



Johann Wolfgang Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Institut für Theoretische Physik
Robert-Mayer-Str. 10
D-60054 Frankfurt am Main

Farbsupraleitung in Quarksternen

Diplomarbeit von Stefan Rüster

Betreuender Professor: Prof. Dr. Rischke

6. Januar 2003

Dankesworte

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. Dr. Rischke, Herrn Prof. Dr. Stöcker, Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Greiner, Herrn Prof. Dr. Maruhn und Herrn Prof. Dr. Kegel für ihre Fürsorge und ihr großes Interesse an meinem Diplomarbeitsthema. Insbesondere bin ich meinem betreuenden Professor Herrn Prof. Dr. Rischke dankbar, dessen Vorlesungen, Hinweise und Vorschläge für mich sehr wertvoll waren. Besonderen Dank gilt meinem Kollegen und Zimmergenossen Herrn Dr. Qun Wang, ohne dessen hilfreiche Unterstützung die Anfertigung dieser Diplomarbeit bestimmt viel länger gedauert hätte. Zudem bin ich Herrn Matthias Hanauske für die Einarbeitung in das Themengebiet der Neutronensternberechnung zu Dank verpflichtet. Ich bedanke mich bei Herrn Matthias Hanauske, Herrn Debades Bandyopadhyay und Herrn Jürgen Schaffner-Bielich für ihre Ratschläge. Ich danke Herrn Matthias Hanauske und Herrn Christian Beckmann für die Bereitstellung ihrer Quelltexte. Ich möchte mich bei allen Institutskollegen bedanken, die mir weitergeholfen haben. Herrn Prof. Dr. Fried danke ich für seine Verbesserungsvorschläge für das Kapitel Sternentwicklung. Auch meinen Eltern sei an dieser Stelle für die gesamte Unterstützung meines Studiums gedankt.

Vorwort

In dieser Diplomarbeit soll untersucht werden, welche Auswirkungen ein farbsupraleitender Zustand auf die Zustandsgleichung kalter Quarkmaterie hat. Um diese Änderungen ermitteln zu können, wird einmal eine Zustandsgleichung im normalleitenden und einmal im farbsupraleitenden Zustand berechnet. Wahlweise können auch strange Quarks miteinbezogen werden. Die farbsupraleitende Materie ist zunächst bei der Berechnung des Drucks nicht farb- und elektrisch-ladungsneutral. Mein Quelltext zur Bestimmung der Zustandsgleichung erlaubt es diese sowohl für neutrale als auch für geladene farbsupraleitende Materie zu ermitteln.

Mit diesen Daten lassen sich z. B. Aussagen über Quarksterne machen. Man kann deren Massen und Radien usw. mit Hilfe der Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung (TOV-Gleichung) aus der Zustandsgleichung bestimmen. D. h. man ist direkt imstande, den Unterschied in den physikalischen Eigenschaften von Quarksternen zu erkennen, der entsteht, wenn man den farbsupraleitenden mit dem normalleitenden Zustand vergleicht. Die Quarksterne sind hierfür das bestmögliche „Testobjekt“, da in ihnen der Effekt der Farbsupraleitung vermutet wird. Zudem ermittle ich in meiner Diplomarbeit, wie groß der farbsupraleitende Gap sein muß, damit sich die Eigenschaften eines Quarksterns im farbsupraleitendem von dem im normalleitenden Zustand merkbar unterscheiden.

Wenn nicht lokal anders definiert, verwende ich in der gesamten Diplomarbeit zur Berechnung folgende Konventionen:

$$\hbar = c = k_B = 1, \quad (1)$$

sowie die Bjorken-Drell-Definition für die γ -Matrizen, siehe dazu auch Anhang A.2 auf der Seite 97. Lateinische Indizes laufen im Ortsraum von eins bis drei, griechische von null bis drei. Desweiteren sind der Raumzeitvektor durch

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}) \quad (2)$$

und der metrische Tensor durch die Gleichung (A.13) auf der Seite 98 definiert. Anders ist dies z. B. in Kapitel 4. Hier werden nämlich Kugelkoordinaten verwendet. Bei solchen Ausnahmen werden die Größen lokal neu definiert. Diese sind dann nur in einem solchen Kapitel oder Abschnitt gültig. Ansonsten gilt die globale Definition.

In dieser Diplomarbeit werden die Eigenschaften von 2SC-farbsupraleitender Quarkmaterie mit masselosen up und down, massiven strange Quarks und masselosen Elektronen bei der Temperatur $T = 0$ berechnet. Hierfür wird in Kapitel 1 zunächst die großkanonische Zustandssumme ermittelt, mit der dann in Kapitel 2 weitergerechnet wird. Aus ihr kann man dann die Zustandsgleichung bestimmen. In Kapitel 3 erfährt man, was Quarksterne sind und wie sie entstehen. Die Gleichung, mit der man die Eigenschaften von kompakten Sternen errechnet, wird in Kapitel 4 hergeleitet. Die Ergebnisse sind in Kapitel 5 dargestellt. Meine Ergebnisse zeigen, daß stets die farbsupraleitende der normalleitenden Phase der Quarkmaterie vorgezogen wird, weil sie energetisch günstiger ist. Je größer der farbsupraleitende Gap ist, desto massereicher und größer sind die Quarksterne. Im 6. Kapitel sind die aus der Motivierung meiner Diplomarbeit folgenden Resultate zusammengefaßt.

Inhaltsverzeichnis

Dankesworte	iii
Vorwort	v
1 Die großkanonische Zustandssumme	1
1.1 Fermionen	1
1.2 Skalare Bosonen	4
1.3 Wechselwirkende Fermionen	7
1.4 Wechselwirkende Quarks	9
2 Farbsupraleitung	13
2.1 Die Zustandssumme der Farbsupraleitung	14
2.1.1 Die Herleitung der Zustandssumme für die Farbsupraleitung .	15
2.1.2 Die Color-Flavor-Diracstruktur der Propagatoren und Gap-	15
matrizen	
2.1.3 Umschreiben der Zustandssumme mit Hilfe des vollständigen	20
inversen Propagators	
2.1.4 Die Fouriertransformation des zweiten Faktors der Zustands-	24
summe	
2.1.5 Der vollständige Propagator	25
2.1.6 Die Fouriertransformation des ersten Faktors der Zustands-	25
summe	
2.1.7 Vereinfachen der Determinante	27
2.2 Die logarithmierte Zustandssumme	32
2.2.1 Der Logarithmus des zweiten Faktors der Zustandssumme . .	33
2.2.2 Der Logarithmus des ersten Faktors der Zustandssumme in	36
Projektorschreibweise	
2.2.3 Die Gapgleichung	40
2.2.4 Die Fouriertransformation der Gapgleichung	40
2.2.5 Die Color-Flavor-Dirac-Struktur der Gapgleichung	41
2.2.6 Summation über die Matsubara-Frequenzen	43
2.2.7 Strange Quarks	52
2.2.8 Ladungsneutralität durch Elektronen	53
2.3 Die Zustandsgleichung	53
2.3.1 Farb- und elektrische Neutralität	54
3 Sternentwicklung	61
3.1 Sternentstehung	61
3.1.1 Bildung von Mehrfachstern- und Planetensystemen	62
3.2 Hauptreihensterne	62
3.3 Rote Riesensterne	64
3.4 Endstadien der Sternentwicklung	64

3.5	Kompakte Sterne	67
3.5.1	Supernovae vom Typ II	68
3.5.2	Post-Supernova-Sternentwicklung	68
4	Relativistische Sterne	69
4.1	Metrik einer statischen, isotropen Raumzeit	69
4.2	Die Schwarzschildmetrik	71
4.3	Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung	74
5	Ergebnisse	79
5.1	Die Quarkmaterie	79
5.2	Quarksterne	90
6	Zusammenfassung	95
A	Matrizendefinitionen	97
A.1	Die Pauli-Matrizen	97
A.2	Die Bjorken-Drell-Definition der γ -Matrizen	97
A.3	Die ladungskonjugierende Matrix	98
A.4	Die Gell-Mann-Matrizen	98
A.5	Die Vektorwechselwirkungsmatrix	99
B	Erklärung	101

Abbildungsverzeichnis

2.1	Quark-Quark-Wechselwirkung durch Gluonenaustausch bei Kontaktwechselwirkung.	15
2.2	Quark-Quark-Kondensat in Mean-Field-Approximation.	23
2.3	Feynmandiagramm des Wechselwirkungsterms im Exponenten der Gleichung (2.78)	27
2.4	Die rechte Seite der Gapgleichung als Feynmandiagramm.	41
2.5	Integration über die fermionischen Pole auf der imaginären Achse.	44
2.6	Anwendung des Residuensatzes	45
3.1	Hertzprung-Russell-Diagramm (HRD)	63
3.2	Pulsar	66
5.1	Der Druck ohne strange Quarks aufgetragen gegen μ	80
5.2	Der Druck mit strange Quarks aufgetragen gegen μ	80
5.3	Der normierte Druck ohne strange Quarks aufgetragen gegen μ für $B = 0$	81
5.4	Der normierte Druck mit strange Quarks aufgetragen gegen μ für $B = 0$	81
5.5	Der Gap aufgetragen gegen das quarkchemische Potential	82
5.6	Das elektrochemische aufgetragen gegen das quarkchemische Potential	82
5.7	Die Elektronendichte aufgetragen gegen das quarkchemische Potential	83
5.8	Das farbchemische aufgetragen gegen das quarkchemische Potential .	83
5.9	Die Zustandsgleichungen ohne strange Quarks	84
5.10	Die Zustandsgleichungen mit strange Quarks	84
5.11	$3p - \varepsilon$ aufgetragen gegen ε bei Verwendung von Quarkmaterie ohne strange Quarks	85
5.12	$3p - \varepsilon$ aufgetragen gegen ε bei Verwendung von Quarkmaterie mit strange Quarks	85
5.13	Die Energiedichte aufgetragen gegen die Quarkdichte bei Verwendung von Quarkmaterie ohne strange Quarks	86
5.14	Die Energiedichte aufgetragen gegen die Quarkdichte bei Verwendung von Quarkmaterie mit strange Quarks	86
5.15	Der Gap für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks aufgetragen gegen μ mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt	87
5.16	Der Gap für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks aufgetragen gegen μ mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt	87

5.17	Die Zustandsgleichung für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt	88
5.18	Die Zustandsgleichung für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt	88
5.19	Das Masse-Radius-Diagramm der Quarksterne	91
5.20	Die Quarksternmasse aufgetragen gegen die Zentralenergiedichte . .	91
5.21	Die Anzahl der Quarks aufgetragen gegen die Quarksternmasse . . .	92
5.22	Das Masse-Radius-Diagramm für Quarksterne mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt	93
5.23	Das Masse-Radius-Diagramm für Quarksterne mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt	93

Tabellenverzeichnis

3.1	Werte für die kritische Masse	61
3.2	Sternentstehungsgebiete	62
3.3	Verbrennungsdauer des Wasserstoffvorrats eines Hauptreihensterns .	64
3.4	Planetarische Nebel mit einem Weißen Zwerg	65
3.5	Pulsar und Supernovaüberrest vom Typ II	66

Kapitel 1

Die großkanonische Zustandssumme

In den beiden folgenden Abschnitten werden jeweils die wechselwirkungsfreien großkanonischen Zustandssummen für die Fermionen und für die skalaren Bosonen aus deren Lagrangedichten hergeleitet. Anschließend werden die fermionische und bosonische Lagrangedichte zusammen mit einem Wechselwirkungsterm kombiniert, d. h. es werden wechselwirkende Teilchen betrachtet. Genauer gesagt handelt es sich dann um Fermionen, die über einen Bosonenaustausch miteinander interagieren. Auch deren Zustandssumme wird ermittelt. Danach wird die großkanonische Zustandssumme der QCD aus deren Lagrangedichte hergeleitet. Diese Berechnungen findet man in [1, 2].

1.1 Fermionen

Die Dirac-Lagrangedichte für das Feld ψ mit der Masse m ist definiert durch

$$\mathcal{L}_0^{\mathcal{F}} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi, \quad (1.1)$$

worin $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ und $\cancel{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu = \gamma_0 \partial_t + \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla$ ist. Der Index 0 soll den Leser darauf aufmerksam machen, daß es sich um wechselwirkungsfreie Teilchen, in diesem Fall um wechselwirkungsfreie Fermionen, handelt. Wendet man auf Gleichung (1.1) die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \quad (1.2)$$

mit $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\mathcal{F}}$ an, dann erhält man die Diracgleichung

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi = 0. \quad (1.3)$$

Die kanonisch konjugierten Impulse berechnet man zu

$$\pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}_0^{\mathcal{F}}}{\partial \dot{\psi}} = i\bar{\psi} \gamma_0 = i\psi^\dagger, \quad (1.4)$$

bzw.

$$\pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial \mathcal{L}_0^{\mathcal{F}}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = 0. \quad (1.5)$$

Aus Gleichung (1.1) läßt sich die Hamiltondichte über die Legendre-Transformation

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \dot{\psi}_i - \mathcal{L} \quad (1.6)$$

bestimmen, d. h.

$$\mathcal{H}_0^{\mathcal{F}} = \pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{L}_0^{\mathcal{F}}. \quad (1.7)$$

Durch Einsetzen der kanonisch konjugierten Impulse in die Hamiltondichte erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{\mathcal{F}} &= i\bar{\psi}\gamma_0 \frac{\partial\psi}{\partial t} - \bar{\psi} \left[i \left(\gamma_0 \frac{\partial\psi}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) - m \right] \psi \\ &= -\bar{\psi} (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m) \psi. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Dreht man nun die Phase der Spinoren um einen beliebigen Winkel $\alpha(\mathbf{x}, t)$, dann ergibt das

$$\begin{aligned} \psi' &= \psi e^{-i\alpha}, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Setzt man diese Gleichungen für ψ bzw. $\bar{\psi}$ in die Lagrangedichte $\mathcal{L}_0^{\mathcal{F}}$ ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_0^{\mathcal{F}} &= \bar{\psi} e^{i\alpha} (i\partial - m) \psi e^{-i\alpha} \\ &= \bar{\psi} e^{i\alpha} \left[i \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right) - m \right] \psi e^{-i\alpha} \\ &= i\bar{\psi} e^{i\alpha} \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} (\psi e^{-i\alpha}) + i\bar{\psi} e^{i\alpha} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} (\psi e^{-i\alpha}) - \bar{\psi} m \psi \\ &= i\bar{\psi} e^{i\alpha} \gamma_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} e^{-i\alpha} - i\psi \frac{\partial\alpha}{\partial t} e^{-i\alpha} \right) \\ &\quad + i\bar{\psi} e^{i\alpha} \boldsymbol{\gamma} \cdot [(\boldsymbol{\nabla}\psi) e^{-i\alpha} - i\psi (\boldsymbol{\nabla}\alpha) e^{-i\alpha}] \\ &\quad - \bar{\psi} m \psi \\ &= i\bar{\psi} \gamma_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\psi \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right) + i\bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\psi - i\psi \boldsymbol{\nabla}\alpha) - \bar{\psi} m \psi \\ &= \mathcal{L}_0^{\mathcal{F}} + \bar{\psi} (\partial\alpha) \psi. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Für ein konstantes α bleibt die Lagrangedichte $\mathcal{L}_0^{\mathcal{F}}$ erhalten, weil dann der Zusatzterm $\bar{\psi} (\partial\alpha) \psi$ verschwindet. Daher bezeichnet man dies als globale eine U(1)-Symmetrie. Die Bewegungsgleichung für das Feld α lautet

$$\partial_\mu \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_0^{\mathcal{F}}}{\partial (\partial_\mu \alpha)} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}_0^{\mathcal{F}}}{\partial \alpha}, \quad (1.11)$$

$$\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0. \quad (1.12)$$

Diese Gleichung ist eine Kontinuitätsgleichung. Sie ist nicht von α abhängig. Also muß sie immer gelten, auch für ein konstantes α oder $\alpha = 0$. Die in ihr enthaltene Viererstromdichte ist

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (1.13)$$

Daraus berechnet man die erhaltene Ladung zu

$$Q = \int_V d^3\mathbf{x} j^0 = \int_V d^3\mathbf{x} \bar{\psi} \gamma_0 \psi = \int_V d^3\mathbf{x} \psi^\dagger \psi. \quad (1.14)$$

Jetzt kann man die großkanonische Zustandssumme der wechselwirkungsfreien Fermionen hinschreiben,

$$\mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_0^{\mathcal{F}} \int_{\text{ap}} \mathcal{D}\pi_\psi \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_x (\pi_\psi \dot{\psi} - \mathcal{H}_0^{\mathcal{F}} + \mu Q) \right\}. \quad (1.15)$$

Hierbei bedeutet $\int_x = \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3\mathbf{x}$, worin $\tau = it$ die Euklidische Zeit ist. Das Integral ist über alle grassmannwertigen Funktionen π_ψ und ψ auszuführen, die antiperiodisch in der Euklidischen Zeitrichtung sind, $\psi(\tau = 0, \mathbf{x}) = -\psi(\tau = \frac{1}{T}, \mathbf{x})$.

Die Zustandssumme läßt sich mit den Gleichungen (1.4), (1.8) und (1.14) bis auf irrelevante Konstanten umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} &= \int_{\text{ap}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_x \left(i\bar{\psi}\gamma_0\dot{\psi} + \bar{\psi}(i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m)\psi + \bar{\psi}\mu\gamma_0\psi \right) \right\} \\ &= \int_{\text{ap}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_x \bar{\psi} \left(i\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} - m + \mu\gamma_0 \right) \psi \right\} \\ &= \int_{\text{ap}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_x \bar{\psi} (i\boldsymbol{\not{\partial}} + \mu\gamma_0 - m) \psi \right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

falls $\bar{\psi}$ und ψ voneinander unabhängig betrachtet werden. Eine kompaktere Schreibweise ist

$$\mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} = \int_{\text{ap}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ \int_x \bar{\psi} [G_0^+]^{-1} \psi \right\}. \quad (1.17)$$

Die Größe

$$\begin{aligned} [G_0^\pm]^{-1} &= i\boldsymbol{\not{\partial}} \pm \mu\gamma_0 - m \\ &= i\gamma^\mu \partial_\mu \pm \mu\gamma_0 - m \end{aligned} \quad (1.18)$$

nennt man den inversen Dirac-Propagator, der die Bewegung der Fermionen beschreibt. Durch Fouriertransformation ergibt sich

$$\begin{aligned} [G_0^\pm]^{-1}(k) &= i\gamma^\mu (-ik_\mu) \pm \mu\gamma_0 - m \\ &= \gamma^\mu k_\mu \pm \mu\gamma_0 - m \\ &= \gamma_0(k_0 \pm \mu) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - m \\ &= \begin{pmatrix} \{k_0 \pm \mu\} - m & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -\{k_0 \pm \mu\} - m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Hiervon ist die inverse Matrix der Dirac-Propagator

$$G_0^\pm(k) = \frac{-\gamma_0(k_0 \pm \mu) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - m}{E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 \pm \mu)^2}, \quad (1.20)$$

worin $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}$ die relativistische Gesamtenergie bezeichnet. Mit den fouriertransformierten Spinoren

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ik_\mu x^\mu} \bar{\psi}_k, \quad (1.21)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{-ik_\mu x^\mu} \psi_k \quad (1.22)$$

und der Beziehung

$$\int_x e^{i(k_\mu - p_\mu)x^\mu} = \frac{V}{T} \delta_{k,p}^{(4)} \quad (1.23)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}_k \mathcal{D}\psi_k \exp \left\{ \bar{\psi}_k \frac{[G_0^+]^{-1}(k)}{T} \psi_k \right\} \\ &= \det_k \left(\frac{[G_0^+]^{-1}(k)}{T} \right) \\ &= \prod_k \det_{4 \times 4} \left(\frac{[G_0^+]^{-1}(k)}{T} \right). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Dadurch ist die logarithmierte Zustandssumme für wechselwirkungsfreie Fermionen

$$\ln \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} = \sum_k \ln \left[\frac{E_{\mathbf{k}}^2 - (k_0 + \mu)^2}{T^2} \right]^2. \quad (1.25)$$

Mit den fermionischen Matsubarafrequenzen

$$\omega_n = (2n + 1) \pi T = ik_0 \quad (1.26)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} &= \sum_k \sum_e \ln \left\{ \frac{(E_{\mathbf{k}} - e\mu)^2}{T^2} + (2n + 1)^2 \pi^2 \right\} \\ &= \sum_k \sum_e \int_1^{(E_{\mathbf{k}} - e\mu)^2/T^2} d(x^2) \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} \\ &= \sum_k \sum_e \int_1^{(E_{\mathbf{k}} - e\mu)/T} dx \frac{2x}{x^2 + (2n + 1)^2 \pi^2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Hierbei sind irrelevante Konstanten vernachlässigt worden. Jetzt muß man noch über alle n summieren. Dies geschieht mit Hilfe des Residuensatzes

$$T \sum_n g(k_0) = \frac{1}{4\pi i} \oint dk_0 \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right) g(k_0), \quad (1.28)$$

worin

$$g(k_0) = \frac{T}{T^2 x^2 - k_0^2} \quad (1.29)$$

ist. Man ermittelt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + (2n + 1)^2 \pi^2} = \frac{1}{2x} \left(1 - \frac{2}{e^x - 1} \right). \quad (1.30)$$

Setzt man dieses Resultat in die logarithmierte Zustandssumme (1.27) ein, vernachlässigt irrelevante Konstanten und wandelt die Summe über alle \mathbf{k} in ein kontinuierliches Integral um, dann ergibt

$$\ln \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} = 2V \sum_e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} + \ln \left(1 + e^{-(E_{\mathbf{k}} - e\mu)/T} \right) \right]. \quad (1.31)$$

Hiervon kann man noch die Nullpunktenergie abziehen und erhält

$$\ln \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} = 2V \sum_e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + e^{-(E_{\mathbf{k}} - e\mu)/T} \right). \quad (1.32)$$

Die Summe über $e = \pm 1$ berücksichtigt die Beiträge der Teilchen ($e = 1$) und Antiteilchen ($e = -1$). Der Faktor 2 entsteht aufgrund des Spins.

1.2 Skalare Bosonen

Die Lagrangedichte für wechselwirkungsfreie skalare Bosonen lautet

$$\mathcal{L}_0^{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - M^2 \phi^2). \quad (1.33)$$

Hierin ist ϕ das Bosonenfeld und M die Bosonenmasse.

Mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung (1.2), wobei in dieser $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0^{\mathcal{B}}$ und $\bar{\psi} = \phi$ zu setzen sind, erhält man als Bewegungsgleichung die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + M^2)\phi = 0. \quad (1.34)$$

Der kanonisch konjugierte Impuls berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \pi_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}_0^{\mathcal{B}}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} [(\partial_0 \phi)^2 - (\partial_i \phi)^2] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\phi}} [(\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2] \\ &= \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Die Hamiltondichte bestimmt man mit der Legendre-Transformation (1.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{\mathcal{B}} &= \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}_0^{\mathcal{B}} \\ &= \pi_\phi^2 - \mathcal{L}_0^{\mathcal{B}} \\ &= \pi_\phi^2 - \frac{1}{2} [(\partial_t \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - M^2 \phi^2] \\ &= \pi_\phi^2 - \frac{1}{2} [\pi_\phi^2 - (\nabla \phi)^2 - M^2 \phi^2] \\ &= \frac{1}{2} [\pi_\phi^2 + (\nabla \phi)^2 + M^2 \phi^2]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Die großkanonische Zustandssumme für neutrale, wechselwirkungsfreie, skalare Bosonen ist dann

$$\mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} = \mathcal{N}_0^{\mathcal{B}} \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_x (\pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{H}_0^{\mathcal{B}}) \right\}. \quad (1.37)$$

Hierbei bedeutet der Index \mathfrak{p} , daß alle Funktionalintegrationen über periodische Felder im Euklidischen Zeitintervall $[0, 1/T]$ vorgenommen werden müssen. Sei F die Anzahl der Raumzeitpunkte im Vierervolumen $V \times (0, 1/T]$, dann ist die Normalisierungskonstante $\mathcal{N}_0^{\mathcal{B}} \propto V^F$, so daß $\mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}}$ dimensionslos wird. Vernachlässigt man irrelevante Konstanten, dann schreibt sich die Zustandssumme nun zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} &= V^F \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_x \left(\pi_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} [\pi_\phi^2 + (\nabla \phi)^2 + M^2 \phi^2] \right) \right\} \\ &= V^F \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x (2\pi_\phi \dot{\phi} - \pi_\phi^2 - (\nabla \phi)^2 - M^2 \phi^2) \right\} \\ &= V^F \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x \left(-[\pi_\phi - \dot{\phi}]^2 + \dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - M^2 \phi^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Hierbei darf π_ϕ nicht durch $\dot{\phi}$ ersetzt werden, weil über π_ϕ integriert werden muß. Als nächstes werden die Felder fouriertransformiert und diese dann in die Zustandssumme eingesetzt. Anstelle des π_ϕ -Feldes verwendet man ein verschobenes π'_ϕ -Feld, wobei $\pi'_\phi = \pi_\phi - \dot{\phi}$ ist. Dadurch wird die Zustandssumme zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} &= V^F \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\pi'_\phi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x (-\pi'^2_\phi + \dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - M^2 \phi^2) \right\} \\ &= V^F \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x (\dot{\phi}^2 - (\nabla \phi)^2 - M^2 \phi^2) \right\} \\ &\quad \times \int_{\mathfrak{p}} \mathcal{D}\pi'_\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_x \pi'^2_\phi \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Wie man sofort sieht, handelt es sich beim zweiten Integral um ein Gaußintegral, das aber nur eine weitere irrelevante Konstante zur Zustandssumme liefert, weswegen man es vernachlässigen kann. Dennoch darf man bei der Fouriertransformation des Gaußintegrals die Vorfaktoren der fouriertransformierten Felder nicht vergessen. Die Fouriertransformationen lauten

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \sum_k e^{-ik_\mu x^\mu} \phi(k), \quad (1.40)$$

$$\pi'(x) = \sqrt{\frac{T}{V}} \sum_k e^{-ik_\mu x^\mu} \pi'(k). \quad (1.41)$$

Dabei sind die Vorfaktoren so gewählt, daß die fouriertransformierte Zustandssumme dimensionslos wird. Mit der Beziehung

$$\int_x e^{-i(k_\mu + p_\mu)x^\mu} = \frac{V}{T} \delta_{k,-p}^{(4)} \quad (1.42)$$

berechnet man die fouriertransformierte Zustandssumme zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} &= V^F \left(\frac{1}{TV} \right)^{F/2} \left(\frac{T}{V} \right)^{F/2} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\phi_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \phi(-k) \frac{M^2 + |\mathbf{k}|^2 + \omega_n^2}{T^2} \phi(k) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \phi(-k) \frac{M^2 + |\mathbf{k}|^2 + \omega_n^2}{T^2} \phi(k) \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\phi_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \phi(-k) \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1}(k)}{T^2} \phi(k) \right\}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Hierin sind

$$\omega_n = 2n\pi T = ik_0 \quad (1.44)$$

die bosonischen Matsubara-Frequenzen und

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1}(k) = M^2 - k_\mu k^\mu = M^2 - k_0^2 + |\mathbf{k}|^2 = M^2 + |\mathbf{k}|^2 + \omega_n^2 = E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2 \quad (1.45)$$

der inverse Klein-Gordon-Propagator. Die Zustandssumme ist dann

$$\mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} = \left(\det_k \left[\frac{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1}}{T^2} \right] \right)^{-1/2} = \prod_k \left[\frac{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1}(k)}{T^2} \right]^{-1/2}, \quad (1.46)$$

wobei in der letzten Gleichung die durch die Fouriertransformation erlangte Diagonalgestalt des inversen Klein-Gordon-Propagators ausgenutzt worden ist. Mit den bosonischen Matsubarafrequenzen (1.44) ergibt sich

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} &= -\frac{1}{2} \sum_k \ln \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2 + \omega_n^2}{T^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_k \ln \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^2}{T^2} + (2\pi n)^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_k \left\{ \int_1^{E_{\mathbf{k}}^2/T^2} dx^2 \frac{1}{x^2 + (2\pi n)^2} + \ln [1 + (2\pi n)^2] \right\}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Bis auf irrelevante Konstanten ist

$$\ln Z_0^{\mathcal{B}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int_1^{E_{\mathbf{k}}/T} dx \, 2x \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + (2\pi n)^2}. \quad (1.48)$$

Die unendliche Summe löst man mit Hilfe des Residuensatzes

$$T \sum_n g(k_0) = \frac{1}{4\pi i} \oint dk_0 \coth\left(\frac{k_0}{2T}\right) g(k_0), \quad (1.49)$$

worin

$$g(k_0) = \frac{T}{T^2 x^2 - k_0^2} \quad (1.50)$$

ist. Man ermittelt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + (2\pi n)^2} = \frac{1}{2x} \left(1 + \frac{2}{e^x - 1}\right). \quad (1.51)$$

Daraus folgert man, daß

$$\ln Z_0^{\mathcal{B}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \int_1^{E_{\mathbf{k}}/T} dx \left(1 + \frac{2}{e^x - 1}\right) \quad (1.52)$$

ist. Nach Ausführen der Integration ergibt sich bis auf irrelevante Konstanten

$$\ln Z_0^{\mathcal{B}} = -\sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{E_{\mathbf{k}}}{2T} + \ln\left(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}\right) \right]. \quad (1.53)$$

Zieht man hiervon noch die Nullpunktenergie ab und wandelt die Summe in ein kontinuierliches Integral um, dann erhält man

$$\ln Z_0^{\mathcal{B}} = -V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \ln\left(1 - e^{-E_{\mathbf{k}}/T}\right). \quad (1.54)$$

Deswegen errechnet man für $T \rightarrow 0$ $Z_0^{\mathcal{B}} = 1$, weil $E_{\mathbf{k}} > 0$ ist.

