigt, dass Kleininvestor-replizierende Großinvestorstrategien existieren und es werden hinreichende Voraussetzungen angegeben, unter denen es für den Großinvestor keine Arbitrage-Möglichkeiten gibt (Teil III, Kap. 9).

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

Der erste Teil der Arbeit ist von Hans Föllmers Arbeit *Calcul d'Itô sans Probabilités*⁴⁵ inspiriert. Föllmer beweist dort die Itô-Formel als eine rein analytische Aussage. Der Beweis gibt einen sehr schönen Einblick in die Gründe für die Gültigkeit der Itô-Formel, in pfadweiser aber auch in klassischer stochastischer Form.

Dem ersten Teil liegt der Wunsch zugrunde, Transparenz über die Gültigkeitsbedingungen der Itô-Wentzell-Formel auf ähnlichem Wege zu gewinnen: Ein „Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités“ wird in Kapitel 3 formuliert und bewiesen. Das Zusammenspiel von Voraussetzungen und Folgerungen ist allerdings nicht so elegant wie in Föllmers 1981 in *Seminaire de Probabilités XV* erschienenen Arbeit.⁴⁶ Zur Einführung und zur Bereitstellung nützlicher Definitionen und Lemmata dienen die Kapitel 1 und 2.

In Kapitel 4 werden die wichtigsten Aussagen der ersten beiden Kapitel im Wesentlichen wiederholt: Sie werden aber nicht auf $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$, sondern auf eine Erweiterung $[0, T]^*$ bezogen. Die Menge $[0, T]^*$ entsteht daraus, dass $[0, T]$ um zusätzliche Zeitpunkte angereichert wird. Die Erweiterung hat den Vorteil, dass Linkslimiten $t-$ „echte“ Zeitpunkte werden. Dies erweist sich in dem Beweis des Satzes 6.8 zum Realwert als bequem.

Als etwas zu lang geratene Bemerkung zu dem ersten Teil „Sans Probabilités“ und besonders zu Kapitel 3 wird im Anhang an den von Terry Lyons entwickelten Begriff des rauen Pfades erinnert, um ihn mit dem pfadweisen Itô- und Itô-Wentzell-Kalkül in Beziehung zu setzen und damit den

⁴⁵S. [30].

⁴⁶Gleichwohl zeigt sich, dass die quadratische Variation als *gemeinsame* quadratische Variation im Sinne von [30], Bemerkung 1, S. 147, eine wichtige Voraussetzung ist.

sans probabilités-Teil abzurunden. Dabei wurde auf die Monographie *System Control and Rough Paths* von Terry Lyons und Zhongmin Qian⁴⁷ und auf die, diese Beziehung *Raue Pfade und Pfadweises Itô-Kalkül* thematisierende Arbeit von Gerrit Reininghaus⁴⁸ zurückgegriffen.⁴⁹

Im zweiten Teil wird in Kapitel 5 ein zahmer nicht-linearer Integrator eingeführt und gezeigt, dass er im Wesentlichen ein stetiger nicht-linearer Integrator ist, wie ihn Christoph Kühn in der Arbeit *Nonlinear Stochastic Integration with a Nonsmooth Family of Integrators*⁵⁰ zur Anwendung auf allgemeine vorhersehbare Integranden entwickelt hat.

In Kapitel 6 wird gezeigt, dass im Rahmen der Modellierung eines Aktienpreisprozesses durch zahme Integrierten, von einer Großinvestorhandelsstrategie nur die wohldefinierte quadratische Variation des Bestandsprozesses θ gefordert werden muss.

Im Hinblick auf die Bedeutung adaptierter stetiger FV-Prozesse zur Vermeidung von Illiquiditätskosten, die in Kapitel 6 durch die Vermögensdynamikerlegung erkannt wird, befassen sich die Kapitel 7 und 8 im dritten Teil der Arbeit mit der Approximation von vorhersehbaren endlich quadratvariierenden (allgemeiner: vorhersehbar làglàd ⁵¹) Prozessen durch adaptierte stetige FV-Prozesse. Es zeigt sich, dass solche Approximationen möglich sind, bei denen sich die relevanten nicht-linearen Itô-Integrale der Approximationsprozesse nur wenig von den Itô-Integralen der zu approximierenden Prozesse unterscheiden.

⁴⁷S. [63].

⁴⁸S. [77].

⁴⁹Neben dem innermathematischen Interesse an pfadweisen Untersuchungen und auch über den auf diesem Weg erzielten Einblick in die Voraussetzungen an die Handelsstrategie hinaus, wäre es wünschenswert, wenn pfadweises Itô- und Itô-Wentzell-Kalkül und Theorien rauer Pfade (im Hinblick auf Sprünge bzw. Rauheit) einige der etwa von Benoit Mandelbrot (vgl. [67], [68]) vorgetragene Kritikpunkte hinsichtlich der „smoothness“ vieler verwendeter Modelle konstruktiv aufzunehmen in der Lage wären. Eventuell ist der von Mandelbrot propagierte auf Fraktale zurückgehende Ansatz mit einigen pfadweisen Konzepten verträglich (vgl. [66]).

⁵⁰S. [56].

⁵¹Limites à gauche limites à droite – alle linksseitigen und alle rechtsseitigen Limiten existieren. (Es zeigt sich, dass nicht explodierende quadratische Variation làglàd -Eigenschaft impliziert (s. Satz 5.5 auf S. 56).)

In [6] ist eine solche Approximation bezüglich Integratoren mit stetigen Pfaden durchgeführt worden. In den Kapiteln 7 und 8 werden von den Integratoren keine stetigen Pfade verlangt. Die Sprünge haben aber gewisse Eigenschaften: „Angekündigt“ in Kapitel 7. Nicht angekündigt aber „ L^p “ in Kapitel 8. Die Großinvestorstrategie θ wird als $\text{l\grave{a}gl\ddot{a}d}$ vorausgesetzt.

Einerseits mögen die Approximationsresultate für sich interessant sein, andererseits implizieren sie im Finanzmarktkontext die Möglichkeit einer Vermögensdynamik ohne Transaktionskosten. Unter gewissen zusätzlichen Anforderungen, im Wesentlichen ein gemeinsames Martingalmaß, kann in Kapitel 9 gefolgert werden, dass ein Großinvestor Kleininvestor-Vermögensprozesse mit fast gleichem Anfangskapital replizieren kann.

Zur Abhängigkeit der Kapitel untereinander s. Abbildung 1.

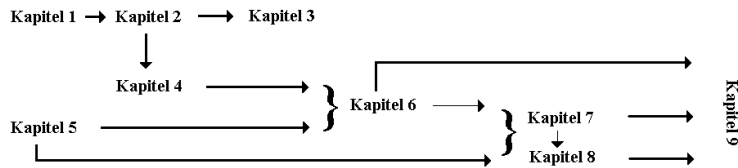


Abbildung 1: Abhängigkeit der Kapitel

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Großinvestor in einem zeitstetigen Finanzmarkt mit unstetigem Preisprozess. Trotz des Rückkopplungseffekts und etwaiger Preissprünge ist es dem Großinvestor unter gewissen Voraussetzungen möglich, Transaktionskosten bei hinnehmbaren Risiken zu vermeiden. Die Analyse beschränkt sich allerdings auf den Fall, dass die Handelsstrategie des Großinvestors den Aktienpreis nur durch den aktuellen Bestand beeinflusst.

Zum einen stehen noch Untersuchungen aus, die die Arbeit von Jarrow an dem Punkt weiterverfolgen, an dem der Preisprozess auch von der Vergangenheit der Handelsstrategie beeinflusst ist. Im zeitdiskreten Fall hat Jarrow Resultate erzielt, die neue Phänomene erwarten lassen. Beispielsweise ist zu erwarten, dass auch im Zeitstetigen Marktmanipulationsmöglichkeiten wie „Establish a Trend and Trade against it“ bestehen.

Zum anderen gibt es eine weitere Linie der „Illiquiditätsforschung“, der nicht wie im Gefolge der Arbeiten von Frey, Bank und Baum, Platen und Schweizer und der vorliegenden Arbeit die Annahme zugrunde liegt, dass der durch den Großinvestor ausgelöste Liquiditätseffekt so lange besteht, wie der Großinvestor investiert ist, sondern die von einem „short term price impact“ ausgeht. Zu nennen sind Arbeiten von Cetin, Jarrow und Protter [14] und Rogers und Singh [78]. Nach diesem Konzept springt der Aktienpreis nach der Beeinflussung durch die Großinvestororder auf sein vorheriges Level zurück.

In dem Paper *Optimal Investment in Financial Markets with Different Liquidity Effects* bringt Christoph Kühn neuerdings beide Ansätze zusammen.⁵² Kühn gibt mikroökonomische Erklärungen für die beiden Phänomene und präsentiert ein zeitstetiges Modell, in dem beide Liquiditätseffekte auftreten.

In der Literatur wird ferner darauf hingewiesen, dass „the real world illiquidity can show up as bid-offer spreads or as times when only a limited amount of an asset can be traded.“⁵³ Christoph Kühn und Maximilian Stroh untersuchen jüngst in ihrem Paper *Optimal Portfolios of a Small Investor in*

⁵²S. [55].

⁵³Bank und Baum [6], S. 15.

*a Limit Order Market – a Shadow Price Approach*⁵⁴ Optimierungsprobleme die sich aus der Wahl zwischen Limitorder oder Marketorder im Hinblick auf einen bestehenden positiven Bid-Ask-Spread ergeben.

Weitere interessante Entwicklungen sind bei der Betrachtung spieltheoretischer Aspekte zu erwarten, denn bei zwei oder mehr Großinvestoren kommen dieser Art einschlägige Erwägungen unweigerlich ins *Spiel*. Alexander Schied und Torsten Schöneborn untersuchen beispielsweise in der Arbeit *Liquidation in the Face of Adversity: Stealth vs. Sunshine Trading*⁵⁵ eine Mehrspielersituation in einem illiquiden Finanzmarkt in welchem ein Spieler versucht, ein Portfolio in einer kurzen Zeitspanne zu liquidieren, während andere Spieler versuchen, aus ihrem Wissen um die Intention des Portfolioliquidators Vorteile zu ziehen.

Auch Holger Kraft und Christoph Kühn untersuchen in der Arbeit *Large Traders and Illiquid Options: Hedging vs. Manipulation*⁵⁶ u.a. spieltheoretische Fragestellungen. Sie untersuchen zunächst das widerstreitende Verhältnis zwischen Hedging und Manipulation des Auszahlungsprofils eines vom terminalen Aktienkurs S_T abhängigen Derivats, das selbst nicht gehandelt werden kann. Unter der Annahme, dass, wie in Cvitanic und Ma [21], Cuoco und Cvitanic [20] und DeMarzo und Urošević [25], die erwartete Aktienrendite durch die Aktienbestände des Großinvestors beeinflusst wird, zeigen Kraft und Kühn, dass, wenn der Großinvestor eine CARA-Nützlichkeitsfunktion verwendet,⁵⁷ zum Beispiel eine perfekte Replikationsstrategie nicht optimal für den Großinvestor sein muss. Es gibt ein Nash-Equilibrium für zwei Großinvestoren, die den gleichen Preiseinfluss haben und deren Derivatbestände sich absolut entsprechen aber verschiedenes Vorzeichen haben. Im Gleichgewicht entsprechen sich, grob gesagt, Preis des Derivats und subjektive Werteinschätzung (Indifferenzpreis). Im Falle eines Großinvestors wird gezeigt, dass für hinreichend große Derivatbestände der Indifferenzpreis größer als der Black-Scholes-Preis ist und gegen den Maximal-Pay-Off des Derivats strebt.

Die inzwischen vielen und vielseitigen Arbeiten zur Modellierung der Fi-

⁵⁴S. [57].

⁵⁵S. [83].

⁵⁶S. [54].

⁵⁷Vgl. z.B. Föllmer und Schied [36], S. 67.

nanzmarktliquidität bestehen ohne Frage zu Recht: Nicht nur die jüngste, und nach herrschender Meinung schwerste Krise seit der Weltwirtschaftskrise, ist in zentralen Aspekten von nicht vorhergesehenen Illiquiditätsproblemen gekennzeichnet, auch die bisherigen kleineren Krisen, von denen etwa die LTCM-Krise und das Platzen der Internet-Blase zu nennen sind, sind zumindest verstärkt worden durch Liquiditätseffekte. Zudem führt die Nichtbeachtung des Liquiditätseffekts zu falschen Anreiz- und Steuerungssystematiken insofern, als dass bei der Verwendung des Papiervermögens als Bemessungsgrundlage Gewinne nur auf dem Papier bestehen aber im Unterschied zum Realvermögen nicht realisierbar sind.

Zwei Hinweise zu Bezeichnung und Notation:

1. Eine Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von endlichen Zerlegungen wird *fein* genannt, wenn die Abstände benachbarter Zerlegungspunkte gegen Null gehen (gemeint ist also nicht zwingend eine Verfeinerung). Eine in diesem Sinne feine Stoppzeitenzerlegungsfolge bezeichnet etwa Protter als „a sequence of random partitions tending to the identity“.
2. Das Ende von Bemerkungen wird durch das Zeichen \diamond kenntlich gemacht. Manchmal wird \diamond auch zu ähnlicher Textstrukturierung verwendet. Das Zeichen \square steht am Ende von Beweisen.

Teil I
Sans Probabilités

Der Titel des ersten Teils soll es anzeigen: Das was folgt, ist eine Übertragung der in Föllmer [30] ausgeführten Überlegungen auf den Fall, dass auf eine quadratvariierende Funktion $t \mapsto x_t$ eine, im Zeitverlauf sich möglicherweise ändernde, in x glatte Funktion $(x, t) \mapsto y(x, t)$ einwirkt.

Das erste Kapitel dient als Heranführung an die Besonderheiten von $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktionen und den wichtigen Begriff der quadratischen Variation. Er wird auf vage Konvergenz von Punktmaßen gegen Radonmaße, deren singuläre Anteile den Sprungquadraten der $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktion zu entsprechen haben, zurückgeführt. An Hand von sogenannten Infiltratoren wird beispielhaft gezeigt, dass sich unendliche Variation im Allgemeinen nicht bändigen lässt.

Im zweiten Kapitel werden in Form von Lemmata und Bemerkungen die Voraussetzungen für den Beweis des Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités im dritten Kapitel geschaffen. In Kapitel 4 werden die wesentlichen Aussagen der Kapitel 1 und 2 erweitert. Dafür wird die Zeitmenge $[0, T]$ um abzählbar viele neue „abstrakte“ Zeitpunkte vergrößert. Die Erweiterung leistet im Beweis des Satzes zur Realwertdynamik im „stochastischen“ Teil II der Arbeit gute Dienste.

Im Anhang am Schluss der Arbeit findet sich eine (längliche) Bemerkung zu dem „Sans Probabilités-Teil“ aus Sicht der Theorie der rauen Pfade.

Kapitel 1

Heranführung

1.1 làglàd Funktionen

Eine Funktion $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ($0 \leq a < b \leq \infty$) heißt làglàd, wenn sie in jedem Punkt von rechts und von links einen endlichen Limes annimmt. Für solche Funktionen x werden die Abkürzungen $x_t := x(t)$, $x_{t-} := \lim_{s \nearrow t} x_s$, $x_{t+} := \lim_{s \searrow t} x_s$, $\Delta^- x_t := x_t - x_{t-}$ und $\Delta^+ x_t := x_{t+} - x_t$ verwendet.

x sei làglàd auf $[a, b]$. Eine Folge reeller Zahlen aus $[a, b]$ konvergiere gegen $t \in [a, b]$. Es existieren dann auf $[a, t]$ oder auf $[t, b]$ unendliche Teilfolgen: t -linksseitige oder t -rechtsseitige Teilfolgen.

Die t -linksseitige Teilfolge enthält eine von links gegen t konvergierende Teilfolge, die t -rechtsseitige Teilfolge enthält eine von rechts gegen t konvergierende Teilfolge. Das x -Bild jeder t -linksseitigen Teilfolge hat mindestens einen der möglichen Häufungspunkte x_{t-} und x_t , das x -Bild jeder t -rechtsseitigen Teilfolge hat mindestens einen der möglichen Häufungspunkte x_t und x_{t+} . Damit gilt insbesondere für jede offene gegen t konvergierende Intervallschachtelung $((t_1^n, t_2^n))_{n \in \mathbb{N}}$:

$$x_{t_2^n} - x_{t_1^n} \rightarrow \Delta^- x_t + \Delta^+ x_t, \quad x_t - x_{t_1^n} \rightarrow \Delta^- x_t \quad \text{und} \quad x_{t_2^n} - x_t \rightarrow \Delta^+ x_t. \quad (1.1)$$

Für eine làglàd Funktion $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ und zwei Zahlen $t_1 < t_2$ aus $[0, t]$ gibt es im Falle, dass x in dem halboffenen Intervall $(t_1, t_2]$ links-springt¹, ein

¹ s ist Linkssprung, wenn $\Delta^- x_s \neq 0$ ist, Rechtssprung, wenn $\Delta^+ x_s \neq 0$ und Doppelsprung, wenn es Links- und Rechtssprung ist.

kleinstes $s \in (t_1, t_2]$ derart, dass $|\Delta^- x_s| = \max\{|\Delta^- x_u| : u \in (t_1, t_2]\}$ ist.² Es werde dann

$$S_{t_1, t_2}^- := \Delta^- x_s \text{ aber falls } x \text{ in } (t_1, t_2] \text{ nicht links-springt } S_{t_1, t_2}^- := 0$$

gesetzt.

Für t_1, t_2 wie oben gibt es, im Falle, dass x in dem halboffenen Intervall $[t_1, t_2)$ rechts-springt, ein kleinstes $s \in [t_1, t_2)$ so, dass

$$|\Delta^+ x_s| = \max\{|\Delta^+ x_u| : u \in [t_1, t_2)\}$$

ist. Es werde dann

$$S_{t_1, t_2}^+ := \Delta^+ x_s \text{ aber falls } x \text{ in } [t_1, t_2) \text{ nicht rechts-springt } S_{t_1, t_2}^+ := 0$$

gesetzt. Es wird definiert:

$$S_{t_1, t_2} := S_{t_1, t_2}^- + S_{t_1, t_2}^+. \quad (1.2)$$

Einer $\text{l\~a}g\text{l\~a}d$ Funktion $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fehlt im Allgemeinen die Gleichm\~a\~sigkeit der stetigen Funktion. Unter Ber\~u\~cksichtigung der Spr\~unge gilt aber:

Feststellung 1.1. *F\~ur jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass aus $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$ und $t_2 - t_1 < \delta$ folgt:*

$$x_{t_2} - x_{t_1} \in (S_{t_1, t_2} - \epsilon, S_{t_1, t_2} + \epsilon).$$

*Beweis.*³ Andernfalls gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine Folge von Paaren (t_1^n, t_2^n) , $t_1^n < t_2^n$ f\~ur die $t_2^n - t_1^n < \frac{1}{n}$ aber

$$|S_{t_1^n, t_2^n} - (x_{t_2^n} - x_{t_1^n})| \geq \epsilon \quad (1.3)$$

²Denn g\~abe es Linksspr\~unge, aber keinen ersten Linkssprung mit maximalem Sprungbetrag, dann m\~usste es unendlich viele Linksspr\~unge mit einem Sprungbetrag gr\~o\~ser einem positiven c geben. Sie m\~ussen sich auf $[0, t]$ h\~aufen, so dass eine steigende oder fallende konvergente Teilfolge ausgew\~ahlt werden kann. Im ersten Fall ist die Linkslimes-Eigenschaft im zweiten Fall die Rechtslimes-Eigenschaft verletzt. Insbesondere hat $\text{l\~a}g\text{l\~a}d$ x nur abz\~ahlbar viele Spr\~unge.

³In Kapitel 4 finden sich Abbildungen, die manche Aspekte der Aussagen und Beweise, die sich im ersten und im zweiten Kapitel befinden, illustrieren. Sie sind zwar auf die erweiterte Zeitmenge des Kapitels 4 zugeschnitten, aber wenn sich die dort auftretenden verdoppelten Zeitpunkte als ein Zeitpunkt gedacht werden, dann k\~onnen sie auch als Illustrationen zu den Betrachtungen der beiden ersten Kapitel verwendet werden.

gilt. Wegen der Kompaktheit von $[a, b]$ sind die Paare so wählbar, dass t_2^n gegen ein $t \in [a, b]$ konvergiert und zwar zusätzlich so, dass einer der folgenden Fälle gilt:

1) t_2^n konvergiert streng monoton steigend gegen t oder t_1^n konvergiert streng monoton fallend gegen t .

2) $t_2^n = t$ oder $t_1^n = t$.

3) $t_1^n < t < t_2^n$.

1) Wenn t_2^n streng monoton steigend gegen t konvergiert, dann folgt aus der Voraussetzung $t_1^n < t_2^n$ und $t_2^n - t_1^n < \frac{1}{n}$ dass es keinen Punkt gibt, der in unendlich vielen $[t_1^n, t_2^n]$ liegt. Da sich große Sprünge nicht häufen, gilt $S_{t_1^n, t_2^n} \rightarrow 0$, woraus sich im Hinblick auf $x_{t_1^n}, x_{t_2^n} \rightarrow x_{t-}$ ein Widerspruch zu (1.3) ergibt. Genauso (gespiegelt) für den Fall, dass t_1^n streng monoton fallend gegen t konvergiert.

2) Ist $t_2^n = t$, dann ist t der einzige Punkt, der in unendlich vielen $[t_1^n, t_2^n]$ liegt. Da sich große Sprünge nicht häufen und da $t_1^n < t$, folgt $S_{t_1^n, t} \rightarrow \Delta^- x_t$. Aber auch $x_t - x_{t_1^n}$ strebt gegen $\Delta^- x_t$ im Widerspruch zu (1.3). Gespiegelte Argumentation für $t_1^n = t$.

3) Im Fall der offenen Intervallschachtelung um t ist t der einzige Punkt der in unendlich vielen $[t_1^n, t_2^n]$ liegt. Da sich große Sprünge nicht häufen, gilt $S_{t_1^n, t_2^n} \rightarrow \Delta^- x_t + \Delta^+ x_t$, woraus sich im Hinblick auf $x_{t_2^n} - x_{t_1^n} \rightarrow \Delta^- x_t + \Delta^+ x_t$ ein Widerspruch zu (1.3) ergibt. \square

Definition 1.2. Sei $T \in (0, \infty]$ gegeben.

1) Ist τ eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ des Intervalls $[0, T]$ und ist $t \in [0, T]$, dann bezeichne τ^t die Menge der Zerlegungspunkte $t_i \in \tau$, die kleiner als t sind zusammen mit t als letztem Zerlegungspunkt. Mit i^* werde der Index des größten Elements aus τ^t bezeichnet, und es werde definiert: $t_{i^*+1} := t$. Dann gilt allgemein für eine endliche Zerlegung $\tau = (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t \leq T)$: $t_{k+1} = t_k = t$.

2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei τ_n eine endliche Zerlegung des Intervalls $[0, T]$.

Die Feinheit einer endlichen Zerlegung ist das Maximum der Abstände benachbarter Zerlegungspunkte. Die Zerlegungsfolge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heie fein, wenn für alle $t \in (0, \infty)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Feinheit}(\tau_n^t) = 0$ ist (für $T < \infty$ genügt: wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Feinheit}(\tau_n) = 0$ ist).

3) Sei G eine abzählbare $[0, T]$ -Teilmenge. Wenn es eine Folge endlicher G -Teilmengen $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ gibt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$ ($G_n \uparrow G$) und $G_n \subseteq \tau_n$ dann heie (τ_n) eine G -enthaltende Zerlegungsfolge. Ist x laglad und ist G die Menge der Doppelsprünge von x , dann heie (τ_n) , wenn es G enthält, die x -Doppelsprünge enthaltend (analog für die Links- und Rechtssprünge).

1.2 Quadratische Variation

Definition 1.3. Sei τ eine endliche Zerlegung und seien x^1, x^2, \dots, x^k reellwertige Funktionen auf $[0, T]$. Dann bezeichne $v(\tau; x^1, x^2, \dots, x^k)$ das diskrete signierte Punktmaß

$$\sum_{t_i \in \tau} (x_{t_{i+1}}^1 - x_{t_i}^1)(x_{t_{i+1}}^2 - x_{t_i}^2) \dots (x_{t_{i+1}}^k - x_{t_i}^k) \epsilon_{t_i},$$

das Variationsma von (x^1, x^2, \dots, x^k) bezüglich τ .

Definition (und Feststellung) 1.4. Sei x laglad und $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine feine die x -Doppelsprünge enthaltende Zerlegungsfolge. x besitzt quadratische Variation entlang (τ_n) , wenn ein Radonmaß ξ existiert, dessen atomarer Teil ξ^a genau durch die Summe der Links- und Rechtssprungquadrate von x gegeben ist, also

$$\xi^a = \xi^{x,-} + \xi^{x,+} = \sum_{s \in [0, T]} (\Delta^- x_s)^2 \epsilon_s + (\Delta^+ x_s)^2 \epsilon_s, \quad (1.4)$$

und so, dass für $n \rightarrow \infty$

$$v(\tau_n; x, x) \text{ vag gegen } \xi \text{ konvergiert.} \quad (1.5)$$

Mit $[x, x] = [(\tau_n); x, x]$ wird die Verteilungsfunktion von ξ und mit $[x, x]_t^c$ die Verteilungsfunktion des kontinuierlichen Teils des Maßes

$$[x, x]_t^c := [x, x]_t - \sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta^- x_s)^2 + (\Delta^+ x_s)^2$$

bezeichnet. Mit ξ^t wird die Einschränkung des Maßes ξ auf $[0, t]$ bezeichnet.

Die \mathbb{R}^d -wertige $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktion $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$ besitzt quadratische Variation entlang (τ_n) , wenn alle reellwertigen $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktionen x^i und $x^i + x^j$ ($1 \leq i, j \leq d$) quadratische Variation entlang (τ_n) besitzen (vgl. zu dieser Definition auch Föllmer [30], S. 147).

Hat die \mathbb{R}^2 -wertige $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktion (x, y) quadratische Variation entlang (τ_n) , dann werde

$$[x, y] := \frac{[x + y, x + y] - [x, x] - [y, y]}{2}$$

gesetzt. Es gilt dann, wenn $[x + y, x + y]$, $[x, x]$, $[y, y]$ der Reihe nach die $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Verteilungsfunktionen der Radonmaße γ , ξ , η sind,

$$\begin{aligned} & \sum (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \epsilon_{t_i} + \sum (y_{t_{i+1}} - y_{t_i})^2 \epsilon_{t_i} + 2 \sum (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})(y_{t_{i+1}} - y_{t_i}) \epsilon_{t_i} \\ &= \sum ((x_{t_{i+1}} + y_{t_{i+1}}) - (x_{t_i} + y_{t_i}))^2 \epsilon_{t_i} \xrightarrow{\text{vag}} \gamma^t, \\ & \quad \sum (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \epsilon_{t_i} \xrightarrow{\text{vag}} \xi^t, \\ & \quad \sum (y_{t_{i+1}} - y_{t_i})^2 \epsilon_{t_i} \xrightarrow{\text{vag}} \eta^t, \end{aligned}$$

woraus

$$\sum (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})(y_{t_{i+1}} - y_{t_i}) \epsilon_{t_i} \xrightarrow{\text{vag}} \zeta^t := \frac{\gamma^t - \xi^t - \eta^t}{2}$$

und damit auch

$$\sum (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})(y_{t_{i+1}} - y_{t_i}) \rightarrow [x, y]_t$$

folgt.

Der Bezug auf eine feste feine Zerlegungsfolge ist von Bedeutung. Ist etwa B eine Brownsche Bewegung auf dem Intervall $[0, T]$ ($T < \infty$), und sind (σ_n) und (τ_n) feine Zerlegungsfolgen, so gilt für fast alle Pfade der Brownschen Bewegung, dass sie gleiche endliche quadratische Variation entlang der beiden Zerlegungsfolgen besitzen; es gibt aber Pfade (aus einer von den beiden Zerlegungsfolgen abhängigen Nullmenge), die entlang der beiden Zerlegungsfolgen unterschiedliche oder überhaupt keine endliche quadratische Variation aufweisen.⁴

⁴Vgl. Reininghaus [77], Satz 7.2 a, S. 71.

Für fast alle stetigen Pfade einer Brownschen Bewegung

$$x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt es eine feine Zerlegungsfolge (τ_n) bezüglich der x keine endliche quadratische Variation besitzt und eine feine Zerlegungsfolge bezüglich der x eine quadratische Variation von Null besitzt.⁵

Semimartingale haben eine endliche quadratische Variation, die sich als *stochastischer* Grenzwert *jeder* feinen Zerlegungsfolge ergibt, obwohl z.B. im Falle der Brownschen Bewegung (fast) jeder Pfad diese Eigenschaft (deterministisch) nicht hat: denn nach dem oben Gesagten, gibt es zu fast jedem stetigen Pfad der Brownschen Bewegung eine feine Zerlegungsfolge bezüglich der sich keine endliche quadratische Variation einstellt.

Insbesondere gilt für ein Semimartingal X auch $\Delta[X, X]_t = (\Delta X_t)^2$ fast sicher. Folgt dies vielleicht schon aus einer Konvergenz der Punktmaße gegen ein Radonmaß, so dass (1.5) als Forderung genügen würde? Bei Föllmer heißt es „Nous dirons que x est à variation quadratique suivant (τ_n) si les mesures ponctuelles

$$\xi_n = \sum_{t_i \in \tau_n} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \epsilon_{t_i}$$

convergent vaguement vers une mesure de Radon ξ sur $[0, \infty)$, dont la partie atomique es donnée par les sauts quadratiques de x .“⁶ Die Frage ist also wie das „dont“ zu verstehen ist: Als ein erläuterndes oder als ein eine zusätzliche Forderung formulierendes?

Gemeint ist Letzteres. Anhand eines einfachen *Gegenbeispiels* kann man sich davon überzeugen, dass ξ_n für eine stetige Funktion $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $[0, \infty) \setminus (1 - \epsilon, 1]$ ($\epsilon > 0$) endliche Variation besitzt, gegen das Punktmaß ϵ_1 konvergieren kann, so dass die Forderung der Konvergenz der Punktmaße nicht ausreicht, um auch (1.4) sicherzustellen:

x habe auf $[0, \frac{1}{2})$ die Gestalt eines 4-Zickzacks (also $4 = 2^2$ Extrema: zwei oben und zwei unten) mit Amplitude $\frac{1}{2}$; auf $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ die Gestalt eines $4^2 = 16$ -Zickzacks mit Amplitude $\frac{1}{4}$; auf $[\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ die Gestalt eines $8^2 = 64$ -Zickzacks mit

⁵Vgl. Reininghaus [77], Satz 7.2, S. 71, und Lévy [61], Fußnote (3), S. 192, sowie Freedman [41], Prop. 70, S. 47, und S. 48 f.

⁶[30], S. 143.

Amplitude $\frac{1}{8}$; usw. (s. Abbildung 1.1). Auf $[1, \infty)$ nehme x den Wert 0 an.

(τ_n) ist eine aufsteigend verfeinernde Zerlegungsfolge. τ_1 fragt x genau auf den Extrema des 1. Zickzacks ab, so dass ξ_1 die Gestalt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon_{\frac{1}{8}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon_{\frac{2}{8}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \epsilon_{\frac{3}{8}}$$

mit $|\xi_1| = 1$ hat.

τ_2 fragt x einerseits auf den 16 Extrema des 2. Zickzacks ab. Auf dem ersten Zickzack werden die schon bestehenden Zerlegungspunkte um den Faktor $n = 2$ verfeinert, d.h. zu $0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}$ kommen noch $\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$ hinzu. ξ_2 hat auf dem zweiten Zickzack eine Masse von 1. Auf dem ersten Zickzack eine Masse von $\frac{1}{2}$.

τ_3 fragt x einerseits auf den 64 Extrema des 3. Zickzacks ab. Auf dem ersten Zickzack werden die schon bestehenden Zerlegungspunkte um den festen Faktor 2 verfeinert. Auf dem zweiten Zickzack werden die seit der Vorgängerzerlegung erst bestehenden Zerlegungspunkte um den Faktor $n = 3$ verfeinert. ξ_3 hat auf dem dritten Zickzack eine Masse von 1, auf dem zweiten Zickzack eine Masse von $\frac{1}{n} = \frac{1}{3}$ und auf dem ersten Zickzack nur noch eine Masse von $\frac{1}{4}$.

τ_4 fragt x einerseits auf den 256 Extrema des 4. Zickzacks ab. Auf dem ersten und zweiten Zickzack werden die schon bestehenden Zerlegungspunkte um den festen Faktor 2 verfeinert. Auf dem dritten Zickzack werden die seit der Vorgängerzerlegung erst bestehenden Zerlegungspunkte um den Faktor $n = 4$ verfeinert. ξ_4 hat auf dem vierten Zickzack eine Masse von 1, auf dem dritten Zickzack eine Masse von $\frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ und auf dem ersten und zweiten Zickzack nur noch die hälftige Masse wie zuvor, also von insgesamt $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{2}$.

So wird die Konstruktion der τ_n fortgesetzt. Man sieht für $n \rightarrow \infty$

$$|\xi_n|_{[0, 1 - \frac{1}{n})} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad |\xi_n|_{[1 - \frac{1}{n}, 1)} \rightarrow 1,$$

woraus sich die vage Konvergenz $\xi_n \rightarrow \epsilon_1$ ergibt.

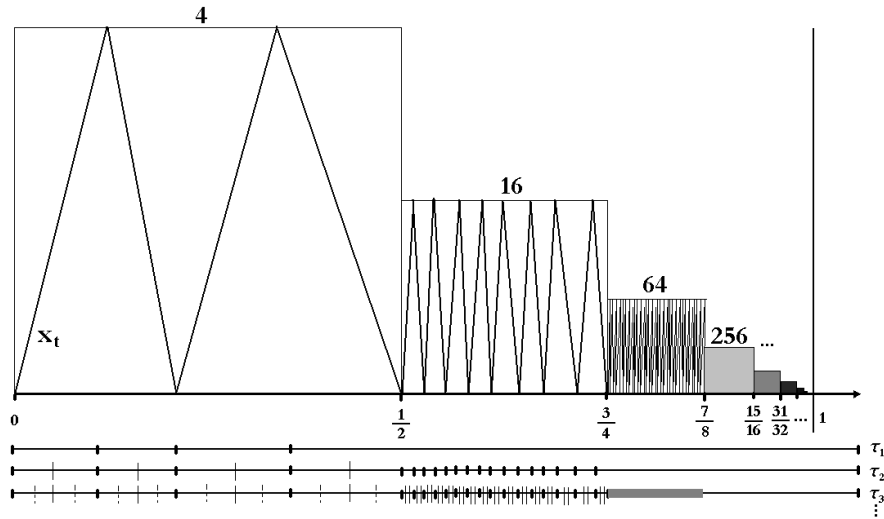


Abbildung 1.1: Gegenbeispiel

1.3 Infiatoren

Das Kapitel der Heranführung an $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ -Funktionen und die Untersuchung ihres Verhaltens entlang feinen Zerlegungsfolgen soll mit der Konstruktion von „Infiatoren“ beschlossen werden.

Die Existenz von Infiatoren zeigt, dass sich ein $\text{c\`a}d\text{l}\ddot{a}g$ x selbst mit quadratischer Variation entlang einer feinen Zerlegungsfolge (τ_n) nicht für alle $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ h als Integrator entlang (τ_n) eignet. Hat x entlang (τ_n) unendliche Variation, dann gibt es auch immer $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ (sogar stetige) Funktionen h , für die ein Limes $\int h dx := \sum h_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$ nicht existiert, für die vielmehr $|\sum h_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})| \rightarrow \infty$ gilt. Solche h sollen *Infiatoren* (von x entlang (τ_n)) genannt werden.

Infinator-Konstruktion.

Sei $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_{k-1}, t_k\}$ (mit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = T$) eine Zerlegung von $[0, T]$. Eine Teilzerlegung von τ wird durch ein Intervall M aus $[0, T]$ gegeben: $\tilde{\tau} = \tau \cap M$.

Sei $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ càdlàg. Sei eine Teilzerlegung

$$\tilde{\tau} = 0 \leq t_i < \dots < t_m < T$$

einer Zerlegung τ auf $[0, T]$ gegeben. Mit $\text{Var}(\tilde{\tau})$, der *Variation von x auf $\tilde{\tau}$* , werde die Größe $|x_{t_{i+1}} - x_{t_i}| + \dots + |x_{t_{m+1}} - x_{t_m}|$ bezeichnet.

x hat entlang der feinen Zerlegungsfolge (τ_n) *unendliche Variation*, wenn es zu jedem $K > 0$ ein n gibt, so dass die Variation von x auf τ_n größer als K ist.

Sei x entlang (τ_n) von unendlicher Variation. Es gibt ein t aus $[0, T]$ so, dass für alle $K > 0$ gilt: In jeder ϵ -Umgebung von t , $U_\epsilon(t)$, gibt es eine Teilzerlegung einer Zerlegung τ_n auf der x eine Variation hat, die größer als K ist. Denn andernfalls: $\forall t \in [0, T]: \exists K > 0: \exists \epsilon > 0: \forall$ Teilzerlegungen $F \subset U_\epsilon(t) : \text{Var}(F) < K$. Die Umgebungen überdecken $[0, T]$ und es gibt eine endliche Teilüberdeckung. Daraus folgt aber, dass die Variation nicht unendlich sein kann.

Unendlich viele der Teilzerlegungen in den $U_\epsilon(t)$ nehmen mindestens die Hälfte ihrer Variation links von t an; *oder* unendlich viele der Teilzerlegungen in den $U_\epsilon(t)$ nehmen mindestens die Hälfte ihrer Variation rechts von t an. Daher kann ohne Einschränkung davon ausgegangen werden, dass es in jeder linksseitigen Umgebung von t Teilzerlegungen beliebig großer Variation gibt. Der letzte Punkt der Teilzerlegungen kann weggelassen werden, da sich dadurch die Variation nur um höchstens $2 \|x\|_{[0,t]}$ verringert (wobei $\|x\|_{[0,t]}$ das Supremum von x auf $[0, t]$ bezeichnet).

Ist eine Zerlegung τ von $[0, T]$ gegeben und sind zwei Punkte $s < s'$ aus $[0, T]$ ausgewählt, dann bezeichne ${}_s t$ den ersten und ${}^* t$ den letzten Punkt der Teilzerlegung $\tau \cap (s, s')$, insbesondere ist $[_s t, {}^* t] \subset (s, s')$.

Ist $\tilde{\tau}$ eine Teilzerlegung der Zerlegung τ , dann sei $u+$ für $u \in \tilde{\tau}$ der Nachfolger von u in τ . Im Fall, dass $u = T$ ist, wird $u+ = T$ gesetzt.

Sei τ eine Zerlegung und $\tilde{\tau}$ eine Teilzerlegung, dann wird für eine Funktion h definiert:

$$\int_{\tilde{\tau}} h_s dx_s := \sum_{u \in \tilde{\tau}} h_u (x_{u+} - x_u).$$

Sei (τ_n) eine feine Zerlegungsfolge auf $[0, T]$. Sei (m_k) eine zunächst beliebige Folge, die nur die Werte $+1$ und -1 annimmt. Wähle eine streng monotone Folge (n_k) natürlicher Zahlen so, dass $\tau_{n_1} \cap (0, t)$ und $\tau_{n_k} \cap ({}^*t^{n_{k-1}}, t)$ ($k > 1$) nicht leer ist, wobei ${}^*t^{n_{k-1}}$ das größte Element aus $\tau_{n_{k-1}} \cap (0, t)$ bezeichnet.

Definiere Funktionen \tilde{h}^k wie folgt: $k = 1$: Setze

$$\tilde{h}_u^1 := m_1 \operatorname{sgn}(x_{u+} - x_u)$$

für jedes u aus $\tau_{n_1} \cap [0, t)$. Wähle die Werte von \tilde{h}^1 auf den anderen Punkten aus $[0, {}^*t^{n_1}]$ so, dass $\tilde{h}^1 : [0, {}^*t^{n_1}] \rightarrow [-1, 1]$ stetig ist. (Z.B. affin-lineare Verbindung der durch \tilde{h}_u^1 auf den $u \in \tau_{n_1} \cap [0, t)$ festgelegten Werten.)

$k \geq 2$: Setze $\tilde{h}_{{}^*t^{n_{k-1}}}^k := \tilde{h}_{{}^*t^{n_{k-1}}}^{k-1}$ und $\tilde{h}_u^k := m_k \frac{1}{k} \operatorname{sgn}(x_{u+} - x_u)$ für u aus $\tau_{n_k} \cap ({}^*t^{n_{k-1}}, t)$. Wähle die Werte von \tilde{h}^k auf den anderen Punkten aus $[{}^*t^{n_{k-1}}, {}^*t^{n_k}]$ so, dass \tilde{h}^k auf $[{}^*t^{n_{k-1}}, {}^*t^{n_k}]$ Werte aus $[-\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}]$ und auf $[{}^*t^{n_k}, {}^*t^{n_k}]$ Werte aus $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ annimmt und so, dass

$$\tilde{h}^k : [{}^*t^{n_{k-1}}, {}^*t^{n_k}] \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist.

Durch Hintereinandersetzen der \tilde{h}^k entsteht eine stetige Funktion h auf $[0, T]$, die ab einschließlich t den Wert 0 annimmt:

$$h := \tilde{h}^1 1_{[0, {}^*t^{n_1}]} + \sum_{k=2}^{\infty} \tilde{h}^k 1_{({}^*t^{n_{k-1}}, {}^*t^{n_k}]},$$

wobei 1_M Indikatorfunktionen auf $[0, T]$ bezeichne. Siehe zu der Konstruktion auf Abb. 1.2.

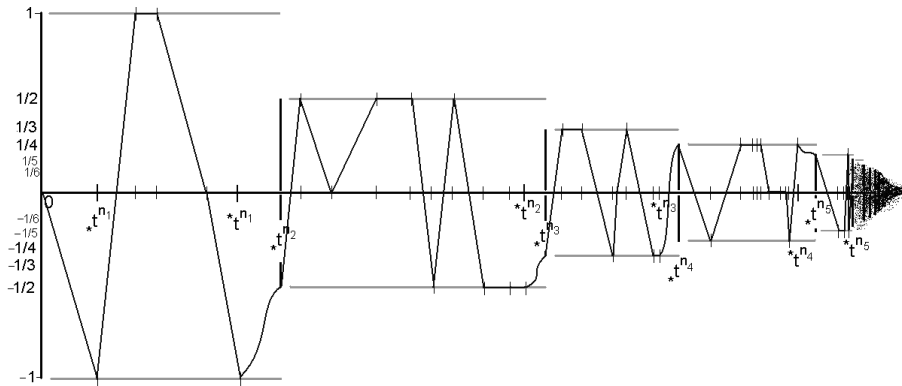


Abbildung 1.2: Infinator-Konstruktion

Durch geeignete Wahl der Folgen (m_k) und (n_k) kann erreicht werden, dass h bezüglich (τ_n) ein Infinator von x ist:

Mit der eingeführten Schreibweise $\int_{\tilde{\tau}} h_s dx_s$ ist ein *Infinator von x bezüglich (τ_n)* eine l aglad Funktion $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, so, dass es eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen (n_k) gibt, so dass

$$\left| \int_{\tau_{n_k}} h_s dx_s \right| \geq k$$

gilt.

Zur Konstruktion eines Infinators einer càdlàg Funktion $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ unendlicher Variation bezüglich einer beliebigen feinen Zerlegungsfolge (τ_n) auf $[0, T]$ sind die Folgen (m_k) und (n_k) und die Funktionen \tilde{h}^k wie folgt zu wählen:

Wähle n_1 so, dass $\tau_{n_1} \cap (0, t)$ nicht leer ist. Wähle n_k für $k > 1$ so, dass $\text{Var}(\tau_{n_k} \cap ({}^*t^{n_{k-1}}, t)) \geq k$ ist. Setze $m_1 := 1$. Die Funktion sgn^* werde für den Moment dadurch definiert, dass sie für negative Werte den Wert -1 und andernfalls den Wert $+1$ annehme. Setze für $k > 1$

$$m_k := \text{sgn}^* \left(\int_{\tau_{n_k} \cap [0, {}^*t^{n_{k-1}}]} (h1_{[0, {}^*t^{n_{k-1}}]})_s dx_s \right),$$

wobei zu beachten ist, dass h auf $[0, {}^*t^{n_{k-1}}]$ schon definiert ist.

Durch dieses Vorgehen entsteht eine stetige Funktion h mit der Eigenschaft

$$\left| \int_{\tau_{n_k}} h_s dx_s \right| \geq k.$$

h ist also ein Infinator von x bezüglich (τ_n) .

Kapitel 2

Vorbereitungen

In diesem Kapitel werden Begriffe, Lemmata und Bemerkungen bereitgestellt, die für den Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités benötigt werden. In Kapitel 4 werden sie in einem etwas erweiterten Rahmen reformuliert.

