

Verhandlungen

der

Deutschen Physikalischen Gesellschaft.

Diese Zeitschrift erscheint je nach Bedarf und ist zum Preise von 4 Mark jährlich zu beziehen durch alle Buchhandlungen, Postanstalten, sowie von der Verlagsbuchhandlung JOHANN AMBROSIOUS BARTH in Leipzig.

Sitzung vom 21. April 1899.

Vorsitzender: Hr. E. WARBURG.

Vor dem Eintritt in die Tagesordnung verliest der Vorsitzende ein von Hrn. EILHARD WIEDEMANN eingegangenes Schreiben, in dem dieser im Namen seiner Familie für die von der Gesellschaft beim Hinscheiden seines Vaters ausgedrückte Theilnahme herzlichen Dank sagt.

Der Vorsitzende macht ferner davon Mittheilung, dass am 12. April der Firma FRIEDRICH VIEWEG & SOHN in Braunschweig, in deren Verlag die von der Gesellschaft herausgegebenen „Fortschritte der Physik“ erscheinen, anlässlich ihres 100jährigen Geschäftsjubiläums der Vorstand ein Glückwunschtelegramm gesandt hat und dass hierauf ein Dankschreiben eingegangen ist.

Hr. P. DRUDE spricht darauf:

Zur Theorie der magneto-optischen Erscheinungen.

Hr. W. KAUFMANN berichtet dann nach Versuchen von Hrn. Cady über

die Energie der Kathodenstrahlen.

Als Mitglieder werden in die Gesellschaft aufgenommen:

Hr. Prof. C. LINDE, München, Technische Hochschule.

Hr. Privatdocent Dr. J. Ritter VON GEITLER, Prag, Deutsche
Universität.

Hr. Prof. V. VON LANG, Wien, Universität.

Hr. Dr. DIESELHORST, Berlin, Physikal.-Techn. Reichsanstalt.

Hr. Dr. E. MARX, Kiel, Physikal. Institut der Universität.

*Zur Theorie der magneto-optischen Erscheinungen;
von P. Drude.*

Vorgetragen in der Sitzung vom 21. April 1899.

(Vgl. oben p. 105.)

Die Theorie der magneto-optischen Erscheinungen hat sich zum Theil nur beschränkt auf die Aufstellung eines die Erscheinungen richtig darstellenden Systems von Differentialgleichungen und Grenzbedingungen, ohne die in ihnen vorkommenden Constanten vollständig physikalisch zu interpretiren. Im Folgenden möchte ich einiges bemerken über die Herleitung der Differentialgleichungen aus physikalischen Hypothesen, sowie über die Controle derselben an der Hand der beobachtbaren Erscheinungen.

Die einfachste Grundlage der Dispersionstheorie ist in der v. HELMHOLTZ'schen Hypothese beweglicher, elektrisch geladener Ionen enthalten. Um nun mit Benutzung dieser Hypothese einen Einfluss des Magnetfeldes auf optische Erscheinungen ableiten zu können, bieten sich zwei verschiedene Wege dar:

1. Erster Weg. Man nimmt mit AMPÈRE und WEBER an, dass in einem magnetisirten Körper die Ionen in mehr oder weniger gleich gerichteten Kreisbahnen rotiren (Molecularströme). Der Sinn der Rotation ist bei para- und diamagnetischen Körpern verschieden und diese Verschiedenheit in der bekannten Weise zu erklären. Wenn nun durch eine Lichtwelle eine pulsirende elektrische Kraft auf ein rotirendes Ion einwirkt, so ist der Effect im Mittel, dass der Bahnmittelpunkt β des Ions pulsirt. Durch die Bewegung von β tritt nun eine Verschiebung magnetischer Kraftlinien ein und dadurch eine Inductionswirkung, denn jede Ionen-Kreisbahn ist ein Träger magnetischer Kraftlinien; dieselben machen die Bewegung von β mit.

Von dieser Grundlage aus sind die Differentialgleichungen in folgender Weise leicht zu erhalten.¹⁾ Wir halten fest an den allgemeinen Gleichungen der MAXWELL'schen Theorie:

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \text{etc.}$$

$$(2) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{S}_y}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \text{etc.}$$

Hierin bedeuten X, Y, Z die Componenten der elektrischen, α, β, γ die der magnetischen Kraft. $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z$ sind die Componenten der elektrischen, $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z$ die der magnetischen Induktion, d. h. Anzahl von Kraftlinien, welche eine senkrecht zur x -, bez. y - oder z -Axe liegende Flächeneinheit durchsetzen. Die elektrischen Grössen sollen alle nach elektrostatischem Maasse gemessen werden, c ist das Verhältniss des elektrostatischen zum elektromagnetischen Maasssystem.

