Kleinere Mittheilungen.

XIX. Ueber geodätische Linien.

(Hierzu Taf. V Fig. 5 u. 6.)

In einem Artikel über den gleichen Gegenstand in dieser Zeitschrift (Bd. III, 1858, S. 257) habe ich aus dem Satze von Gauss (Disquis. c. superf. curvas XV): „Wenn auf einer krummen Fläche von einem und demselben Anfangspunkte aus unendlich viele kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen werden, so schneiden sie die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig" die Folgerung gezogen:

„Wenn auf einer Fläche zwei feste Punkte A und B gegeben sind und eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die Summe oder Differenz der nach einem beliebigen Punkte M derselben gezogenen geodätischen Radien vectoren $MA \pm MB$ constant ist, so bildet die Tangente der Curve in M mit den Tangenten der Radien vectoren gleiche Winkel, und umgekehrt, ist das Letztere der Fall, so muss auch $MA \pm MB$ constant sein."

Als Anwendung dieses allgemeinen Satzes habe ich den Satz von Mich. Roberts angeführt (Journ. v. Liouville, 1850), wo der Punkt M einer Krümmungslinie auf einem Ellipsoid angehört, dessen Nabelpunkte A und B sind.

Durch Veränderung des Werthes der Constante erhält man eine Schaar von orthogonalen Curven, welche den confocalen Ellipsen und Hyperbeln in der Ebene entsprechen. Allein wenn man den Satz von Gauss zur Grundlage nimmt, so kann man aus demselben noch verschiedene andere Curvensysteme ableiten, wie aus Nachstehendem hervorgehen wird.

Werden die geodätischen Radien vectoren MA und MB mit u und v bezeichnet, so lässt sich die Gleichung einer Curve (M) auf einer Fläche in der Form

$$u = f(v)$$

darstellen; u und v können bipolare geodätische Coordinaten genannt werden (s. die Aufsätze in Bd. XII dieser Zeitschrift S. 277, 428 u. 430 von P. Zech, M. Cantor, C. W. Baur, wo dieser Ausdruck für ebene Curven gebraucht ist). Durch Differentiation ergiebt sich

$$du = f'(v)\, dv;$$

für einen zweiten Punkt M' der Curve ist $M'A = u + du$, $M'B = v + dv$; man beschreibe nun von A aus mit den geodätischen Halbmessern MA und $M'A$, von B aus mit MB und $M'B$ Bögen, so erhält man ein Viereck $MNM'N'$, dessen Seiten Bögen von geodätischen Kreisen sind und welches bei der Annäherung von M' an M zu einem Parallelogramm wird, dessen Diagonale MM' die Tangente der Curve in M ist (Fig. 5). Das Verhältniss zweier anstossender Seiten $\frac{MN'}{MN}$ ist $= \frac{du}{dv} = f'(v)$ und lässt sich also construiren, wenn die Gleichung $u = f(v)$ gegeben ist. Wird nun das Parallelogramm um die Ecke M um 90^0 gedreht, so fällt MN' in die Verlängerung von MB, MN in diejenige von MA und die Diagonale MM' wird Normale der Curve. Hieraus folgt der Satz:

Ist die Gleichung einer Curve auf irgend einer Fläche in bipolaren geodätischen Coordinaten gegeben, so lege man in der Tangentialebene von einem Punkte M derselben Tangenten an die geodätischen Radien vectoren, trage auf ihnen Strecken ab gleich dem Zähler und Nenner des Differentialcoefficienten der letzteren, vervollständige das Parallelogramm, so ist die durch M gehende Diagonale Normale der Curve.

Auf jeder Tangente ist die der Zunahme des andern Radius entsprechende Strecke abzutragen; ist der Differentialcoefficient negativ, so sind beide Strecken auf der Verlängerung über M hinaus, im andern Falle ist die Eine auf der entgegengesetzten Richtung zu nehmen.