2.1 Integration bezüglich $[x, x]^c$

Definition 2.1 ($\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$). Sei x $\text{l\`a}g\text{l}\grave{a}d$ und sei (τ_n) eine die Doppelsprünge von x enthaltende feine Zerlegungsfolge entlang der x quadratische Variation besitzt. Sei $\epsilon' > 0$ und $t \in [0, T]$. Mit ξ ist insbesondere auch dessen atomarer Teil ξ^a (und auch dessen stetiger Teil ξ^c) und damit die Maße $\xi^{x,-}$ und $\xi^{x,+}$ (vgl. Def. 1.3) radonsch, und daher existieren endliche Teilmengen $G = G(\epsilon', t)$ bzw. $F = F(\epsilon', t)$ der Links- bzw. Rechtssprungzeiten von x mit

$$\sum_{s \in [0, t] \setminus G \cup F} (\Delta^- x_s)^2 + (\Delta^+ x_s)^2 \leq \epsilon'.$$

G und F induzieren endliche τ_n^t -Teilmengen $G'(n, \epsilon', t)$ und $F'(n, \epsilon', t)$:

$$G'(n, \epsilon', t) := \{t_i \in \tau_n^t : (t_i, t_{i+1}] \cap G \neq \emptyset\}$$

und

$$F'(n, \epsilon', t) := \{t_i \in \tau_n^t : [t_i, t_{i+1}) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Es werde definiert:

$$\Sigma := \sum_{t_i \in \tau_n^t},$$

$$\begin{aligned}\sum_1 &:= \sum_{t_i \in G'(n, \epsilon', t)}, \\ \sum_2 &:= \sum_{t_i \in F'(n, \epsilon', t)}, \\ \sum_3 &:= \sum_{t_i \in \tau_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)}.\end{aligned}$$

Lemma 2.2. *Seien x und g $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$. Sei (τ_n) eine feine die Doppelsprünge von x enthaltende Zerlegungsfolge entlang der x die quadratische Variation ξ bzw. $[x, x]$ besitzt (vgl. Def. 1.4).*

(1) *Enthält (τ_n) alle x -Rechtssprünge, so gilt, wenn*

$$\xi_n := v(\tau_n; x, x),$$

ξ den vagen Limes der ξ_n , ξ^c dessen kontinuierlichen Teil und

$$\xi^a = \xi^{x,-} + \xi^{x,+}$$

den atomaren Teil mit $\xi^{x,-} := \sum (\Delta^- x_s)^2 \epsilon_s$ und $\xi^{x,+} := \sum (\Delta^+ x_s)^2 \epsilon_s$ bezeichnet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g d\xi_n = \int_0^t g d\xi^c + \int_0^t g_- d\xi^{x,-} + \int_0^t g d\xi^{x,+}.$$

(2) *Es gibt zu jedem $t \in [0, T]$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\epsilon' > 0$ so, dass für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\left| \sum_{t_i \in \tau_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)} g_{t_i} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \int_0^t g_s d[x, x]_s^c \right| < \epsilon$$

ist.

Beweis. Zu (1):

Wie in der Def. 2.1 gibt es für beliebiges $\epsilon' > 0$ in der abzählbaren Menge aller Linkssprünge von x eine endliche Teilmenge G und in der abzählbaren Menge aller x -Rechtssprünge eine endliche Teilmenge F derart, dass

$$\sum_{s \in [0, t] \setminus G \cup F} (\Delta^- x_s)^2 + (\Delta^+ x_s)^2 \leq \epsilon'$$

ist. Die Menge G enthält also in diesem Sinne die großen Linkssprünge, die Menge F die großen Rechtssprünge von x deren càdlàg bzw. càglàd Verteilungsfunktionen z^- bzw. z^+ genannt werden sollen:

$$z_u^- := \sum_{s \in G^u} \Delta^- x_s \quad \text{und} \quad z_u^+ := \sum_{s \in F^u} \Delta^+ x_s,$$

wobei die Bezeichnungen $G^u := \{s \in G : s \leq u\}$ und $F^u := \{s \in F : s \leq u\}$ verwendet werden. Die Funktion $y := x - z^- - z^+$ hat entsprechend nur noch „kleine“ Sprünge.

Mit $\eta_n := v(\tau_n; y, y)$, $\zeta_n^- := v(\tau_n; z^-, z^-)$, $\zeta_n^+ := v(\tau_n; z^+, z^+)$ und

$$\sigma_n := v(\tau_n; z^-, z^+) - v(\tau_n; y, z^-) - v(\tau_n; y, z^+)$$

(vgl. Def. 1.3) folgt aus binomischen Formeln

$$\xi_n = \eta_n + \zeta_n^- + \zeta_n^+ + 2\sigma_n.$$

Aufgrund der einfachen Gestalt der ζ_n^- und der ζ_n^+ kann man sich, unter Beachtung dessen, dass (τ_n) die Doppel- und reinen Rechtssprünge enthält, leicht von den Grenzübergängen

$$\int_0^t g d\zeta_n^- \rightarrow \int_0^t g_- d\zeta^- \quad \text{und} \quad \int_0^t g d\zeta_n^+ \rightarrow \int_0^t g d\zeta^+ \quad (2.1)$$

mit $\zeta^- := \sum_{s \in G} (\Delta^- x_s)^2 \epsilon_s$ und $\zeta^+ := \sum_{s \in F} (\Delta^+ x_s)^2 \epsilon_s$ überzeugen.

Im Hinblick auf (1.1) auf S. 5 gilt insbesondere für $z = z^-$ oder $z = z^+$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^u} g_{t_i} (y_{t_{i+1}} - y_{t_i}) (z_{t_{i+1}} - z_{t_i}) = 0,$$

da z^- und z^+ nur dort springen, wo y es nicht tut und für jedes n die Summe höchstens $\#G < \infty$ bzw. $\#F < \infty$ von Null verschiedene Summanden hat, womit sich der Grenzübergang

$$\int_0^t g d\sigma_n \rightarrow \int_0^t g d0 = 0, \quad (2.2)$$

ergibt. Denn es gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^u} g_{t_i} (z_{t_{i+1}}^- - z_{t_i}^-) (z_{t_{i+1}}^+ - z_{t_i}^+) = 0,$$

da selbst die Doppelsprünge früher oder später getrennt werden, da (τ_n) sie enthält: Ist t_i Doppelsprung, so strebt für $n \rightarrow \infty$ der Zuwachs $z_{t_{i+1}}^- - z_{t_i}^-$ gegen Null; ist t_{i+1} Doppelsprung, so strebt der Zuwachs $z_{t_{i+1}}^+ - z_{t_i}^+$ gegen Null.

Die Überlegungen zeigen auch, da sie für ein beliebiges làglàd , insbesondere stetiges g durchgeführt werden können, dass ζ_n^- , ζ_n^+ bzw. σ_n vag gegen ζ^- , ζ^+ bzw. das 0-Maß konvergieren. Da nach Voraussetzung

$$\xi_n = \eta_n + \zeta_n^- + \zeta_n^+ + 2\sigma_n$$

vag gegen ξ konvergiert, folgt die vage Konvergenz $\eta_n \rightarrow \eta := \xi - (\zeta^- + \zeta^+)$ mit $|\eta^a| \leq \epsilon'$.

Sei nun $\epsilon > 0$.

Da die Funktion g höchstens abzählbar viele Sprungstellen hat, ist sie η^c -fast-sicher stetig. Daher folgt aus der vagen Konvergenz $\eta_n \rightarrow \eta$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^t g d\eta_n - \int_0^t g d\eta \right| \leq 2g_t^* \epsilon', \quad (2.3)$$

wobei $g_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} |g_s|$ ist.¹

Aus (2.1), (2.2) und (2.3) folgt, dass für schließlich alle n für alle $s \in [0, t]$

$$\int_0^s g d\xi_n = \int_0^s g d\eta_n + \int_0^s g d\zeta_n^- + \int_0^s g d\zeta_n^+ + \int_0^s g d\sigma_n$$

einen geringeren Abstand als $\frac{\epsilon}{2}$ zu

$$\int_0^s g d\eta + \int_0^s g_- d\zeta^- + \int_0^s g d\zeta^+ + 0 \quad (2.4)$$

hat, wenn ϵ' entsprechend klein gewählt wird. Da ζ^- bzw. ζ^+ entlang $\epsilon' \rightarrow 0$ das Maß $\xi^{x,-}$ bzw. $\xi^{x,+}$ ausschöpft (vgl. auch die Bemerkung 2.3 unten), hat (2.4) bei geeigneter Wahl von ϵ' für alle $s \in [0, t]$ zu

$$\int_0^s g d\xi^c + \int_0^s g_- d\xi^{x,-} + \int_0^s g d\xi^{x,+}$$

¹Vgl. zu dieser Argumentation Föllmer [30], S. 147.

ebenfalls einen Abstand $< \frac{\epsilon}{2}$.

Zu (2):

Sei $\epsilon > 0$, $t \in [0, T]$.

Sei $\epsilon' > 0$.

Dass, wenn nur ϵ' hinreichend klein für schließlich alle n

$$\left| \sum_3 g_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \int_0^t g_s d[x, x]_s^c \right| < \epsilon$$

gilt, ist zu zeigen. Es soll auf die erste Aussage des Lemmas zurückgeführt werden. Zur Erfüllung dessen Voraussetzungen müssen der Zerlegungsfolge (τ_n) die eventuell noch fehlenden reinen Rechtssprünge hinreichend langsam beigemischt werden. Wegen $\sum_3 = \sum - \sum_1 - \sum_2$ genügt es, nur solche reinen Rechtssprünge beizumischen, die nicht in F liegen; die Menge dieser reinen Rechtssprünge werde mit S bezeichnet. Es gilt also

$$\sum_{s \in S} (\Delta^+ x_s)^2 < \epsilon'. \quad (2.5)$$

Sei $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge nicht-leerer endlicher S -Teilmengen, die gegen S aufsteigend konvergiert. Es gibt eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen n_j so, dass die Differenzen zwischen der Originalzerlegungsfolge und der durch die $s \in S_j$ angereicherten Zerlegungsfolge klein ist: Für $n \geq n_j$ und ein $s \in S_j$ sei $t_i \in \tau_n^t$ so, dass $s \in [t_i, t_{i+1})$ ist. (n_j) kann so gewählt werden, dass für alle $n \geq n_j$ und positiven Betragsschranken K_1 und K_2 der beschränkten Mengen $x([0, t])$ und $g([0, t])$ gilt: Für alle $n \geq n_j$:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{s \in S_j} g_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \{g_{t_i}(x_s - x_{t_i})^2 + g_s(x_{t_{i+1}} - x_s)^2\} \right| \\ &= \left| \sum_{s \in S_j} 2g_{t_i}(x_s - x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_s) + (g_{t_i} - g_s)(x_{t_{i+1}} - x_s)^2 \right| \\ &\leq 2K_2K_1 \underbrace{\sum_{s \in S_j} |x_s - x_{t_i}|}_{< 2\epsilon'} + K_2 \underbrace{\sum_{s \in S_j} (x_{t_{i+1}} - x_s)^2}_{< 2\epsilon'}. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen ergeben sich im Hinblick auf (1.1) (S.5) bei hinreichend großer Wahl von n_j für $n \geq n_j$. Bei der Abschätzung der ersten Unterklammer ist dabei zu beachten, dass die $s \in S_j$ keine Linkssprünge sind. Bei der zweiten Abschätzung ist (2.5) zu beachten.

Daher ist es keine Einschränkung anzunehmen, dass (τ_n) die x -Rechts-sprünge enthält. Mit der ersten Aussage des Lemmas folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_3 g_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum g_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \sum_1 g_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \sum_2 g_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\ &= \int_0^t g_s d[x, x]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} g_{s-} (\Delta^- x_s)^2 + \sum_{0 \leq s < t} g_s (\Delta^+ x_s)^2 \\ &\quad - \sum_{s \in G} g_{s-} (\Delta^- x_s)^2 - \sum_{s \in F} g_s (\Delta^+ x_s)^2. \end{aligned}$$

Für $\epsilon \rightarrow 0$ streben $\sum_{s \in G}$ und $\sum_{s \in F}$ gegen $\sum_{0 \leq s \leq t}$, woraus sich die zweite Aussage des Lemmas ergibt. \square

Die folgende Bemerkung illustriert das „Ausschöpfen“ von dem auch im letzten Schluss des Beweises Gebrauch gemacht wurde. Die Bemerkung ist einfach, aber für die Existenz von Summen über Links- und Rechts-sprünge von Bedeutung; Bemerkung 2.11 auf S. 28 greift auf sie zurück.

Bemerkung 2.3. Sei ξ ein Radon-Maß auf $[0, t]$ und $G \subset [0, t]$ abzählbar. Eine Folge endlicher G -Teilmengen (G_m) konvergiere gegen G in dem Sinne, dass jedes $s \in G$ schließlich in allen G_m liegt, also $G_m \uparrow G$ in der Bezeichnung der Def. 1.2. Ist $g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ ξ -integrierbar, so gilt

$$\int_{G_m} g d\xi \rightarrow \int_G g d\xi,$$

denn $|g1_{G_m}| \leq |g1_G|$ und $g1_G$ ist ξ -integrierbar sowie $g1_{G_m} \rightarrow g1_G$. Die Behauptung ist daher ein Spezialfall des Satzes von der majorisierten Konvergenz; sie gilt auch für beliebige beschränkte nicht notwendig messbare Funktionen $g : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist g beschränkt, x , $\xi^{x,-}$ und $\xi^{x,+}$ wie in Lemma 2.2 und ist G bzw. F die abzählbare Menge aller x -Links- bzw. x -Rechts-sprünge auf $[0, t]$, dann existieren $\sum_{0 < s \leq t} g_s (\Delta^- x_s)^2 = \int_G g d\xi^{x,-}$ und $\sum_{0 \leq s < t} g_s (\Delta^+ x_s)^2 = \int_F g d\xi^{x,+}$

in \mathbb{R} .

Ist daher $f_s := g_s(\Delta^- x_s)^2$, so ist

$$\sum_{0 < s \leq t} f_s \text{ existiert in } \mathbb{R}, \text{ und es gilt } \sum_{s \in G_m} f_s \rightarrow \sum_{0 < s \leq t} f_s$$

für jede Folge (G_m) die im obigen Sinne gegen die Menge G konvergiert, insbesondere ist der Ausdruck $\sum_{0 < s \leq t} f_s$ wohldefiniert.

Ist $f_s := g_s(\Delta^+ x_s)^2$, so gilt genauso

$$\sum_{0 \leq s < t} f_s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \sum_{s \in F_m} f_s \rightarrow \sum_{0 \leq s < t} f_s$$

für jede Folge (F_m) die gegen die Menge F konvergiert; $\sum_{0 \leq s < t} f_s$ ist wohldefiniert. \diamond

2.2 Glatte zweistellige Funktionen

Definition 2.4. Sei $t \in \mathbb{R}_+$. Mit $\mathbb{D} = \mathbb{D}_{[0,t]}$ werde der Raum aller $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktionen $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, versehen mit der Supremumsnorm, bezeichnet.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Eine Funktion

$$y : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, t) \mapsto y(x, t)$$

heie im Folgenden k -glatt, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$ die Funktionen

$$y^{(j)}(x, \cdot) := t \mapsto y^{(j)}(x, t)$$

$\text{c\`a}d\text{l\`a}g$ sind, und wenn für alle $t \in \mathbb{R}_+$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$ die Funktionen

$$y_{|[0,t]}^{(j)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}, \quad x \mapsto \{s \mapsto y^{(j)}(x, s)\} \quad (s \in [0, t])$$

stetig sind, wobei

$$y^{(j)}(x, s) := \frac{\partial^j y(\xi, s)}{(\partial \xi)^j}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, $s \in [0, T]$ existiere.

Definition 2.5. Ist y k -glatt ($k \geq 0$), dann kann es entlang der Zeit Links-sprünge geben, die durch Δ bezeichnet werden:

$$\Delta y(p, s) := y(p, s) - y(p, s-).$$

Bemerkung 2.6. Sei y k -glatt ($k \geq 0$). Ist $M \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $t \geq 0$, dann sind aufgrund der Eigenschaften „càdlàg in s “ und „stetig in Supremumsnorm in x “ die Bilder $y^{(j)}(M \times [0, t])$ ($j \in \{0, \dots, k\}$) auch beschränkt. \diamond

Lemma 2.7. Sei M ein Kompaktum und $t \geq 0$. $y : M \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ sei k -glatt ($k \geq 0$). Dann ist y in x -Richtung gleichmäßig in folgendem Sinn: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass aus $t_1, t_2 \in [0, t]$, $t_1 < t_2$ und $|t_2 - t_1| < \delta$ folgt:

$$\forall p \in M : \quad y(p, t_2) - y(p, t_1) \in (S_{p, t_1, t_2} - \epsilon, S_{p, t_1, t_2} + \epsilon),$$

wobei S_{p, t_1, t_2} das für die Funktion $x = y(p, \cdot)$ durch (1.2) (S. 6) definierte S_{t_1, t_2} bezeichne.

Beweis. Andernfalls gibt es ein positives ϵ und $[0, t]$ -Folgen (t_1^n) und (t_2^n) mit $0 < t_2^n - t_1^n \rightarrow 0$ und $M \ni x^n \rightarrow x$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|y(x^n, t_2^n) - y(x^n, t_1^n) - S_{x^n, t_1^n, t_2^n}| > \epsilon \tag{2.6}$$

gilt.

x^n hält sich aber schließlich nur noch in einer hinreichend kleinen δ -Umgebung um x auf, so dass im Hinblick auf die gleichmäßige Stetigkeit in x für alle x' aus dieser δ -Umgebung

$$|y(x', s) - y(x, s)| < \epsilon'$$

ist.

Für hinreichend großes n ist $|x^n - x|$ und $t_2^n - t_1^n$ so klein, dass damit aus (2.6)

$$|y(x, t_2^n) - y(x, t_1^n) - S_{x, t_1^n, t_2^n}| > \frac{\epsilon}{2}$$

folgt, im Widerspruch zur Feststellung 1.1 auf S. 6. \square

Die nächste Bemerkung zeigt einige einfache Konsequenzen daraus, dass y in x -Richtung gleichmäßig ist.

Bemerkung 2.8. Sei y k -glatt ($k \geq 0$).

(i) Es gibt auf jeder beschränkten Menge $M \times [0, t]$ (mit beschränktem M) für jedes $c > 0$ nur endlich viele Sprünge von y mit Sprungbeträgen $\geq c$. Wie in den Überlegungen im Beweis des Lemmas gibt es andernfalls eine Sprungfolge, die in der ersten Komponente gegen ein $x \in \bar{M}$ konvergiert. Schließlich alle Sprünge projizieren sich hinreichend größenerhaltend auf x und man erhält einen Widerspruch zur càdlàg-Eigenschaft von $y(x, \cdot)$. Insbesondere gibt es nur abzählbar viele y -Sprünge, d.h. Zeitpunkte s zu denen es ein $x \in M$ gibt, so dass $y(x, s) \neq y(x, s-)$.

(ii) Die Familie g , mit $g(x, \cdot) := s \mapsto \sum_{s \in F_x^s} \Delta y(x, s)$, wobei

$$F_x^s := \{0 \leq u \leq s : |\Delta y(x, u)| \geq \epsilon\},$$

ist die càdlàg Familie der Verteilungsfunktionen der ϵ -großen Sprünge von y . Nur zu endlich vielen Zeitpunkten hat Δg von Null verschiedene Werte. Außerdem hat die Familie $y - g$ nur noch Sprünge, deren Beträge kleiner oder gleich ϵ sind.

(iii) Die Familie y habe nur Sprünge, deren Beträge $\leq \epsilon$ sind. Aus dem vorhergegangenen Lemma folgt, dass für y auf $M \times [0, t]$ gilt, dass es zu jedem positiven c ein $\delta > 0$ gibt, so dass $|t_2 - t_1| < \delta$ für alle $x \in M$

$$|y(x, t_2) - y(x, t_1)| < (1 + c)\epsilon$$

impliziert (oder: dass für schließlich alle Zerlegungen τ_n einer feinen Zerlegungsfolge auf $[0, t]$ gilt, dass für alle $x \in M$: $|y(x, t_{i+1}) - y(x, t_i)| < (1 + c)\epsilon$ ist). \diamond

2.3 Integrale mit glatten y -Integranden

Für k -glatte y ($k \geq 0$) gibt es eine spezielle Version des Lemmas 2.2:

Lemma 2.9. Sei x làglàd und $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine die x -Doppelsprünge enthaltende feine Zerlegungsfolge entlang der x quadratische Variation besitzt. Ist y k -glatt ($k \geq 0$) und ξ^c (mit der Verteilungsfunktion $[x, x]^c$) das kontinuierliche

Maß der Def. 1.4, dann gibt es zu jedem $t \in [0, T]$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\epsilon' > 0$ so, dass für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{t_i \in \tau_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)} y(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \int_0^t y(x_s, s) d[x, x]_s^c \right| < \epsilon$$

ist.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$, $t \in [0, T]$.

Sei $\epsilon' > 0$.

Für dieses ϵ' werde

$$\sum_3 (y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \quad (2.7)$$

betrachtet.

Y sei die Menge der „ ϵ' -großen“ y -Sprünge aus $[0, t]$:

$$Y = Y(t, \epsilon') = \{s | \exists p \in x([0, t]) : |\Delta y(p, s)| \geq \epsilon'\}.$$

Nach Bemerkung 2.8 (ii) ist Y endlich und konvergiert für $\epsilon' \rightarrow 0$ gegen die abzählbare Menge aller y -Sprünge.

Y induziert für jedes n eine Teilmenge $Y' = Y'(t, \epsilon', n) \subset \tau_n^t$ der t_i aus der Menge der Zerlegungspunkte der Zerlegung τ_n^t für die das Intervall $(t_i, t_{i+1}]$ Sprungzeiten aus Y enthält. \sum_3 werde entsprechend aufgeteilt, wobei über die t_i aus Y' in $\sum_{3, Y'}$ und über die anderen t_i aus \sum_3 in $\sum_{3, -Y'}$ summiert werde.

Für schließlich alle n ist $(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 < 2\epsilon'$ (vgl. Bem. 2.8 (iii)). Ist daher K eine positive Betragsschranke der beschränkten Menge $2y(x([0, t]), [0, t])$, so lässt sich abschätzen:

$$\left| \sum_{3, Y'} (y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \right| < 2K\epsilon'.$$

Aus der vagen Konvergenz der ξ_n gegen das Radonmaß ξ folgt die Konvergenz der Gesamtmassen $|\xi_n^t| \rightarrow |\xi^t| < \infty$, so dass wiederum für alle großen n (vgl. Bem. 2.8 (iii)) gilt:

$$\left| \sum_{3, -Y'} (y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \right| < 2|\xi^t|\epsilon'. \quad (2.8)$$

(2.7) ist also nach Vorgabe von ϵ' beliebig klein.

Daher genügt es

$$\left| \sum_3 y(x_{t_i}, t_i)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 - \int_0^t y(x_s, s) d[x, x]_s^c \right| < \epsilon$$

zu zeigen. Das ist aber mit $g_s := y(x_s, s)$ die zweite Aussage des Lemmas 2.2.

□

2.4 2-glatte y und Taylor-Formel

Bemerkung 2.10. Sei y 2-glatt. Nach der Taylor-Formel gilt für $a, b \in M$ und beliebiges $s \in [0, t]$:

$$\begin{aligned} y(b, s) - y(a, s) &= y'(a, s)(b - a) + \frac{1}{2}y''(a, s)(b - a)^2 + R(a, b, s) \\ &= y'(b, s)(b - a) - \frac{1}{2}y''(b, s)(b - a)^2 - R(b, a, s) \end{aligned}$$

mit

$$|R(a, b, s)| < r(|b - a|, s)(b - a)^2$$

mit

$$r(m, s) = \sup_{|b-a| \leq m} \frac{|y''(b, s) - y''(a, s)|}{2},$$

für s aus $[0, t]$ und a und b aus M .² $R(a, b, \cdot)$ ist lägläd, da die lägläd-Funktionen eine Algebra bilden.

Im Hinblick auf Lemma 2.7 gilt für die durch

$$r(m) := \sup\{r(m, s) : s \in [0, t]\}$$

erklärte Funktion $r : M \rightarrow \mathbb{R}_+$: r ist beschränkt und isoton, $r(0) = 0$, $\lim_{c \searrow 0} r(c) = 0$.³

²Vgl. Forster [40], Korollar zu Satz 2, S. 176.

³Für beliebige a, b, s gilt daher $|R(a, b, s)| < r(|b - a|)(b - a)^2$ und folgende nützliche Schlussweise, ganz ähnlich der für die Ungleichung (2.8) auf S. 26 verwendeten: Sind a und b x -Bilder x_{t_i} und $x_{t_{i+1}}$ von benachbarten Zerlegungspunkten aus Zerlegungen einer Zerlegungsfolge bezüglich der x quadratische Variation besitzt, dann folgt, wenn die x_{t_i} und $x_{t_{i+1}}$ weniger als $2\epsilon'$ voneinander entfernt sind, für schließlich alle n : $|\sum_{t_i \in \tau_n^t} R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})| < 2r(2\epsilon')|\xi^t|$, wegen der vagen Konvergenz gegen ξ .

Daher sind für lãglãd $x : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $\kappa_s^-(\Delta^- x_s)^2 = R(x_s, x_{s-}, s)$, $\bar{\kappa}_s^-(\Delta^- x_s)^2 = R(x_s, x_{s-}, s-)$ und $\kappa_s^+(\Delta^+ x_s)^2 = R(x_{s+}, x_s, s)$ erklärten Funktionen $\kappa^-, \bar{\kappa}^-, \kappa^+ : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ beschrãnkt.

Da y' 1-glatt ist, gilt auch

$$y'(b, s) - y'(a, s) = y''(a, s)(b - a) + \tilde{R}(a, b, s)$$

mit

$$|\tilde{R}(a, b, s)| < \tilde{r}(|b - a|, s)|b - a|$$

mit

$$\tilde{r}(m, s) = \sup_{|b-a| \leq m} |y''(b, s) - y''(a, s)|,$$

für s aus $[0, t]$ und a und b aus M . Für solche s, a, b gilt auch

$$|\tilde{R}(a, b, s)| < \tilde{r}(|b - a|)|b - a|,$$

mit $\tilde{r}(m) := \sup\{\tilde{r}(m, s) : s \in [0, t]\}$. \tilde{r} übernimmt wegen Lemma 2.7 von $r(m, \cdot)$ die Eigenschaften der Isotonie, Beschrãntheit und Rechtsstetigkeit in 0 und $\tilde{r}(c) \rightarrow 0$ für $c \rightarrow 0$.⁴ \diamond

Bemerkung 2.11. *Ausnutzbarkeit der quadratischen x -Variation, wenn y im ersten Argument hinreichend glatt ist.*

Aufgrund der Beschrãntheitseigenschaften der y'' (Bem. 2.6) und der κ (Bem. 2.10) sind für 2-glatte y folgende Terme Beispiele für die summierbaren Funktionen der Form $f_s = g_s(\Delta x_s)^2$ mit beschrãnktem g_s wie in Bemerkung 2.3:

- (i) $f_s = y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s)\Delta^- x_s = \left(-\frac{1}{2}y''(x_s, s) - \kappa_s^-\right)(\Delta^- x_s)^2$
- (ii) $f_s = y(x_s, s-) - y(x_{s-}, s-) - y'(x_s, s-)\Delta^- x_s$
 $= \left(-\frac{1}{2}y''(x_s, s-) - \bar{\kappa}_s^-\right)(\Delta^- x_s)^2$
- (iii) $f_s = y(x_{s+}, s) - y(x_s, s) - y'(x_{s+}, s)\Delta^+ x_s$
 $= \left(-\frac{1}{2}y''(x_{s+}, s) - \kappa_s^+\right)(\Delta^+ x_s)^2$

\diamond

⁴Wie in der vorherigen Fußnote gilt unter gleichen Voraussetzungen, dass für schließlich alle $n \mid \sum_{t_i \in \tau_n^t} \tilde{R}(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) < 2\tilde{r}(2\epsilon')|\xi^t|$ ist.

Kapitel 3

Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités

3.1 Calcul d'Itô sans Probabilités

Ist (τ_n) eine feine Zerlegungsfolge, und ist x eine càdlàg Funktion, die auf Kompakta endliche quadratische Variation entlang (τ_n) besitzt (s. Def. 1.4), dann ist – falls die Funktion f zweimal und damit f' einmal stetig differenzierbar ist – die càglàd Hintereinanderschaltung $f'(x_{s-})$ kein Infinitor¹ von x auf der Zerlegungsfolge (τ_n) .² Denn es existiert in diesem Fall der Limes der „diskreten Itô-Integrale“

$$\sum_{t_i \in \tau_n^t} f'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}).$$

Theorem (Calcul d'Itô sans Probabilités, Föllmer, 1981). *Sei x von quadratischer Variation entlang (τ_n) , und sei f eine zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion. Dann gilt die Itô-Formel*

$$\begin{aligned} f(x_t) - f(x_0) &= \int_0^t f'(x_{s-}) dx_s + \frac{1}{2} \int_{(0,t]} f''(x_{s-}) d[x, x]_s \\ &\quad + \sum_{s \leq t} f(x_s) - f(x_{s-}) - f'(x_{s-}) \Delta x_s - \frac{1}{2} f''(x_{s-}) (\Delta x_s)^2, \end{aligned}$$

¹Oder ähnliches einer Limesexistenz entgegenstehendes.

²Vgl. auch Fußnote 4 auf S. 31.

wobei die Grenzwerte

$$\int_0^t f'(x_{s-}) dx_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^t} f'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

und

$$\sum_{s \leq t} f(x_s) - f(x_{s-}) - f'(x_{s-})\Delta x_s - \frac{1}{2}f''(x_{s-})(\Delta x_s)^2$$

wohldefiniert sind.

Das diskrete Itô-Integral werde durch

$$n\int_0^t f'(x_{s-}) dx_s := \sum_{t_i \in \tau_n^t} f'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

definiert.

Zum Beweis des Theorems in Föllmer [30], S. 144 ff., wird die Existenz von

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^t} f'(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

und die Itô-Formel zusammen bewiesen: Eine (in n) gegen $f(x_t) - f(x_0)$ konvergierende Teleskopsumme wird, insbesondere durch die Anwendung der Taylorformel (und der Aufteilung der x -Sprünge in „große“ und „kleine“), in einen Term der Form

$$n\int_0^t f'(x_{s-}) dx_s + n\int_0^t g_1(x_{s-}) d[x, x]_s + n\int_0^t g_2(x_{s-}) d[x, x]_s + \dots$$

umgeformt, der im wesentlichen schon die Struktur der Itô-Formel hat, wobei $n\int_0^t g(x_{s-}) d[x, x]_s$ für ein „diskretes Integral“ der Form

$$\sum_{t_i \in \tau_n^t} g(x_{t_i})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2$$

steht.

Der Term insgesamt konvergiert entlang (τ_n) , da er gleich der Teleskopsumme ist, aus der er durch Umformungen hervorgegangen ist. Die diskreten

Integrale $n\text{-}\int_0^t g(x_{s-}) d[x, x]_s$ konvergieren entlang (τ_n) , da x entlang (τ_n) quadratische Variation besitzt.³

Dies erzwingt die Konvergenz von $n\text{-}\int_0^t f'(x_{s-}) dx_s$ und als Grenzwert des Terms insgesamt ergibt sich eine im strengen Sinn pfadweise Itô-Formel.⁴

3.2 Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités

Folgende Bemerkungen zur Zwitterrolle zwischen Integrand und Integrator von y seien noch vorangeschickt:

(i) Die Itô-Formel sans Probabilités enthält ein Itô-Integral, dessen Existenz durch die spezielle Beziehung zwischen Integrand und Integrator gesichert ist. Ein allgemeines Itô-Integral $\int z dx$ ist dadurch nicht erklärt, denn dafür ist ein nur auf x bezüglich (τ_n) zugeschnittene Kriterium (etwa dass x entlang (τ_n) quadratische Variation hat) im Allgemeinen nicht hinreichend. Denn es gibt, wenn x nicht FV ist, entlang (τ_n) für x Infinatoren (s. oben S. 12 ff.). Daher gibt es auch kein allgemeines Itô-Integral $\int y(x_s, ds)$, denn die „normalen“ Itô-Integrale lassen sich durch eine geeignete Wahl der Familie y darstellen: Ist nämlich Y_s ein Semimartingal, dann gilt für einen adaptierten càglàd Prozess X_s bei der Definition der Semimartingalfamilie Y durch $Y(p, s) := pY_s$:

$$\int_0^t Y(X_s, ds) = \int_0^t X_s dY_s \quad (3.1)$$

(vgl. zur Definition des nicht-linearen Itô-Integrals $\int_0^t Y(X_s, ds)$ Teil II der Arbeit).

(ii) Ist die càdlàg Funktion x von quadratischer Variation entlang (τ_n) , dann auch $f \circ x$, wenn f einmal stetig differenzierbar ist.⁵ Insbesondere ist

³Vgl. einerseits Föllmer [30], S. 144 ff., und Lemma 2.2 oben, andererseits, zur absoluten Konvergenz der Summe, [30], S. 146, und Bemerkung 2.11 i.V.m. Bemerkung 2.3 oben.

⁴Die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} n\text{-}\int_0^t f'(x_{s-}) dx_s$ zeigt, dass für ein entlang (τ_n) quadratisch variierendes càdlàg x_s die càglàd-Funktion $f(x_{s-})$ zu unflexibel an x_s gekoppelt ist, als dass es wie ein Infinator aus x_s die unendliche Variation „entfalten“ könnte.

⁵Vgl. [30], S. 148: „C'est la version analytique d'un résultat de Meyer sur les semimartingales.“ S. Meyer [71], Theorem 5, S. 359, oder in dem Sammelband Émery und Yor (Hrsg.) [28], S. 288.

die Bedingung an x im Calcul d'Itô sans Probabilités äquivalent zu „ $f'(x)$ hat entlang (τ_n) quadratische Variation für jedes $f \in C^{2\alpha}$ “. In einer Hinsicht übernimmt die 2-glatte Familie y die Rolle von $f \in C^2$ und $y(x_s, s)$ die Integranden-Rolle von $f(x_s)$. In (4.1) wird dagegen die Rolle von y als Integrator augenfällig. \diamond

Im folgenden Satz wird über die \mathbb{R}^2 -wertige Funktion $(y'(x_s, s), x_s)$ vorausgesetzt, dass sie entlang (τ_n) quadratische Variation besitzt (s. Def. 1.4).

Wenn x entlang (τ_n) unendliche Variation hat, kann es im Hinblick auf die obigen Bemerkungen zu Schwierigkeiten kommen, zu deren Umgehung die „Semimartingalhaftigkeit“ von x entlang (τ_n) bezüglich $y'(x_s, s)$ gefordert wird:

Definition 3.1. x heißt entlang (τ_n) bezüglich der càdlàg-Funktion z semimartingalhaft, wenn

$$\int_0^t z_{s-} dx_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^t} z_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})$$

existiert.

Satz 3.2 (Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités). *Ist y 2-glatt, x càdlàg und $(y'(x_s, s), x_s)$ von quadratischer Variation entlang der feinen Zerlegungsfolge (τ_n) sowie x semimartingalhaft entlang (τ_n) bezüglich $y'(x_s, s)$, dann gilt folgende Itô-Wentzell-Formel*

$$\begin{aligned} y(x_t, t) &= y(x_0, 0) + \int_0^t y(x_{s-}, ds) + \int_0^t y'(x_{s-}, s-) dx_s + [y(x_{\cdot}, \cdot), x]_t \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t y''(x_{s-}, s-) d[x, x]_s^c + \sum_{0 < s \leq t} y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s) \Delta x_s, \end{aligned}$$

wobei die Grenzwerte

$$\int_0^t y(x_{s-}, ds) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^t} y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i)$$

und

$$\sum_{0 < s \leq t} y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s) \Delta x_s$$

wohldefiniert sind.

Beweis. Der Beweis beginnt ähnlich wie der Beweis des Lemma 2.2 auf S. 18 f. Da ξ^a radonsch ist, gibt es eine endliche Teilmenge $G = G(\epsilon', t)$ der x -Linkssprünge (die Menge $F = F(\epsilon', t)$ der Rechtssprünge ist wegen der vorausgesetzten Rechtsstetigkeit von x leer und muss daher nicht weiter beachtet werden) mit

$$\sum_{s \in [0, t] \setminus G} (\Delta x_s)^2 \leq \epsilon'.$$

G induziert die endliche τ_n^t -Teilmenge $G'(n, \epsilon', t)$ wie in Def. 2.1 und Lemma 2.2. Die Summen Σ , Σ_1 und Σ_3 (Σ_2 braucht wegen $F = \emptyset$ nicht betrachtet werden) sollen die in Def. 2.1 festgelegte, von t und ϵ' abhängige Bedeutung haben und einer kürzeren Schreibweise dienen.

Wegen $t_0 = 0$ und $t_{i^*+1} = t$ für alle n gilt für die Teleskopsumme

$$T_{n,t} := \sum_{t_i \in \tau_n^t} y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i) = y(x_t, t) - y(x_0, 0).$$

Sie hat eine Darstellung $T_{n,t} = \bar{I}_t^n + J_t^n$ mit $\bar{I}_t^n = \sum y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i)$ und $J_t^n := \sum y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1})$. Diese Terme lassen sich aufgrund der 2-Glätte von y im Hinblick auf Bem. 2.10 (S. 27 f.) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} y(x_t, t) &= y(x_0, 0) + T_{n,t} \\ &= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + J_t^n \\ &= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) \\ &\quad + \sum_3 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) \\ &= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) \\ &\quad + \sum_3 y'(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\ &\quad + \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\ &= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) \\ &\quad + \sum y'(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &\quad - \sum_1 y'(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\ &\quad + \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \sum (y'(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \sum_1 (y'(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \sum_3 (y'(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \sum_1 (y'(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad - \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\
&\quad - \sum_3 \tilde{R}(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_3 y''(x_{t_i}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad - \sum_3 \tilde{R}(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \sum (y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y'(x_{t_i}, t_i))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \\
&\quad + \sum y'(x_{t_i}, t_i)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Die zweite Summe in (3.2) liegt nach Lemma 2.8 in ϵ -Nähe von

$$\int_0^t y''(x_s, s) d[x, x]_s^c.$$

Die erste Summe konvergiert in n gegen die endliche Summe

$$\sum_{s \in G} y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s) \Delta x_s.$$

Ist ϵ' nur klein genug, so liegt diese Summe in ϵ -Nähe zu der Sprungsumme

$$\sum_{0 < s \leq t} y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s) \Delta x_s$$

(s. Bem. 2.11 (i) und (iii)).

Da die isotone Funktion $r : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ in 0 rechtsstetig mit $r(0) = 0$ ist (s. Bem. 2.10), kann $\epsilon' > 0$ so klein gewählt werden, dass $2r(2\epsilon')|\xi^t| \leq \epsilon$ ist. Für

$$\sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) = \sum_{t_i \in \tau_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t)} R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})$$

ist für hinreichend große n

$$\left| \sum_3 R(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \right| \leq \sum_2 r(2\epsilon')(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \leq 2r(2\epsilon')|\xi^t|,$$

da gemäß Lemma 2.7 (S. 24)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|x_{t_{i+1}} - x_{t_i}| : t_i \in \tau_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t)\} \leq \epsilon'$$

und $|\xi_n^t| \rightarrow |\xi^t|$, da $\xi_n^t \xrightarrow{\text{vag}} \xi^t$ (die Schlussweise aus der Fußnote 3 auf S. 28).

ϵ' kann auch noch so klein gewählt werden, dass sich für große n

$$\left| \sum_3 \tilde{R}(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \right| \leq \sum_3 \tilde{r}(2\epsilon')(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \leq 2\tilde{r}(2\epsilon')\xi^t$$

ergibt, so dass sich auch

$$\left| \sum_3 \tilde{R}(x_{t_i}, x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \right| < \epsilon$$

rechtfertigen lässt (vgl. Fußnote 4 auf S. 28).

Vorausgesetzt sind nun außerdem die Konvergenzen

$$\sum (y'(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y'(x_{t_i}, t_i))(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \rightarrow [y'(x., \cdot), x.]_t$$

und

$$\sum y'(x_{t_i}, t_i)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \rightarrow \int_0^t y'(x_{s-}, s-) dx_s$$

wegen der gemeinsamen quadratischen Variation von x und $y(x., \cdot)$ und der Semimartingalhaftigkeit von x bezüglich $y'(x., \cdot)$, beides entlang (τ_n) . Im Hinblick auf (3.2) ergibt sich, dass \bar{I}_t^n konvergiert. Da das Maß ξ^c einzelne Punkte aus $[0, t]$ nicht positiv gewichtet, ist $\int_0^t y''(x_{s-}, s-) d[x, x]_s^c = \int_0^t y''(x_s, s) d[x, x]_s^c$. So ergibt sich der Satz. \square

Kapitel 4

Erweiterung der Zeitmenge

Die Begriffe und Ergebnisse der ersten beiden Kapitel bleiben sinnvoll und gültig, wenn die Zeitmenge \mathbb{R}_+ oder Teilintervalle dieser Menge mit speziellen zusätzlichen Elementen angereichert werden. Der Vorteil, diese erweiterte Zeitmenge zur Verfügung zu haben, wird sich in Kapitel 6 im Beweis des Satzes 6.8 zur Realwertdynamik zeigen. Es entfallen dann nämlich unübersichtliche Fallunterscheidungen und von Teleskopsummen ausgehende Umformungen bleiben aufgrund der strengen Ordnungsstruktur, die die erweiterte Zeitmenge von \mathbb{R}_+ übernimmt, so übersichtlich wie die Umformungen im Beweis der Itô-Wentzell-Formel sans Proabilités im vorhergehenden Kapitel.

Sei T eine positive reelle Zahl. Sei $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine lãglãd Funktion und \mathcal{S} die Menge der x -Linkssprünge.

Zu jedem x -Linkssprung t sei t^* ein zusätzliches abstraktes Element. Die Menge der zusätzlichen Elemente werde mit \mathcal{S}^* bezeichnet. Mit $[0, T]^*$ wird die Menge $[0, T] \cup \mathcal{S}^*$ bezeichnet. Auf $[0, T]^*$ wird durch die zusätzliche neben die Standardordnung auf $[0, T]$ tretende Festlegung für alle x -Linkssprünge t

$$t^* < t, \quad s < t \Rightarrow s < t^* \quad \forall s \in [0, T],$$

eine strenge Ordnung definiert (s. Abbildung 4.1).

Eine Quasimetrik d^* ergibt sich aus der Festlegung $d^*(s, t) := |s - t|$ für alle reellen $s, t \in [0, T]$ und $d^*(t^*, s) := d^*(t, s)$ für alle x -Linkssprünge t und alle $s \in [0, T]$ sowie $d^*(t^*, s^*) := d^*(t, s)$ für alle x -Linkssprünge t und s .

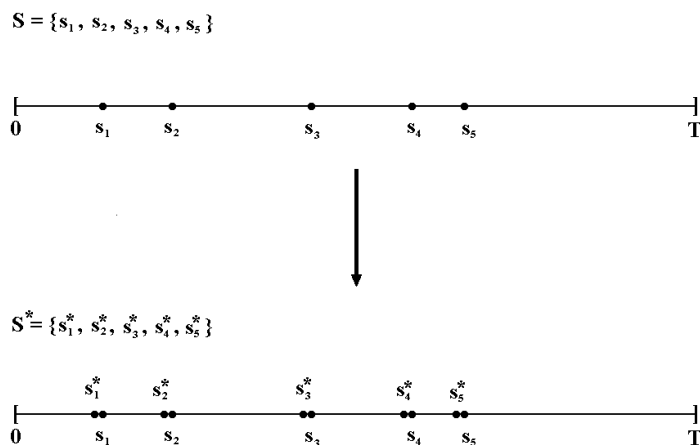


Abbildung 4.1: Erweiterung der Zeitmenge

Die Quasimetrik dient hauptsächlich dafür, die Feststellung 1.1 auf Seite 6 und Definition 1.2 ohne wesentliche Änderungen übernehmen zu können. Denn die im 6. Kapitel benötigten Erweiterungen der Aussagen der ersten beiden Kapitel werden nun formuliert. Zunächst wird die Definition gegeben, die dazu führt, dass sich der Übergang auf die erweiterte Zeitmenge als bequem erweisen wird:

Definition 4.1. Sei $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Funktion, \mathcal{S} die Menge der x -Linkssprünge und y k -glatte Funktion im Sinne der Definition 2.4. Dann soll wie folgt definiert werden:

1. Die Erweiterung von x ist die Funktion $x^* : [0, T]^* \rightarrow \mathbb{R}$, die durch

$$x_{t^*}^* := x_t \text{ für } t^* \in \mathcal{S}^* \text{ und } x_t^* := x_t \text{ für } t \in [0, T]$$

gegeben ist.

2. Die Erweiterung von $y : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$y^* : \mathbb{R} \times [0, T]^* \rightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$y^*(\cdot, t^*) := y(\cdot, t-) \text{ für } t^* \in \mathcal{S}^* \text{ und } y^*(\cdot, t) := y(\cdot, t) \text{ für } t \in [0, T]$$

gegeben ist.

3. Eine feine die x -Doppelsprünge und die x^* -Linkssprünge enthaltende Zerlegungsfolge auf $[0, T]^*$ im Sinne der Definition 1.2* 3) (s.u.) heie eine Erweiterung von der feinen die x -Doppelsprünge enthaltenden Zerlegungsfolge (τ_n) um die Punkte aus \mathcal{S}^* . Erweiterungen werden mit (σ_n) bezeichnet.

Für die Erweiterungen gilt auf $[0, T]^*$ insbesondere:

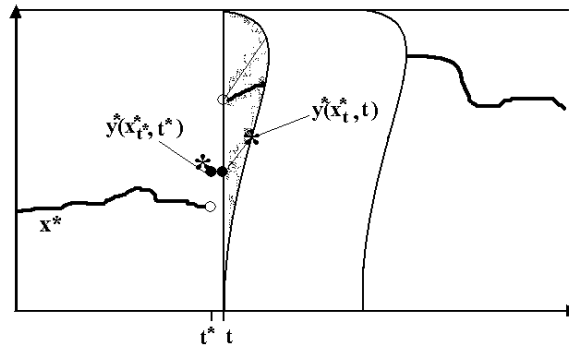
$$\Delta^- x_t^* = 0 \text{ und } \Delta^- x_{t^*}^* = \Delta^- x_t \text{ sowie } y^*(x_{t^*}^*, t^*) = y(x_t, t-)$$

für $t \in \mathcal{S}$ (s. Abbildung 4.2).