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, dass nur eine Ionenart vorhanden sei²⁾, und nennen \mathfrak{N} die Anzahl dieser Ionen in der Volumeneinheit, e die elektrische Ladung eines Ions, m seine ponderable Masse. ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes \mathfrak{P} , um welchen das Ion rotirt, so wird

$$(3) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}_x}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi e \mathfrak{N} \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Denn die elektrischen Kraftlinien setzen sich zusammen aus den im freien Aether durch die elektrische Kraft X hervorgerufenen und den an den Ionen haftenden; jede Ladung e ist Träger von $4\pi e$ Kraftlinien.

Ebenso setzen sich die magnetischen Kraftlinien zusammen aus den im freien Aether durch die magnetische Kraft hervorgerufenen ($\mathfrak{S}_x = \alpha$)³⁾, und den durch die Molecularströme, d. h. die Rotation der Ionen erzeugten Kraftlinien. Ist i die Stärke eines Molecularstromes nach elektrostatischem Maasse, q der Flächeninhalt, welchen ein Molecularstrom umschliesst, so ist die Kraftliniendichte, welche durch diese Ströme hervorgebracht

1) Die Herleitung soll nur kurz angedeutet werden.

2) In Wirklichkeit müssen stets mindestens 2 Arten vorhanden sein.

3) Die Magnetisirungs- und Dielektricitätsconstante des Aethers wird gleich 1 gesetzt.

wird, wenn \mathfrak{N} parallele Ströme in der Volumeneinheit vorhanden sind:

$$(4) \quad v = \pm \frac{4\pi i q \mathfrak{N}}{e} \quad 1)$$

Dabei ist

$$(5) \quad i = \pm \frac{e}{T},$$

wenn T die Umlaufdauer eines Ions ist. Die Componenten von v nach den Coordinatenaxen mögen genannt werden:

$$(6) \quad v_x = v \cos(Kx), \quad v_y = v \cos(Ky), \quad v_z = v \cos(Kz);$$

K bezeichnet die Richtung der Magnetisirung des Körpers.

Durch die Verschiebung ξ, η, ζ der Mittelpunkte \mathfrak{P} der Molecularströme ändert sich nun die Anzahl der magnetischen Kraftlinien, welche eine senkrecht zur x -Axe liegende Flächeneinheit durchsetzen, in der Zeiteinheit um den Betrag:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (v_z \xi - v_x \zeta) - \frac{\partial}{\partial y} (v_x \eta - v_y \xi) \right\},$$

sodass die Aenderung der gesammten magnetischen Induktion wird

$$(7) \quad \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha + \frac{\partial}{\partial x} (v_z \xi - v_x \zeta) - \frac{\partial}{\partial y} (v_x \eta - v_y \xi) \right\}.$$

Die Bewegungsgleichung des Bewegungsmittelpunktes \mathfrak{P} eines Ions unter dem Einfluss einer elektrischen Kraft X lautet entweder²⁾:

$$(8) \quad m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - \frac{4\pi e^2}{\vartheta} \xi - r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

oder

$$(9) \quad m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = eX - r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

und zwar gilt die erste oder die zweite Gleichung, je nachdem das Ion (oder genauer die mittlere Lage \mathfrak{P} desselben) bei constantem X im stationären Zustand eine endliche Verdrückung ξ aus der Gleichgewichtslage erfährt (isolirendes

1) Je nach dem Rotationssinne gilt das eine oder andere Vorzeichen. Darauf soll hier aber nicht eingegangen werden.

2) Hierbei ist abgesehen von dem Halleffect, der später berücksichtigt werden soll.

Die physikalische Bedeutung der einzelnen Bestandtheile der complexen magneto-optischen Constanten kann man nach der hier gegebenen Herleitung sofort hinschreiben, mag aber der Kürze wegen unterbleiben. Die ganze Herleitung ist im übrigen nahe verwandt mit der von REIFF¹⁾ gegebenen. Dort ist auch nachgewiesen, dass, schon wenn nur zwei verschiedene Ionengattungen vorhanden sind, der Sinn des FARADAY-Effects (Drehung der Polarisationssebene linear-polarisirten Lichtes beim Durchgang durch einen magnetisirten Körper) nicht aus dem Charakter der Magnetisirbarkeit (ob para- oder diamagnetisch) vorhergesagt werden kann.

