Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie;

Nota di ONORATO NICCOLETTI a Modena.

§ I. — Alcuni lemmi.

1. — Siano $a, b \ldots l$ dei numeri reali qualunque; $\alpha, \beta \ldots \lambda$ dei numeri intieri e positivi (maggiori od uguali ad 1), la cui somma indichiamo con n: poniamo quindi:

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots\ldots (x - l)^{\lambda}. \tag{1}$$

Essendo allora $F(x)$ un polinomio qualunque di grado $n-1$, e ponendo per brevità:

$$\varphi(x) = (x - a)^{\alpha} \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \psi(x) = (x - b)^{\beta} \frac{F(x)}{f(x)}, \quad \ldots\ldots,$$

$$\omega(x) = (x - l)^{\lambda} \frac{F(x)}{f(x)},$$

si ha la formula:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \sum_a \frac{1}{(\alpha - 1)!} \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left(\frac{\varphi(a)}{x - a} \right), \tag{2}$$

essendo la somma estesa a tutti i punti $a, b \ldots l$ (*).

La (2) si può trasformare. Si osservi infatti che si ha:

$$\varphi(a) = \lim_{x=a} \varphi(x) = \lim_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha} F(x)}{f(x)}$$

(*) Cf. Serret, *Algebra superiore*, ediz. 1885, tomo I, pag. 497 e Jacobi, *Opere*, vol. III, pag. 11.

e per la regola di L'Hospital:

$$\varphi(a) = \alpha!\, \frac{F(a)}{f^{(\alpha)}(a)},$$

donde immediatamente:

$$(2') \qquad \frac{F(x)}{f(x)} = \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)\,(x-a)} \right),$$

che dà sotto una forma molto concisa la decomposizione della $\frac{F(x)}{f(x)}$ in elementi semplici (*).

Sviluppando le derivazioni indicate nel secondo membro, vengono in esso a comparire le quantità

$$F(a),\ F'(a) \ldots F^{(\alpha-1)}(a);\ F(b),\ F'(b) \ldots F^{(\beta-1)}(b); \ldots;\ F(l),\ F'(l) \ldots F^{(\lambda-1)}(l);$$

e, quando queste si diano, come evidentemente è possibile, in modo affatto arbitrario, la (2') (moltiplicandone primo e secondo membro per $f(x)$), si riduce ad una formula di Hermite, che dà la forma di un polinomio di grado $n-1$ quando siano assegnati i valori del polinomio e delle sue prime $\alpha - 1$ derivate per $x = a$, del polinomio e delle sue prime $\beta - 1$ derivate per $x = b$, ... del polinomio e delle sue prime $\lambda - 1$ derivate per $x = l$ (**).

Un altro risultato notevole segue ancora dalla (2'). Poniamo

$$(3) \qquad F(x) = P_0 x^{n-1} + P_1 x^{n-2} + \ldots + P_{n-1};$$

e moltiplicata la (2') per $f(x)$, confrontiamo nei due membri il coefficiente di x^{n-1}. Avremo la formula:

$$(4) \qquad P_0 = \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)} \right\};$$

donde in particolare:

(*) Integrando si ha la formula notevole:

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}\, dx = \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)} \log(x-a) \right\} + C.$$

(**) Cf. " Giornale di Crelle ", vol. 84°, pag. 70.

Se $F(x)$ *è un polinomio di grado minore di* $n-1$, *si ha identicamente:*

$$\text{(I)} \qquad \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha\, F(a)}{f^{(\alpha)}(a)} \right\} = 0;$$

per $F(x) = x^{n-1}$, *si ha invece:*

$$\text{(II)} \qquad \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha\, a^{n-1}}{f^{(\alpha)}(a)} \right\} = 1.$$

Le formule (I) e (II) sono la generalizzazione di notissime formule d'algebra.