Bemerkung 4.2. In Kapitel 6 werden Handelsstrategien von Großinvestoren untersucht. Der Großinvestor soll die Möglichkeit haben, noch in dem Moment t in einen etwaigen Preissprung zum Zeitpunkt t einer Aktie investieren zu können (freilich mit einer vorhersehbaren Strategie, damit er durch die „Investition im letzten Augenblick“ keine Informationsvorteile erhält). In einem metaphorischen Sinn liegt die Investition daher *vor* dem Preissprung. Die Bequemlichkeit der Zeitmengenerweiterung rührt daher, dass eine Ordnungsstruktur bereit gestellt wird, in der die Investition nun tatsächlich vor dem Preissprung erfolgen kann. Man muss nur die Standarderweiterungen verwenden und x^* als Handelsstrategie, y^* als Preisprozessfamilie interpretieren, dann wird etwa mit $y^*(x_{t^*}^*, t^*) = y(x_t, t-)$ die Situation zum abstrakten Zeitpunkt t^* beschrieben, in der der Großinvestor schon investiert ist, ein etwaiger Preissprung zum Zeitpunkt t aber noch nicht erfolgt ist. (S. auch unten Abschnitt 6.1 „Motivation der Wahl der Begriffe“.) \diamond

Feststellung 1.1*. Für jedes reelle $\epsilon > 0$ gibt es ein reelles $\delta > 0$ so, dass aus $t_1, t_2 \in [0, T]^*$, $t_1 < t_2$ und $d^*(t_1, t_2) < \delta$ folgt (s. Abbildung 4.3):

$$x_{t_2}^* - x_{t_1}^* \in (S_{t_1, t_2} - \epsilon, S_{t_1, t_2} + \epsilon). \quad (\text{Mit Übernahme der Definitionen von S. 6})$$

Abbildung 4.2: Standarderweiterung von x und y

Als wesentlich neues Phänomen, das im Beweis der Feststellung 1.1 auf Seite 6 noch nicht behandelt wurde, kommt der Fall $t_1 = t^*$ und $t_2 = t$ für ein $t^* \in \mathcal{S}^*$ hinzu. Wegen $d^*(t^*, t) = 0$ muss die Konklusion gelten, was sie aber auch tut, da $x_{t^*} = x_t$ gilt.

Definition 1.2*. Sei $T \in (0, \infty]$ gegeben.

1) Ist τ eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$ des Intervalls $[0, T]^*$ und ist $t \in [0, T]$, dann bezeichne τ^t die Menge der Zerlegungspunkte $t_i \in \tau$, die kleiner als t sind. Mit i^* werde der Index des größten Elements aus τ^t bezeichnet, und es werde definiert: $t_{i^*+1} := t$.

2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei τ_n eine endliche Zerlegung des Intervalls $[0, T]^*$. Die Feinheit einer endlichen Zerlegung τ ist das Maximum der Abstände

benachbarter Zerlegungspunkte

$$\max \{d^*(t_i, t_{i+1}) : t_i \in \tau\}.$$

Die Zerlegungsfolge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heie fein, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Feinheit}(\tau_n) = 0$ ist).

3) Sei G eine abzählbare $[0, T]^*$ -Teilmenge. Wenn es eine Folge endlicher G -Teilmengen $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$ gibt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$ ($G_n \uparrow G$) und $G_n \subseteq \tau_n$ dann heie (τ_n) eine G -enthaltende Zerlegungsfolge. Ist $x^* : [0, T]^* \rightarrow \mathbb{R}$ lgld und ist G die Menge der Linkssprünge von x^* , dann heie (τ_n) , wenn es G enthält, die x^* -Linkssprünge enthaltend (analog für die Rechtssprünge).

Definition 1.3*. Sei τ eine endliche Zerlegung und seien x^1, x^2, \dots, x^k reellwertige Funktionen auf $[0, T]^*$. Dann bezeichne $v(\tau; x^1, x^2, \dots, x^k)$ das diskrete signierte Punktmaß

$$\sum_{t_i \in \tau} (x_{t_{i+1}}^1 - x_{t_i}^1)(x_{t_{i+1}}^2 - x_{t_i}^2) \dots (x_{t_{i+1}}^k - x_{t_i}^k) \epsilon_{t_i},$$

das Variationsma von (x^1, x^2, \dots, x^k) bezüglich τ .

Im Folgenden werden insbesondere feine Zerlegungsfolgen auf $[0, T]^*$ betrachtet, die die x -Doppelsprünge und die neuen Zeitelemente aus \mathcal{S}^* enthalten.

Als offene Intervalle in $[0, T]^*$ werden die Mengen der Form

$$(t_1, t_2) := \{t \in [0, T]^* : t_1 < t < t_2\}$$

bezeichnet. Die offenen Intervalle erzeugen eine Topologie auf $[0, T]^*$, die neben den normtopologischen offenen Mengen auf $[0, T]$ insbesondere die zugleich offenen und rechts- bzw. links-abgeschlossenen Intervalle $(s, t^*]$ und $[u, v)$ ($[0, T]^* \ni s < t^* \in \mathcal{S}^*$, $\mathcal{S} \ni u < v \in [0, T]^*$) enthält.

Die festgelegte Topologie erzeugt auf $[0, T]^*$ die Sigma-Algebra

$$\mathbb{B}^* := \sigma(\mathbb{B}([0, T]) \cup \{\{t^*\} : t^* \in \mathcal{S}^*\}),$$

so dass $([0, T]^*, \mathcal{B}^*)$ ein messbarer Raum ist. Da \mathcal{S}^* abzählbar ist, ist eine Funktion $f^* : [0, T]^* \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann $\mathcal{B}^* - \mathcal{B}$ -messbar, wenn die Einschränkung auf $[0, T]$ $\mathbb{B}([0, T]) - \mathcal{B}$ -messbar ist. f^* ist stetig genau dann, wenn für $t^* \in \mathcal{S}^*$ $\lim_{t \nearrow t^*} f_t^* = f_{t^*}^*$ und für $t \in \mathcal{S}$ $\lim_{s \searrow t} f_s^* = f_t^*$ und für alle übrigen t $\lim_{s \nearrow t} f_s^* = f_t^* = \lim_{s \searrow t} f_s^*$ gilt.

Bemerkung 4.3. Mit der angegebenen Topologie ist $[0, T]^*$ ein polnischer Raum. Eine geeignete Metrik m^* ist durch eine Aufzählung der Menge \mathcal{S}^*

$$s_1^*, s_2^*, \dots$$

mit den zugehörigen Standardelementen s_1, s_2, \dots aus \mathcal{S} und der Zuordnung

$$d^{**}(s_k^*, s_k) := \frac{1}{2^k}, \quad d^{**}(s, t) := \sum_{s < s_k^* \leq t} d^{**}(s_k, s_k^*), \quad d^{**}(t, s) := d^{**}(s, t)$$

($s, t \in [0, T]^*$, $s \leq t$) und

$$m^*(s, t) := d^*(s, t) + d^{**}(s, t)$$

($s, t \in [0, T]^*$) gegeben. ◇

Definition (und Feststellung) 1.4*. Sei x $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ und $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine feine die x -Doppel- und die x^* -Linkssprünge \mathcal{S}^* enthaltende Zerlegungsfolge. x^* besitzt quadratische Variation entlang (σ_n) , wenn gilt: Es existiert ein Radon-Maß ξ^* auf $[0, T]^*$ so, dass

$$\sum_{t_i \in \sigma_n} (x_{t_{i+1}} - x_{t_i})^2 \epsilon_{t_i} \longrightarrow \xi^*,$$

wobei sich der atomare Teil von ξ^* aus der Summe der Maße ξ^{*-} und ξ^{*+} mit

$$\xi^{*-} := \sum_{s \in \mathcal{S}} (\Delta^- x_s)^2 \epsilon_{s^*}$$

und

$$\xi^{*+} := \xi^{x,+}$$

ergibt.

Bemerkung 4.4. Durch die Verdoppelung der Linkssprünge hat x^* keine Doppelsprünge mehr; die Linkssprünge sind zeitlich nun vorgelagert. Das hat insbesondere zur Folge, dass die beiden atomaren Maße ξ^{*-} und ξ^{*+} nur von ξ^* abhängen, d.h. ohne die Kenntnis von x identifizierbar sind (s. Abbildung 4.3). $\xi^{x,-}$ und $\xi^{x,+}$ aus Definition 1.4 (S. 8) sind dagegen von x abhängig. ◇

Mit $[x^*, x^*] = [(\sigma_n); x^*, x^*]$ wird die Verteilungsfunktion von ξ^* und mit $[x^*, x^*]_t^c$ die Verteilungsfunktion des kontinuierlichen Teils des Maßes

$$[x^*, x^*]_t^c := [x^*, x^*]_t - \sum_{[0, T]^* \ni s \leq t} (\Delta x_s)^2$$

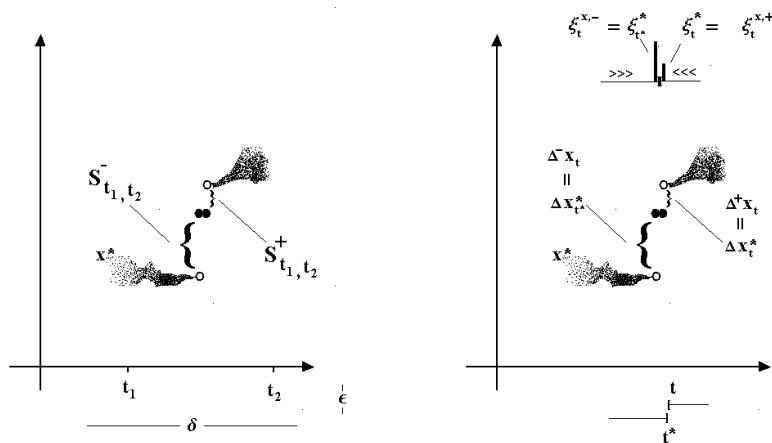


Abbildung 4.3: Zeitliche Linkssprungverschiebung

bezeichnet. Mit ξ^{*t} wird die Einschränkung des Maßes ξ^* auf $[0, t]^*$ bezeichnet.

Bemerkung 4.5. x^* besitzt genau dann entlang (σ_n) endliche quadratische Variation, wenn x auf (τ_n) quadratische Variation besitzt, denn es gilt für $t \in [0, T]$:

$$[x, x]_t = [x^*, x^*]_t.$$

◇

Definition 2.1*. Sei x $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ und sei (τ_n) eine die Doppelsprünge von x enthaltende feine Zerlegungsfolge entlang der x quadratische Variation besitzt. Sei $\epsilon' > 0$ und $t \in [0, T]$. Die Maße ξ^{*-} und ξ^{*+} sind radonsch, und daher existieren endliche Teilmengen $G = G(\epsilon', t)$ bzw. $F = F(\epsilon', t)$ der Links- bzw.

Rechtssprungzeiten von x^* mit

$$\sum_{s \in [0, t] \setminus G \cup F} (\Delta^- x_s^*)^2 + (\Delta^+ x_s^*)^2 = \sum_{s \in [0, t] \setminus G \cup F} (\Delta x_s^*)^2 \leq \epsilon'.$$

G und F induzieren endliche σ_n^t -Teilmengen $G'(n, \epsilon', t)$ und $F'(n, \epsilon', t)$:

$$G'(n, \epsilon', t) := \{t_i \in \sigma_n^t : (t_i, t_{i+1}] \cap G \neq \emptyset\}$$

und

$$F'(n, \epsilon', t) := \{t_i \in \sigma_n^t : [t_i, t_{i+1}) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Für schließlich alle n sind $G'(n, \epsilon', t)$ und $F'(n, \epsilon', t)$ disjunkt. Auch ist für schließlich alle n $G'(n, \epsilon', t) = G$.

Es werde definiert:

$$\begin{aligned} \sum &:= \sum_{t_i \in \sigma_n^t}, \\ \sum_1 &:= \sum_{t_i \in G'(n, \epsilon', t)}, \\ \sum_2 &:= \sum_{t_i \in F'(n, \epsilon', t)}, \\ \sum_3 &:= \sum_{t_i \in \sigma_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)}. \end{aligned}$$

Lemma 2.2*. Sei x $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ auf $[0, T]$ und g^* $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ auf $[0, T]^*$. Sei (τ_n) eine feine die Doppelsprünge von x enthaltende Zerlegungsfolge entlang der x quadratische Variation besitzt.

(1) Enthält (τ_n) alle x -Rechtssprünge, so gilt, wenn

$$\xi_n^* := v(\sigma_n; x^*, x^*),$$

ξ^* den vagen Limes der ξ_n^* , ξ^{*c} dessen kontinuierlichen Teil und

$$\xi^{*a} = \xi^{*-} + \xi^{*+}$$

den atomaren Teil bezeichnet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t g^* d\xi_n^* = \int_0^t g^* d\xi^{*c} + \int_0^t g_-^* d\xi^{*-} + \int_0^t g^* d\xi^{*+}.$$

(2) Es gibt zu jedem $t \in [0, T]$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\epsilon' > 0$ so, dass für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{t_i \in \sigma_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)} g_{t_i}^* (x_{t_{i+1}}^* - x_{t_i}^*)^2 - \int_0^t g_s^* d[x^*, x^*]_s^c \right| < \epsilon$$

ist.

Zu dem Beweis führt man den Beweis von Lemma 2.2 einfach mit den erweiterten Begriffen. S. zu dem Beweis von Lemma 2.2 bzw. Lemma 2.2* Abbildung 4.4.

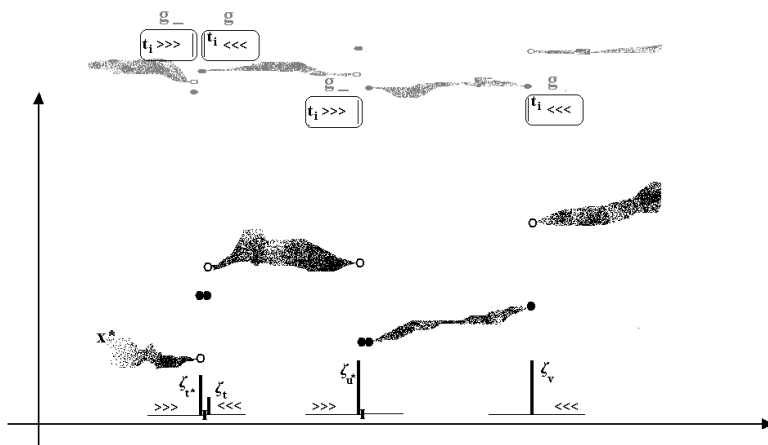


Abbildung 4.4: Zum Beweis von Lemma 2.2

Bemerkung 4.6. In Aussage (2) aus Lemma 2.2* kann, da keine einzelnen Punkte aus $[0, T]^*$ durch ξ^{*c} positiv gewichtet werden,

$$\int_0^t g_s^* d[x^*, x^*]_s^c$$

durch

$$\int_0^t g_s d[x, x]_s^c$$

ersetzt werden, wenn g dabei die Einschränkung von g^* auf $[0, T]$ bezeichnet. \diamond

Definition 2.5*. Ist y k -glatt ($k \geq 0$), dann hat y^* entlang der erweiterten Zeit Linkssprünge, wenn y sie entlang der Zeit hat. Sie werden durch Δ bezeichnet:

$$\Delta y^*(p, s) := y^*(p, s) - y^*(p, s-).$$

Bemerkung 4.7. $\Delta y^*(p, s)$ ist genau für die s ungleich Null, für die $\Delta y(p, s)$ ungleich Null ist. Für $s^* \in \mathcal{S}^*$ ist $\Delta y^*(p, s^*)$ stets gleich Null. \diamond

Lemma 2.7*. Sei M ein Kompaktum und $t \geq 0$. $y : M \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ sei k -glatt ($k \geq 0$). Dann ist y^* in x -Richtung gleichmäßig in folgendem Sinn: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so, dass aus $t_1, t_2 \in [0, t]^*$, $t_1 < t_2$ und $d^*(t_2, t_1) < \delta$ folgt:

$$\forall p \in M : \quad y^*(p, t_2) - y^*(p, t_1) \in (S_{p, t_1, t_2} - \epsilon, S_{p, t_1, t_2} + \epsilon),$$

wobei S_{p, t_1, t_2} das für die Funktion $x^* = y^*(p, \cdot)$ analog zur Definition auf S 6 definierte S_{t_1, t_2} bezeichne.

Lemma 2.9*. Sei x $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ und $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine die x -Doppelsprünge enthaltende feine Zerlegungsfolge entlang der x quadratische Variation besitzt. Ist y k -glatt ($k \geq 0$) und ξ^{*c} (mit der Verteilungsfunktion $[x^*, x^*]^c$) das kontinuierliche Maß der Def. 1.3*, dann gibt es zu jedem $t \in [0, T]^*$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\epsilon' > 0$ so, dass für schließlich alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{t_i \in \sigma_n^t \setminus G'(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)} y^*(x_{t_i}^*, t_{i+1}) (x_{t_{i+1}}^* - x_{t_i}^*)^2 - \int_0^t y(x_s, s) d[x, x]_s^c \right| < \epsilon$$

ist.

Lemma 2.9* ergibt sich aus Lemma 2.2* wie Lemma 2.9 aus Lemma 2.2 (wenn noch Bemerkung 4.6 beachtet wird).

Bemerkung 2.10*. Sei y 2-glatt. Nach der Taylor-Formel gilt für $a, b \in M$ und beliebiges $s \in [0, t]^*$:

$$\begin{aligned} y^*(b, s) - y^*(a, s) &= y^{*'}(a, s)(b - a) + \frac{1}{2}y^{*''}(a, s)(b - a)^2 + R^*(a, b, s) \\ &= y^{*'}(b, s)(b - a) - \frac{1}{2}y^{*''}(b, s)(b - a)^2 - R^*(b, a, s) \end{aligned}$$

mit

$$|R^*(a, b, s)| < r^*(|b - a|, s)(b - a)^2$$

mit

$$r^*(m, s) = \sup_{|b-a| \leq m} \frac{|y^{*''}(b, s) - y^{*''}(a, s)|}{2},$$

für s aus $[0, t]$ und

$$r^*(m, s) = \sup_{|b-a| \leq m} \lim_{t \nearrow s} \frac{|y^{*''}(b, t) - y^{*''}(a, t)|}{2},$$

für s aus \mathcal{S}^* und a und b aus M .

Im Hinblick auf Lemma 2.7* gilt für die durch

$$r^*(m) := \sup\{r^*(m, s) : s \in [0, t]^*\}$$

erklärte Funktion $r^* : M \rightarrow \mathbb{R}_+$: r^* ist beschränkt und isoton, $r^*(0) = 0$, $\lim_{c \searrow 0} r^*(c) = 0$.¹

Daher sind für $\text{l\grave{a}gl\grave{a}d}$ $x^* : [0, t]^* \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $\kappa_s^-(\Delta^- x_s^*)^2 = R^*(x_s^*, x_{s-}^*, s)$, $\bar{\kappa}_s^-(\Delta^- x_s^*)^2 = R^*(x_s^*, x_{s-}^*, s-)$ und $\kappa_s^+(\Delta^+ x_s^*)^2 = R^*(x_{s+}^*, x_s^*, s)$ erklärten Funktionen κ^- , $\bar{\kappa}^-$, $\kappa^+ : [0, t]^* \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Da y' 1-glatt ist, gilt auch

$$y^{*'}(b, s) - y^{*'}(a, s) = y^{*''}(a, s)(b - a) + \tilde{R}^*(a, b, s)$$

¹Für beliebige a, b, s gilt daher $|R^*(a, b, s)| < r^*(|b - a|)(b - a)^2$ und folgende Schlussweise, analog der Schlussweise in Fußnote 3 auf Seite 27: Sind a und b x^* -Bilder $x_{t_i}^*$ und $x_{t_{i+1}}^*$ von benachbarten Zerlegungspunkten aus Zerlegungen einer Zerlegungsfolge bezüglich der x^* quadratische Variation besitzt, dann folgt, wenn die $x_{t_i}^*$ und $x_{t_{i+1}}^*$ weniger als $2\epsilon'$ voneinander entfernt sind (bezüglich der Quasimetrik d^*), für schließlich alle n : $|\sum_{t_i \in \sigma_n^t} R^*(x_{t_i}^*, x_{t_{i+1}}^*, t_{i+1})| < 2r^*(2\epsilon')|\xi^{*t}|$, wegen der vagen Konvergenz gegen ξ^* .

mit

$$|\tilde{R}^*(a, b, s)| < \tilde{r}^*(|b - a|, s)|b - a|$$

mit

$$\tilde{r}^*(m, s) = \sup_{|b-a| \leq m} |y^{*''}(b, s) - y^{*''}(a, s)|,$$

für s aus $[0, t]$ und

$$\tilde{r}^*(m, s) = \sup_{|b-a| \leq m} \lim_{t \nearrow s} |y^{*''}(b, t) - y^{*''}(a, t)|,$$

für $s \in \mathcal{S}^*$ und a und b aus M . Für solche s, a, b gilt auch

$$|\tilde{R}^*(a, b, s)| < \tilde{r}^*(|b - a|)|b - a|,$$

mit $\tilde{r}^*(m) := \sup\{\tilde{r}^*(m, s) : s \in [0, t]^*\}$. \tilde{r}^* übernimmt wegen Lemma 2.7* von $r^*(m, \cdot)$ die Eigenschaften der Isotonie, Beschränktheit und Rechtsstetigkeit in 0 und $\tilde{r}^*(c) \rightarrow 0$ für $c \rightarrow 0$.² \diamond

Schreibweise. *Durch die Sternchen werden manche Terme unübersichtlich. Daher wird in längeren Ausdrücken auch eine weitere Schreibweise verwendet werden. Die Standarderweiterungen der Funktionen x und y und Elemente aus \mathcal{S}^* sowie Funktionen f^* und g^* auf der erweiterten Zeitmenge und den in den Taylorformeln auftretenden Funktionen R^* und r^* sowie \tilde{R}^* und \tilde{r}^* werden durch Schreibmaschinenschrift kenntlich gemacht:*

$$\mathbf{x} := x^*, \quad \mathbf{y} := y^*, \quad \mathbf{s} \in \mathcal{S}^*, \quad \mathbf{f} := f^*, \quad \mathbf{g} := g^*, \quad \mathbf{R} := R^*, \quad \mathbf{r} := r^*,$$

$$\tilde{\mathbf{R}} := \tilde{R}^*, \quad \tilde{\mathbf{r}} := \tilde{r}^*.$$

Bemerkung 2.11*. *Ausnutzbarkeit der quadratischen x^* -Variation, wenn y im ersten Argument hinreichend glatt ist.*

Aufgrund der Beschränktheitseigenschaften der y'' (Bem. 2.6) und der κ (Bem. 2.10*) sind für 2-glatte y folgende Terme Beispiele für die summierbaren Funktionen der Form $f_s^* = g_s^*(\Delta x_s^*)^2$ mit beschränktem g_s^* wie in Be-

²Wie in der vorherigen Fußnote gilt unter gleichen Voraussetzungen, dass für schließlich alle $n \mid \sum_{t_i \in \sigma_n^t} \tilde{R}^*(x_{t_i}^*, x_{t_{i+1}}^*, t_{i+1})(x_{t_{i+1}}^* - x_{t_i}^*) < 2\tilde{r}^*(2\epsilon')|\xi^{*t}|$ ist.

merkung 2.3:

$$f_s^* = y^*(x_s^*, s) - y^*(x_{s-}^*, s) - y'^*(x_s^*, s)\Delta^- x_s^* = \left(-\frac{1}{2}y^{*''}(x_s^*, s) - \kappa_s^-\right) (\Delta^- x_s^*)^2$$

$$\begin{aligned} f_s^* &= y^*(x_s^*, s-) - y^*(x_{s-}^*, s-) - y'^*(x_s^*, s-)\Delta^- x_s^* \\ &= \left(-\frac{1}{2}y^{*''}(x_s^*, s-) - \bar{\kappa}_s^-\right) (\Delta^- x_s^*)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_s^* &= y^*(x_{s+}^*, s) - y^*(x_s^*, s) - y'^*(x_{s+}^*, s)\Delta^+ x_s^* \\ &= \left(-\frac{1}{2}y^{*''}(x_{s+}^*, s) - \kappa_s^+\right) (\Delta^+ x_s^*)^2 \end{aligned}$$

In der Schreibmaschinenschreibweise (s. vorhergehende Seite):

$$(i) \quad f_s = y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s)\Delta^- x_s = \left(-\frac{1}{2}y''(x_s, s) - \kappa_s^-\right) (\Delta^- x_s)^2$$

$$(ii) \quad f_s = y(x_s^*, s-) - y(x_{s-}, s-) - y'(x_s, s-)\Delta^- x_s \\ = \left(-\frac{1}{2}y''(x_s, s-) - \bar{\kappa}_s^-\right) (\Delta^- x_s)^2$$

$$(iii) \quad f_s = y(x_{s+}, s) - y(x_s, s) - y'(x_{s+}, s)\Delta^+ x_s \\ = \left(-\frac{1}{2}y''(x_{s+}, s) - \kappa_s^+\right) (\Delta^+ x_s)^2$$

◇

Teil II

Nicht-lineares Integral und Großinvestorvermögensdynamik

In den folgenden „Avec Probabilités“-Teilen II und III wird für $T > 0$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum

$$\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}\right)$$

zugrundegelegt, der die *üblichen Bedingungen* erfülle (\mathbb{F} rechtsstetig, vollständig und hier zusätzlich \mathcal{F}_0 trivial modulo \mathbb{P}).

Im ersten Kapitel des Teils II (Kapitel 5) wird ein zahmer Integrator und das nicht-lineare Itô-Integral in der für vorhersehbare lokal-beschränkte Prozesse benötigten von Christoph Kühn erzielten³ Allgemeinheit eingeführt und einige auf die Bedürfnislagen der Folgekapitel zugeschnittene Schlussfolgerungen gezogen.

In Kapitel 6 wird gezeigt, dass von einer Handelsstrategie nur vorausgesetzt werden muss, dass der Bestandsprozess θ wohldefinierte quadratische Variation besitzt. Mit diesen Handelsstrategien ergibt sich eine Vermögensdynamikzerlegung, die zeigt, dass bei der Verwendung stetiger FV-Strategien keine der Illiquidität geschuldeteten Transaktionskosten anfallen.

³S. [56].

Kapitel 5

Stochastische Vorbereitungen

5.1 Endliche quadratische Variation

Definition 1.2 feiner Zerlegungsfolgen und des Enthaltenseins der Doppelsprünge wird stochastisiert:

Definition 5.1 (Feine Stoppzeitenfolge). Sei $T > 0$, $[0, T] \subset \mathbb{R}_+$ die Zeitmenge. Die Stoppzeitenfolge

$$(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \tau_n = (0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \dots \leq T_{l_n}^n = T)$$

heie fein, wenn für fast alle $\omega \in \Omega$ die Zerlegungsfolge $(\tau_n(\omega))$, die durch die Ersetzung der t_i durch $T_i(\omega)$ entsteht, fein im Sinne der Definition 1.2 ist.

Definition 5.2 (Doppelsprünge enthaltend). Sei X optionaler Prozess auf $[0, T]$. Die feine Stoppzeitenfolge (τ_n) heiße die X -Doppelsprünge enthaltend, wenn für alle $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ bis auf Evaneszens die Implikation

$$\begin{aligned} \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega) \text{ existiert,} \quad \lim_{s \downarrow t} X_s(\omega) \text{ existiert,} \quad \Delta^- X_t(\omega) \neq 0, \quad \Delta^+ X_t(\omega) \neq 0 \\ \implies \exists m \forall n \geq m \exists j : (\omega, t) \in \llbracket T_j^n \rrbracket \end{aligned}$$

gilt. Analog werde definiert, dass (τ_n) die X -Linkssprünge enthält.

Definition 5.3 (Nicht explodierende p -Variation). Sei $p > 0$. Ein optionaler Prozess X hat nicht explodierende p -Variation, wenn für jede Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen $\tau_n = (T_0^n, T_1^n, \dots, T_{k_n}^n)$ wobei $0 = T_0^n \leq T_1^n \leq \dots \leq T_{k_n}^n = T$

Stoppszeiten sind, die $\max_{k=1, \dots, k_n} |T_k^n - T_{k-1}^n| \rightarrow 0$ in \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit erfüllen,

$$\mathbb{P} \left[\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1, \dots, k_n} |X_{T_k^n} - X_{T_{k-1}^n}|^p < \infty \right] = 1$$

gilt.

Definition 5.4 (Wohldefinierter p -Variationsprozess). *Ein optionaler Prozess X mit nicht explodierender p -Variation im Sinne der vorhergehenden Definition besitzt einen wohldefinierten p -Variationsprozess, wenn es einen nicht fallenden vorhersehbaren Prozess $[X]_t$ mit $[X]_T < \infty$ f.s. gibt, so dass für jede feine die X -Doppelsprünge enthaltende Zerlegungsfolge (τ_n) gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{T_i \in \tau_n} (X_{T_{i+1} \wedge t} - X_{T_i \wedge t})^p = [X]_t,$$

(ucp-Konvergenz) sowie

$$\Delta^- [X]_t = (\Delta^- X_t)^p \quad \text{und} \quad \Delta^+ [X]_t = (\Delta^+ X_t)^p \quad \text{f.s.}$$

Da der folgende Satz 5.5 die größtmögliche Allgemeinheit des Satzes 6.8 ermöglicht, wird einiger Aufwand betrieben, um ihn zu beweisen.

Satz 5.5. *Ein vorhersehbarer Prozess mit nicht explodierender quadratischer Variation im Sinne der Definition 5.3 ist $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$.*

Der Satz ist offenbar ein Korollar des allgemeineren

Satz 5.6. *Sei X ein optionaler Prozess. Dann ist $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \text{ ist } \text{l\`a}g\text{l\`a}d\} \in \mathcal{F}$. Wenn X für ein $p > 0$ nicht explodierende p -Variation im Sinne der Definition 5.3 besitzt, dann ist $\mathbb{P}[X(\omega) \text{ ist } \text{l\`a}g\text{l\`a}d] = 1$.*

Im Beweis des Satzes werden die zwei folgenden Lemmata verwendet.

Lemma 5.7. *Eine Funktion $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$, genau dann, wenn ein $M > 0$ existiert, so dass für alle $l \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ Punkte $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l < T$ existieren mit $|s_k - s_{k-1}| \leq \delta$ und $|x_{s_k} - x_{s_{k-1}}|^p \geq M$ für $k = 1, \dots, l$.*

Wie der Beweis zeigt, gilt die Äquivalenz auch ohne die Bedingung $|s_k - s_{k-1}| \leq \delta$, aber für den Beweis des Satzes 5.6 wird das Lemma in dieser Form

benötigt.

Beweis von Lemma 5.7.

„ \Rightarrow “: Klar.

„ \Leftarrow “: Sei $M > 0$ so dass, für alle $l \in \mathbb{N}$ $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l < T$ existieren mit $|x_{s_k} - x_{s_{k-1}}|^p \geq M$ für $k = 1, \dots, l$. Da T endlich ist, folgt daraus die Existenz einer Quadrupelfolge $((s_{1,k}, s_{2,k}, s_{3,k}, s_{4,k}))_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_{1,k} < s_{2,k} < s_{3,k} < s_{4,k}, \quad |s_{2,k} - s_{1,k}| \leq \frac{1}{k}, \quad |s_{3,k} - s_{2,k}| \leq \frac{1}{k}, \quad |s_{4,k} - s_{3,k}| \leq \frac{1}{k}$$

und $|x_{s_{2,k}} - x_{s_{1,k}}|^p \geq M, |x_{s_{3,k}} - x_{s_{2,k}}|^p \geq M, |x_{s_{4,k}} - x_{s_{3,k}}|^p \geq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Da $[0, T]$ kompakt ist, besitzt die Quadrupelfolge eine Teilfolge derart, dass alle Quadrupelkomponenten gegen ein $s^* \in [0, T]$ konvergieren. Für diese gilt, dass für unendlich viele k $s_{2,k} < s^*$ oder für unendlich viele k $s_{3,k} > s^*$ ist. Wegen $s_{1,k} < s_{2,k}$ und $|x_{s_{2,k}} - x_{s_{1,k}}|^p \geq M$ würde ersteres der Existenz des Linkslimes von x an der Stelle s^* widersprechen. Letzteres würde der Existenz des Rechtslimes von x an der Stelle s^* widersprechen. \square

Lemma 5.8. *Sei eine Funktion $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\eta > 0$ und $\delta > \eta$ gegeben. Eine endliche aufsteigende Folge von Punkten t_0, t_1, \dots, t_i aus $[0, T]$ heie geeignet, wenn $t_0 = 0, t_i = T$ und folgendes gilt: Wenn $B_j \neq \emptyset$ dann ist $t_j \in B_j$ und wenn $B_j = \emptyset$, dann ist $t_j = (t_{j-1} + 3\delta + \frac{\eta}{2}) \wedge T$, wobei*

$$B_j = \left\{ t \in [t_{j-1} + \frac{\eta}{2}, (t_j + \frac{\eta}{2}) \wedge T : |x_t - x_{t_{j-1}}|^p \geq \frac{M}{2^p} \right\}$$

und $u_j = \inf \left\{ t \geq t_{j-1} + \frac{\eta}{2} : |x_t - x_{t_{j-1}}|^p \geq \frac{M}{2^p} \right\} \wedge (t_{j-1} + 3\delta) \wedge T, j = 1, \dots, i$.

Es gibt geeignete endliche Folgen und einjede erfüllt

$$|t_j - t_{j-1}| \leq 4\delta, \quad j = 1, \dots, i, \quad (5.1)$$

und

$$\text{wenn } t_j < T, \text{ dann } t_j \geq t_{j-1} + \frac{\eta}{2}, \quad j = 1, \dots, i. \quad (5.2)$$

Ist die Funktion x hinreichend variant, genauer, gibt es Punkte

$$0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l < T$$

mit

$$\eta \leq |s_j - s_{j-1}| \leq \delta \quad \text{und} \quad |x_{s_j} - x_{s_{j-1}}|^p \geq M \quad \text{für } j = 1, \dots, l, \quad (5.3)$$

dann erfüllt jede geeignete Folge t_1, t_2, \dots, t_i

$$\sum_{j=1}^i |x_{t_j} - x_{t_{j-1}}|^p \geq \frac{M}{2^p} \left[\frac{l}{4} \right], \quad (5.4)$$

wobei $[r] := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n \leq r\}$.

Beweis von Lemma 5.8. Es gibt geeignete Folgen: t_0, t_1, \dots können mit $t_0 = 0$ beginnend rekursiv konstruiert werden und nach endlich vielen Schritten ist T erreicht. Jede geeignete Folge erfüllt wegen $\eta \leq \delta$ offenbar (5.1) und (5.2).

Sei nun $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l < T$ eine (5.3) erfüllende Folge.

Schritt 1. Sei $l = 4$. Sei j_0 derart, dass $t_{j_0} < s_1 \leq t_{j_0+1}$.

Fall 1: $s_1 < t_{j_0} + \frac{\eta}{2}$. Dann gilt

$$t_{j_0} + \frac{\eta}{2} \leq s_2 < s_3 \leq (t_{j_0} + 3\delta) \wedge T. \quad (5.5)$$

Außerdem, wegen $|x_{s_3} - x_{s_2}|^p \geq M$, ist $|x_{s_2} - x_{t_{j_0}}|^p \geq M2^{-p}$ oder $|x_{s_3} - x_{t_{j_0}}|^p \geq M2^{-p}$. Daraus folgt, dass $u_{j_0+1} \leq s_3$ und nach (5.5) $B_{j_0+1} \neq \emptyset$ ist. Daher gilt $|x_{t_{j_0+1}} - x_{t_{j_0}}|^p \geq M2^{-p}$ (s. oberes Bild in Abb. 5.1).

Fall 2: $s_1 \geq t_{j_0} + \frac{\eta}{2}$. Falls $s_2 \leq t_{j_0} + 3\delta$ kann wie im Fall 1 argumentiert werden, mit s_1, s_2 statt s_2, s_3 die (1.5) erfüllen. Andernfalls ist $B_{j_0+1} \neq \emptyset$, fertig, oder $t_{j_0+1} + \frac{\eta}{2} \leq s_3 < s_4 \leq t_{j_0+1} + 3\delta$ und es kann wie in Fall 1 mit s_3, s_4, t_{j_0+1} anstelle von s_2, s_3, t_{j_0} argumentiert werden (s. unteres Bild in Abb. 5.1).

Schritt 2. Es werde nun (5.4) für beliebige $l \in \mathbb{N}$ bewiesen: Wenn $l \geq 5$, dann gibt es nach Schritt 1 ein $t_j \leq s_4 + \frac{\eta}{2}$ so, dass die Variation bis zu diesem t_j mindestens $M2^{-p}$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass die Variation auf $[t_j, T]$ mindestens $M2^{-p}(\lceil \frac{l}{4} \rceil - 1)$ ist. Da $s_5 > s_4 + \frac{\eta}{2} \geq t_j$ ist, stehen die Punkte $s_5, \dots, s_l \in (t_j, T)$ zur Verfügung, und die Behauptung folgt durch

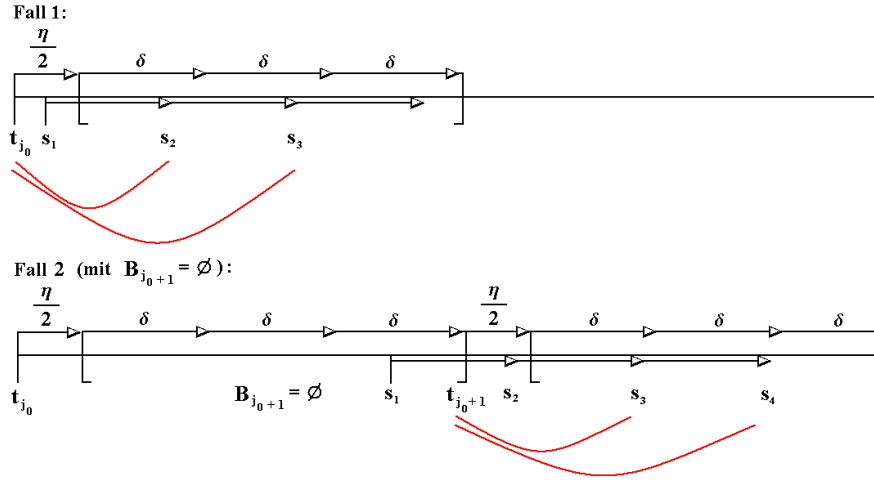


Abbildung 5.1: Kombinatorische Möglichkeiten

Induktion über $\lfloor \frac{l}{4} \rfloor$.

□

Beweis von Satz 5.6.

Schritt 1. Nach Lemma 5.7 gilt

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \text{ ist nicht } \text{\textcircled{a}}\text{\textcircled{a}}\text{\textcircled{a}}\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{m,l,n,k}, \quad (5.6)$$

wobei

$$A_{m,l,n,k} := \{\omega \in \Omega : \exists 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_l < T \text{ mit } \frac{1}{k} \leq |s_i - s_{i-1}| \leq \frac{1}{n} \\ \text{und } |X_{s_i}(\omega) - X_{s_{i-1}}(\omega)|^p \geq \frac{1}{m} \text{ f\"ur } i = 1, \dots, l\}.$$

Da X optional ist, ist es $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$ - \mathcal{B} -messbar. Daher ist die Abbildung $(\omega, s, t) \mapsto (X_s(\omega), X_t(\omega))$ $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}^2)$ - \mathcal{B}^2 -messbar. Da die Abbildung $(x, y) \mapsto$

$|y - x|^p$ stetig ist, ist sie (\mathcal{B}^2) - \mathcal{B} -messbar, und damit ist die Hintereinanderausführung $(\omega, s, t) \mapsto |X_t(\omega) - X_s(\omega)|^p$ $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}^2)$ - \mathcal{B} -messbar. Es folgt daraus, dass die Abbildung

$$(\omega, s_1, \dots, s_l) \mapsto (|X_{s_2}(\omega) - X_{s_1}(\omega)|^p, \dots, |X_{s_l}(\omega) - X_{s_{l-1}}(\omega)|^p)$$

(\mathcal{B}^l) - \mathcal{B}^l -messbar ist und man erhält, dass die Menge

$$\left\{ (\omega, s_1, \dots, s_l) : \frac{1}{k} \leq |s_i - s_{i-1}| \leq \frac{1}{n}, |X_{s_i}(\omega) - X_{s_{i-1}}(\omega)|^p \geq \frac{1}{m}, i = 2, \dots, l \right\}$$

ein Element aus $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}^l$ ist. Da \mathcal{F} vollständig ist, ist die Projektion einer Menge aus $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}^l$ auf Ω eine Menge aus \mathcal{F} (s. Dellacherie und Meyer [23], Th. III-13 (3), S. 43 i.V.m. Th. III-33 (a), S. 58). Das bedeutet, dass $A_{m,l,n,k} \in \mathcal{F}$ und daher mit (5.6) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \text{ ist } \text{l\`a}g\text{l\`a}d\} \in \mathcal{F}$ ist.

Schritt 2. X besitze eine nicht explodierende p -Variation. Die zum Widerspruch zu f\`uhrende Annahme ist, dass

$$\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \text{ ist nicht } \text{l\`a}g\text{l\`a}d\}] > 0$$

gilt. Es wird nun eine Menge positiver Wahrscheinlichkeit und eine Stoppzeitenzerlegungsfolge $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|\tilde{T}_j^i - \tilde{T}_{j-1}^i| \leq \frac{1}{i}$ konstruiert, derart, dass die p -Variation von X entlang $\tilde{\tau}_i$ auf dieser Menge i \u00fcbertrifft. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\mathbb{P}[\bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{m,l,n,k}] =: r > 0$ ist. F\u00fcr gegebenes i werde $n = n(i) = 4i$ und $l = l(i)$ so gro\u00df gew\u00e4hlt, dass

$$\frac{1}{2^p m} \left[\frac{l(i)}{4} \right] \geq i$$

gilt. W\u00e4hle $k = k(i) \in \mathbb{N}$ so, dass $k(i) > 4i$ und

$$\mathbb{P} \left[\bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{m,l,n,k} \setminus A_{m,l(i),n(i),k(i)} \right] \geq r 2^{-(i+2)}.$$

Wenn die Stoppzeit T_{j-1}^i schon bestimmt ist, dann werde

$$U_j^i := \inf \left\{ t \geq T_{j-1}^i + \frac{1}{2k} : |X_t - X_{T_{j-1}^i}|^p \geq \frac{1}{2^p m} \right\} \wedge (T_{j-1}^i + \frac{3}{4i}) \wedge T$$

und

$$\Gamma_j^i := \left\{ (\omega, t) : T_{j-1}^i(\omega) + \frac{1}{2k} \leq t \leq (U_j^i(\omega) + \frac{1}{2k}) \wedge T, \right. \\ \left. |X_t(\omega) - X_{T_{j-1}^i(\omega)}(\omega)|^p \geq \frac{1}{2^p m} \right\}$$

definiert. $X_{T_{j-1}^i}$ ist $\mathcal{F}_{T_{j-1}^i}$ -messbar, da X optional ist (s. Theorem 3.12 in He, Wang und Yan [46]). Daher ist U_j^i das Debut einer optionalen Menge und damit eine Stoppzeit im weiteren Sinne (s. [46], Theorem 4.30). Daraus folgt, dass $U_j^i + \frac{1}{2k}$ eine Stoppzeit und Γ_j^i eine optionale Menge ist. Aus technischen Gründen werde nun noch die $\Omega \times [0, T]$ -Teilmenge

$$\tilde{\Gamma}_j^i := \left(\Gamma_j^i \cap (\Omega \times [0, T]) \right) \cup \left(((\Omega \setminus \pi_\Omega(\Gamma_j^i)) \times [0, T]) \cap \left[(T_{j-1}^i + \frac{3}{4i} + \frac{1}{2k}) \wedge T \right] \right),$$

wobei $\pi_\Omega(\Gamma_j^i)$ die Projektion der Menge $\Gamma_j^i \subseteq \Omega \times [0, T]$ auf Ω bezeichnet, definiert. Auch $\tilde{\Gamma}_j^i$ ist optional. Nun werden $[0, T]$ -wertige Stoppzeiten T_0^i, T_1^i, \dots wie folgt rekursiv definiert: $T_0^i := 0$. Nach einem Schnitttheorem für optionale Mengen (s. Theorem 4.7 in [46]), existiert eine $[0, T]$ -wertige Stoppzeit T_j^i mit $\mathbb{P}[T_j^i < T] \geq \mathbb{P}[\pi(\tilde{\Gamma}_j^i)] - r2^{-(i+j+2)}$ so, dass

$$(\omega, T_j^i(\omega)) \in \tilde{\Gamma}_j^i \quad \text{für alle } \omega \text{ mit } T_j^i(\omega) < T. \quad (5.7)$$

Definiere $B_{i,j} := \{T_j^i < T\} \cup (\Omega \setminus \pi_\Omega(\tilde{\Gamma}_j^i))$. Es folgt, dass

$$\mathbb{P}[B_{i,j}] \geq 1 - r2^{-(i+j+2)}.$$

Sei $\omega \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_{i,j}$, d.h. für jedes j ist $T_j^i(\omega) < T$ oder $\omega \notin \pi_\Omega(\tilde{\Gamma}_j^i)$. Im Fall, dass $T_j^i(\omega) < T$ ist, folgt aus (5.7), dass $(\omega, T_j^i(\omega)) \in \tilde{\Gamma}_j^i$ ist, wenn $\omega \in \pi_\Omega(\tilde{\Gamma}_j^i)$ und $T_j^i(\omega) = T_{j-1}^i(\omega) + \frac{3}{4i} + \frac{1}{2k}$, wenn $\omega \notin \pi_\Omega(\tilde{\Gamma}_j^i)$. Im Fall, dass $\omega \notin \pi_\Omega(\tilde{\Gamma}_j^i)$ ist, folgt nach (5.7) $T_j^i(\omega) = T$ und $(\omega, T) \in \Gamma_j^i$ oder $((\omega, T) \notin \Gamma_j^i$ und $(T_{j-1}^i(\omega) + \frac{3}{4i} + \frac{1}{2k}) \wedge T = T)$.¹ Dies zeigt, dass $T_0^i(\omega), T_1^i(\omega), \dots$ eine geeignete

¹Dass nur diese letzte Alternative gelten kann, lässt sich unter Beachtung der beiden Glieder der $\tilde{\Gamma}_j^i$ definierenden Vereinigung erkennen: Ist nämlich $T_{j-1}^i(\omega) + \frac{3}{4i} + \frac{1}{2k} = t^* < T$ (*), dann ist erstens der ω -Schnitt $\Gamma_j^i(\omega)$ im Hinblick auf die Definition von Γ_j^i und U_j^i von rechts durch $t^* < T$ beschränkt. Zweitens erzwingt die Voraussetzung $\omega \notin \pi_\Omega(\tilde{\Gamma}_j^i)$ zusammen mit (*) im Hinblick auf das zweite Glied in der $\tilde{\Gamma}_j^i$ definierenden Vereinigung $\omega \notin \Omega \setminus \pi_\Omega(\Gamma_j^i)$, also $\omega \in \pi_\Omega(\Gamma_j^i)$. Erstes und zweites zusammen ergeben die Existenz eines $t^{**} \leq t^* < T$, so dass $(\omega, t^{**}) \in \Gamma_j^i$, also $(\omega, t^{**}) \in \Gamma_j^i \cap (\Omega \times [0, T])$. Im Hinblick auf das Vorderglied der $\tilde{\Gamma}_j^i$ definierenden Vereinigung ein Widerspruch zu $\omega \notin \tilde{\Gamma}_j^i$.