2. Ein zweiter Weg zur Herleitung der richtigen Form der magneto-optischen Differentialgleichungen und Grenzbedingungen bietet sich im Halleffect. In der That ist die Bewegungsgleichung (8) oder (9) nicht vollständig, wenn das Ion sich in einem starken Magnetfelde befindet. Sind z. B. die Kraftlinien desselben parallel zur z -Axe, so erfährt das Ion durch eine Bewegung η parallel zur y -Axe eine Kraft nach der x -Axe, da die Bewegung η einen elektrischen Strom hervorruft, welcher die magnetischen Kraftlinien schneidet, und ein solcher Strom eine Bewegungstendenz senkrecht zu der die magnetische Kraft und den Strom verbindenden Ebene erfährt. Nennt man \mathfrak{S}_x' , \mathfrak{S}_y' , \mathfrak{S}_z' die Componenten der durch das äussere, kräftige Magnetfeld hervorgerufenen Kraftliniendichte, so leitet man leicht als vollständige Bewegungsgleichung für ein isolirendes Ion ab:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = e X - \frac{4\pi e^2}{r} \xi - r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \mathfrak{S}_z' - \frac{\partial \xi}{\partial t} \mathfrak{S}_y' \right).$$

Die vollständige Theorie müsste diese Gleichung an Stelle von (8) benutzen, in Verbindung mit der Gleichung (7), welche aus der Vorstellung der Molecularströme fliesst. Der Einfachheit halber soll aber nur betrachtet werden, zu welchen Consequenzen die Gleichung (12) ohne Benutzung der Vorstellung der Molecularströme führt. Die Grundlage der Theorie bilden dann die Gleichungen (1), (2), (3), (12) und an Stelle von (7) die einfache Beziehung $\mathfrak{S}_x = \alpha$. Als Grenzbedingungen ergeben

1) R. REIFF, Theorie molecular-elektrischer Vorgänge 1896, p. 170 ff.

sich aus der HERTZ'schen Betrachtung (vgl. oben): Stetigkeit der der Grenze parallelen Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft.

Diese Form des Erklärungssystems ist neuerdings von WIND¹⁾, LEATHEM²⁾ und VOIGT³⁾ angewandt worden (allerdings zum Theil ohne die auftretenden Constanten vollständig physikalisch zu interpretiren).

Wenn man in (12) die den Einfluss des Magnetfeldes enthaltenden beiden letzten Glieder der rechten Seite als Korrektionsglieder behandelt, in denen näherungsweise zu setzen erlaubt ist

$$\eta = \vartheta' Y, \quad \xi = \vartheta' Z,$$

so lässt sich dieses Erklärungssystem durch einfache Substitutionen in das nach der Hypothese der Molekularströme gewonnene Erklärungssystem identisch überführen.⁴⁾ Dagegen ergeben sich Unterschiede zwischen beiden Erklärungssystemen, wenn man die in (12) auftretenden Glieder, welche den Einfluss des Magnetfeldes enthalten, nicht als Korrektionsglieder behandelt. Dies wird dann nöthig, wenn die Schwingungsdauer des Lichtes in der Nähe der Eigenschwingungsdauer des Ions liegt, weil dann (bei kleinem Reibungswiderstande r) das ganz Aggregat

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{4 \pi e^2}{\vartheta} \xi + r e^2 \frac{\partial \xi}{\partial t}$$

sehr klein wird. Solche Fälle sind nun thatsächlich neuerdings in den Kreis der Beobachtungen gezogen worden, wenn man z. B. Natriumdampf im Magnetfelde mit Natriumlicht durchleuchtet.

Verlaufen die Lichtstrahlen senkrecht zur Magnetisirungsrichtung, so stellt in diesem Falle (Schwingungsdauer des Lichtes nahezu gleich Eigenschwingungsdauer) das auf dem Halleffect basirende Erklärungssystem, wie VOIGT l. c. gezeigt hat, die Erscheinungen richtig dar, denn es folgt sowohl

1) C. H. WIND, Verh. kon. Akad. v. Wet. Amsterd. 1. Sect. 5. Nr. 3, 1896. — Beibl. 21. p. 258. 1897.

