SITZUNG AM 6. JULI 1885.

Walther Dyck, *Beiträge zur Analysis situs*. I. Mittheilung. (Vorgelegt von *F. Klein*.) Mit 1 lithogr. Tafel.

Die folgenden Untersuchungen handeln von *der Bestimmung der Grundzahl einer Fläche*[1]), welche aus beliebig vielen — berandeten oder geschlossenen — Theilen besteht, und bezwecken insbesondere, diese Bestimmung zu charakterisiren, falls jene Fläche durch analytische Daten gegeben vorliegt.

Die Bestimmung gründet sich auf ein, auf der Fläche gezeichnetes Curvensystem, von der Art, dass durch jeden Punkt eine und nur eine Curve des Systems hindurchgeht und nur in einer endlichen Zahl von Punkten mehrere — auch unendlich viele — Curvenzweige einmünden.

Der Gedanke, die Beziehungen der besonderen Punkte derartiger Curvensysteme zu der Grundzahl einer geschlossenen Fläche aufzusuchen, ist zuerst von Möbius in seiner »Theorie der elementaren Verwandtschaft«, in diesen Berichten Bd. 15, (1863) ausgeführt und es waren gerade dessen anschauliche und dem Wesen der Fragestellung angepasste Methoden, welche mich zu den vorliegenden Untersuchungen geführt haben. Und in der That trifft gerade diese Herleitung der Grundzahl das Wesen der Aufgabe, insofern durch ein solches Curvensystem gewissermassen der Werdeprocess der Fläche geschildert wird, ihr Wachsthum in schmalen Streifen, welche zwischen je zwei benachbarten Curven enthalten sind, wobei dann die Verwach-

1) Ich bediene mich hier der von Neumann eingeführten Bezeichnung für die wohl auch als »ausserordentlicher Zusammenhang« bezeichnete Zahl $G = z - 1 = 2p$, wo z den »Zusammenhang« im Riemannschen Sinne, p das »Geschlecht« der Fläche bezeichnet.

sungen, von denen ja die Grundzahl abhängt, jedesmal in den singulären Stellen des Curvensystems ihren Ausdruck findet.

Andeutungen über die gegenseitige Beziehung der besonderen Punkte eines derartigen Curvensystems finden sich wohl zuerst bei Gauss[1]), ferner hat Reech diese Beziehungen für die auf einer Kugel gezeichneten Curvensysteme aufgestellt[2]). In neuester Zeit ist von Klein[3]) auf die Möglichkeit ihrer allgemeineren Formulirung hingewiesen worden und insbesondere kommt Poincaré in seinen Untersuchungen »Sur les courbes définies par une équation différentielle«[4]) auf die Frage für Kugel und Kugelcalotte ganz in dem hier im ersten Abschnitte gegebenen Sinne[5]).

Im *Abschnitt I* ist *die geometrische Bestimmung der Grundzahl* einer Fläche in allgemeinster Weise gegeben. Diese Formulirung führt dann unmittelbar auch zu einer rechnerischen, auf die *analytische Darstellung* jener Fläche gegründeten, welcher der *Abschnitt II* gewidmet ist. Diese letztere Bestimmung aber zeigt *die unmittelbare Beziehung unserer geometrischen Fragestellung zu den allgemeinen Untersuchungen von Kronecker über die Characteristik eines Functionensystems*[6]), und führt so umgekehrt, wenigstens für specielle Fälle, zu einer neuen, anschauungsmässigen Deutung jener Characteristik[7]). Persönliche

1) Theorie des Erdmagnetismus.

2) Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées. Journal de l'école polytechnique. Cah. 37. 1858.

3) Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen und ihrer Integrale. Teubner 1882. pag. 39.

4) Journal de mathématiques 3e série, t. VII, VIII. 1881, 82.

5) Beim Abschluss dieser Mittheilung erhalte ich die Fortsetzung dieser Poincaré'schen Untersuchungen (im neuesten Hefte des Journal de mathématiques, 4e série, t. I), welche gleichfalls *die Ausdehnung auf Flächen von beliebiger Grundzahl enthält und in nicht wesentlicher Specialisirung Formeln* (pag. 203 ff. u. pag. 212), *aus welchen sich die von mir in § 3 gegebene, und für ein beliebiges irgendwie berandetes Flächenaggregat gültige Beziehung zusammenstellen lässt.* In Rücksicht auf ihre abgeschlossene Form, welche für die Entwicklungen des II. Abschnitts wesentlich ist, glaube ich aber doch auch diese geometrischen Darlegungen meines I. Abschnittes nicht unterdrücken zu sollen.

6) Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1869 u. 1878.

7) Man vergl. bezüglich des Zusammenhangs der Characteristikentheorie mit geometrischen Problemen hier noch besonders die Bemerkungen auf pag. 146 der Monatsberichte von 1878.

Unterredungen mit Herrn Kronecker haben mich wesentlich zu deren Ausführung angeregt. Indem ich auf eine allgemeine Darlegung bei einer anderen Gelegenheit eingehen will, ist hier im II. Abschnitte die analytische Darstellung speciell an den beiden Aufgaben ausgeführt: 1) Gegeben die Gleichung einer ebenen Curve $f=0$; man bestimme die Grundzahl des Gebietes $f<0$. 2) Gegeben die Gleichung $f=0$ einer (geschlossenen) Fläche; man bestimme ihre Grundzahl. Für diese Aufgaben ergiebt sich die Grundzahl direct ausgedrückt durch die Characteristik des aus f und seinen ersten Ableitungen nach den Variabeln gebildeten Functionensystems, ein System, welches (bei n Variabeln) von Kronecker speciell in der Abhandlung vom August 1869 behandelt ist. Die dort für die geschlossene Fläche gegebene geometrische Deutung der Characteristik als *»Curvatura integra« im Gauss'schen Sinne zeigt dabei die Beziehung der letzteren zur Grundzahl einer Fläche*, welche, so natürlich sie sich (auch auf geometrischem Wege) ergiebt, bisher noch nicht beachtet zu sein scheint. Die Ausdehnung auf Gebiete von mehr Dimensionen, wie sie bei Kronecker eingeführt ist, giebt die Richtung, in welcher die hier vorliegenden geometrischen Fragen für höhere Räume aufzufassen sind. In der Behandlung der zweiten Aufgabe (vergl. pag. 323) ist Gelegenheit geboten, auf jene Sätze für einen dreidimensionalen Raum, wenigstens in einer speciellen Form hinzuweisen. Ich denke auf dieselben demnächst einzugehen.

Abschnitt I.

§ 1. Die Grundzahl einer »Fläche F«.

Es ist wohl zweckmässig, zur Einführung der gebrauchten Bezeichnungen kurz die *Definition der Grundzahl* eines Aggregates von beliebig berandeten und geschlossenen Flächenstücken — welches in der Folge kurz als »*Fläche F*« bezeichnet wird — vorauszuschicken, wie sie Neumann in seinen »Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale« gegeben hat[1]):

Für eine aus einem einzigen *berandeten* Stücke bestehende Fläche zunächst ist die Grundzahl gleich der um eins vermehrten Anzahl von »*Querschnitten*« (d. h. von Rand zu Rand geführten

1) Man vergleiche etwa auch Klein, Math. Annalen Bd. 21. pag. 152.

Schnitten), welche nothwendig sind, um die Fläche einfach berandet, und ohne Faltung und Zerreissung in die Ebene ausbreitbar zu machen. Daraus folgt: 1) Ziehen eines *Querschnittes* vermindert die Grundzahl um eins. 2) Anbringen einer *Oeffnung* im Innern der Fläche, eine Operation, welche die Definition der Grundzahl auf *geschlossene* Flächen auszudehnen gestattet, erhöht die Grundzahl um eins. 3) Ein in sich geschlossener Schnitt »*Rückkehrschnitt*«, als Combination von Operation 2 und 1, lässt die Grundzahl ungeändert.

Die Festsetzung, dass die erwähnten Zählungen gültig bleiben sollen, auch soferne die Fläche bei den Operationen 1 und 3 zerstückt wird, liefert sofort die Definition der Grundzahl G eines Aggregates von N beliebig berandeten und geschlossenen Flächenstücken, bez. von den Grundzahlen $g_1, g_2, \ldots g_N$ in der Formel:

$$G = \Sigma g_i - 2N + 2.$$

§ 2. Curvensystem S.