1.3 Wechselwirkende Fermionen

Die Lagrangedichte für mittels Bosonenaustausch wechselwirkende Quarks sieht folgendermaßen aus

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial - m) \psi + g \bar{\psi} \psi \phi + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - M^2 \phi^2). \quad (1.55)$$

Diese Gleichung enthält den schon bekannten Diracterm und den neu hinzugekommenen Wechselwirkungsterm mit den Fermionfeldern $\bar{\psi}$ und ψ , dem Bosonenfeld ϕ und der Kopplungskonstante g . Dieser Term beschreibt also, wie schon erwähnt, die Wechselwirkung der Fermionen durch Bosonenaustausch. Die Stärke der Wechselwirkung wird durch die Kopplungskonstante festgelegt. Desweiteren enthält die Gleichung (1.55) einen skalaren, bosonischen Lagrangedichteterm, der das Bosonenfeld ϕ und die skalare Bosonenmasse M enthält. Diesen Bosonenterm kann man, wie man später sehen wird, ausintegrieren.

Die Bewegungsgleichung für die Bosonen berechnet man mit der Gleichung (1.2) zu

$$(\square + M^2) \phi = g \bar{\psi} \psi = j, \quad (1.56)$$

wobei das ψ in der Euler-Lagrange-Gleichung durch ein ϕ zu ersetzen ist. Die Bewegungsgleichung für die Fermionen lautet

$$(i\partial - m)\psi = -g\psi\phi. \quad (1.57)$$

Die Hamiltondichte ermittelt man aus der Gleichung (1.55) mit Hilfe der Legendre-Transformation (1.6),

$$\mathcal{H} = \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}. \quad (1.58)$$

Die kanonisch konjugierten Impulse sind immer noch gegeben durch die Gleichungen (1.4), (1.5) und (1.35). Damit läßt sich die Hamiltondichte schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= i\bar{\psi}\gamma_0\dot{\psi} + \dot{\phi}^2 - \bar{\psi}(i\partial - m)\psi - j\phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - M^2\phi^2) \\ &= -\bar{\psi}(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi - j\phi + \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + M^2\phi^2] \\ &= -\bar{\psi}(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi - j\phi + \frac{1}{2}[\pi_\phi^2 + (\nabla\phi)^2 + M^2\phi^2]. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Die großkanonische Zustandssumme ist dadurch

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi_\psi \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_x (\pi_\psi \dot{\psi} + \pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{H} + \mu\mathcal{Q}) \right\} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi_\psi \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_x \left(\pi_\phi^2 - \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2 + M^2\phi^2] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i\bar{\psi}\gamma_0\dot{\psi} + \bar{\psi}(i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla - m)\psi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + j\phi + \mu\bar{\psi}\gamma_0\psi \right) \right\} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\pi_\psi \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_x \left(-\frac{1}{2}[\pi_\phi - \dot{\phi}]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - M^2\phi^2] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + j\phi + \bar{\psi}[G_0^+]^{-1}\psi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Man kann die Zustandssumme umschreiben zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{Z}' \\ &= \mathcal{Z}_0^{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{N}_\phi \int \mathcal{D}\pi_\phi \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_x \left(-\frac{1}{2}[\pi_\phi - \dot{\phi}]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - M^2\phi^2] + j\phi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

An dieser Stelle verschiebt man wieder das π_ϕ -Feld mit $\pi'_\phi = \pi_\phi - \dot{\phi}$ und erhält dadurch analog zu Gleichung (1.39)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}' &= V^F \int_{\mathbb{P}} \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_x (\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - M^2\phi^2) + j\phi \right\} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{P}} \mathcal{D}\pi'_\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_x \pi'^2_\phi \right\}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Das Gaußintegral kann man wieder bis auf den Vorfaktor, der durch die Fouriertransformation entsteht, vernachlässigen, weil es nur eine irrelevante Konstante zur

Zustandssumme liefert. Nun kann man die letzte Gleichung noch ein wenig umformen. Dazu muß man sie zunächst fouriertransformieren. Man benötigt dazu die Gleichung

$$j(x) = \sqrt{\frac{T^3}{V}} \sum_k e^{-ik_\mu x^\mu} j(k). \quad (1.63)$$

Der Normierungsfaktor sorgt dafür, daß $j(k)$ dimensionslos wird. Dadurch läßt sich \mathcal{Z}' analog zu Gleichung (1.43) schreiben als

$$\mathcal{Z}' = \int \mathcal{D}\phi_k \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \phi(-k) \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1}(k)}{T^2} \phi(k) + \sum_k j(-k) \phi(k) \right\}. \quad (1.64)$$

Durch ein Verschieben des $\phi(k)$ -Feldes mit $\phi'(k) = \phi(k) - T^2 \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(k) j(k)$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}' &= \exp \left\{ \frac{T^2}{2} \sum_k j(-k) \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(k) j(k) \right\} \\ &\quad \times \int \mathcal{D}\phi'(k) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_k \phi'(-k) \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{B}}^{-1}(k)}{T^2} \phi'(k) \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{T^2}{2} \sum_k j(-k) \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(k) j(k) \right\} \cdot \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Die Fourierrücktransformationen lauten

$$j(k) = \frac{1}{\sqrt{TV}} \int_x e^{ik_\mu x^\mu} j(x), \quad (1.66)$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{B}}(k) = \int_x e^{ik_\mu x^\mu} \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(x). \quad (1.67)$$

Diese kann man auf \mathcal{Z}' anwenden, und man erhält

$$\mathcal{Z}' = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_{x,y} j(x) \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(x,y) j(y) \right\} \cdot \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}}. \quad (1.68)$$

Die großkanonische Zustandssumme für wechselwirkende Fermionen ist damit bis auf irrelevante Konstanten gegeben durch

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} \cdot \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \{ I[\bar{\psi}, \psi] \}, \quad (1.69)$$

mit

$$I[\bar{\psi}, \psi] = \int_{x,y} \left(\bar{\psi}(x) [G_0^+]^{-1}(x,y) \psi(y) + \frac{g^2}{2} \bar{\psi}(x) \psi(x) \mathcal{D}_{\mathcal{B}}(x,y) \bar{\psi}(y) \psi(y) \right). \quad (1.70)$$

1.4 Wechselwirkende Quarks

Die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen wird durch die Lagrangedichte der QCD¹ beschrieben. In deren Wechselwirkungsterm tritt die Vektorwechselwirkung Γ_a^μ auf, über die man im Anhang A.5 auf der Seite 99 weiteres erfährt,

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{i=r}^b \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m) \psi_i + g \sum_{i,j=r}^b \sum_{a=1}^8 \bar{\psi}_i \Gamma_{aij}^\mu \psi_j A_\mu^a - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (1.71)$$

¹Quantenchromodynamik

Desweiteren ist in der QCD-Lagrangedichte der Gluonenfeldstärketensor

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu + g f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (1.72)$$

enthalten. Hierin sind die f_{abc} die Strukturkonstanten der SU(3), über die man im Anhang A.4 auf der Seite 98 weiteres erfährt. Vernachlässigt man die Gluonenselbstwechselwirkung, dann vereinfacht sich der Gluonenfeldstärketensor zu

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu, \quad (1.73)$$

wobei die SU(3)-Eichinvarianz gebrochen wird. Hiermit ist der abelsche Teil der Gluonlagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A_a^\nu - \partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A_a^\mu - \partial_\nu A_\mu^a \partial^\mu A_a^\nu + \partial_\nu A_\mu^a \partial^\nu A_a^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A_a^\nu - \partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A_a^\mu). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Mit der Wirkung $\mathcal{S}_G = \int_x \mathcal{L}_G$ ermittelt man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G &= \frac{1}{2} (A_\nu^a \partial_\mu \partial^\mu A_a^\nu - A_\nu^a \partial_\mu \partial^\nu A_a^\mu) \\ &= \frac{1}{2} A_a^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A_a^\nu. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Wählt man nun Lorentzzeichnung, $\partial_\mu A_a^\mu = 0$, dann ergibt sich

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} A_a^\mu g_{\mu\nu} \square A_a^\nu. \quad (1.76)$$

Diese lorentzgeeichte Gluonlagrangedichte erhält man auch, indem man zur ursprünglichen Gluonlagrangedichte einen Eichterm hinzufügt und eine Feynmaneichung durchführt, indem man $\alpha = 1$ setzt,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_a^\mu)^2. \quad (1.77)$$

Die Gluonlagrangedichte wird jetzt umgeschrieben zu

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} A_a^\mu [\mathcal{D}^{-1}]_{\mu\nu}^{ab} A_b^\nu. \quad (1.78)$$

Die hierin auftretende Größe

$$[\mathcal{D}^{-1}]_{\mu\nu}^{ab} = -\delta^{ab} g_{\mu\nu} \square \quad (1.79)$$

bezeichnet man als inversen feynmangeeichten Gluonpropagator. Invertieren ergibt

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab} = -\delta^{ab} g_{\mu\nu} \square^{-1}. \quad (1.80)$$

Im Impulsraum ist

$$[\mathcal{D}^{-1}]_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} g_{\mu\nu} k^2 \quad (1.81)$$

und

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{g_{\mu\nu}}{k^2}. \quad (1.82)$$

Für die großkanonische Zustandssumme der QCD in Feynmanform ergibt sich dann bis auf irrelevante Konstanten

$$\mathcal{Z}_{\text{QCD}} = \int \mathcal{D}\pi_\psi \mathcal{D}\pi_A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}A \exp \left\{ \int_x \bar{\psi} [\mathcal{G}_0^+]^{-1} \psi + j_\mu^a A_\mu^a - \frac{1}{2} A_\mu^a [\mathcal{D}^{-1}]_{\mu\nu}^{ab} A_\nu^b \right\}, \quad (1.83)$$

worin

$$j_\mu^a = g \sum_{i,j=r}^b \bar{\psi}_i \Gamma_{aij}^\mu \psi_j \quad (1.84)$$

ist. Durch eine Verschiebung des Gluonfeldes $A_\mu^a = \tilde{A}_\mu^a + \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab} j_\nu^b$ läßt sich die großkanonische Zustandssumme für Gluonen ausintegrieren,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\text{QCD}} &= \mathcal{Z}_{\mathcal{G}} \cdot \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \{ I[\bar{\psi}, \psi] \} \quad (1.85) \\ I[\bar{\psi}, \psi] &= \int_{x,y} \left(\bar{\psi}(x) [\mathcal{G}_0^+]^{-1}(x,y) \psi(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} \bar{\psi}(x) \Gamma_a^\mu \psi(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x,y) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \right). \quad (1.86) \end{aligned}$$

Zudem ist $\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} = 1$ bei $T = 0$, analog zu $\mathcal{Z}_0^{\mathcal{B}} = 1$ für $T = 0$ bei den Bosonen. In der Zustandssumme der QCD sind die einzelnen Farbspinoren ψ_i zu einem einzigen Spinor ψ zusammengefaßt worden,

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_r, \bar{\psi}_g, \bar{\psi}_b), \quad (1.87)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix}. \quad (1.88)$$

Der inverse Diracpropagator $[G_0^\pm]^{-1}$ besitzt dadurch jetzt noch eine Farbstruktur und wird daher zu

$$[G_0^\pm]^{-1} = \begin{pmatrix} [[G_0^\pm]^{-1}]_r & 0 & 0 \\ 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_g & 0 \\ 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_b \end{pmatrix}. \quad (1.89)$$

Hierbei tragen die chemischen Potentiale in den inversen Diracpropagatoren auf der Hauptdiagonale nun Farbindizes.

Kapitel 2

Farbsupraleitung

Bei hohen Dichten und niedrigen Temperaturen besitzt die Materie einen Fermi-See aus Quarks. Die Quarks wechselwirken über die Gluonen miteinander. Der Ein-Gluon-Austausch ist attraktiv im $\bar{3}_A$ -Kanal. Bardeen, Cooper und Schrieffer (BCS) [3] haben gezeigt, daß eine Fermioberfläche bei Anwesenheit von attraktiver Wechselwirkung instabil ist. Deswegen kann der Grundzustand dieses Systems nicht die Fermioberfläche, sondern muß ein Kondensat aus Quark-Cooper-Paaren sein. Dies ist folgendermaßen zu sehen: Man stelle sich zunächst ein System aus freien, nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen vor. Wenn nun eine attraktive Wechselwirkung vorhanden ist, dann führt das nicht zu einer kleinen Verschiebung der Fermienergie, sondern zu einer kompletten Neuordnung in der Fermioberflächennähe, weil es energetisch günstiger ist, Quark-Cooper-Paare bzw. Loch-Paare mit Hilfe der attraktiven Wechselwirkung zu schaffen. Auf diese Weise entsteht also ein Kondensat aus bosonischen Quark-Cooper-Paaren an der Fermioberfläche.

In kondensierten Materie-Systemen führt der BCS-Mechanismus zur Supraleitung, da er das Cooper-Paaren verursacht. Hierdurch wird die elektromagnetische Eichsymmetrie gebrochen und das Photon massiv. Das ist der Meißner-Effekt, bei dem Magnetfelder aus einer supraleitenden Region hinausgedrängt werden. Man kann sich das folgendermaßen veranschaulichen: In einer dünnen Oberflächenschicht des Supraleiters zirkulieren Ströme, die das äußere Magnetfeld daran hindern einzudringen, weswegen es herausgedrängt wird und im Supraleiter kein Magnetfeld existiert. Da dies ein sehr instabiler Zustand ist und er deswegen durch Wärme sehr leicht zerstört wird, muß man die Temperatur sehr niedrig halten. Um die Cooper-Elektronenpaare zusammenzuhalten, muß es eine Kraft geben, die die repulsive elektrostatischen Coulomb-Kräfte übertrifft. Diese attraktiven Kräfte findet man in Kristallen. Es handelt sich hierbei um phononen-vermittelnde Kräfte, die die Coulomb-Kräfte überwinden und damit die Cooper-Elektronenpaare zusammenhalten. Ein Material ist supraleitend, wenn der elektrische Widerstand unglaublich klein geworden ist, so daß so gut wie keine Verluste auftreten. D. h., ein einmal durch eine Spule induzierter Strom in solch einem Supraleiter würde unendlich lange, quasi ohne Verluste und damit ungehindert, fließen.

Im Gegensatz zur Supraleitung herrscht bei der Farbsupraleitung eine attraktive Wechselwirkung, die durch die Gluonen hervorgerufen wird. Deswegen kommt es garantiert immer zur Quark-Cooper-Paarung, wenn nur die Dichte dafür groß genug ist und die Temperatur T den Schwellwert T_c unterschreitet, denn dann besteht der obere Bereich des Fermi-Sees aus Quarks und nicht aus Nukleonen. Auf Grund dessen tritt der Effekt der Farbsupraleitung bestimmt in sehr dichten, abgekühlten Sternen, kalten Quarksternen auf. Da die Quark-Cooper-Paare keine Farbsingletts bilden können, wird die zuvor bestandene $SU(3)$ -Farbsymmetrie gebrochen. Genau dieser Effekt wird als Farbsupraleitung bezeichnet.

Es treten in der Natur zwei voneinander verschiedene Farbsupraleitungsphasen mit Spin 0 auf:

- die CFL-Phase, an der alle drei Flavours (u, d, s) teilnehmen und die die chirale Symmetrie bricht. In dieser Phase werden die Kondensate $\langle ud \rangle$, $\langle us \rangle$ und $\langle ds \rangle$ gebildet.
- die 2SC-Phase, die in dieser Diplomarbeit betrachtet wird, bei der sich nur zwei Quark-Flavours (u, d) zu einem Quark-Cooper-Paar $\langle ud \rangle$ binden. Die chirale Symmetrie bleibt dabei erhalten.

Die hier aufgeführten physikalischen Erklärungen zur Supraleitung und Farbsupraleitung findet man z. B. in [4, 5, 6, 7, 8].

In den folgenden Abschnitten wird die großkanonische Zustandssumme berechnet, siehe dazu auch [9, 10], aus der man dann die Zustandsgleichung errechnen kann. Im Kapitel 1.4 ist die Zustandssumme für wechselwirkende Quarks hergeleitet worden. Mit dieser Zustandssumme wird in den folgenden Abschnitten weitergerechnet. Der in ihr auftretende Wechselwirkungsterm wird sich dann später als Farbsupraleitungsterm herausstellen, der die Gaps Φ^+ und Φ^- beinhaltet. Der Gap ist die Hälfte der Energie, die man aufbringen muß, um eine Quasi-Teilchen-Quasi-Loch-Anregung an der Fermikante zu erzeugen.

2.1 Die Zustandssumme der Farbsupraleitung

Als Lagrangedichte verwendet man

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_s + \mathcal{L}_e, \quad (2.1)$$

worin

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ud} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\mathcal{G}} \quad (2.2)$$

die Lagrangedichte für die 2SC- $\langle ud \rangle$ -Farbsupraleitung und

$$\mathcal{L}_{ud} = \sum_{i=r}^b \sum_{f=u}^d \bar{\psi}_i^f (i\cancel{\partial} - m_i^f) \psi_i^f, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g \sum_{i,j=r}^b \sum_{f,g=u}^d \sum_{a=1}^8 \bar{\psi}_i^f \Gamma_{aij}^\mu \psi_j^g A_\mu^a, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{G}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{L}_s = \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \bar{\psi}_i^f (i\cancel{\partial} - m_i^f) \psi_i^f, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e (i\cancel{\partial} - m_e) \psi_e \quad (2.7)$$

ist. Die Gluonlagrangedichte wird dann wie im Abschnitt 1.4 feynmangeeicht. In dieser Diplomarbeit wird angenommen, daß die Quarks durch eine Kontaktwechselwirkung miteinander interagieren, siehe Abbildung 2.1. Deswegen wird der Gluonpropagator in Kontaktwechselwirkung verwendet. Der Leser erfährt später hierüber noch mehr im Abschnitt 2.1.6. Zunächst wird die Zustandssumme \mathcal{Z} der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase aus (2.2) ermittelt. Später werden dann noch die strange Quarks und die Elektronen hinzugefügt, um aus (2.1) \mathfrak{Z} bzw. $\ln \mathfrak{Z}$ und daraus die Zustandsgleichung zu bestimmen.

2.1.1 Die Herleitung der Zustandssumme für die Farbsupraleitung

Als großkanonische Zustandssumme \mathcal{Z} der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase benutzt man die Gleichung (1.85), in die jetzt nur noch die Flavours miteinbezogen werden müssen. Die ausintegrierte Zustandssumme für Gluonen \mathcal{Z}_G kann man in den Kalkulationen bedenkenlos unberücksichtigt lassen, weil bei $T = 0$ $\mathcal{Z}_G = \mathcal{Z}_0^B = 1$ ist. Die u und d Quarks werden als masselos angenommen. Dies vereinfacht die Berechnungen erheblich, wie man später sehen wird. Die großkanonische Zustandssumme für die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Phase ist also

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \{ I [\bar{\psi}, \psi] \}, \quad (2.8)$$

mit

$$I [\bar{\psi}, \psi] = \int_{x,y} \left(\bar{\psi}(x) [\mathcal{G}_0^+]^{-1}(x,y) \psi(y) + \frac{g^2}{2} \sum_{a,b} \bar{\psi}(x) \Gamma_a^\mu \psi(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x,y) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \right) \quad (2.9)$$

und

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_r^u, \bar{\psi}_r^d, \bar{\psi}_g^u, \bar{\psi}_g^d, \bar{\psi}_b^u, \bar{\psi}_b^d), \quad (2.10)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r^u \\ \psi_r^d \\ \psi_g^u \\ \psi_g^d \\ \psi_b^u \\ \psi_b^d \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

2.1.2 Die Color-Flavor-Diracstruktur der Propagatoren und Gapmatrizen

Die Propagatoren und Gapmatrizen, die in der Zustandssumme auftreten bzw. auftreten werden, sind $N_c \times N_c$ -Matrizen mit $i, j = 1, \dots, N_c$ im Farbraum, $N_f \times N_f$ -

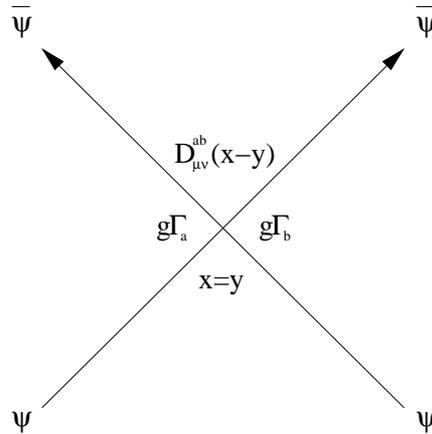


Abbildung 2.1: Quark-Quark-Wechselwirkung durch Gluonenaustausch bei Kontaktwechselwirkung.

Matrizen mit $f, g = 1, \dots, N_f$ im Flavorraum und 4×4 -Matrizen im Diracraum. Für $N_c = 3$ und $N_f = 2$ wähle ich folgende Einteilung

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline ru, ru & ru, rd & ru, gu & ru, gd & ru, bu & ru, bd \\ \hline rd, ru & rd, rd & rd, gu & rd, gd & rd, bu & rd, bd \\ \hline gu, ru & gu, rd & gu, gu & gu, gd & gu, bu & gu, bd \\ \hline gd, ru & gd, rd & gd, gu & gd, gd & gd, bu & gd, bd \\ \hline bu, ru & bu, rd & bu, gu & bu, gd & bu, bu & bu, bd \\ \hline bd, ru & bd, rd & bd, gu & bd, gd & bd, bu & bd, bd \\ \hline \end{array} \right). \quad (2.12)$$

Der Diraceteil der Gapmatrizen ist von den chemischen Potentialen der beteiligten Quarks mit den Farben i und den Flavours f abhängig $\Delta_n^\pm = \Delta_n^\pm(\mu_i^f)$, $n = 1 \dots 2$. Für die Gapmatrizen gilt

$$\Delta_n^- = \gamma_0 [\Delta_n^+]^\dagger \gamma_0 \quad (2.13)$$

und

$$\Phi^\pm = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Delta_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_2^\pm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Wie man sieht, gibt es zwei Gapmatrizen, $\Delta_1^\pm = [\Phi^\pm]_{rg}^{ud} = [\Phi^\pm]_{gr}^{du}$ und $\Delta_2^\pm = [\Phi^\pm]_{rg}^{du} = [\Phi^\pm]_{gr}^{ud}$. Dies kommt daher, weil sich grob gesprochen ein rotes up Quark und ein grünes down Quark zu einem Quark-Cooper-Paar und ein rotes down und ein grünes up Quark zu einem anderen Quark-Cooper-Paar vereinigen.