Folge im Sinne des Lemmas 5.8 für die Parameter $M = \frac{1}{m}$, $l = i$, $\eta = \frac{1}{k}$ und $\delta = \frac{1}{4i}$ ist. Denn die ω -Schnitte der Γ_j^i korrespondieren den B_j und $(T_{j-1}^i(\omega) + \frac{3}{4i} + \frac{1}{2k}) \wedge T$ korrespondiert $(t_{j-1} + 3\delta + \frac{\eta}{2}) \wedge T$ im Lemma 5.8. (5.2) besagt, dass spätestens nach $[2kT] + 1$ Schritten, unabhängig von ω , T erreicht ist. Falls $\omega \notin \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_{i,j}$, dann wird T im Hinblick auf (5.7) ebenfalls nach $[2kT] + 1$ Schritten erreicht. Um für alle ω zu garantieren, dass benachbarte Punkte höchstens $\frac{1}{i}$ von einander entfernt sind, werden schließlich Stoppzeiten $\tilde{T}_0^i, \tilde{T}_1^i, \dots, \tilde{T}_{[2kT]+1}^i$ rekursiv wie folgt definiert: $\tilde{T}_0^i := 0$. Ist \tilde{T}_{j-1}^i schon definiert, dann definiere $\tilde{T}_j^i := T_j^i \wedge (\tilde{T}_{j-1}^i + \frac{1}{i})$. Nach (5.1) gilt $\tilde{T}_k^i = T_k^i$ auf der Menge $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_{i,j}$. Daher gilt $|\tilde{T}_j^i - \tilde{T}_{j-1}^i| \leq \frac{1}{i}$ und dass für $\omega \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_{i,j}$ die Folge $\tilde{T}_0^i(\omega), \tilde{T}_1^i(\omega), \dots, \tilde{T}_{[2kT]+1}^i(\omega)$ geeignet im Sinne des Lemmas 5.8 ist.

Sei $\omega \in A_{m,l(i),n(i),k(i)} \cap \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_{i,j}$. Die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ erfüllt (5.3) mit den Parametern $M = \frac{1}{m}$, $l = i$, $\eta = \frac{1}{k}$ und $\delta = \frac{1}{4i}$. Es folgt daher aus Lemma 5.8, dass

$$\sum_{j=1}^{[2kT]+1} |X_{\tilde{T}_j^i(\omega)}(\omega) - X_{\tilde{T}_{j-1}^i(\omega)}(\omega)|^p \geq \frac{1}{2^p m} \left\lfloor \frac{l}{4} \right\rfloor \geq i, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left[\limsup_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^{[2k(i)T]+1} |X_{\tilde{T}_j^i} - X_{\tilde{T}_{j-1}^i}|^p = \infty \right] \\ & \geq \mathbb{P} \left[\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \left(A_{m,l(i),n(i),k(i)} \cap \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_{i,j} \right) \right] \\ & \geq r - r \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-(i+2)} - r \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(i+j+2)} = \frac{r}{2} > 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit $|\tilde{T}_j^i - \tilde{T}_{j-1}^i| \leq \frac{1}{i}$ widerspricht dies der Voraussetzung, dass X nicht explodierende p -Variation besitzt. $\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \text{ ist } \text{\texttt{l\`a}gl\`a}d\}] = 1$ ist daher richtig. \square

5.2 Nicht-lineare Integratoren

Bekanntlich sind die Itô-Integrale $\int_0^t \theta dX_s$ Semimartingale, wenn θ vorhersehbar und X -integrierbar (z.B. lokal beschränkt) und X Semimartingal ist.² Zum Nachweis der (Semimartingal-)Existenz des Itô-Integrals eines vorhersehbaren Prozesses θ_t bezüglich eines Kerns (einer Familie) $Y(\vartheta, t)$ werden zusätzliche Voraussetzungen an die Regularität der Familie zu stellen sein, etwa in Form der Existenz eines „Kontrollprozesses“ ähnlich der „control“-Funktion bei Lyons und Qian³ oder des „control process“ bei Métivier⁴ (vgl. unten Def. 5.10).

Christoph Kühn verallgemeinert in *Nonlinear Stochastic Integration with a Nonsmooth Family of Integrators*⁵ die nicht-lineare stochastische Integration (vgl. Kunita [58] und Carmona und Nualart [13]). Ausgegangen wird von dem elementaren nicht-linearen Integral bezüglich einer Familie von Semimartingalen, die im elementaren Fall nur wenig zusätzliche Struktur benötigt, um noch sinnvoll zu sein: $(X(\vartheta, \cdot))_{\vartheta \in \mathbb{R}}$ sei eine Semimartingalfamilie derart, dass die Abbildung $(\vartheta, \omega, t) \mapsto X(\omega, \vartheta, t)$ $(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{O})$ -messbar ist, wobei \mathcal{O} die optionale Sigma-Algebra auf $\Omega \times [0, T]$ bezeichnet.

Definition 5.9. Sei X Semimartingalfamilie wie oben. Für einen einfach vorhersehbaren reellwertigen Prozess $\theta = \sum_{k=1}^n H^{k-1} 1_{(T_{k-1}, T_k]}$, mit $n \in \mathbb{N}$, Stoppzeiten

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n = T$$

und $H^{k-1} \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_{T_{k-1}}, \mathbb{P})$, der nur endlich viele Werte annimmt, heißt der Prozess

$$t \mapsto \int_0^t X(\theta_s, ds) := \sum_{k=1}^n X(H^{k-1}, t \wedge T_k) - X(H^{k-1}, t \wedge T_{k-1})$$

das Elementarintegral von θ bezüglich X .

Es bezeichne \mathcal{S}_0 die Menge aller einfach vorhersehbaren reellwertigen Prozesse und \mathcal{S} die Menge aller dieser Prozesse, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen.

²S. z.B. Protter [75], S. 59 und S. 163.

³S. [63], Def. auf S. 16. Vgl. auch Def. 3.1.2, S. 31.

⁴S. [70], Th. 23.9, S. 154.

⁵S. [56].

Definition 5.10 (Zahmer Integrator). *Sei X Semimartingalfamilie, die eine Zerlegung $X = M + V$ besitzt, wobei die $M(\vartheta)$ càdlàg quadratintegrierbare Martingale und die $V(\vartheta)$ càdlàg vorhersehbare FV-Prozesse sind.⁶ X heißt zahmer Integrator, wenn es zu jedem $K > 0$ eine Familie vorhersehbarer rechtsstetiger nicht fallender integrierbarer Prozesse $\{A_{K,\epsilon} : \epsilon \in (0, 2K]\}$ gibt mit $A_{K,\epsilon}(0) = 0$, so dass für $|x|, |y| \leq K$, $|x - y| \leq \epsilon$ und alle $0 \leq s < t \leq T$ bis auf Ununterscheidbarkeit*

$$\langle M(x) - M(y) \rangle_t - \langle M(x) - M(y) \rangle_s + |V(x) - V(y)|_{\text{var}}((s, t]) \leq A_{K,\epsilon}(t) - A_{K,\epsilon}(s)$$

gilt, und

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{E}[A_{K,\epsilon}(T)] = 0$$

ist.

Definition 5.11. *Sei X zahmer Integrator mit der Doppelfamilie der nicht fallenden Prozesse $\{A_{K,\epsilon}\}$. Für $K > 0$ bezeichne \mathbb{A}^K das endliche Maß auf der vorhersehbaren σ -Algebra \mathcal{P} auf $\Omega \times [0, T]$, das durch seine Festlegung auf den stochastischen Rechtecken durch $\mathbb{A}^K(\llbracket S_1, S_2 \rrbracket) := \mathbb{E}[A_{K,2K}(S_2) - A_{K,2K}(S_1)]$ bestimmt ist.⁷*

In Teil (I) des Beweises des nächsten Satzes wird gezeigt, dass ein zahmer Integrator im Wesentlichen die Eigenschaften eines stetigen nicht-linearen Integrators im Sinne Kühns Definition eines rechtsstetigen nicht-linearen Integrators hat. Mit dieser Definition geht Kühn in [56] über die Stetigkeitsvoraussetzungen in Kunita [58] und Carmona und Nualart [13] hinaus.⁸

⁶Da es sich bei den $X(\vartheta)$ dann um spezielle Semimartingale handelt, ist die Zerlegung von $X(\vartheta)$ eindeutig bis auf Ununterscheidbarkeit (es wird nicht benötigt, dass die Ausnahmemenge von ϑ unabhängig ist).

⁷Zunächst erzeugt $A_{K,2K}$ ein Zufallsmaß i.S.v. Jacod und Shiryaev [48], Definition 1.3, S. 65. Da $A_{K,2K}$ vorhersehbar ist, ist es auch das zugehörige Maß i.S.v. Definition 1.6, S. 66 (Beispiel 1.7, S. 66). Es induziert ein Maß auf \mathcal{P} , das durch die Werte auf einem durchschnittsstabilen Erzeuger, wie dem der stochastische Intervalle, festgelegt ist. Einem aufsteigenden adaptierten càdlàg Prozess A ist auf diese Weise immer ein zulässiges Maß μ_A auf $([0, T] \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{F})$ zugeordnet (vgl. auch Métivier [70], S. 22). Es ist vorhersehbar und damit ein Maß auf \mathcal{P} , wenn A vorhersehbarer aufsteigender càdlàg Prozess ist.

⁸Die Möglichkeit der Unstetigkeit entlang des Ortsparameters, die Kühns Ansatz eröffnet, werden nicht benötigt. Dafür aber die Loslösung von der Stetigkeit des Integrators entlang der Zeit und von càglàd Integranden.

Wie in Kühn [56] werden folgende Bezeichnungen und Feststellungen verwendet: Es bezeichne $(b\mathcal{P})_{\text{loc}}$ (bzw. $(b^+\mathcal{P})_{\text{loc}}$) die Menge der \mathbb{R} -wertigen (bzw. \mathbb{R}_+ -wertigen) lokal-beschränkten vorhersehbaren Prozesse. Für càdlàg Prozesse X und Y wird durch die Metrik

$$d(X, Y) := \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |X_t - Y_t| \wedge 1 \right]$$

die Konvergenz „Gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit“ metrisiert. Eine Abbildung $I : (b\mathcal{P})_{\text{loc}} \rightarrow \{\text{càdlàg-Prozesse}\}$ heißt *zeitadditiv*, wenn für $H^1, H^2 \in (b\mathcal{P})_{\text{loc}}$, $A \in \mathcal{P}$ mit $A^c := \Omega \times [0, T] \setminus A$ bis auf Ununterscheidbarkeit gilt:

$$I(H^1 1_A + H^2 1_{A^c}) + I(H^2 1_A + H^1 1_{A^c}) = I(H^1) + I(H^2). \quad (5.9)$$

Wenn I linear ist, dann ist (5.9) erfüllt. Wenn H^1, H^2 und A simpel sind, dann erfüllt das elementare nicht-lineare Integral ebenfalls (5.9).

Satz 5.12 (Fortsetzung. Stetigkeit. Dominierte Konvergenz). *Das elementare Integral eines zahmen Integrators X besitzt eine bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutige Fortsetzung zu einem Funktional f*

$$(b\mathcal{P})_{\text{loc}} \rightarrow \{Y : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} : Y \text{ ist Semimartingal}\},$$

das (i) zeitadditiv ist und (ii) die folgende Aussage von der dominierten Konvergenz erfüllt: Für alle $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (b\mathcal{P})_{\text{loc}}$ mit $|\theta^n| \leq \Theta \in (b^+\mathcal{P})_{\text{loc}}$ und $\theta \in (b\mathcal{P})_{\text{loc}}$, gilt, dass aus

$$\theta^n \rightarrow \theta \text{ punktweise auf } \Omega \times [0, T]$$

folgt, dass $\int_0^\cdot X(\theta_s^n, ds)$ ucp gegen $\int_0^\cdot X(\theta_s, ds)$ konvergiert.

Beweis. (I) Sei X zahmer Integrator i.S.d. Definition 5.10. Sei $(\theta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge einfach vorhersehbarer Prozesse die jeweils nur endlich viele Werte annehmen, und sei $\theta \in (b\mathcal{P})_{\text{loc}}$. Es gebe $\Theta \in (b^+\mathcal{P})_{\text{loc}}$ derart, dass für alle n die Beschränkung $|\theta^n| \leq \Theta$ gilt. Für $K \in \mathbb{R}_+$ sei $\bar{\theta} := \text{Median}(-K, \theta, K)$ und $\bar{\theta}^n := \text{Median}(-K, \theta^n, K)$. Für alle $K \in \mathbb{R}_+$ gelte: $\bar{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$ \mathbb{A}^K -f.s.

Dann ist die Folge der Elementarintegrale $(\int_0^\cdot X(\theta_s^n, ds))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Metrik d .

Der Beweis dieser Aussage wird in die Abschnitte (i) – (viii) untergliedert. Sei $\epsilon > 0$.

(i) Als vorhersehbarer Prozess ist Θ insbesondere $((\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}), \mathcal{B})$ -messbar. Die Projektion einer Menge aus $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{B})$ auf Ω ist \mathcal{F} -messbar, da \mathcal{F} vollständig ist.⁹ Daher gilt für den Supremumsprozess $\Theta_t^* := \sup_{s \leq t} \Theta_s$, dass, wenn $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \Omega$ die Projektionsabbildung bezeichnet,

$$\{\omega \in \Omega : \Theta_t^* > K\} = \pi_\Omega(\{(s, \omega) : s \leq t, \Theta_s > K\})$$

\mathcal{F} -messbar ist. Insbesondere ist Θ_T^* Zufallsvariable, und damit ist, da Θ lokal beschränkt ist, $K > 0$ so groß wählbar, dass

$$\mathbb{P}[\Theta_T^* \geq K] < \frac{\epsilon}{2} \quad (5.10)$$

ist.

(ii) Sei $\tilde{\epsilon} > 0$ so, dass $\mathbb{E}[A_{K, \tilde{\epsilon}}(T)] \leq \epsilon' := \frac{(\epsilon/2)^2}{8}$ ist. Da die \mathbb{A}^K -fast sichere Konvergenz die Konvergenz in \mathbb{A}^K -Maß nach sich zieht, gibt es eine natürliche Zahl \tilde{n} derart, dass für alle n und m die größer als \tilde{n} sind, gilt, dass mit

$$\Gamma^{n,m} := \{|\bar{\theta}^n - \bar{\theta}^m| \leq \tilde{\epsilon}\} \supseteq \{|\bar{\theta}^n - \bar{\theta}| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\} \cap \{|\bar{\theta}^m - \bar{\theta}| \leq \frac{\tilde{\epsilon}}{2}\}$$

$\mathbb{A}^K[\Gamma^{n,m}] < \epsilon'$ gilt. ($\Gamma^{n,m}$ ist eine vorhersehbare Menge; aufgrund der Simplität der $\bar{\theta}^k$ Vereinigung stochastischer Rechtecke.)

Es soll gezeigt werden, dass für n und m die größer als \tilde{n} sind gilt:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t M(\theta_s^n, ds) - \int_0^t M(\theta_s^m, ds) \right| \wedge 1 \right] \leq \epsilon.$$

Wegen (5.10) folgt mit der Doobschen Ungleichung zunächst

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t M(\theta_s^n, ds) - \int_0^t M(\theta_s^m, ds) \right| \wedge 1 \right] \\ & \leq \mathbb{P}[\Theta_T^* \geq K] + \left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t M(\bar{\theta}_s^n, ds) - \int_0^t M(\bar{\theta}_s^m, ds) \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M(\bar{\theta}_s^n, ds) - \int_0^T M(\bar{\theta}_s^m, ds) \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

⁹Vgl. die Argumentation auf S. 60 im Beweis des Satzes 5.6.

(iii)

(1) Gibt es für zwei gegebene rechtsstetige quadratintegrierbare Martingale M und N mit $M_0 = N_0 = 0$ auf $\Omega \times [0, T]$ eine Partition in stochastische Rechtecke derart, dass auf jedem stochastischen Rechteck M oder N konstant ist, dann sind M und N stark orthogonal¹⁰ in dem Sinn, dass MN auch ein Martingal ist. Denn

$$[M, N] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i (M^{T_{i+1}^n} - M^{T_i^n})(N^{T_{i+1}^n} - N^{T_i^n})$$

wenn $((T_i^n))$ eine feine Stoppzeitenzerlegungsfolge auf $[0, T]$ ist, von der angenommen werden kann und soll, dass sie die Stoppzeiten, die die stochastischen Rechtecke definieren, enthalten. Da die Martingale rechtsstetig sind, folgt, dass wegen der Konstanz von M oder N immer eine der beiden Klammern gleich Null ist, woraus $[M, N] = 0$ und daraus folgt, dass M und N stark orthogonal sind,¹¹ also insbesondere $\mathbb{E}[N_T M_T] = 0$ gilt.

Durch sukzessives Abtrennen von einer Summe von mehreren Martingalen lässt sich aus (1) folgern:

(2) Sind rechtsstetige quadratintegrierbare Martingale M_1, \dots, M_k gegeben mit der Eigenschaft, dass auf den stochastischen Rechtecken einer Partition wie in (1) höchstens eines der Martingale nicht konstant ist, dann sind sie paarweise stark orthogonal.

(iv) Ist θ einfach vorhersehbar, dann ist $\int M(\theta_s, ds)$ quadratisch integrierbares Martingal, wenn M eine Familie quadratisch integrierbarer Martingale ist,¹² wie M in der Definition 5.10 des zahmen Integrators. Die beiden Martingale

$$\int_0^\cdot M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n)_s, ds) - \int_0^\cdot M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m)_s, ds)$$

und

$$\int_0^\cdot M((1_{\Gamma^{n,m}c} \bar{\theta}^n)_s, ds) - \int_0^\cdot M((1_{\Gamma^{n,m}c} \bar{\theta}^m)_s, ds)$$

¹⁰Vgl. Protter [75], Definition auf S. 179.

¹¹Gemäß den Erörterungen, die auf die zweite Definition auf S. 179 in [75] folgen.

¹²Vgl. Kunita [58], Beweis von Lemma 3.2.1, S. 80 f.

sind stark orthogonal.¹³ Daher gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M(\bar{\theta}_s^n, ds) - \int_0^T M(\bar{\theta}_s^m, ds) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n)_s, ds) + \int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}^c} \bar{\theta}^n)_s, ds) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m)_s, ds) - \int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}^c} \bar{\theta}^m)_s, ds) \right)^2 \right] \quad (5.12) \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n)_s, ds) - \int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m)_s, ds) \right)^2 \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}^c} \bar{\theta}^n)_s, ds) - \int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}^c} \bar{\theta}^m)_s, ds) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

(v) Der Prozess $1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n$ nimmt die endlich vielen Werte $x^1, x^2, \dots, x^i, \dots$, der Prozess $1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m$ die endlich vielen Werte $y^1, y^2, \dots, y^j, \dots$ an.

Nach der Zeitadditivität (5.9) lässt sich nun (2) aus (iii) anwenden, so

¹³Sie erfüllen wegen $\Gamma^{n,m} \cap \Gamma^{n,m^c} = \emptyset$ die Bedingung aus iii (1).

dass (zum Schluss unter Ausnutzung der Itô-Isometrie)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n)_s, ds) - \int_0^T M((1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m)_s, ds) \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i,j} \int_0^T M((1_{1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m = y^j} 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n)_s, ds) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T M((1_{1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m = y^j} 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m)_s, ds) \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M((1_{1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m = y^j} 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n)_s, ds) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T M((1_{1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m = y^j} 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m)_s, ds) \right)^2 \right] \tag{5.13} \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T 1_{1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m = y^j} d\{M(x^i) - M(y^j)\}_s \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^{n,m}} \bar{\theta}^m = y^j} d\langle M(x^i) - M(y^j) \rangle_s \right]
\end{aligned}$$

folgt.

(vi) (5.13) kann weiter abgeschätzt werden. Im Hinblick auf die Ungleichung $\langle M(x) - M(y) \rangle_t - \langle M(x) - M(y) \rangle_s \leq A_{K,\epsilon}(t) - A_{K,\epsilon}(s)$ in der Definition

5.10 des zahmen Integrators folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j} \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{1_{\Gamma^n, m} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^n, m} \bar{\theta}^m = y^j} d\langle M(x^i) - M(y^j) \rangle_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\int_0^T \sum_{i,j} 1_{1_{\Gamma^n, m} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^n, m} \bar{\theta}^m = y^j} d\langle M(x^i) - M(y^j) \rangle_s \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[\int_0^T \sum_{i,j} 1_{1_{\Gamma^n, m} \bar{\theta}^n = x^i, 1_{\Gamma^n, m} \bar{\theta}^m = y^j} dA_{K, \bar{\epsilon}}(s) \right] \tag{5.14} \\
&\leq \mathbb{E} \left[\int_0^T 1 dA_{K, \bar{\epsilon}}(s) \right] \\
&= \mathbb{E} [A_{K, \bar{\epsilon}}(T)] \\
&\leq \epsilon'.
\end{aligned}$$

(vii) Der Prozess $1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}^n$ nimmt die endlich vielen Werte $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$, der Prozess $1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}^m$ die endlich vielen Werte $y^1, y^2, \dots, y^l, \dots$ an. Es ergibt sich analog zu (5.13)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\left(\int_0^T M(1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}_s^n, ds) - \int_0^T M(1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}_s^m, ds) \right)^2 \right] \\
&= \sum_{k,l} \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}^n = x^k, 1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}^m = y^l} d\langle M(x^k) - M(y^l) \rangle_s \right]. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist durch

$$\begin{aligned}
& \sum_{k,l} \mathbb{E} \left[\int_0^T 1_{1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}^n = x^k, 1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}^m = y^l} d\langle M(x^k) - M(y^l) \rangle_s \right] \\
&\leq \sum_{k,l} \mathbb{A}^K \left[\{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] : 1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}_t^n(\omega) = x^k \text{ und } 1_{\Gamma^n, m \mathfrak{C}} \bar{\theta}_t^m(\omega) = y^l\} \right] \\
&= \mathbb{A}^K [\Gamma^n, m \mathfrak{C}] \\
&\leq \epsilon' \tag{5.16}
\end{aligned}$$

abschätzbar.

(viii) Aus dem Einsetzen von (5.14) in (5.13) in (5.12) und (5.16) in (5.15) in (5.12) sowie schließlich (5.12) in (5.11) ergibt sich

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t M(\theta_s^n, ds) - \int_0^t M(\theta_s^m, ds) \right| \wedge 1 \right] \leq \epsilon,$$

was gezeigt werden sollte. Ähnlich – aber einfacher, da keine Quadrierungen u.ä. erforderlich sind – ergibt sich auch

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t V(\theta_s^n, ds) - \int_0^t V(\theta_s^m, ds) \right| \wedge 1 \right] \leq \epsilon,$$

so dass sich $(\int_0^\cdot X(\theta_s^n, ds))_{n \in \mathbb{N}}$ als eine Cauchy-Folge bezüglich der die ucp-Topologie metrisierenden Metrik d erweist.

(II) Gemäß des Beispiels des Beweisganges in (I) bedeutet es keine Einschränkung davon auszugehen, dass Θ durch ein $K > 0$ beschränkt ist. Die in (I) bewiesene Aussage bedeutet dann mit $\mu = \mathbb{A}^K$, dass X ein *rechtsstetiger nichtlinearer Integrator* im Sinne von Kühn [56], Definition 2.3, S. 4, ist. Der Beweis des Satzes kann nun deshalb genauso weiter geführt werden, wie in [56], Beweis von Th. 2.7, S. 6 ff., wenn das dort vorkommende Maß μ durch das Maß \mathbb{A}^K ersetzt wird. \square

In Carmona und Nualart [13] werden nicht-lineare Integratoren durch die etwas schwächere Eigenschaft definiert, gleichmäßige Konvergenz in Wahrscheinlichkeit in ebensolche zu übertragen. Dafür, dass eine Semimartingalfamilie Integrator i.S.v. [13] ist, gibt es hinreichende Bedingungen, die „not too far from being necessary“¹⁴ sind. Wie man sieht, sind die Bedingungen auch nicht allzuviel schwächer als die, die den zahmen Integrator in obigem Sinne charakterisieren. Um die Verwandtschaft zu zeigen, sollen die beiden einschlägigen Sätze zitiert werden.

Es gelten folgende Charakterisierungen:¹⁵

¹⁴[13], S. 3. Die Einschätzung bezieht sich m.E. darauf, dass zu gegebenem Maß \mathbb{P} und einem \mathbb{P} -Semimartingal S ein äquivalentes Maß \mathbb{Q} gefunden werden kann, so dass S eine Zerlegung in ein quadratintegrierbares \mathbb{Q} -Martingal und einen vorhersehbaren FV-Prozess (\mathbb{Q} -integrierbarer Variation) besitzt (vgl. Memin [69]).

¹⁵S. [13], Th. II.4.2 und II.4.3, S. 58 ff.

Satz 5.13 (Carmona, Nualart, 1990). *Die Familie $V = \{V_t(x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$ habe die Eigenschaft, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ $\{V_t(x) : t \geq 0\}$ ein vorhersehbarer FV Prozess ist, so dass für jedes t $x \mapsto V_t(x)$ eine stetige Abbildung nach $L^1(\Omega, F, \mathbb{P})$ ist.*

Dann ist V ein starker nicht-linearer Integrator, genau dann wenn für jedes $K > 0$ ein $\epsilon_0(K) > 0$ existiert, so dass für jedes $\epsilon \in (0, \epsilon_0(K))$ ein vorhersehbarer integrierbarer nicht fallender Prozess $\{A_{K,\epsilon}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ mit $A_{K,\epsilon}(0) = 0$ existiert, so dass gilt:

$$|V(x) - V(y)|_{\text{var}}((s, t]) \leq A_{K,\epsilon}(t) - A_{K,\epsilon}(s)$$

für alle $0 \leq s < t \leq T$ und $|x - y| \leq \epsilon$ mit $|x|, |y| \leq K$ und

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{E}\{A_{K,\epsilon}(T)\} = 0.$$

Satz 5.14 (Carmona, Nualart, 1990). *M sei Familie quadratintegrierbarer Martingale so, dass die Abbildung $x \mapsto M_t(x)$ stetig nach $L^2(\Omega, F, \mathbb{P})$ (für jedes t) ist. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *M ist nicht-linearer L^2 -Integrator.*

(ii) *M ist starker nicht-linearer L^2 -Integrator.*

(iii) *Für jedes $K > 0$ existiert $\epsilon_0(K)$ so, dass für jedes $\epsilon \in (0, \epsilon_0(K))$ ein vorhersehbarer integrierbarer nicht fallender Prozess $\{A_{K,\epsilon}(t) : 0 \leq t \leq T\}$ mit $A_{K,\epsilon}(0) = 0$ existiert, so dass gilt:*

$$\langle M(x) - M(y) \rangle_t - \langle M(x) - M(y) \rangle_s \leq A_{K,\epsilon}(t) - A_{K,\epsilon}(s)$$

für alle $0 \leq s < t \leq T$ und $|x - y| \leq \epsilon$ mit $|x|, |y| \leq K$ und

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \mathbb{E}\{A_{K,\epsilon}(T)\} = 0.$$

Die zahmen Integratoren der Definition 5.10 sind also insbesondere starke Integratoren im Sinne von Carmona und Nualart [13]. In Prop. II.3.1, S. 47, wird dort für starke Integratoren noch eine weitere interessante Charakterisierung gegeben, die für eine càdlàg-Prozessfamilie Z besagt, dass Z genau dann starker Integrator ist, wenn (i) für jedes $t > 0$ und $K > 0$ die Menge

der Zufallsvariablen $\{\int_0^t Z(X_s, ds) : X \in \mathcal{S}, |X| \leq K\}$ beschränkt in Wahrscheinlichkeit ist¹⁶ und (ii) für jedes $t > 0$ die Abbildung $X \mapsto \int_0^t Z(X_s, ds)$ lokal gleichgradig stetig von \mathcal{S} (versehen mit der ucp-Topologie) in den Raum der Semimartingale (versehen mit der Semimartingaltopologie) ist.

Satz 5.15. *Sei X ein zahmer Integrator mit $X(0, t) = 0$ ($t \in [0, T]$), der im ersten Argument stetig ist. Sei A eine vorhersehbare Menge die in einer feinen Zerlegungsfolge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Sinn der Definition 5.2 enthalten ist. Nimmt der vorhersehbare Prozess H nur auf A Werte ungleich Null an, dann gilt*

$$t \mapsto \int_0^t X(H_s, ds) = t \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{T_i \in \tau_n} \Delta X(H_{T_i \wedge t}, T_i \wedge t)$$

bis auf Ununterscheidbarkeit.

Beweis. Die Stoppzeitenzerlegung τ_m enthalte die Stoppzeiten $T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_{l_m}$. Die durch

$$\tilde{T}_j(\omega) := \begin{cases} T_j(\omega), & \text{für } T_j(\omega) \in A, \\ T, & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

gegebenen Stoppzeiten $\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_{l_m}$ denen noch die feste Stoppzeit $\tilde{T}_{l_m+1} := T$ hinzugefügt werde, sind vorhersehbar. $H^m := 1_{\cup_{j=1}^{l_m+1} \llbracket \tilde{T}_j \rrbracket} H$ konvergiert punktweise gegen H . Die Stoppzeitenfolgen $(A_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ seien ankündigende Stoppzeiten der vorhersehbaren \tilde{T}_j , d.h. es gilt $\mathbb{P} [A_i^j < \tilde{T}_j, A_i^j \nearrow \tilde{T}_j \quad (i \rightarrow \infty)] = 1$.

Mit $\theta := H^m$, $\tilde{\theta}^n := \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{\{\theta \in ((k-1)/2^n, k/2^n]\}}$ sowie $K := n2^{n+1}$ und $\mu := \mathbb{A}^K$ lassen sich wie in Kühn, [56], S. 9, einfach vorhersehbare Prozesse θ^n konstruieren, die nur endlich viele Werte annehmen und für die $\mu(\theta^n \neq \tilde{\theta}^n) \leq \frac{1}{2^n}$ und

$$\theta^n \rightarrow \theta \text{ } \mu\text{-f.s.} \quad (5.17)$$

gilt. In [56] erfolgt die Konstruktion mittels stochastischer Intervalle $\Gamma_{k,n}$ die die vorhersehbaren Mengen

$$B_{k,n} := \begin{cases} \{\theta \in ((k-1)/2^n, k/2^n]\}, & \text{für } k = -n2^n, \dots, -1, 1, \dots, n2^n, \\ \{\theta \in ((-1/2^n, 0] \cup (-\infty, -(n2^n+1)/2^n] \cup (n, \infty))\}, & \text{für } k = 0, \end{cases}$$

¹⁶Also dass für jedes positive ϵ eine Schranke $M > 0$ existiert, so dass für jede der Zufallsvariablen die Wahrscheinlichkeit, dass sie betraglich größer als M ist, kleiner als ϵ ist.

μ -approximieren. Hier wird die Konstruktion analog, aber mittels

$$\tilde{\Gamma}_{k,n} := \cup_{i=1}^{l_m} \Gamma_{k,n} \cap \llbracket A_n^j, \tilde{T}_j \rrbracket \quad (5.18)$$

durchgeführt. (Es wird also noch ausgenutzt, dass die $\tilde{\Gamma}_{k,n}$ in den, sukzessive schmäler werdenden, stochastischen Intervallen $\llbracket A_n^j, \tilde{T}_j \rrbracket$ gewählt werden können. Analog zur Konstruktion in [56] wird dann

$$\theta_t^n(\omega) := \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{wobei } k \text{ die kleinste Zahl mit } (\omega, t) \in \tilde{\Gamma}_{k,n} \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls ein solches } k \text{ nicht existiert,} \end{cases}$$

definiert.)

Aus (5.17) folgt aus der in Teil (I) des Beweises von Satz 5.12 bewiesenen Stetigkeitseigenschaft (i.S. Kühn [56], Definition 2.3, S.4) $\int_0^t X(\theta_s, ds) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X(\theta_s^n, ds)$, und wegen (5.18) und $A_n^j \nearrow \tilde{T}_j$ ist $\lim \int_0^t X(\theta_s^n, ds) = \sum_{T_j \in \tau_m^t} \Delta X(\theta_{T_j}, T_j)$, wenn zu Abkürzungszwecken T_j aus τ_m^t bedeute, dass $T_j \wedge t$ betrachtet werde. Es folgt daher

$$\begin{aligned} \int_0^t X(H_s, ds) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^t X(H_s^m, ds) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{T_j \in \tau_m^t} \Delta X(H_{T_j}^m, T_j), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Ein Korrolar des Satzes ist folgende Aussage: Ist A eine vorhersehbare Menge, die im Sinne der Definition 5.2 in einer feinen Zerlegungsfolge (τ_n) enthalten ist, dann gilt für einen beliebigen adaptierten $\text{l\`a}g\text{l}\grave{a}d$ Prozess H

$$\sum_{T_i \in \tau_n^t} \Delta X((1_{A T_{i+1}} H_{T_i}, T_{i+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t X((1_A \bar{H})_s, ds), \quad (5.19)$$

wenn mit \bar{H} die linksstetige Version von H bezeichnet wird.

Dafür werden die Prozesse H^n wie folgt definiert: Für $(t, \omega) \in \llbracket T_{i+1} \rrbracket$ ($T_{i+1} \in \tau_n$) werde $H_t^n(\omega) := H_{T_i(\omega)}(\omega)$ und für $(t, \omega) \notin \cup_{i=2}^{k_n} \llbracket T_i \rrbracket$ werde $H_t^n(\omega) := 0$ gesetzt. Damit konvergiert $1_A H^n$ auf $\Omega \times [0, T]$ punktweise gegen $1_A \bar{H}$, da H $\text{l\`a}g\text{l}\grave{a}d$ ist. Das Integral von $1_A H^n$ ist nach dem vorhergehenden Satz durch

$$\int_0^t X((1_A H^n)_s, ds) = \sum_{T_i \in \tau_n^t} \Delta X((1_A H^n)_{T_i}, T_i)$$

gegeben. Die Summe entspricht wegen $H_{T_{i+1}}^n = H_{T_i}$ der Summe

$$\sum_{T_i \in \tau_n^t} \Delta X((1_{AT_{i+1}} H_{T_i}, T_{i+1})).$$

Kapitel 6

Großinvestorvermögensdynamik

6.1 Motivation der Wahl der Begriffe

In den folgenden Kapiteln wird ein Finanzmarktmodell mit einer Aktie („risky stock“) und einem Bankkonto (oder „riskless bond“) betrachtet, wobei davon ausgegangen wird, dass bei dem Bankkonto/Bond Haben- und Sollzins gleich $r = 0$ ist, da dies durch Übergang auf die abgezinste Preise stets erreichbar ist. Der Bondpreis ist also einfach $\equiv 1$. Der „Realwert“ (Def. 6.5) des Aktienpreisprozess wird als Semimartingalfamilie modelliert werden.

Genauer sollen 1-glatte (càdlàg) Prozessfamilien P herangezogen werden, um Aktienpreise (Def. 6.5) stochastisch zu modellieren, die von den Beständen eines Großinvestors abhängen, wobei die Order des Großinvestors den Aktienpreis, zu dem die Transaktion im Zuge dieser Order durchgeführt wird, schon beeinflussen soll.

Es wird gezeigt (vgl. Satz 6.8 und 6.10), dass von der vorhersehbaren Handelsstrategie des Großinvestors nur verlangt werden muss, dass sie wohldefinierte quadratische Variation im Sinne der Definition 5.4 besitzt und dass dies zugleich auch die Mindestanforderung an eine Handelsstrategie darstellt, denn wie die Bemerkung 6.11 zeigt, produzieren andere Strategien explodierende oder nicht konvergierende Transaktionskosten. Gemäß Satz 5.5 auf S. 56 wird damit die Handelsstrategie des Großinvestors insbesondere làglàd sein (d.h. fast alle Pfade der Strategie sind làglàd im Sinne der Begriffsbestimmung auf S. 5).

Das Inventar des Großinvestors zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ ist durch θ_t Aktien und durch das Bankkontosaldo β_t gegeben.

Wird zunächst unterstellt, dass der Großinvestor einer selbstfinanzierenden Strategie folgt, dann hängt das Bankkontosaldo zum Zeitpunkt t nur von dem Anfangsguthaben β_0 und den Kosten bzw. Erlösen von Aktienkäufen und -verkäufen bis zum Zeitpunkt t ab.

Im Folgenden soll untersucht werden, wie sich Käufe und Verkäufe auf das Bankkonto des Großinvestors auswirken. Der Aktienpreis werde durch einen (von einem Parameter ϑ und der Zeit t abhängigen) stochastischen Prozess $P : (\vartheta, t) \mapsto P(\vartheta, t)$ gegeben.

Bankkonto bei Selbstfinanzierung

Eine lügläd Bestandsfunktion kann Links- und Rechtssprünge (insbesondere auch Doppelsprünge) aufweisen. Dabei entstehen Auswirkungen auf den allein von dem Anfangsguthaben und den Aktienkäufen und -verkäufen abhängigen Verlauf des Bankkontosaldos. Am Beispiel von Käufen:

Rechtssprung der Bestandsfunktion θ :

$$\bullet^{\circ-} \} \Delta^+ \theta_s$$

Der Kauf dieser $\Delta^+ \theta_s$ Aktien kostet den Großinvestor $P(\theta_{s+}, s) \Delta^+ \theta_s$, d.h. um diesen Betrag erfährt sein Bankkonto eine Belastung. Der Kauf findet *nach* einem etwaigen Preissprung zum Zeitpunkt s statt. Der Kaufbetrag wird durch

$$P(\theta_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\theta_{t_{i+1}} - \theta_{t_i})$$

angenähert, wenn $s \in [t_i, t_{i+1})$ ist, bzw. wenn $s = t_i$ ist, falls s Doppelsprung ist. \diamond

Linkssprung der Bestandsfunktion θ :

$$-\circ^{\bullet} \} \Delta^- \theta_s$$

Der Kauf dieser $\Delta^- \theta_s$ Aktien kostet den Großinvestor

$$P(\theta_s, s-) \Delta^- \theta_s. \tag{6.1}$$

Der Kauf findet, in dem Sinne, dass der Großinvestor zum Zeitpunkt s mit seinem Bestand schon investiert ist, vor einem etwaigen Preissprung zum Zeitpunkt s statt. Der Kaufbetrag wird durch

$$P(\theta_{t_{i+1}}, t_i)(\theta_{t_{i+1}} - \theta_{t_i})$$

angenähert, wenn $s \in (t_i, t_{i+1}]$ ist, bzw. wenn $s = t_{i+1}$ ist, falls s Doppelsprung ist. \diamond

Daher ist es sinnvoll den *Bankkontoänderungsterm* wie folgt zu definieren:

Definition 6.1. Sei (τ_n) eine die θ -Linkssprünge enthaltende Stoppzeitenfolge. Dann wird für $t \in [0, T]$ und $T_i, T_{i+1} \in \tau_n^t$ definiert:

$$B_{T_i}^{n,t,T_{i+1}} := \begin{cases} P(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-)(\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_{i+1}-}), & \text{falls } T_{i+1} \text{ } \theta\text{-Linkssprung ist,} \\ P(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1})(\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i}) & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Realwert des Aktienbestands

Anders als das Bankkonto, dessen Saldo sehr unmittelbar Vermögen repräsentiert, ist der andere Bestandteil des Großinvestorinventars, der *Aktienbestand*, erst nach einem aufwendigeren Liquidierungsprozess monetäre Größe. Von der Art der Liquidierung kann aber nicht wie bei dem Kleininvestor abstrahiert werden. Der erzielbare Erlös eines Großinvestoraktienbestands hängt in illiquiden Märkten von der Liquidationsstrategie ab. Um den Illiquiditätseffekt zu modellieren, wird angenommen, dass der durch einen bestandsparameter- und zeitabhängigen Prozess P beschriebene Aktienpreis im ersten (Bestands-)Argument isoton ist, d.h. der Preis P wird bei Großinvestorbestandsvermehrung nach oben, bei Bestandsverminderung nach unten „verschoben“.¹

Zur Bestimmung des durch den Aktienbestand repräsentierten Vermögens fragt sich also, welche Art der Liquidation zu unterstellen ist. In der Literatur haben sich ausgehend von Unterscheidungen die Jarrow für den zeitdiskreten Fall getroffen hat, seit Schönbucher und Wilmott sowie Baum und Bank und Baum² die drei Wertbegriffe Zerschlagungswert (Blockliquidationswert),

¹Die Isotonie-Bedingung ist auf ähnliche Art wie die, dass der Aktienpreis in der Zeit càdlàg ist, modellbestimmend.

²Vgl. [49], [84], [9], [6].

Realwert und Papierwert (Buchwert) entwickelt. Zur Illustration zunächst ein simplifiziertes Beispiel zum Realwert als Idealisierung marktschonenden Handelns:

Liegt eine illiquide Marktsituation vor, d.h. ist P im ersten Argument streng monoton, dann kann, wenn zunächst davon ausgegangen wird, dass sich ansonsten keine Marktkräfte bemerkbar machen (wenn also der Preis konstant bleibt, wenn der Großinvestor nicht handelt)³, der Aufbau einer Aktienposition und ihre anschließende Liquidation durch den Großinvestor ein probates Mittel sein, Geld zu verlieren!

Sei dazu P nur von dem Bestand θ des Großinvestors⁴ abhängig und bei gleichbleibendem Bestand konstant in der Zeit. Das Bankkonto des Großinvestors werde betrachtet. Es erfolge ein Aktienkauf zum Zeitpunkt s bei dem der gesamte Bestand aufgebaut wird und ein Gesamtverkauf zu einem Zeitpunkt t ($0 < s < t$). Bei dem Kauf von $\Delta^- \theta_s$ Aktien wird sich das Bankkontosaldo um $-\Delta^- \theta_s P(\theta_s)$ verändern. Bei Verkauf zum späteren Zeitpunkt t um $-\Delta^- \theta_t P(\theta_t) = \Delta^- \theta_s P(0)$: Das Reinvermögen des Großinvestors hat sich um $\Delta^- \theta_s (P(0) - P(\theta_s))$ verändert: Ein Verlust wegen $\theta_s > 0$ also $\Delta^- \theta_s = \theta_s > 0$ und der strengen Isotonie von P .

Der Verlust ist in dieser (ruhigen) Marktsituation in dem vorliegenden Modell jedoch vermeidbar: Die Illiquiditätskosten sind vermeidbar, wenn die Position von θ Aktien marktschonend aufgebaut und marktschonend liquidiert wird: In der dargestellten Situation wählt der Investor $2k$ Transaktionszeitpunkte $1, 2, \dots, 2k$. Der Aktienpreis ist durch $P(\theta_s)$ beschrieben, da ja die Ruhe-Voraussetzung $P(q, s) = P(q, t)$ für alle s, t getroffen wurde. Zu jedem Zeitpunkt 1 bis k kauft der Investor gleichviele $\Delta^- \theta_i = \Delta^- \theta_1 =: d\theta$ Aktien. Zu den Zeitpunkten $k + 1$ bis $2k$ verkauft er $d\theta$ Aktien. Ein Blick auf den Bankkontoauszug des Großinvestors zeigt:

³Dies soll im Folgenden als „Ruhe-Voraussetzung“ bezeichnet werden.

⁴Sei θ in dem Beispiel ein càdlàg Prozess.

Zeitpunkt	Erläuterung	Betrag
1	Aktienkauf	$-P(\theta_1)d\theta$
2	Aktienkauf	$-P(\theta_2)d\theta$
\vdots	\vdots	\vdots
$k-1$	Aktienkauf	$-P(\theta_{k-1})d\theta$
k	Aktienkauf	$-P(\theta_k)d\theta$
$k+1$	Aktienverkauf	$+P(\theta_{k-1})d\theta$
$k+2$	Aktienverkauf	$+P(\theta_{k-2})d\theta$
\vdots	\vdots	\vdots
$2k-1$	Aktienverkauf	$+P(\theta_1)d\theta$
$2k$	Aktienverkauf	$+P(\theta_0)d\theta$

Insgesamt ergibt sich eine Reinvermögensveränderung von

$$(P(\theta_0) - P(\theta_k))d\theta < 0,$$

die aber für $d\theta \rightarrow 0$ verschwindet; dabei streben Gesamtbelastung und Gesamtgutschrift jeweils gegen

$$L(\theta) := \int_0^\theta P(\xi) d\xi,$$

mit $\theta := \theta_k$.