Unter einem *Curvensystem* S ist in der Folge stets ein beliebiges, auf der Fläche F gezeichnetes Curvensystem der Eingangs erwähnten Art verstanden. Jeder Punkt $\overset{i}{P}$ im Innern, $\overset{r}{P}$ auf dem Rande der Fläche sei bezeichnet nach der Zahl der von ihm auslaufenden Curvenzweige; wir gebrauchen also $\overset{i}{P}_0$ bez. $\overset{r}{P}_0$ als Symbol für einen isolirten Punkt, $\overset{i}{P}_1$ bez. $\overset{r}{P}_1$ für einen Punkt, in welchem eine Curve des Systems abbricht, sei es im Innern oder auf dem Rande, $\overset{i}{P}_2$ stellt einen gewöhnlichen Punkt im Innern der Fläche vor, von einem $\overset{r}{P}_2$ laufen zwei Zweige in das Innere der Fläche (z. B. bei einer Berührung einer Curve des Systems mit dem Rande), in $\overset{i}{P}_n$, $\overset{r}{P}_n$ münden n — mit n sei stets ein *endlicher* Index bezeichnet —, in $\overset{i}{P}_\infty$, $\overset{r}{P}_\infty$ unendlich viele Zweige des Systems S.

Nun seien die Punkte $\overset{i}{P}_n$, $\overset{r}{P}_n$, $\overset{i}{P}_\infty$, $\overset{r}{P}_\infty$ bez. in der Zahl $\overset{i}{p}_n$, $\overset{r}{p}_n$, $\overset{i}{p}_\infty$, $\overset{r}{p}_\infty$ auf der Fläche vorhanden, wobei $\overset{i}{p}_2$ und (falls die Fläche F überhaupt Randcurven besitzt) $\overset{r}{p}_1$ gleich unendlich ist, während wir alle übrigen — »*besonderen*« — Punkte des Systems als in *endlicher* Zahl auf der Fläche vorhanden voraussetzen[1]).

Indem wir diese letzteren *discret* auf der Fläche vertheilt annehmen, ist das Verhalten des Curvensystems S in der Umgebung eines jeden dieser Punkte völlig bestimmt, sowie es die Figuren 1—6 schematisch darstellen. Specielle Formen der Punkte P_∞, wie sie durch Zusammenrücken mit Punkten P_n entstehen, berücksichtigen wir in der Folge nicht weiter, weil ihr Einfluss auf die abzuleitende Formel ohne weiteres aus ihrer Entstehung sich ergiebt. In Fig. 7—9 sind derartige Vorkommnisse angedeutet. Zu den Figuren 6—8 sei dabei bemerkt, dass diese drei Formen eines $\overset{r}{P}_\infty$ auch entstehen, wenn man einen Punkt $\overset{i}{P}_\infty$ zerschneidet und zwar, je nachdem bei dieser Zerschneidung von den beiden Zweigen, welche die Schnittlinie berühren, keiner, einer oder zwei in das Flächeninnere fallen.

§ 3. Die Beziehung zwischen den Zahlen G und p.

Mit Einführung dieser Bezeichnung ergiebt sich nun für die Beziehung der Grundzahl G unserer Fläche F zu den besonderen Punkten irgend eines auf derselben gezeichneten Curvensystems S die Formel:

$$(1)\qquad 2G - 4 = \sum (n-2)\,\overset{i}{p}_n + \sum (n-1)\,\overset{r}{p}_n - 2\,\overset{i}{p}_\infty .$$

Zum Beweise derselben gehen wir aus von einem speciellen Falle, wo es sich um ein einfach berandetes Flächenstück von der Grundzahl 1 handelt und in welchem das Curvensystem S *im Innern* der Fläche *keinen besonderen Punkt, auf dem Rande nur Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$* besitzt. Hierfür nimmt der Satz (1) die Form

$$(2)\qquad -2 = \overset{r}{p}_2 - \overset{r}{p}_0$$

an, die sich wie folgt erweist:

Man zerschneide die Fläche längs der $2\,\overset{r}{p}_2$ von den Punkten $\overset{r}{P}_2$ ausgehenden Curven des Systems S[2]). Dann überzeugt man

1) Vergl. hierzu noch die Schlussbemerkung des folgenden § 3.