2. — Sia ora l'equazione differenziale di ordine n:

$$(5) \qquad y^{(n)} = \varphi(x).$$

La funzione y *definita dall'uguaglianza:*

$$\text{(III)} \quad y = \frac{1}{(n-1)!} f(x) \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)\,(x-a)} \int_a^x (a-z)^{n-1} \varphi(z)\, dz \right\}$$

è un integrale della (5) *che soddisfa alle condizioni iniziali seguenti:*

Nei punti $a, b, c \ldots l$ *l'integrale* y *si annulla rispettivamente insieme colle sue prime* $\alpha-1$, $\beta-1, \ldots \lambda-1$ *derivate.*

È facile fare la verifica.

Derivando infatti la (III) ρ volte rispetto ad x, con $\rho < n$, è facile vedere che, per la (I), la parte priva di segni integrali è identicamente nulla: e si ha allora, con facili riduzioni:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^\rho y}{dx^\rho} &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_0^\rho{}_i\, (-1)^i \frac{\rho!}{(\rho-i)!} \frac{d^{\rho-i} f(x)}{dx^{\rho-i}} \,. \\ &\sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)\,(x-a)^{i+1}} \int_a^x (a-z)^{n-1} \varphi(z)\, dz \right\}; \end{aligned} \right.$$

quando poi si abbia $\rho = n$, si ha dapprima:

$$y^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_0^n{}_i \binom{n}{i} \frac{d^{n-i} f(x)}{dx^{n-i}} \sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)} \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{1}{x-a} \int_a^x (a-z)^{n-1} \varphi(z)\, dz \right) \right\}.$$

Sviluppando ora il secondo membro, esso si può separare in due parti, una con integrali, l'altra esplicita. La prima parte è identicamente nulla, in quanto ogni integrale viene moltiplicato per la derivata n^{ma} di un polinomio di grado inferiore ad n: la parte esplicita si riduce in forza della (I) a:

$$y^{(n)}=f(x)\,.\,\varphi(x)\sum_1^n{}_k(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)(x-a)}\right\}.$$

Ma per la (2′) e per una nota proprietà dei coefficienti binomiali:

$$f(x)\sum_a \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}}\left\{\frac{\alpha}{f^{(\alpha)}(a)(x-a)}\right\}=1\,;\quad \sum_1^n{}_k(-1)^{k-1}\binom{n}{k}=1\,;$$

e quindi finalmente:

$$y^{(n)}=\varphi(x).$$

È poi chiaro che la y si annulla ad es. per $x=a$ insieme colle sue prime $\alpha-1$ derivate: infatti, finchè $\rho<\alpha$, si ha $f^{(\varrho-i)}(a)=0$ e quindi per la (6) anche $\left(\frac{d^\varrho y}{dx^\rho}\right)_{x=a}=0$; se invece $\rho=\alpha$, nella (6) si annulla la parte che si riferisce al punto a, ma non le altre, in quanto $f^{(\alpha)}(a)\neq 0$.

Aggiungendo alla funzione y data dalla (III) il polinomio di Hermite di grado $n-1$, che assume valori assegnati insieme colle sue prime $\alpha-1$ derivate (e risp. $\beta-1\ldots\lambda-1$) nel punto $x=a$ (e risp. in $x=b, c\ldots l$), *si ha un integrale dell'equazione* (5) *che prende nel punto a valori assegnati* (*arbitrarî*) *insieme colle sue prime $\alpha-1$ derivate, nel punto b insieme colle sue prime $\beta-1$, ... , nel punto l insieme colle sue prime $\lambda-1$ derivate.*

Queste condizioni iniziali si indicheranno brevemente nel seguito sotto il nome di condizioni (A) *(Cf. la nota in fine).*

§ II. — Il teorema fondamentale.

3. — Sia l'equazione differenziale ordinaria dell'ordine n:

$$\text{(IV)}\qquad y^{(n)}=\varphi(x,y,y',\ldots y^{(n-1)})$$

dove il secondo membro è una funzione finita e continua dei suoi argomenti e rispetto ad $y, y' \dots y^{(n-1)}$ soddisfa alle condizioni fondamentali di Lipschitz:

$$(7) \quad \left| \varphi(x, y, y', y'' \dots y^{(n-1)}) - \varphi(x, y_1, y'_1 \dots y_1^{(n-1)}) \right| < A \sum_{0}^{n-1}{}_k \left| y^{(k)} - y_1^{(k)} \right|,$$

dove A è una costante positiva e finita.