Sowohl die Dirac-Gapmatrizen Δ_n^\pm als auch die Dirac-Propagatoren lassen sich in Projektorschreibweise formulieren. Es handelt sich hierbei um die Chiralitäts-, Helizitäts- und Energieprojektoren. Der Chiralitätsprojektor ist gegeben durch

$$\mathcal{P}_{r,\ell} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}. \quad (2.15)$$

Der Helizitätsprojektor lautet

$$\mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}) = \frac{1 \pm \gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}}}{2}. \quad (2.16)$$

Der Energieprojektor ist durch

$$\Lambda^\pm(\mathbf{k}) = \frac{1 \pm (\beta_{\mathbf{k}} \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \alpha_{\mathbf{k}} \gamma_0)}{2} \quad (2.17)$$

definiert. Hierin sind $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, $\alpha_{\mathbf{k}} = \frac{m}{E_{\mathbf{k}}}$ und $\beta_{\mathbf{k}} = \frac{|\mathbf{k}|}{E_{\mathbf{k}}}$. Die Helizitätsprojektoren vertauschen mit den beiden anderen Projektoren,

$$[\mathcal{P}_{r,\ell}, \mathcal{P}_\pm(\mathbf{k})] = [\mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}), \Lambda^\pm(\mathbf{k})] = 0. \quad (2.18)$$

Aber die Chiralitätsprojektoren vertauschen nicht mit den Energieprojektoren,

$$[\mathcal{P}_c, \Lambda^e(\pm\mathbf{k})] = \frac{ce\alpha_{\mathbf{k}}\gamma_5\gamma_0}{2}. \quad (2.19)$$

Es gilt

$$\mathcal{P}_r + \mathcal{P}_\ell = \mathcal{P}_+(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_-(\mathbf{k}) = \Lambda^+(\pm\mathbf{k}) + \Lambda^-(\pm\mathbf{k}) = 1. \quad (2.20)$$

Nun lassen sich Quasiprojektoren einführen

$$\mathcal{P}_{r,\ell;\pm}^{\pm}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_{r,\ell} \mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k}) \Lambda^{\pm}(\mathbf{k}). \quad (2.21)$$

Die neue Basis ist vollständig,

$$\sum_{c,h,e} \mathcal{P}_{ch}^e = 1. \quad (2.22)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.21) läßt sich der Diracteil der Gapmatrix mit $i, j = r \dots g$, $i \neq j$ und $f, g = u \dots d$, $f \neq g$ schreiben als

$$\begin{aligned} [\Phi^+]_{ij}^{fg} &= \sum_{c,h,e} [\phi_{ch}^e]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{ch}^e \\ &= [\phi_{r+}^+]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{r+}^+ + [\phi_{\ell+}^+]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{\ell+}^+ + [\phi_{r-}^+]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{r-}^+ + [\phi_{\ell-}^+]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{\ell-}^+ \\ &\quad + [\phi_{r+}^-]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{r+}^- + [\phi_{\ell+}^-]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{\ell+}^- + [\phi_{r-}^-]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{r-}^- + [\phi_{\ell-}^-]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{\ell-}^-. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ich möchte in meiner Diplomarbeit nur masselose Quarks betrachten, weil für die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Phase $m_u, m_d \ll \mu$ gilt. Dann ist $\alpha_{\mathbf{k}} = 0$ und $\beta_{\mathbf{k}} = 1$. In diesem Fall kommutieren alle Projektoren miteinander, und die Quasiprojektoren werden zu echten Projektoren. Zudem fallen vier Projektoren weg, was man durch Ausmultiplizieren leicht zeigen kann,

$$\mathcal{P}_{r-}^+ = \mathcal{P}_{\ell+}^+ = \mathcal{P}_{r+}^- = \mathcal{P}_{\ell-}^- = 0. \quad (2.24)$$

Hierdurch vereinfacht sich die Gapmatrix zu

$$\begin{aligned} [\Phi^+]_{ij}^{fg} &= \sum_{c,h,e} [\phi_{ch}^e]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{ch}^e \\ &= [\phi_{r+}^+]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{r+}^+ + [\phi_{\ell-}^+]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{\ell-}^+ + [\phi_{r-}^-]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{r-}^- + [\phi_{\ell+}^-]_{ij}^{fg} \mathcal{P}_{\ell+}^-. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Außerdem lassen sich nun die echten Projektoren aus nur zwei von den drei Projektoren darstellen. Es ist z. B.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{r+}^+ &= \mathcal{P}_r \mathcal{P}_+ = \mathcal{P}_r \mathcal{P}_+ (\Lambda^+ + \Lambda^-) = \mathcal{P}_{r+}^+ + \mathcal{P}_{r+}^-, \\ \mathcal{P}_{r+}^+ &= \mathcal{P}_r \Lambda^+ = \mathcal{P}_r (\mathcal{P}_+ + \mathcal{P}_-) \Lambda^+ = \mathcal{P}_{r+}^+ + \mathcal{P}_{r-}^+, \\ \mathcal{P}_{r+}^+ &= \mathcal{P}_+ \Lambda^+ = (\mathcal{P}_r + \mathcal{P}_{\ell}) \mathcal{P}_+ \Lambda^+ = \mathcal{P}_{r+}^+ + \mathcal{P}_{\ell+}^+. \end{aligned}$$

Auf diese Weise lassen sich auch die anderen echten Projektoren aus nur zwei von den drei Projektoren darstellen, so daß

$$\mathcal{P}_{r+,\ell-}^+ = \mathcal{P}_{r,\ell} \mathcal{P}_{\pm} = \mathcal{P}_{r,\ell} \Lambda^+ = \mathcal{P}_{\pm} \Lambda^+, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{P}_{r-,\ell+}^- = \mathcal{P}_{r,\ell} \mathcal{P}_{\mp} = \mathcal{P}_{r,\ell} \Lambda^- = \mathcal{P}_{\mp} \Lambda^-. \quad (2.27)$$

gilt. Hierdurch fällt in der Gleichung (2.25) wahlweise ein Projektor weg.

Der masselose, freie Propagator \mathcal{G}_0^{\pm} ist sowohl im Farbraum, als auch im Flavorraum diagonal,

$$\mathcal{G}_0^{\pm} = \begin{pmatrix} [G_0^{\pm}]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [G_0^{\pm}]_r^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [G_0^{\pm}]_g^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [G_0^{\pm}]_g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [G_0^{\pm}]_b^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [G_0^{\pm}]_b^d \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Hierin ist

$$[G_0^\pm]_i^f = \frac{-\gamma_0 (k_0 \pm \mu_i^f) + \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2 - (k_0 \pm \mu_i^f)^2} \quad (2.29)$$

der masselose, freie Diracpropagator. Der masselose, inverse, freie Propagator ist demnach

$$[\mathcal{G}_0^\pm]^{-1} = \begin{pmatrix} [[G_0^\pm]^{-1}]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_d^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_g^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_b^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_b^d \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

mit

$$[[G_0^\pm]^{-1}]_i^f = \gamma_0 (k_0 \pm \mu_i^f) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}. \quad (2.31)$$

Zu beachten ist hierbei, daß nun das chemische Potential μ im Diracpropagator und dessen inversen Farb- und Flavorindizes besitzt. Dadurch wird $\mu \rightarrow \mu_j^g$. Dies bedeutet nichts anderes, als daß nun jede Quarksorte ihr eigenes chemisches Potential besitzt. Die Selbstenergie ist definiert durch

$$\begin{aligned} \Sigma^\pm &= \Phi^\mp \mathcal{G}_0^\mp \Phi^\pm \\ &= \begin{pmatrix} \Delta_1^\mp [G_0^\mp]_g^d \Delta_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2^\mp [G_0^\mp]_g^u \Delta_2^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_2^\mp [G_0^\mp]_r^d \Delta_2^\pm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_1^\mp [G_0^\mp]_r^u \Delta_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Der inverse Quasiteilchenpropagator schreibt sich folgendermaßen

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}^\pm]^{-1} &= [G_0^\pm]^{-1} - \Sigma^\pm = \\ &= \begin{pmatrix} [[G_0^\pm]^{-1}]_r^u - \Delta_1^\mp [G_0^\mp]_g^d \Delta_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_d^d - \Delta_2^\mp [G_0^\mp]_g^u \Delta_2^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_g^r - \Delta_2^\mp [G_0^\mp]_r^d \Delta_2^\pm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_g^d - \Delta_1^\mp [G_0^\mp]_r^u \Delta_1^\pm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_b^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [[G_0^\pm]^{-1}]_b^d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [[G^\pm]^{-1}]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [[G^\pm]^{-1}]_d^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [[G^\pm]^{-1}]_g^r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [[G^\pm]^{-1}]_g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [[G^\pm]^{-1}]_b^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [[G^\pm]^{-1}]_b^d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Daraus ergibt sich der Quasiteilchenpropagator,

$$\mathcal{G}^\pm = \left\{ [\mathcal{G}_0^\pm]^{-1} - \Sigma^\pm \right\}^{-1} = \quad (2.34)$$

$$= \begin{pmatrix} \left\{ \left[[\mathcal{G}_0^\pm]^{-1} \right]_r^u - \Delta_1^\mp [\mathcal{G}_0^\mp]_g^d \Delta_1^\pm \right\}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\{ \left[[\mathcal{G}_0^\pm]^{-1} \right]_r^d - \Delta_2^\mp [\mathcal{G}_0^\mp]_g^u \Delta_2^\pm \right\}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left\{ \left[[\mathcal{G}_0^\pm]^{-1} \right]_g^u - \Delta_2^\mp [\mathcal{G}_0^\mp]_r^d \Delta_2^\pm \right\}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\{ \left[[\mathcal{G}_0^\pm]^{-1} \right]_g^d - \Delta_1^\mp [\mathcal{G}_0^\mp]_r^u \Delta_1^\pm \right\}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathcal{G}_0^\pm]_b^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [\mathcal{G}_0^\pm]_b^d \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} [G^\pm]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [G^\pm]_r^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [G^\pm]_g^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [G^\pm]_g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [G^\pm]_b^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [G^\pm]_b^d \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Es gilt die Relation

$$\mathcal{G}_0^\mp \Phi^\pm \mathcal{G}^\pm = \mathcal{G}^\mp \Phi^\pm \mathcal{G}_0^\pm. \quad (2.36)$$

Diese läßt sich folgendermaßen herleiten. Zuerst multipliziert man die Matrizen aus. Man erhält

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & [G_0^\mp]_r^u \Delta_1^\pm [G^\pm]_g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [G_0^\mp]_r^d \Delta_2^\pm [G^\pm]_g^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [G_0^\mp]_g^u \Delta_2^\pm [G^\pm]_r^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [G_0^\mp]_g^d \Delta_1^\pm [G^\pm]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & [G^\mp]_r^u \Delta_1^\pm [G_0^\pm]_g^d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [G^\mp]_r^d \Delta_2^\pm [G_0^\pm]_g^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [G^\mp]_g^u \Delta_2^\pm [G_0^\pm]_r^d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [G^\mp]_g^d \Delta_1^\pm [G_0^\pm]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht, daß für jedes von 0 verschiedene Element mit $i \neq j$ und $f \neq g$ gilt

$$[G_0^\mp]_i^f [\Phi^\pm]_{ij}^{fg} [G^\pm]_j^g = [G^\mp]_i^f [\Phi^\pm]_{ij}^{fg} [G_0^\pm]_j^g. \quad (2.37)$$

Die folgende Rechnung soll diese Beziehung beweisen,

$$\begin{aligned}
& [G_0^\mp]_i^f [\Phi^\pm]_{ij}^{fg} [G^\pm]_j^g \\
&= \left\{ \left[[G^\pm]^{-1} \right]_j^g \left[[\Phi^\pm]_{ij}^{fg} \right]^{-1} \left[[G_0^\mp]^{-1} \right]_i^f \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \left(\left[[G_0^\pm]^{-1} \right]_j^g - [\Phi^\mp]_{ij}^{fg} [G_0^\mp]_i^f [\Phi^\pm]_{ij}^{fg} \right) \left[[\Phi^\pm]_{ij}^{fg} \right]^{-1} \left[[G_0^\mp]^{-1} \right]_i^f \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \left[[G_0^\pm]^{-1} \right]_j^g \left[[\Phi^\pm]_{ij}^{fg} \right]^{-1} \left[[G_0^\mp]^{-1} \right]_i^f - [\Phi^\mp]_{ij}^{fg} \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \left[[G_0^\pm]^{-1} \right]_j^g \left[[\Phi^\pm]_{ij}^{fg} \right]^{-1} \left(\left[[G_0^\mp]^{-1} \right]_i^f - [\Phi^\pm]_{ij}^{fg} [G_0^\pm]_j^g [\Phi^\mp]_{ij}^{fg} \right) \right\}^{-1} \\
&= \left\{ \left[[G_0^\pm]^{-1} \right]_j^g \left[[\Phi^\pm]_{ij}^{fg} \right]^{-1} \left[[G^\mp]^{-1} \right]_i^f \right\}^{-1} \\
&= [G^\mp]_i^f [\Phi^\pm]_{ij}^{fg} [G_0^\pm]_j^g .
\end{aligned}$$

2.1.3 Umschreiben der Zustandssumme mit Hilfe des vollständigen inversen Propagators

Der Interaktionsterm in der Gleichung (2.8) wird nun in einen Wechselwirkungsterm und einen dazu hermitesch konjugierten Wechselwirkungsterm h.c. aufgespalten. Die Quarkspinoren werden zum Teil in deren ladungskonjugierte, die mit einem Index C versehen sind, umgewandelt,

$$\psi_C(x) = C\bar{\psi}^T(x) , \quad (2.38)$$

$$\bar{\psi}_C(x) = \psi^T(x)C , \quad (2.39)$$

$$\psi(x) = C\bar{\psi}_C^T(x) , \quad (2.40)$$

$$\bar{\psi}(x) = \psi_C^T(x)C . \quad (2.41)$$

Hierin ist C die ladungskonjugierende Matrix in Dirac-Darstellung, deren Definition der Leser im Anhang A.3 auf der Seite 98 findet.

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}(x) \Gamma_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \psi_C^T(x) C \Gamma_a^\mu C \bar{\psi}_C^T(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) + \text{h.c.} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \psi_C^T(x) C \Gamma_a^\mu (-C^{-1}) \bar{\psi}_C^T(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) + \text{h.c.} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -\bar{\psi}_C(x) (-C^{-1})^T (\Gamma_a^\mu)^T C^T \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) + \text{h.c.} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -\bar{\psi}_C(x) (-C) (\Gamma_a^\mu)^T C^{-1} \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) + \text{h.c.} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}_C(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) + [\bar{\psi}_C(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y)]^\dagger \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}_C(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \right. \\
&\quad \left. + \psi^\dagger(y) (\Gamma_b^\nu)^\dagger \bar{\psi}^\dagger(y) \psi_C^\dagger(x) (\bar{\Gamma}_a^\mu)^\dagger \bar{\psi}_C^\dagger(x) \right\} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Mit $\psi^\dagger = \bar{\psi}\gamma_0$ und $\psi_C^\dagger = \bar{\psi}_C\gamma_0$ läßt sich dies umformen zu

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \Gamma_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}_C(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \right. \\ & \quad \left. + \bar{\psi}(y) \gamma_0 (\Gamma_b^\nu)^\dagger \gamma_0 \psi(y) \bar{\psi}_C(x) \gamma_0 (\bar{\Gamma}_a^\mu)^\dagger \gamma_0 \psi_C(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Jetzt ist aber

$$\gamma_0 (\Gamma_b^\nu)^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 (T_b \gamma^\nu)^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 (\gamma^\nu)^\dagger \gamma_0 T_b = \gamma^\nu T_b = \Gamma_b^\nu \quad (2.44)$$

und

$$\gamma_0 (\bar{\Gamma}_a^\mu)^\dagger \gamma_0 = -\gamma_0 (\gamma^\mu T_a^T)^\dagger \gamma_0 = -\gamma_0 (\gamma^\mu)^\dagger \gamma_0 T_a^* = -\gamma^\mu T_a^T = \bar{\Gamma}_a^\mu. \quad (2.45)$$

Mit den Gleichungen (2.44) und (2.45) läßt sich der Wechselwirkungsterm (2.43) umwandeln zu

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \bar{\psi}_C(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) + \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \bar{\psi}_C(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi_C(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Das kann man mit Hilfe der Beziehungen

$$J_{\alpha\beta}(x, y) = [\psi_C]_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \quad (2.47)$$

$$J_{\beta\alpha}^\dagger(y, x) = [J_{\alpha\beta}(x, y)]^\dagger = [\gamma_0 \psi(y)]_\beta [\bar{\psi}_C(x) \gamma_0]_\alpha \quad (2.48)$$

umschreiben zu

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[\gamma_0 J^\dagger(y, x) \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu J(x, y) \Gamma_b^\nu + J(x, y) \Gamma_b^\nu \gamma_0 J^\dagger(y, x) \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \right], \end{aligned}$$

wobei α und β über alle Color-Flavor-Dirac-Spinorkomponenten laufen. Diese Gleichung wird nun um seinen Erwartungswert $\langle J(x, y) \rangle$ entwickelt. Hierbei entstehen die Fluktuationen $\rho(x, y) = J(x, y) - \langle J(x, y) \rangle$. Terme zweiter und höherer Ordnung in ρ werden vernachlässigt. Diese Näherung bezeichnet man als Mean-Field-Approximation,

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\ &\cong -\frac{1}{2} \text{Sp} \left\{ \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \right. \\ & \quad + \gamma_0 [J^\dagger(y, x) - \langle J^\dagger(y, x) \rangle] \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \\ & \quad + \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu [J(x, y) - \langle J(x, y) \rangle] \Gamma_b^\nu \\ & \quad + \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \\ & \quad + [J(x, y) - \langle J(x, y) \rangle] \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \\ & \quad \left. + \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 [J^\dagger(y, x) - \langle J^\dagger(y, x) \rangle] \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \right\}. \end{aligned}$$

Multipliziert man nun die eckigen Klammern aus, dann erhält man

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \bar{\Gamma}_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\ &\cong -\frac{1}{2} \text{Sp} \left\{ \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu + \gamma_0 J^\dagger(y, x) \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \right. \\ & \quad - \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu + \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu J(x, y) \Gamma_b^\nu \\ & \quad - \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu + \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \\ & \quad + J(x, y) \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu - \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \\ & \quad \left. + \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 J^\dagger(y, x) \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu - \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \right\}. \end{aligned}$$

Faßt man die zueinandergehörenden Terme zusammen, dann vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x) \Gamma_a^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \Gamma_b^\nu \psi(y) \\ & \cong \frac{1}{2} \text{Sp} \{ \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu - 2 \gamma_0 J^\dagger(y, x) \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \\ & \quad + \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu - 2 J(x, y) \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \}. \end{aligned}$$

Durch die Umformung des biquadratischen Wechselwirkungsterms in der Zustandssumme zu einem bilinearen Term multipliziert mit einem Fermion-Fermion-Kondensat, läßt sich die großkanonische Zustandssumme der farbsupraleitenden Quarkmaterie in der Mean-Field-Approximation bis auf irrelevante Konstanten folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = \exp & \left\{ \frac{g^2}{4} \int_{x,y} \sum_{a,b} \text{Sp} [\gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \right. \\ & \quad \left. + \langle J(x, y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y, x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) \right\} \\ & \times \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \{ I[\bar{\psi}, \psi] \}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

mit

$$\begin{aligned} I[\bar{\psi}, \psi] = \int_{x,y} & \left\{ \bar{\psi}(x) [\mathcal{G}_0^+]^{-1}(x, y) \psi(y) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [\bar{\psi}_C(x) \Phi^+(x, y) \psi(y) + \bar{\psi}(y) \Phi^-(y, x) \psi_C(x)] \right\} \end{aligned} \quad (2.50)$$

und den Gpgleichungen

$$\Phi^+(x, y) = g^2 \sum_{a,b} \bar{\Gamma}_a^\mu \langle \psi_C(x) \bar{\psi}(y) \rangle \Gamma_b^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x, y), \quad (2.51)$$

$$\Phi^-(y, x) = g^2 \sum_{a,b} \Gamma_b^\nu \langle \psi(y) \bar{\psi}_C(x) \rangle \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x, y) = \gamma_0 [\Phi^+(x, y)]^\dagger \gamma_0. \quad (2.52)$$

Es ist zweckmäßig, eine kompaktere Schreibweise einzuführen. Wie man gleich sehen wird, läßt sich die großkanonische Zustandssumme mit Hilfe des vollständigen, inversen Propagators ausdrücken. Dadurch verkürzt sich der Ausdruck für den zweiten Faktor in der Zustandssumme, das ist das Integral $I[\bar{\psi}, \psi]$. Man schreibt diese Gleichung in eine Matrixform mit den dazugehörigen Nambu-Gorkov-Quarkspino- ren $\bar{\Psi}$ und Ψ um, in denen die Quarkspino- ren und deren ladungskonjugierte zusammengefaßt sind. Die Matrix, die bei dieser Transformation entsteht, ist genau der schon erwähnte vollständige, inverse Propagator. Die für die Umformung nötigen Formeln lauten

$$\bar{\psi}(x) [\mathcal{G}_0^+]^{-1}(x, y) \psi(y) = \bar{\psi}_C(y) [\mathcal{G}_0^-]^{-1}(y, x) \psi_C(x), \quad (2.53)$$

$$\bar{\Psi} = (\bar{\psi}, \bar{\psi}_C), \quad (2.54)$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_C \end{pmatrix}, \quad (2.55)$$

$$\mathcal{S}^{-1} = \begin{pmatrix} [\mathcal{G}_0^+]^{-1} & \Phi^- \\ \Phi^+ & [\mathcal{G}_0^-]^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Die Relation (2.53) beweist man folgendermaßen

$$\begin{aligned}
& \bar{\psi}(x) [\mathcal{G}_0^+]^{-1}(x, y) \psi(y) \\
&= \bar{\psi}_C^T(x) C [\mathcal{G}_0^+]^{-1}(x, y) C \bar{\psi}_C^T(y) \\
&= -\bar{\psi}_C^T(x) C [i\gamma^\mu \partial_\mu + \mathbf{M}\gamma_0 - \mathcal{M}] \delta^{(4)}(x-y) C^{-1} \bar{\psi}_C^T(y) \\
&= -\bar{\psi}_C^T(x) [iC\gamma^\mu C^{-1} \partial_\mu + \mathbf{M}C\gamma_0 C^{-1} - \mathcal{M}] \delta^{(4)}(x-y) \bar{\psi}_C^T(y) \\
&= -\bar{\psi}_C^T(x) [-i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu - \mathbf{M}\gamma_0 - \mathcal{M}] \delta^{(4)}(x-y) \bar{\psi}_C^T(y) \\
&= \bar{\psi}_C(y) \left\{ [-i(\gamma^\mu)^T \partial_\mu - \mathbf{M}\gamma_0 - \mathcal{M}] \delta^{(4)}(y-x) \right\}^T \psi_C(x) \\
&= \bar{\psi}_C(y) [i\gamma^\mu \partial_\mu - \mathbf{M}\gamma_0 - \mathcal{M}] \delta^{(4)}(y-x) \psi_C(x) \\
&= \bar{\psi}_C(y) [\mathcal{G}_0^-]^{-1}(y, x) \psi_C(x). \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Hierin sind $\mathbf{M} = \text{diag}(\mu_r^u, \mu_r^d, \mu_g^u, \mu_g^d, \mu_b^u, \mu_b^d)$ die Color-Flavor-Matrix der chemischen Potentiale und $\mathcal{M} = \text{diag}(m_r^u, m_r^d, m_g^u, m_g^d, m_b^u, m_b^d)$ die Quarkmassenmatrix.

Die Gleichung (2.50) läßt sich nun mit Hilfe des vollständigen, inversen Diracpropagators \mathcal{S}^{-1} umschreiben zu

$$I[\bar{\Psi}, \Psi] = \frac{1}{2} \int_{x,y} \bar{\Psi}(x) \mathcal{S}^{-1}(x, y) \Psi(y). \tag{2.58}$$

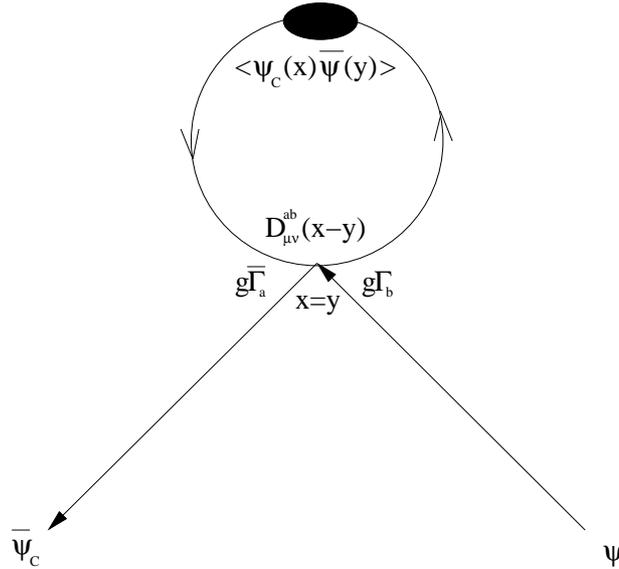


Abbildung 2.2: Quark-Quark-Kondensat in Mean-Field-Approximation.

2.1.4 Die Fouriertransformation des zweiten Faktors der Zustandssumme

Fouriertransformationen sind nötig, um Orts- in Impulsabhängigkeiten umzuwandeln. Dies sind die Fouriertransformationen der Quarkspinoren,

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{-ik_\mu x^\mu} \psi(k), \quad (2.59)$$

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ik_\mu x^\mu} \bar{\psi}(k), \quad (2.60)$$

$$\psi_C(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{-ik_\mu x^\mu} \psi_C(k), \quad (2.61)$$

$$\bar{\psi}_C(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{ik_\mu x^\mu} \bar{\psi}_C(k). \quad (2.62)$$

Der fouriertransformierte vollständige inverse Propagator lautet aufgrund von Translationsinvarianz

$$\mathcal{S}^{-1}(x, y) = \frac{T}{V} \sum_k e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \mathcal{S}^{-1}(k). \quad (2.63)$$

Mit diesen Gleichungen ist man nun imstande, das Integral in der Zustandssumme fourierzutransformieren. Dabei muß man aber beachten, das sich das Integrationsmaß ändert. Um diese Änderung zu berechnen, benötigt man zunächst die Beziehung zwischen den fouriertransformierten Quarkspinoren und deren ladungskonjugierten,

$$\begin{aligned} \psi_C(k) &= C\bar{\psi}^T(-k), \\ \bar{\psi}_C(k) &= \psi^T(-k)C, \\ \psi(-k) &= C\bar{\psi}_C^T(k), \\ \bar{\psi}(-k) &= \psi_C^T(k)C. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Das Integrationsmaß lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi &= \prod_k d\bar{\psi}(k) d\psi(k) \\ &= \prod_{(k, -k)} d\bar{\psi}(k) d\bar{\psi}(-k) d\psi(k) d\psi(-k) \\ &= \tilde{N} \prod_{(k, -k)} d\bar{\psi}(k) d\psi_C(k) d\psi(k) d\bar{\psi}_C(k). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Hierbei ist \tilde{N} eine irrelevante Konstante, die von der ladungskonjugierten Transformation herrührt.