2) Ich betrachte diese Curven als von einander verschieden; speciellere Annahmen bringen nur unwesentliche Modification.

sich, indem man die Stücke successive in einem System S sich entstehend denkt, sofort, dass dieselben nur die in Fig. 10 u. 11 gegebenen Formen haben können. Indem wir die Vertheilung der $\overset{r}{p}_0$ Punkte $\overset{r}{P}_0$ und der $3\,\overset{r}{p}_2$ Punkte $\overset{r}{P}_2$ auf diesen Stücken beachten, übersehen wir sofort: Es giebt $\overset{r}{p}_0$ Theile, die je *einen* Punkt $\overset{r}{P}_0$ und $\overset{r}{P}_2$ enthalten und $\frac{1}{2}(3\,\overset{r}{p}_2 - \overset{r}{p}_0)$ Theile, mit je *zwei* Punkten $\overset{r}{P}_2$. Nun hat man andererseits im Ganzen $2\,\overset{r}{p}_2 + 1$ Stücke. Der Vergleich beider Anzahlen führt sofort zur obigen Formel (2).

Auf diese Form (2) lässt sich nun der allgemeine Satz durch successive Umformung unserer Fläche F reduciren.

1) Wir schneiden aus der Fläche F, welche die Grundzahl G besitze, alle *besonderen* Punkte im Inneren heraus und auf dem Rande alle mit Ausnahme der Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$. Die neuentstandene Fläche F' hat die Grundzahl $G' = G + \sum \overset{i}{p}_n + \overset{i}{p}_\infty$ und *auf ihren Rändern bloss mehr Punkte* $\overset{r}{P}_2$ *und* $\overset{r}{P}_0$. Beim Ausschneiden der besonderen Punkte entstehen nämlich, wie dies die Figuren 1—6 erläutern, Berührungen von Curven des Systems mit dem neugebildeten Rande, welche, je nachdem sie von Innen oder Aussen an die um den Punkt geführte Schnittlinie herantreten, als Punkte $\overset{r}{P}_2$ bez. $\overset{r}{P}_0$ für unsere Fläche F' zu rechnen sind. *Dabei ist jedesmal die Differenz d aus der Anzahl dieser Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ ein Characteristicum des betreffenden singulären Punktes*, und zwar ist für einen Punkt $\overset{i}{P}_n$ diese Differenz $\overset{i}{d}_n = n$, für einen $\overset{i}{P}_\infty$ $\overset{i}{d}_\infty = 0$, und analog ist für die Punkte des Randes: $\overset{r}{P}_n$ $\overset{r}{d}_n = (n-1)$, für $\overset{r}{P}_\infty$ $\overset{r}{d}_\infty = 0$. Die in Fig. 7 u. 8 bezeichneten speciellen Formen eines Punktes $\overset{r}{P}_\infty$ sind dann wieder aufzufassen als Vereinigung eines bez. zweier Punkte $\overset{r}{P}_0$ mit einem gewöhnlichen Punkte $\overset{r}{P}_\infty$. Unsere Abzählung zeigt, dass die Fläche F' auf ihren Rändern eine Anzahl von Punkten $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$ besitzt, deren Differenz völlig bestimmt und gleich $\sum n\,\overset{i}{p}_n + \sum (n-1)\,\overset{r}{p}_n$ ist.

2) Diese Fläche F' verwandle man durch ein geeignetes System von Rückkehr- und Querschnitten in eine Fläche F'', die aus N einfach berandeten Theilen, je von der Grundzahl 1 besteht. Dieses Schnittsystem enthält, wie man leicht abzählt, $2G' + 2N - 4 = 2G + 2\sum^{i} p_n + 2\overset{i}{p}_\infty + 2N - 4$ Kreuzungspunkte, welche wir (nur der Kürze wegen) nicht in den besonderen Punkten unserer Fläche gelegen annehmen. F'' enthält jetzt auf ihren Rändern wieder nur Punkte $\overset{r}{P}_2$ und $\overset{r}{P}_0$, deren Differenz sich gegen die vorige von F' nur um die Anzahl jener Kreuzungsstellen geändert hat. In diesen nämlich hat, wie dies Fig. 12 andeutet, *einer* der drei dort vereinigten Ränder einen Punkt $\overset{r}{P}_0$ erhalten. Punkte $\overset{r}{P}_0$, $\overset{r}{P}_2$ aber, die auf den übrigen Theilen jener Quer- und Rückkehrschnitte auftreten, sind (vergl. Fig. 13) immer paarweise einander ergänzend vorhanden, so dass deren Differenz verschwindet. Nun wendet man endlich für diese N Flächenstücke, für welche die Gesammtdifferenz der Punkte $\overset{r}{P}_2$ u. $\overset{r}{P}_0$ gleich $\sum^{i}(n-2)\, p_n + \sum^{r}(n-1)\, p_n - 2\overset{i}{p}_\infty - 2G - 2N + 4$ ist, die Formel (2) an, um unmittelbar auf den zu Anfang aufgestellten Satz zu gelangen.