Vogliamo dimostrare il teorema:

Finchè i punti $a, b \dots l$ ed il punto variabile x sono in un intervallo convenientemente piccolo, si può trovare un integrale della (IV) *che soddisfi alle condizioni iniziali* (A).

Procediamo per questo col metodo delle approssimazioni successive (o integrazioni successive secondo il Peano) (*). Sostituiamo perciò nel secondo membro della (IV) al posto della y e delle sue derivate delle costanti arbitrarie e, chiamando $\varphi_0(x)$ il risultato della sostituzione, integriamo l'equazione iniziale:

$$y_1^{(n)} = \varphi_0(x)$$

colle condizioni iniziali (A). Poniamo quindi:

$$\varphi(x, y_1, y'_1 \dots y_1^{(n-1)}) = \varphi_1(x),$$

e integriamo sotto le condizioni iniziali (A) l'equazione:

$$y_2^{(n)} = \varphi_1(x);$$

e così continuiamo indefinitamente. In generale sarà:

$$\varphi(x, y_k, y'_k, \dots y_k^{(n-1)}) = \varphi_k(x),$$

ed y_{k+1} sarà l'integrale, sotto le condizioni iniziali (A), dell'equazione:

$$y_{k+1}^{(n)} = \varphi_k(x). \qquad (k = 1, 2 \dots)$$

In un intervallo convenientemente limitato per la x e i punti $a, b \dots l$, la y_{k+1} tende uniformemente ad un limite, che è un integrale della (IV) *sotto le condizioni iniziali* (A).

(*) Cf. Peano, *Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie*, " Atti dell'Accademia di Torino ", 21 novembre 1897.

Consideriamo infatti le serie:

$$(S)\begin{cases} y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \dots + (y_{k+1} - y_k) + \dots \\ y_1^{(\varrho)} + (y_2^{(\varrho)} - y_1^{(\varrho)}) + (y_3^{(\varrho)} - y_2^{(\varrho)}) + \dots + (y_{k+1}^{(\varrho)} - y_k^{(\varrho)}) + \dots \\ \qquad\qquad (\rho = 1, 2 \dots n-1) \\ \varphi_1 + (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + \dots + (\varphi_{k+1} - \varphi_k) + \dots \end{cases}$$

Indicando con M il massimo valore assoluto della $\varphi_1(x) - \varphi_0(x)$ nell'intervallo che si considera, si avrà evidentemente, per la (III) e per la (6):

$$\left| y_2 - y_1 \right| < \frac{M}{n!} \left| f(x) \right| \sum_a \left| \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left(\frac{\alpha (x-a)^{n-1}}{f^{(\alpha)}(a)} \right) \right| ;$$

$$\left| y_2^{(\varrho)} - y_1^{(\varrho)} \right| < \frac{M}{n!} \sum_0^{\varrho} {}_i \left| \frac{\rho!}{(\rho - i)!} \frac{d^{\varrho-i} f(x)}{dx^{\varrho-i}} \right| . \sum_a \left| \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha (x-a)^{n-i-1}}{f^{(\alpha)}(a)} \right\} \right| ,$$

$$\rho = 1, 2 \dots n-1$$

dove il simbolo $\sum_a \left| \dots . \right|$ indica che eseguita la derivazione $\alpha - 1$ volte ripetuta rispetto ad a (e analog. per $b \dots l$) si debba prendere la somma dei moduli dei termini ottenuti. Se quindi chiamiamo con P_ϱ (per $\rho = 0, 1, 2 \dots n-1$) il massimo valore assoluto di

$$\frac{1}{n!} \sum_0^{\varrho} \left| \frac{\rho!}{(\rho - i)!} \frac{d^{\varrho-i} f(x)}{dx^{\varrho-i}} \right| \sum_a \left| \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial a^{\alpha-1}} \left\{ \frac{\alpha (x-a)^{n-i-1}}{f^{(\alpha)}(a)} \right\} \right| ,$$

con P la somma $P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}$, avremo evidentemente, tenendo conto della (7):

$$| y_2 - y_1 | < P_0 M, \quad | y_2^{(\varrho)} - y_1^{(\varrho)} | < P_\varrho M, \quad | \varphi_2 - \varphi_1 | < APM.$$