2) J. G. LEATHEM, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 190. p. 89. 1897.

3) W. VOIGT, Wied. Ann. 67. p. 362. 1899.

4) Vgl. darüber VOIGT, l. c. und DRUDE, Wied. Ann. 62. p. 687. 1897.

die von VOIGT und WIECHERT beobachtete, und von BECQUEREL bestätigte Doppelbrechung des Natriumdampfes im Magnetfeld, als auch das beobachtete ZEEMAN'sche Phänomen durch Anwendung des KIRCHHOFF'schen Satzes über die Gleichheit von Emission und Absorption. Dagegen ergibt die Hypothese der Molecularströme überhaupt keinen Einfluss des Magnetfeldes, wenn seine Kraftlinien senkrecht zu den Lichtstrahlen liegen.

Wenn die Lichtstrahlen parallel zu den Kraftlinien des Magnetfeldes verlaufen, so ergibt sich durch Anwendung des KIRCHHOFF'schen Satzes der beobachtete Zeemaneffect nach beiden Ansätzen der Theorie, der Faradayeffect in der Nähe einer Absorptionslinie dagegen, d. h. die Drehung der Polarisationssebene linear polarisirten Lichtes, ergibt sich nur aus der Hypothese des Halleffectes entsprechend der Beobachtung.¹⁾ Nach diesem Ansatz hat nämlich die Drehung δ zu beiden Seiten eines Absorptionsstreifens denselben Sinn, während sie nach der Hypothese der Molecularströme verschiedenes Vorzeichen hat.

Diese Punkte beweisen daher, dass bei den untersuchten magnetisirten Metaldämpfen der Halleffect jedenfalls wesentlich für das Zustandekommen der magneto-optischen Eigenschaften ist, Molecularströme dagegen nicht.

Umgekehrt ist es aber bei den stark magnetisierbaren Metallen, Eisen, Nickel, Kobalt. Können wir zwar bei ihnen auch nicht die soeben benutzten Kriterien anwenden, da diese Metalle keine scharfen Absorptionsstreifen haben, so liegt ein anderer Unterschied beider Erklärungssysteme darin, dass die magneto-optische Wirkung nach der Hypothese der Molecularströme proportional mit der Magnetisirung des Körpers sein muss, nach der Hypothese des Halleffectes dagegen proportional zur magnetischen Induction im Körper, d. h. zur gesammten Kraftliniendichte. Nach ersterer Hypothese erreicht daher der magneto-optische Effect eine endliche Grenze, falls der Körper zur Sättigung magnetisirt ist, nach letzterer Hypothese tritt das nicht ein, falls das

¹ Vgl. MACALUSO und CORBINO, Compt. rend. 127. p. 647. 1898.

äussere Magnetfeld weiter an Intensität zunimmt. Die Beobachtungen¹⁾ ergeben nun aber eine endliche Grenze und Proportionalität mit der Magnetisirung. — Dass KUNDT in einem dünnen Eisenstück magnetische Doppelbrechung nicht nachweisen konnte, wenn die Lichtstrahlen senkrecht zur Magnetisirung verliefen, braucht noch nicht entscheidend gegen die Hypothese des Halleffectes zu sein, da auch diese nur in der Nähe eines schmalen Absorptionsstreifens einen bemerkbaren Einfluss des Magnetfeldes in diesem Falle ergiebt.

Bei durchsichtigen, festen und flüssigen Körpern kann man aus der Beobachtung der Dispersion des Faraday-Effectes eventuell eine Entscheidung darüber erlangen, ob mehr die Molecularströme, oder mehr der Halleffect wirksam sind. Wenn nur die Eigenschwingungsdauer einer Ionenart im Ultravioletten, deren Wellenlänge λ_1 sei, zu berücksichtigen ist, während die Eigenschwingungsdauern anderer Iongattungen sehr weit im Ultrarothem ($\lambda_2 = \infty$) oder Ultravioletten ($\lambda_3 = 0$) liegen mögen, so lässt sich das Quadrat des Brechungsindex n des Körpers (ausserhalb eines Magnetfeldes) darstellen durch

$$(13) \quad n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_1^2}.$$

Die Drehung δ der Polarisationsene linear polarisirten Lichtes ergiebt sich dann nach der Hypothese der Molecularströme durch die zweiconstantige Dispersionsformel:

$$(14) \quad \delta = n \left(\frac{a'}{\lambda^2} + \frac{b'}{\lambda^2 - \lambda_1^2} \right),$$

nach der Hypothese des Halleffectes durch:

$$(15) \quad \delta = \frac{1}{n} \left(\frac{a''}{\lambda^2} + \frac{b'' \lambda^2}{(\lambda^2 - \lambda_1^2)^2} \right).$$

Im Folgenden sind die Beobachtungen von VERDET an Schwefelkohlenstoff und Kreosot mit den Formeln (13), (14), (15) verglichen.