Bezüglich des *Randes* unserer Fläche F sei hier noch bemerkt: Wir können annehmen, dass Theile desselben, oder auch ganze (geschlossene) Randcurven dem Curvensystem S angehören. Im ersteren Falle können wir, ohne die Grundzahl der Fläche zu ändern, jenes Stück sofort auf einen Punkt zusammenziehen, dessen Qualität in jedem Falle leicht zu entscheiden ist, und, falls ein Rand seiner ganzen Ausdehnung nach als Curve des Systems auftritt, durch eine kleine Verzerrung desselben (vergl. z. B. Fig. 1) *ohne Aenderung der für ihn characteristischen Differenz von Punkten* $\overset{r}{P}_2$, $\overset{r}{P}_0$ das gewöhnliche Verhältniss herstellen. Das letztere Vorkommniss ist also für die Abzählung ohne Einfluss.

Abschnitt II.

Die in Abschnitt I gegebene allgemeine Formel ermöglicht nun sofort auch die analytische Bestimmung der Grundzahl einer Fläche F etwa für folgende Fragestellung: Gegeben die Gleichungen $F_1(x, y, z) = 0$ und $F_2(x, y, z) = 0$ zweier Flächen;

wie gross ist die Grundzahl der »im Innern« von $F_2 = 0$ liegenden Theile von $F_1 = 0$? Man stelle zu dem Ende z. B. durch ein Büschel von Flächen $\varphi + \lambda\psi = 0$ ein Curvensystem S auf $F_1 = 0$ her und berechne die Anzahlen der besonderen Punkte dieses Systems für das Innere von F_2 und für den von $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ gebildeten Rand, Anzahlen, welche sich in übersichtlichster Weise aus den Vorzeichen gewisser Determinanten bestimmen, in einer Form, welche unmittelbar auf die allgemeine Theorie der Characteristiken eines Functionensystems hinweist, wie sie von Kronecker a. a. O. gegeben ist. In §§ 5 und 6 formuliren wir die hiermit allgemein bezeichnete Aufgabe für zwei specielle Fälle, an denen die Beziehung zu jenen Untersuchungen am deutlichsten hervortritt.

§ 4. Die Kronecker'sche Characteristik eines Functionensystems.

Zur Uebersicht sei die allgemeine Definition der Characteristik eines Functionensystems nach Kronecker vorangestellt.

Es seien $f_{00}, f_{10}, f_{20}, \cdots f_{n0}$ eindeutige reelle Functionen der n reellen Veränderlichen $z_1, z_2 \ldots z_n$ und zwar solche, die sowohl eine $n$fach unendliche Zahl positiver als negativer Werthe annehmen. Sie seien überdies im Allgemeinen stetig und nach den einzelnen Variabeln differentiirbar vorausgesetzt und endlich werde angenommen, dass keine der $n + 1$ Functionaldeterminanten gleichzeitig mit den betreffenden Functionen für unendlich viele Werthsysteme z verschwindet[1]). Bezeichnet nun f_{gh} die nach z_h genommene Ableitung von f_{go}, und $[a]$ die positive oder negative Einheit oder Null, je nachdem die reelle Grösse a positiv oder negativ oder Null ist, so ergeben sich für die Characteristik K des Functionensystems die beiden Darstellungen:

$$K = -\tfrac{1}{2}\Sigma\,[|f_{gh}|] = \Sigma\,[|f_{ik}|]$$
$$g, h = 0, 1, 2 \ldots n;\ i, k = 1, 2 \ldots n,$$

die erste Summation verstanden über alle Punkte

$$f_{00} = f_{10} = \cdots = f_{(m-1)0} = f_{(m+1)0} = \cdots = f_{n0} = 0$$

(für welche also irgend n der $n + 1$ Functionen verschwinden); die zweite Summe verstanden über die Punkte, für welche

1) Vergl. hier pag. 325 des Folgenden.

$$f_{00} < 0\,;\; f_{10} = f_{20} = \cdots = f_{no} = 0.$$

Dies vorangeschickt formuliren wir die:

§ 5. Aufgabe 1.