Seguitando avremo:

$$| y_3 - y_2 | < P_0 . APM; \; | y_3^{(\varrho)} - y_2^{(\varrho)} | < P_\varrho . APM; \; | \varphi_3 - \varphi_2 | < A^2 P^2 M;$$

$$| y_4 - y_3 | < P_0 . A^2 P^2 M; \; | y_4^{(\varrho)} - y_3^{(\varrho)} | < P_\varrho . A^2 P^2 M; \; | \varphi_4 - \varphi_3 | < A^3 P^3 M;$$

e in generale, per qualunque k:

(9) $|y_{k+1} - y_k| < P_0 . A^{k-1} P^{k-1} M$; $|y^{(\varrho)}_{k+1} - y^{(\varrho)}_k| < P_\varrho . A^{k-1} P^{k-1} M$;

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| < A^k P^k M.$$

Se quindi è $AP < 1$, tutte le serie (8) convergeranno uniformemente nell'intervallo che si considera, donde col noto ragionamento (*) deduciamo che la y_{k+1} tende uniformemente ad un limite y, che è l'integrale cercato.

4. — Tutto dunque si riduce a soddisfare la disuguaglianza:

$$P < \frac{1}{A} . \tag{V}$$

La (V) non è facile a discutere in modo generale: si può tuttavia far vedere che essa sarà certamente soddisfatta, quando i punti $a, b \ldots l, x$ rimangono un intervallo convenientemente piccolo.

Una via è la seguente: Indichiamo con L l'intervallo che contiene i punti $a, b \ldots l$ ed il punto variabile x, con l la *minima* distanza tra due dei punti $a, b \ldots l$. Sviluppando l'espressione di P_ϱ, è facile vedere che, essendo $\mu_{t\varrho}$ dei numeri positivi, dipendenti solo da ρ e dagli esponenti $\alpha, \beta \ldots \lambda$, sarà certamente:

$$P_\varrho < \Sigma_t \, \mu_{t\varrho} \frac{L^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}} ,$$

dove t prende i valori da 1 fino al massimo dei numeri $\alpha, \beta \ldots \lambda$ (ad es.: α) e ρ va da 0 fino ad $n - 1$.

Ne segue allora:

$$P < \sum_1^\alpha{}_t \sum_0^{n-1}{}_\varrho \, \mu_{t\varrho} \frac{L^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}}$$

e quindi, per soddisfare la (V), basterà che si abbia:

$$\sum_1^\alpha{}_t \sum_0^{n-1}{}_\varrho \, \mu_{t\varrho} \frac{L^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}} < \frac{1}{A} . \tag{10}$$

(*) Cf. ad es. Picard, *Traité d'Analyse*, tomo II, pag. 304, od anche tomo III, pag. 98.

Se inoltre i punti $a, b \dots l$ sono in numero di $s+1$, sarà anche evidentemente

$$sl \leq \mathrm{L}. \tag{11}$$

Conviene dunque discutere insieme le due disuguaglianze (10) ed (11).

Noi procederemo come segue. Osserviamo innanzi tutto come, assegnato ad l un valore arbitrario, si possa certo soddisfare alla (10); basta per questo prendere L minore dell'unica radice positiva c dell'equazione in x

$$\sum_{1}^{\alpha}{}_t \sum_{0}^{n-1}{}_\varrho \mu_{\varrho t} \frac{x^{2n-t-\varrho}}{l^{n-t}} = \frac{1}{\mathrm{A}} . \tag{12}$$

Se poi dovrà essere soddisfatta anche la (11), dovrà essere *a fortiori*

$$\sum_{1}^{\alpha}{}_t \sum_{0}^{n-1}{}_\varrho \mu_{\varrho t}\, s^{2n-t-\varrho}\, l^{n-\varrho} < \frac{1}{\mathrm{A}} . \tag{13}$$

Inversamente, sia l un numero che soddisfa la (13) (ed è possibile soddisfarvi con numeri positivi, in quanto il primo membro è nullo per $l=0$ e cresce insieme con l): sarà allora evidentemente sl minore della radice positiva c della (12), nella quale per l sia sostituito il valore trovato: basta allora prendere per L un numero qualunque compreso tra sl e c, e prossimo a c tanto quanto si vuole.