Realwert: Das für die Bewertung zum Zeitpunkt s relevante Gesamtinventar des Großinvestors setzt sich aus dem Aktienbestand (θ_s) und dem Bankkontosaldo (β_s) zusammen. Die Bewertung des Portfolios ergibt sich aus der Bewertung des Kontos und der Bewertung des Aktienbestands. Der Kontowert ist (im vorliegenden Modell) einfach der Kontosaldo (d.h. z.B. operationale Risiken wie Bankraub oder Unterschlagung werden nicht modelliert). *Bei der Bewertung des Aktienbestands sollte der Betrag herangezogen werden, den der Großinvestor durch bestmögliche Liquidationsstrategie erwirtschaften kann.* Das ist – unter der Ruhe-Voraussetzung – wie gesehen das Integral $L(\theta) = \int_0^\theta P(\xi) d\xi$, der „Realwert“ eines Aktienbestandes von θ Aktien. \diamond

Zerschlagungswert: Ebenfalls erwirtschaftbar (in der Regel jedoch nicht optimal) ist der „Zerschlagungswert“ des Aktienbestands: Es ist der Erlös, der bei „en-bloc“-Liquidation (zum Zeitpunkt s) erzielt wird: $\theta_s P(0)$. \diamond

Papierwert: In der Regel *nicht* zu erwirtschaften ist der „Papierwert“ des Aktienbestands: $\theta_s P(\theta_s)$. (Und es ist entsprechend kritisch zu sehen, dass viele Bewertungen, die in der Finanzwelt vorgenommen werden, den Papierwert verwenden.)⁵ \diamond

Unter der Ruhe-Voraussetzung ist die Benennung „Realwert“ sinnvoll, da sich der Großinvestor unter dieser Voraussetzung rational verhält, wenn er eine marktschonende Liquidationsstrategie wählt.

Die marktschonende Realisation kann beliebig schnell aber nicht ohne Zeitverbrauch durchgeführt werden. In der Formulierung von Baum: „unendlich schnell aber nicht instantan“⁶. Die Zerschlagung benötigt dagegen keine Zeit. Es kann daher bei Fallenlassen der Ruhe-Voraussetzung in einem stochastischen Modell für den Großinvestor sinnvoll sein, Bestände zu zerschlagen. Dann nämlich, wenn über die Preisentwicklung auf einem Zeit-

⁵Beispiele und – eher schwache – Gegenbeispiele (s.u.) finden sich schon bei den relativ einfachen aber die Finanzkommunikation bestimmenden Konzepten der verschiedenen Rechnungslegungssysteme. Die Systematik bspw. der *International Financial Reporting Standards* (IFRS) (stellvertretend für mark-to-marked-geprägte Rechnungslegung) ist recht stark am Papierwert (in obigem Sinne) orientiert. Das „gute alte“ *Handelsgesetzbuch* (HGB) stützte sich stärker auf den Niederstwert, d.h. das Minimum von Anschaffungskosten und Papierwert (Imparitätsprinzip).

Im Zusammenhang mit quantitativen, modelltheoretischen Überlegungen wurde meistens eine gewisse Überalterung des HGB (etwa im Vergleich mit den IFRS) hervorgehoben. Der deutsche Gesetzgeber erließ am 25. Mai 2009 das BilMoG, das Änderungen des HGB vorsieht, insbesondere derart, dass nunmehr Handelsbestände von Kreditinstituten wie bei der IFRS-Rechnungslegung zum Papierwert anzusetzen sind. Die folgende kleine Tabelle zeigt aber einen Fall auf, in dem die Rechnungslegung gemäß HGB, alte Fassung, den Liquiditätseffekt implizit berücksichtigt, die nach IFRS jedoch nicht. (Zur Zeit wird aber in beiden Rechnungslegungssystemen die Liquidität nicht explizit einbezogen.)

Gemäß § 256 i.V.m. § 240 Abs. 4 HGB a.F. ist es statthaft für Handelsbestände gleitende Durchschnittsanschaffungskosten zu verwenden. Gemäß IFRS ist für solche Bestände der Papierwert zu verwenden. Unter der Ruhe-Voraussetzung stehen sich Real- und Rechnungswerte wie folgt gegenüber:

Positionsaufbau	Realwert	HGB a.F.	IFRS
Marktschonend	$\int_0^p P(q) dq$	$\int_0^p P(q) dq$	$p \cdot P(p)$
Eine Transaktion	$\int_0^p P(q) dq$	$p \cdot P(p)$	$p \cdot P(p)$

⁶[9], S. 24. Vgl. auch Back [4].

intervall (s, t) ($s < t$) Ungewissheit herrscht und die von dem Großinvestor bemessenen erwarteten Verluste (die von der zu wählenden Investorstrategie abhängig sind) bei keiner Wahl einer zeitverzehrenden Liquidationsstrategie kleiner als die Illiquiditätskosten der Zerschlagungsstrategie sind.

In einem Modell in dem das von dem Großinvestor in Anschlag gebrachte Verlustmaß durch Erhöhung der Liquidationsgeschwindigkeit nicht beliebig gesenkt werden kann, ist ein wie oben definierter Realwert nicht unbedingt zielführend. Die stochastischen Finanzmarktmodelle, die in dieser Arbeit betrachtet werden, sind aber so gewählt, dass der Investor, durch die Wahl einer hinreichend schnellen Liquidationsstrategie, das (durch ihn bemessene) Risiko, den Realwert zum Zeitpunkt s mittels der Liquidationsstrategie nicht zu realisieren, beliebig klein halten kann.

Handelsgewinne und -verluste

Im ersten Unterabschnitt wurde überlegt, welche Terme einen sinnvoll definierten Bankkontosaldoprozess (bei Verwendung einer selbstfinanzierenden Strategie) approximieren würden. Eine ähnliche Überlegung kann hinsichtlich der Frage angestellt werden, welche Terme einen sinnvoll definierten Gewinn- und Verlust-Prozess approximieren würden:

Sei (τ_n) eine die θ -Linkssprünge enthaltende Stoppzeitenzerlegungsfolge und $t \in [0, T]$. Da die Großinvestorhandelsstrategie Linkssprünge aufweisen kann, mit denen noch in einen etwaigen Preissprung investiert werden kann, ist für $T_i, T_{i+1} \in \tau_n^t$ der Term

$$L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i)$$

nur bedingt zur Approximation der Handelsgewinne bzw. -verluste geeignet.

Der Möglichkeit des Investierens via θ -Linkssprung wird durch die folgende Definition Rechnung getragen:

Definition 6.2. Für $T_i, T_{i+1} \in \tau_n^t$ wird der Gewinn und Verlust-Term $D^{n,t}$ durch

$$D^{n,t}_{T_i} := \begin{cases} L(\theta_{T_i}, T_{i+1}-) - L(\theta_{T_i}, T_i) + L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-), \\ \text{falls } T_{i+1} \text{ } \theta\text{-Linkssprung ist,} \\ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \text{ andernfalls} \end{cases}$$

definiert.

6.2 Definitionen

Definition 6.3. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Ein von einem Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$ und dem Zeitparameter $t \in \mathbb{R}_+$ abhängiger stochastischer Prozess X heißt k -glatt, wenn für fast alle ω der Pfad

$$X(\omega) : (\vartheta, t) \mapsto X_t^\vartheta(\omega)$$

k -glatt im Sinne der Definition 2.4 (S. 23 f.) ist.

Feststellung 6.4. Ist X k -glatt, so ist der durch

$$Y_t^\vartheta(\omega) := \int_0^\vartheta X_t^x(\omega) dx$$

gegebene Prozess Y $k + 1$ -glatt.

Beweis. Für fast alle ω ist $y := Y(\omega)$ (i) im ersten Argument $k + 1$ -mal stetig differenzierbar, da $y' = X(\omega)$ im ersten Argument k -mal stetig differenzierbar ist. $z := X(\omega)$ ist (ii) auf einer beschränkten Menge beschränkt und für ein beschränktes Intervall $Q \subset \mathbb{R}$ ist mit $K := \sup\{|z(q, s)| : q \in Q, s \in [0, t]\}$ und $p, q \in Q$ $|y(p, s) - y(q, s)| = \int_q^p z(\eta, s) d\eta \leq K|p - q|$ für jedes $s \in [0, t]$. Außerdem ist (iii) $y(p, \cdot)$ càdlàg, denn da z auf $[0, p] \times [0, t]$ beschränkt ist, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^p z(\eta, s_n) d\eta = \int_0^p \lim_{n \rightarrow \infty} z(\eta, s_n) d\eta = \int_0^p z(\eta, s-) d\eta$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^p z(\eta, s_n) d\eta = \int_0^p \lim_{n \rightarrow \infty} z(\eta, s_n) d\eta = \int_0^p z(\eta, s) d\eta$$

für $s_n \nearrow s \in [0, t]$ bzw. $s_n \searrow s \in [0, t]$. Aus (i) - (iii) folgt die $k + 1$ -Glätte von y . \square

Definition 6.5. Eine Familie $P : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\omega, t, \vartheta) \mapsto P_t^\vartheta(\omega)$ von adaptierten càdlàg Prozessen heißt Aktienpreis, wenn für fast alle ω gilt: Für alle t aus $[0, T]$: $P(\omega, t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist (i) isoton, (ii) 1-glatt im Sinne der letzten Definition, und (iii) die durch $L_t^\vartheta(\omega) := L(\vartheta, t)(\omega) := \int_0^\vartheta P_t^x(\omega) dx$ definierte Stammfunktionsprozessfamilie L ist ein zahmer Integrator im Sinne

der Definition 5.10.

Der 2-glatte (s. letzte Feststellung) Prozess L wird als Realwert bezeichnet.

Definition 6.6 (Handelsstrategie. Vermögensprozess V_t). Sei P Aktienpreis im Sinne der vorhergehenden Definition. Ist θ_t ein vorhersehbarer Prozess von wohldefinierter quadratischer Variation im Sinne der Definition 5.4 und β_t ein weiterer reellwertiger adaptierter Prozess auf $[0, T]$, so heißt das Paar (θ_t, β_t) eine Handelsstrategie. Der Vermögensprozess zu dieser Handelsstrategie bei dem gegebenen Aktienpreis P wird durch

$$V_t := L(\theta_t, t) + \beta_t$$

(mit dem Realwert $L(\vartheta, t)$ der vorhergehenden Definition) definiert.

6.3 Vermögensdynamikzerlegung

Lemma 6.7. Sei θ $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ vorhersehbar. Sei (τ_n) eine feine die θ -Linkssprünge enthaltende Stoppzeitenzerlegungsfolge. Dann gilt

$$\sum_{T_i \in \tau_n^t} D^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}} \longrightarrow \int_0^t L(\theta_s, ds) \quad (6.2)$$

ucp, wenn die $D^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}}$ die in Definition 6.2 gegebenen Terme

$$D^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}} = \begin{cases} L(\theta_{T_i}, T_{i+1}-) - L(\theta_{T_i}, T_i) + L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-), \\ \text{falls } T_{i+1} \text{ } \theta\text{-Linkssprung ist,} \\ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \text{ andernfalls} \end{cases}$$

sind.

Beweis. Sei A die Menge der Linkssprünge von θ . Sie ist vorhersehbar und von der Art wie das A aus Satz 5.15.⁷ Mit der Indikatorfunktion 1_A lässt

⁷D.h. A ist darstellbar als Vereinigung von Graphen von abzählbar vielen angekündigten Stoppzeiten (mit disjunkten Graphen). Zum Beweis kann wiederum auf Dellacherie und Meyer [23], Th. 117, Appendix zu Kapitel IV, S. 167 zurückgegriffen werden, oder direkter auf Dellacherie und Meyer [24], Beweis von Th. 8, S. xiii f. Dort wird die Aussage für $\text{c\`a}d\text{l}\ddot{a}g$ θ bewiesen. Da die verwendeten Eigenschaften des $\text{c\`a}d\text{l}\ddot{a}g$ -Prozesses genauso für $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ Prozesse gelten, kann der Beweis übernommen werden.

sich $D_{T_i}^{T_{i+1}} := D^{n,t}_{T_i}^{T_{i+1}}$ auch durch

$$D_{T_i}^{T_{i+1}} = 1_{AT_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}-) - L(\theta_{T_i}, T_i) + L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-) \right\} \\ + 1_{A^c T_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \right\}$$

wiedergeben und durch Addition von

$$0 = 1_{AT_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \right\} - 1_{AT_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \right\}$$

zu

$$D_{T_i}^{T_{i+1}} = 1_{AT_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}-) - L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) + L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-) \right\} \\ + \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \right\} \\ = 1_{AT_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-) \right\} \\ - 1_{AT_{i+1}} \left\{ L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_{i+1}-) \right\} \\ + L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \\ = L((1_A \theta)_{T_{i+1}}, T_{i+1}) - L((1_A \theta)_{T_{i+1}}, T_{i+1}-) \\ - L(1_{AT_{i+1}} \theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(1_{AT_{i+1}} \theta_{T_i}, T_{i+1}-) \\ + L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i)$$

umformen. Nach Satz 5.15 und der sich an den Satz anschließenden Folgerung (5.19) und weil, wenn $\bar{\theta}$ die linksstetige Version von θ bezeichnet, nach Satz 5.12

$$\sum_{T_i \in \tau_n^t} L(\theta_{T_i}, T_{i+1}) - L(\theta_{T_i}, T_i) \longrightarrow \int_0^t L(\bar{\theta}_s, ds)$$

uep gilt, da die Summe das nicht-lineare Integral eines $\bar{\theta}$ -Approximators $\bar{\theta}^n$ ist (mit $\bar{\theta}^n \rightarrow \bar{\theta}$ punktweise), folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{T_i \in \tau_n^t} D_{T_i}^{T_{i+1}} = \int_0^t L((1_A \theta)_s, ds) - \int_0^t L((1_A \bar{\theta})_s, ds) + \int_0^t L(\bar{\theta}_s, ds).$$

Wegen der Zeitadditivität von L , im Sinne von (5.9) auf S. 65, gilt

$$\int_0^t L((1_A \theta)_s, ds) - \int_0^t L((1_A \bar{\theta})_s, ds) = \int_0^t L(\theta_s, ds) - \int_0^t L(\bar{\theta}_s, ds),$$

so dass sich die Aussage des Lemmas ergibt. \square

Es folgt nun die Realwertdynamikzerlegung und daraus die Vermögensdynamikzerlegung in Satz 6.10. In ihrer Gestalt ist die Vermögensdynamikzerlegung nur eine kleine Verallgemeinerung der Zerlegung zu der Bank und Baum durch Anwendung der Itô-Wentzell-Formel gelangt sind.⁸ Im Unterschied zu [6] muss θ kein Semimartingal sein, sondern nur als vorhersehbarer Prozess wohldefinierter quadratischer Variation vorausgesetzt werden.

Satz 6.8 („Realwertdynamik“). *Sei P 1-glatt im Sinne der Definition 6.3 und das durch $L(\vartheta, t) := \int_0^\vartheta P(x, t) dx$ gegebene L sei ein zahmer Integrator im Sinne der Definition 5.10. (Das ist z.B. der Fall wenn P Aktienpreis im Sinne der Definition 6.5 und L der zu P zugehörige Realwert (Def. 6.5) ist.) Sei θ ein vorhersehbarer Prozess mit wohldefinierter quadratischer Variation im Sinne der Definition 5.4.*

Dann existiert ein adaptierter Prozess B_t derart, dass für jede feine die θ -Doppelsprünge enthaltende Stoppzeiten-Zerlegungsfolge $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{T_i \in \tilde{\tau}_n^t} B^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}}$$

ucp gegen B_t konvergiert, wenn $B^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}}$ den Term aus der Definition 6.1

$$B^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}} := \begin{cases} P(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1}-)(\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_{i+1}-}), & \text{falls } T_{i+1} \text{ } \theta\text{-Linkssprung ist,} \\ P(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1})(\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i}) & \text{andernfalls} \end{cases}$$

*bezeichnet.*⁹

⁸Vgl. [6], Lemma 3.2, S. 7.

⁹Werden die Bestände nur zu den diskreten Zeitpunkten T_1, T_2, \dots verändert und ist β_0 der Anfangsbestand des Bankkontos, dann erfüllt (β, θ) die *zeitdiskrete Selbstfinanzierungsbedingung*, wenn der Bankkontoprozess β durch $\beta_t := \beta_0 - \sum_{T_i \in \tilde{\tau}_n^t} B^{n,t}_{T_i}{}^{T_{i+1}}$ festgelegt wird (d.h. es gilt dann für jede zu den diskreten Zeitpunkten T_i stattfindenden Transaktion: Kontoveränderung – Transaktionswertpapierpreis · Transaktionsmenge = 0).

Es gilt folgende Formel:

$$\begin{aligned}
L(\theta_t, t) &= L(\theta_0, 0) + B_t + \int_0^t L(\theta_s, ds) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^t P'(\theta_s, s) d[\theta]_s^c \\
&\quad + \sum_{0 < s \leq t} L(\theta_s, s-) - L(\theta_{s-}, s-) - P(\theta_s, s-) \Delta^- \theta_s \\
&\quad + \sum_{0 \leq s < t} L(\theta_{s+}, s) - L(\theta_s, s) - P(\theta_{s+}, s) \Delta^+ \theta_s.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Beweis. Sei $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine feine die θ -Linkssprünge enthaltende Zerlegungsfolge auf $[0, T]$. Mit $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots$ seien im Folgenden unendliche \mathbb{N} -Teilmengen, die als Teilfolgenindexmengen dienen sollen, bezeichnet. Eine beliebige Teilfolge $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ ($\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$) ist dann ebenfalls fein und enthält die θ -Linkssprünge. Durch geeignete, aufgrund der ucp-Konvergenz (6.2) mögliche, Wahl von $\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1$ gilt für fast alle $\omega \in \Omega$ die in t gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{t_i \in \tau_n^t} D_{t_i}^{t_{i+1}}(\omega)$$

mit $\tau_n := \tilde{\tau}_n(\omega)$ ($n \in \mathbb{N}_2$) und $t_i := T_i(\omega)$, so dass der durch

$$I_t(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n^t} D_{t_i}^{t_{i+1}}(\omega)$$

erklärte Prozess I der Integralprozess $\int_0^\cdot L(\theta_s, ds)$ ist (naturgemäß bis auf Ununterscheidbarkeit).

Sei ein „typisches“ ω (also für das obiges gilt) fest gewählt. Mit der weiteren Zuordnung

$$z(\cdot, \cdot) := P(\cdot, \cdot, \omega), \quad y(\cdot, \cdot) := L(\cdot, \cdot, \omega), \quad x_s := \theta_s(\omega)$$

gilt, dass

$$D_{t_i}^{t_{i+1}}(\omega) = \begin{cases} y(x_{t_i}, t_{i+1}-) - y(x_{t_i}, t_i) + y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}-), \\ \text{falls } t_{i+1} \text{ } x\text{-Linkssprung ist,} \\ y(x_{t_i}, t_{i+1}) - y(x_{t_i}, t_i) \text{ andernfalls} \end{cases}$$

ist, x_s quadratische Variation entlang (τ_n) im Sinne der Definition 1.4 besitzt und y 2-glatt im Sinne der Definition 2.4 ist.

Mit der *Erweiterung der Zeitmenge* $[0, T]$ um die x -Linkssprünge zu $[0, T]^*$ und mit den Standarderweiterungen $\mathbf{x} := x^*$, $y := y^*$ und $\tau_n \mapsto \sigma_n$ des Kapitels 4 hat

$$\sum_{t_i \in \tau_n^t} D_{t_i}^{t_{i+1}}(\omega)$$

die einfache Darstellung

$$\bar{I}_t^n := \sum_{t_i \in \sigma_n^t} y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_i)$$

($t \in [0, T]$) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}_t^n = I_t(\omega) =: \int_0^t y(x_s, ds)$ gleichmäßig in $t \in [0, T]$.

Der Beweis geht nun zunächst weiter, wie der Beweis des Lemmas 2.2 auf S. 18 f. beginnt: Da ξ^a radonsch ist, gibt es endliche Teilmengen $G^* = G^*(\epsilon', t) \subseteq \mathcal{S}^*$ und $F = F(\epsilon', t)$ der Links- bzw. Rechtssprungzeiten von \mathbf{x} mit

$$\sum_{s \in [0, t]^* \setminus G^* \cup F} (\Delta \mathbf{x}_s)^2 \leq \epsilon'.$$

G^* und F induzieren die endlichen σ_n^t -Teilmengen $G^{*'}(n, \epsilon', t)$ und $F'(n, \epsilon', t)$ wie in Definition 2.1* und Lemma 2.2*. Die Summen Σ , Σ_1 , Σ_2 und Σ_3 sollen die in Definition 2.1* festgelegte, von $t \in [0, T]$ und ϵ' abhängige Bedeutung haben.

Wegen $t_0 = 0$ und $t_{i^*+1} = t$ für alle n gilt für die Teleskopsumme

$$T_{n,t} := \sum_{t_i \in \sigma_n^t} y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_i) = y(x_t, t) - y(x_0, 0).$$

Sie hat eine Darstellung $T_{n,t} = \bar{I}_t^n + J_t^n$ mit $\bar{I}_t^n := \sum_{t_i \in \sigma_n^t} y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_i)$ und $J_t^n := \sum y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})$. Diese Terme lassen sich aufgrund der 2-Glätte von y im Hinblick auf Bemerkung 2.10* wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} y(x_t, t) &= y(x_0, 0) + T_{n,t} \\ &= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + J_t^n \\ &= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \\ &\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \\ &\quad + \sum_3 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum_3 y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad - \sum_1 y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad - \sum_2 y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum (y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_1 (y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_2 (y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_3 (y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 R(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^n + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_1 (y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_2 (y'(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}))(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad - \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad - \sum_3 \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 \mathbf{R}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad + \sum y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&= y(x_0, 0) + \bar{I}_t^m + \sum_1 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum_2 y(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) - y(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1}) - y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_3 y''(\mathbf{x}_{t_i}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \\
&\quad + \sum_3 \mathbf{R}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \\
&\quad - \sum_3 \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \\
&\quad + \sum y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}). \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Die dritte Summe in (6.4) liegt nach Lemma 2.9* in ϵ -Nähe von

$$\int_0^t y''(x_s, s) d[x, x]_s^c.$$

Die erste und zweite Summe konvergieren in n gegen die endlichen Summen

$$\sum_{s \in G} y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s) \Delta^- x_s$$

und

$$\sum_{s \in F} y(x_{s+}, s) - y(x_s, s) - y'(x_{s+}, s) \Delta^+ x_s,$$

wobei G die zu $G^* \subseteq \mathcal{S}^*$ gehörigen Standardwerte aus \mathcal{S} enthält. Ist ϵ' nur klein genug, so liegen diese Summen in ϵ -Nähe zu den Sprungsummen

$$\sum_{0 < s \leq t} y(x_s, s) - y(x_{s-}, s) - y'(x_s, s) \Delta^- x_s$$

und

$$\sum_{0 \leq s < t} y(x_{s+}, s) - y(x_s, s) - y'(x_{s+}, s) \Delta^+ x_s$$

(s. Bem. 2.11 (i) und (iii)).

Da die isotone Funktion $\mathbf{r} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ in 0 rechtsstetig mit $\mathbf{r}(0) = 0$ ist (s. Bemerkung 2.10*), kann $\epsilon' > 0$ so klein gewählt werden, dass $2\mathbf{r}(2\epsilon')|\xi^{*t}| \leq \epsilon$ ist. Für

$$\sum_3 \mathbf{R}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) = \sum_{t_i \in \tau_n^t \setminus G^{*'}(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t)} \mathbf{R}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})$$

ist für hinreichend große n

$$\left| \sum_3 \mathbf{R}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \right| \leq \sum_2 \mathbf{r}(2\epsilon')(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \leq 2\mathbf{r}(2\epsilon')|\xi^{*t}|,$$

da gemäß Lemma 2.7*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{ |\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}| : t_i \in \tau_n^t \setminus G^{*'}(n, \epsilon', t) \cup F'(n, \epsilon', t) \} \leq \epsilon'$$

und $|\xi_n^{*t}| \rightarrow |\xi^{*t}|$, da $\xi_n^{*t} \xrightarrow{\text{vag}} \xi^{*t}$ (die Schlussweise aus der Fußnote 1 auf S. 47).

ϵ' kann auch noch so klein gewählt werden, dass sich für große n

$$\left| \sum_3 \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \right| \leq \sum_3 \tilde{\mathbf{r}}(2\epsilon')(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})^2 \leq 2\tilde{\mathbf{r}}(2\epsilon')\xi^{*t}$$

ergibt, so dass sich auch

$$\left| \sum_3 \tilde{\mathbf{R}}(\mathbf{x}_{t_i}, \mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) \right| < \epsilon$$

rechtfertigen lässt (vgl. Fußnote 2 auf S. 48).

Mit der schon gesehenen Konvergenz von \bar{I}_t^n (gleichmäßig in t), erzwingen die besprochenen Konvergenzen in (6.4) die in t gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum y'(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i}) = \sum \mathbf{z}(\mathbf{x}_{t_{i+1}}, t_{i+1})(\mathbf{x}_{t_{i+1}} - \mathbf{x}_{t_i})$$

für $n \rightarrow \infty$.

D.h. es konvergiert der Term

$$\sum_{t_i \in \tau_n^t} B^{n, t_{i+1}}(\omega) = \sum_{t_i \in \tau_n^t} Z_{t_i}^{t_{i+1}}$$

mit

$$Z_{t_i}^{t_{i+1}} := \begin{cases} z(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}) \cdot 0 + z(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}-)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) = z(x_{t_{i+1}}, t_{i+1}-)(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}), \\ \text{falls } t_{i+1} \in S, \\ z(x_{t_{i+1}}, t_{i+1})(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}) \text{ andernfalls} \end{cases}$$

($t_i \in \tau_n^t$).

Da \mathbb{N}_1 als beliebige unendliche \mathbb{N} -Teilmenge vorgegeben war, folgt, dass die Formel (6.3) gilt, wobei

$$\sum_{T_i \in \bar{\tau}_n^t} B^{n, t_{i+1}}_{T_i}$$

ucp gegen

$$\begin{aligned} B_t &:= L(\theta_t, t) - L(\theta_0, 0) - \int_0^t L(\theta_s, ds) + \frac{1}{2} \int_0^t P'(\theta_s, s) d[\theta]_s^c \\ &\quad - \sum_{0 < s \leq t} L(\theta_s, s-) - L(\theta_{s-}, s-) - P(\theta_s, s-) \Delta^- \theta_s \\ &\quad - \sum_{0 \leq s < t} L(\theta_{s+}, s) - L(\theta_s, s) - P(\theta_{s+}, s) \Delta^+ \theta_s \end{aligned}$$

konvergiert. □

Definition 6.9 (Selbstfinanzierende Handelsstrategie). *Sei P Aktienpreis und (θ_t, β_t) Großinvestorhandelsstrategie im Sinne der Definitionen 6.5 und 6.6. Die Strategie heißt selbstfinanzierend, wenn $\beta_t = \beta_0 - B_t$ mit B aus dem vorhergehenden Satz ist.*

Die Definition ist die zeitstetige Version der zeitdiskreten Selbstfinanzierungsbedingung (vgl. Fußnote 9 auf S. 87).

Satz 6.10. *Ist (θ_t, β_t) eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, dann gilt:*

1) Die Vermögensdynamik (s. Def. 6.6) lässt sich wie folgt zerlegen:

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t L(\theta_s, ds) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t P'(\theta_s, s) d[\theta]_s^c \\ &\quad + \sum_{0 < s \leq t} L(\theta_s, s-) - L(\theta_{s-}, s-) - P(\theta_s, s-) \Delta^- \theta_s \\ &\quad + \sum_{0 \leq s < t} L(\theta_{s+}, s) - L(\theta_s, s) - P(\theta_{s+}, s) \Delta^+ \theta_s. \end{aligned}$$

2) Stets ist $V_t \leq \tilde{V}_t := V_0 + \int_0^t L(\theta_s, ds)$, d.h. die drei letzten Terme stellen Kosten dar.

3) Ist θ ein adaptierter stetiger FV-Prozess, dann vereinfacht sich die Vermögensdynamik zu

$$V_t = \tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t L(\theta_s, ds).$$

Beweis. 1) ergibt sich mit $V_0 = L(\theta_0, 0) + \beta_0$ und $\beta_t = \beta_0 - B_t$ aus dem vorhergehenden Satz.

2) folgt wegen der Isotonie von P im ersten Argument: Für den Term $-\frac{1}{2} \int_0^t P'(\theta_s, s) d[\theta]_s^c$ direkt ersichtlich und für die Sprungterme nach der Umformung

$$L(\theta_s, s-) - L(\theta_{s-}, s-) - P(\theta_s, s-) \Delta^- \theta_s = \int_{\theta_{s-}}^{\theta_s} P(x, s-) - P(\theta_s, s-) dx$$

und

$$L(\theta_{s+}, s) - L(\theta_s, s) - P(\theta_{s+}, s) \Delta^+ \theta_s = \int_{\theta_s}^{\theta_{s+}} P(x, s) - P(\theta_{s+}, s) dx.$$

3) ergibt sich daraus, dass die in 2) betrachteten Terme für FV bzw. stetige θ verschwinden. \square

Bemerkung 6.11. Für den im ersten Argument affinen Aktienpreis, der für $c > 0$ durch $P(\vartheta, t) = (1 + c\vartheta)P(0, t)$ gegeben ist, und eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (θ_t, β_t) mit stetigem θ wird V_t durch

$$V_t^n := L(\theta_t, t) + \beta_0 - \sum_{T_i \in \tau_n^t} P(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1})(\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i})$$

angenähert. Aus (6.4) (S. 91) folgt daher

$$V_t^n = L(\theta_0, 0) + \beta_0 + \bar{I}_t^n - \frac{c}{2} \sum_{T_i \in \tau_n^t} (\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i})^2.$$

Da \bar{I}_t^n gegen $\int_0^t L(\theta_s, ds)$ konvergiert, bedeutet dies, dass die Kosten explodieren bzw. dass eine sinnvolle Vermögensfunktion nicht definierbar ist, wenn θ entlang (τ_n) keine endliche quadratische Variation besitzt. \diamond

Bemerkung 6.12. Wenn θ linksstetige Version des càdlàg Semimartingals θ^+ ist, dann existieren auch die Prozesse $t \mapsto \int_0^t P(\theta_s, s) d\theta_s^+$ und $t \mapsto [\int_0^t P(\theta_s, ds), \theta^+]_t$. B_t ergibt sich dann, da θ keine Linkssprünge hat, als Limes von $\sum P(\theta_{T_{i+1}}, T_{i+1})(\theta_{T_{i+1}} - \theta_{T_i})$ (s. Def. von $B^{n,t}$ in Def. 6.1 (S. 79) bzw. auf S. 87). Umformen dieser Summe und Anwendung der Taylorformel mit anschließendem Grenzübergang ergibt $B_t = \int_0^t P(\theta_s, s) d\theta_s^+ + [\int_0^t P(\theta_s, ds), \theta^+]_t + \int_0^t P'(\theta_s, s) d[\theta^+, \theta^+]_s^c + \sum (P(\theta_{s+}, s) - P(\theta_s, s)) \Delta^+ \theta_s$. Mit dieser Darstellung von B_t ist schnell zu sehen, dass die Gleichung (6.3) auf S. 88 mit der Darstellung des realisierbaren Aktienbestandswerts $L(\theta_t, t)$ im Beweis von Lemma 3.2 auf S. 7 in Bank und Baum [6] (dort die erste Gleichung im Beweis) übereinstimmt. \diamond

Definition 6.13 (Vermögensprozess modulo Transaktionskosten). *Im Hinblick auf den vorhergehenden Satz wird der Prozess $\tilde{V}_t := V_0 + \int_0^t L(\theta_s, ds)$ als Vermögensprozess modulo Transaktionskosten bezeichnet.*

Teil III

Approximation durch stetige FV-Prozesse

In den Kapiteln 7 und 8 wird auf Grundlage der nicht-linearen stochastischen Integration im Wesentlichen untersucht, ob es einem Großinvestor durch und trotz Beschränkung auf marktschonende Strategien gelingt, zu fast gleichen Kosten, die gleichen Auszahlungsprofile (sogar die gleichen Vermögensprozesse) zu erzeugen, die er mit beliebigen vorhersehbaren endlich quadratvariierenden Prozessen¹⁰ modulo Transaktionskosten erzeugen kann.

Im siebten Kapitel wird diese Frage in einem Finanzmarkt *ohne Überraschungen* erörtert. Der Aktienpreis kann zwar springen, aber große Sprünge erfolgen zu angekündigten Stoppzeiten, so dass der Investor gewarnt ist. Es zeigt sich, dass man in diesem Fall recht nah an dem ursprünglichen Modell von Bank und Baum ist, in dem die Aktienpreisprozesse stetig sind.

Durch das Zulassen von angekündigten Sprüngen lassen sich einerseits „reale“ Spezialitäten wie Börsenschlusszeiten, Aktionärsversammlungen, etc. modellieren.

Andererseits lassen sich einfache Prozesse, z.B. reine Sprungprozesse, studieren (etwa im Vergleich zu ihren zeitdiskreten Analoga, die für Marktschonung weniger Spielraum lassen).

Zudem lässt sich die Rolle der Stetigkeit der Aktienpreisprozesse in einer etwas anderen Perspektive sehen: Die Eigenschaft, die der Großinvestor von der Stetigkeit benötigt, ist gerade die Überraschungslosigkeit (d.i. die Ankündigung großer Sprünge).

In Kapitel 8 wird die Untersuchung auf Finanzmärkte *mit Überraschungen*, das Herzstück des zweiten Teils, ausgedehnt. Die Sprünge des Aktienpreisprozesses werden nicht mehr als angekündigt vorausgesetzt. Stattdessen wird in geeigneter Weise angenommen, dass die p -ten Momente der Sprünge stets existieren und dass der Investor selbst die Verlustfunktion $l(x) = |x|^p$ verwendet, um seinen erwarteten Verlust zu bestimmen. Unter diesen und ansonsten gleichen Voraussetzungen wie in Kapitel 7 kann der Großinvestor unter Einsatz marktschonender Strategien die gleichen Vermögensprozesse modulo Transaktionskosten (insbesondere gleiche Pay-Offs modulo Transaktionskosten zum Endzeitpunkt T) zu fast gleichen Kosten (bei beliebig

¹⁰Genauer etwas stärker: vorhersehbaren $\text{l}\grave{\text{a}}\text{g}\text{l}\grave{\text{a}}\text{d}$ Prozessen.

kleinem erwarteten l -gewichteten Verlust) erreichen, wie bei Verwendung vorhersehbarer quadratvariierender (sogar λ -glàd) Strategien.

In Kapitel 9 werden im Anschluss an Bank und Baum [6] Bedingungen aufgezeigt, unter denen der Großinvestor Pay-Offs eines Kleininvestors approximierend replizieren kann. Eine No-Arbitrage-Betrachtung beschließt das Kapitel.

Kapitel 7

Illiquide, ohne Überraschungen

7.1 Vorbereitungen

In den Definitionen 7.7 bzw. – eleganter – 7.7' wird ein Aktienpreis ohne Überraschungen definiert. Zunächst wird sich mit „relativ großen“ Sprüngen beschäftigt.

Ist P Aktienpreis i.S.d. Def. 6.5, dann ist P 1-glatt i.S.v. Def. 6.3, und das bedeutet insbesondere pfadweise Gleichmäßigkeit im Sinne des Lemmas 2.7 und der Bemerkung 2.8 auf S. 25. Daher ist definierbar:

Definition 7.1 (Großsprung). *Sei P Aktienpreis, $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon, K > 0$ und $t \in [0, T]$. $s \in (t, T]$ heißt n -ter (ϵ, K, ω) -Großsprung nach t , wenn mit*

$$\hat{P}_s^K(\omega) := \sup_{|x| \leq K} |\Delta P(x, s, \omega)|$$

gilt:

$$K \hat{P}_s^K(\omega) \geq \frac{\epsilon}{2},$$

und es existieren paarweise verschiedene $s_1, \dots, s_{n-1} \in (t, s)$ mit

$$K \hat{P}_{s_i}^K(\omega) \geq \frac{\epsilon}{2} \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Die pfadweise Gleichmäßigkeit impliziert auch, dass f.a. Pfade nur endlich viele (ϵ, K, ω) -Großsprünge aufweisen. Für τ Stoppzeit auf $[0, T]$ gibt es daher eine Stoppzeitenfolge $(\beta^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und für fast alle ω eine natürliche Zahl $l(\omega)$

so, dass $\beta^1(\omega), \dots, \beta^{l(\omega)}(\omega)$ die $l(\omega)$ (ϵ, K, ω) -Großsprünge nach $\tau(\omega)$ sind, so dass gilt

$$\tau(\omega) < \beta^1(\omega) < \beta^2(\omega) < \dots < \beta^{l(\omega)}(\omega) \leq T \quad \text{f.s.} \quad (7.1)$$

und

$$\beta^{l(\omega)}(\omega) \leq \beta^{l(\omega)+1}(\omega) = \beta^{l(\omega)+2}(\omega) = \dots = T \quad \text{f.s.} \quad (7.2)$$

Definition 7.2. Die Stoppzeiten β^n aus (7.1) und (7.2) heißen die (ϵ, K) -Großsprünge (nach τ), β^m ist der m -te (ϵ, K) -Großsprung nach τ .

Definition 7.3. Sei θ ein vorhersehbarer $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Prozess. Dann wird durch

$$\theta_t^* := \sup\{|\theta_{s-}| \vee |\theta_s| \vee |\theta_{s+}| : 0 \leq s \leq t\}$$

ein adaptierter aufsteigender $\text{c\`a}d\text{l\`a}g$ Prozess definiert.

Ist $K \in \mathbb{N}$ gegeben, dann ist durch

$$K_t := K \vee \lceil \theta_t^* \rceil$$

ein adaptierter aufsteigender $\text{c\`a}d\text{l\`a}g$ Prozess mit Werten in \mathbb{N} definiert¹.

Für fast alle ω gibt es nur endlich viele $(\epsilon, K_t(\omega))$ -Großsprünge (d.h. $s \in [\tau, T]$ mit $K_s(\omega) \hat{P}_s^{K_s(\omega)}(\omega) \geq \frac{\epsilon}{2}$)

$$\tilde{\beta}^1(\omega) < \tilde{\beta}^2(\omega) < \dots$$

auf $(\tau(\omega), T]$, weil fast alle $\theta_t(\omega)$ $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ sind und $T < \infty$ ist. Daher gibt es zu vorhersehbarem $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Prozess θ und $K \in \mathbb{N}$ auch eine aufsteigende Stoppzeitenfolge

$$\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2, \dots \quad (7.3)$$

mit der Eigenschaft

$$\tau(\omega) < \tilde{\beta}^1(\omega) < \tilde{\beta}^2(\omega) < \dots < \tilde{\beta}^{l(\omega)}(\omega) \leq T$$

und

$$\tilde{\beta}^{l(\omega)}(\omega) < \tilde{\beta}^{l(\omega)+1}(\omega) = \tilde{\beta}^{l(\omega)+2}(\omega) = \dots = T$$

für fast alle ω , so dass für fast alle ω : $\tilde{\beta}^m(\omega) < T \Rightarrow \tilde{\beta}^m(\omega)$ ist der m -te $(\epsilon, K_t(\omega))$ -Großsprung.

¹ $\lceil \cdot \rceil$ ist „nächstgrößere ganze Zahl“: für $\delta \in [0, 1)$ ist $\lceil n + \delta \rceil := n + 1$.

Definition 7.4. Die Stoppzeiten $\tilde{\beta}^n$ aus (7.3) heißen die (ϵ, K_t) -Großsprünge (nach τ), $\tilde{\beta}^m$ heißt der m -te (ϵ, K_t) -Großsprung nach τ .

Definition 7.5. Eine Stoppzeit β auf $[0, T]$ heißt angekündigt, wenn es eine Stoppzeitenfolge $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta$ gibt, so dass $\beta_j \xrightarrow{f.s.} \beta$ gilt.

Definition 7.6 (δ -Begleiter). Sei τ Stoppzeit auf $[0, T]$, θ ein $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Prozess auf $[\tau, T]$ und $\delta > 0$. Als δ -Begleiter von θ wird der reine $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Sprungprozess $\bar{\theta}$ bezeichnet, der nur zu den induktiv durch $\gamma_0 := \tau$ und

$$\gamma_m := \inf\{s \in (\gamma_{m-1}, T] : |\theta_s - \bar{\theta}_{\gamma_{m-1}+}| \geq \delta \text{ oder } |\theta_{s+} - \bar{\theta}_{\gamma_{m-1}+}| \geq \delta\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

definierten Stoppzeiten springt und für den gilt:

$$\bar{\theta}_{\gamma_m} = \theta_{\gamma_m}, \quad \bar{\theta}_{\gamma_{m+}} = \begin{cases} \theta_{\gamma_{m+}}, & \text{falls } |\theta_{\gamma_{m+}} - \theta_{\gamma_m}| \geq \delta, \\ \theta_{\gamma_m} & \text{andernfalls.} \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

Der δ -Begleiter ist nie weiter als δ von θ entfernt (vgl. Abb. 7.1).

Definition 7.7. Ein Aktienpreis P heißt Aktienpreis ohne Überraschungen, wenn für alle $K \geq 0$ gilt: Für alle $\epsilon > 0$ ist der n -te (ϵ, K) -Großsprung i. s. d. Def. 7.2 angekündigte Stoppzeit. (Vgl. auch elegantere Definition 7.7'.)

Bemerkung 7.8. Dann sind auch für $K \in \mathbb{N}$ und damit gebildetes K_t die (ϵ, K_t) -Großsprünge angekündigte Stoppzeiten. \diamond

Sei $K \in \mathbb{R}_+$. Das Kompaktum $[-K, K]$ werde mit \mathbb{K} bezeichnet. Mit der schon eingeführten Bezeichnung $\hat{P}_t^K = \sup_{\vartheta \in \mathbb{K}} |\Delta P(\vartheta)_t|$ lässt sich das Sprungbetragsmaß in Anlehnung an Jacod und Shiryaev, [48], Satz 1.16, S. 69, definieren.

$$\mu^{P|\mathbb{K}}(\omega, dt, dx) := \sum_s 1_{\{\hat{P}_s^K \neq 0\}} \epsilon_{(s, \hat{P}_s^K)}(dt, dx).$$

Damit lässt sich die zu Definition 7.7 äquivalente Definition formulieren:

Definition 7.7'. Sei P Aktienpreis. P heißt Aktienpreis ohne Überraschungen, wenn für alle $K \in \mathbb{R}_+$ das Sprungbetragsmaß $\mu^{P|\mathbb{K}}$ vorhersehbar ist.

Die beiden Definitionen sind äquivalent, denn die Vorhersehbarkeit von $\mu^{P|\mathbb{K}}$ ist damit gleichbedeutend, dass die Abbildung $(\omega, t) \mapsto \hat{P}_t^K(\omega)$ \mathcal{P} - \mathcal{B} -messbar ist. Dies ist zu $\{(\omega, t) : \hat{P}_t^K(\omega) \geq \epsilon\} \in \mathcal{P}$ äquivalent. Nach Dellacherie und Meyer² ist dies, da jeder ω -Schnitt dieser Menge nur endlich viele

²S. [24], S. xiii. S. Beweis zu Th. B, S. xiii f. („enumerate the jumps“).

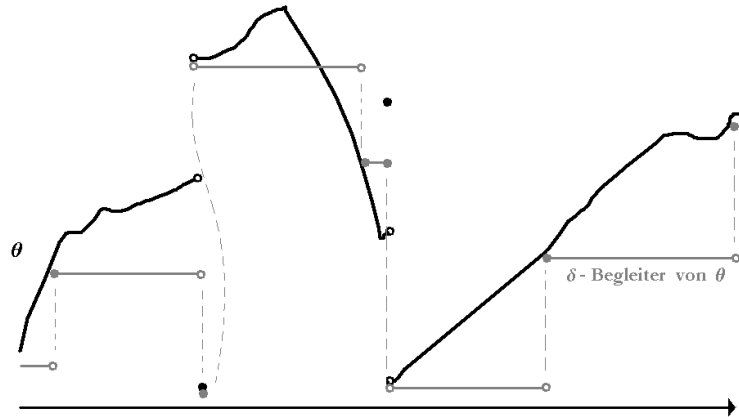


Abbildung 7.1: delta-Begleiter

Zeitpunkte enthält, damit gleichbedeutend, dass sich diese Menge auf eine aufsteigende Folge von vorhersehbaren Stoppzeiten aufteilt. Das ist aber die Forderung, die Definition 7.7 an P erhebt.

Lemma 7.9 (làglàd-predictable-Lemma). 1. Ist θ vorhersehbar làglàd und β angekündigte Stoppzeit auf $[0, T]$, dann ist $\theta_\beta \in \mathcal{F}_{\beta-}$.

2. θ sei vorhersehbar làglàd und τ Stoppzeit auf $[0, T]$. Dann ist für $\delta > 0$

$$\beta := \inf\{s \in (\tau, T] : |\theta_s - \theta_{s-}| \geq \delta\}$$

eine angekündigte Stoppzeit.

Beweis. 1.: Der zu β gestoppte Prozess θ (θ^β) ist vorhersehbar, weil θ ist, und es gilt $\theta_\beta = \theta_\beta^\beta$. Nach Dellacherie und Meyer [23], Th. 88 C, S. 141, ist $\bar{\theta}_\beta \in \mathcal{F}_{\beta-}$.

2.: Indem man von θ θ_τ abzieht und θ^β betrachtet, sieht man, dass der Graph von β Debut und Rechtsabschluss der vorhersehbaren Menge

$$\{(\omega, s) \in \Omega \times [0, T] : |\theta_s(\omega)| \geq \delta\}$$

ist; nach [23], Bemerkung 87 (d), S. 138, ist β daher eine angekündigte Stoppzeit. \square

Das nächste Lemma ist im Wesentlichen eine Übertragung des Lemmas A.2 aus Bank und Baum [6], S. 17, von konstanten auf angekündigte Stoppzeiten, so dass sich die Beweise wesentlich nur im Mittelteil bei der Konstruktion der Prozesse unterscheiden.