Die einfachsten Beispiele, welche man durch Specialisirung von $f(v)$ erhält, sind folgende:

$$\begin{array}{lll}
1. & u \pm v = c & du \pm dv = 0, \\
2. & u = cv & \frac{du}{dv} = \frac{u}{v}, \\
3. & u^2 - v^2 = c & \frac{du}{dv} = \frac{v}{u}, \\
4. & u^2 + v^2 = c & \frac{du}{dv} = -\frac{v}{u}, \\
5. & uv = c & \frac{du}{dv} = -\frac{u}{v}, \\
6. & \frac{1}{u} - \frac{1}{v} = c & \frac{du}{dv} = \frac{u^2}{v^2}.
\end{array}$$

Werden die Winkel zwischen der Normale und den geodätischen Radien vectoren im Punkte M mit φ und ψ bezeichnet, so ist $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \pm \frac{du}{dv}$, also stehen in diesen sechs Fällen die Sinus der Winkel in sehr einfachen Beziehungen zu u und v. Durch Veränderung von c erhält man Curvenschaaren, welche in der Ebene

1. confocale Ellipsen und Hyperbeln, mit den Brennpunkten A und B,
2. Kreise, welche die Gerade AB und ihre Verlängerung harmonisch theilen,
3. Gerade, senkrecht auf AB,
4. concentrische Kreise, deren Durchmesser $\gtrless AB$ sein kann,
5. confocale Lemniscaten, mit den Brennpunkten A und B,
6. Niveaulinien oder rechtwinklige Trajectorien magnetischer Curven, welche feine Eisentheilchen bilden, die auf ein Papier gestreut werden, unter welches ein Hufeisenmagnet mit seinen Polen gehalten wird (Mittheilung von P. Zech, Bd. XII S. 377), sind.

Da man durch Integration der Differentialgleichungen auf die gegebenen zurückkommt, so lassen sich alle diese Sätze umkehren, also beim ersten Beispiel: wenn die Tangenten der bipolaren Coordinaten in einem Punkte der Curve mit ihrer Normale gleiche Winkel bilden, so ist ihre Summe oder Differenz constant. Oder bei 2.: wenn das Verhältniss der Sinus dieser Winkel constant ist, so ist es auch das Verhältniss der Coordinaten u. s. w.

Die Einführung bipolarer geodätischer Coordinaten, welche, wie aus dem Obigen ersichtlich ist, zu einer einfachen Construction von Tangente und Normale führt, lässt sich übrigens noch in vielen Fällen auf eine andere Art verwerthen. Wenn man das Dreieck ABM, in welchem, wie oben, A und B die Brennpunkte und M ein Punkt der Curve sind, in der Art zu einem Viereck vervollständigt, dass man die von M nach der Mitte von AB gezogene geodätische Linie MO um sich selbst nach N verlängert und die geodätischen Linien NA und NB zieht, so können in allen denjenigen Fällen, wo die Gegenseiten des Vierecks gleich sind, also $MA = NB$ und $MB = NA$, M und N als Brennpunkte einer zweiten Curve angesehen werden, welche durch A und B geht und die derselben Gleichung, wie die erste, nämlich $u = f(v)$ genügt. Die Gleichheit der Gegenseiten findet in der Ebene und auf der Kugel, wo die geodätischen Linien Bögen grösster Kreise sind, immer statt, wie auch auf allen Flächen von constantem, positivem oder negativem, Krümmungsmaass, ferner auf solchen, welche zwei zu einander senkrechte Symmetralebenen haben, und wenn O auf ihrem Durchschnitte liegt; also insbesondere bei den centrischen Flächen zweiter Ordnung, für A und B als Kreispunkte. Durch Veränderung des Durchmessers MN erhält man ein System von Curven ähnlicher Art, deren gemeinsame Durchschnittspunkte A und B sind und welche denselben Parameter c haben.

Bei der ersten Gleichung $u \pm v = c$ ist c die geodätische Länge der grossen Axe der geodätischen Ellipse oder Hyperbel; somit haben wir den Satz:

Die Brennpunkte (M und N) sämmtlicher concentrischer geodätischen Ellipsen und Hyperbeln, welche durch zwei feste Punkte auf einer der genannten Flächen (A und B) gehen, und deren grosse Axen gleich sind, liegen auf einer geodätischen Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte A und B sind.