Assegnato adunque l in guisa da soddisfare alla (13), ma del resto affatto arbitrariamente, si può quindi determinare L in guisa da soddisfare alla (V).

Il teorema fondamentale enunciato è così completamente dimostrato.

5. — Alcune osservazioni sui risultati che precedono.

Si rammenti bene innanzi tutto, per non esser tratti a deduzioni che potrebbero sembrare paradossali o per lo meno poco naturali, che le condizioni suesposte sono soltanto *sufficienti, ma niente affatto necessarie* per la convergenza delle serie integrali, che possono convergere ed in generale convergeranno in un intervallo più ampio di quello trovato.

È facile inoltre dimostrare le proprietà seguenti dell'integrale y:

a) L'integrale y e le sue derivate fino all'n^{ma} sono funzioni finite e continue dei valori iniziali (*).

b) Nell'intervallo di convergenza l'integrale è unico (**).

c) Se il secondo membro della (IV) *ha le derivate prime rispetto ai suoi argomenti finite e continue, l'integrale y e le sue prime n derivate ammettono derivate rispetto ai valori iniziali, pure finite e continue* (***).

6. — Il teorema fondamentale sopra dimostrato si estende senza alcuna difficoltà ai sistemi di equazioni simultanee della forma:

$$y_i^{(n_i)} = \varphi_i(x, y_1, y_2 \dots y_p;\, y'_1, y'_2 \dots y'_p; \dots), \qquad (i = 1, 2 \dots p) \tag{14}$$

risolute cioè rispetto alle derivate delle funzioni incognite di ordine superiore.

Assegnato per ogni funzione y_i un gruppo di punti $x_{i1}, x_{i2}, \dots x_{is_i}$, e risp. di numeri intieri positivi $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots \alpha_{is_i}$, tali che $\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \dots + \alpha_{is_i} = n_i$; si può determinare, almeno finchè i punti x_{ik} ed il punto x rimangono in un intervallo convenientemente piccolo, un sistema di funzioni y_i $(i = 1, \dots p)$, integrale delle equazioni (14), tale che la y_i assuma nel punto x_{ik} (per $i = 1, 2 \dots p$, $k = 1, 2 \dots s_i \dots$) valori assegnati arbitrari insieme colle sue prime $\alpha_{ik} - 1$ derivate.

La dimostrazione di questo teorema è affatto simile a quella data nel caso di una sola equazione: alla disuguaglianza fondamentale (V) se ne sostituisce una perfettamente simile, e alla quale si può soddisfare nello stesso modo, chiamando ancora

(*) Cf. ad es. NICCOLETTI, *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, considerati come funzioni dei loro valori iniziali*, " Rend. Lincei ", 15 dicembre 1895.

(**) Cf. PICARD, *Traité d'analyse*, tomo III, pag. 99 e 100.

(***) Cf. PEANO, nota citata, pag. 11 e 12.

con L l'intervallo totale, con l la minima distanza *tra due punti* x_{ik} *del medesimo gruppo* (aventi cioè lo stesso primo indice).

Il sistema integrale soddisfa inoltre alle condizioni di continuità, unicità e derivabilità, di cui sopra abbiamo discorso.

7. — Tornando per semplicità al caso di una sola equazione, il teorema fondamentale dimostrato dà luogo, quando si scelgano in modo particolare i punti $a, b \ldots l$ e gli esponenti relativi $\alpha, \beta \ldots \lambda$, a tanti casi particolari, alcuni dei quali notevoli.