Lemma 7.10. *Sei τ eine Stoppzeit auf $[0, T]$. Sei β eine Stoppzeit auf $(\tau, T]$. β werde durch $\tau < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta$ angekündigt. Seien Zufallsvariablen $\vartheta_\tau \in L^0(\mathcal{F}_\tau)$ und $\vartheta_\beta \in L^0(\mathcal{F}_{\beta-})$ gegeben. Dann ist ϑ_τ der Anfangswert und ϑ_β der terminale Wert eines stetigen adaptierten Prozesses*

$$\tilde{\vartheta} = \tilde{\vartheta}(\tau, \vartheta_\tau; \beta, \vartheta_\beta)$$

auf $[\tau, \beta]$, wobei \mathbb{P} -fast jeder Pfad von ϑ von beschränkter Variation auf $[\tau, \beta]$ ist.

Beweis. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ durch $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ gegeben. Nach dem Martingalkonvergenzsatz für zeitdiskrete Martingale konvergiert

$$M_{\beta_k} := \mathbb{E}[f(\vartheta_\beta) | \mathcal{F}_{\beta_k}]$$

\mathbb{P} -fast sicher und in $L^1(\mathbb{P})$ gegen $\mathbb{E}[f(\vartheta_\beta) | \mathcal{F}_{\beta-}] = f(\vartheta_\beta)$, wenn (β_k) die Folge der β ankündigenden Stoppzeiten ist.

Ist eine Cauchy-Folge (g_n) in einem metrischen Raum (E, m) gegeben, so enthält sie Teilfolgen (h_n) , die die Eigenschaft $\sum_n m(h_n, h_{n+1}) < \infty$ haben. Man setze etwa $h_1 := g_1$ und wenn h_1, \dots, h_n geeignet festgelegt wurden, wähle man h_{n+1} so, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt: $m(h_{n+1}, h_{n+j}) \leq 2^{-n}$, was wegen der Cauchy-Eigenschaft möglich ist.

Daher darf angenommen werden, dass schnelle $L^1(\mathbb{P})$ -Konvergenz in dem Sinne, dass $\sum_k \mathbb{E}|M_{\beta_{k+1}} - M_{\beta_k}| < \infty$ gilt, vorliegt.

Setze $\beta_0 := \tau$ und $\vartheta_{\beta_k} := f^{-1}(M_{\beta_k})$. Betrachte die folgende „verzögerte affin-lineare hochwahrscheinliche Interpolation“:

0) $\tilde{\vartheta}$ behält den Wert ϑ_τ bis zum Zeitpunkt β_1 .

1) Zum Zeitpunkt β_1 wird – im Allgemeinen – die Richtung geändert, so dass $\tilde{\vartheta}$ die Höhe ϑ_{β_1} in folgendem Sinn möglichst schnell erreicht: So, dass nur höchstens mit einer \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$, die Höhe ϑ_{β_1} noch nicht erreicht ist, bevor der Zeitpunkt β_2 gekommen ist.

2) In jedem Fall wird zum Zeitpunkt β_2 – im Allgemeinen – die Richtung geändert, um sogar schneller als zuvor auf die Höhe ϑ_{β_2} zu kommen: So schnell nämlich, dass nur höchstens mit einer \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$, die Höhe ϑ_{β_2} noch nicht erreicht ist, bevor der Zeitpunkt β_3 gekommen ist.

3 - ∞) So fortfahrend. In jedem Schritt k wird die „Geschwindigkeit“ so erhöht, dass höchstens mit \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2^k}$ die Höhe ϑ_{β_k} noch nicht erreicht ist, bevor der Zeitpunkt β_{k+1} gekommen ist.

Es ergibt sich auf diese Weise ein stetiger adaptierter Prozess $\tilde{\vartheta}$. Die Variation von $\tilde{\vartheta}$ ist durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\vartheta_{\beta_{k+1}} - \vartheta_{\beta_k}| &\leq |f^{-1}(M_{\beta_1})| + |\vartheta_\tau| \\ &+ \sup_{|\eta| \leq \sup_k |M_{\beta_k}|} |f^{-1}'(\eta)| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} [|M_{\beta_{k+1}} - M_{\beta_k}|] \end{aligned}$$

beschränkt.

Da ϑ_β \mathbb{P} -fast sicher nur endliche Werte annimmt, ist $\sup_k |M_{\beta_k}|$ fast sicher strikt kleiner als 1, so dass das Supremum über $|f^{-1}'(\eta)|$ fast sicher nur endliche Werte annimmt. Fast alle $\tilde{\vartheta}$ -Pfade sind daher von endlicher Variation auf $[\tau, \beta]$, da aufgrund der schnellen L^1 -Konvergenz auch $\sum \mathbb{E}[|M_{\beta_{k+1}} - M_{\beta_k}|]$ fast sicher endlich ist.

Die Konstruktion stellt sicher, dass es für fast alle Pfade ein $N \in \mathbb{N}$ gibt,

so dass ab N alle Höhen erreicht werden, bevor die Richtung geändert wird.³ Insbesondere gilt für \mathbb{P} -fast alle $\omega \in \Omega$: $\lim_{t \nearrow \beta(\omega)} \tilde{\vartheta}_t(\omega) = \vartheta_{\beta(\omega)}(\omega)$. \square

7.2 Hauptlemma und Approximationsatz

Hauptlemma 7.11. *Sei τ eine Stoppzeit auf $[0, T]$ und $\epsilon > 0$. Zu jedem vorhersehbaren $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Prozess θ und einer Zufallsvariablen $\vartheta \in L^0(\mathcal{F}_\tau)$ gibt es einen adaptierten stetigen FV-Prozess θ^ϵ so, dass*

$$\theta_\tau^\epsilon = \vartheta, \quad \mathbb{P} \left[\sup_{\tau < t \leq T} \left| \int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta_s^\epsilon, ds) \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon$$

und

$$\left| \Delta \left(\int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta_s^\epsilon, ds) \right) \right| \leq \epsilon$$

für alle $t \in (\tau, T]$ gilt.

Beweis. τ und ϵ seien gegeben. $K > 0$ werde beliebig gewählt. Definiere $K_t := K \vee \lceil \theta_t^* \rceil \in \mathbb{N}$ wie in Def. 7.3. Für $\delta \in (0, 1)$ sei $\bar{\theta}$ ein δ -Begleiter⁴ von θ auf $[\tau, T]$.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ wird ein adaptierter stetiger FV-Prozess θ^N konstruiert, der zu den (ϵ, K_t) -Großsprüngen $\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2, \dots$ genau den Wert des Originalprozesses θ hat, ansonsten aber möglichst dem δ -Begleiter $\bar{\theta}$ folgt.

Konstruktion von θ^N :

Die (ϵ, K_t) -Großsprünge $\tilde{\beta}^k$ und ihre Ankündiger $\tilde{\beta}_i^{k-1}$ lassen sich so „sortieren“, dass die Folge $(\tilde{\beta}_j^k)$ ($k \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$), mit $\tilde{\beta}_\infty^{k-1} := \tilde{\beta}_0^k := \tilde{\beta}^k$ und $\tilde{\beta}_0^0 := \tau$, entlang der indexikalischen Ordnung, die für Paare ${}^k_i := (k, i) \in \mathbb{N}_0 \times (\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$ durch

$$k < l \Rightarrow {}^k_i \prec {}^l_j \quad \forall i, j, \quad i < j \Rightarrow {}^k_i \prec {}^k_j$$

³Denn das Gegenereignis, dass für ∞ viele k die Höhe ϑ_{β_k} bis zum Zeitpunkt β_{k+1} nicht erreicht wird (A_k), hat nach dem Borel-Cantelli-Lemma eine \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit von 0, da wegen der „Schnelligkeit“ von $\tilde{\vartheta}$ für die A_k gilt: $\sum \mathbb{P}[A_k] < \infty$.

⁴I.S.d. Def. 7.6 auf S. 103.

gegeben ist, aufsteigt:

$$\tau = \tilde{\beta}^0 = \tilde{\beta}_0^0 \leq \tilde{\beta}_1^0 \leq \dots \leq \tilde{\beta}_\infty^0 = \tilde{\beta}^1 = \tilde{\beta}_0^1 \leq \tilde{\beta}_1^1 \leq \dots \leq \tilde{\beta}_\infty^1 = \tilde{\beta}^2 = \tilde{\beta}_0^2 \leq \dots$$

Eine weitere Stoppzeitenfolge ist durch $\alpha^{m,n}$, – im Wesentlichen – der n -te $\bar{\theta}$ -Sprung nach $\tilde{\beta}^m$ und vor oder zugleich $\tilde{\beta}^{m+1}$, gegeben:

$$\alpha^{m,n} := \inf\{s \in (\alpha^{m,n-1}, \tilde{\beta}^{m+1}] : \Delta\bar{\theta}_s \neq 0\} \wedge \tilde{\beta}^{m+1} \quad (m \in \mathbb{N}_0, \quad n \in \mathbb{N}),$$

wobei $\alpha^{m,0} := \tilde{\beta}^m$ und $\Delta\bar{\theta}_s := |\Delta^-\bar{\theta}_s| \vee |\Delta^+\bar{\theta}_s|$ ist.

Sei $N \in \mathbb{N}$. Es wird definiert: $\gamma^{m,0} := \alpha^{m,0}$, $r_{\gamma^{m,0}} := \text{sgn}(\bar{\theta}_{\gamma^{m,0}+} - \theta_{\gamma^{m,0}})$ und für $s \in [\gamma^{m,0}, T]$: $\theta_s^{m,N,0} := \theta_{\gamma^{m,0}} + N \cdot r_{\gamma^{m,0}} \cdot (s - \gamma^{m,0})$ ($m \in \mathbb{N}_0$). Für $n \in \mathbb{N}$ wird dann definiert:

$$\gamma^{m,n} := \inf\{s \in (\gamma^{m,n-1}, T] : \theta_s^{m,N,n-1} = \bar{\theta}_s\} \wedge \alpha^{m,n},$$

$$r_{\gamma^{m,n}} := \text{sgn}(\bar{\theta}_{\gamma^{m,n}+} - \theta_{\gamma^{m,n}}^{m,N,n-1})$$

und für $s \geq \gamma^{m,n}$:

$$\theta_s^{m,N,n} := \theta_{\gamma^{m,n}}^{m,N,n-1} + N \cdot r_{\gamma^{m,n}} \cdot (s - \gamma^{m,n}).$$

$\theta_s^{m,N,n}$ ist ein affin-linearer Prozess auf $[\gamma^{m,n}, T]$, der auf der Höhe $\theta_{\gamma^{m,n}}^{m,N,n-1}$ beginnt und sich von diesem Ausgangspunkt mit der Steigung $N \cdot r_{\gamma^{m,n}}$ bewegt.

$\theta^{m,N,0}$ beginnt in $\tilde{\beta}^m$, also im m -ten (ϵ, K_t) -Großsprung. $\theta^{m,N,0}$ bewegt sich von diesem Start in die Richtung $\bar{\theta}_{\tilde{\beta}^m+}$, also dorthin wo sich die càdlàg-Version von $\bar{\theta}$ schon befindet. (Es kann sein, dass sich $\bar{\theta}_{\tilde{\beta}^m+}$ gerade auf dieser Höhe befindet, dann ist die Richtung konstant ($r = 0$), andernfalls geht es nach oben ($r = 1$) oder nach unten ($r = -1$); wenn $r \neq 0$ ist, dann ist der Betrag der Steigung von $\theta^{m,N,0}$ gleich N .)

$\theta^{m,N,0}$ benötigt im Fall $r \neq 0$ gewisse Zeit, bis es die Höhe $\bar{\theta}_{\tilde{\beta}^m+}$ erreicht. Dies geschieht zum Zeitpunkt $\gamma^{m,1}$, wenn $\bar{\theta}$ nach $\gamma^{m,0}$ bis $\gamma^{m,1}$ konstant den Wert $\bar{\theta}_{\tilde{\beta}^m+}$ annimmt, andernfalls ist $\gamma^{m,1}$ der Zeitpunkt zu dem $\bar{\theta}$ zum erstenmal nach der Stoppzeit $\gamma^{m,0}$ springt.

$\theta^{m,N,1}$ beginnt auf der Höhe, den $\theta^{m,N,0}$ zum Zeitpunkt $\gamma^{m,1}$ hat. $\theta^{m,N,1}$ bewegt sich vom Start aus in Richtung $\bar{\theta}_{\gamma^{m,1}+}$ mit Steigungsbetrag N (oder konstant).

Bewegt sich $\theta^{m,N,1}$ konstant, dann ist $\gamma^{m,2}$ der nächste $\bar{\theta}$ -Sprung. Bewegt sich $\theta^{m,N,1}$ mit Steigungsbetrag N , dann kann $\gamma^{m,2}$ der nächste $\bar{\theta}$ -Sprung oder der nächste Schnittpunkt von $\theta^{m,N,1}$ und $\bar{\theta}$ sein. So geht es weiter.

Durch Aneinanderfügen der Prozesse $\theta^{m,N,n} 1_{[\gamma^{m,n}, \gamma^{m,n+1}]}$ ergibt sich ein adaptierter stetiger Prozess $\theta^{m,N}$ auf $[\tilde{\beta}^m, \tilde{\beta}^{m+1}]$ der f.s. FV ist, weil die Variation durch die Variation von $\bar{\theta}$ auf $[\tilde{\beta}^m, \tilde{\beta}^{m+1}] + |\theta_{\tilde{\beta}^m}^{m,N,0}|$ beschränkt ist.

Durch Aneinanderfügen der Prozesse $\theta^{0,N} 1_{[\tau, \tilde{\beta}_N^0]}, \tilde{\vartheta}(\tilde{\beta}_N^0, \theta_{\tilde{\beta}_N^0}^{0,N}; \tilde{\beta}^1, \theta_{\tilde{\beta}^1}),$
 $\theta^{1,N} 1_{[\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}_N^1]}, \tilde{\vartheta}(\tilde{\beta}_N^1, \theta_{\tilde{\beta}_N^1}^{1,N}; \tilde{\beta}^2, \theta_{\tilde{\beta}^2}), \theta^{2,N} 1_{[\tilde{\beta}^2, \tilde{\beta}_N^2]}, \tilde{\vartheta}(\tilde{\beta}_N^2, \theta_{\tilde{\beta}_N^2}^{2,N}; \tilde{\beta}^3, \theta_{\tilde{\beta}^3}), \dots$
 ergibt sich ein adaptierter stetiger FV-Prozess θ^N auf $[\tau, T]$, da es für \mathbb{P} -fast alle ω nur endlich viele $(\epsilon, K_t(\omega))$ -Großsprünge gibt, so dass fast sicher nur endlich viele Komponenten aneinandergefügt werden müssen, um die Konstruktion bis T durchzuführen. (Die von den vier Parametern abhängigen $\tilde{\vartheta}$ -Prozesse existieren nach Lemma 7.11, insbesondere – im Hinblick auf das *làglàd-predictabel*-Lemma 7.10 (1) – da die $\tilde{\beta}^j$ angekündigte Stoppzeiten sind.)

Nachdem θ^N nun konstruiert ist, wird zunächst untersucht, wie sich die Sprünge der Differenzen der Itô-Integrale von θ und θ^N verhalten. Sei dazu σ eine beliebige Stoppzeit auf $(\tau, T]$ zu der die Differenzsprünge untersucht werden sollen.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& \left| \Delta \left(\int_{(\tau, \sigma]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, \sigma]} L(\theta^N, ds) \right) \right| \\
&= \left| \Delta \int_{(\tau, \sigma]} L(\theta_s, ds) - \Delta \int_{(\tau, \sigma]} L(\theta^N, ds) \right| \\
&= \left| \Delta L(\theta_\sigma, \sigma) - \Delta L(\theta_\sigma^N, \sigma) \right| \\
&= \left| L(\theta_\sigma, \sigma) - L(\theta_\sigma^N, \sigma) - (L(\theta_\sigma, \sigma-) - L(\theta_\sigma^N, \sigma-)) \right| \\
&= \left| \int_0^{\theta_\sigma} P(x, \sigma) dx - \int_0^{\theta_\sigma^N} P(x, \sigma) dx \right. \\
&\quad \left. - \left(\int_0^{\theta_\sigma} P(x, \sigma-) dx - \int_0^{\theta_\sigma^N} P(x, \sigma-) dx \right) \right| \\
&= \left| \int_{\theta_\sigma^N}^{\theta_\sigma} P(x, \sigma) dx - \int_{\theta_\sigma^N}^{\theta_\sigma} P(x, \sigma-) dx \right| \\
&= \left| \int_{\theta_\sigma^N}^{\theta_\sigma} \Delta P(x, \sigma) dx \right| \\
&\leq \left| \theta_\sigma - \theta_\sigma^N \right| \sup_{x \in [\theta_\sigma^N, \theta_\sigma]} |\Delta P(x, \sigma)|.
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Wegen $[\theta_t^N, \theta_t] \subset [-K_t, K_t]$ und Def. 7.1 ist

$$\left| \Delta \left(\int_{(\tau, \sigma]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, \sigma]} L(\theta^N, ds) \right) \right| \leq 2K_t \hat{P}_t^{K_t}.$$

Auf der Ω -Teilmenge

$$\left\{ \omega \in \Omega : (\omega, t) \in \Omega \times [0, T] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} \tilde{\beta}^m \right\}$$

gilt im Hinblick auf die Definition 7.4 der Großsprünge $\tilde{\beta}^m$ daher

$$\left| \Delta \left(\int_{(\tau, \sigma]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, \sigma]} L(\theta^N, ds) \right) \right| < \epsilon.$$

Im Hinblick auf $\theta_{\tilde{\beta}^m}^N = \theta_{\tilde{\beta}^m}$ gemäß der Konstruktion der θ^N folgt also insbesondere für alle $t \in (\tau, T]$:

$$\left| \Delta \left(\int_{(\tau, t]} L(\theta_s^N, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) \right) \right| < \epsilon;$$

θ^N ist also ein adaptierter stetiger FV-Prozess mit dieser Eigenschaft.

Für zwei Prozesse X und Y werde für den Moment

$$X \approx Y \Leftrightarrow \mathbb{P} \left[\sup_{\tau \leq t \leq T} |X_t - Y_t| \geq \frac{\epsilon}{2} \right] \leq \frac{\epsilon}{2}$$

definiert. Sei A die vorhersehbare Menge aller (ϵ, K_t) -Großsprünge nach τ . Es gilt dann

$$\int_{\tau+} L(1_A \theta_s^N, ds) = \int_{(\tau, \cdot]} L(1_A \theta_s^N, ds) = \int_{(\tau, \cdot]} L(1_A \theta_s, ds),$$

da θ^N auf den (ϵ, K_t) -Großsprüngen die gleichen Werte wie θ annimmt, und, da $1_{A^c} \theta^N \rightarrow 1_{A^c} \bar{\theta}$ punktweise, gilt nach Satz 5.12

$$\int_{(\tau, \cdot]} L((1_{A^c} \theta_s^N), ds) \xrightarrow{\text{ucp}} \int_{(\tau, \cdot]} L((1_{A^c} \bar{\theta}), ds) \approx \int_{(\tau, \cdot]} L((1_{A^c} \theta), ds)$$

(da $\bar{\theta} \rightarrow \theta$ ($\delta \rightarrow 0$) und damit auch $1_{A^c} \bar{\theta} \rightarrow 1_{A^c} \theta$).

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & \int_{(\tau, \cdot]} L(\theta_s^N, ds) \\ &= \int_{(\tau, \cdot]} L((1_A \theta_s^N)_s, ds) + \int_{(\tau, \cdot]} L((1_{A^c} \theta_s^N)_s, ds) \\ &\approx \int_{(\tau, \cdot]} L((1_A \theta)_s, ds) + \int_{(\tau, \cdot]} L((1_{A^c} \bar{\theta})_s, ds) \\ &\approx \int_{(\tau, \cdot]} L((1_A \theta)_s, ds) + \int_{(\tau, \cdot]} L((1_{A^c} \theta)_s, ds) \\ &= \int_{(\tau, \cdot]} L(\theta_s, ds). \end{aligned}$$

Es ergibt sich demnach

$$\mathbb{P} \left[\sup_{\tau < t \leq T} \left| \int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta_s^N, ds) \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon.$$

□

Definition 7.12. Eine Großinvestorstrategie θ heißt f.s.-zulässig, wenn es eine von ω unabhängige Schranke K gibt, so dass für \mathbb{P} -fast alle ω gilt, dass der Vermögensprozess modulo Transaktionskosten $\tilde{V}_t^\theta(\omega)$ (s. Def. 6.13) von unten durch K beschränkt ist.

Aus dem Hauptlemma folgt der „Approximationssatz“ genauso wie in Bank und Baum [6], S. 9, mit dem Unterschied, dass hier noch die Beschränkung der Sprünge der Itô-Integral-Differenzen ausgenutzt wird:

Approximationssatz 7.13. Zu jedem vorhersehbaren *lâglâd* Prozess θ und jedem $\epsilon' > 0$ gibt es einen adaptierten stetigen FV-Prozess $\theta^{\epsilon'}$ so, dass

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t L(\theta_s, ds) - \int_0^t L(\theta_s^{\epsilon'}, ds) \right| \leq \epsilon' \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

gilt.

Insbesondere gilt: Zu jedem $\epsilon' > 0$ und zu jeder f.s.-zulässigen Großinvestorstrategie θ gibt es eine f.s.-zulässige zahme (d.h. adaptiert, stetig, FV) Großinvestorstrategie $\tilde{\theta}$ so, dass gilt:

$$|\tilde{V}_T^\theta - V_T^{\tilde{\theta}}| \leq \epsilon'.$$

Beweis. Sei eine positive Nullfolge $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $2 \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon'$ gegeben. Sei $\tau_0 := 0$ und $\theta_0^{\epsilon'} := \theta_0$.

Induktionsannahme: Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\theta^{\epsilon'}$ auf $[0, \tau_n]$ schon definiert.

Nach dem Hauptlemma gibt es für $\tau := \tau_n$, $\vartheta := \theta_\tau^{\epsilon'}$ und $\epsilon := \epsilon_{n+1}$ einen „zahmen“ ϵ -Approximator θ^ϵ auf $[\tau, T]$ so, dass $\theta_\tau^\epsilon = \vartheta$,

$$\mathbb{P} \left[\sup_{\tau < t \leq T} \left| \int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta_s^\epsilon, ds) \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon$$

und $\left| \Delta \left(\int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta_s^\epsilon, ds) \right) \right| \leq \epsilon$ gilt.

Mit $\theta^{n+1} := \theta^\epsilon$ wird durch

$$\tau_{n+1} := \inf \left\{ t > \tau_n : \left| \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s^{n+1}, ds) \right| \geq \epsilon_{n+1} \right\} \wedge T$$

eine Stoppzeit definiert.

Induktionsschritt: Setze $\theta^{\epsilon'}$ auf $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ durch θ^{n+1} fort: $\theta^{\epsilon'}$ ist jetzt auf $[0, \tau_{n+1}]$ definiert, adaptiert, stetig und FV.

Betrachte

$$\mathbb{P}[\tau_{n+1} < T] = \mathbb{P} \left[\sup_{\tau_n < t \leq T} \left| \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s^{n+1}, ds) \right| \geq \epsilon_{n+1} \right].$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist wegen

$$\mathbb{P} \left[\sup_{\tau < t \leq T} \left| \int_{(\tau, T]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, T]} L(\theta_s^\epsilon, ds) \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon$$

höchstens ϵ_{n+1} . Es folgt $\sum \mathbb{P}[\tau_n < T] \leq \epsilon'$ also daher $\sum \mathbb{P}[\tau_n < T] < \infty$, woraus mit dem Borel-Cantelli-Lemma $\mathbb{P}[\text{für } \infty \text{ viele } n: \tau_n < T] = 0$ folgt. Das bedeutet, dass \mathbb{P} -fast jeder Pfad von $\theta^{\epsilon'}$ durch endlich viele Schritte der obigen Art auf $[0, T]$ definiert ist und damit auch stetig und von beschränkter Variation ist.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_{[0, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0, t]} L(\theta_s^{\epsilon'}, ds) \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau_n < t \leq \tau_{n+1}} \left| \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s^{n+1}, ds) \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2\epsilon_{n+1} \leq \epsilon', \end{aligned}$$

aufgrund der Definition der Stoppzeiten τ_{n+1} und

$$\left| \Delta \left(\int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau_n, t]} L(\theta_s^{\epsilon^{n+1}}, ds) \right) \right| \leq \epsilon^{n+1}.$$

□

Kapitel 8

Illiquide, mit Überraschungen

8.1 Verschiedene Qualitäten des Risikos

Für stetige Aktienpreise hatten Bank und Baum die Resultate des vorhergehenden Kapitels schon gewonnen. Es hat sich darin gezeigt, dass man ähnliches erhält, wenn man stattdessen voraussetzt, dass die Aktienpreissprünge angekündigt sind. Betrachtungen zu springenden Aktienpreisen können nichts schaden, da die Annahme stetiger Preisprozesse die Wirklichkeit nicht immer passend modelliert. Dass die Aktienpreissprünge aber angekündigt sind, trifft auch nur auf recht spezielle Situationen zu: Prominentes Beispiel sind konstante Börsenschlusszeiten, die daher jedenfalls angekündigte Stoppzeiten sind. Kompliziertere angekündigte Stoppzeiten könnten sich dann ergeben, wenn ein Händler zum Beispiel Aktionärsversammlungen oder Bilanzpressekonferenzen „live“ verfolgt; hierbei können sich aus der Dramaturgie eventuell Ankündigungen für Preissprünge ergeben.

In den meisten Fällen werden jedoch auch große Sprünge plötzlich, ohne Ankündigung stattfinden. Es ist daher sinnvoll, Aktienpreise mit unangekündigten Sprüngen daraufhin zu untersuchen, ob ein Großinvestor bei der Replizierung eines Vermögensprozesses einerseits Transaktionskosten durch die Wahl von stetigen FV-Strategien vermeiden kann ohne andererseits ein – gemäß etwa seiner individuellen Nutzenfunktion – zu großes Risiko einzugehen, durch plötzliche Preissprünge unkontrolliert höhere Verluste zu erleiden, als bei Anwendung der originalen Strategie.

Diese Untersuchung soll in den Abschnitten 8.2 und 8.3 durchgeführt werden. Zuvor soll sich in Form eines Rückblicks auf die Beweise der Sätze 7.12 und 7.14 Klarheit über eine einfachere Approximationsaussage verschafft werden, bevor die komplizierteren Sätze 8.2 und 8.4 (in Abschnitt 8.3) formuliert und bewiesen werden.

Nach dem Approximationssatz des letzten Abschnitts löst im Finanzmarkt ohne Überraschungen der Großinvestor das Hedging-Problem fast sicher: Es verbleibt kein Risiko, dass die Replikation nicht gelingt. Aufgrund der Ankündigung der Großsprünge (wobei in die Bestimmung, was ein großer Sprung ist, auch die Originalstrategie θ eingeht) kann er die Geschwindigkeit, mit der er sich dem Ortswechsel der Originalstrategie anpasst, gegebenenfalls erhöhen, so dass der Großinvestor nur Überraschungen innerhalb seines im Zeitablauf kleiner werdenden Toleranzintervalls zu gewärtigen hat.

Um die zwar kleinen aber eventuell vielen Abweichungen schließlich in eine akzeptierte Abweichung, die aber fast sicher eingehalten wird, zu transformieren, steuert der Großinvestor die Verkleinerung der Toleranzintervalle so, dass sich deren Größen zu höchstens der akzeptierten Abweichung summieren. Da er zugleich die Möglichkeit hat, Strategien zu wählen, deren Abweichungswahrscheinlichkeiten diesen summierbaren Größen entsprechen, ergibt eine Anwendung des Lemmas von Borel-Cantelli, dass es fast sicher nur endlich vieler Strategiewechsel bis zum Zeitpunkt T bedarf: Damit wird f.s. eine Strategie auf $[0, T]$ überhaupt definiert, und es gehen die Eigenschaften der Stetigkeit und der beschränkten Variation auf die Hintereinandersetzung der Teilstrategien über. So ergibt sich der Approximationssatz aus dem Hauptlemma¹.

Im Hauptlemma 7.12 (mit einem festen „Toleranzrahmen“) selbst, wechselt der Großinvestor zu bestimmten Zeiten auf die $\tilde{\nu}$ -Prozesse, die das vorhergehende Lemma 7.11 bereitstellt, über, um sicher zu stellen, dass er keine Überraschungen außerhalb seines Toleranzrahmens erleidet. Würde der Großinvestor die Großsprungwarnungen ignorieren und zu keinem Zeitpunkt in den $\tilde{\nu}$ -Modus überwechseln, dann könnte er trotzdem eine akzeptierte Abweichung $1 \geq \epsilon > 0$ und eine akzeptierte Abweichungsüberziehungswahr-

¹Vgl. für stetige Aktienpreise Bank und Baum [6], Bew. von Th. 4.4, S. 9, und für Aktienpreise ohne Überraschung den Beweis des Approximationssatzes 7.14 in Kapitel 7.

scheinlichkeit ϵ wählen: Zu $\tau = 0$ gibt es gemäß des Beweises des Hauptlemmas eine Strategie θ^ϵ mit

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t L(\theta_s, ds) - \int_0^t L(\theta_s^\epsilon, ds) \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon, \quad (8.1)$$

auch dann, wenn der Investor auf einen etwaigen Wechsel zu den $\tilde{\theta}$ verzichtet. Das wäre eine Risikosteuerungs-Strategie im Sinne des *Quantil Hedgings* (vgl. Föllmer und Leukert [34]) und der Value-at-Risk-Konzeption.

Dabei kann θ auch beliebig vorhersehbar L -integriert gewählt werden: $\bar{\theta}$ ist dann im Allgemeinen kein δ -Begleiter, sondern ein einfach vorhersehbarer Prozess, der als Integrand das nicht-lineare Integral mit dem Originalintegranden hinreichend annähert, also mit der (8.1) analogen Eigenschaft

$$\mathbb{P} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t L(\theta_s, ds) - \int_0^t L(\bar{\theta}, ds) \right| \geq \frac{\epsilon}{2} \right] \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Die Konstruktion wird dann wie auf S. 107 ff. durchgeführt, aber unter Ignorierung der Großsprungwarnungen.

Heißt in diesem Kontext und nach Vorgabe eines $\epsilon > 0$ die vorhersehbare Großinvestorstrategie θ *quantil-zulässig*, wenn sie L -integrierbar ist und wenn es eine Schranke K mit

$$\mathbb{P} \left[\exists t \in [0, T] : \tilde{V}_t^\theta \leq K \right] \leq \epsilon$$

gibt, dann gilt, dass es für jede *quantil-zulässige Großinvestorstrategie* θ eine *quantil-zulässige zahme Großinvestorstrategie* $\tilde{\theta}$ gibt, so dass gilt:

$$\mathbb{P} \left[\left| \tilde{V}_T^\theta - V_T^{\tilde{\theta}} \right| \geq \epsilon \right] \leq \epsilon.$$

Eine Eigenschaft der Value-at-Risk-Konzeption ist, dass die Verlusthöhe nicht berücksichtigt wird, sondern nur die Wahrscheinlichkeit eines Verlusts überhaupt. Das kann dazu führen, dass Diversifikation unter dem VaR-Maß nicht belohnt wird: VaR ist – im Gegensatz zu AVaR (Average Value at Risk)

oder dem L^p -Risikomaß, das in 8.3 verwendet werden wird – nicht konvex.²

Daher soll nun die Untersuchung des Falles beginnen, in dem der Großinvestor über eine Nutzenfunktion verfügt, mit der er den erwarteten Nutzen eines Verlusts bemisst. Der dazu passende Begriff ist dann nicht Quantil Hedging, sondern *Efficient Hedging* im Sinne von Föllmer und Leukert [35].³

8.2 Probleme bei überraschenden Sprüngen

Zur Annäherung an das Problem sei der Fall betrachtet, dass ein Preisprozess P nur einen Sprung zu einer (nicht angekündigten) Stoppzeit β auf $[0, T]$ hat und dass ein Kleininvestor, der nur adaptierte stetige FV-Strategien verwendet, den Vermögensprozess eines anderen Kleininvestors replizieren möchte, der adaptierte càglàd-Strategien verwendet.

²Vgl. Föllmer und Schied [36], Ch. 4, S. 157 ff., und Föllmer und Schied [37], insb. S. 2.

³Bezüglich der Anreizstrukturen, in denen sich die Finanzmarktteilnehmer bewegen, spielen Principal-Agent- und ähnliche Interessenkonflikte eine große Rolle. Ein interessanter Aspekt sind konfliktäre Risikobemessungen.

So mag es für einen Hedgefonds „sinnvoll“ sein, eine Risikoposition mittels eines Value-at-Risk-Ansatzes 99%-iger Konfidenz zu bemessen. Z.B. könnte der Hedgefonds ein Geschäft abgeschlossen haben, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{128}$ einen Verlust von 127 Millionen Euro und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{127}{128}$ einen Gewinn von 1 Millionen Euro erwirtschaftet (indem der Hedgefonds eine siebenmalige Verdopplungsstrategie mit einem Grundeinsatz von 1 Millionen Euro anwendet – wegen dem Tisch-Limit nicht im Casino, aber etwa durch die Verwendung von binären Optionen am Kapitalmarkt). Die Bemessung mit dem Value-at-Risk-Ansatz würde die „abgekochte“ Risikohaltung widerspiegeln, dass man für eine ziemlich sichere Millionen die Möglichkeit des wirtschaftlichen Totalverlusts und bei dem Einsatz von Fremdkapital etwa strafbewehrte Wiedergutmachungsklagen zu gewärtigen hat.

Für beispielsweise eine diesen (und viele weitere!) Hedgefonds (etwa als „Prime Broker“) kreditierende Bank wäre es von Interesse, dass die Fonds solche Risiken nicht mittels eines Value-at-Risk-Ansatzes bemessen und dass sie die Risikobemessung der Bank zugänglich machen, wenn es darum geht, eine risikoadäquate Verzinsung festzulegen: Da sie viele Hedgefonds-Kunden hat, wird sie sehr hohe Verluste erleiden, denen bei VaR-induzierter Verzinsung keine entsprechend hohen Einnahmen gegenüber stehen. Die Bank wäre also eher an einer (transparenten) Risiko-Bemessung im Efficient-Hedging-Sinne interessiert, als an einer im VaR-Sinne.

Das Problem dem sich der Investor gegenüber sieht, besteht darin, dass ein unangenehm großer Preissprung gerade dann auftreten kann, wenn sich seine Strategie erheblich von der Originalstrategie unterscheidet. (Und da der Sprung nicht angekündigt wird, kann der Investor die Angleichungsgeschwindigkeit nicht fallgerecht erhöhen.)

Könnte der Investor für jedes $\delta > 0$ sicher stellen, dass seine Strategie in einem δ -Schlauch um die Originalstrategie verbleibt, und wäre der Sprungbetrag durch eine Konstante $K > 0$ beschränkt, dann würde

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[l \left(\left(\int_0^T \theta_s dP_s - \int_0^T \theta_s^\epsilon dP_s \right)^+ \right) \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[l \left(\left| \int_0^T \theta_s dP_s - \int_0^T \theta_s^\epsilon dP_s \right| \right) \right] \\ & \leq \mathbb{E} [l(\epsilon + \delta K)] = l(\epsilon + \delta K) \xrightarrow{\epsilon, \delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

gelten, d.h. der erwartete Verlust (bemessen mit einer stetigen Nutzenfunktion l mit $l(0) = 0$) könnte beliebig klein gehalten werden, wenn der Investor eine Strategie der Art θ^ϵ des Approximationsatzes 7.14 wählt, die in einem δ -Schlauch verbleibt (mit hinreichend kleinen ϵ und δ).

Beispiel mit zu großem Sprung:

Sei $\Omega = \mathbb{R}_+$. Die Sigma-Algebra \mathcal{F} werde von den Intervallen der Form $[i, i + 1/2)$ und $[i + 1/2, i + 1)$ ($i \in \mathbb{N}_0$) erzeugt.

Durch $\mathbb{P}[i, i + 1/2) = \mathbb{P}[i + 1/2, i + 1) = \frac{1}{2} \cdot 2^{-(i+1)}$ ist eine Wahrscheinlichkeit \mathbb{P} auf \mathcal{F} mit $\mathbb{P}[i, i + 1) = 2^{-(i+1)}$ und $\mathbb{P}[L] = \mathbb{P}[R] = 1/2$ gegeben, wobei $L := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [i, i + 1/2)$ und $R := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} [i + 1/2, i + 1)$ ist.

Sei $T = 2$. Als Filtration auf $[0, T]$ werde die kleinste Filtration betrachtet, so dass der càdlàg Prozess X , der für $\omega \in [i, i + 1)$ bis $t = 1 + 2^{-(i+1)}$ Null ist und ab (einschließlich) $t = 1 + 2^{-(i+1)}$ den Wert 2^{i+1} annimmt, und der càglàd Prozess ξ , der bis einschließlich $t = 1$ Null ist und ab $t = 1$ für $\omega \in L$ den Wert -1 und für $\omega \in R$ den Wert $+1$ annimmt, adaptiert ist. (Vgl. Abb. 8.1.)

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T |\xi'_s - \xi_s| dX_s \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{0 < s \leq T} |\xi'_s - \xi_s| \Delta X_s \right] \\ &\geq \sum_{i \geq \eta} \mathbb{P}[[i, i+1]] \delta 2^{i+1} \\ &= \sum_{i \geq \eta} \delta = \infty. \end{aligned}$$

8.3 Hauptlemma und Approximationsatz

Durch das Beispiel des letzten Abschnitts motiviert ist folgende Definition:

Definition 8.1. Sei $p \geq 1$. Der Aktienpreis P hat L^p -Sprünge, wenn mit $l(x) := |x|^p$ für alle $K \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[l \left(\hat{P}_\beta^K \right) \right] = \mathbb{E} \left[l \left(\sup_{|x| \leq K} |\Delta P_\beta^x| \right) \right] < \infty$$

für jede Stoppzeit β auf $[0, T]$ ist.

Hauptlemma 8.2. Sei $p \geq 1$ und die Verlustfunktion l durch $l(x) = |x|^p$ gegeben. Der Aktienpreis P habe L^p -Sprünge. θ sei ein vorhersehbarer $\text{l\`a}g\text{l}\ddot{a}d$ -Prozess auf $[0, T]$.

Sei τ Stoppzeit auf $[0, T]$ und $\vartheta \in L^p(\mathcal{F}_\tau)$. Sei eine weitere Zufallsvariable $\tilde{a} \in L^p(\mathcal{F}_\tau)$ sowie $\epsilon' \in (0, 1)$ gegeben.

Dann gibt es einen adaptierten stetigen FV-Prozess θ' auf $[\tau, T]$ und eine Stoppzeit σ auf $(\tau, T]$ mit

$$\mathbb{P}[\sigma < T] < \epsilon' \tag{8.2}$$

so, dass

$$\theta'_\tau = \vartheta \tag{8.3}$$

und

$$\mathbb{E} \left[l \left(\sup_{\tau < t \leq \sigma} \left| \int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} (\theta'_s, ds) \right| + \tilde{a} \right) \right] \leq \epsilon' + \mathbb{E}[l(\tilde{a})]. \tag{8.4}$$

Beweis. Sei $\epsilon'' := \frac{\epsilon'}{p^4 2^{p+1} + 2}$, jedenfalls „klein“. $K \geq 0$ sei so groß gewählt, dass

$$\mathbb{P}[\theta_T^* \geq \frac{K}{2}] < \epsilon'. \quad (8.5)$$

$\delta > 0$ sei so klein, dass

$$\mathbb{P}[\sup_{s \in [0, T]} l(\delta \hat{P}_s^K) \geq \epsilon''] < \epsilon'. \quad (8.6)$$

Die Stoppzeit

$$\beta := \inf\{s \in (\tau, T] : l(\delta \hat{P}_s^K) \geq \epsilon''\} \wedge T \quad (8.7)$$

hängt insbesondere von K und von δ ab, und δ' sei nun so klein gewählt, dass

$$0 < \delta' \leq \delta, \quad (8.8)$$

$$(\mathbb{E}[l(\delta' \hat{P}_\beta^K)])^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon''}{\mathbb{E}[l(\tilde{a})] \vee 1} \quad (8.9)$$

und

$$\mathbb{P}[\sup_{\tau < t \leq T} |\int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\bar{\theta}_s, ds)| \geq \frac{\epsilon''}{2}] \leq \epsilon'' \quad (8.10)$$

gilt, wobei

$$\bar{\theta} \text{ der } \delta'\text{-Begleiter von } \theta \text{ ist.} \quad (8.11)$$

(Die Existenz eines solchen δ' ergibt sich aus der Voraussetzung der L^p -Sprünge des Aktienpreises P (so dass die stochastische Konvergenz dominiert ist und damit hinreichend für die L^p -Konvergenz ist) und der Stetigkeit der nicht-linearen Integration, die insbesondere eine ucp-konvergierende Integrandenfolge in eine ucp konvergierende Folge überführt – s. Satz 5.12.)

θ' wird aus $\bar{\theta}$ mittels geeigneten affin-linearen Überbrückungen der $\bar{\theta}$ -Sprungstellen gewonnen. Die Überbrückungen müssen hinreichend große Steigung haben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass ein großer Aktienpreissprung gerade dann stattfindet, wenn sich θ' nicht auf $\bar{\theta}$, sondern auf einer $\bar{\theta}$ -Sprung-Überbrückung befindet, hinreichend klein ist (s. Abb. 8.2).

Zunächst sind weitere Stoppzeiten zu definieren.

$$\alpha_0 := \tau,$$

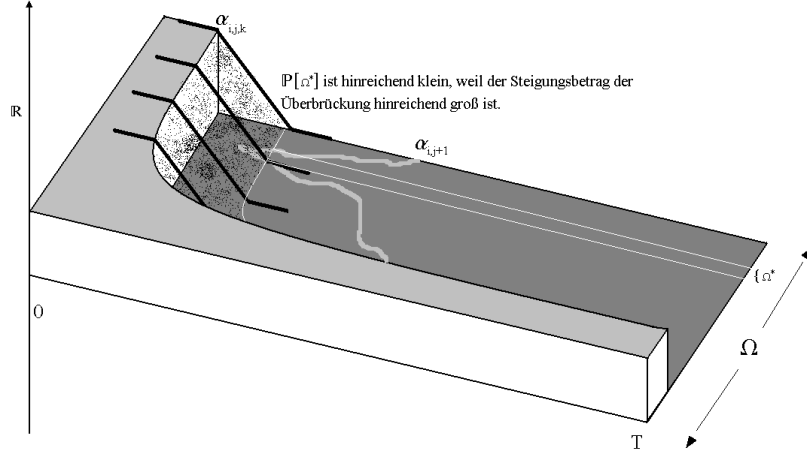


Abbildung 8.2: Überbrückung (gepunktet) ist hinreichend steil

$$\alpha_i := \inf\{s \in (\alpha_{i-1}, T] : \Delta^{-\bar{\theta}} \neq 0\} \wedge T \quad (i \in \mathbb{N}).$$

$$\alpha_{i,0} := \alpha_i \quad (i \in \mathbb{N}_0),$$

$$\alpha_{i,j} := \inf\{s \in (\alpha_{i,j-1}, T] : K\hat{P}_s^K \geq \epsilon''\} \wedge \alpha_{i+1} \quad (i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}).$$

$$\alpha_{i,j}^{(i+1)} := \{A_{i,j}\text{-er Ankündiger-nach-}\alpha_{i,j} \text{ von } \alpha_{i+1}\} \wedge \alpha_{i,j+1} \quad (i, j \in \mathbb{N}_0).^4$$

$$\alpha_{i,j,0} := \alpha_{i,j} \quad (i, j \in \mathbb{N}_0),$$

$$\alpha_{i,j,k} := \inf\{s \in (\alpha_{i,j,k-1}, T] : \Delta^{+\bar{\theta}}_s \neq 0\} \wedge \alpha_{i,j+1} \quad (i, j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}).$$

⁴Wobei $(A_{i,j})$ eine Doppelfolge natürlicher Zahlen ist, über deren Größen auf S. 125 geeignet verfügt wird. Die Stoppzeit $\alpha_{i,j}^{(i+1)}$ ist die $(A_{i,j})$ -te Ankündigung des nächsten θ -Linkssprungs nach $\alpha_{i,j}$.

α_i ist im Wesentlichen der „ i -te $\bar{\theta}$ -Linkssprung nach τ “. $\alpha_{i,j}$ ist im Wesentlichen der „ j -te (ϵ'', K) -Großsprung von P nach α_i vor oder zugleich α_{i+1} “. $\alpha_{i,j}^{(i+1)}$ ist die $A_{i,j}$ -te Stoppzeit aus der Stoppzeitenfolge, die die Stoppzeit $\alpha_{i,j} \vee \alpha_{i+1}$ ankündigt; dass die α_i angekündigte Stoppzeiten sind, ergibt sich aus dem lägläd-predictabel-Lemma 7.10. $\alpha_{i,j,k}$ ist im Wesentlichen der „ k -te $\bar{\theta}$ -Rechtssprung nach $\alpha_{i,j}$ vor oder zugleich $\alpha_{i,j+1}$ “.