Auf den Flächen von constantem Krümmungsmaass können die Punkte A und B beliebig angenommen werden, bei der Kugel sind die Curven sphärische Kegelschnitte; wenn A und B Kreispunkte einer centrischen Fläche zweiter Ordnung sind, so liegen die Brennpunkte der Curven auf einer Krümmungslinie. In allen Fällen werden die Curven einen geodätischen Kreis berühren, dessen Mittelpunkt O ist.

AB sei ein Bogen auf einem grössten Kreise der Kugel, A und B sind die Brennpunkte einer sphärischen Ellipse, deren grosse Axe CD ist; also ist $OC = OD$ der Halbmesser eines Kreises, welchen sämmtliche durch A und B gehende sphärische Ellipsen berühren und deren Brennpunkte auf der ersten Ellipse liegen. Man kann aber auch die Figur als die sphärische Basis von Kegeln ansehen, deren Spitze im Mittelpunkte der Kugel ist; dann sind die nach den Brennpunkten gehenden Halbmesser der Kugel Focallinien und man erhält den Satz:

Die Focallinien aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren und durch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Gerade gehen, liegen auf einem Kegel, welcher den Rotationskegel ebenfalls berührt und dessen Focalen jene Gerade sind.

Da die Kreisschnitte der Ergänzungskegel senkrecht stehen auf den Focalen der gegebenen, so ergiebt sich durch Uebertragung auf die Ergänzungskegel:

Die cyklischen Ebenen aller Kegel zweiter Ordnung, welche einen Rotationskegel in zwei entgegengesetzten Mantellinien berühren, sowie auch zwei zur Kegelaxe symmetrisch liegende Ebenen, berühren einen Kegel, welcher den Rotationskegel gleichfalls berührt und dessen Kreisschnitte parallel mit diesen Ebenen sind. Unter cyklischen Ebenen sind zwei durch die Spitze eines Kegels parallel mit den Kreisschnitten gelegte Ebenen zu verstehen.

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung 5): $uv = c$, welche in der Ebene den confocalen Lemniscaten entspricht, und bezeichnen die entsprechenden Curven auf einer beliebigen Fläche analog als geodätische Lemniscaten, deren Brennpunkte A und B sind. Die geodätischen Strecken $OA = OB = \sqrt{e}$ sind constant, dagegen c veränderlich; die grosse Halbaxe ist $= \sqrt{c+e}$, die kleine $= \sqrt{c-e}$. Bei der gemeinen Lemniscate ist $c = e$, also $\sqrt{c-e} = 0$, die übrigen theilen sich in zwei Gruppen, die einen $c > e$ umschliessen die erstere, während die anderen $c < e$

von ihr umschlossen werden. Durch Veränderung von c erhält man ein System von confocalen Lemniscaten, welche einen von O aus mit dem Halbmesser OA beschriebenen Kreis rechtwinklig schneiden (in der Ebene), in den Durchschnittspunkten M, M', ... sind die Tangenten der Lemniscaten parallel mit AB; die Winkel AMB, $AM'B$, ... sind rechte. Für diese Eigenschaft des Kreises bietet sich auch bei den sphärischen und ellipsoidischen Lemniscaten ein Analogon dar: Werden auf einer Kugel von zwei festen Punkten aus (A und B) Bögen grösster Kreise gezogen, die sich rechtwinklig (in M oder M') schneiden, so liegen diese Durchschnittspunkte auf einem Kegelschnitte, und nach dem Satze von Mich. Roberts schneiden sich die von den Kreispunkten eines Ellipsoids rechtwinklig zu einander gezogenen geodätischen Linien (AM und BM) auf einer sphärischen Curve. Hieraus folgt also:

Die Durchschnittspunkte von rechtwinklig sich schneidenden Radien vectoren eines Systems confocaler Lemniscaten liegen bei einer Kugel sowohl, als auch bei einem Ellipsoïd, wenn die Brennpunkte Kreispunkte sind, auf einem sphärischen Kegelschnitte.