Se si suppone che tutti i punti $a, b \ldots l$ coincidano in uno (che avrà allora naturalmente come esponente il numero n) si ricade nel teorema classico di esistenza, dovuto a Cauchy. In questo caso la disuguaglianza fondamentale (V) prende una forma molto più semplice e più facile per la discussione.

Se si suppone invece che i punti $a, b \ldots l$ siano in numero di n (e quindi ciascuno coll'esponente 1), si ha un integrale dell'equazione data che assume in n punti valori assegnati (*).

Teoremi affatto analoghi valgono evidentemente per gli integrali del sistema (14).

Sostituendo poi all'equazione data (o al sistema (14)) un sistema equivalente, introducendo come nuove funzioni incognite delle derivate delle funzioni primitive, oppure anche prendendo come nuove funzioni incognite delle funzioni note delle funzioni incognite date e delle loro derivate, dal teorema fondamentale si deducono tanti teoremi particolari, che in casi speciali possono riuscire molto utili: ma a queste ed altre ovvie deduzioni del teorema fondamentale basti avere appena accennato.

§ III. — Estensione del teorema fondamentale ad una classe di equazioni a derivate parziali.

8. — Può forse interessare l'estensione dei risultati precedenti a quella classe di equazioni a derivate parziali, delle quali diedi alcune proprietà in una memoria pubblicata negli " Atti dell'Accademia di Napoli „ del 1896 (**).

(*) Cfr. Picard, *Traité d'Analyse*, tomo III, pag. 94-100.

(**) Cf. Niccoletti, *Sull'estensione dei metodi di Picard e di Riemann ad una classe di equazioni a derivate parziali*, " Atti dell'Accademia delle Scienze di Napoli „, vol. VIII, serie II, nº 2, 1896.

Limitiamoci per semplicità al caso di due variabili indipendenti e di una sola equazione:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = \varphi\left(z, p, q, \ldots \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \, \partial y^k}, \ldots\right)$$

$$(\text{con } i = 0,1 \ldots m, k = 0,1, \ldots n, \; i + k \leq m + n - 1),$$

di cui il secondo membro soddisfi alle solite condizioni di Lipschitz.

Indichiamo con $x_0, x_1 \ldots x_s (s \leq m)$; $y_0, y_1 \ldots y_t (t \leq n)$ dei numeri reali arbitrari, con $\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_s$; $\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_t$ dei numeri interi e positivi tali che $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_s = m$, $\beta_0 + \beta_1 + \ldots$ $\ldots + \beta_t = n$; e poniamo:

$$(15) \qquad \begin{aligned} f(x) &= (x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_s)^{\alpha_s} ; \\ g(y) &= (y - y_0)^{\beta_0} (y - y_1)^{\beta_1} \ldots (y - y_t)^{\beta_t} . \end{aligned}$$

Consideriamo poi l'equazione:

$$(16) \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = 0 ,$$

il cui integrale generale è:

$$z = \sum_0^{m-1} x^i \, Y_i + \sum_0^{n-1} {}_k \, y^k \, X_k ,$$

dove le X sono funzioni arbitrarie della sola x, le Y della sola y. Mediante risoluzione di equazioni lineari è possibile determinare le X e le Y in guisa da avere un integrale z_1 della (16), che soddisfi alle condizioni iniziali seguenti (che diremo *condizioni* (B)):

Lungo la caratteristica $x = x_i$ (*o* $y = y_k$) *l'integrale* z_1 *prende valori assegnati arbitrari insieme colle sue prime* $\alpha_i - 1$ (*o* $\beta_k - 1$) *derivate rispetto ad* x (*o ad* y), $(i = 0, 1 \ldots s, k = 0, 1 \ldots t)$.