Jetzt läßt sich die Gleichung (2.58) fouriertransformieren,

$$I[\bar{\Psi}, \Psi] = \frac{T}{2V^2} \sum_{k,p,q} \int_{x,y} \bar{\Psi}(k) \mathcal{S}^{-1}(q) \Psi(p) e^{ik_\mu x^\mu} e^{-ip_\mu y^\mu} e^{-iq_\mu(x^\mu - y^\mu)}.$$

Nun werden die Integrationen über x und y voneinander getrennt,

$$I[\bar{\Psi}, \Psi] = \frac{T}{2V^2} \sum_{k,p,q} \int_x e^{ik_\mu x^\mu - iq_\mu x^\mu} \int_y e^{-ip_\mu y^\mu + iq_\mu y^\mu} \bar{\Psi}(k) \mathcal{S}^{-1}(q) \Psi(p).$$

Jetzt kann man die Integrationen über die Exponentialfunktionen durch Kronecker-symbole ersetzen,

$$I [\bar{\Psi}, \Psi] = \frac{T}{2V^2} \sum_{k,p,q} \frac{V}{T} \delta_{k,q}^{(4)} \frac{V}{T} \delta_{p,q}^{(4)} \bar{\Psi}(k) \mathcal{S}^{-1}(q) \Psi(p) .$$

Die Summen über p und q brechen zusammen,

$$I [\bar{\Psi}, \Psi] = \frac{1}{2} \sum_k \bar{\Psi}(k) \frac{\mathcal{S}^{-1}(k)}{T} \Psi(k) .$$

Dies läßt sich umformen zu

$$I [\bar{\Psi}, \Psi] = \sum_{(k,-k)} \bar{\Psi}(k) \frac{\mathcal{S}^{-1}(k)}{T} \Psi(k) . \quad (2.66)$$

Dadurch ist der zweite Faktor der Zustandssumme (2.49) bis auf irrelevante Konstanten gegeben durch

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp \{I [\bar{\psi}, \psi]\} = \det_{(k,-k)} \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) = \sqrt{\det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right)} . \quad (2.67)$$

2.1.5 Der vollständige Propagator

Der vollständige Propagator ist natürlich das Inverse des inversen vollständigen Propagators, der durch Gleichung (2.56) definiert ist. Der vollständige Propagator \mathcal{S} ist demnach gegeben durch

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}^+ & -\mathcal{G}_0^+ \Phi^- \mathcal{G}^- \\ -\mathcal{G}_0^- \Phi^+ \mathcal{G}^+ & \mathcal{G}^- \end{pmatrix} . \quad (2.68)$$

Durch die Berechnung von $\mathcal{S}^{-1} \mathcal{S} = 1$ läßt sich das Ergebnis beweisen,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} [\mathcal{G}_0^+]^{-1} & \Phi^- \\ \Phi^+ & [\mathcal{G}_0^-]^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{G}^+ & -\mathcal{G}_0^+ \Phi^- \mathcal{G}^- \\ -\mathcal{G}_0^- \Phi^+ \mathcal{G}^+ & \mathcal{G}^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\mathcal{G}_0^+]^{-1} \mathcal{G}^+ - \Phi^- \mathcal{G}_0^- \Phi^+ \mathcal{G}^+ & -[\mathcal{G}_0^+]^{-1} \mathcal{G}_0^+ \Phi^- \mathcal{G}^- + \Phi^- \mathcal{G}^- \\ \Phi^+ \mathcal{G}^+ - [\mathcal{G}_0^-]^{-1} \mathcal{G}_0^- \Phi^+ \mathcal{G}^+ & -\Phi^+ \mathcal{G}_0^+ \Phi^- \mathcal{G}^- + [\mathcal{G}_0^-]^{-1} \mathcal{G}^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \{[\mathcal{G}_0^+]^{-1} - \Phi^- \mathcal{G}_0^- \Phi^+\} \mathcal{G}^+ & 0 \\ 0 & \{[\mathcal{G}_0^-]^{-1} - \Phi^+ \mathcal{G}_0^+ \Phi^-\} \mathcal{G}^- \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [\mathcal{G}^+]^{-1} \mathcal{G}^+ & 0 \\ 0 & [\mathcal{G}^-]^{-1} \mathcal{G}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

2.1.6 Die Fouriertransformation des ersten Faktors der Zustandssumme

Als nächstes wird der erste Faktor in der großkanonischen Zustandssumme (2.49), das ist

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{4} \int_{x,y} \sum_{a,b} \text{Sp} [\gamma_0 \langle J^\dagger(y,x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu \langle J(x,y) \rangle \Gamma_b^\nu + \langle J(x,y) \rangle \Gamma_b^\nu \gamma_0 \langle J^\dagger(y,x) \rangle \gamma_0 \bar{\Gamma}_a^\mu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x,y) \right\} , \quad (2.69)$$

mit Hilfe der Gleichungen (2.47), (2.48), (2.54) und (2.55) umgeschrieben zu

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{4} \int_{x,y} \sum_{a,b} \text{Sp} [\langle \Psi_1(y) \bar{\Psi}_2(x) \rangle \bar{\Gamma}_a^\mu \langle \Psi_2(x) \bar{\Psi}_1(y) \rangle \Gamma_b^\nu \right. \\ \left. + \langle \Psi_2(x) \bar{\Psi}_1(y) \rangle \Gamma_b^\nu \langle \Psi_1(y) \bar{\Psi}_2(x) \rangle \bar{\Gamma}_a^\mu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x,y) \right\}. \quad (2.70)$$

Um dies durch die Elemente des vollständigen Propagators auszudrücken und fourierzutransformieren, benutzt man die Relationen

$$\langle \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \rangle = \frac{1}{V} \sum_k e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \langle \Psi_\alpha(k) \bar{\Psi}_\beta(k) \rangle \quad (2.71)$$

$$\langle \Psi_\alpha(k) \bar{\Psi}_\beta(k) \rangle = -T \mathcal{S}_{\alpha\beta}(k) \quad (2.72)$$

$$\langle \Psi_\alpha(x) \bar{\Psi}_\beta(y) \rangle = -\frac{T}{V} \sum_k e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \mathcal{S}_{\alpha\beta}(k) = -\mathcal{S}_{\alpha\beta}(x,y). \quad (2.73)$$

Die Beziehung (2.72) wird im Anhang B von [1] bewiesen. Desweiteren benötigt man den fouriertransformierten Gluonpropagator,

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x,y) = \frac{T}{V} \sum_k e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(k) \\ = -\frac{T}{V} \frac{g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{\Lambda^2} \sum_k e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} \\ = -\frac{g_{\mu\nu} \delta^{ab}}{\Lambda^2} \delta(x^\mu - y^\mu). \quad (2.74)$$

Dies ist der Gluonpropagator bei Kontaktwechselwirkung. Für die Herleitung ist die Gleichung (1.82), $k_0 = 0$ und ein konstantes $\Lambda = |\mathbf{k}|$ benutzt worden. Dadurch erhält man

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{4} \frac{T^3}{V^3} \sum_{k,p,q} \int_{x,y} \sum_{a,b} \text{Sp} [\mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu \right. \\ \left. + \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu \mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q) e^{-i(-k_\mu + p_\mu + q_\mu)(x^\mu - y^\mu)} \right\}.$$

Nun werden die Integrationen über x und y voneinander getrennt,

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{2} \frac{T^3}{V^3} \sum_{k,p,q} \int_x e^{-i(-k_\mu + p_\mu + q_\mu)x^\mu} \int_y e^{-i(k_\mu - p_\mu - q_\mu)y^\mu} \right. \\ \left. \times \sum_{a,b} \text{Sp} [\mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q) \right\}. \quad (2.75)$$

In diesem Ausdruck kann man die Integrationen über die Exponentialfunktion durch Kroneckersymbole ersetzen,

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{2} \frac{T^3}{V^3} \sum_{k,p,q} \sum_{a,b} \frac{V}{T} \delta_{q,k-p}^{(4)} \frac{V}{T} \delta_{q,k-p}^{(4)} \right. \\ \left. \times \text{Sp} [\mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q) \right\}. \quad (2.76)$$

Dadurch bricht die Summe über q zusammen und man erhält

$$\exp \left\{ \frac{g^2}{2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{a,b} \text{Sp} [\mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(k-p) \right\}. \quad (2.77)$$

Die großkanonische Zustandssumme der Farbsupraleitung, also Gleichung (2.49), läßt sich nun bis auf irrelevante Konstanten schreiben als

$$\mathcal{Z} = \exp \left\{ \frac{g^2 T}{2 V} \sum_{k,p} \sum_{a,b} \text{Sp} [\mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(k-p) \right\} \\ \times \sqrt{\det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right)}. \quad (2.78)$$

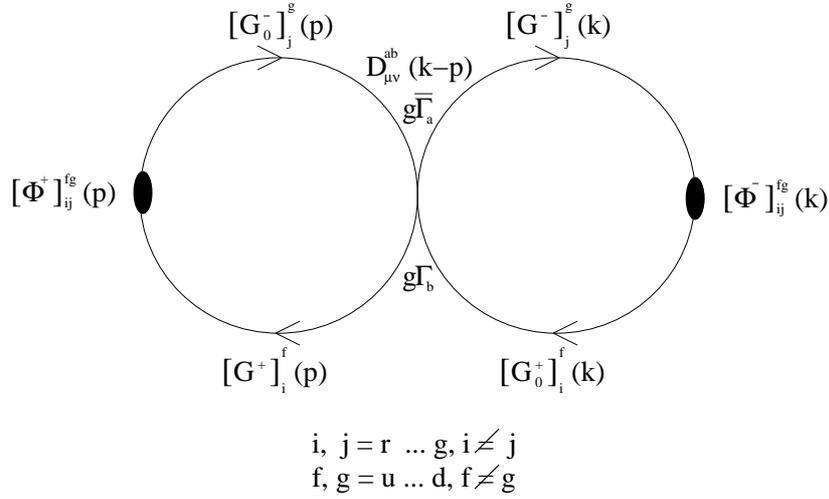


Abbildung 2.3: Feynmandiagramm des Wechselwirkungsterms im Exponenten der Gleichung (2.78)

2.1.7 Vereinfachen der Determinante

Zunächst wird die Determinante in der Zustandssumme (2.78) ermittelt. Um die Determinante zu errechnen, ist es vorteilhaft, den Ausdruck erst einmal zu vereinfachen. Der vollständige inverse Propagator \mathcal{S}^{-1} wird nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren umgeformt. Dieses Verfahren ist auch unter dem Namen Einsetzungsverfahren oder Gaußscher Algorithmus bekannt, mit dem man lineare Gleichungssysteme lösen kann. Der vollständige inverse Propagator \mathcal{S}^{-1} wird dadurch auf Zeilenstufenform gebracht und damit triagonalisiert. Die Determinante ändert

sich bei dieser Transformation nicht,

$$\begin{aligned}
& \det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) \\
&= \det_k \left(\begin{array}{cc} \frac{[G_0^+]^{-1}}{T} & \frac{\Phi^-}{T} \\ \frac{\Phi^+}{T} & \frac{[G_0^-]^{-1}}{T} \end{array} \right) \\
&= \det_k \left(\begin{array}{cccccccccccc} \frac{[[G_0^+]^{-1}]_r^u}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_1^-}{T} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{[[G_0^+]^{-1}]_r^d}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_2^-}{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{[[G_0^+]^{-1}]_a^u}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_2^-}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^+]^{-1}]_a^d}{T} & 0 & 0 & \frac{\Delta_1^-}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^+]^{-1}]_b^u}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^+]^{-1}]_b^d}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_1^+}{T} & 0 & 0 & \frac{[[G_0^-]^{-1}]_r^u}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2^+}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^-]^{-1}]_r^d}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2^+}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^-]^{-1}]_a^u}{T} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_1^+}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^-]^{-1}]_a^d}{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^-]^{-1}]_b^u}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{[[G_0^-]^{-1}]_b^d}{T} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Nun wird die Matrix zu einer unteren Dreiecksmatrix triagonalisiert. Eine der insgesamt vier Umformungen soll anhand von Zeile 3 und 8 näher erläutert werden. Das $\frac{\Delta_2^-}{T}$ wird nach dem Einsetzungsverfahren der Gaußelimination zu einer 0 durch $\frac{\Delta_2^-}{T} - \Delta_2^- [G_0^-]_r^d \frac{[[G_0^-]^{-1}]_r^d}{T}$. Dieselbe Umformung muß nun auch für alle anderen Elemente der 3. Zeile vorgenommen werden. Weil es in dieser Matrix viele Nullelemente gibt, muß diese Umformung nur noch für $\frac{[[G_0^+]^{-1}]_a^u}{T}$ durchgeführt werden. Dieses verändert sich deswegen zu $\frac{[[G_0^+]^{-1}]_a^u}{T} - \Delta_2^- [G_0^-]_r^d \frac{\Delta_2^+}{T} = \frac{[[G_0^+]^{-1}]_a^u}{T}$. Nach den übrigen Zeilenumformungen erhält man folgende Matrix, aus der noch die Determinante zu

bestimmen ist,

$$\det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) = \det_k \begin{pmatrix} \frac{[[G^+]^{-1}]_r^u}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \frac{[[G^+]^{-1}]_r^d}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 \frac{[[G^+]^{-1}]_q^u}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \frac{[[G^+]^{-1}]_q^d}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^+]^{-1}]_b^u}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^+]^{-1}]_b^d}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\Delta_1^+}{T} & 0 & 0 \frac{[[G_0^-]^{-1}]_r^u}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta_2^+}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^-]^{-1}]_r^d}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_3^+}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^-]^{-1}]_q^u}{T} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\Delta_4^+}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^-]^{-1}]_q^d}{T} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^-]^{-1}]_b^u}{T} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \frac{[[G_0^-]^{-1}]_b^d}{T} 0 \end{pmatrix}.$$

Diese ist aber nun leicht zu ermitteln, denn sie ist das Produkt aus den Elementen in der Hauptdiagonalen. Aber es ist hieraus nochmals die Determinante über die Diracpropagatoren zu nehmen.

Mit der Regel $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ könnte man nun auch die Determinante eines jeden Diracpropagators dividiert durch T auf der Hauptdiagonalen bestimmen und diese dann miteinander multiplizieren, um die Determinante über das Produkt aller Diracpropagatoren dividiert durch T zu errechnen. Das bedeutet aber auch, daß die Reihenfolge der Multiplikation der Diracpropagatoren dividiert durch T in der Hauptdiagonalen keine Rolle spielt, denn $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A)$. Ich darf mit Hilfe dieser Determinantenregel schreiben, daß

$$\det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) = \prod_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \prod_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \det_k \left(\frac{[[G_0^-]^{-1}]_i^f [[G^+]^{-1}]_j^g}{T^2} \right) \\ \times \prod_{i=b}^b \prod_{f=u}^d \det_k \left(\frac{[[G_0^-]^{-1}]_i^f [[G_0^+]^{-1}]_i^f}{T^2} \right) \quad (2.79)$$

ist. Um die Determinante (2.79) zu berechnen, benötigt man mit $i \neq j$ und $f \neq g$

$$\begin{aligned} & [[G_0^-]^{-1}]_i^f [[G^+]^{-1}]_j^g \\ &= [[G_0^-]^{-1}]_i^f [[G_0^+]^{-1}]_j^g - [[G_0^-]^{-1}]_i^f [\Phi^-]_{ij}^{fg} [G_0^-]_i^f [\Phi^+]_{ij}^{fg}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Es gilt die Beziehung

$$[[G_0^-]^{-1}]_i^f [\Phi^-]_{ij}^{fg} = [[\Phi^+]_{ij}^{fg}]^\dagger [[G_0^-]^{-1}]_i^f, \quad (2.81)$$

die nun mit der Relation $[\mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})]^\dagger = \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})$ bewiesen wird,

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f [\Phi^-]_{ij}^{fg} \\
&= \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \gamma_0 \sum_{c,e} \left[[\phi_{cl}^{eg}]_{ij}^{fg} \right]^\dagger \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \gamma_0 \\
&= \frac{1}{4} \left[\gamma_0 (k_0 - \mu_i^f) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right] \gamma_0 \sum_{c,e} \left[[\phi_{cl}^{eg}]_{ij}^{fg} \right]^\dagger \left(1 + \gamma_5 + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \gamma_0 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{c,e} \left[[\phi_{cl}^{eg}]_{ij}^{fg} \right]^\dagger \left(1 + \gamma_5 + \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} + \gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) \left[\gamma_0 (k_0 - \mu_i^f) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right] \\
&= \left[[\Phi^+]_{ij}^{fg} \right]^\dagger \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f .
\end{aligned}$$

Verwendet man die Beziehung (2.81) in der Gleichung (2.80), dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_j^g \\
&= \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_j^g - \left[[\Phi^+]_{ij}^{fg} \right]^\dagger [\Phi^+]_{ij}^{fg} \\
&= \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_j^g - \sum_{c,e} \left| [\phi_{cl}^{eg}]_{ij}^{fg} \right|^2 \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) . \tag{2.82}
\end{aligned}$$

Wenn man den ersten Term dieser Gleichung ausmultipliziert, dann erhält man

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_j^g \\
&= \left[\gamma_0 (k_0 - \mu_i^f) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right] \left[\gamma_0 (k_0 + \mu_j^g) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right] \\
&= k_0^2 + k_0 \mu_j^g - k_0 \mu_i^f - \mu_i^f \mu_j^g - (k_0 - \mu_i^f) \boldsymbol{\gamma}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + (k_0 + \mu_j^g) \boldsymbol{\gamma}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - |\mathbf{k}|^2 \\
&= k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 + k_0 (\mu_j^g - \mu_i^f) - \mu_i^f \mu_j^g + (\mu_i^f + \mu_j^g) \boldsymbol{\gamma}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \\
&= \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - |\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{4} (\mu_i^f + \mu_j^g)^2 + (\mu_i^f + \mu_j^g) \boldsymbol{\gamma}_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} . \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Dies kann man auch mit Hilfe der Energieprojektoren ausdrücken,

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_j^g \\
&= \left[\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - |\mathbf{k}|^2 - \frac{1}{4} (\mu_i^f + \mu_j^g)^2 \right] [\Lambda^+(\mathbf{k}) + \Lambda^-(\mathbf{k})] \\
&\quad + (\mu_i^f + \mu_j^g) |\mathbf{k}| [\Lambda^+(\mathbf{k}) - \Lambda^-(\mathbf{k})] \\
&= \left[\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left(|\mathbf{k}| - \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \right)^2 \right] \Lambda^+(\mathbf{k}) \\
&+ \left[\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left(|\mathbf{k}| + \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \right)^2 \right] \Lambda^-(\mathbf{k}) \\
&= \left[\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left(|\mathbf{k}| - \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \right)^2 \right] [\mathcal{P}_r^+(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_\ell^+(\mathbf{k})] \\
&+ \left[\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left(|\mathbf{k}| + \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \right)^2 \right] [\mathcal{P}_r^-(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_\ell^-(\mathbf{k})] \\
&= \sum_{c,e} \left[\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left(|\mathbf{k}| - e \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \right)^2 \right] \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}). \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Mit der Definition

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu, \phi) = \sqrt{(|\mathbf{k}| - e\mu)^2 + |\phi|^2} \tag{2.85}$$

ist

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_j^g \\
&= \sum_{c,e} \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}). \tag{2.86}
\end{aligned}$$

Hiermit wäre das Argument der ersten Determinante in der Gleichung (2.79) in Projektorschreibweise umgeformt. Das gleiche wird nun auch mit dem zweiten Determinantenargument durchgeführt,

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_i^f \\
&= \left[\gamma_0 (k_0 - \mu_i^f) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right] \left[\gamma_0 (k_0 + \mu_i^f) - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} \right] \\
&= k_0^2 - (\mu_i^f)^2 - (k_0 - \mu_i^f) \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} + (k_0 + \mu_i^f) \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} - |\mathbf{k}|^2 \\
&= k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - (\mu_i^f)^2 + 2\mu_i^f \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Nun kann man die letzte Gleichung wieder mit Hilfe der Energieprojektoren aus-

drücken,

$$\begin{aligned}
& \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f \left[[G_0^+]^{-1} \right]_i^f \\
&= \left[k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 - (\mu_i^f)^2 \right] (\Lambda^+ + \Lambda^-) + 2\mu_i^f |\mathbf{k}| (\Lambda^+ - \Lambda^-) \\
&= \left[k_0^2 - (|\mathbf{k}| - \mu_i^f)^2 \right] \Lambda^+(\mathbf{k}) + \left[k_0^2 - (|\mathbf{k}| + \mu_i^f)^2 \right] \Lambda^-(\mathbf{k}) \\
&= \left[k_0^2 - (|\mathbf{k}| - \mu_i^f)^2 \right] [\mathcal{P}_r^+(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_\ell^+(\mathbf{k})] \\
&+ \left[k_0^2 - (|\mathbf{k}| + \mu_i^f)^2 \right] [\mathcal{P}_r^-(\mathbf{k}) + \mathcal{P}_\ell^-(\mathbf{k})] \\
&= \sum_{c,e} \left[k_0^2 - (|\mathbf{k}| - e\mu_i^f)^2 \right] \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \\
&= \sum_{c,e} \left\{ k_0^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) . \tag{2.87}
\end{aligned}$$

Die Determinante (2.79) schreibt sich dann als

$$\begin{aligned}
& \det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) \\
&= \prod_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \prod_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \det_k \left(\frac{\left(\sum_{c,e} \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \right)}{T^2} \right) \\
&\quad \times \prod_{i=b}^b \prod_{f=u}^d \det_k \left(\frac{\left(\sum_{c,e} \left\{ k_0^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \right)}{T^2} \right) . \tag{2.88}
\end{aligned}$$

2.2 Die logarithmierte Zustandssumme

Für die Berechnung der Zustandsgleichung benötigt man den natürlichen Logarithmus der Zustandssumme. In den folgenden Abschnitten wird die Gleichung (2.78) logarithmiert.

2.2.1 Der Logarithmus des zweiten Faktors der Zustandssumme

Zunächst wird der Teil der logarithmierten Zustandssumme mit der Determinante vereinfacht. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \ln \sqrt{\det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right)} = \frac{1}{2} \ln \left[\det_k \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln \left[\prod_k \det \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_k \ln \left[\det \left(\frac{\mathcal{S}^{-1}}{T} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_k \ln \left[\det \left(\frac{\sum_{c,e} \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_{c,ij}^{e,fg}] \right) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{T^2} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_k \ln \left[\det \left(\frac{\sum_{c,e} \left\{ k_0^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\mu_i^f, 0 \right) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{T^2} \right) \right]. \tag{2.89}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann man aber nochmals umschreiben, weil $\mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})$ diagonalisierbar ist. Man verwendet hierfür folgende Beziehung

$$\ln [\det A] = \text{Sp} [\ln A]. \tag{2.90}$$

Hierbei muß die Matrix A diagonalisierbar sein. Man benötigt dazu die orthogonale Transformationsmatrix S ,

$$\exists S : S A S^{-1} = \text{diag } \lambda_i. \tag{2.91}$$

Dadurch ist

$$\ln [\det A] = \ln [\det (S A S^{-1})] = \ln \prod_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i = \text{Sp} [\ln \lambda_i]. \tag{2.92}$$

Der Logarithmus läßt sich in eine Reihe entwickeln,

$$\ln (1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \tag{2.93}$$

Deswegen gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp} [\ln A] &= \mathrm{Sp} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (A-1)^n \right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Sp} [(A-1)^n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Sp} [(A-1)^n S^{-1} S] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Sp} [S (A-1)^n S^{-1}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Sp} [\{S (A-1) S^{-1}\}^n] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mathrm{Sp} [\mathrm{diag} \{(\lambda_i - 1)^n\}] \\
&= \mathrm{Sp} [\ln \lambda_i].
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Mit den Ergebnissen (2.92) und (2.94) ist die Relation (2.90) bewiesen. Dadurch wird die Gleichung (2.89) zu

$$\begin{aligned}
&\ln \sqrt{\det_k \left(\frac{S^{-1}}{T} \right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_k \mathrm{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(\frac{\sum_{c,e} \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{T^2} \right) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_k \mathrm{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(\frac{\sum_{c,e} \left\{ k_0^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e (\mu_i^f, 0) \right]^2 \right\} \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{T^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Da die Argumente in den Logarithmen der Gleichung (2.95) die Form $\sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{P}_i$ besitzen, benutzt man für die nachfolgende Berechnung diese kompaktere Schreibweise,

$$\mathrm{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{P}_i \right) \right] = \mathrm{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(a_1 \mathcal{P}_1 + \sum_{i=2}^4 a_i \mathcal{P}_i \right) \right]. \tag{2.96}$$

Nun wird dies umgewandelt zu

$$\begin{aligned}
& \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(a_1 \left\{ 1 - \sum_{i=2}^4 \mathcal{P}_i \right\} + \sum_{i=2}^4 a_i \mathcal{P}_i \right) \right] \\
&= \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(a_1 + \sum_{i=2}^4 (a_i - a_1) \mathcal{P}_i \right) \right] \\
&= \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(a_1 \left\{ 1 + \sum_{i=2}^4 \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right) \mathcal{P}_i \right\} \right) \right] \\
&= \text{Sp}_{4 \times 4} [\ln(a_1)] + \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left\{ 1 + \sum_{i=2}^4 \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right) \mathcal{P}_i \right\} \right]. \tag{2.97}
\end{aligned}$$

Mit der Definition (2.93) kann man die Gleichung (2.97) weiter vereinfachen,

$$\begin{aligned}
& 4 \ln(a_1) + \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left\{ \sum_{i=2}^4 \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right) \mathcal{P}_i \right\}^n \right] \\
&= 4 \ln(a_1) + \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{i=2}^4 \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right)^n \mathcal{P}_i \right] \\
&= 4 \ln(a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sum_{i=2}^4 \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right)^n \text{Sp}_{4 \times 4} [\mathcal{P}_i], \tag{2.98}
\end{aligned}$$

wobei die zweite Zeile wegen der Projektoreigenschaft der \mathcal{P}_i folgt. Schreibt man die Spur über die Projektoren wieder in der ursprünglichen Form, dann ist

$$\begin{aligned}
\text{Sp}_{4 \times 4} [\mathcal{P}_i] &= \text{Sp}_{4 \times 4} [\mathcal{P}_c^e] = \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\frac{1}{4} (1 + c\gamma_5) (1 + e\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right] \\
&= \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\frac{1}{4} (1 + e\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} + c\gamma_5 + ce\gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right] = 1. \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Vereinfacht man den Ausdruck (2.98) weiter, dann erhält man

$$\begin{aligned}
& \ln(a_1^4) + \sum_{i=2}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right)^n \\
&= \ln(a_1^4) + \sum_{i=2}^4 \ln \left[1 + \left(\frac{a_i}{a_1} - 1 \right) \right] \\
&= \ln \left[a_1^4 \prod_{i=2}^4 \left(\frac{a_i}{a_1} \right) \right] = \ln \left(\prod_{i=1}^4 a_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^4 \ln(a_i) = \text{Sp}_{4 \times 4} \left[\ln \left(\sum_{i=1}^4 a_i \mathcal{P}_i \right) \right]. \tag{2.100}
\end{aligned}$$

Wendet man dieses Resultat auf Gleichung (2.95) an, dann ergibt das

$$\begin{aligned}
& \ln \sqrt{\det_k \left(\frac{S^{-1}}{T} \right)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{g \\ i,j=r \\ i \neq j}} \sum_{\substack{d \\ f,g=u \\ f \neq g}} \sum_k \sum_{c,e} \ln \left(\frac{\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2}{T^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_k \sum_{c,e} \ln \left(\frac{k_0^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e (\mu_i^f, 0) \right]^2}{T^2} \right). \tag{2.101}
\end{aligned}$$

2.2.2 Der Logarithmus des ersten Faktors der Zustandssumme in Projektorschreibweise

Logarithmiert man den ersten Faktor der Gleichung (2.78), dann erhält man

$$\ln \mathcal{Z}_1 = \frac{g^2}{2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{a,b} \text{Sp} \left[\mathcal{S}_{12}(k) \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(p) \Gamma_b^\nu \right] \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(k-p). \tag{2.102}$$

Die beiden Elemente des vollständigen Propagators sehen unter Verwendung der Relation (2.36) folgendermaßen aus

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{12} &= -\mathcal{G}_0^+ \Phi^- \mathcal{G}^- = -\mathcal{G}^+ \Phi^- \mathcal{G}_0^- = \\
& \left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & -[G^+]_r^u \Delta_1^- [G_0^-]_g^d & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -[G^+]_r^d \Delta_2^- [G_0^-]_g^u & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -[G^+]_g^u \Delta_2^- [G_0^-]_r^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-[G^+]_g^d \Delta_1^- [G_0^-]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right) \tag{2.103}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{21} &= -\mathcal{G}_0^- \Phi^+ \mathcal{G}^+ = \\
& \left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & -[G_0^-]_r^u \Delta_1^+ [G^+]_g^d & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -[G_0^-]_r^d \Delta_2^+ [G^+]_g^u & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -[G_0^-]_g^u \Delta_2^+ [G^+]_r^d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-[G_0^-]_g^d \Delta_1^+ [G^+]_r^u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right). \tag{2.104}
\end{aligned}$$

Nun führt man die Summe über $a, b = 1, \dots, 8$ und die darin enthaltene Spur über den Color- und Flavourraum aus. Die Generatoren der $SU(3)$ müssen daher von 3×3 -

Matrizen auf 6×6 -Matrizen, die diagonal im Flavorraum sind, erweitert werden.