Betrachten wir aber in der Gleichung $uv = c$ c als constant, dagegen e als veränderlich, so erhalten wir ein anderes System von geodätischen Lemniscaten, bei welchen die Summe der Quadrate der Halbaxen constant ist. Es sei, wie oben, die Diagonale MON des geodätischen Vierecks $AMBN$ ein Durchmesser einer Lemniscate, und M und N sollen die Brennpunkte einer zweiten Lemniscate sein, für welche auch die Gleichung $uv = c$ ($AM.AN = BM.BN = c$) gilt, und die also durch A und B geht. Durch Veränderung des Durchmessers MON ergiebt sich ein System von Lemniscaten, welche sämmtlich sich in A und B schneiden und bei denen die Summe der Quadrate der Halbaxen constant ist. Sind nun A und B beliebige Punkte in der Ebene oder auf der Kugel, wie überhaupt auf Flächen von constantem, positivem oder negativem, Krümmungsmaass, ferner auf solchen Flächen, welche zwei sich senkrecht schneidende Symmetralebenen haben, wofern sie symmetrisch gegen eine solche Ebene liegen, so hat man den Satz:

Alle concentrischen geodätischen Lemniscaten von gleichem Parameter (c) und gleicher Quadratsumme der Halbaxen haben einen gemeinschaftlichen Durchmesser (AB).

Schliesslich folgen noch zwei Beispiele, um die Anwendung der oben angegebenen Tangentenconstruction auch bei abgeleiteten Curven zu zeigen.

Einer geschlossenen Curve auf einer Fläche sei ein Polygon einbeschrieben $ABC\ldots A'B'C'$ (Fig. 6), dessen Seiten geodätische Linien sind. Die geodätischen Verlängerungen AB und $B'A'$ schneiden sich in M, diejenigen von BC und $C'B'$ in M', so ist MM' ein Element der Curve, welche man sich bei unendlicher Annäherung der Punkte

$ABC\ldots A'B'C'$ auch dadurch entstanden denken kann, dass ein geschlossener Faden um die Curve geschlungen ist, welcher länger als die Curve ist und von dem ein Theil durch die geodätischen Tangenten MB und MA' gebildet wird. Beim Uebergang von M nach M' können MB und MB' als bipolare geodätische Coordinaten einer Ellipse angesehen werden, deren Brennpunkte B und B' sind und die durch M geht. In M' geht diese Ellipse in eine zweite über mit den Brennpunkten C und C' u. s. f. Also werden alle diese Ellipsen die Curve MM' berühren, deren einzelne Elemente aus elliptischen Bögen bestehen. Wenn man dagegen die Polygonseiten AB und $C'B'$, BC und $B'A'$ verlängert, so erhält man die Schnittpunkte N und N'; beim Uebergang von N nach N' wird der Punkt N den Bogen einer geodätischen Hyperbel beschreiben, deren Brennpunkte B und B' sind. Ebenso ist das nächste Element $N'N''$ der Curve (N) der Bogen einer Hyperbel mit den Brennpunkten C' und A; diese Curve besteht also aus einzelnen Hyperbelbögen und schneidet die Curve (M) senkrecht. Auf der Kugel sind diese Curven confocale sphärische Kegelschnitte und auf den centrischen Flächen zweiter Ordnung Krümmungslinien. Daher schliesst man:

Werden von einem Punkte M ausserhalb eines sphärischen Kegelschnittes auf einer Kugel oder ausserhalb einer Krümmungslinie auf einem Ellipsoid zwei geodätische Tangenten gezogen, so sind durch M und die beiden Berührungspunkte als Brennpunkte eine geodätische Ellipse und Hyperbel bestimmt, welche die durch M gehenden confocalen sphärischen Kegelschnitte, beziehungsweise Krümmungslinien berühren. In der Ebene findet eine Berührung zweiter Ordnung statt.

Wenn man von einem Punkte O auf die Tangente einer Curve ein Perpendikel OM fällt, so liegt M auf der Fusspunktencurve, welche von dem über OT als Durchmesser (T Berührungspunkt) beschriebenen Kreise in M berührt wird. Man nehme nun an, O liege auf einer beliebigen Fläche und TM sei eine geodätische Tangente der Curve; der Punkt M sei durch die Gleichung bestimmt

$$OM^2 + TM^2 = OT^2,$$

d. h. OM und TM sind bipolare Coordinaten der Curve 4. $u^2 + v^2 = c$ $\frac{du}{dv} = -\frac{v}{u}$, so lässt sich nach dem Vorhergehenden die Tangente in M von dieser Curve bestimmen. Für einen zweiten Punkt T' der gegebenen Curve erhält man das Dreieck $OM'T'$, in welchem ebenfalls $OM'^2 + T'M'^2 = OT'^2$. MM' ist also ein Element der abgeleiteten Curve, welche der Fusspunktencurve in der Ebene entspricht und deren Tangente sich nach Gleichung 4. bestimmen lässt.