Gegeben die Gleichung einer ebenen Curve $f(x, y) = 0$. Welches ist die Grundzahl des »Innenraumes« $f < 0$?

Zur *bestimmten* Fixirung der Aufgabe nehmen wir an, dass die Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ (wo f_1 und f_2 die partiellen Ableitungen von f nach x bez. y bezeichnen) nicht gleichzeitig für reelle Werthepaare x, y zu befriedigen seien. Zur *einfacheren* Formulirung dient: Die Ebene werde bezüglich ihres Verhaltens im Unendlichen als eine Kugel, d. h. mit nur einem unendlich fernen Punkte betrachtet, welcher im *Aussen*raume $f > 0$ der Curve gelegen sei (was stets durch stereographische Projection erreicht werden kann). Dann gilt der Satz:

Bezeichnet K die Characteristik des Functionensystems

$$(1) \qquad f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

G die Grundzahl des Innenraumes von $f = 0$, so ist

$$(2) \qquad G = -K + 2.$$

Wir erläutern den Satz in doppelter Form:

I. Man betrachte die Geraden parallel zur X-Axe als Curvensystem S und frage nach der Differenz der »inneren« und »äusseren« Berührungen, welche specielle Gerade des Systems mit der Curve $f = 0$ eingehen. Diese ist, nach Abschnitt I, gleich $2G - 4$; übrigens wird sie bestimmt durch

$$\Sigma \left[\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe ausgedehnt über alle Punkte, für welche

$$f = 0 \quad \text{und} \quad f_1 = 0$$

ist, und also ist

$$-(G - 2) = \tfrac{1}{2} \Sigma [f_{11}] = K$$

die Characteristik des Functionensystems (1).

II. Man betrachte das System der Curven $f = \text{const.}$ im Innern von $f = 0$. Es ist ein Curvensystem S, *bei welchem der*

Rand ($f = 0$) *dem Systeme angehört* (vergl. pag. 320). Man frage also zur Bestimmung der Grundzahl nach der Differenz der Punkte $\overset{i}{P}_4$ und $\overset{i}{P}_0$ im Innern von $f = 0$[1]), für welche sich nach Abschnitt I. $G - 2 = \overset{r}{p}_4 - \overset{r}{p}_0$ ergiebt. Sie wird weiter gegeben durch

$$- \Sigma \left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \right],$$

diese Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$f < 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

also, bis auf das Vorzeichen, als Characteristik K. So liefern gerade die beiden Formen der Kronecker'schen Characteristik die verlangte Bestimmung in der einfachsten Art.

§ 6. Aufgabe 2.

Gegeben die Gleichung einer Fläche $f(x, y, z) = 0$. Welches ist ihre Grundzahl?

Ich führe hier gleichfalls zwei Formulirungen dieser Abzählung an, wie sie sich aus den zwei Formen der Kronecker'schen Characteristik sofort ergeben, wobei, wie schon Eingangs bemerkt, die zweite Formulirung hier bereits in das Gebiet der Abzählungen in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit hinübergreift. Wenngleich ich ausführlich auf diese letzteren Abzählungen an dieser Stelle nicht eingehe, so mag doch in der speciellen, sich hier unmittelbar aufdrängenden Form dieses weitere Problem angedeutet sein.