¹ A. KUNDT, Wied. Ann. 27. p. 191. 1886; H. E. J. G. Du Bois, Wied. Ann. 39. p. 25. 1890.

Schwefelkohlenstoff.

$$\lambda_1 = 0,000212 \text{ mm. } a = 2,516 \quad b = 0,0433$$

$$a' = -0,0136 \quad b' = +0,1530$$

$$a'' = +0,1167 \quad b'' = +0,2379$$

Spekt.-Linie	$n_{\text{beob.}}$	$n_{\text{ber.}}$	$\delta_{\text{beob.}}$	$\delta_{(14)}$	$\delta_{(15)}$
<i>C</i>	1,6214	1,6210	0,592	0,592	0,592
<i>D</i>	1,6308	1,6307	0,760	0,762	0,760
<i>E</i>	1,6438	1,6439	1,000	0,999	0,996
<i>F</i>	1,6555	1,6560	1,234	1,232	1,225
<i>G</i>	1,6800	1,6805	1,704	1,704	1,704

Kreosot.

$$\lambda_1 = 0,0001845 \text{ mm. } a = 2,295 \quad b = 0,0227$$

$$a' = -0,180 \quad b' = +0,314$$

$$a'' = -0,070 \quad b'' = +0,380$$

Spekt.-Linie	$n_{\text{beob.}}$	$n_{\text{ber.}}$	$\delta_{\text{beob.}}$	$\delta_{(14)}$	$\delta_{(15)}$
<i>C</i>	1,5335	1,5336	0,573	0,573	0,573
<i>D</i>	1,5383	1,5386	0,758	0,745	0,744
<i>E</i>	1,5452	1,5454	1,000	0,990	0,987
<i>F</i>	1,5515	1,5515	1,241	1,226	1,222
<i>G</i>	1,5639	1,5636	1,723	1,723	1,723

Hiernach schliesst sich die Formel (14), d. h. die Vorstellung der Molecularströme den Beobachtungen¹⁾ etwas besser an, als die Formel (15), d. h. die Vorstellung des Halleffectes. Bei Kreosot ist a'' sehr klein. Würde man a'' direct Null setzen, so wäre (15) identisch mit der BECQUEREL'schen Formel²⁾, nach der δ proportional zu $\lambda \partial n / \partial \lambda$ sein soll. Diese Formel folgt also aus der Vorstellung des Halleffectes, wenn man nur eine wirksame Ionengattung annehmen würde. Man könnte natürlich noch besseren Anschluss der Theorie an die Beobachtungen erzielen, wenn man die Hypothese der Molecularströme vereinigt mit der des Halleffectes. In Wirklichkeit kann der Halleffect nie fehlen, er muss stets vorhanden sein,

1) Zu gleichem Resultate führt die Berechnung der Beobachtungen von JOUBIN, Ann. d. phys. et de chim. (6) 16. p. 109. 1889, welche mit den VERDET'schen nahe übereinstimmen.

2) H. BECQUEREL, Compt. rend. 125. p. 679. 1896.

wenn überhaupt verschiebliche Ionen da sind. Der Einfachheit halber sind nur im Vorigen beide Hypothesen getrennt behandelt worden, und man kann also sagen, dass bei den Metaldämpfen die Halleffectglieder, bei Eisen, Nickel und Kobalt die Molecularstromglieder jedenfalls überwiegend sind ¹⁾ bei der Wirkung des Magnetfeldes auf die optischen Eigenschaften.

Leipzig, April 1899.

1) Die Halleffectglieder haben um so mehr Einfluss, je grösser das Verhältniss $\vartheta : e$ ist [Bedeutung der Konstanten nach Gleichung (81)], die Molecularstromglieder um so mehr Einfluss, je grösser $q : T$ ist (Bedeutung vgl. oben pag. 109).