Dreifach- bzw. Doppelfolgen positiver reeller bzw. natürlicher Zahlen werde wie folgt definiert:

$$c'_{i,j,k} := c_{i,j,k}^N := \frac{1}{N} c_{i,j,k} \quad (i, j, k \in \mathbb{N}_0, N \in \mathbb{N}),$$

$$A'_{i,j} := A_{i,j}^N := N A_{i,j} \quad (i, j \in \mathbb{N}_0, N \in \mathbb{N}),$$

wobei $c_{i,j,k}$ (und damit $c'_{i,j,k}$) so festgelegt werden soll, dass gilt:

- (i) $c_{i,j,k+1} \leq c_{i,j,k}/2 \quad (i, j, k \in \mathbb{N}_0)$,
- (ii) $\mathbb{P}[\alpha_{i,j,k+1} < \alpha_{i,j,k} + c_{i,j,k}; \alpha_{i,j,k} < \alpha_{i,j,k+1}] \leq \epsilon''_{i,j,k}$,
- (iii) Mit $h_{i,j,k} := K \hat{P}_{\alpha_{i,j,k}}^K 1_{[\alpha_{i,j,k} < \alpha_{i,j,k-1} + c_{i,j,k-1}; \alpha_{i,j,k-1} < \alpha_{i,j,k}]}$:
 $(\mathbb{E}[l(h_{i,j,k})])^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon''_{i,j,k}$

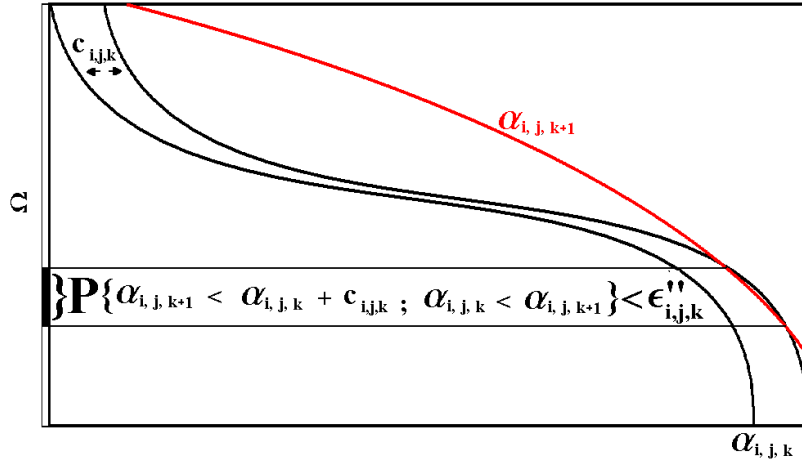
mit einer Dreifachfolge positiver reeller Zahlen $\epsilon''_{i,j,k}$, die

$$\sum_{i,j,k \in \mathbb{N}_0} \epsilon''_{i,j,k} \leq \frac{\epsilon''}{2} \tag{8.12}$$

erfüllt.

(ii) ist erfüllbar, weil sich die Stoppzeiten $\alpha_{i,j,k}$ aufgrund dessen, dass fast jeder Pfad des δ' -Begleiters $\bar{\theta}$ nur endlich viele Sprünge hat, fast sicher nicht häufen.

(iii) ist aus einer Aussage der Form (ii) ableitbar, weil P L^p -Sprünge hat und daher majorisierte Konvergenz in \mathbb{P} -Ws. hinreichend für L^p -Konvergenz ist.

Abbildung 8.3: Hinreichend kleine Wahl von $c_{i,j,k}$

Die Zahlen $A_{i,j}$ (und damit $A'_{i,j}$) sollen so groß gewählt werden (s. Abb. 8.3), dass gilt

- (i) $\mathbb{P}[\alpha_{i,j+1} \in [\alpha_{i,j}^{(i+1)}, \alpha_{i+1}); \alpha_{i,j}^{(i+1)} < \alpha_{i,j+1}] \leq \epsilon''_{i,j},$
- (ii) $h_{i,j}^* := K \hat{P}_{\alpha_{i,j}}^K 1_{[\alpha_{i,j} \in [\alpha_{i,j-1}^{(i+1)}, \alpha_{i+1}); \alpha_{i,j-1}^{(i+1)} < \alpha_{i,j}]} : (\mathbb{E}[l(h_{i,j}^*)])^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon''_{i,j}$

mit einer Doppelfolge positiver reeller Zahlen $\epsilon''_{i,j}$, die

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}_0} \epsilon''_{i,j} \leq \frac{\epsilon''}{2} \quad (8.13)$$

erfüllt.

Die Wahl der $A_{i,j}$ ist wiederum möglich, da sich die $\alpha_{i,j}$ f.s. nicht häufen (dies würde durch die Annahme, dass es $\epsilon > 0$ und $\alpha_{i,j}$ -Folge gäbe die

$\mathbb{P}[\alpha_{i,j+1} \in [\alpha_{i,j}, \alpha_{i+1}]] > \epsilon$ erfüllen würden, mittels eines Borell-Cantelli-Arguments konterkariert), und wegen der L^p -Sprünge von P .

Eine für später wichtige Bemerkung ist, dass die Inklusion

$$\{(\omega, s) \in \Omega \times [0, T] : K\hat{P}_s^K(\omega) \geq \epsilon'' \text{ und } \theta'_s(\omega) \neq \bar{\theta}_s(\omega)\} \subseteq \bigcup_{i,j,k \in \mathbb{N}_0} C_{i,j,k} \cup D_{i,j}$$

gilt, mit

$$C_{i,j,k} := [\alpha_{i,j,k}] \cap \pi_\Omega(1_{[\alpha_{i,j,k} < \alpha_{i,j,k-1} + c_{i,j,k-1}; \alpha_{i,j,k-1} < \alpha_{i,j,k}]} \times [0, T])$$

und

$$D_{i,j} := [\alpha_{i,j}] \cap \pi_\Omega(1_{[\alpha_{i,j} \in [\alpha_{i,j-1}^{(i+1)}, \alpha_{i+1}]; \alpha_{i,j-1}^{(i+1)} < \alpha_{i,j}]} \times [0, T]),$$

wobei Doppelstrichklammern den Übergang von einer Stoppzeit auf ihren Graphen und π_Ω die Projektion von $\Omega \times [0, T]$ auf Ω anzeigt.

Ausgehend von dem δ' -Begleiter $\bar{\theta}$ wird nun der zahme Prozess θ' auf $[\tau, T]$ definiert. Die eben definierten Stoppzeiten werden als Grenzen der Intervalle benötigt, auf denen diese Definitionen erfolgen.

Sei $N \in \mathbb{N}$. *Konstruktion von $\theta' := \theta^N$:*

$$\theta'_\tau := \vartheta.$$

Annahme: $i \in \mathbb{N}_0$ und θ' schon auf $[\tau, \alpha_i]$ definiert und dort zahm.

Annahme: $j \in \mathbb{N}_0$ und θ' auch schon auf $[\alpha_i, \alpha_{i,j}]$ definiert und auf $[\tau, \alpha_{i,j}]$ zahm.

Annahme: $k \in \mathbb{N}_0$ und θ' auch schon auf $[\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j,k}]$ definiert und auf $[\tau, \alpha_{i,j,k}]$ zahm.

Für $s \in [0, \alpha_{i,j,k+1} - \alpha_{i,j,k}]$ wird definiert:

$$\theta'_{\alpha_{i,j,k}+s} := \theta'_{\alpha_{i,j,k}} + \frac{\bar{\theta}_{\alpha_{i,j,k}+} - \theta'_{\alpha_{i,j,k}}}{c'_{i,j,k}/2} (s \wedge c'_{i,j,k}/2).$$

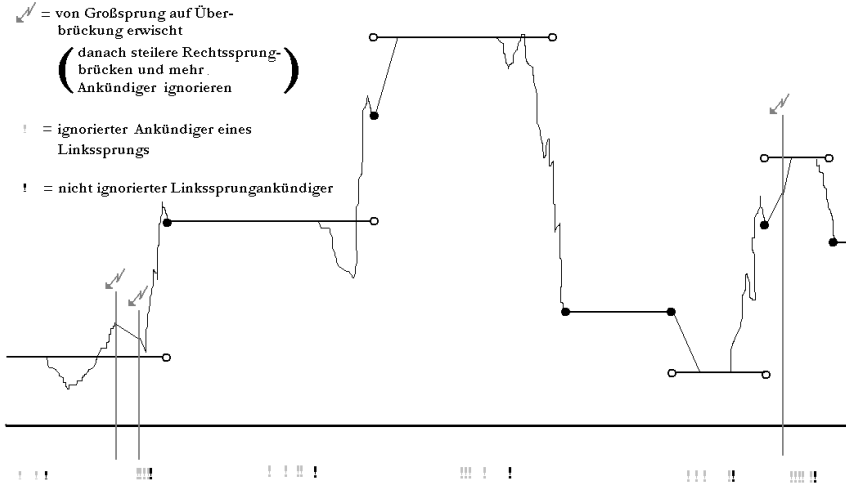


Abbildung 8.4: Gesamtkonstruktion des Approximators nach Satz 8.2 und 8.4

Annahme: $j \in \mathbb{N}_0$ und θ' auch schon auf $[\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}^{(i+1)}]$ definiert und auf $[\tau, \alpha_{i,j}^{(i+1)}]$ zahm.

Für $s \in [0, \alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}^{(i+1)}]$ wird definiert:

$$\theta'_{\alpha_{i,j}^{(i+1)}+s} := \tilde{\vartheta}(\alpha_{i,j}^{(i+1)}, \theta'_{\alpha_{i,j}^{(i+1)}}; \alpha_{i+1}, \bar{\theta}_{\alpha_{i+1}})_s,$$

wobei $\tilde{\vartheta}$ in Abhängigkeit von den vier Parametern wie in Lemma 7.11 definiert wird.

Die Konstruktion von θ' verläuft etwas epischer ausgedrückt wie folgt:⁵ θ' sei schon konstruiert bis zu dem $\bar{\theta}$ -Rechtssprung $\alpha_{i,j,k}$. Von der Höhe $\theta'_{\alpha_{i,j,k}}$ aus bewegt sich θ' in Richtung $\bar{\theta}_{\alpha_{i,j,k}+}$ und zwar gesteuert durch die Wahl

⁵Vgl. auch Abb. 8.4.

von $c_{i,j,k}$ so schnell, dass die Wahrscheinlichkeit, relativ lange Zeit relativ weit von $\bar{\theta}$ entfernt zu sein, hinreichend klein ist.

Die nächste Richtungsänderung von θ' erfolgt zum Zeitpunkt $\alpha_{i,j,k+1}$ (wenn der Zeitpunkt $\alpha_{i,j}^{(i+1)}$ nicht vor her liegt). θ' bewegt sich nach der Richtungsänderung erneut in Richtung $\bar{\theta}$, genauer in Richtung $\bar{\theta}_{\alpha_{i,j,k+1}+}$.

Zum Zeitpunkt $\alpha_{i,j}^{(i+1)}$ wird die Warnung vor dem nächsten $\bar{\theta}$ -Linkssprung zum ersten Mal nach $\alpha_{i,j}$ nicht mehr ignoriert und θ' begibt sich in den durch die Konstruktion des Lemmas 7.11 gesteuerten Modus, der mittels einer diskreten Martingalkonstruktion immer hinreichend aktuell auf die neuesten Erwartungen bezüglich Zeit und Ort des nächsten $\bar{\theta}$ -Linkssprungs reagiert.

Die Steuerung durch die $A_{i,j}$ hat zum Ziel, dass die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Bewegungsmodus verlassen werden muss, bevor der Linkssprung erfolgt ist, hinreichend klein ist. Passiert es doch, nämlich dadurch, dass es zu einem $\bar{\theta}$ -Rechtssprung zum Zeitpunkt $\alpha_{i,j+1}$ kommt, wird wie gehabt verfahren, d.h. θ' bewegt sich hinreichend schnell in Richtung $\bar{\theta}_{\alpha_{i,j+1}+}$. Kann der Bewegungsmodus ungestört bis zu dem angekündigten $\bar{\theta}$ -Linkssprung zum Zeitpunkt α_{i+1} aufrecht erhalten werden, dann ist zu diesem Zeitpunkt die Richtung so zu ändern, dass sich θ' hinreichend schnell zu der Höhe $\bar{\theta}_{\alpha_{i+1}+}$ bewegt.

Da sich die Stoppzeiten $\alpha_{i,j,k}$ und $\alpha_{i,j}^{(i+1)}$, zu denen ein θ' -Richtungswechsel erfolgen kann, nicht häufen und da θ' auch im Bewegungsmodus des Lemmas 7.11 zahm ist, führt die Konstruktion zu einem zahmen Prozess θ' auf $[\tau, T]$.

Es soll nun gezeigt werden, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Stoppzeit σ gibt, so dass, mit $\theta' = \theta^N$, die Stoppzeit σ und der Prozess θ' die Eigenschaften (8.2) bzw. (8.4) haben (wobei $\theta'_\tau = \vartheta$ (8.3) schon klar ist).

Da θ^N in N punktweise und von $|\theta| + \delta$ dominiert gegen $\bar{\theta}$ konvergiert, folgt nach Satz 5.12 für $N \rightarrow \infty$

$$\int_{(\tau,t]} L(\theta_s^N, ds) \xrightarrow{\text{ucp}} \int_{(\tau,t]} L(\bar{\theta}_s, ds),$$

so dass durch Wahl eines hinreichend großen N (im Hinblick darauf, dass $\bar{\theta}$

gemäß (8.10) schon hinreichend approximierend gewählt wurde)

$$\mathbb{P} \left[\sup_{\tau < t \leq T} \left| \int_{(\tau, t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, t]} L(\theta'_s, ds) \right| \geq \epsilon'' \right] \leq \epsilon' \quad (8.14)$$

erreicht werden kann.

Für die Stoppzeit

$$\sigma := \beta \wedge \sigma_1 \wedge \sigma_2 \quad (8.15)$$

mit

$$\sigma_1 := \inf \{ s \in (\tau, T] : \theta_s^* \geq \frac{K}{2} \} \wedge T, \quad (8.16)$$

$$\sigma_2 := \inf \{ s \in (\tau, T] : \left| \int_{(\tau, s]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, s]} L(\theta'_s, ds) \right| \geq \epsilon'' \} \wedge T \quad (8.17)$$

und β aus (8.7) gilt aufgrund (8.15) und der an K gestellten Bedingung (8.5), dass $\mathbb{P}[\sigma < T] < \epsilon'$, also (8.2) gilt.

(8.4) bleibt noch zu zeigen:

Aufgrund der Konstruktion von θ' lässt sich für fast jedes $\omega \in \Omega$ im Hinblick auf die „Inklusions-Bemerkung“ (S. 126) die folgende Feststellung treffen:

Ist $s \in [0, \sigma(\omega)]$ ein (ϵ'', K, ω) -Großsprung und $\theta'_s(\omega) \neq \bar{\theta}(\omega)$, dann gilt

$$|\theta_s(\omega) - \theta'_s(\omega)| \hat{P}_s^K(\omega) \leq \sum h_{i,j,k}(\omega) + \sum h_{i,j}^*(\omega). \quad (8.18)$$

Nach (7.4) auf S. 110 gilt

$$\begin{aligned} & \left| \Delta \left(\int_{(\tau, \sigma]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau, \sigma]} L(\theta'_s, ds) \right) \right| \\ & \leq |\theta_\sigma - \theta'_\sigma| \sup_{x \in [\theta'_\sigma, \theta_\sigma]} |\Delta \cdot P(x, \sigma)| \\ & \leq |\theta_\sigma - \theta'_\sigma| \hat{P}_\sigma^K. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Aufgrund der Definition von σ , (8.11) und (8.18) folgt daraus mit $h_{i,j,*} := h_{i,j}^*$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\tau < t \leq \sigma} \left| \int_{(\tau,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau,t]} L(\theta'_s, ds) \right| \\
& \leq \epsilon'' + |\Delta(\int_{(\tau,\sigma]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau,\sigma]} L(\theta'_s, ds))| \\
& \leq \epsilon'' + |\theta_\sigma - \theta'_\sigma| \hat{P}_\sigma^K \\
& \leq \begin{cases} \epsilon'' + \delta' \hat{P}_\sigma^K & \text{auf } [\theta'_\sigma = \bar{\theta}_\sigma] \\ \epsilon'' + \sum h_{i,j,k} & \text{auf } [K \hat{P}_\sigma^K \geq \epsilon''] \\ \epsilon'' + \epsilon'' & \text{auf } [K \hat{P}_\sigma^K < \epsilon''] \end{cases} \\
& \leq 2\epsilon'' + \delta' \hat{P}_\sigma^K + \sum_{\substack{i,j \in \mathbb{N}_0 \\ k \in \mathbb{N}_0 \cup \{*\}}} h_{i,j,k}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left| \sup_{\tau < t \leq \sigma} \left| \int_{(\tau,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau,t]} L(\theta'_s, ds) \right| + \tilde{a} \right| \leq \left| 2\epsilon'' + \delta' \hat{P}_\sigma^K + \sum h_{i,j,k} + \tilde{a} \right|.$$

Unter Zuhilfenahme der erweiterten Minkowskischen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
& \left(\mathbb{E} \left[l \left(\sup_{\tau < t \leq \sigma} \left| \int_{(\tau,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau,t]} L(\theta'_s, ds) \right| + \tilde{a} \right) \right] \right)^{1/p} \\
& \leq (\mathbb{E}[l(2\epsilon'' + \delta' \hat{P}_\sigma^K + \sum h_{i,j,k} + \tilde{a})])^{1/p} \\
& \leq (\mathbb{E}[l(2\epsilon'')])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\delta' \hat{P}_\sigma^K)])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\sum h_{i,j,k})])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\tilde{a})])^{1/p} \\
& \leq (\mathbb{E}[l(2\epsilon'')])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\delta' \hat{P}_\sigma^K)])^{1/p} + \sum (\mathbb{E}[l(h_{i,j,k})])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\tilde{a})])^{1/p}.
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Um

$$\mathbb{E} \left[l \left(\sup_{\tau < t \leq \sigma} \left| \int_{(\tau,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\tau,t]} L(\theta'_s, ds) \right| + \tilde{a} \right) \right] \leq \epsilon' + \mathbb{E}[l(\tilde{a})]$$

zu zeigen, genügt es nach (8.20)

$$\begin{aligned}
E & := \left((\mathbb{E}[l(2\epsilon'')])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\delta' \hat{P}_\sigma^K)])^{1/p} + \sum (\mathbb{E}[l(h_{i,j,k})])^{1/p} + (\mathbb{E}[l(\tilde{a})])^{1/p} \right)^p \\
& \leq \epsilon' + \mathbb{E}[l(\tilde{a})]
\end{aligned}$$

zu zeigen.

Wegen

$$\begin{aligned}
E - \mathbb{E}[l(\tilde{a})] &= \sum_{\substack{n+m+q+r=p \\ n,m,q,r \in \mathbb{N}}} (\mathbb{E}[l(2\epsilon'')]^{\frac{n}{p}} (\mathbb{E}[l(\delta' \hat{P}_\beta^K)]^{\frac{q}{p}} (\sum (\mathbb{E}[l(h_{i,j,k})])^{\frac{1}{p}})^r (\mathbb{E}[l(\tilde{a})])^{\frac{m}{p}} \\
&\quad + \mathbb{E}[l(2\epsilon'')] + \mathbb{E}[l(\delta' \hat{P}_\beta^K)] + (\sum (\mathbb{E}[l(h_{i,j,k})])^{\frac{1}{p}})^p \\
&\leq \epsilon',
\end{aligned} \tag{8.21}$$

ist dies der Fall, denn (8.21) ist, aufgrund der Voraussetzung $\epsilon'' = \frac{\epsilon'}{p^4 2^{p+1} + 2}$ und (8.9) sowie (8.12) und (8.13) bequem erfüllt. \square

Definition 8.3. Sei $p \geq 1$. Eine Großinvestorstrategie θ heie L^p -zulässig (im Folgenden kurz: zulässig), wenn es eine Schranke $K \geq 0$ gibt, so dass für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\mathbb{E}[l((\tilde{V}_t^\theta)^-)] \leq K.$$

Approximationssatz 8.4. Sei $p \geq 1$ und die Verlustfunktion l durch $l(x) = |x|^p$ gegeben. Der Aktienpreis P habe L^p -Sprünge. θ sei ein vorhersehbarer laglad-Prozess auf $[0, T]$.

Dann gibt es zu jedem positiven ϵ einen adaptierten stetigen FV-Prozess θ' auf $[0, T]$ so, dass

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds) \right) \right] \leq \epsilon.$$

Insbesondere gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und zu jeder zulässigen Großinvestorstrategie θ eine zulässige zahme Großinvestorstrategie $\tilde{\theta}$, so dass gilt:

$$\mathbb{E}[l(\tilde{V}_T^\theta - V_T^{\tilde{\theta}})] \leq \epsilon.$$

Beweis. Setze $\epsilon^n := \frac{1}{2^n} \epsilon$. Induktiv: Wenn

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq \sigma_{n-1}} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds) \right) \right] \leq \epsilon^{n-1} + \epsilon^{n-2} + \dots + \epsilon^1$$

ist, dann ist mit

$$\tilde{a} := \sup_{0 \leq t \leq \sigma_{n-1}} \left| \int_{[0,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds) \right|$$

im Hinblick auf das Hauptlemma

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq \sigma_n} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds) \right) \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[l \left(\sup_{\sigma_{n-1} < t \leq \sigma_n} \left| \int_{(\sigma_{n-1},t]} L(\theta_s, ds) - \int_{(\sigma_{n-1},t]} L(\theta'_s, ds) \right| + \tilde{a} \right) \right] \\ & \leq \epsilon^n + \mathbb{E}[l(\tilde{a})] \\ & \leq \epsilon^n + \epsilon^{n-1} + \dots + \epsilon^1, \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{P}[\sigma^n < T] < \epsilon^n$ ist.

Daraus folgt

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq \sigma_n} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds) \right) \right] \leq \epsilon \quad \forall n$$

und für \mathbb{P} -fast alle $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq \sigma_n(\omega)} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds)(\omega) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds)(\omega) \right) \\ & \xrightarrow{\text{pktw.}} \sup_{0 \leq t \leq T} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds)(\omega) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds)(\omega) \right). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt daraus

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} l \left(\int_{[0,t]} L(\theta_s, ds) - \int_{[0,t]} L(\theta'_s, ds) \right) \right] \leq \epsilon.$$

□

Kapitel 9

Replikation von Kleininvestor-Pay-Offs

In diesem Kapitel wird eine Eigenschaft des Aktienpreises P aufgezeigt, die hinreichend dafür ist, dass es Großinvestorstrategien gibt, deren Vermögenprozess den Kleininvestorvermögensprozess beliebig gut approximiert. Zum Schluss wird u.a. mit Hilfe eines interessanten Resultats aus Strasser [90] ein No Arbitrage-Argument aus Bank und Baum [6] auch auf den Fall mit Überraschungen angewendet.

Im Folgenden wird als *selbstfinanzierende Kleininvestorstrategie* ein vorhersehbarer $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Prozess ξ_t zusammen mit einem Anfangskapital v bezeichnet.

9.1 Vorbereitungen

Zunächst werden Eigenschaften von $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Pfaden formuliert¹:

(i) Eine Familie von $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ -Funktionen $p^\vartheta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto p_t^\vartheta$, heie *gleichmäßig stetig/l\`a}g\text{l\`a}d*, wenn für alle $t \in [0, T]$ die Funktionen $\vartheta \mapsto p_t^\vartheta$ stetig sind und für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $t \in [0, T]$ die Implikation $|\vartheta - \vartheta'| < \delta \Rightarrow |p_t^\vartheta - p_t^{\vartheta'}| < \epsilon$ gilt.

¹Sie werden benötigt, um über die Existenz von θ_t mit $\int_0^{\theta_t} p_t^x dx = \xi_t$ (bei gegebener Kleininvestorstrategie ξ_t) hinaus, auch sicherzustellen, dass θ_t $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ ist, wenn ξ_t es ist.

(ii) Die Familie habe *positiven Null-Abstand*, wenn für alle ϑ das Infimum $\bar{p}^\vartheta := \inf_{t \in [0, T]} p_t^\vartheta > 0$ ist.

(iii) Eine *làglàd-Familie* heiÙe *gleichmäßig surjektiv*, wenn es für alle $K \geq 0$ ein $\tilde{\vartheta} \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle t : $p_t^{\tilde{\vartheta}} \geq K$ gilt.

Familien p , die die Eigenschaften

$$(i) \text{ und } (ii) \text{ und für die } \vartheta \mapsto \int_0^\vartheta p_t^x dx \text{ Eigenschaft (iii)} \quad (9.1)$$

hat, erhalten in folgendem Sinn die *làglàd-Eigenschaft*:

Lemma 9.1. *Gilt für eine Familie p mit den Eigenschaften (9.1), eine messbare Funktion θ_t und eine messbare Funktion ξ_t die Gleichung*

$$\int_0^{\theta_t} p_t^x dx = \xi_t,$$

dann ist θ *làglàd*, wenn ξ es ist.

Beweis. Sei ξ *làglàd*. Ist θ nicht *làglàd*, dann gibt es a) eine Folge $t_i \nearrow t$ mit $\theta_{t_i} \nearrow \infty$ oder es gibt b) zwei Folgen $s_i \nearrow t$ und $t_i \nearrow t$ so, dass $\theta_{s_i} \rightarrow \vartheta_1$ und $\theta_{t_i} \rightarrow \vartheta_2$, wobei $\vartheta_1 < \vartheta_2$.

Im Fall a) folgt aufgrund der glm. Surjektivität $\xi_{t_i} = \int_0^{\theta_{t_i}} p_{t_i}^x dx \rightarrow \infty$, so dass ξ nicht *làglàd* ist, so dass also der Fall b) gelten muss.

Im Fall b) gilt, aufgrund dessen, dass p glm. stetig/*làglàd* ist und positiven Null-Abstand hat,

$$\xi_{t-} \leftarrow \xi_{s_i} = \int_0^{\theta_{s_i}} p_{s_i}^x dx \rightarrow \int_0^{\vartheta_1} p_{t-}^x dx \quad ^2$$

und

$$\xi_{t-} \leftarrow \xi_{t_i} = \int_0^{\theta_{t_i}} p_{t_i}^x dx \rightarrow \int_0^{\vartheta_2} p_{t-}^x dx$$

so dass

$$0 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} p_{t-}^x dx \geq \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \bar{p}^x dx > 0,$$

²Wegen $\lim_{s_i \nearrow t} \int_0^{\theta_{s_i}} p_{s_i}^x dx = \int_0^{\lim \theta_{s_i}} (\lim p_{s_i}^x) dx$, wegen Majorisierung.

ein Widerspruch.

Analoge Fälle a') und b') ergeben sich für Folgen s_i und t_i , die von rechts gegen $t \in [0, T]$ konvergieren³. \square

Definition 9.2. Sei durch P_t^ϑ ein Aktienpreis P im Sinne der Definition 6.5 (S. 84 f.) gegeben. P heie durch P_t^0 bestimmt, wenn es eine vorhersehbar-lgld-Familie p gibt, deren Pfade die Eigenschaften (9.1) haben, derart dass

$$P_t^\vartheta = P_0^\vartheta + \int_0^t p_s^\vartheta dP_s^0$$

gilt.

Satz 9.3. Sei $P(\vartheta, t)$ ein durch P_t^0 bestimmter Aktienpreis. Sei (ξ, v) eine selbstfinanzierende Kleininvestorstrategie. Dann gibt es einen vorhersehbaren lgld Prozess θ so, dass

$$\int_0^t \xi_s dP_s^0 = \int_0^t L(\theta_s, ds) \text{ f.s.}$$

gilt.

Beweis. Aufgrund der Surjektivität von $\vartheta \mapsto \int_0^\vartheta p_s^x(\omega) dx$ kann ein Measurable Selection-Theorem⁴ herangezogen werden, um auf die Existenz eines vorhersehbaren Prozesses θ mit

$$\int_0^{\theta_s} p_s^x dx = \xi_s \quad \mathbb{P} \otimes d[P^0]_s\text{-f.s.}$$

zu schließen⁵.

Nach Lemma 9.1 erbt θ_s die lgld-Eigenschaft von ξ_s .

Nach dem Satz von Fubini für stochastische Integrale⁶ gilt für

$$L(\vartheta, t) = \int_0^\vartheta P(x, t) dx = \int_0^\vartheta \left(P_0^x + \int_0^t p_s^x dP_s^0 \right) dx \text{ f.s.}$$

³Im Hinblick auf $\lim_{s_i \searrow t} \int_0^{\theta_{s_i}} p_{s_i}^x dx = \int_0^{\lim \theta_{s_i}} (\lim p_{s_i}^x) dx = \int_0^{\lim \theta_{s_i}} p_{t+}^x dx$.

⁴S. Dellacherie und Meyer [23] Th. 82 im Anhang zu Kap. III, S. 161.

⁵Vgl. Bank und Baum [6], Bew. von Th. 4.9, S.12.

⁶S. Protter [75], Th. IV 64, S. 207.

die Gleichheit

$$\int_0^t L(\theta_s, ds) = \int_0^t \left(\int_0^{\theta_s} p_s^x dx \right) dP_s^0 \text{ f.s.},$$

also $\int_0^t L(\theta_s, ds) = \int_0^t \xi_s dP_s^0$ f.s. \square

9.2 Replikation von Kleininvestorvermögen

Definition 9.4 (F.s.-approximativ replizierbar). Sei ξ vorhersehbar $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ und $v \in \mathbb{R}$, so dass (ξ, v) selbstfinanzierende Kleininvestorstrategie ist. $H_t = \int_0^t \xi_s dP_s^0 + v$ heißt durch den Großinvestor fast sicher-approximativ replizierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Großinvestorstrategien (bestehend aus einem Anfangskapital $\beta^0 \in \mathbb{R}$ und einem vorhersehbaren quadratvariierenden Prozess θ^ϵ) gibt, so dass

$$\beta^0 = v \text{ und } \sup_{t \in [0, T]} |H_t - V_t^{\theta^\epsilon}| \leq \epsilon \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Satz 9.5. Ist der Aktienpreis P durch P^0 bestimmt, dann gilt:

Wenn (ξ_t, v) eine $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Kleininvestorstrategie ist, dann ist

$$H_t = \int_0^t \xi_s dP_s^0 + v$$

durch den Großinvestor fast sicher approximativ replizierbar, wenn P Aktienpreis ohne Überraschungen ist.

Beweis. Nach Satz 9.3 gilt, wenn P durch P^0 i.S.d. Def. 9.2 bestimmt ist, $\int_0^t \xi_s dP_s^0 = \int_0^t L(\theta_s, ds)$ f.s., wobei θ vorhersehbarer $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Prozess ist. Im Hinblick auf den Approximationssatz 7.14 gilt, wenn P Aktienpreis ohne Überraschungen ist,

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t L(\theta_s, ds) - \int_0^t L(\theta_s^\epsilon, ds) \right| \leq \epsilon \text{ f.s.},$$

so dass die Behauptung im Hinblick auf Def. 9.4 aus $H_t = \int_0^t L(\theta_s, ds) + v$ und $V_t^{\theta^\epsilon} = \int_0^t L(\theta_s^\epsilon, ds) + v$ (s. Satz 6.10, S. 93 f.) folgt. \square

Definition 9.6 (Quantil-approximativ replizierbar). Sei ξ vorhersehbar und $v \in \mathbb{R}$, so dass (ξ, v) allgemeine Kleininvestorstrategie ist. $H_t = \int_0^t \xi_s dP_s^0 + v$ heißt durch den Großinvestor quantil-approximativ replizierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Großinvestorstrategien (bestehend aus einem Anfangskapital $\beta^0 \in \mathbb{R}$ und einem vorhersehbaren quadratvariierenden Prozess θ^ϵ) gibt, so dass

$$\beta^0 = v \text{ und } \mathbb{P} \left[\sup_{t \in [0, T]} |H_t - V_t^{\theta^\epsilon}| \right] \leq \epsilon.$$

Satz 9.7. Ist der Aktienpreis P durch P^0 bestimmt, dann gilt:

Wenn (ξ_t, v) eine beliebige vorhersehbare Kleininvestorstrategie ist, dann ist

$$H_t = \int_0^t \xi_s dP_s^0 + v$$

durch den Großinvestor quantil-approximativ replizierbar.

Beweis. Ergibt sich wie Satz 9.5 aus Satz 9.3 und Satz 6.10, hier im Hinblick auf Def. 9.6 und die Approximationsaussage (8.1), S. 117. \square

Definition 9.8. Sei ξ vorhersehbar $\text{l\`a}g\text{l}\grave{a}d$ und $v \in \mathbb{R}$, so dass (ξ, v) eine selbstfinanzierende Kleininvestorstrategie ist. $H_t = \int_0^t \xi_s dP_s^0 + v$ heißt durch den Großinvestor effizient-approximativ replizierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Großinvestorstrategien (bestehend aus einem Anfangskapital $\beta^0 \in \mathbb{R}$ und einem vorhersehbaren quadratvariierenden Prozess θ^ϵ) gibt, so dass mit $l(x) := |x|^p$ mit $p \geq 1$

$$\beta^0 = v \text{ und } \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} l(H_t - V_t^{\theta^\epsilon}) \right] \leq \epsilon.$$

Satz 9.9. Ist der Aktienpreis P durch P^0 bestimmt, dann gilt:

Wenn (ξ_t, v) eine $\text{l\`a}g\text{l}\grave{a}d$ Kleininvestorstrategie ist, dann ist

$$H_t = \int_0^t \xi_s dP_s^0 + v$$

durch den Großinvestor effizient-approximativ replizierbar, wenn der Aktienpreis L^p -Sprünge hat.

Beweis. Ergibt sich wie Satz 9.5 aus Satz 9.3 und Satz 6.10, hier im Hinblick auf Def. 9.8 und den Approximationssatz 8.4. \square

9.3 Satz zur Arbitragefreiheit

P werde wieder im Sinne der Def. 9.2 durch P^0 bestimmt. Die Menge der zu \mathbb{P} äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße bezüglich der P^0 ein Lokalmartingal ist, \mathcal{P}^* , ist dann genau die Menge der \mathbb{P} -äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße bezüglich der alle P^ϑ simultan Lokalmartingale sind.

Satz 9.10. P werde durch P^0 bestimmt und es sei $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$. Der Großinvestor verwende nur solche vorhersehbare selbstfinanzierende làglàd Strategien θ für die

(A) $\int_0^t L(\theta_s, ds)$ ist von unten beschränkt (d.h. θ ist f.s.-zulässig im Sinne der Def. 7.13)

oder

(B) es gibt ein $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}^*$ derart, dass

(i) $\mathbb{E}^* \left[\int_0^T L(\theta_s, ds)^- \right] < \infty$ (erfüllt, wenn θ „ L^P -zulässig bezüglich \mathbb{P}^* “ ist) und

(ii) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^* \left[\int_0^{\sigma_n} L(\theta_s, ds)^- 1_{[\sigma_n < \infty]} \right] = 0$

gilt, wobei die Stoppzeitenfolge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$\sigma_0 := 0, \quad \sigma_n := \inf \left\{ t \geq 0 : \int_0^t L(\theta_s, ds) \leq -n \right\} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (9.2)$$

gegeben ist.

Dann hat der Großinvestor keine Arbitragemöglichkeiten.

Beweis. Sei θ eine vorhersehbare làglàd Strategie. Definiere den vorhersehbaren Prozess ξ durch

$$\xi_t := \int_0^{\theta_t} p_t^x dx.$$

Wie im Beweis von Satz 9.3 folgt mit dem Satz von Fubini für stochastische Integrale

$$\int_0^t L(\theta_s, ds) = \int_0^t \xi_s dP_s^0.$$

(1) Bezüglich jedem Maß aus \mathcal{P}^* gilt: Ist das Lokalmartingal $\int_0^t L(\theta_s, ds)$ von unten beschränkt, dann ist es ein Supermartingal. (Benötigt, falls θ die

Bedingung (A) erfüllt.)

(2) Erfüllt θ Bedingung (B), so gibt es $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}^*$ bezüglich diesem P^0 Lokalmartingal ist und auch (i) und (ii) aus (B) erfüllt sind. Nach Lemma 9.11 (s.u.) gilt daher, dass $\int_0^t L(\theta_s, ds)$ \mathbb{P}^* -Supermartingal ist.

Mit (1) (falls θ (A) erfüllt) oder (2) (falls θ (B) erfüllt) kann man nun wie in Bank und Baum [6], Beweis von Th. 3.3, S. 8, folgern: Wegen $V_t \leq \tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t L(\theta_s, ds)$ (vgl. Satz 6.10) ist $\mathbb{E}^*[V_T] \leq \mathbb{E}^*[\tilde{V}_T] \leq \mathbb{E}^*[V_0]$. Da $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ ist, folgt, dass $\mathbb{P}[V_T \geq V_0] = 1$ und $\mathbb{P}[V_T > V_0] > 0$ zusammen nicht gelten können, θ also keine Arbitragestrategie ist. \square

Lemma 9.11 (E. Strasser, 2003). *Sei S ein Lokalmartingal und sei H ein S -integrierbarer vorhersehbarer Prozess. Sei darüberhinaus $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die durch (9.2) definierte Stoppzeitenfolge.*

Das stochastische Integral $X = H \cdot S$ ist genau dann ein Supermartingal, wenn

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[X_{\sigma_n}^- 1_{[\sigma_n < \infty]} \right] = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E} \left[X_T^- \right] < \infty.$$

Die Beschäftigung mit Charakterisierungen bzw. hinreichenden Bedingungen der Non-Arbitrage geht bis auf die Anfänge der Mathematical Finance zurück. Für liquide Marktmodelle sind wichtige Ergebnisse zu finden in Cox und Ross [18], Harrison und Kreps [44] und Harrison und Pliska [45]; später besonders die Arbeiten von Delbean und Schachermayer⁷.

Föllmer und Schied geben eine geometrische Charakterisierung arbitragefreier einperiodischer Modelle.⁸ Musiela und Rutkowski [73] geben – anknüpfend insbesondere an Harrison und Kreps und Harrison und Pliska – einen Überblick über das Fundamental Theorem of Asset Pricing im endlichen Fall.

Für illiquide Marktmodelle war wohl Jarrow der erste, der sich mit Non-Arbitrage-Bedingungen beschäftigte (im Zeitdiskreten).⁹ Darauf durch Approximation aufbauend formuliert Bierbaum¹⁰ Bedingungen für den zeitstetigen Fall. Den Weg über die Itô-Wentzell-Formel für ortsparemeterabhängige

⁷Vgl. [22] m.w.N.

⁸S. [36], Ch. 1.5, S. 26 ff.

⁹Vgl. [49].

¹⁰S. [10].

Semimartingalfamilien gehen dann erstmals Bank und Baum¹¹.

¹¹S. [5] und [6].

Anhang: Raue Pfade

Die Definition und ihre Motivation

Zwischen dem pfadweisen Itô-Kalkül und der von Terry Lyons entwickelten Theorie der rauen Pfade bestehen einige Querverbindungen. Zwischen dem pfadweisen Itô-Wentzell-Kalkül und den rauen Pfaden bestehen, zumindest auf den ersten hier geworfenen Blick, weniger Verbindungen. Nichtsdestotrotz ist die Theorie der rauen Pfade so interessant, dass man mit einer die pfadweisen Betrachtungen des ersten Teils abschließenden Bemerkung Bezug auf sie nehmen sollte. (Die Bemerkung ist nur zu lang geraten und ist daher im Anhang untergebracht worden.) Die Bemerkung beschränkt sich im Wesentlichen auf Beispiele und sollte nur als eine Abrundung des sans probabilités-Teils angesehen werden.¹² Eine Theorie rauer unstetiger Pfade steht noch aus. Alle rauen Pfade sind stetig.

Sei V ein durch $|\cdot|$ normierter Banachraum. Die algebraischen Tensorprodukte¹³ $V^{\otimes k} := V \otimes_a \dots \otimes_a V$ (k Kopien von V) seien ebenfalls normiert, durch $|\cdot|_k$, und zwar so, dass $|\cdot|_1 := |\cdot|$ und die Kompatibilitätsbedingung

$$|\xi \otimes \eta|_{k+l} \leq |\xi|_k |\eta|_l, \quad \forall \xi \in V^{\otimes k}, \quad \forall \eta \in V^{\otimes l}$$

gilt. Die Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts (die eventuell für unendlichdimensionales V nötig wird) bezüglich der gegebenen Normen wird mit $V^{\otimes k}$ bezeichnet.

¹²Entsprechend basieren die Veranschaulichungen auf dem \mathbb{R}^1 , obwohl die Theorie der rauen Pfade besonders auch für die mehrdimensionalen Pfade viel zu sagen hat (vgl. Lyons und Qian [63], S. 7).

¹³Vgl. Kowalski [53], 11. Kapitel - Multilineare Algebra -, S. 286 ff.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird die „truncated“ Tensoralgebra $T^{(n)}(V)$ durch

$$T^{(n)}(V) = \sum_{k=0}^n \oplus V^{\otimes k}, \quad V^{\otimes 0} = \mathbb{R},$$

mit einer Multiplikation (Tensorprodukt) nach Art der Polynommultiplikation, außer, dass sie nach n „abgeschnitten“ ist, versehen: D.h. für $\xi, \eta \in T^{(n)}(V)$ mit

$$\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n), \eta = (\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^n)$$

sind die Komponenten von $\zeta = \xi \otimes \eta$ durch

$$\zeta^k = \sum_{j=0}^k \xi^j \otimes \eta^{k-j}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

gegeben.

$T^{(n)}(V)$ werde durch $|\cdot|$, gegeben durch

$$|\xi| = \sum_{i=0}^n |\xi^i|$$

normiert. Es gilt mit dieser Norm $|\xi \otimes \eta| \leq |\xi||\eta|$.

Definition. 1. Sei $T > 0$. Mit Δ werde der Simplex auf dem reellen Intervall $[0, T]$, $\Delta := \{(s, t) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$ bezeichnet. Die Menge der stetigen Abbildungen $X : \Delta \rightarrow T^{(n)}(V)$ („Pfade“),

$$(s, t) \mapsto X_{s,t} = (X_{s,t}^0, X_{s,t}^1, \dots, X_{s,t}^n), \quad \text{mit } X_{s,t}^k \in V^{\otimes k}$$

werde mit $C(\Delta, T^{(n)}(V))$ bezeichnet.

2. Die Teilmenge der Pfade für die $X_{s,t}^0 \equiv 1$ für alle $(s, t) \in \Delta$ gilt, werde mit $C_0(\Delta, T^{(n)}(V))$ bezeichnet.

3. Die Pfade aus $C_0(\Delta, T^{(n)}(V))$ für die desweiteren die Chen-Identität

$$X_{s,t} \otimes X_{t,u} = X_{s,u} \quad \forall (s, t), (t, u) \in \Delta$$

gilt, heißen multiplikativ.

4. Sei $p \geq 1$. Der Pfad $X \in C_0(\Delta, T^{(n)}(V))$ besitzt finite p -Variation, wenn für $i = 0, \dots, n$

$$\sup_D \sum_l |X_{t_{l-1}, t_l}^i|^{\frac{p}{i}} < \infty$$

ist, wobei sich das Supremum über alle endlichen Zerlegungen von $[0, T]$ erstreckt. Die $C_0(\Delta, T^{(n)}(V))$ -Teilmenge der Pfade mit endlicher p -Variation, wird mit $C_{0,p}(\Delta, T^{(n)}(V))$ bezeichnet.

5. Sei $p \geq 1$ und $[p] \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Zahl, die kleiner oder gleich p ist. $X \in C_{0,p}(\Delta, T^{([p])}(V))$ heißt rauer Pfad der Rauheit p , wenn er multiplikativ ist.

Denkt man an Abbildungen $x : [0, T] \rightarrow V$, dann wäre man geneigt sie dann als raue Pfade von Rauheit p zu bezeichnen, wenn sie endliche p -Variation i.S.v. $\sup_D \sum_l |x_{t_{l-1}, t_l}|^p < \infty$, mit $x_{s,t} := x_t - x_s$, besitzen. Die darüberhinausgehende algebraische Forderung der Multiplikativität erhält ihren Sinn dadurch, dass raue Pfade i.S.v. Lyons¹⁴ bzw. Lyons und Qian nicht nur Pfade im herkömmlichen Sinn sind, sondern Pfade, für die eine „Integrationstheorie“ besteht: „Roughly speaking, a rough path is such a continuous path for which we have an integration theory, and therefore from which a sequence of iterated path integrals may be constructed.“¹⁵ Der raue Pfad in diesem Sinn besteht aus den Komponentenpfaden $X_{s,t}^k$ von $[0, T]$ nach $V^{\otimes k}$, die für die k -te Iteration stehen.

Iteration als Konstruktionsprinzip¹⁶ zu wählen, ist sehr ökonomisch. Integriert wird zunächst nur das, was selbst Integrationsergebnis ist. Im Picard-Lindelöfschen Existenzsatz zeigt das Verfahren aber schon seine Kraft: Die Existenz von Lösungen von Differentialgleichungen. Tatsächlich gelingt es Lyons auf ähnlichem Wege die Existenz von Lösungen (rauer Pfad Y) von Gleichungen der Form $dY_t = f(Y_t) dX_t$ für raue Pfade X zu zeigen (obwohl, anders als in der Integrationstheorie der Semimartingale, $\int f(Y) dX$ im allgemeinen für raue Pfade nicht existiert). (Das zentrale Ergebnis von [63] ist das

¹⁴Vgl. [62].

¹⁵[63], S. 28.

¹⁶Es ist ja ein mathematisches Konzept par excellence. Es gibt dazu auch einige interessante mathematische Seitenarme, bei denen alles gleichsam aus dem Nichts entsteht (bspw. die Erzeugung der Zahlen in Conway [16] oder die Iteration simpler Unterscheidungen, die einen speziellen logischen Kalkül hervorbringen: Spencer-Brown [89], vgl. hierzu auch Kauffman [51]).

„Universal Limit Theorem“¹⁷, das besagt, dass die „Itô-Abbildung“: $X \mapsto Y$, wobei der raue Pfad Y Lösung des Anfangswertproblems $dY_t = f(Y_t) dX_t$, ($Y_0 = y_0$) ist, stetig in p -Variationstopologie ist.)

Zwei Beobachtungen – eine algebraische¹⁸ und eine analytische – könnten als Paten der Definition der rauen Pfade angesehen werden, bei der ja einerseits Multiplikativität im Sinne der Chen-Identität und andererseits eine endliche p -Variation der ersten Stufe und mit jeder weiteren Iteration weitere Glättung gefordert wird:

Der Einfachheit halber sollen die Beobachtungen für den Fall $V := \mathbb{R}$ skizziert werden, d.h., es gelte 1. $V^{\otimes k} = \mathbb{R}$ und dass die Tensormultiplikation durch einfache Multiplikation gegeben ist, so dass die k -te Komponente von $\zeta = \xi \otimes \eta$ durch $\sum_{j=0}^k \xi^j \eta^{k-j}$ ($k = 0, \dots, n$) gegeben ist, und 2., dass als Norm auf $V^{\otimes k}$ jeweils der \mathbb{R} -Absolutbetrag verwendet wird.