Zur *bestimmten* Fixirung der Aufgabe nehmen wir wieder an, dass die vier Gleichungen $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ (unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Ableitungen von f nach x, y, z verstanden) nicht gleichzeitig für reelle Werthe von x, y, z zu befriedigen seien. Zur *einfacheren* Formulirung setzen wir weiter fest: Der Raum werde als Kugelraum betrachtet, d. h. mit nur einem unendlich fernen Punkte, welchen wir als im Aussenraume $f > 0$ unserer Fläche gelegen annehmen. Dann lautet unser Satz:

---

1) Der Einfacheit wegen seien höhere Singularitäten ausgeschlossen, Punkte P_∞ können nach der zu Anfang gegebenen Formulirung der Aufgabe hier nicht auftreten.

Die Grundzahl G unserer Fläche $f = 0$ ist gegeben durch die Formel

$$(1)\qquad G = -2K + 2,$$

wo K die Characteristik des Functionensystems

$$(2)\qquad f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0.$$

Formel (1) *drückt dabei, im Zusammenhalt mit der Kronecker-schen Deutung der Characteristik, die Eingangs erwähnte Beziehung der Grundzahl einer geschlossenen, übrigens aus beliebig vielen Theilen bestehenden Fläche zu der durch 4π dividirten Curvatura integra derselben aus*, eine Relation, die sich auch unmittelbar durch geometrische Betrachtungen ergiebt. Zur Begründung von Formel (1) betrachten wir wieder:

I. Ein System von Ebenen parallel zur (xy)-Ebene. Dasselbe schneidet auf $f(x, y, z) = 0$ ein Curvensystem S aus, welches nur Punkte $\overset{i}{P}_4$ und $\overset{i}{P}_0$ aufzuweisen hat für die Tangentialebenen in Punkten hyperbolischer bez. elliptischer Krümmung. Die Differenz $\overset{i}{p}_4 - \overset{i}{p}_0$ aller dieser Punkte von $f = 0$, welche nach Abschnitt I. gleich $G - 2$ ist, wird gegeben durch:

$$\Sigma\left[\begin{vmatrix} f & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}\right],$$

die Summe ausgedehnt über alle Punkte

$$f = 0, \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0,$$

und also ist

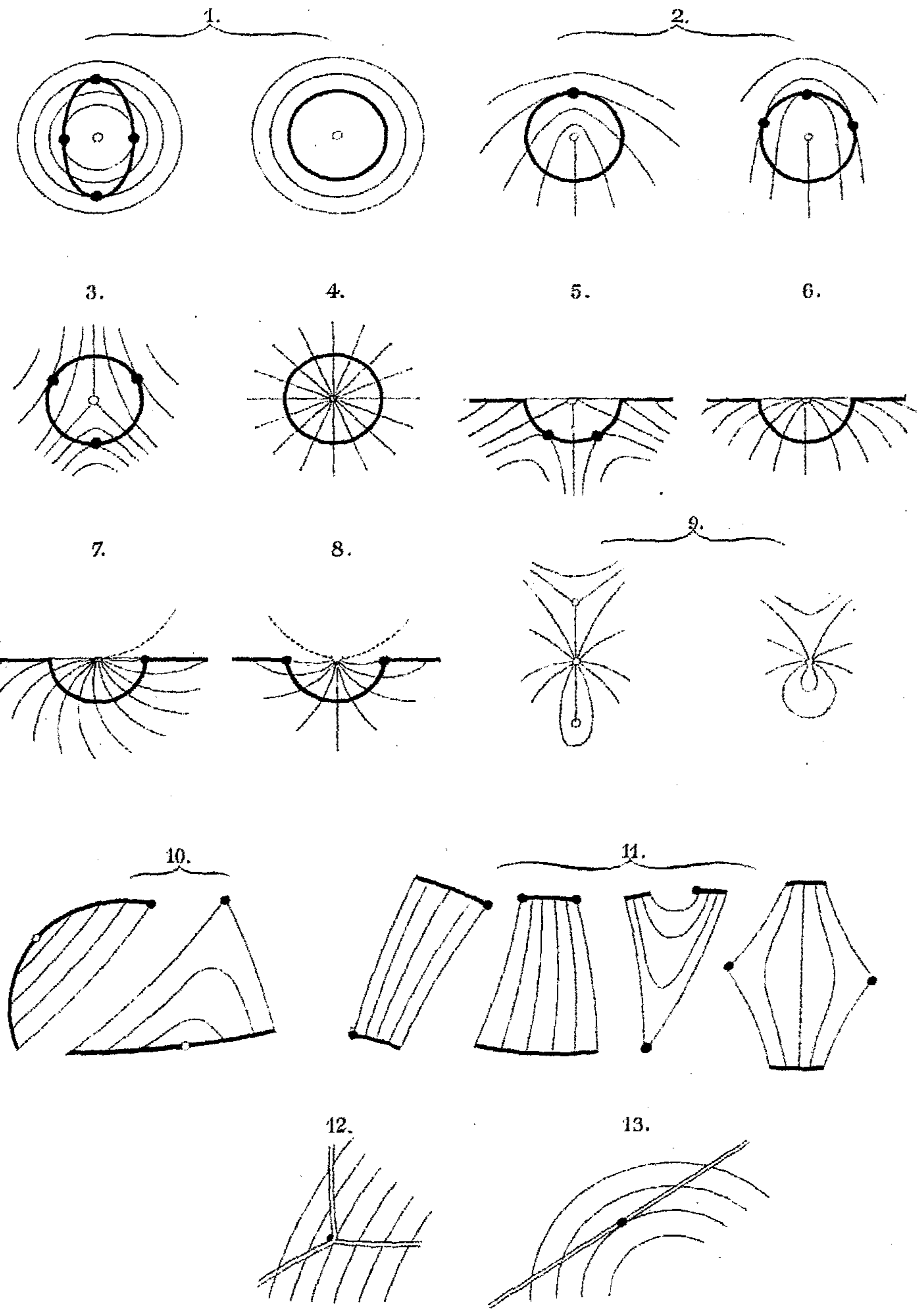
$$G - 2 = -\Sigma\left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}\right] = -2K,$$