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_1 = & -\frac{g^2}{2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) \\ & \times \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} \left([G^+]_i^f(k) [\Phi^-]_{ij}^{fg}(k) [G_0^-]_j^g(k) \gamma^\mu [G_0^-]_i^g(p) [\Phi^+]_{ij}^{gf}(p) [G^+]_j^f(p) \gamma^\nu \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} \left([G^+]_i^f(k) [\Phi^-]_{ij}^{fg}(k) [G_0^-]_j^g(k) \gamma^\mu [G_0^-]_j^g(p) [\Phi^+]_{ji}^{gf}(p) [G^+]_i^f(p) \gamma^\nu \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Hierin ist

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) = -\frac{g_{\mu\nu}}{\Lambda^2}. \quad (2.106)$$

In der Gleichung (2.105) verwendet man nun die Beziehungen

$$[\Phi^-]_{ij}^{fg}(k) [G_0^-]_j^g(k) = [G_0^-]_j^g(k) \left[[\Phi^+]_{ij}^{fg} \right]^\dagger(k), \quad (2.107)$$

$$[G_0^-]_i^g(p) [\Phi^+]_{ij}^{gf}(p) = \gamma_0 [\Phi^+]_{ij}^{gf}(p) \gamma_0 [G_0^-]_i^g(p), \quad (2.108)$$

die sich analog zur Gleichung (2.81) herleiten lassen,

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_1 = & -\frac{g^2}{2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) \\ & \times \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} \left([G^+]_i^f(k) [G_0^-]_j^g(k) \left[[\Phi^+]_{ij}^{fg} \right]^\dagger(k) \gamma^\mu \right. \right. \\ & \quad \times \gamma_0 [\Phi^+]_{ij}^{gf}(p) \gamma_0 [G_0^-]_i^g(p) [G^+]_j^f(p) \gamma^\nu \left. \right) \\ & \left. - \frac{1}{6} \left([G^+]_i^f(k) [G_0^-]_j^g(k) \left[[\Phi^+]_{ij}^{fg} \right]^\dagger(k) \gamma^\mu \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \gamma_0 [\Phi^+]_{ji}^{gf}(p) \gamma_0 [G_0^-]_j^g(p) [G^+]_i^f(p) \gamma^\nu \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Dies wird nun in Projektorschreibweise umgeformt. Dafür leitet man zunächst den vollständigen Diracpropagator in Projektorschreibweise her.

Aus der Gleichung (2.86) folgert man, daß

$$[G^+]_j^g(k) = \sum_{c,e} \frac{\mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2} \left[[G_0^-]^{-1} \right]_i^f(k) \quad (2.110)$$

ist und setzt dies in die vorhergehende Gleichung ein. Man nutzt dann die Beziehungen $\gamma_0 \gamma_0 = 1$ und $\gamma_0 \mathcal{P}_{-c}^{-e}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \gamma_0$ aus. Es kürzen sich dabei sämtliche Diracpropagatoren weg. Die Projektoren mit gleichen Argumenten und Indizes las-

sen sich dann noch zusammenfassen. Das Resultat sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{Z}_1 = & -\frac{g^2}{2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) \\
& \times \text{Sp} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{c,e} \frac{[\phi_{c,ij}^{e,fg}]^\dagger(k) \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{\left(k_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c,ij}^{e,fg}]\right)\right]^2} \gamma^\mu} \right. \\
& \times \sum_{c',e'} \frac{[\phi_{c',ij}^{e',gf}](p) \mathcal{P}_{-c'}^{-e'}(\mathbf{p})}{\left(p_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c',ij}^{e',gf}]\right)\right]^2} \gamma^\nu} \\
& - \frac{1}{6} \sum_{c,e} \frac{[\phi_{c,ij}^{e,fg}]^\dagger(k) \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k})}{\left(k_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c,ij}^{e,fg}]\right)\right]^2} \gamma^\mu} \\
& \left. \times \sum_{c',e'} \frac{[\phi_{c',ji}^{e',gf}](p) \mathcal{P}_{-c'}^{-e'}(\mathbf{p})}{\left(p_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c',ij}^{e',gf}]\right)\right]^2} \gamma^\nu} \right\}. \quad (2.111)
\end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man vereinfachen, indem man die Beziehungen $\mathcal{P}_c \gamma^\mu = \gamma^\mu \mathcal{P}_{-c}$ und $[\phi_{c,ij}^{e,fg}]^\dagger = [\phi_{c,ji}^{e,gf}]$ benutzt,

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{Z}_1 = & -\frac{g^2}{2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_{c,e,e'} \\
& \left\{ \frac{[\phi_{c,ij}^{e,fg}]^\dagger(k) [\phi_{c',ij}^{e',gf}](p) \text{Sp} [\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p)}{2 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c,ij}^{e,fg}]\right)\right]^2 \right\} \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c',ij}^{e',gf}]\right)\right]^2 \right\}} \right. \\
& \left. - \frac{[\phi_{c,ij}^{e,fg}]^\dagger(k) [\phi_{c',ij}^{e',gf}](p) \text{Sp} [\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p)}{6 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c,ij}^{e,fg}]\right)\right]^2 \right\} \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2}\right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_{c',ij}^{e',gf}]\right)\right]^2 \right\}} \right\}.
\end{aligned}$$

Nun wird die Diracspur berechnet. Mit der Gleichung (2.106) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \text{Sp} [\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^\nu] \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) \\
& = \frac{1}{\Lambda^2} \left\{ -\text{Sp} [\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \Lambda^{e'}(\mathbf{p})] \right. \\
& \quad \left. + \text{Sp} [\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^i \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^i] \right\}. \quad (2.112)
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der folgenden Projektoren erhält man

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \Lambda^{\pm e'}(\mathbf{p}) \\
& = \frac{1}{8} \left(1 \pm e' \gamma_0 \gamma \cdot \hat{\mathbf{p}} + e \gamma_0 \gamma \cdot \hat{\mathbf{k}} \mp e e' \gamma \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \gamma \cdot \hat{\mathbf{p}} \right. \\
& \quad \left. + e \gamma_5 \pm c e' \gamma_5 \gamma_0 \gamma \cdot \hat{\mathbf{p}} + c e \gamma_5 \gamma_0 \gamma \cdot \hat{\mathbf{k}} \mp c e e' \gamma_5 \gamma \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \gamma \cdot \hat{\mathbf{p}} \right). \quad (2.113)
\end{aligned}$$

Mit der Beziehung

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= -\gamma^i \gamma^j \hat{k}^i \hat{p}^j \\
&= -\frac{1}{2} (\{\gamma^i, \gamma^j\} + [\gamma^i, \gamma^j]) \hat{k}^i \hat{p}^j \\
&= \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{2} [\gamma^i, \gamma^j] \hat{k}^i \hat{p}^j
\end{aligned} \tag{2.114}$$

berechnet man nun die Spur aus dem Produkt dieser Projektoren,

$$\text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \Lambda^{\pm e'}(\mathbf{p}) \right] = \frac{1 \pm ee' \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2}. \tag{2.115}$$

Hiermit wäre die erste Spur gelöst. Nun zur Berechnung der zweiten,

$$\begin{aligned}
&\text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^i \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^i \right] \\
&= \text{Sp} \left[\frac{1}{2} \mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) (\gamma^i - e' \gamma^i \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \gamma^i \right] \\
&= \text{Sp} \left[\frac{1}{2} \mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) (\gamma^i + e' \gamma_0 \gamma^i \boldsymbol{\gamma}^j \hat{p}^j) \gamma^i \right].
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Mit der Relation (A.12) schreibt man dies um zu

$$\begin{aligned}
&\text{Sp} \left[\frac{1}{2} \mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) (\gamma^i + e' \gamma_0 \{-\gamma^j \gamma^i - 2\delta_{ij}\} \hat{p}^j) \gamma^i \right] \\
&= \text{Sp} \left[\frac{1}{2} \mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) (\gamma^i \gamma^i - e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \gamma^i \gamma^i - 2e' \gamma_0 \delta_{ij} \hat{p}^j \gamma^i) \right].
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Summiert man über alle i , dann erhält man

$$\begin{aligned}
&\text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \left(-3\Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) - e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right) \right] \\
&= -3 \text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \right] \\
&\quad - \text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right].
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Die erste dieser beiden Spuren ist schon durch die Gleichung (2.115) ermittelt worden. Die zweite Spur berechnet man mit der Beziehung (2.114) zu

$$\begin{aligned}
&\text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right] \\
&= \text{Sp} \left[\frac{1}{4} (1 + c\gamma_5) \left(1 + e\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right] \\
&= \text{Sp} \left[\frac{1}{4} \left(1 + e\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} + c\gamma_5 + ce\gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \right) e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right] \\
&= \text{Sp} \left[\frac{1}{4} \left(e' \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - ee' \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + ce' \gamma_5 \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} - ce'e' \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \right) \right] \\
&= ee' \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Dadurch ergibt sich

$$\text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^i \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^i \right] = -\frac{3 - ee' \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2}. \tag{2.120}$$

Somit ist die Diracspur gegeben durch

$$\text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^\nu \right] \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) = -\frac{2}{\Lambda^2}. \tag{2.121}$$

Deswegen ist die logarithmierte Zustandssumme

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{Z} = & \frac{g^2}{\Lambda^2} \frac{T}{V} \sum_{k,p} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_{c,e,e'} \\
& \left\{ \frac{[\phi_c^e]_{ij}^{fg}]^\dagger(k) [\phi_c^{e'}]_{ij}^{gf}(p)}{2 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^g - \mu_j^f}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^g + \mu_j^f}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{gf} \right) \right]^2 \right\}} \right. \\
& \left. - \frac{[\phi_c^e]_{ij}^{fg}]^\dagger(k) [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}(p)}{6 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^g - \mu_i^f}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^g + \mu_i^f}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^g - \mu_j^f}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^g + \mu_j^f}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right\} \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_k \sum_{c,e} \ln \left(\frac{\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2}{T^2} \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_k \sum_{c,e} \ln \left(\frac{k_0^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\mu_i^f, 0 \right) \right]^2}{T^2} \right). \tag{2.122}
\end{aligned}$$

2.2.3 Die Gapgleichung

Die Gapgleichung in Mean-Field-Approximation wurde bereits durch die Formel (2.51) definiert. Man benötigt sie, um konkrete Werte für die $[\phi_c^e]_{ij}^{fg}$ zu erhalten. Dazu muß die Gapgleichung zunächst fouriertransformiert werden.

2.2.4 Die Fouriertransformation der Gapgleichung

Mit den Relationen (2.73), (2.74), $i \neq j$ und $f \neq g$ ermittelt man

$$\begin{aligned}
\Phi^+(x, y) = & g^2 \frac{T^2}{V^2} \sum_{k,p} \sum_{a,b} \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{G}_0^-(k) \Phi^+(k) \mathcal{G}^+(k) \Gamma_b^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(p) \\
& \times e^{-ik_\mu(x^\mu - y^\mu)} e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}. \tag{2.123}
\end{aligned}$$

Wegen translationaler Invarianz gilt

$$\Phi^+(x, y) = \Phi^+(x - y) = \Phi^+(z). \tag{2.124}$$

Mit der Fouriertransformation des Gaps,

$$\Phi^+(q) = \int_z e^{iq_\mu z^\mu} \Phi^+(z), \tag{2.125}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\Phi^+(q) &= g^2 \frac{T^2}{V^2} \sum_{k,p} \sum_{a,b} \int_z e^{i(q_\mu - k_\mu - p_\mu)z^\mu} \\
&\quad \times \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{G}_0^-(k) \Phi^+(k) \mathcal{G}^+(k) \Gamma_b^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(p) \\
&= g^2 \frac{T^2}{V^2} \sum_{k,p} \sum_{a,b} \frac{V}{T} \delta_{p,q-k}^{(4)} \\
&\quad \times \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{G}_0^-(k) \Phi^+(k) \mathcal{G}^+(k) \Gamma_b^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(p) \\
&= g^2 \frac{T}{V} \sum_k \sum_{a,b} \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{G}_0^-(k) \Phi^+(k) \mathcal{G}^+(k) \Gamma_b^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q-k) \\
&= -g^2 \frac{T}{V} \sum_k \sum_{a,b} \bar{\Gamma}_a^\mu \mathcal{S}_{21}(k) \Gamma_b^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(q-k). \tag{2.126}
\end{aligned}$$

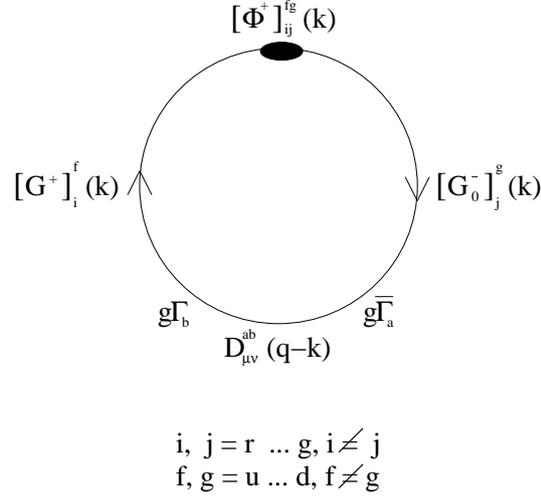


Abbildung 2.4: Die rechte Seite der Gapgleichung als Feynmandiagramm.

2.2.5 Die Color-Flavor-Dirac-Struktur der Gapgleichung

Zuerst führt man die Summe über a und b aus. Für den Gap ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
[\Phi_q^+]_{ij}^{fg} &= g^2 \frac{T}{V} \sum_k \left[-\frac{1}{2} \gamma^\mu [G_0^-]_j^f(k) [\Phi_k^+]_{ji}^{fg} [G^+]_i^g(k) \gamma^\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \gamma^\mu [G_0^-]_i^f(k) [\Phi_k^+]_{ij}^{fg} [G^+]_j^g(k) \gamma^\nu \right] \mathcal{D}_{\mu\nu}(q-k) \\
&= g^2 \frac{T}{V} \sum_k \left[-\frac{1}{2} \gamma^\mu \gamma_0 [\Phi_k^+]_{ji}^{fg} \gamma_0 [G_0^-]_j^f(k) [G^+]_i^g(k) \gamma^\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \gamma^\mu \gamma_0 [\Phi_k^+]_{ij}^{fg} \gamma_0 [G_0^-]_i^f(k) [G^+]_j^g(k) \gamma^\nu \right] \mathcal{D}_{\mu\nu}(q-k). \tag{2.127}
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung soll später die Diracspur ausgeführt werden. Zuvor wird sie deswegen in Projektorschreibweise umgeformt,

$$\begin{aligned}
[\Phi_q^+]_{ij}^{fg} &= g^2 \frac{T}{V} \sum_k \sum_{c,e} \left\{ - \frac{[\phi_c^e]_{ji}^{fg}(k)}{2 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^e]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[\phi_c^e]_{ij}^{fg}(k)}{6 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right\} \\
&\quad \times \gamma^\mu \mathcal{P}_{-c}^{-e}(\mathbf{k}) \gamma^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}(q-k). \tag{2.128}
\end{aligned}$$

Um die Gaps $[\phi_c^e]_{ij}^{fg}$ aus

$$[\Phi_q^+]_{ij}^{fg} = \sum_{c,e} [\phi_c^e]_{ij}^{fg}(q) \mathcal{P}_c^e(\mathbf{q}) \tag{2.129}$$

zu erhalten, führt man folgende Umformung durch

$$\begin{aligned}
&\sum_{c,e} [\phi_c^e]_{ij}^{fg}(q) \mathcal{P}_{c'}^{e'}(\mathbf{q}) \mathcal{P}_c^e(\mathbf{q}) \\
&= \sum_{c,e} [\phi_c^e]_{ij}^{fg}(q) \delta_{c,c'} \delta_{e,e'} \mathcal{P}_{c'}^{e'}(\mathbf{q}) \\
&= [\phi_{c'}^{e'}]_{ij}^{fg}(q) \mathcal{P}_{c'}^{e'}(\mathbf{q}). \tag{2.130}
\end{aligned}$$

Benutzt man dies in der vorhergehenden Gleichung, dann ergibt das

$$\begin{aligned}
&[\phi_{c'}^{e'}]_{ij}^{fg}(q) \mathcal{P}_{c'}^{e'}(\mathbf{q}) \\
&= g^2 \frac{T}{V} \sum_k \sum_{c,e} \left\{ - \frac{[\phi_c^e]_{ji}^{fg}(k)}{2 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^e]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[\phi_c^e]_{ij}^{fg}(k)}{6 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right\} \\
&\quad \times \mathcal{P}_{c'}^{e'}(\mathbf{q}) \gamma^\mu \mathcal{P}_{-c}^{-e}(\mathbf{k}) \gamma^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}(q-k). \tag{2.131}
\end{aligned}$$

Umbenennungen führen dazu, daß man

$$\begin{aligned}
& [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}(k) \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \\
&= g^2 \frac{T}{V} \sum_p \sum_{c', e'} \left\{ - \frac{[\phi_{c'}^{e'}]_{ji}^{fg}(p)}{2 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_{c'}^{e'}]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[\phi_{c'}^{e'}]_{ij}^{fg}(p)}{6 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_{c'}^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right\} \\
&\quad \times \mathcal{P}_c^e(\mathbf{k}) \gamma^\mu \mathcal{P}_{-c'}^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p) \tag{2.132}
\end{aligned}$$

erhält. Die Summe über c' bricht zusammen, wenn man die beiden Chiralitätsprojektoren unter Verwendung von $\mathcal{P}_c \gamma^\mu = \gamma^\mu \mathcal{P}_{-c}$ miteinander multipliziert,

$$\begin{aligned}
[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}(k) &= g^2 \frac{T}{V} \sum_p \sum_{e'} \left\{ - \frac{[\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg}(p)}{2 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}(p)}{6 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right\} \\
&\quad \times \text{Sp} \left[\mathcal{P}_c \Lambda^e(\mathbf{k}) \gamma^\mu \Lambda^{-e'}(\mathbf{p}) \gamma^\nu \right] \mathcal{D}_{\mu\nu}(k-p). \tag{2.133}
\end{aligned}$$

Mit der Lösung der Diracspur (2.121) erhält man die Gapgleichung

$$\begin{aligned}
[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}(k) &= - \frac{2g^2 T}{\Lambda^2 V} \sum_p \sum_{e'} \left\{ - \frac{[\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg}(p)}{2 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}(p)}{6 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}} \right\}. \tag{2.134}
\end{aligned}$$

Wie man sieht, sind die Gaps für die Quasiteilchen genau so groß wie die für die Quasiantiteilchen, da die rechte Seite der Gapgleichung (2.134) unabhängig von e ist. Außerdem ist der Gap unabhängig von k , weil die rechte Seite auch nicht mehr von k abhängt.

2.2.6 Summation über die Matsubara-Frequenzen

In diesem Abschnitt werden die logarithmierte Zustandssumme und die Gapgleichung weiter ausgewertet, indem man in die Resultate (2.122) und (2.134) die fermionischen Matsubara-Frequenzen ω_m bzw. ω_n einsetzt. Danach wird über alle m

bzw. n summiert, indem man

$$T \sum_n g(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint dk_0 \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right) g(k_0) \quad (2.135)$$

benutzt, worin

$$g(k_0) = \frac{T}{T^2 x^2 - \left(k_0 + \frac{\delta\mu}{2}\right)^2} \quad (2.136)$$

ist. $\delta\mu$ steht für die Differenz zweier quarkchemischer Potentiale für Quarks mit unterschiedlicher Farbe und Flavor. Man integriert über die fermionischen Pole auf der imaginären Achse. Nun deformiert man die Integrationskonturen entsprechend Abbildung 2.5.

$$\begin{aligned} T \sum_n g(k_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 g(k_0) \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{+i\infty-\epsilon}^{-i\infty-\epsilon} dk_0 g(k_0) \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Ersetzt man nun im zweiten Summand k_0 durch $-k_0$, dann ermittelt man

$$\begin{aligned} T \sum_n g(k_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 g(k_0) \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 g(-k_0) \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{T}{[Tx + (k_0 + \frac{\delta\mu}{2})][Tx - (k_0 + \frac{\delta\mu}{2})]} \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 \frac{T}{[Tx + (-k_0 + \frac{\delta\mu}{2})][Tx - (-k_0 + \frac{\delta\mu}{2})]} \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{k_0}{2T}\right). \end{aligned} \quad (2.138)$$

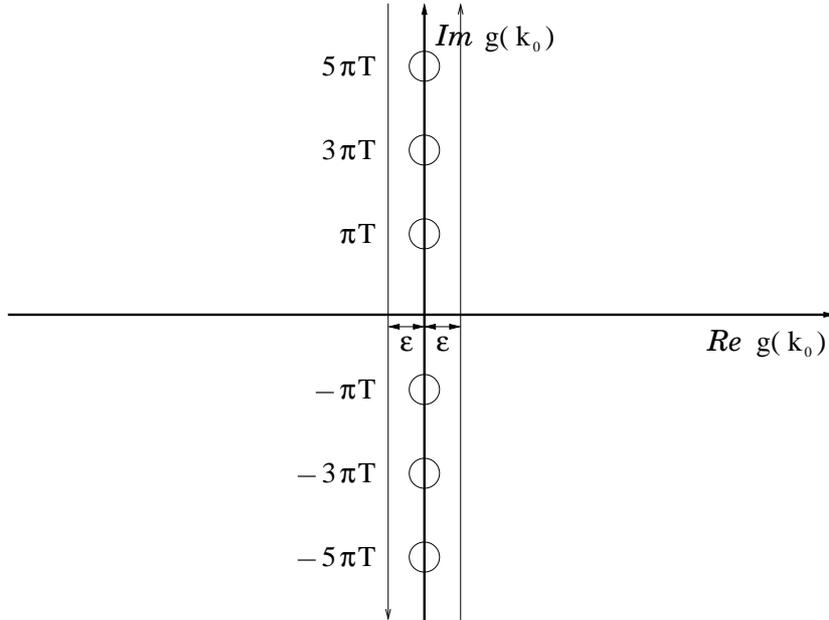


Abbildung 2.5: Integration über die fermionischen Pole auf der imaginären Achse.

Durch die Abbildung 2.6 erhält man nun für das Kurvenintegral mit Hilfe des

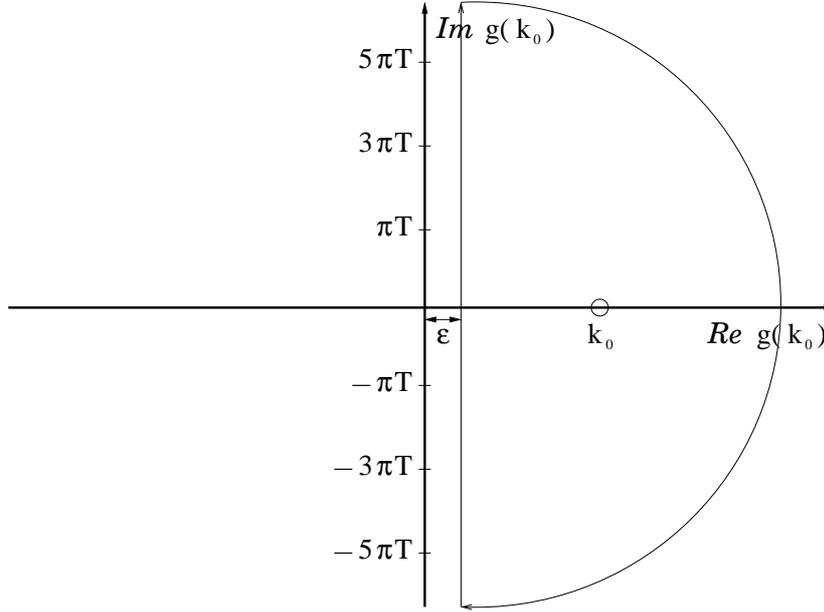


Abbildung 2.6: Anwendung des Residuensatzes

Residuensatzes für Pole erster Ordnung

$$\frac{1}{2\pi i} \oint g(z) = \sum_i \lim_{z \rightarrow z_i} [g(z)(z - z_i)] = \sum_i \text{Res } g(z) \Big|_{z=z_i}. \quad (2.139)$$

Es ergeben sich insgesamt vier Pole bzw. Residuen. Zu beachten ist hierbei noch, daß das Kurvenintegral im Uhrzeigersinn geschlossen wird. Deswegen müssen alle Residuen noch mit einem Minuszeichen versehen werden. Desweiteren wird die Punktsymmetrie zum Ursprung der Tangenshyperbolicusfunktion ausgenutzt. Außerdem müssen in jedem Residuum eine Heavisidefunktion θ auftreten, die dafür sorgt, daß der Pol innerhalb des Kurvenintegrals liegt.