Reutlingen. Dr. O. Böklen.

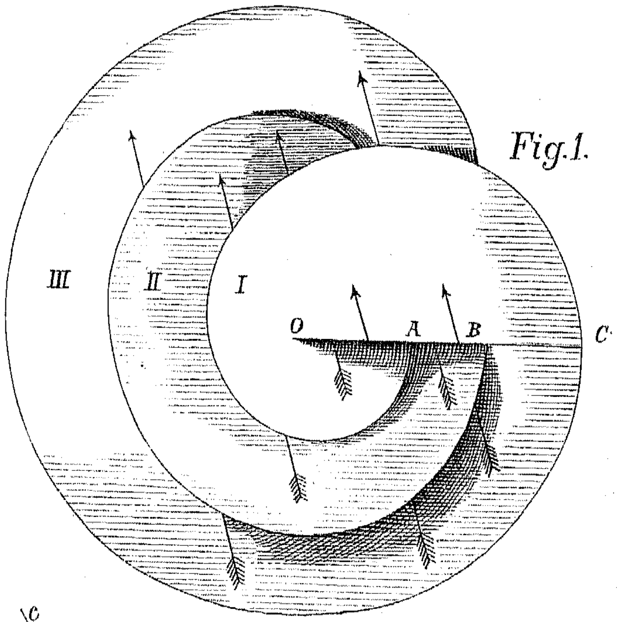

Fig. 1.

Z – Ebene
Riemann'sche Windungsfläche 2^{ter} O.

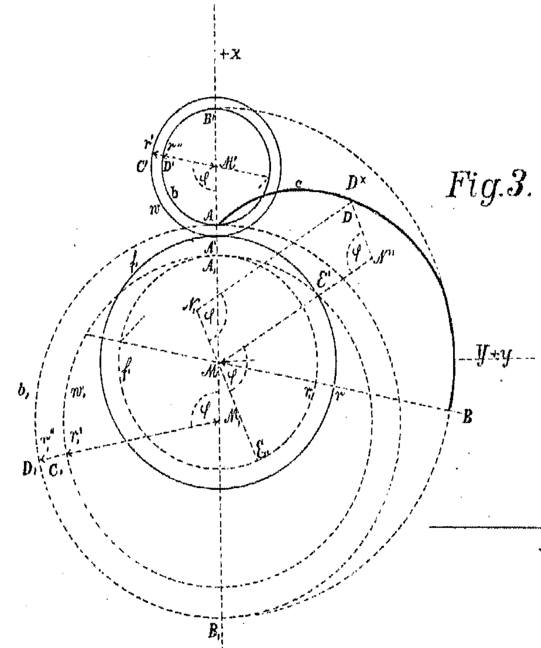

Fig. 3.

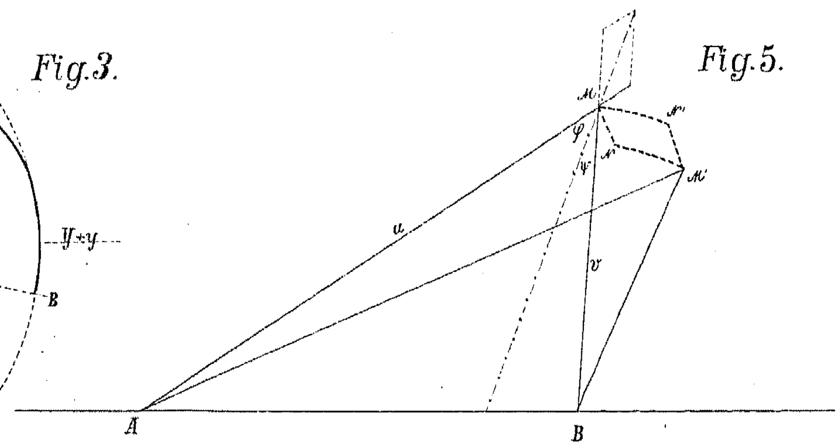

Fig. 5.