w. z. b. w.

II. Nun ist aber auch

$$K = \Sigma\left[\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}\right],$$

diese Summe ausgedehnt über $f < 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$. Diese Formel ergiebt unmittelbar die geometrische Abzählung der Grundzahl unserer Fläche in folgender Form:



Berichte d.K.S.Ges.d.Wiss.math.phys. Cl. 1885.
Zur Abhandlung von W. Dyck.

Im Innern von $f = 0$ ist ein »Flächensystem S« von Flächen $f =$ const. gezeichnet, so dass durch jeden Punkt nur eine Fläche des Systems hindurchgeht. Die Knotenpunkte ($f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$) von Flächen des Systems trennen sich, wenn wir das System in bestimmter Richtung (mit wachsender Constanten) durchlaufen, in 4 Kategorien:

1) Punkte, in welchen ein elliptisch gekrümmter Flächentheil aus einem isolirten Punkte entsteht; umgekehrt

2) Punkte, in denen sich ein elliptisch gekrümmter Theil zusammenzieht,

3) Punkte, bei denen ein hyperbolisch gekrümmter Flächentheil in zwei elliptisch gekrümmte sich spaltet, und umgekehrt,

4) Punkte, wo zwei elliptisch gekrümmte Flächentheile sich zu einem hyperbolischen vereinigen.

Nimmt man nun an, dass die Anzahlen der im Innern von $f = 0$ befindlichen Knotenpunkte der ebengenannten Arten [1]) bez. p_{ie}, p_{ei}, p_{he}, p_{eh} sind, so sagt unsere obige Formel, dass

$$G = 2\,(p_{ei} + p_{eh} - p_{ie} - p_{he}) + 2\,.$$

In der That erkennt man auch geometrisch sofort aus den in § 1 gegebenen Definitionen für die Grundzahl, dass durch die Uebergänge (1) und (3) die Grundzahl der Fläche um 2 vermindert, durch die Uebergänge (2) und (4) dagegen um 2 vermehrt wird, was die eben gegebene Formel sofort auch auf geometrischem Wege erweist.

Ich denke auf die weiteren hiermit angedeuteten Formulirungen bei nächster Gelegenheit einzugehen.

---

1) Soferne höhere Singularitäten in *einzelnen* Punkten eintreten, lassen sie sich leicht in die allgemeine Formulirung einbegreifen. Das Auftreten von Doppellinien aber (und damit auch das Vorkommniss einseitiger Flächen in unserem Systeme) ist in der gegenwärtigen Formulirung schon durch die Kronecker'schen Bedingungen für das Functionensystem f, f_1, f_2, f_3 (vergl. § 4) ausgeschlossen.