Considerando poi la funzione:

$$(17) \qquad z_2 = \frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!} f(x) \, g(y) \, \Sigma_{x_0} \, \Sigma_{y_0} \frac{\partial^{\alpha_0 + \beta_0 - 2}}{\partial x_0^{\alpha_0 - 1} \, \partial y_0^{\beta_0 - 1}} \mathrm{A}(x_0 y_0),$$

dove:

$$(17') \qquad \mathrm{A}(x_0 \, y_0) =$$

$$= \left\{ \frac{\alpha_0 \, \beta_0}{f^{(\alpha_0)}(x_0) g^{(\beta_0)}(y_0) (x - x_0)(y - y_0)} \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} (x_0 - x)^{m-1} (y_0 - y)^{n-1} \varphi(xy) \, dx \, dy \right\},$$

essa è un integrale dell'equazione:

$$(18) \qquad \frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \, \partial y^n} = \varphi\,(xy),$$

il quale lungo la caratteristica $x = x_i (y = y_k)$ si annulla insieme colle sue prime $\alpha_i - 1$ ($\beta_k - 1$) derivate prese rispetto ad x (o ad y).

Ne segue che la funzione

$$z = z_1 + z_2 \tag{19}$$

è un integrale della (18) che soddisfa alle condizioni iniziali (B).

Posto ciò, il solito metodo delle approssimazioni successive dimostra il teorema:

Almeno finchè le caratteristiche $x = x_i$, $y = y_k$ ed il punto variabile (xy) rimangono in un'area rettangolare convenientemente piccola, è possibile determinare un integrale della (VI), *che soddisfi alle condizioni iniziali* (B).

Il metodo di dimostrazione è identico a quello tenuto per la equazione (IV); alle quantità P_k vanno sostituite delle altre P_k, Q_r relative risp. alla sola variabile x (od y); la P prende la forma:

$$P = \sum_0^m{}_k \sum_0^n{}_r P_k Q_r ; \qquad (r + k \leq m + n - 1)$$

e la disuguaglianza $P < \frac{1}{A}$ si può discutere in guisa affatto analoga a quella del n° 4: si vedrà anzi in questo caso una latitudine molto maggiore ed una certa arbitrarietà nel fissare l'area rettangolare di convergenza.

NOTA al § 1.

La formula (III) è un caso particolare della seguente, che enuncio soltanto. Sia.

$$y^{(n)} + a_1 \ y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = g(x) \tag{α}$$

un'equazione lineare completa a coefficienti costanti: e l'equazione caratteristica della equazione omogenea abbia le radici distinte $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_p$ degli ordini $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p$ (con $\mu_1 + \ldots + p_p = n$); e sia:

$$\varphi(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)^{\mu_1} (\sigma - \sigma_2)^{\mu_2} \ldots (\sigma - \sigma_p)^{\mu_p}. \tag{β}$$

Poniamo inoltre:

$$A = y(a) + \int_a^x h(z,a) g(z) dz ; \ \ldots ; \ L = y(l) + \int_l^x h(z,l) g(z) dz. \tag{γ}$$

dove:

$$h(z,t) = \sum_1^p{}_i \frac{\partial^{\mu_i - 1}}{\partial \sigma_i^{\mu_i - 1}} \left\{ \frac{\mu_i e^{-\sigma_i(z-t)}}{\varphi^{(\mu_i)}(\sigma_i)} \right\}, \tag{δ}$$

coll'avvertenza che ove una delle σ, ad es.: σ_1 sia zero, si eseguiscano le derivazioni ad essa relative supponendola diversa da zero e quindi si faccia uguale a zero nel risultato.

Poniamo infine per brevità

$$\Delta_a^h f = \frac{\partial^h f}{\partial a^h}\,, \qquad \Delta_b^k f = \frac{\partial^k f}{\partial b^k}\ \ldots\ldots$$

Con queste convenzioni, l'equazione:

$$(\epsilon)\qquad \begin{vmatrix}
y & e^{\sigma_1 x} & x e^{\sigma_1 x} & \ldots\ldots & x^{\mu_1-1} e^{\sigma_1 x} & \ldots\ldots & e^{\sigma_p x} & x e^{\sigma_p x} & \ldots\ldots & x^{\mu_p-1} e^{\sigma_p x} \\
A & e^{\sigma_1 a} & a e^{\sigma_1 a} & \ldots\ldots & a^{\mu_1-1} e^{\sigma_1 a} & \ldots & e^{\sigma_p a} & a e^{\sigma_p a} & \ldots\ldots & a^{\mu_p-1} e^{\sigma_p a} \\
\Delta_a A & \Delta_a e^{\sigma_1 a} & \Delta_a a e^{\sigma_1 a} & \ldots & \Delta_a a^{\mu_1-1} e^{\sigma_1 a} & \ldots & \Delta_a e^{\sigma_p a} & \Delta_a a e^{\sigma_p a} & \ldots & \Delta_a a^{\mu_p-1} e^{\sigma_p a} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Delta_a^{\alpha-1} A & \Delta_a^{\alpha-1} e^{\sigma_1 a} & \Delta_a^{\alpha-1} a e^{\sigma_1 a} & \ldots & \Delta_a^{\alpha-1} a^{\mu_1-1} e^{\sigma_1 a} & \ldots & \Delta_a^{\alpha-1} e^{\sigma_p a} & \Delta_a^{\alpha-1} a e^{\sigma_p a} & \ldots & \Delta_a^{\alpha-1} a^{\mu_p-1} e^{\sigma_p a} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
L & e^{\sigma_1 l} & l e^{\sigma_1 l} & \ldots\ldots & l^{\mu_1-1} e^{\sigma_1 l} & \ldots & e^{\sigma_p l} & l e^{\sigma_p l} & \ldots\ldots & l^{\mu_p-1} e^{\sigma_p l} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\Delta_l^{\lambda-1} L & \Delta_l^{\lambda-1} e^{\sigma_1 l} & \Delta_l^{\lambda-1} l e^{\sigma_1 l} & \ldots & \Delta_l^{\lambda-1} l^{\mu_1-1} e^{\sigma_1 l} & \ldots & \Delta_l^{\lambda-1} e^{\sigma_p l} & \Delta_l^{\lambda-1} l e^{\sigma_p l} & \ldots & \Delta_l^{\lambda-1} l^{\mu_p-1} e^{\sigma_p l}
\end{vmatrix} = 0$$

dove per $y(a)$, $y'(a) \dots y^{(\alpha-1)}(a)$; $y(b)$, $y'(b) \dots y^{(\beta-1)}(b)$; ..... $y(l)$, $y'(l) \dots y^{(\lambda-1)}(l)$ *si pongano dei valori arbitrarii definisce un integrale* y *della* (α), *che soddisfa alle condizioni iniziali* (A).

La dimostrazione, non difficile, della formula (ϵ) si fonda sulla derivazione dei determinanti e sulle uguaglianze (I) e (II) del § 1.

Facendo nella (ϵ) $p = 1$, $\sigma_1 = 0$, $\mu_1 = n$, si ricade nella (III).

Quando i coefficienti $a_0, a_1 \dots a_n$ siano reali ed alcune delle σ complesse (a coppia coniugate) è facile dare una forma priva di immaginarii all'equazione (ϵ).

Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque;

Nota II del Prof. LUIGI BERZOLARI.

Le proposizioni, che nella Nota precedente (*) furono dimostrate ricorrendo ad una scelta speciale degli assi coordinati, si possono altresì stabilire facendo uso d'un sistema di coordinate di WEIERSTRASS affatto arbitrario: questo nuovo metodo, che certamente è meno semplice di quell'altro, ha però su esso il vantaggio di condurre nel medesimo tempo ad ulteriori notevoli conseguenze.

Come in quella Nota, le nostre ricerche riguarderanno una varietà V_m ad m dimensioni, immersa in uno spazio S_n di n dimensioni e di curvatura Riemanniana costante $\frac{1}{k^2}$, essendo k reale (anche infinito), o puramente imaginario. Data sopra V_m una qualsiasi varietà W_h di h dimensioni, e fissato su essa ad arbitrio un punto P, chiameremo ancora $W_h^{(t)}$ la varietà di h dimensioni, che si ottiene proiettando W_h sullo spazio lineare S_m ad m dimensioni tangente in P a V_m, e $W_h^{(n)}$ la varietà ad

(*) *Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque*, Nota I (" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXIII, p. 692).