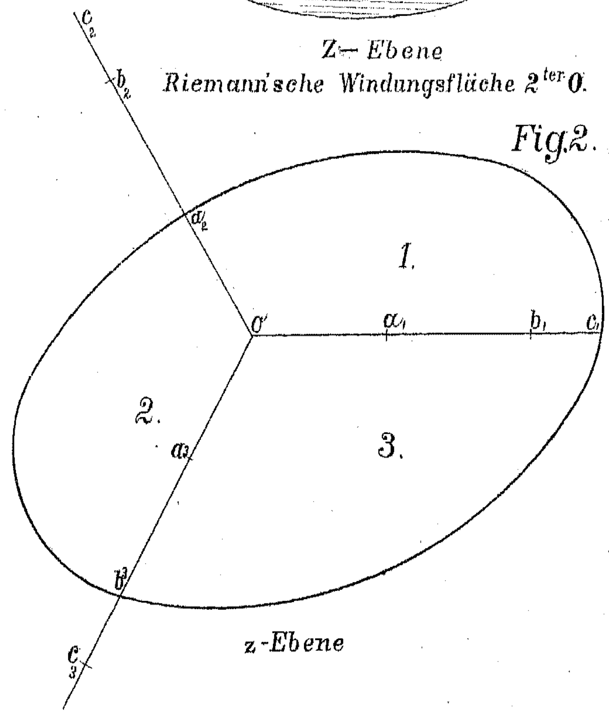

Fig. 2.

z-Ebene

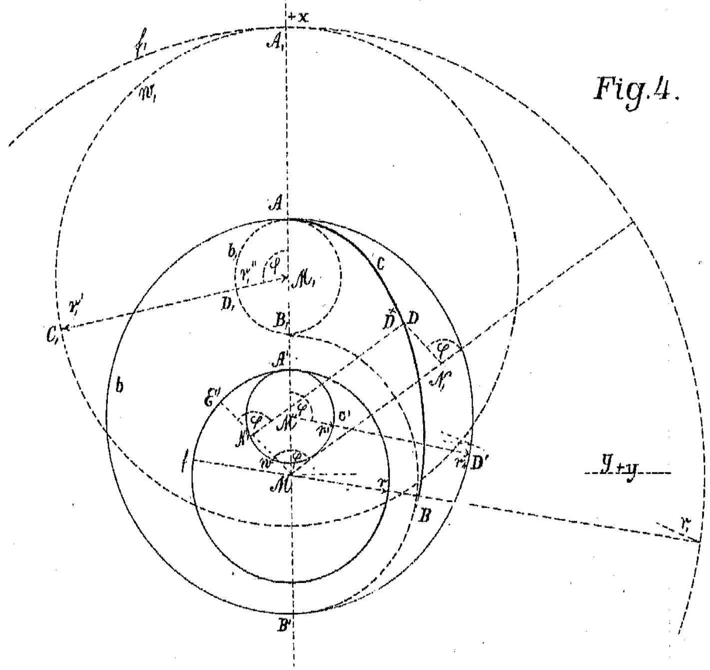

Fig. 4.

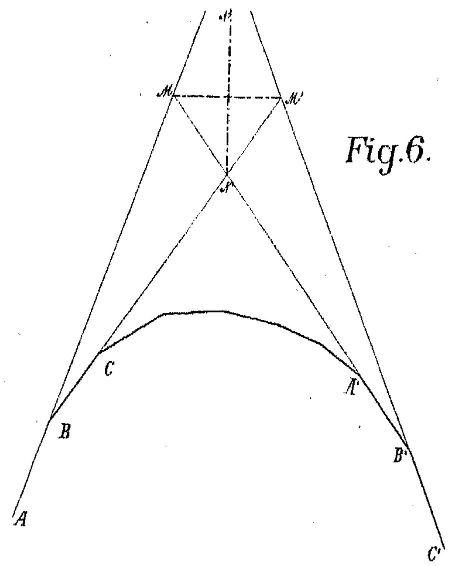

Fig. 6.