Als Resultat ergibt sich

$$T \sum_n g(k_0) = \frac{1}{4x} \left[\tanh \left(\frac{x + \frac{\delta\mu}{2T}}{2} \right) + \tanh \left(\frac{x - \frac{\delta\mu}{2T}}{2} \right) \right]. \quad (2.140)$$

Für den dritten Summand in der Gleichung (2.122) ergibt sich nach Einsetzen der fermionischen Matsubarafrequenzen

$$\omega_n = (2n + 1) \pi T = ik_0 \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_k \sum_{c,e} \ln \left[- (2n + 1)^2 \pi^2 - \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{T} \right]^2 \right] \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_k \sum_{c,e} \left\{ \int_1^{\left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{T} \right]^2} \frac{dx^2}{- [x^2 + (2n + 1)^2 \pi^2]} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left[-1 - (2n + 1)^2 \pi^2 \right] \right\}. \quad (2.142) \end{aligned}$$

Nach der Summation über alle n durch die Relation (2.140) mit $\delta\mu/2 = 0$,

$$1 - 2n_F(z) = \tanh\left(\frac{z}{2}\right), \quad (2.143)$$

und der Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion

$$n_F(z) = \frac{1}{e^z + 1}, \quad (2.144)$$

ist der dritte Summand bis auf irrelevante Konstanten

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_3 &= \frac{1}{2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_{\mathbf{k}} \sum_{c,e} \int_1^{[\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)/T]^2} dx^2 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^x + 1} \right) \\ &= \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_{\mathbf{k}} \sum_{c,e} \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{2T} + \ln \left[1 + e^{-\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{T}} \right] \right) \\ &= V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \sum_{c,e} \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{2T} + \ln \left[1 + e^{-\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{T}} \right] \right). \end{aligned} \quad (2.145)$$

Den ersten Term in dieser Gleichung kann man umschreiben,

$$\begin{aligned} \sum_e \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{2T} &= \sum_e \frac{|\mathbf{k}| - e\mu_i^f}{2T} \\ &= \sum_e \left[\theta(|\mathbf{k}| - e\mu_i^f) \frac{|\mathbf{k}| - e\mu_i^f}{2T} + \theta(e\mu_i^f - |\mathbf{k}|) \frac{e\mu_i^f - |\mathbf{k}|}{2T} \right]. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Weil $|\mathbf{k}| > 0$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_e \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\mu_i^f, 0)}{2T} \\ &= \frac{|\mathbf{k}| + \mu_i^f}{2T} \left[\theta(|\mathbf{k}| + \mu_i^f) - \theta(-|\mathbf{k}| - \mu_i^f) \right] \\ &+ \frac{|\mathbf{k}| - \mu_i^f}{2T} \left[\theta(|\mathbf{k}| - \mu_i^f) - \theta(-|\mathbf{k}| + \mu_i^f) \right] \\ &= \frac{\mu_i^f}{T} \theta(\mu_i^f - |\mathbf{k}|) - \frac{\mu_i^f}{T} \theta(-\mu_i^f - |\mathbf{k}|) + \frac{|\mathbf{k}|}{T} \theta(|\mathbf{k}| - |\mu_i^f|). \end{aligned} \quad (2.147)$$

Summiert man nun die Logarithmen in der Gleichung (2.145) über e , dann erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_e \ln \left[1 + e^{-\frac{|\mathbf{k}| - e\mu_i^f}{T}} \right] \\ &= \ln \left(1 + e^{-\frac{|\mathbf{k}| - \mu_i^f}{T}} \right) \theta(|\mathbf{k}| - \mu_i^f) + \ln \left(1 + e^{-\frac{\mu_i^f - |\mathbf{k}|}{T}} \right) \theta(\mu_i^f - |\mathbf{k}|) \\ &+ \ln \left(1 + e^{-\frac{|\mathbf{k}| + \mu_i^f}{T}} \right) \theta(|\mathbf{k}| + \mu_i^f) + \ln \left(1 + e^{-\frac{-\mu_i^f - |\mathbf{k}|}{T}} \right) \theta(-\mu_i^f - |\mathbf{k}|). \end{aligned} \quad (2.148)$$

Mit den Relationen

$$\begin{aligned}\ln\left(1+e^{-\frac{\mu_i^f-|\mathbf{k}|}{T}}\right) &= \ln\left[e^{-\frac{\mu_i^f-|\mathbf{k}|}{T}}\left(e^{\frac{\mu_i^f-|\mathbf{k}|}{T}}+1\right)\right] \\ &= \frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T} + \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}}\right),\end{aligned}\quad (2.149)$$

$$\begin{aligned}\ln\left(1+e^{-\frac{-\mu_i^f-|\mathbf{k}|}{T}}\right) &= \ln\left[e^{-\frac{-\mu_i^f-|\mathbf{k}|}{T}}\left(e^{\frac{-\mu_i^f-|\mathbf{k}|}{T}}+1\right)\right] \\ &= \frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T} + \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}}\right),\end{aligned}\quad (2.150)$$

läßt sich die vorhergehende Gleichung umschreiben zu

$$\begin{aligned}&\sum_e \ln\left[1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-e\mu_i^f}{T}}\right] \\ &= \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}}\right)\theta\left(|\mathbf{k}|-\mu_i^f\right) \\ &+ \left[\ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}}\right) + \frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}\right]\theta\left(\mu_i^f-|\mathbf{k}|\right) \\ &+ \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}}\right)\theta\left(|\mathbf{k}|+\mu_i^f\right) \\ &+ \left[\ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}}\right) + \frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}\right]\theta\left(-\mu_i^f-|\mathbf{k}|\right).\end{aligned}\quad (2.151)$$

Addiert man dies zur Gleichung (2.147), dann ergibt

$$\begin{aligned}&\sum_e \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e\left(\mu_i^f,0\right)}{2T} + \ln\left[1+e^{-\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e\left(\mu_i^f,0\right)}{T}}\right]\right) \\ &= \frac{|\mathbf{k}|}{T} + \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}}\right) + \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}}\right).\end{aligned}\quad (2.152)$$

Durch Abziehen der Nullpunktenergie $|\mathbf{k}|/T$ und Summation über c schreibt sich die Gleichung (2.145) nun zu

$$\ln \mathcal{Z}_3 = 2V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \left[\ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}}\right) + \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}}\right) \right]. \quad (2.153)$$

Nun integriert man über die Winkel im Impulsraum,

$$\ln \mathcal{Z}_3 = \frac{V}{\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \left[\ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|-\mu_i^f}{T}}\right) + \ln\left(1+e^{-\frac{|\mathbf{k}|+\mu_i^f}{T}}\right) \right]. \quad (2.154)$$

Nach partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_3 = & \frac{V}{3\pi^2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \left\{ \ln \left(1 + e^{-\frac{|\mathbf{k}| - \mu_i^f}{T}} \right) \cdot |\mathbf{k}|^3 \Big|_0^\infty \right. \\ & + \frac{1}{T} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| n_F \left(\frac{|\mathbf{k}| - \mu_i^f}{T} \right) \cdot |\mathbf{k}|^3 \\ & + \ln \left(1 + e^{-\frac{|\mathbf{k}| + \mu_i^f}{T}} \right) \cdot |\mathbf{k}|^3 \Big|_0^\infty \\ & \left. + \frac{1}{T} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| n_F \left(\frac{|\mathbf{k}| + \mu_i^f}{T} \right) \cdot |\mathbf{k}|^3 \right\}. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Die Terme mit den Logarithmen fallen nach Einsetzen der Integrationsgrenzen weg. Es gilt

$$\lim_{T \rightarrow 0} n_F \left(\frac{x}{T} \right) = \theta(-x). \quad (2.156)$$

Deswegen ist für $T \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \ln \mathcal{Z}_3 = & \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{T} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^3 \left\{ \theta(\mu_i^f - |\mathbf{k}|) + \theta(-|\mathbf{k}| - \mu_i^f) \right\} \\ = & \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{T} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^3 \theta(|\mu_i^f| - |\mathbf{k}|). \end{aligned} \quad (2.157)$$

Die Heavisidefunktion ändert die obere Integralgrenze, da $|\mathbf{k}| < |\mu_i^f|$ sein muß, um zum Integral beizutragen. Dadurch errechnet man für den dritten Summand

$$\ln \mathcal{Z}_3 = \frac{1}{3\pi^2} \frac{V}{T} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d \int_0^{|\mu_i^f|} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^3 = \frac{1}{12\pi^2} \frac{V}{T} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d [\mu_i^f]^4. \quad (2.158)$$

Das eben beschriebene Integrationsverfahren zur Summation über alle n verwendet man auch bei der Gapgleichung (2.134). Nur ist hier der Pol verschoben,

$$\begin{aligned} [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} = & \frac{2g^2}{\Lambda^2} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{e'} \\ & \left\{ \frac{[\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \left[\tanh \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right) - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2}}{2T} \right) + \tanh \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right) + \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2}}{2T} \right)}{8\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right)} \right. \\ & \left. + \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \left[\tanh \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{2T} \right) + \tanh \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) + \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{2T} \right)}{24\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Für $T \rightarrow 0$ ergibt sich

$$[\phi_c^e]_{ij}^{fg} = \frac{g^2}{\Lambda^2} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{e'} \left\{ - \frac{[\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \theta \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right) - \left| \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right| \right]}{2\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right)} + \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \theta \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) - \left| \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right| \right]}{6\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right)} \right\}. \quad (2.160)$$

In Integralschreibweise mit dem Cutoff κ ermittelt man

$$[\phi_c^e]_{ij}^{fg} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{g^2}{\Lambda^2} \sum_{e'} \times \left\{ - \int_0^{[p_-^{e'}]_{ji}^{fg}} \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg}}{2\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right)} - \int_{[p_+^{e'}]_{ji}^{fg}}^{\kappa} \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg}}{2\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right)} + \int_0^{[p_-^{e'}]_{ij}^{fg}} \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{6\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right)} + \int_{[p_+^{e'}]_{ij}^{fg}}^{\kappa} \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{6\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right)} \right\}. \quad (2.161)$$

Hierin ist

$$[p_{\pm}^e]_{ij}^{fg} = \Theta \left(e \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \pm \sqrt{\Theta \left(d_{ij}^{fg} \right)} \right) \quad (2.162)$$

mit

$$d_{ij}^{fg} = \left(\frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - [[\phi_c^e]_{ij}^{fg}]^2 \quad (2.163)$$

und $\Theta(x) = x \cdot \theta(x)$.

Den ersten Summanden der logarithmierten Zustandssumme (2.122) kann man mit Hilfe der Gapgleichung (2.134) ausdrücken. Die in ihm enthaltenen Terme lassen sich durch $[\phi_c^+]_{ij}^{fg} + 3[\phi_c^+]_{ji}^{fg}$ bis auf Vorfaktoren ersetzen, denn

$$[\phi_c^+]_{ij}^{fg} + 3[\phi_c^+]_{ji}^{fg} = \frac{8}{3} \frac{g^2}{\Lambda^2} \frac{T}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{e'} \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{\left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2}. \quad (2.164)$$

Durch Einsetzen und Vereinfachen ergibt sich

$$\ln \mathcal{Z}_1 = \frac{3}{8} \frac{\Lambda^2}{g^2} \frac{V}{T} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \left([[\phi^+]_{ij}^{fg}]^2 + 3[\phi^+]_{ij}^{fg} [\phi^+]_{ji}^{fg} \right). \quad (2.165)$$

Der zweite Summand der logarithmierten Zustandssumme (2.122) wird aufge-

spalten in

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_k \sum_{c,e} \left\{ \ln \left(\frac{\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right) + \epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right)}{T} \right) \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{\left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right) - \epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right)}{T} \right) \right\}. \quad (2.166)$$

Dies läßt sich wieder, bis auf irrelevante Konstanten, mit Integralen ausdrücken.

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_k \sum_{c,e} \left\{ \int_1^{[b^-]_{ij}^{fg}} \frac{dx}{\frac{k_0}{T} + x} - \int_1^{[b^+]_{ij}^{fg}} \frac{dx}{\frac{k_0}{T} - x} \right\}. \quad (2.167)$$

Hierin ist

$$[b^\pm]_{ij}^{fg} = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \pm \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T}. \quad (2.168)$$

Jetzt summiert man wieder über alle n und benutzt dafür die Gleichungen

$$T \sum_n g^\pm(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint dk_0 \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{k_0}{2T} \right) g^\pm(k_0), \quad (2.169)$$

mit

$$g^\pm(k_0) = \frac{e^{-\eta x}}{k_0 \pm Tx}. \quad (2.170)$$

Den Faktor $e^{-\eta x}$ benötigt man als Dämpfungsfaktor, damit die Summe über alle n nicht divergiert. Am Ende der Rechnung setzt man $\eta = 0$. Man erhält eine ähnliche Formel wie zuvor,

$$T \sum_n g^\pm(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-i\infty+\epsilon}^{+i\infty+\epsilon} dk_0 [g^\pm(k_0) + g^\pm(-k_0)] \left[\frac{1}{2} - n_F \left(\frac{k_0}{T} \right) \right]. \quad (2.171)$$

Nun wendet man wieder den Residuensatz (2.139) an und bedenkt, daß nur die Pole auf der positiven reellen Achse einen Beitrag liefern. Zudem ist auch die Integrationsrichtung zu beachten. Man integriert hier im Uhrzeigersinn. Der Residuensatz gilt aber für Kurvenintegrale gegen den Uhrzeigersinn. Es ist demnach ein Minuszeichen hinzuzufügen. Für $\eta = 0$ erhält man

$$T \sum_n g^\pm(k_0) = \pm \left[\frac{1}{2} - n_F(x) \right]. \quad (2.172)$$

Die Summation über alle n ergibt

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_{\mathbf{k}} \sum_{c,e} \left\{ \int_1^{[b^-]_{ij}^{fg}} dx \left[\frac{1}{2} - n_F(x) \right] \right. \\ \left. + \int_1^{[b^+]_{ij}^{fg}} dx \left[\frac{1}{2} - n_F(x) \right] \right\}. \quad (2.173)$$

Nach Ausführen der Integrationen und Summation über die Chiralitäten $c = r, \ell$ errechnet man bis auf irrelevante Konstanten

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_{\mathbf{k}} \sum_e \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right)}{T} \right. \\ \left. + \ln \left[1 + \exp \left\{ - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right\} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[1 + \exp \left\{ - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) + \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right\} \right] \right) . \quad (2.174)$$

Die Summe über \mathbf{k} schreibt man nun in ein Integral über den Impulsraum um. Dann führt man eine partielle Integration durch und erhält

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{V}{6\pi^2 T} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \sum_e \left\{ 3 |\mathbf{k}|^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) \right. \\ \left. + \frac{|\mathbf{k}|^3 \left(|\mathbf{k}| - e^{\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}} \right)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right)} \left[n_F \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + n_F \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) + \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right) \right] \right\} . \quad (2.175)$$

Läßt man $T \rightarrow 0$ gehen und führt einen Cutoff κ ein, dann ergibt das

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{V}{6\pi^2 T} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \int_0^\kappa d|\mathbf{k}| \sum_e \left\{ 3 |\mathbf{k}|^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) \right. \\ \left. + \frac{|\mathbf{k}|^3 \left(|\mathbf{k}| - e^{\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}} \right)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right)} \theta \left[\left| \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right| - \epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) \right] \right\} . \quad (2.176)$$

Wegen der Heavisidefunktion ändern sich die Integralgrenzen, so daß

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{V}{6\pi^2 T} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_e \left\{ 3 \int_0^\kappa d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) \right. \\ \left. + \int_{[p^-]_{ij}^{fg}}^{[p^+]_{ij}^{fg}} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^3 \left(|\mathbf{k}| - e^{\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}} \right)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right)} \right\} \quad (2.177)$$

wird, wobei diese wieder durch die Gleichung (2.162) gegeben sind. Durch Abziehen der Nullpunktsenergie ermittelt man

$$\ln \mathcal{Z}_2 = \frac{V}{6\pi^2 T} \sum_{\substack{g \\ i,j=r \\ i \neq j}} \sum_{\substack{d \\ f,g=u \\ f \neq g}} \sum_e \left\{ 3 \int_0^\kappa d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - |\mathbf{k}| \right] \right. \\ \left. + \int_{[p_-]_{ij}^{fg}}^{[p_+]_{ij}^{fg}} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^3 \left(|\mathbf{k}| - e^{\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}} \right)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right)} \right\}. \quad (2.178)$$

2.2.7 Strange Quarks

Da die strange Quarks in der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase ungepaart bleiben, ist es nicht schwer, auch die freien, massiven strange Quarks in die logarithmierte Zustandssumme miteinzubauen. Für freie massive strange Quarks lautet sie

$$\ln \mathcal{Z}_s = 2V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}^s - \mu_i^f}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}^s + \mu_i^f}{T}} \right) \right]. \quad (2.179)$$

Diese Beziehung läßt sich z. B. aus der Gleichung (2.153) leicht ableiten. Aber man muß berücksichtigen, daß die Massen der strange Quarks nicht vernachlässigt werden können. Deswegen werden alle Impulse $|\mathbf{k}|$ in den Exponentialfunktionen zur relativistischen Gesamtenergie $E_{\mathbf{k}}^s = \sqrt{m_s^2 + |\mathbf{k}|^2}$. Hierin ist m_s die Strangequarkmasse.

Integriert man über die Winkel im Impulsraum, dann ergibt sich

$$\ln \mathcal{Z}_s = \frac{V}{\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}^s - \mu_i^f}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}^s + \mu_i^f}{T}} \right) \right]. \quad (2.180)$$

Durch partielle Integration ermittelt man

$$\ln \mathcal{Z}_s = \frac{V}{\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \left\{ \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}^s - \mu_i^f}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{E_{\mathbf{k}}^s + \mu_i^f}{T}} \right) \right] \cdot \frac{1}{3} |\mathbf{k}|^3 \right|_{|\mathbf{k}=0}^\infty \\ + \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|}{E_{\mathbf{k}} T} \left[n_F \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^s - \mu_i^f}{T} \right) + n_F \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^s + \mu_i^f}{T} \right) \right] \cdot \frac{1}{3} |\mathbf{k}|^3 \right\}. \quad (2.181)$$

Setzt man die Grenzen in den ersten Teil dieser Gleichung ein, dann sieht man, daß dieser verschwindet. Für $T \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\ln \mathcal{Z}_s = \frac{V}{3\pi^2 T} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^4}{E_{\mathbf{k}}} \left[\theta \left(-E_{\mathbf{k}}^s + \mu_i^f \right) + \theta \left(-E_{\mathbf{k}}^s - \mu_i^f \right) \right] \\ = \frac{V}{3\pi^2 T} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^4}{E_{\mathbf{k}}} \theta \left(|\mu_i^f| - E_{\mathbf{k}}^s \right). \quad (2.182)$$

Durch die Heavisidefunktion ändern sich die Integralgrenzen. Deswegen ist

$$\ln \mathcal{Z}_s = \frac{V}{3\pi^2 T} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \int_0^{[k_F]_i^f} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^4}{E_{\mathbf{k}}^s} \quad (2.183)$$

mit dem Fermiimpuls für strange Quarks

$$[k_F]_i^s = \sqrt{\Theta \left([\mu_i^s]^2 - m_s^2 \right)}. \quad (2.184)$$

2.2.8 Ladungsneutralität durch Elektronen

Falls die mit der Zustandsgleichung errechnete Quarkmaterie positiv geladen sein sollte, könnte man diese mit Elektronen neutralisieren.

Die Berechnung der logarithmierten Zustandssumme für Elektronen ist analog zu der für die strange Quarks. Die geringe Elektronenmasse wird vernachlässigt. Das Ergebnis lautet dann

$$\ln \mathcal{Z}_e = \frac{V}{3\pi^2 T} \int_0^{|\mu_e|} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^3 = \frac{V}{12\pi^2 T} \mu_e^4. \quad (2.185)$$

Die aus der Gleichung (2.2) bestimmte logarithmierte Zustandssumme für 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie ist daher

$$\ln \mathcal{Z} = \ln \mathcal{Z}_1 + \ln \mathcal{Z}_2 + \ln \mathcal{Z}_3. \quad (2.186)$$

Hierin rühren der erste Summand von der potentiellen Energie der Quasiteilchenanregungen, der zweite Summand von der kinetischen Energie der Quasiteilchenanregungen und der dritte Summand von der kinetischen Energie der ungegappten blauen up und down Quarks her.

Nimmt man noch die freien strange Quarks und die Elektronen hinzu, dann ergibt sich für die aus (2.1) hergeleitete logarithmierte Zustandssumme

$$\ln \mathfrak{Z} = \ln \mathcal{Z} + \ln \mathcal{Z}_s + \ln \mathcal{Z}_e. \quad (2.187)$$

2.3 Die Zustandsgleichung

Für die Berechnung der Quarksterneigenschaften, wie z. B. deren Massen und Radien, benötigt man die Zustandsgleichung. Den Druck erhält man mit

$$p = \frac{T}{V} \ln \mathfrak{Z}. \quad (2.188)$$

Die Teilchenzahldichte einer bestimmten Quarksorte bzw. der Elektronen bestimmt man mit

$$n_i^f = \left. \frac{\partial p_i^f}{\partial \mu_i^f} \right|_T, \quad (2.189)$$

$$n_e = \left. \frac{\partial p_e}{\partial \mu_e} \right|_T. \quad (2.190)$$

Dadurch ist die Gesamtteilchenzahldichte

$$n = \sum_{i=r}^b \sum_{f=u}^s n_i^f + n_e. \quad (2.191)$$

Die Energiedichte ist dann für $T = 0$ gegeben durch

$$\varepsilon = \sum_{i=r}^b \sum_{f=u}^s \mu_i^f n_i^f + \mu_e n_e - p. \quad (2.192)$$

Der Druck für die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie mit freien strange Quarks und Elektronen ist dann

$$\begin{aligned}
p = & \frac{3}{8} \frac{\Lambda^2}{g^2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \left([\phi^+]_{ij}^{fg} \right)^2 + 3 [\phi^+]_{ij}^{fg} [\phi^+]_{ji}^{fg} \Big) \\
& + \frac{1}{6\pi^2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_e \left\{ 3 \int_0^{\kappa} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - |\mathbf{k}| \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \int_{[p_-]_{ij}^{fg}}^{[p_+]_{ij}^{fg}} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^3 \left(|\mathbf{k}| - e \frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2} \right)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right)} \right\} \\
& + \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d [\mu_i^f]^4 \\
& + \frac{1}{3\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \int_0^{[k_F]_i^f} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^4}{E_{\mathbf{k}}^s} \\
& + \frac{1}{12\pi^2} \mu_e^4. \tag{2.193}
\end{aligned}$$

Die chemischen Potentiale jeder Quarksorte sind definiert durch

$$\mu_i^f = \mu - \mu_e Q_{ii}^{ff} + \mu_3 T_{3ii}^{ff} + \mu_8 T_{8ii}^{ff}. \tag{2.194}$$

Hierin ist

$$Q = \text{diag} \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \tag{2.195}$$

der Ladungsoperator, der jedem Quark seine elektrische Ladung zuordnet. T_3 und T_8 sind Generatoren der $SU(3)_c$, die den Farbladungsanteil jeder Quarksorte auf deren chemisches Potential projizieren. Diese muß man, genau wie den Ladungsoperator, auf eine 9×9 -Matrix erweitern, da nun auch die freien strange Quarks miteinbezogen werden und daher mit drei Farben und drei Flavours gerechnet wird,

$$T_3 = \frac{1}{2} \text{diag} (1, 1, 1, -1, -1, -1, 0, 0, 0), \tag{2.196}$$

$$T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{diag} (1, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2). \tag{2.197}$$

μ ohne Indizes ist das quarkchemische Potential.

2.3.1 Farb- und elektrische Neutralität

Vernachlässigt man die farbchemischen Potentiale und die Elektronen, indem man $\mu_e = \mu_3 = \mu_8 = 0$ setzt, dann ist $\mu_i^f = \mu$, was bedeutet, daß alle Quarksorten ein und dasselbe chemische Potential besitzen. Dann wäre die Quarkmaterie sowohl farb-, als auch elektrisch geladen. Man neutralisiert die Quarkmaterie, indem man elektrische Neutralität und Farbladungsneutralität durch das Verschwinden der elektrischen

Ladungsdichte n_Q und den Farbladungsdichten n_3 und n_8 fordert,

$$n_Q = \frac{\partial p}{\partial \mu_e} = 0, \quad (2.198)$$

$$n_3 = \frac{\partial p}{\partial \mu_3} = 0, \quad (2.199)$$

$$n_8 = \frac{\partial p}{\partial \mu_8} = 0. \quad (2.200)$$

Da auch die Gaps, die im Druck enthalten sind, von den farbchemischen und dem elektrischen Potential abhängen, müßte man diese natürlich auch nach letzteren ableiten. Aber wegen der Gapgleichung

$$\partial p / \partial [\phi_c^e]_{ij}^{fg} = 0 \quad (2.201)$$

ist dies nicht nötig, weil

$$\frac{\partial}{\partial \mu_x} p(\mu_x, [\phi_c^e]_{ij}^{fg}(\mu_x)) = \frac{\partial p}{\partial \mu_x} + \frac{\partial p}{\partial [\phi_c^e]_{ij}^{fg}} \frac{\partial [\phi_c^e]_{ij}^{fg}}{\partial \mu_x} = \frac{\partial p}{\partial \mu_x} \quad (2.202)$$

mit $x = 3, 8, e$ ist.

Zuerst wird nach μ_3 abgeleitet. Man bemerkt sofort, daß p_3 , der Druckbeitrag der ungegappten blauen up und down Quarks in der Gleichung (2.193), abgeleitet nach μ_3 , wegfällt, weil bei der Ableitung ein Faktor $T_{3ii}^{ff} = 0$ für $i = b$ entsteht,

$$\frac{\partial p_3}{\partial \mu_3} = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d [\mu_i^f]^3 T_{3ii}^{ff} = 0. \quad (2.203)$$

Der freie Elektronendruck p_e in der Gleichung (2.193) ist nicht von μ_3 abhängig,

$$\frac{\partial p_e}{\partial \mu_3} = 0. \quad (2.204)$$

p_1 , der potentielle Term im Druck, beinhaltet ausschließlich Gaps, so daß

$$\frac{\partial p_1}{\partial \mu_3} = 0 \quad (2.205)$$

wegen der Gapgleichung (2.201) ist. Die Ableitung von p_s , dem Druckbeitrag der freien strange Quarks, nach μ_3 fällt nicht weg und ergibt somit einen Beitrag. Um diesen zu ermitteln, verwendet man am besten die Gleichung (2.180),

$$\frac{\partial p_s}{\partial \mu_3} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s T_{3ii}^{ff} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \left[n_F \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^s - \mu_i^f}{T} \right) - n_F \left(\frac{E_{\mathbf{k}}^s + \mu_i^f}{T} \right) \right]. \quad (2.206)$$

Auch der zweite Summand p_2 , der gegappte kinetische Beitrag, ist von μ_3 abhängig.

Um dessen Ableitung nach μ_3 zu bestimmen, benutzt man am besten die Gleichung

$$p_2 = \frac{T}{2\pi^2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_e \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - |\mathbf{k}|}{T} \right. \\ \left. + \ln \left[1 + \exp \left\{ - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right\} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[1 + \exp \left\{ - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) + \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right\} \right] \right), \quad (2.207)$$

die aus der Formel (2.174) hervorgeht. Man erhält mit $T_{3ii}^{ff} + T_{3jj}^{gg} = 0$ für $i, j = r, g$, $i \neq j$,

$$\frac{\partial p_2}{\partial \mu_3} = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_e (T_{3ii}^{ff} - T_{3jj}^{gg}) \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \\ \times \left[n_F \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right) - n_F \left(\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi^e]_{ij}^{fg} \right) + \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}}{T} \right) \right]. \quad (2.208)$$

Die beiden Beiträge addiert, $\partial p_s / \partial \mu_3 + \partial p_2 / \partial \mu_3$, müssen 0 ergeben wegen der Farbneutralitätsbedingung. Diese kann erfüllt werden, wenn

$$\mu_3 = 0 \quad (2.209)$$

ist. Damit ist nun die erste Farbneutralitätsbedingung erfüllt, denn sowohl der Beitrag von den strange, als auch der von den gepappten Quarks verschwindet, weil die Gleichung (2.194) fortan nicht mehr von μ_3 abhängt,

$$\mu_i^f = \mu - \mu_e Q_{ii}^{ff} + \mu_8 T_{8ii}^{ff}. \quad (2.210)$$

Durch komponentenweises Ausschreiben sieht man, daß

$$\mu_r^u = \mu_g^u, \quad (2.211)$$

$$\mu_r^d = \mu_g^d = \mu_r^s = \mu_g^s, \quad (2.212)$$

$$\mu_b^d = \mu_b^s \quad (2.213)$$

ist. Es gilt demnach

$$\mu_i^f = \mu_j^f \quad (2.214)$$

mit $i, j = r, g$ und $f = u \dots s$. Hierdurch läßt sich die Gapgleichung vereinfachen. Dazu betrachtet man die Gleichung (2.127). Darin treten Propagatoren auf, deren Indizes man wegen der Relation (2.214) verändern darf. Aus $[G_0^-]_j^f(k)$ wird damit ein $[G_0^-]_i^f(k)$ und aus $[G_0^+]_i^g(k)$ ein $[G_0^+]_j^g(k)$. Das hat zur Folge, daß man den

ersten Nenner in der Gleichung (2.128) verändern darf.