Die beiden Beobachtungen sind:

1. Sei $[s, u]$ reelles Intervall und $s < t < u$. Die iterierten Integrale auf den durch t gegebenen Teilintervallen $\int_s^t (\int_s^{v_2} dx_{v_1}) dx_{v_2}$ und $\int_t^u (\int_s^{v_2} dx_{v_1}) dx_{v_2}$ stehen zu dem iterierten Integral über das Gesamtintervall $\int_s^u (\int_s^{v_2} dx_{v_1}) dx_{v_2}$ in folgender Beziehung¹⁹:

$$\begin{aligned} & \int_s^t \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} + \int_t^u \left(\int_t^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} \\ &= \int_s^t \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} + \int_t^u \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) - \int_s^t dx_{v_1} dx_{v_2} \\ &= \int_s^t \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} + \int_t^u \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} - \int_t^u \left(\int_s^t dx_{v_1} \right) dx_{v_2} \\ &= \int_s^u \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} - \int_s^t dx_{v_1} \cdot \int_t^u dx_{v_s}. \end{aligned}$$

¹⁷Die Namensgebung schreiben Lyons und Qian Paul Malliavin, [64], zu.

¹⁸Die in Form eines „Shuffle-Produkts“ schon 1958 von Rimhak Ree im Rahmen einer Verallgemeinerung einer Aussage von Kuo-Tsai Chen in Ree [76] untersucht wird. Chen selbst geht es besonders auch um die geometrischen Eigenarten der iterierten Integrale (vgl. Chen [15]).

¹⁹ x soll als Integrator dienen können, z.B. von endlicher Variation sein.

Es zeigt sich die Chen-Identität:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_s^u \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2}}_{\textcircled{2}_{s,u}} \\ &= 1 \cdot \underbrace{\int_t^u \left(\int_t^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2}}_{\textcircled{0}_{s,t} \otimes \textcircled{2}_{t,u}} + \underbrace{\int_s^t \left(\int_s^{v_2} dx_{v_1} \right) dx_{v_2} \cdot 1}_{\textcircled{2}_{s,t} \otimes \textcircled{0}_{t,u}} + \underbrace{\int_s^t dx_{v_1} \cdot \int_t^u dx_{v_s}}_{\textcircled{1}_{s,t} \otimes \textcircled{1}_{t,u}}. \end{aligned}$$

2. Für die analytische Beobachtung werde das „Urbeispiel“ für einen rauen Pfad der Rauheit 1 herangezogen: Es entsteht aus einer stetigen Abbildung $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto x_t$ endlicher Variation durch die Festlegung:

$$X_{s,t}^0 := 1, X_{s,t}^n := \int_s^t X_{s,u}^{n-1} dx_u \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Man kann $X_{s,t}^k$ auch durch

$$\begin{aligned} & \int \dots \int_{s \leq u_1 \leq \dots \leq u_k \leq t} dx_{u_1} \dots dx_{u_k} \\ & := \int_s^t \left(\int \dots \int_{s \leq u_1 \leq \dots \leq u_{k-1} \leq u_k} dx_{u_1} \dots dx_{u_{k-1}} \right) dx_{u_k} \end{aligned}$$

ausdrücken. Es gilt hier, in dem Fall, dass x in nur eine reelle Dimension abbildet, $X_{s,t}^k = \frac{(x_t - x_s)^k}{k!}$. Daran kann man folgendes beobachten: Das Iterieren der Integration glättet: Da x gleichmäßig stetig ist, kann angenommen werden, dass für kleine Teilintervalle $[t_{l-1}, t_l]$ $|x_{t_{l-1}, t_l}| < 1$ ist. Bei Zunahme von k wird der Exponent $\frac{p}{k}$ kleiner mit gegenläufiger Wirkung auf $|x_{t_{l-1}, t_l}|^{\frac{p}{k}}$. Trotzdem bleiben die Summen endlich:

$$\begin{aligned} \sup_D \sum_l |X_{t_{l-1}, t_l}^k|^{\frac{p}{k}} &= \sup_D \sum_l \left(\frac{|x_{t_{l-1}, t_l}|^k}{k!} \right)^{\frac{1}{k}} \\ &= \sup_D \sum_l \frac{|x_{t_{l-1}, t_l}|}{k!^{\frac{1}{k}}} \\ &\leq \sup_D \sum_l |x_{t_{l-1}, t_l}| < \infty. \end{aligned}$$

Multiplikativität und endliche mit auf erster Stufe mit p startende und pro Stufe abnehmende Rauheit sind die abstrakten Ingredienzien, die Lyons und

Qian für ihre Definition der rauen Pfade verwenden.

Man kann sich an dem letzten Beispiel noch einmal von der Gültigkeit der Chen-Identität, also der Multiplikativität von $X : \Delta \rightarrow T^{(n)}(V)$ überzeugen. Zusammen mit der eben angestellten analytischen Beobachtung ergibt sich daher, dass $X : \Delta \rightarrow T^{(1)}(V)$ ein rauer Pfad der Rauheit 1 ist:

$$\begin{aligned} X_{s,t} \otimes X_{t,u} &= \left(1, x_{s,t}, \frac{x_{s,t}^2}{2}, \dots, \frac{x_{s,t}^n}{n!} \right) \otimes \left(1, x_{t,u}, \frac{x_{t,u}^2}{2}, \dots, \frac{x_{t,u}^n}{n!} \right) \\ &= \left(1 \cdot 1, 1 \cdot x_{s,t} + 1 \cdot x_{t,u}, 1 \cdot \frac{x_{s,t}^2}{2} + x_{s,t} \cdot x_{t,u} + 1 \cdot \frac{x_{t,u}^2}{2}, \dots \right) \\ &= \left(1, x_{s,u}, \frac{x_{s,u}^2}{2}, \dots \right) \\ &= X_{s,u}. \end{aligned}$$

„The fact that knowing the sample paths of the Brownian motion and its Lévy area process is enough to solve all stochastic differential equations, as initially conjectured by H. Föllmer, is the main motivation of the rough path approach, which was achieved in Lyons (1998).“²⁰ Fast alle Pfade der d -dimensionalen Brownschen Bewegung haben eine p -Variation mit $p \in (2, 3)$. Die zweite Iterationsstufe ist durch die Lévy area und den quadratischen Variationsprozess bestimmt²¹. Dass man im Fall $[p] = 2$ nur die erste und zweite Iterationsstufe kennen muss, ist Lyons Übersetzung von Föllmers Vermutung in den Raue-Pfade-Kalkül:

Theorem (Lyons, Qian, 2002). *Let $p \geq 1$, and let $X : \Delta \rightarrow T^{(n)}(V)$ be a multiplicative functional with finite p -variation ... If $n \geq [p]$, then we may uniquely extend X to be a multiplicative functional in $T^{(\infty)}(V)$ which possesses finite p -variation. More precisely, for any $m \geq [p] + 1$, there is a unique continuous function $X^m : \Delta \rightarrow V^{\otimes m}$ such that*

$$X = (1, X^1, \dots, X^{[p]}, \dots, X^m, \dots)$$

is a multiplicative functional in $T^{(\infty)}(V)$ with finite p -variation.

²⁰Lyons und Qian [63], S. 108. Lyons und Qian nehmen Bezug auf Lyons [62].

²¹S. Reininghaus [77], S. 90. Vgl. als einfache Illustration (bei der wegen Dimension 1 die Lévy area = Null ist) den nächsten Abschnitt.

Pfadweises Itô-Kalkül als rauer Pfad

Ein Urbeispiel²² für einen „echt rauen“ Pfad (der Rauheit $2 \leq p < 3$) ergibt sich mit dem Calcul d'Itô sans Probabilités: Ist $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und von quadratischer Variation entlang $(\tau)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass $[x]_t = [x, x]_t$ als ein Limes entlang (τ_n) existiert, dann folgt aus dem pfadweisen Itô-Kalkül mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{2}$ die Existenz des Riemannsummenlimes $\int_0^t x_s dx_s$ entlang (τ_n) und die Itô-Formel ist die Relation $\int_0^t x_s dx_s = \frac{x_t^2 - [x, x]_t}{2}$. Dabei ist $[x]_t$ als Verteilungsfunktion des in dem Kalkül vorkommenden Radonmaßes (das sich als Limes entlang (τ_n) ergibt) stetig (wegen der hier vorausgesetzten Stetigkeit von x) nicht fallend und ≥ 0 .

Auch im Sinne Lyons und Qian ist damit eine Integrationstheorie für x festgelegt, wenn neben den entlang der fest vorgegebenen Zerlegungsfolge (τ_n) vorausgesetzten Konvergenzen noch die endliche p -Variation von x im herkömmlichen Sinn vorausgesetzt wird (also $\sup_D \sum_l |x_{t_{l-1}, t_l}|^p < \infty$). Dann gilt nämlich: Mit $X^0 \equiv 1$, $X_{s,t}^1 := \int_s^t 1 dx_u = x_t - x_s = x_{s,t}$ und $X_{s,t}^2 := \int_s^t X_{s,u}^1 dx_u = \int_s^t x_{s,u} dx_u$ ist $X : \Delta \rightarrow T^{(2)}(\mathbb{R})$ ein rauer Pfad. Denn:

²²Vgl. auch Reininghaus [77], S. 88 f.

1.

$$\begin{aligned}
& X_{s,t} \otimes X_{t,u} \\
&= \left(1, x_{s,t}, \int_s^t x_{s,v} dx_v \right) \otimes \left(1, x_{t,u}, \int_s^t x_{t,v} dx_v \right) \\
&= \left(1 \cdot 1, 1 \cdot x_{s,t} + 1 \cdot x_{t,u}, 1 \cdot \int_s^t x_{s,v} dx_v + x_{s,t} \cdot x_{t,u} + 1 \cdot \int_s^t x_{t,v} dx_v \right) \\
&= \left(1, x_{s,u}, \int_s^t x_v - x_s dx_v + (x_t - x_s)(x_u - x_t) + \int_t^u x_v - x_t dx_v \right) \\
&= \left(1, x_{s,u}, \int_s^t x_v dx_v - x_s(x_t - x_s) + (x_t - x_s)(x_u - x_t) + \int_t^u x_v dx_v - x_t(x_u - x_t) \right) \\
&= \left(1, x_{s,u}, \int_s^t x_v dx_v - x_s(x_t - x_s) + (x_t - x_s)(x_u - x_t) \right. \\
&\quad \left. + \int_t^u x_v dx_v - x_t(x_u - x_t) - x_s(x_u - x_s) + x_s(x_u - x_s) \right) \\
&= \left(1, x_{s,u}, \int_s^u x_v dx_v - x_s(x_u - x_s) + x_s(x_u - x_s) + (x_t - x_s)(x_u - x_t) - x_t(x_u - x_t) \right) \\
&= \left(1, x_{s,u}, \int_s^u x_{s,v} dx_v + x_s(x_u - x_t) + (x_t - x_s)(x_u - x_t) - x_t(x_u - x_t) \right) \\
&= \left(1, x_{s,u}, \int_s^u x_{s,v} dx_v \right) \\
&= X_{s,u}.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sup_D \sum_l |X_{t_{l-1}, t_l}^2|^{\frac{p}{2}} &= \sup_D \sum_l \left| \int_{t_{l-1}}^{t_l} x_{t_{l-1}, v} dx_v \right|^{\frac{p}{2}} \\
&= \sup_D \sum_l \left| \frac{x_{t_{l-1}, t_l}^2 - [x]_{t_{l-1}, t_l}}{2} \right|^{\frac{p}{2}} \\
&= \sup_D \sum_l \left| \frac{x_{t_{l-1}, t_l}^2 - [x]_{t_{l-1}, t_l}}{2} \right|^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \sup_D \sum_l \left(|x_{t_{l-1}, t_l}|^2 + |[x]_{t_{l-1}, t_l}| \right)^{\frac{p}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Verwendet wurde bei der Abschätzung, dass die Abbildungen mit endlicher p -Variation im herkömmlichen Sinn (aber damit auch auch im Sinn von Lyons und Qian) einen Vektorraum bilden.

Calcul d'Itô-Wentzell und raue Pfade

In den einleitenden Bemerkungen des Abschnitts 3.2 klingt es an: $\int y(x_s, ds)$ ist im allgemeinen von anderer Art als $\int f(x_s) dx_s$. Letzteres ist bis auf eine glatte Einwirkung f ganz im Sinne des iterierten Integrals eines rauhen Pfades²³. Ersteres teilt mit dem allgemeinen $\int y_s dx_s$ das Schicksal der Nicht-Existenz, wenn nicht recht spezielle Bedingungen erfüllt sind. Trotzdem kann y als Rauer Pfad aufgefasst werden, und mit Hilfe der Techniken, die Lyons und Qian unter dem Titel „Path Integration along Rough Path“²⁴ entwickeln, kann zumindest ein glatt aus y „destillierter“ Pfad x integriert werden.

Zunächst zur (bedingten) Existenz von y als rauer Pfad der Rauheit $p \in [2, 3)$.

Der Banachraum V sei der Raum der reellen stetigen Funktionen auf einem Kompaktum $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$, $V = C(\mathbb{X}, \mathbb{R})$, mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, versehen mit der Supremumsnorm. y sei eine stetige Abbildung $[0, T] \rightarrow V$ ($T > 0$). y besitze endliche p -Variation, d.h.

$$\sup_D \sum_l |y_{t_{l-1}, t_l}|^p < \infty$$

mit $y_{t_{l-1}, t_l} := y_{t_l} - y_{t_{l-1}}$. Das Produkt $V \otimes V$ enthält formal die Tensoren der zweiten Stufe²⁵. Es besteht eine Isometrie zu dem Raum $C(\mathbb{X} \times \mathbb{X}, \mathbb{R})$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, versehen mit der Supremumsnorm. $V \otimes V$ werde mit dieser Struktur identifiziert. Für $f, g \in V$ ist $f \otimes g \in V \otimes V$ durch

$$f \otimes g(u, v) = f(u)g(v)$$

gegeben.

Vorausgesetzt werde, dass y quadratische Variation entlang einer vorgegebenen feinen Zerlegungsfolge (τ_n) besitzt: Das soll hier heißen, dass

$$[y]_t := \lim_n \sum_{\tau_n \ni t_i \leq t} y_{t_i, t_{i+1}} \otimes y_{t_i, t_{i+1}}$$

²³In der Tat ist im Rauhen-Pfade-Kalkül Platz für hinreichend glatte Einwirkungen f (Stichwort Eins-Form), vgl. Lyons und Qian [63], S. 110 ff.

²⁴Vgl. [63], S. 110 ff.

²⁵Vgl. Kowalski [53], 11. Kapitel, S. 286 ff.

existiert und in t stetig ist. Außerdem soll gelten: $|[y]_t|$ ist nicht fallend.

Die durch $Y^0 \equiv 1$, $Y_{s,t}^1 = y_{s,t}$ und $Y_{s,t}^2 = \frac{y_{s,t} \otimes y_{s,t} - [y]_{s,t}}{2}$ gegebene Abbildung $\Delta \rightarrow T^{(p)}(V)$ ist ein rauer Pfad:

Als nicht fallende Abbildung hat $|[y]|$ endliche Variation. Die Addition und die skalare Multiplikation von Abbildungen von endlicher p -Variation ergibt wieder eine Abbildung endlicher p -Variation. Daher folgt aus der vorausgesetzten endlichen p -Variation von y und aus der Kompatibilität der Normen, dass $\sup_D \sum_{t_i} |y_{s,t} \otimes y_{s,t} - [y]_{s,t}|^{\frac{p}{2}} < \infty$ ist und dass daher Y finite p -Variation besitzt. Y ist auch multiplikativ, denn da $[y]$ additiv ist gilt:

$$\begin{aligned} Y_{s,t} \otimes Y_{t,u} &= \left(1, y_{s,t}, \frac{y_{s,t} \otimes y_{s,t} - [y]_{s,t}}{2} \right) \otimes \left(1, y_{t,u}, \frac{y_{t,u} \otimes y_{t,u} - [y]_{t,u}}{2} \right) \\ &= \left(1, y_{s,t} + y_{t,u}, \frac{y_{t,u} \otimes y_{t,u} - [y]_{t,u}}{2} + y_{s,t} \otimes y_{t,u} + \frac{y_{s,t} \otimes y_{s,t} - [y]_{s,t}}{2} \right) \\ &= \left(1, y_{s,u}, \frac{y_{s,u} \otimes y_{s,u} - [y]_{s,u}}{2} \right). \end{aligned}$$

Damit ist Y rauer Pfad und die die Integration entlang rauer Pfade betreffende Theorie von Lyons und Qian anwendbar. Insbesondere existiert ein „Integral“ der Art

$$\int \alpha(Y) dY$$

als ein rauer Pfad der Rauheit p in $T^{(2)}(W)$, wenn α eine hinreichend reguläre Eins-Form²⁶ ist, die V nach $L(V, W)$, wobei W ein weiterer Banachraum ist, abbildet. Genauer wird verlangt, dass α eine $\text{Lip}(\gamma)$ -Eins-Form für $\gamma \in (2, 3)$ ist, d.h. es gibt stetige Abbildungen $\alpha^2 : V \rightarrow L(V \otimes V, W)$ sowie $R_1 : V \times V \rightarrow L(V, W)$ und $R_2 : V \times V \rightarrow L(V \otimes V, W)$ so, dass (mit $\alpha^1 := \alpha$) für $v \in V$ und $\tilde{v} \in V \otimes V$ die „Taylor-Darstellung“

$$\alpha^1(x)v = \alpha^1(y)v + \alpha^2(y)((x - y) \otimes v) + R_1(y, x)v,$$

$$\alpha^2(x)\tilde{v} = \alpha^2(y)\tilde{v} + R_2(y, x)\tilde{v}$$

²⁶S. Lyons und Qian [63], Def. 5.1.1, S.111.

gilt und außerdem mit einer positiven Konstanten M :

$$|\alpha^i(x)| \leq M(1 + |x|) \quad (i = 1, 2),$$

$$|R_1(y, x)|_{L(V, W)} \leq M|x - y|^{\gamma-1},$$

$$|R_2(y, x)|_{L(V \otimes V, W)} \leq M|x - y|^{\gamma-2}.$$

Es gilt $\alpha^1 = \alpha : V \rightarrow L(V, W)$, $\alpha^2 : V \rightarrow L(V \otimes V, W)$ und $\alpha^1(\cdot) \otimes \alpha^1(\cdot) : V \rightarrow L(V \otimes V, W \otimes W)$, $\alpha^1(v) \otimes \alpha^1(v)(\tilde{v}) = \sum_i \alpha^1(v)v_i \otimes \alpha^1(v)\hat{v}_i$, für $\tilde{v} = \sum_i v_i \otimes \hat{v}_i \in V \otimes V$.

Der Pfad $Z_{s,t} = (1, Z_{s,t}^1, Z_{s,t}^2) \in C_0(\Delta, T^{(2)}(W))$, der, mit $Y_s := Y_{0,s}^1$, durch

$$Z_{s,t}^1 = \alpha^1(Y_s)(Y_{s,t}^1) + \alpha^2(Y_s)(Y_{s,t}^2),$$

$$Z_{s,t}^2 = \alpha^1(Y_s) \otimes \alpha^1(Y_s)(Y_{s,t}^2)$$

gegeben ist, ist ein *fast rauer Pfad*²⁷ dem eindeutig ein rauer Pfad aus $C_0(\Delta, T^{(2)}(W))$ zugeordnet ist; dieser wird als das Integral $\int \alpha(Y) dY$ bezeichnet.

Es ist nun insbesondere möglich α so zu wählen, dass $W = \mathbb{R}$ (d.h. $\alpha : V \rightarrow V^*$) ist. Dann ist $\int \alpha(Y) dY$ ein rauer Pfad in $C_0(\Delta, T^{(2)}(\mathbb{R}))$. Der Pfad $\alpha(Y_s)$ spielt die Rolle von x_s , ob er aber etwa als eine Art Handelsstrategie – die sich als glatte Funktion von Y ergibt – aufgefasst werden kann, steht dahin.

²⁷S. [63], Def. 3.2.1, S. 40, und Th. 3.2.1, S. 41.

Literaturverzeichnis

- [1] Azéma, Jacques, Michel Émery, Michel Ledoux, Marc Yor (Hrsg.), *Séminaire de Probabilités XXXVII*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2003
- [2] Azéma, Jacques, Marc Yor (Hrsg.), *Séminaire de Probabilités XV 1979/1980*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1981
- [3] Bachelier, Louis, „Théorie de la spéculation“, in *Ann. Sci. École Norm. Sup. III, 17*, S. 21 - 86, 1900
- [4] Back, Kerry, „Insider Trading in Continuous Time“, in *Review of Financial Studies 5, No. 3 (1992)*, S. 387 - 409, 1992
- [5] Bank, Peter, Dietmar Baum, „Hedging and Portfolio Optimization in Illiquid Financial Markets“, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 2002
- [6] Bank, Peter, Dietmar Baum, „Hedging and Portfolio Optimization in Financial Markets with a Large Trader“, in *Mathematical Finance Vol. 14, No. 1 (January 2004)*, S. 1 - 18, 2004
- [7] Bauer, Heinz, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4. völlig überarb. Aufl., Walter de Gruyter: Berlin, New York, 1991
- [8] Bauer, Heinz, *Maß- und Integrationstheorie*, 2. überarb. Aufl., Walter de Gruyter: Berlin, New York, 1992
- [9] Baum, Dietmar, *Realisierbarer Portfoliowert in illiquiden Finanzmärkten*, Dissertation rer. nat., Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 2001
- [10] Bierbaum, Jürgen, *Über die Rückwirkung von Handelsstrategien großer Investoren auf Wertpapierprozesse*, Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 1997

- [11] Black, Fischer, Myron Scholes, „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, in *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), S. 637 - 654, 1973
- [12] Campi, Luciano, Walter Schachermayer, „A Super-Replication Theorem in Kabanov’s Model of Transaction Costs“, in *Finance and Stochastics* 10, S. 579 - 596, 2006
- [13] Carmona, René A., David Nualart, *Nonlinear Stochastic Integrators, Equations and Flows*, Gordon and Breach Science Publishers: New York, 1990
- [14] Cetin, Umut, Robert A. Jarrow, Philip E. Protter, „Liquidity Risk and Arbitrage Pricing Theory“, in *Finance and Stochastics* 8, S. 311 - 341, 2004
- [15] Chen, Kuo-Tsai, „Iterated path integrals“, in *Bulletin of the American Mathematical Society* 83, Nr. 5, S. 831 - 879, 1977
- [16] Conway, John Horton, *On Numbers and Games*, Academic Press: London, New York, San Francisco, 1976
- [17] Cootner, Paul H. (Hrsg.), *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press: Cambridge, MA, 1964
- [18] Cox, John C., Stephen A. Ross, „The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes“, in *Journal of Financial Economics* Vol. 3, Issues 1-2 (January - March 1976), S. 145 - 166, 1976
- [19] Cox, John C., Stephen A. Ross, Mark Rubinstein, „Option Pricing: A Simplified Approach“, in *Journal of Financial Economics* Vol. 7, Issue 3 (September 1979), S. 229 - 263, 1979
- [20] Cuoco, Domenico, Jaksa Cvitanic, „Optimal Consumption Choices for a ‘Large’ Investor“, in *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22, S. 401 - 436, 1998
- [21] Cvitanic, Jaksa, Jin Ma, „Hedging Options for a Large Investor and Forward-Backward SDE’s“, in *Annals of Applied Probability*, 6, S. 370 - 398, 1996

- [22] Delbaen, Freddy, Walter Schachermayer, *The Mathematics of Arbitrage*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2006
- [23] Dellacherie, Claude, Paul André Meyer, *Probabilities and Potential*, North-Holland: Amsterdam, New York, Oxford, 1978
- [24] Dellacherie, Claude, Paul André Meyer, *Probabilities and Potential B – Theory of Martingales*, North-Holland: Amsterdam, New York, Oxford, 1982
- [25] DeMarzo, Peter M., Branko Urošević, „Ownership Dynamics and Asset Pricing with a Large Shareholder“, in *Journal of Political Economy*, Vol. 114, No. 4 (Aug., 2006), S. 774 - 815, 2006
- [26] Duffie, Darrell, *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2. Aufl., Princeton University Press: Princeton, NJ, 1996
- [27] Einstein, Albert, „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“, in *Ann. der Phys. (4)* 17, S. 549 - 560, 1905
- [28] Émery, Michel, Marc Yor (Hrsg.), *Séminaire de Probabilités 1967 - 1980 – A Selection in Martingale Theory*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2002
- [29] Fama, Eugene F., „The Behaviour of Stock Market Prices“, in *J. Business*, 38, S. 34 - 105, 1965
- [30] Föllmer, Hans, „Calcul d'Itô sans Probabilités“, in *Séminaire de Probabilités XV 1979/1980*, S. 144 - 150, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1981
- [31] Föllmer, Hans, „Stock Price Fluctuation as a Diffusion in a Random Environment“, in *Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering*, Vol. 347, No. 1684, *Mathematical Modells in Finance* (Jun. 15, 1994), S. 471 - 482, 1994
- [32] Föllmer, Hans, „On Kiyosi Itô's Work and its Impact“, Gauss Lecture at the ICM 2006, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006*, Vol. I, S. 109 - 124 European Mathematical Society Publishing House: Zürich, 2007

- [33] Föllmer, Hans, „Finanzielles Risiko: Was kann die Mathematik dazu sagen?“, Vortrag vom 16. Juni 2008, Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2008
- [34] Föllmer, Hans, Peter Leukert, „Quantil Hedging“, in *Finance and Stochastics 3*, S. 251 - 273, 1999
- [35] Föllmer, Hans, Peter Leukert, „Efficient Hedging: Cost versus Shortfall Risk“, in *Finance and Stochastics 4*, S. 117 - 146, 2000
- [36] Föllmer, Hans, Alexander Schied, *Stochastic Finance – An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter: Berlin, New York, 2002
- [37] Föllmer, Hans, Alexander Schied, „Coherent and Convex Risk Measures“, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, School of ORIE, Cornell University, Ithaca, 2008, S. 1 - 11, zu erscheinen in *Encyclopedia of Quantitative Finance*
- [38] Föllmer, Hans, Martin Schweizer, „A Microeconomic Approach to Diffusion Models for Stock Prices“, in *Mathematical Finance*, 3, S. 1 -23, 1993
- [39] Föllmer, Hans, Ching-Tang Wu, Marc Yor, „On Weak Brownian Motions of Arbitrary Order“, in *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, Vol. 36, No. 4, S. 447 - 487, 2000
- [40] Forster, Otto, *Analysis 1*, 4. durchgesehene Aufl., Vieweg: Braunschweig, Wiesbaden 1983
- [41] Freedman, David, *Brownian Motion and Diffusion*, Holden-Day: San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam, 1971
- [42] Frey, Rüdiger, „Perfect Option Hedging for a Large Trader“, in *Finance and Stochastics 2 (1998)*, S. 115 - 141, 1998
- [43] Frey, Rüdiger, Alexander Stremme, „Market Volatility and Feedback Effects from Dynamic Hedging“, in *Mathematical Finance*, Vol. 7, No. 4 (Oct. 1997), S. 351 - 374, 1997
- [44] Harrison, Michael J., David M. Kreps, „Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Marktes“, in *Journal of Economic Theory 20 (1979)*, S. 381 - 408, 1979

- [45] Harrison, Michael J., Stanley R. Pliska, „Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading“, in *Stochastic Processes and their Applications 11 (1981)*, S. 215 - 260, 1981
- [46] He, Sheng-wu, Jia-gang Wang, Jia-an Yan, *Semimartingale Theory and Stochastic Calculus*, Science Press: Beijing, China, CRC Press: Boca Raton, FL, 1992
- [47] Itô, Kiyosi, „Differential Equations determining Markov Processes“, in *Journ. Pan-Japan Math. Coll. No. 1077 (1942)* (japanisch); englische Übersetzung in: *Kiyosi Itô Selected Papers*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1986
- [48] Jacod, Jean, Albert N. Shiryaev, *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2. Aufl., Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2002
- [49] Jarrow, Robert A., „Market Manipulation, Bubbles, Corners, and Short Squeezes“, in *Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 27, Issue 3 (September 1992)*, S. 311 - 336, 1992
- [50] Jarrow, Robert A., „Derivative Security Markets, Market Manipulation, and Option Pricing“, in *Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 29, No. 2 (Jun., 1994)*, S. 241 - 261, 1994
- [51] Kauffman, Louis Hirsch, *Sign and Space*, Department of Mathematics, University of Illinois at Chicago Circle, Chicago, 1980
- [52] Kolmogorow, Andrei N., „Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, in *Math. Annalen 104 (1931)*, S. 415 - 458, 1931
- [53] Kowalski, Hans-Joachim, *Lineare Algebra*, 9. überarbeitete und erweiterte Aufl., Walter de Gruyter: Berlin, New York, 1979
- [54] Kraft, Holger, Christoph Kühn, „Large Traders and Illiquid Options: Hedging vs. Manipulation“, Fachbereich Finance, Fachbereich Mathematik, Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2009
- [55] Kühn, Christoph, „Optimal Investment in Financial Markets with Different Liquidity Effects“, Frankfurt MathFinance Institute, Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2006

- [56] Kühn, Christoph, „Nonlinear Stochastic Integration with a Nonsmooth Family of Integrators“, Frankfurt MathFinance Institute, Goethe-Universität, Frankfurt am Main, 2008
- [57] Kühn, Christoph, Maximilian Stroh, „Optimal Portfolios of a Small Investor in a Limit Order Market: a Shadow Price Approach“, in *Mathematics and Financial Economics*, 3 (2), S. 45 - 72, 2010
- [58] Kunita, Hiroshi, *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*, Cambridge University Press: Cambridge, U.K., 1990
- [59] Kyle, Albert S., „Continuous Auctions and Insider Trading“, in *Econometrica*, 53, No. 6 (Nov., 1985), S. 1315 - 1336, 1985
- [60] Levental, Shlomo, Anatolii V. Skorohod, „On the Possibility of Hedging Options in the Presence of Transaction Costs“, in *Annals of Applied Probability*, 7, S. 410 - 443, 1997
- [61] Lévy, Paul, *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*, Gauthier Villars, 1965
- [62] Lyons, Terry J., „Differential equations driven by rough signals“, in *Revista Matemática Iberoamericana* 14, S. 215 - 310, 1998
- [63] Lyons, Terry J., Zhongmin Qian, *System Control and Rough Path*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press: Oxford, 2002
- [64] Malliavin, Paul, *Stochastic Analysis*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [65] Mandelbrot, Benoit B., „The Variation of Certain Speculative Prices“, in *J. Business*, 36, S. 394 - 419, 1963
- [66] Mandelbrot, Benoit B., *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman: New York, 1982
- [67] Mandelbrot, Benoit B., *Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [68] Mandelbrot, Benoit B., Richard L. Hudson, *The (Mis)Behavior of Markets – A Fractal View of Risk, Ruin, and Reward*, Basic Books: New York, 2004

- [69] Memin, Jean, „Espaces de semi Martingales et changement de probabilités“, in *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 52 (1980), S. 9 - 39, 1980
- [70] Métivier, Michel, *Semimartingales – a Course on Stochastic Processes*, Walter de Gruyter: Berlin, New York, 1982
- [71] Meyer, Paul André, „Un cours sur les intégrales stochastiques“, in *Séminaire de Probabilités X 1974/1975*, S. 245 - 400, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1976; Wiederabdruck in *Séminaire de Probabilités 1967 - 1980 – A Selection in Martingale Theory*, S. 174 - 329, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2002
- [72] Meyer, Paul André (Hrsg.), *Séminaire de Probabilités X 1974/1975*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1976
- [73] Musiela, Marek, Marek Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [74] Platen, Eckhard, Martin Schweizer, „On Feedback Effects from Hedging Derivatives“, in *Mathematical Finance*, 8, S. 67 - 84, 1998
- [75] Protter, Philip E., *Stochastic Integration and Differential Equations*, 2. überarb. Aufl., Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2004
- [76] Ree, Rimhak, „Lie Elements and an Algebra Associated With Shuffles“, in *Annals of Mathematics Vol 68, No. 2 (September 1958)*, S. 210 - 220, 1958
- [77] Reininghaus, Gerrit, *Raue Pfade und Pfadweises Itô-Kalkül*, Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, Berlin, 2005
- [78] Rogers, L. Chris G., Surbjeet Singh, „Modelling Liquidity and Its Effects on Price“, University of Cambridge, Cambridge, U.K., University of Bath, Bath, U.K., 2006
- [79] Samuelson, Paul A., „Rational Theory of Warrant Pricing“, in Cootner, Paul H. (Hrsg.): *The Random Character of Stock Market Prices*, S. 506 - 525, MIT Press: Cambridge, MA, 1964

- [80] Sanz-Solé, Marta, Javier Soria, Juan Luis Varona, Joan Verdera (Hrsg.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid 2006, Vol. I*, European Mathematical Society Publishing House: Zürich, 2007
- [81] Schachermayer, Walter, „Die Mathematiker hatten zu wenig Einfluss“, in *www.derStandard.at* > Wissenschaft > Welt > Forschung Spezial, Interview vom 11. August 2009
- [82] Schachermayer, Walter, Josef Teichmann, „Wie K. Itô den stochastischen Kalkül revolutionierte“, Technische Universität Wien: Wien, 2007
- [83] Schied, Alexander, Torsten Schöneborn, „Liquidation in the Face of Adversity: Stealth vs. Sunshine Trading“, School of ORIE, Cornell University, Ithaca, Technische Universität Berlin, Berlin, S. 1 - 50, 2009
- [84] Schönbucher, Philipp J., Paul Wilmott, „The Feedback Effect of Hedging in Illiquid Marktes“, in *SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 61, No. 1 (2000)*, S. 232 - 272, 2000
- [85] Shiryaev, Albert N., Steven E. Shreve, Dieter Sondermann, Editorial zur Erstaussgabe von *Finance and Stochastics*, S. 1 - 2, 1997
- [86] Soner, H.M., Steven E. Shreve, Jaksza Cvitanic, „There is No Nontrivial Hedging Portfolio for Pricing With Transaction Costs“, in *Annals of Applied Probability, 5*, S. 327 - 355, 1995
- [87] Soros, George, *The Alchemy of Finance*, 3. erweiterte Aufl., Wiley: New York, 2003
- [88] Soros, George, *The New Paradigm for Financial Marktes: The Credit Crisis of 2008 and What It Means*, PublicAffairs: New York, 2008
- [89] Spencer-Brown, George, *Laws of Form*, Bohmeier: Leipzig, 2008
- [90] Strasser, Eva, „Necessary and sufficient conditions for the supermartingale property of a stochastic integral with respect to a local martingale“, in *Séminaire de Probabilités XXXVII*, S. 385 - 393, Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 2003
- [91] Wiener, Norbert, „Differential-Space“, in *Journal of Mathematics and Physics 2 (1923)*, S. 131 - 174, 1923

Quellenverzeichnis

- [BilMoG] Gesetz zur Modernisierung des Bilanzrechts (Bilanzrechtsmodernisierungsgesetz - BilMoG) vom 25. Mai 2009 (BGBl I, 1102)
- [HGB] Handelsgesetzbuch vom 10. Mai 1897 (RGBl, 219) idF vom 25. Mai 2009 (BGBl I, 1102)
- [HGB a.F.] Handelsgesetzbuch vom 10. Mai 1897 (RGBl, 219) letzte Fassung vor Änderung durch das BilMoG
- [IFRS 2009] International Accounting Standards Board (IASB) (Hrsg.): *International Financial Reporting Standards (IFRS) 2009 - including International Accounting Standards (IAS) and Interpretations as at 1 January 2009*, London, 2009

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Analyse von Handelsstrategien von Großinvestoren in illiquiden Finanzmärkten. Ein Großinvestor bewegt durch das eigene Handeln die Preise der Wertpapiere, so dass sich eine Analyse mit dem dadurch zustande kommenden Feedbackeffekt befassen muss. Der Preisprozess wird als eine Familie von càdlàg Semimartingalen modelliert, die in einem zusätzlichen Parameter stetig differenzierbar ist.

Ziel ist es, eine möglichst allgemeine Strategiemenge zu bestimmen, für die eine Vermögensdynamik definiert werden kann. In Peter Banks und Dietmar Baums Arbeit *Hedging and Portfolio Optimization in Financial Markets with a large Trader* [6] wurde dies bereits für Semimartingalstrategien durchgeführt.

Es wird zunächst nur die minimale Voraussetzung gemacht, dass die Handelsstrategien des Großinvestors vorhersehbare Prozesse sind. Ähnlich wie sich in Campi und Schachermayer [12] zeigt, dass Strategien die keine endliche Variation aufweisen, zu explodierenden proportionalen Transaktionskosten führen, zeigt sich hier, dass Strategien die keine wohldefinierte endliche quadratische Variation besitzen, zu explodierenden oder unbestimmbaren Liquiditätskosten führen. Der Großinvestor wird daher vorhersehbare Strategien mit wohldefinierter endlicher quadratischer Variation verwenden müssen.

Es wird folgendes gezeigt: Ist $T > 0$ ein terminaler Zeitpunkt und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, versehen mit einer die üblichen Bedingungen erfüllenden Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, und ist X ein optionaler Prozess auf $\Omega \times [0, T]$, dessen realisierte Power-Variation entlang von Stoppzeiten nicht explodiert, dann sind \mathbb{P} -fast alle Pfade von X làglàd, d.h. in jedem Zeitpunkt existiert der Limes von rechts und von links als Element in \mathbb{R} .

Folglich werden Resultate für $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Funktionen entwickelt, die sich, inspiriert von Hans Föllmers Arbeit *Calcul d'Itô sans Probabilités* [30], aus der Untersuchung endlicher quadratischer Variation entlang fest vorgegebener Folgen von Zerlegungen (deren Maschenweite gegen Null strebt) ergeben. Es geht dabei besonders um die Interaktion der $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Funktion x endlicher quadratischer Variation mit einer zweiparametrischen Funktion y , die im ersten „Orts“-Parameter hinreichend glatt im zweiten „Zeit“-Parameter aber nur $\text{c\`a}d\text{l\`a}g$ ist.

Im ersten Teil wird schließlich ein „Calcul d'Itô-Wentzell sans Probabilités“ formuliert und bewiesen, der die Dynamik der Verkettung $y(x_s, s)$ beschreibt. In einem Anhang werden Parallelen zu dem von Terry Lyons entwickelten Begriff der „Rough Paths“ gezogen.

Die den pfadweisen Itô-Wentzell-Kalkül vorbereitenden „sans-Probabilités“-Ergebnisse werden noch etwas verallgemeinert: Sie sind auch dann gültig, wenn die zugrunde liegende Zeitparametermenge kein \mathbb{R} -Intervall ist. Durch die Anreicherung des Zeitintervalls durch abzählbar viele Zusatzzeitpunkte – vorstellbar als Spaltung eines Zeitpunkts in zwei – sind streng geordnete Zeitmengen konstruierbar, die sich für die Behandlung des Zusammenspiels von $\text{l\`a}g\text{l\`a}d$ Funktionen x mit im Zeitparameter $\text{c\`a}d\text{l\`a}g$ Funktionen $y(\cdot, \cdot)$ als bequem erweisen.

Auf ähnliche Art wie die Herleitung des pfadweisen Itô-Wentzell-Kalküls gelingt es dann, eine Vermögensdynamikzerlegung für wohldefinierte quadratische Variationsprozesse herzuleiten. Direkte Anwendung der stochastischen Itô-Wentzell-Formel wird dabei umgangen, so dass die Voraussetzung, dass die Handelsstrategie Semimartingal ist, entfallen kann; wohldefinierte endliche quadratische Variation genügt.

Neben der Modellierung der Handelsstrategie durch vorhersehbare Prozesse endlicher quadratischer Variation verlangt auch die Modellierung des illiquiden Markts ein recht allgemeines Vorgehen, da an die, den Marktpreis modellierende, Semimartingalfamilie keine Stetigkeitsforderung (entlang der Zeit) gestellt wird. In der vorliegenden Arbeit wird daher ein „Zahmer Integrator“-Begriff verwendet, der sich an Carmona und Nualart [13] anlehnt.

Es wird gezeigt, dass ein zahmer Integrator die Eigenschaften eines „rechtsstetigen nichtlinearen Integrators“ im Sinne von Christoph Kühns Arbeit *Nonlinear Stochastic Integration with a Nonsmooth Family of Integrators* [56] besitzt. Daraus folgt insbesondere, dass ein zahmer Integrator stetiges Funktional ist, das punktweise konvergierende Integranden in gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit konvergierende Semimartingale überführt.

Im letzten Teil der Arbeit werden allgemeine Großinvestorstrategien durch zahme Strategien (stetig und von endlicher Variation) approximiert. Motiviert ist dies durch die Vermögensdynamikzerlegung, die zeigt, dass Sprünge und unendliche Variation zu Liquiditätskosten führen und dass bei Wegfall der so induzierten Kostenterme nur ein nichtlineares stochastisches Integral (mit der Handelsstrategie als Integranden) übrig bleibt.

Es wird gezeigt, dass wenn sich die Beträge der Preissprünge ankündigen („Finanzmarkt ohne Überraschungen“), Approximationen durch zahme Strategien derart möglich sind, dass sich die Integralprozesse fast sicher nur um eine beliebig klein vorgebbare Schranke unterscheiden. Das bedeutet, dass aus diesen Approximationen die gleiche Güte der Annäherungen der Integralprozesse resultiert wie im Fall stetiger Preisprozesse (für den Bank und Baum in [6] diese Approximationsresultate erzielt haben).

Für den „Finanzmarkt mit Überraschungen“ wird der Begriff des „Aktienpreises mit L^p -Sprüngen“ entwickelt. Es wird gezeigt, dass im Fall, dass es unvorhersehbare Preissprünge gibt, diese aber L^p -Sprünge sind, Approximationen durch zahme Strategien derart möglich sind, dass das p -te Moment der Integralprozessabsolutdifferenz unterhalb einer beliebig klein vorgebbaren Schranke verbleibt.

In Anlehnung an Bank und Baum werden für die verschiedenen Fälle Bedingungen angegeben, unter denen Großinvestoren die Auszahlungsprofile von Kleininvestoren mittels der Verwendung zahmer Approximationsstrategien replizieren können. In diesem Kontext kann ein Resultat von Eva Strasser ([90]) genutzt werden, um eine No Arbitrage-Aussage zu beweisen, die für den stetigen Fall von Bank und Baum in [6] bewiesen wurde.

Danksagung

Mit großer Freude möchte ich mich zuerst bei meinen Doktorvätern Prof. Dr. Hans Föllmer und Prof. Dr. Christoph Kühn bedanken. Sie standen mir stets mit Rat und Hilfe zur Seite, ihrer freundlichen Betreuung, ihres tiefen Wissens und ihrer großen Inspiration ist das Gelingen der Arbeit geschuldet.

Herzlich danke ich auch meinen anderen akademischen Lehrern Prof. Dr. Hermann Dinges, Prof. Dr. Götz Kersting, Prof. Dr. Anton Wakolbinger und Prof. Dr. Jürgen Wolfart sowie in memoriam Prof. Dr. Hans F. de Groote.

Für die wohlwollende und geduldige Unterstützung meines Promotionsprojekts danke ich herzlich meinem Arbeitgeber Deloitte, besonders den Herren Herbert Apweiler, Prof. Dr. Friedhelm Kläs und Martin Kopatschek.

Herzlich bedanke ich mich für Freundschaft, Hilfe, Rat und Unterstützung bei den Herren Jörg Magnus Beyer, Christophe Crnkovic, Christian Endres, Tolga Evzak, Detmar Fastenau, Frank Geisen, Thorsten Hansen, Dr. Matthias Keim, Torsten Kramm, Jens Lembke, Erkan Nesil, Oliver Piquardt, Dr. Philipp Reuter, Gregor Richarts, Al Schulha, Dirk Christian Thielemann, André Urlaub, Thomas Karl Wagner, Matthias Welzenbach, Dr. Joachim Bruno Wichert, Gennadi Yerokhin und Martin zur Nedden sowie ganz besonders bei Frau Dr. Sylvia Mieke.

Für die Betreuung von Dissertation und Disputation danke ich den Damen Nicole Götting und Manuela Igelbrink.

Größten Dank schulde ich meiner Familie, allergrößten Dank für Geduld und Liebe meiner Frau Andrea und meiner Tochter Lilli.

Lebenslauf

Marc-Peter Teusch, geboren 25. März 1968 in Laubach a.d. Wetter. Verheiratet, ein Kind. Wohnhaft in 60323 Frankfurt am Main, Reuterweg 98.

- 1988 Abitur Max-Beckmann-Schule, Frankfurt am Main
- 1988 – 1990 Zivildienst Sozialdienst e.V., Frankfurt am Main
- 1990 – 1997 Studium der Mathematik mit Nebenfach Philosophie an der Goethe-Universität, Frankfurt am Main
u.a. bei Prof. Dr. Friedrich Kambartel, Prof. Dr. Götz Kersting, Prof. Dr. Anton Wakolbinger und Prof. Dr. Jürgen Wolfart
- 1995 – 1997 Tätigkeit als Tutor für Mathematik
bei Prof. Dr. Hermann Dinges und Prof. Dr. Hans F. de Groot
- 1997 Erwerb des Mathematik-Diploms an der Goethe-Universität, Frankfurt am Main, Titel der Diplom-Arbeit:
„Ein elementarer Beweis des Satzes von Margulis“
- seit 1998 Angestellter bei Deloitte & Touche GmbH Wirtschaftsprüfungsgesellschaft, Zweigniederlassung Frankfurt am Main, Bereich Financial Services