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_j^f - \mu_i^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_j^f + \mu_i^g}{2}, [\phi_c^e]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \\ &= 2 \left\{ \left(k_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{k}}^e \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^e]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (2.215)$$

Dadurch lassen sich die beiden Summanden in allen folgenden Berechnungen der Gapgleichung zu einem Bruch zusammenfassen. Die Gapgleichung (2.134) wird dann zu

$$[\phi_c^e]_{ij}^{fg} = -\frac{2g^2}{\Lambda^2} \frac{T}{V} \sum_p \sum_{e'} \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} - 3 [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg}}{6 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2 \right\}}, \quad (2.216)$$

$$[\phi_c^e]_{ji}^{fg} = -\frac{2g^2}{\Lambda^2} \frac{T}{V} \sum_p \sum_{e'} \frac{[\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} - 3 [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{6 \left\{ \left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ji}^{fg} \right) \right]^2 \right\}}. \quad (2.217)$$

Dieses Gleichungssystem wird durch

$$[\phi_c^e]_{ji}^{fg} = -[\phi_c^e]_{ij}^{fg} \quad (2.218)$$

für die beiden in der Gleichung (2.14) zunächst völlig unterschiedlich definierten Gaps Δ_1^\pm und Δ_2^\pm gelöst. Es ist daher $\Delta_2^\pm = -\Delta_1^\pm$.

Die Gapgleichung (2.134) ist nun

$$[\phi_c^e]_{ij}^{fg} = -\frac{4}{3} \frac{g^2}{\Lambda^2} \frac{T}{V} \sum_p \sum_{e'} \frac{[\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{\left(p_0 - \frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2} \right)^2 - \left[\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right) \right]^2}. \quad (2.219)$$

Deswegen schreibt sich die Gapgleichung (2.161) dann als

$$\begin{aligned} [\phi_c^e]_{ij}^{fg} &= \frac{1}{3\pi^2} \frac{g^2}{\Lambda^2} \sum_{e'} \left\{ \int_0^{[p_-^{e'}]_{ij}^{fg}} \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{[p_+^{e'}]_{ij}^{fg}}^\kappa \frac{d|\mathbf{p}| |\mathbf{p}|^2 [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg}}{\epsilon_{\mathbf{p}}^{e'} \left(\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}, [\phi_c^{e'}]_{ij}^{fg} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.220)$$

Weil die Gaps für Quasiteilchen genau so groß wie die für Quasianteilchen und die Gaps reell und unabhängig von k und p sind, $[\phi_r^e]_{ij}^{fg} = -[\phi_\ell^e]_{ij}^{fg}$ für gerade Parität gilt und $[\phi_c^e]_{ji}^{fg} = -[\phi_c^e]_{ij}^{fg}$ ist, kann man bei den Gaps, die ja sowieso nur quadratisch auftreten, alle Indizes weglassen und braucht diese nur noch durch ϕ auszudrücken. Auch den Ausdruck $\frac{\mu_i^f + \mu_j^g}{2}$ kann man vereinfachen, denn wegen der Relation (2.214) sind dessen Resultate für die verschiedenen Farben und Flavors alle gleich groß. Ab sofort kann dies als $\bar{\mu}$ geschrieben werden. Desweiteren läßt sich

auch der Ausdruck $\frac{\mu_i^f - \mu_j^g}{2}$ wegen der Relation (2.214) vereinfachen. Man bemerkt anhand von Gleichung (2.163), daß dies sowieso nur quadratisch im Druck und in der Gaggleichung auftritt und man daher für diesen Ausdruck $\frac{\delta\mu}{2}$ schreiben darf. Die Gaggleichung ist dann

$$3\pi^2 \frac{\Lambda^2}{g^2} = \sum_e \left\{ \int_0^{p_-^e} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{\epsilon_{\mathbf{p}}^e(\bar{\mu}, \phi)} + \int_{p_+^e}^{\kappa} d|\mathbf{p}| \frac{|\mathbf{p}|^2}{\epsilon_{\mathbf{p}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right\}, \quad (2.221)$$

mit

$$p_{\pm}^e = \Theta \left\{ e\bar{\mu} \pm \sqrt{\Theta \left[\left(\frac{\delta\mu}{2} \right)^2 - \phi^2 \right]} \right\}. \quad (2.222)$$

Nach Ausführen der Integrale läßt sich ϕ in Abhängigkeit von μ numerisch bestimmen. Hierfür benötigt man jedoch noch μ_e und μ_8 , die beide von μ abhängen. Diese Beziehungen erhält man über die restlichen beiden Neutralitätsbedingungen.

Den Druck kann man nun vereinfachen zu

$$\begin{aligned} p = & -3 \frac{\Lambda^2}{g^2} \phi^2 \\ & + \frac{1}{6\pi^2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \sum_e \left\{ 3 \int_0^{\kappa} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 [\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi) - |\mathbf{k}|] \right. \\ & \left. + \int_{p_-^e}^{p_+^e} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^3 (|\mathbf{k}| - e\bar{\mu})}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right\} \\ & + \frac{1}{12\pi^2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d [\mu_i^f]^4 \\ & + \frac{1}{3\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \int_0^{[k_F]_i^f} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^4}{E_{\mathbf{k}}^s} \\ & + \frac{1}{12\pi^2} [\mu_e]^4. \end{aligned} \quad (2.223)$$

Um die zweite Farbneutralitätsbedingung zu erfüllen, muß die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mu_8} = 0 = & -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{3\pi^2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d [\mu_i^f]^3 \\ & + \frac{1}{3\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s T_{8ii}^{ff} \operatorname{sgn}(\mu_i^f) \left[[k_F]_i^f \right]^3 \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\pi^2} \sum_e \left\{ \int_0^{p_-^e} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^2 (\bar{\mu} - e|\mathbf{k}|)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right. \\ & \left. + \int_{p_+^e}^{\kappa} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^2 (\bar{\mu} - e|\mathbf{k}|)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right\} \end{aligned} \quad (2.224)$$

gelöst werden. Für elektrische Neutralität ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \mu_e} = 0 &= \frac{\mu_e^3}{3\pi^2} - \frac{1}{3\pi^2} \sum_{i=b}^b \sum_{f=u}^d Q_{ii}^{ff} [\mu_i^f]^3 + \frac{1}{9\pi^2} \sum_{i=r}^b \sum_{f=s}^s \operatorname{sgn}(\mu_i^f) [[k_F]_i^f]^3 \\
&- \frac{1}{3\pi^2} \sum_e \left\{ \int_0^{p_e^-} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^2 (\bar{\mu} - e|\mathbf{k}|)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right. \\
&\quad \left. + \int_{p_e^+}^{\kappa} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^2 (\bar{\mu} - e|\mathbf{k}|)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right\} \\
&- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\substack{i,j=r \\ i \neq j}}^g \sum_{\substack{f,g=u \\ f \neq g}}^d \operatorname{sgn}(\mu_i^f - \mu_j^g) (Q_{ii}^{ff} - Q_{jj}^{gg}) \sum_e \int_{p_e^-}^{p_e^+} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 .
\end{aligned} \tag{2.225}$$

Die Werte für ϕ , μ_s und μ_e in den Neutralitätsgleichungen und der Gapgleichung können nun mit dem Computer mittels eines numerischen Gleichungssystemlösungsprogramms in Abhängigkeit des Parameters μ ermittelt werden.

Die Teilchenzahldichten für die einzelnen Quarksorten bzw. Elektronen sind mit den Formeln (2.189) und (2.190) gegeben durch

$$\begin{aligned}
n_i^f &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_e \left\{ \int_0^{p_e^-} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^2 (\bar{\mu} - e|\mathbf{k}|)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} + \int_{p_e^+}^{\kappa} d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}|^2 (\bar{\mu} - e|\mathbf{k}|)}{\epsilon_{\mathbf{k}}^e(\bar{\mu}, \phi)} \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sgn}(\mu_i^f - \mu_j^g) \int_{p_e^-}^{p_e^+} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}|^2 \right\}
\end{aligned} \tag{2.226}$$

mit $i, j = r, g$, $i \neq j$ und $f, g = u, d$, $f \neq g$,

$$n_b^f = \frac{1}{3\pi^2} [\mu_b^f]^3 \tag{2.227}$$

mit $f = u, d$,

$$n_i^s = \frac{1}{3\pi^2} \operatorname{sgn}(\mu_i^s) [[k_F]_i^s]^3 \tag{2.228}$$

mit $i = r \dots b$ und

$$n_e = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2} \tag{2.229}$$

gegeben.

Kapitel 3

Sternentwicklung

Im vorhergehenden Kapitel wurde die Zustandsgleichung für 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie hergeleitet. Diese soll auf das „Testobjekt“ Quarkstern angewendet werden, da in diesen der Effekt der Farbsupraleitung vermutet wird, wie es zu Beginn von Kapitel 2 begründet wurde.

In diesem Abschnitt möchte ich dem Leser vermitteln, was ein Quarkstern ist und wie er entsteht. Hierfür ist es für einen umfassenden Überblick notwendig, die Sternentwicklung zu beschreiben. Als Referenz dienen hierfür z. B. [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17].

3.1 Sternentstehung

Die Dichtewellentheorie, die von Lin und seinen Mitarbeitern entwickelte Theorie, die auf Ideen von Lindblad basiert, führt zu Verdichtungen des interstellaren Mediums aufgrund von Gravitationspotentialstörungen und regt dadurch die Sternentstehung an. Desweiteren könnte man auch die Stoßwellen von Supernovaeexplosionen für die Sternentstehung verantwortlich machen, die sich durch die interstellare Materie ausbreiten.

Sterne entstehen aus dichten Wolken, die zur interstellaren Materie zählen und aus Gas und Staub bestehen. Die Gravitationskraft veranlaßt, daß sich diese Wolken zusammenziehen. Ihr wirken jedoch der innere Druck und Turbulenzen der Wolken entgegen. Für die Sternentstehung muß natürlich die Gravitation die Gegenkräfte von innen übertreffen. Hierfür gibt es das sogenannte Jeans'sche Kriterium

$$M \geq M_{\text{kr}}(T, \rho_c) \propto \sqrt{\frac{T^3}{\rho_c}}. \quad (3.1)$$

Hierin sind M die Masse, M_{kr} die kritische Masse, T die Temperatur und ρ_c die Zentralsdichte der Wolke. Die Gleichung (3.1) besagt also, daß, wenn die Wolkenmasse größer gleich der kritischen Masse ist, die Wolke aufgrund der Gravitation kollabiert. In der Regel sind dafür Wolkenmassen von $M > 1000 M_{\odot}$ nötig. In Tabelle

	1 cm ⁻³	100 cm ⁻³	10 ⁴ cm ⁻³
10 K	880 M _⊙	88 M _⊙	8,8 M _⊙
100 K	28000 M _⊙	2800 M _⊙	280 M _⊙

Tabelle 3.1: Werte für die kritische Masse

3.1 sind einige Werte für die kritische Masse in Abhängigkeit von der Zentralsdichte und der Temperatur aufgelistet.

Auf diese Weise entstehen die ersten massereichen, blauen, heißen Sterne des Spektraltyps O im Zentrum der Wolke. Diese begünstigen die Bildung von weiteren Sternen in der Umgebung, weil die Strahlung eines O-Sterns das umgebende Gas erhitzt und ionisiert. Dadurch entsteht eine H II-Region mit $T=10000$ K. Da der Druck dieser heißeren Region viel größer ist als der der kühleren, expandiert die H II-Region und bläst dadurch das kühlere Gas fort und drückt es zusammen. Hierdurch entstehen die sogenannten Globulen. Das sind lokale Verdichtungen in der Wolke. Diese Globulen haben einen Durchmesser von $0,1-1$ pc¹ und eine Masse von $1-70 M_{\odot}$. Da sich sehr viele Globulen in einer kontrahierenden Wolke befinden, entsteht dadurch ein gesamter Sternhaufen, was Beobachtungen bestätigen. Es dauert etwa 500000 Jahre bis die Globulen zu Protosternen kollabieren. Entweder fragmentieren sie dabei oder weisen einen hohen Massenverlust auf. Die Protosterne bilden sich in mehreren Kollapsschüben. Hierbei entsteht zunächst ein dichter, heißer Kern, der die umgebende Materie in der Wolke aufgrund der Gravitation mehrere Millionen Jahre lang aufammelt. Diese Objekte emittieren zunächst nur IR-Strahlung wegen der dichten Staubhülle, weshalb man sie auch als Infrarotsterne bezeichnet. Die Staubhülle wird mit der Zeit immer dünner, und der Stern kontrahiert weiter, bis sich die inneren Kräfte, aufgrund des großen Drucks, und die Gravitation im Gleichgewicht befinden.

M	NGC	Bezeichnung	Sternbild	α (2000)	δ (2000)
42	1976	Orionnebel	Orion	$5^{\text{h}}35^{\text{m}};4$	$-5^{\circ}27'$
16	6611	Adlernebel	Schlange	$18^{\text{h}}18^{\text{m}};8$	$-13^{\circ}47'$
–	2237	Rosettennebel	Einhorn	$6^{\text{h}}30^{\text{m}};3$	$+5^{\circ}03'$

Tabelle 3.2: Sternentstehungsgebiete

3.1.1 Bildung von Mehrfachstern- und Planetensystemen

Weil bei der Verdichtung einer Gaswolke der Drehimpuls

$$\mathbf{L} = \Theta \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (3.2)$$

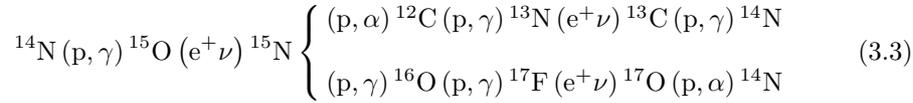
erhalten bleiben muß, bedeutet dies, daß die Werte der Trägheitstensorelemente abnehmen und die Rotationsgeschwindigkeit zunimmt. Hierdurch wird die Zentrifugalkraft größer, und die sich verdichtende Gaswolke weist eine merkliche Abplattung auf. Bei sehr großen Fliehkräften spaltet sich die Gaskugel möglicherweise. Auf diese Weise entstehen enge Doppel- oder Mehrfachsternsysteme. Weite Doppel- oder Mehrfachsternsysteme bilden sich, wenn sich die betreffenden Sterne unabhängig voneinander verdichten, aber in ihrer gegenseitigen Anziehungssphäre verbleiben. Eine extrem schnell rotierende Gaskugel führt zu einer flachen Scheibe. Aus der zentralen Verdichtung bildet sich dann der Stern und aus kleineren Verdichtungen im Außenbereich die Planeten.

3.2 Hauptreihensterne

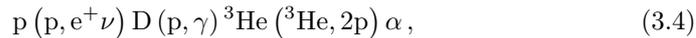
Am Ende der Kontraktion landen die Sterne auf der Hauptreihe des Hertzsprung-Russell-Diagramms (HRD), siehe Abbildung 3.1. Die massereicheren und leuchtkräftigeren Sterne befinden sich oben, die masseärmeren, leuchtschwächeren unten im HRD. Die leichteren Hauptreihensterne, zu denen auch unsere Sonne zählt, haben

¹1 pc = 1 parsec = 1 Parallaxensekunde \cong 3,26 Lichtjahre

eine niedrigere Oberflächentemperatur als die massereichen. Die Hauptreihensterne verbrennen Wasserstoff zu Helium. Die massereichen, leuchtkräftigeren und heißeren Hauptreihensterne verwenden hierfür den CNO-Zyklus



und die pp-Kette



wobei der erstere überwiegt, die massereichen nur die pp-Kette, weil diese schon bei ca. 5 Millionen Kelvin, der CNO-Zyklus aber erst ab ca. 9 Millionen Kelvin wirksam wird. Beim CNO-Zyklus gibt es einen Haupt- und einen Nebenzyklus. Beim Hauptzyklus, obere Zeile von Reaktionsgleichung (3.3), werden pro Durchlauf 25.03 MeV freigesetzt, beim Nebenzyklus 24.74 MeV. Die Neutrinoenergien wurden hierbei vernachlässigt. Ein Zyklusdurchlauf dauert im Mittel 336 Millionen Jahre. Glücklicherweise laufen so viele Zyklen nebeneinander ab, daß eine kontinuierliche Energieabgabe über Millionen von Jahren gewährleistet ist. Die Gesamtenergieabgabe bei der pp-Kette beträgt 26.21 MeV.

Die massereichen, heißen, hellen, blauen und weißen Hauptreihensterne gehen sehr verschwenderisch mit ihrem Energievorrat an Wasserstoff um. Deswegen ist dieser viel schneller verbrannt als der von den massereichen Hauptreihensternen, siehe dazu Tabelle 3.2. Die Energieerzeugung der Hauptreihensterne findet ausschließlich im Kerngebiet statt, das etwa 12% des gesamten Wasserstoffvorrates umfaßt. Da dort keine Durchmischung von Materie stattfindet, verbrennt nur das Kerngebiet den Wasserstoff zu Helium. Wenn die Wasserstoffvorräte verbraucht sind, läßt der Gas- und Strahlungsdruck nach. Die Gravitation überwiegt. Der Stern kontrahiert, bis im Inneren eine höhere Temperatur erreicht wird und der 3α -Prozeß einsetzt.

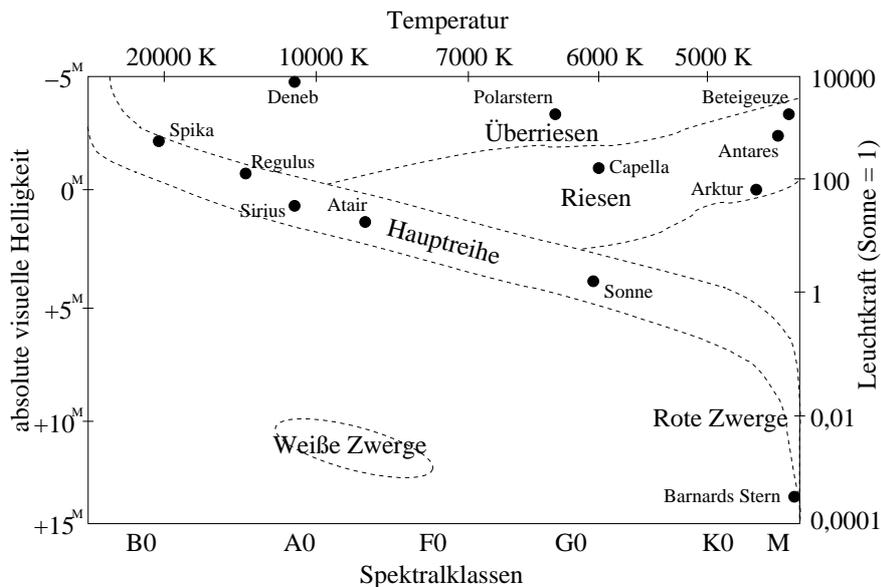


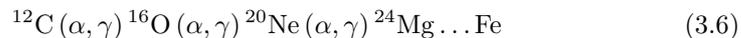
Abbildung 3.1: Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD)

3.3 Rote Riesensterne

Das Helium wird beim 3α -Prozeß



zu Kohlenstoff verbrannt. Die Wasserstoffbrennzone frißt sich langsam zur Sternoberfläche hindurch. Die Energieproduktion im Sterninneren ist nun wesentlich größer als im Hauptreihensternstadium. Der große innere Gas- und Strahlungsdruck drückt die äußeren Schichten nach draußen. Der Stern bläht sich auf. Es entsteht ein Roter Riese. Im HRD wandert der Hauptreihenstern daher nach rechts in das Riesen-Gebiet. Hier können durch Fusion immer schwerere Elemente aufgebaut werden.



Diese Entwicklung kann sich fortsetzen bis zum Eisen, je nachdem, wie massereich der Stern ist. Je massiver der Stern, desto größere Innentemperaturen und schwerere Elemente können produziert werden. Es werden mindestens $8 M_{\odot}$ benötigt, um Kohlenstoff zu verbrennen.



Schwerere Elemente als Eisen können nicht fusioniert werden, da hierfür Energie benötigt wird.

Die Roten Riesen weisen nach ihrer Expansion ein nicht so stabiles Gleichgewichtsstadium auf wie als Hauptreihenstern. Hierzu gehören vor allem die Pulsationsveränderlichen. Diese Sterne geraten aufgrund des Kappa-Mechanismus in Schwingungen. Durch eine Kompressionsphase nimmt der mittlere Absorptionskoeffizient zu. Dadurch wird mehr Strahlungsenergie als in der „Mittellage“ absorbiert. Diese Zusatzenergie erzeugt einen Überdruck mit anschließender Expansion bis zur vollen Amplitude der ungedämpften Schwingung. Der Stern wird roter. In dieser Expansionsphase ist wegen des niedrigeren Druckes die Absorption gering. Hierdurch kühlt der Stern ab, und die Kompressionsphase beginnt von neuem. Der Stern wird wieder weißer.

3.4 Endstadien der Sternentwicklung

Wenn alle Energiereserven des Sternes verbraucht sind, verschwindet der Innendruck und die Gravitation gewinnt Oberhand. Dadurch kollabiert der Stern. Die äußeren Sternhüllen des „sterbenden“ Roten Riesen werden abgestoßen und es entsteht ein

Typ	M/M _⊙	10 ⁶ Jahre
O5	39	0,5
B0	20	4,6
B5	6,7	46
A0	3,5	319
A5	2,2	1160
F0	1,7	2700
F3	1,26	3800
F6	1,13	6000

Tabelle 3.3: Verbrennungsdauer des Wasserstoffvorrats eines Hauptreihensterns

Planetarischer Nebel. Im Inneren ist die Gravitation so groß, daß bei masseärmeren Sternen nur der entartete Elektronendruck die weitere Kontraktion stoppen kann. Diesen kompakten Sternkern nennt man einen *Weißer Zwerg*. Diese haben eine Oberflächentemperatur von ca. 8000 K und erscheinen daher weiß. Der Radius beträgt nur ein paar 1000 Kilometer. Seine Dichte ist 10^6 mal größer als die der Erde. Im Laufe der Zeit kühlt der Weiße Zwerg ab, und es entsteht ein *Schwarzer Zwerg*.

M	NGC	Bezeichnung	Sternbild	α (2000)	δ (2000)
57	6720	Ringnebel	Leier	18 ^h 53 ^m ,6	+33°02'
27	6853	Hantelnebel	Füchsen	19 ^h 59 ^m ,6	+22°43'

Tabelle 3.4: Planetarische Nebel mit einem Weißen Zwerg

Bei der *Supernova vom Typ I* erfolgt eine Explosion des Weißen Zwergs in einem Mehrfachsternsystem, weil vom Begleitstern Materie auf ihn überfließt. Dadurch kommt es zur Überschreitung der Chandrasekhar-Grenzmasse², und der Entartungsdruck der Elektronen kann der Gravitation nicht mehr standhalten. Der Stern kollabiert so plötzlich, daß der Weiße Zwerg zerreißt. Übrig bleiben nur ein paar expandierende Gasfetzen.

Besitzt der kollabierende Sternkern eine Masse, die die Chandrasekhar-Grenze übersteigt, dann kann selbst der entartete Elektronendruck den Kollaps nicht aufhalten. Die Atomkerne des Sternkerns, wegen einer großen Ausgangssterne zu meist Eisenkerne, zerbersten wegen des riesigen Drucks und den hohen Temperaturen, die aufgrund des Kollaps entstehen. Deren Protonen reagieren mit hochenergetischen Elektronen und werden zu Neutronen und Neutrinos. Der Kollaps dauert nur ca. 0,1 Sekunde. Die dabei entstehende Schockwelle reflektiert im Inneren und läßt die äußeren Sternhüllen explodieren und als *Supernova vom Typ II* aufleuchten. Übrig bleibt im Inneren ein *Neutronenstern*. Diese entdeckt man als *Pulsare*, rotierende Neutronensterne mit einem starken Magnetfeld³, mit Hilfe von Radioteleskopen. Die Rotationsdauer liegt im Sekunden bis Millisekundenbereich⁴. Pulsare emittieren kegelförmig an ihren Magnetfeldpolen Synchrotronstrahlung⁵. Ist dabei die Magnetfeldachse gegen die Rotationsachse geneigt, so überstreicht der Strahlenkegel im Rhythmus der Rotationsperiode die Erde. Dadurch kommt das Pulsationsphänomen zustande, siehe dazu auch Abbildung 3.2.

Die Strahlungsenergie wird jedoch der Rotationsenergie entzogen, so daß Pulsare mit der Zeit verlangsamen. Deswegen sind alte Pulsare langsamer als junge. Zudem können Neutronensterne Röntgenausbrüche, sogenannte Röntgenbursts, aufweisen. Diese haben ihren Ursprung in Akkretionsscheiben⁶ und Massentransferinstabilitäten.

Desweiteren sind sogenannte Glitches zu beobachten. Das sind spontane Änderungen in der Winkelgeschwindigkeit⁷ des Pulsars. In [7] wird hierfür eine mögliche Erklärung gegeben: Strudel durchbrechen und rearrangieren die Kruste. Dadurch kommt es zu einer Abnahme des Drehimpulses im Superfluid und einer Zunahme des Drehimpulses in der Kruste.

Neutronensterne entstehen aus Sternen mit einer Ausgangsmasse von $M >$

² $\cong 1,44 M_{\odot}$

³ 10^8 - 10^9 Tesla

⁴= 1-1000 Hz = Radiowellenbereich

⁵Synchrotronstrahlung wird durch im Magnetfeld gyrierende, hochenergetische Elektronen erzeugt. Die Emission erfolgt dabei kegelförmig in die Bewegungsrichtung des Elektrons.

⁶Durch das Überfließen von Materie eines Begleitsterns auf den Neutronenstern infolge der Gravitation kommt es zu einer Akkretionsscheibe.

⁷ $\Delta\omega/\omega \cong 10^{-6}$

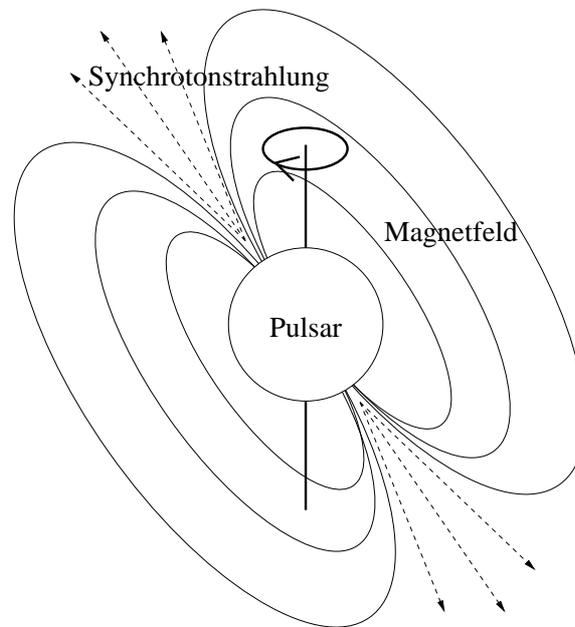


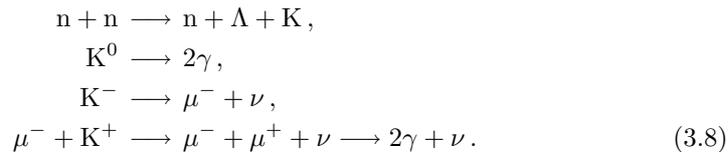
Abbildung 3.2: Pulsar

M	NGC	Bezeichnung	Sternbild	α (2000)	δ (2000)	Pulsarperiode
1	1952	Krabbennebel	Stier	$5^{\text{h}}34^{\text{m}}5$	$+22^{\circ}01'$	33 ms

Tabelle 3.5: Pulsar und Supernovaüberrest vom Typ II

$8 M_{\odot}$ ⁸, weil dadurch die Fusion bis zum Eisen gelangt. Ansonsten wären die Sterne viel zu leicht, und es würde beim Kollaps erst gar kein Neutronenstern entstehen. Der Eisenkern des Roten Überriesen besitzt einen Radius von einigen tausend, die Hülle einen von mehr als 10^8 Kilometern.

Neutronensterne kühlen genau wie die Weißen Zwerge mit der Zeit ab. Die Dichte des Neutronensterns ist 10^{14} mal größer als die der Erde. Sein Radius beträgt etwa 12 Kilometer, seine Masse ca. $2 M_{\odot}$. Der Neutronenstern besteht aus Neutronen, Protonen, Hyperonen und Leptonen. Die Hyperonen und Leptonen entstehen aus Proton- und Neutronreaktionen, wie z. B.



Wenn die Dichte des Neutronensterns bei weitem die 10^{14} -fache Dichte der Erde übersteigt, dann zerbersten all diese Teilchen in ihre Bestandteile, die Quarks. Aus diesem Grund nennt man diese Sternsorte *Quarksterne*. Neutronensterne mit einem gemischtem Phaseninneren aus Hadronen und Quarks nennt man *Hybridsterne*. *Strange Stars* sind Quarksterne, die strange Quarks beinhalten, die wegen der Schwachen Wechselwirkung entstehen, weil dadurch ein bevorzugtes, niedrigeres Energieniveau eingenommen werden kann.

Ist jedoch der kollabierende Sternkern schwerer als etwa $2,5 M_{\odot}$, dann entsteht ein *Schwarzes Loch*. Diese sind so kompakt, daß keine Strahlung oder Teilchen nach außen gelangen können. Astronomen sind sich sicher, daß Schwarze Löcher in den Zentren von Galaxien, wie unserer Milchstraße, vorhanden sind.

3.5 Kompakte Sterne

In diesem Kapitel soll sowohl die Entstehung, als auch die weitere Entwicklung eines kompakten Sterns ein wenig genauer betrachtet werden.

Ein massereicher, weit entwickelter Stern hat die Form des sogenannten Zwiebel-schalenmodells, in dem die fusionierten Elemente vom schweren Eisen bis zum leichten Wasserstoff von innen nach außen kugelschalenförmig angeordnet sind. Bei den extrem hohen Fusionstemperaturen entsteht γ -Strahlung, die Elektron-Positron-Paare bildet. Wenn diese aufeinandertreffen, zerstrahlen sie wieder in Photonen und Neutrinos. Letztere können dem Stern aufgrund des geringen Wirkungsquerschnitts entweichen. Hierbei wird dem Eisenkern jedoch Energie entzogen, weswegen er zu schrumpfen beginnt. Ab einer bestimmten Dichte und Masse kollabiert der zentrale Eisenkern in einem Bruchteil von einer Sekunde. Ausgelöst wird der Kollaps durch die sogenannte Photodesintegration, bei der extrem energiereiche γ -Quanten die Eisenatomkerne in α -Teilchen und Neutronen zerschlagen. Die Materie wird beim Kollaps so stark komprimiert, daß Elektronen und Protonen ineinandergequetscht werden. Dadurch entsteht im Zentrum eine Neutronenkugel mit einem Radius von etwa 10 Kilometern und einer Dichte von ungefähr 10^{14} g/cm^3 . Ist der Druck im Kern extrem groß, dann zerbersten die Neutronen in ihre Bestandteile, die Quarks, die zunächst frei sind. Ein kompakter Stern bestehend aus Neutronen oder Quarks ist entstanden.

⁸Roter Überriese

3.5.1 Supernovae vom Typ II

Beim Kollaps des Eisenkerns fallen aber auch die umgebenden Materieschichten der äußeren Zwiebschalen mit hoher Geschwindigkeit nach innen. Am Außenrand des eben entstandenen kompakten Sterns prallen sie zurück und werden wieder nach außen geschleudert. Nach einer viertel Sekunde kommt diese Schockwelle auf einer Strecke von etwa 160 Kilometern wieder zum Stillstand, da die Atome in Neutronen und Protonen aufgespalten werden und dadurch Energie verbraucht wird, und weil immer noch Schichten, von außen nach innen stürzend, die auslaufende Schockfront abbremsen. In [14] wird eine mögliche Erklärung für Supernovae gegeben: Die Rayleigh-Taylor-Instabilität, ein Grenzschichtphänomen, pflanzt sich entlang der einfallenden und der auslaufenden Materie fort. Sofort ist die glatte Grenzschicht zwischen Schockfront und einfallender Materie zerstört, da heiße Gaszellen nach außen schießen und kühlere nach innen vordringen. Vornehmlich Gravitationsenergie wird in Wärme umgewandelt. Diese bewirkt schließlich die mechanische Arbeit, die für die Supernovae verantwortlich sind. Eine gewaltige Explosion aufgrund der eben beschriebenen Rayleigh-Taylor-Instabilität treibt die äußeren aufleuchtenden Sternschichten auseinander, die schon nach wenigen Stunden die Größe unseres Sonnensystems erreichen.

3.5.2 Post-Supernova-Sternentwicklung

Der Kollaps des Eisenkerns zu einem Neutronenstern kommt zum Erliegen, wenn Kerndichte erreicht wird. Ein Protoneutronenstern ist entstanden. Dieser ist leptonenreich und noch sehr heiß, $T \gg 10$ MeV. Durch Neutrinoemission wird die Leptonanzahl verringert und der Protoneutronenstern abgekühlt. Nach 10 – 30 Sekunden entsteht daraus ein immer noch heißer, aber nun leptonenarmer Neutronenstern mit einer Temperatur von $T \gg 1$ MeV. Nach einigen Minuten ist die Temperatur aufgrund von Neutrinoemission so weit gesunken, daß ein kalter Neutronenstern mit $T < 1$ MeV $\cong 11.6 \cdot 10^9$ K gebildet wird. Deswegen darf man auch mit $T = 0$ rechnen, denn thermale Effekte sind nun vernachlässigbar klein geworden im Gegensatz zur heißen Phase des Protoneutronensterns. Zudem wird jetzt der Effekt der Farbsupraleitung ermöglicht, denn die Dichte ist dafür hoch und die Temperatur niedrig genug.

Im Laufe von Jahrmillionen kühlt der Neutronenstern weiter durch Neutrino- und Photonenemission ab, bis er nicht mehr beobachtbar wird aufgrund von zu geringer Wärmeabstrahlung.

Kapitel 4

Relativistische Sterne

In den vorhergehenden Kapiteln wurde sowohl beschrieben, was ein Quarkstern ist und wie er entsteht, als auch die Zustandsgleichung für farbsupraleitende Quarkmaterie bestimmt. Jetzt stellt sich die Frage, wie man aus der Zustandsgleichung die Eigenschaften, wie z. B. den Radius und die Masse eines solchen Quarksterns berechnen kann. Das Ziel dieses Kapitels ist es, dem Leser die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung¹ herzuleiten, die nichts anderes als den relativistischen Druckgradienten in einer statischen, isotropen Metrik darstellt. Hiermit lassen sich nämlich die Eigenschaften von sich zeitlich nicht verändernden, nichtrotierenden, kompakten Sternen ermitteln.

Für die Herleitung der TOV-Gleichung sind Kenntnisse aus der Allgemeinen Relativitätstheorie² erforderlich. Die Herleitung sämtlicher Formeln der ART für die Berechnung der TOV-Gleichung soll nicht Gegenstand dieser Diplomarbeit sein, weil dies nicht nur zu sehr vom eigentlichen Thema wegführen, sondern auch über den Rahmen dieser Diplomarbeit hinausgehen würde. Deswegen möchte ich an dieser Stelle auf die zahlreiche Literatur über das Thema ART hinweisen. Als Referenzen dienten mir [16, 18].

In diesem Kapitel verwende ich die folgenden Konventionen:

$$G = c = 1. \quad (4.1)$$

Massen und Radien werden in Kilometern, Drücke und Energiedichten in km^{-2} und Teilchenzahldichten in km^{-3} gemessen.

4.1 Metrik einer statischen, isotropen Raumzeit

Es ist anzunehmen, daß Quarksterne rotieren. Jedoch sollen hier der Einfachheit wegen Zentrifugalkräfte vernachlässigt werden, die eine Abplattung des Quarksterns hervorrufen könnten. Damit ist die Metrik isotrop. Desweiteren wird die Metrik als statisch angenommen, da man keine zeitlichen Änderungen am Quarkstern erwartet, weil er sich in einem Gleichgewichtszustand befindet, in dem die Kräfte des Innendrucks genauso groß sind wie die Gravitationskräfte.

Ich benutze im folgenden Kugelkoordinaten $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ und $x^3 = \phi$. Das Wegelement ist damit gegeben durch

$$ds^2 = U(r) dt^2 - V(r) dr^2 - W(r) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.2)$$

¹kurz: TOV-Gleichung

²kurz: ART

Man setzt der Einfachheit wegen $W(r) = 1$. Dadurch geht man zwar in eine neue Radiusvariable über, jedoch ändert das nichts an der Kugelsymmetrie. Das Wegelement läßt sich nun schreiben als

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.3)$$

Mit der Standardform des Wegelements

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.4)$$

stellt man fest, daß hier für den metrischen Tensor nicht die globale Definition (A.13) für die flache Minkowskimetrik gilt, sondern dieser durch

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

gegeben ist. Daraus ist zu schließen, daß es sich um einen gekrümmten Raum handeln muß. Die inverse Matrix von $\tilde{g}_{\mu\nu}$ ist

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(r^2 \sin^2 \theta)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Der metrische Tensor beschreibt die Potentiale.

Die Gravitationskräfte werden durch die Christoffelsymbole

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{\tilde{g}^{\sigma\nu}}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \tilde{g}_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (4.7)$$

ausgedrückt, für die $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ gilt. Diese sind formal erste Ableitungen des metrischen Tensors, ebenso wie die Gravitationskraft die erste Ableitung vom Gravitationspotential ist. Mit den Gleichungen (4.5) und (4.6) bestimmt man die von Null verschiedenen Christoffelsymbole zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \nu', \\ \Gamma_{00}^1 &= \nu' e^{2(\nu-\lambda)}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \lambda', \\ \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-2\lambda}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = r^{-1}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Hierin bedeutet ' die Ableitung nach r . Als Beispiel soll nun die Berechnung von Γ_{00}^1 erfolgen.

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{\tilde{g}^{1\nu}}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{0\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{g}_{0\nu}}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{g}_{00}}{\partial x^\nu} \right) \quad (4.9)$$

Aus der Gleichung (4.6) ist ersichtlich, daß der metrische Tensor diagonal ist. Darum liefert in der Gleichung (4.9) nur $\nu = 1$ einen Beitrag zu Γ_{00}^1 . Also

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{e^{-2\lambda}}{2} (-2\nu' e^{2\nu}) = \nu' e^{2(\nu-\lambda)}. \quad (4.10)$$

Die anderen Christoffelsymbole ermittelt man dementsprechend.

Der Riccitenor

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho} \quad (4.11)$$

entsteht durch Kontraktion des Riemantensors, den man auch als Krümmungstensor bezeichnen kann, dessen Struktur jedoch hier im einzelnen nicht weiter angegeben wird, da er für die weiteren Rechnungen nicht erforderlich ist.

Die von Null verschiedenen Komponenten des Riccitenors bestimmt man zu

$$\begin{aligned} R_{00} &= \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)}, \\ R_{11} &= \nu'' - \lambda' \nu' + \nu'^2 - \frac{2\lambda'}{r}, \\ R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1, \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Als Beispiel soll nun die Berechnung von R_{11} erfolgen,

$$R_{11} = \frac{\partial \Gamma_{1\rho}^{\rho}}{\partial r} - \frac{\Gamma_{11}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{1\rho}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\rho} - \Gamma_{11}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\rho}^{\rho}. \quad (4.13)$$

Wie man sieht, besteht diese Gleichung aus vier Summanden, die man über ρ und σ summieren muß. Summiert man die vier Terme einzeln über ρ und σ , dann ergibt das für Summand

$$\begin{aligned} 1: & \nu'' + \lambda' - 2/r^2 \\ 2: & -\lambda'' \\ 3: & \nu'^2 + \lambda'^2 + 2/r^2 \\ 4: & -\lambda' \nu' - \lambda'^2 - 2\lambda'/r. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dies braucht man jetzt nur noch zusammenzuaddieren.

Der Krümmungsskalar ist definiert durch

$$R = \tilde{g}^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

Man erhält mit den Gleichungen (4.6) und (4.12)

$$\begin{aligned} R &= e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - \frac{1}{r^2} R_{22} - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33} \\ &= e^{-2\nu} R_{00} - e^{-2\lambda} R_{11} - \frac{2}{r^2} R_{22} \\ &= e^{-2\lambda} \left(-2\nu'' + 2\lambda' \nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + \frac{4\lambda'}{r} - \frac{4\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2 Die Schwarzschildmetrik

Die *Einstein'sche Feldgleichung*

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

reduziert sich im leeren Raum außerhalb des Sterns zu

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} = 0. \quad (4.18)$$

Im materielosen Raum sind nämlich der Druck $p = 0$ und die Energiedichte $\varepsilon = 0$ und damit auch der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu} = 0$, der durch

$$T_{\mu\nu} = -p \tilde{g}_{\mu\nu} + (p + \varepsilon) u_\mu u_\nu \quad (4.19)$$

gegeben ist. Mit der Eigenzeit τ gilt

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (4.20)$$

Das ist die Vierergeschwindigkeit einer idealen Flüssigkeit. Damit ist

$$\tilde{g}_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1. \quad (4.21)$$

Die Einstein'sche Feldgleichung ist nur von Null verschieden, wenn Massen vorhanden sind. Das bedeutet dann aber nicht anderes, als daß Massen den Raum krümmen.

Multipliziert man die Gleichung (4.18) auf beiden Seiten mit $\tilde{g}^{\alpha\mu}$, dann erhält man

$$R^\alpha{}_\nu = \frac{1}{2} \delta^\alpha{}_\nu R. \quad (4.22)$$

Verjüngt man die Tensoren, indem man $\alpha = \nu$ setzt, dann ergibt das

$$R = 2R. \quad (4.23)$$

Daraus folgert man, daß

$$R = 0 \quad (4.24)$$

ist. Das bedeutet dann aber auch, daß

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.25)$$

sein muß.

Weil $R_{00} = R_{11} = 0$ ist, erhält man mit Hilfe der Gleichungen (4.12)

$$\lambda' = -\nu'. \quad (4.26)$$

Als Randbedingung muß die aufgrund des Sterns gekrümmte Metrik in unendlicher Entfernung r in die flache Minkowskimetrik übergehen.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{g}_{00}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{2\nu(r)} = 1 \quad (4.27)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{g}_{11}(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} [-e^{2\lambda(r)}] = -1 \quad (4.28)$$

Man erhält deswegen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0, \quad (4.29)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r) = 0. \quad (4.30)$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung (4.26) nach r integriert, dann ergibt das

$$\int_r^\infty \lambda'(r) dr = - \int_r^\infty \nu'(r) dr. \quad (4.31)$$

Daraus erhält man, daß

$$\lambda = -\nu \quad (4.32)$$

ist. Setzt man dies in $R_{22} = 0$, die dritte der Gleichungen (4.12), ein, dann ergibt das

$$(1 + 2r\nu') e^{2\nu} = 1. \quad (4.33)$$

Das kann man umschreiben zu

$$\frac{d}{dr} \left[r e^{2\nu(r)} \right] = 1. \quad (4.34)$$

Integriert man jetzt beide Seiten über r , dann erhält man

$$r e^{2\nu} = r + C. \quad (4.35)$$

Dividiert man durch r , so erhält man

$$\tilde{g}_{00} = e^{2\nu} = 1 + \frac{C}{r}. \quad (4.36)$$

Die Integrationskonstante C identifiziert man mit Hilfe des Grenzfalls

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.37)$$

mit einem schwachen Feld $h_{\mu\nu}$.

Die Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld lautet

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^k \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (4.38)$$

Da es sich um eine statische Metrik handelt, verschwinden die räumlichen Geschwindigkeitskomponenten der idealen Flüssigkeit (4.20),

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{00}^k \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (4.39)$$

was man vereinfachen kann zu

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\Gamma_{00}^k. \quad (4.40)$$

Die Christoffelsymbole sind dann

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{\tilde{g}^{k\nu}}{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{00}(r). \quad (4.41)$$

Weil nur Γ_{00}^1 von Null verschieden ist, da \tilde{g}_{00} nur von r abhängt, gilt in der Schwachfeldnäherung

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} h_{00}(r). \quad (4.42)$$

Die Bewegungsgleichung ist damit

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} h_{00}(r) = -\frac{\partial}{\partial r} \Phi(r). \quad (4.43)$$

Hiermit läßt sich das Newton'sche Gravitationspotential definieren,

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} h_{00}(r) = -\frac{M}{r}. \quad (4.44)$$

Dadurch ist

$$\tilde{g}_{00}(r) = g_{00} + 2\Phi(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (4.45)$$

Mit dieser Randbedingung für ein schwaches Feld ist die Integrationskonstante C von Gleichung (4.36) auf $C = -2M$ festzulegen. Damit ergibt sich auch für unsere isotrope, statische Metrik außerhalb des Sterns

$$\tilde{g}_{00}(r) = e^{2\nu(r)} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (r > R). \quad (4.46)$$

Hierin ist M die Masse und R der Radius des Sterns. Mit Hilfe dieser Gleichung kann man nun auch \tilde{g}_{11} bestimmen. Man errechnet, daß

$$\tilde{g}_{11}(r) = -e^{2\lambda(r)} = -e^{-2\nu(r)} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (r > R) \quad (4.47)$$

ist.

Damit ist das Wegelement durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4.48)$$

gegeben.

Dies ist die *Schwarzschildmetrik*. Man erhält sie also, wenn man die statische, isotrope Metrik (4.5) mit Hilfe der Einstein'schen Feldgleichung bestimmt.

Die Schwarzschildmetrik ist an der Stelle $r = r_S = 2M$ singulär. Wenn der gesamte Stern innerhalb des *Schwarzschildradius* oder *Ereignishorizonts* r_S liegt, dann kann keine Strahlung und kein Teilchen diese Region verlassen. Es handelt sich dann um ein *Schwarzes Loch*. Ist der Radius des Sterns größer als der Schwarzschildradius, dann hat das keine weiteren Auswirkungen, da die Schwarzschildmetrik sowieso nur außerhalb des Sterns gültig ist.

4.3 Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung

Wir wissen, daß außerhalb des Sterns keine Masse ist und daher sowohl der Energie-Impuls-Tensor, als auch der Riccitenor und der Krümmungsskalar verschwinden. Innerhalb des Sterns ist jedoch Masse vorhanden, so daß nun der Energie-Impuls-Tensor, der Ricci-Tensor und der Krümmungsskalar von Null verschieden sind.

In diesem Abschnitt soll daher die Innenmetrik und der relativistische Druckgradient des Sterns ermittelt werden.

Die Komponenten der Einstein'schen Feldgleichung lassen sich berechnen mit

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \\ G_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\alpha} &= R_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\alpha} - \frac{R}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\alpha} = -8\pi T_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\alpha}, \\ G_{\mu}^{\alpha} &= R_{\mu}^{\alpha} - \frac{R}{2} \delta_{\mu}^{\alpha} = -8\pi T_{\mu}^{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Die Komponenten des Riccitenors R_{μ}^{α} ermittelt man mit Hilfe der Gleichungen (4.6) und (4.12),

$$R_0^0 = e^{-2\lambda} \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right), \quad (4.50)$$

$$R_1^1 = e^{-2\lambda} \left(-\nu'' + \lambda' \nu' - \nu'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \right), \quad (4.51)$$

$$R_2^2 = e^{-2\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (4.52)$$

$$R_3^3 = R_2^2. \quad (4.53)$$

Da es sich um einen statischen Stern handelt, verschwinden die räumlichen Geschwindigkeitskomponenten der idealen Flüssigkeit in den Gleichungen (4.19) und (4.21),

$$u^i = u_i = 0. \quad (4.54)$$

Die zeitliche Komponente von u^μ ist wegen der Gleichung (4.21) gegeben durch

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}_{00}}}, \\ u_0 &= \tilde{g}_{00} u^0 = \sqrt{\tilde{g}_{00}}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der Energie-Impuls-Tensor (4.19) läßt sich umformen zu

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\alpha} &= -p \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{g}^{\nu\alpha} + (p + \varepsilon) u_\mu u_\nu \tilde{g}^{\nu\alpha}, \\ T_\mu^\alpha &= -p \delta_\mu^\alpha + (p + \varepsilon) u_\mu u^\alpha. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dieser sieht dann folgendermaßen aus

$$T_\mu^\alpha = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Mit den Gleichungen (4.16), (4.49) und (4.53) bestimmt man die Komponenten des Einsteintensors G_μ^α zu

$$G_0^0 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -8\pi\varepsilon(r), \quad (4.58)$$

$$G_1^1 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p(r), \quad (4.59)$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right) = 8\pi p(r), \quad (4.60)$$

$$G_3^3 = G_2^2. \quad (4.61)$$

Multipliziert man die Gleichung (4.58) auf beiden Seiten mit r^2 , dann erhält man

$$r^2 G_0^0 = e^{-2\lambda} (1 - 2r\lambda') - 1 = -\frac{d}{dr} \left[r \left(1 - e^{-2\lambda(r)} \right) \right] = -8\pi\varepsilon(r) r^2. \quad (4.62)$$

Durch Integration findet man heraus, daß

$$r \left(1 - e^{-2\lambda(r)} \right) = 8\pi \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr' \quad (4.63)$$

ist. Nun beträgt die Masse innerhalb des Radius r , wobei $r \leq R$ ist,

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \varepsilon(r') r'^2 dr'. \quad (4.64)$$

Die \tilde{g}_{11} -Komponente erhält man unter Verwendung dieser Massenbeziehung in der Gleichung (4.63),

$$\tilde{g}_{11}(r) = -e^{2\lambda(r)} = -\left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right)^{-1}. \quad (4.65)$$

Löst man nun die Gleichung (4.62) nach λ' auf, dann erhält man

$$\lambda' = \frac{1}{2r} - \left[\frac{1}{2r} - 4\pi\varepsilon(r) r \right] e^{2\lambda(r)}. \quad (4.66)$$

Jetzt multipliziert man auch die Gleichung (4.59) auf beiden Seiten mit r^2 ,

$$r^2 G_1^1 = e^{-2\lambda} (1 + 2r\nu') - 1 = 8\pi p(r) r^2. \quad (4.67)$$

Diese Gleichung löst man nach ν' auf,

$$\nu' = \left[\frac{1}{2r} + 4\pi p(r)r \right] e^{2\lambda(r)} - \frac{1}{2r}. \quad (4.68)$$

Durch Quadrieren erhält man

$$\begin{aligned} \nu'^2 &= \left[\frac{1}{4r^2} + 4\pi p(r) + 16\pi^2 p^2(r)r^2 \right] e^{4\lambda(r)} \\ &\quad - \left[\frac{1}{2r^2} + 4\pi p(r) \right] e^{2\lambda(r)} + \frac{1}{4r^2}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

ν'' ermittelt man durch Differentiation von Gleichung (4.68) nach r ,

$$\nu'' = e^{2\lambda(r)} \left[-\frac{1}{2r^2} + \frac{\lambda'}{r} + 4\pi r p' + 4\pi p(r) + 8\pi p(r)r\lambda' \right] + \frac{1}{2r^2}. \quad (4.70)$$

Hierin verwendet man für λ' die Gleichung (4.66),

$$\begin{aligned} \nu'' &= e^{4\lambda(r)} \left[-\frac{1}{2r^2} + 4\pi\varepsilon(r) - 4\pi p(r) + 32\pi^2 p(r)\varepsilon(r)r^2 \right] \\ &\quad + e^{2\lambda(r)} [4\pi r p' + 8\pi p(r)] + \frac{1}{2r^2}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Jetzt setzt man die Gleichungen (4.66), (4.68), (4.69) und (4.71) in G_2^2 (4.60) ein. Der Ausdruck, den man dann erhält, ist zunächst sehr lang, aber man kann ihn vereinfachen zu

$$\begin{aligned} G_2^2 &= 8\pi p(r) \\ &= 4\pi r p' + 6\pi p(r) - 2\pi\varepsilon(r) \\ &\quad + e^{2\lambda(r)} [2\pi\varepsilon(r) + 2\pi p(r) + 16\pi^2 p(r)\varepsilon(r)r^2 + 16\pi^2 p^2(r)r^2]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Löst man dies nach p' auf, dann ergibt das

$$p' = \frac{p(r) + \varepsilon(r)}{2r} + e^{2\lambda} \left[-\frac{\varepsilon(r) + p(r)}{2r} - 4\pi r [p(r)\varepsilon(r) + p^2(r)] \right]. \quad (4.73)$$

Mit Hilfe der Gleichung (4.65) ermittelt man, daß

$$e^{2\lambda(r)} = \frac{r}{r - 2M(r)} \quad (4.74)$$

ist. Dieses Ergebnis setzt man nun in die Gleichung (4.73) ein und vereinfacht dann diesen Ausdruck. Als Lösung errechnet man

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{[p(r) + \varepsilon(r)] [M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r [r - 2M(r)]}. \quad (4.75)$$

Dies ist die *Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung*.

Jetzt muß nur noch ν und damit \tilde{g}_{00} bestimmt werden. Hierfür verwendet man die Gleichungen (4.68) und (4.74),

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{M(r) + 4\pi p(r)r^3}{r [r - 2M(r)]}. \quad (4.76)$$

Es gilt

$$\int_0^r \nu' dr = \nu(r) - \nu(0). \quad (4.77)$$

Dadurch ist

$$\nu(r) = \int_0^r \nu' dr + \nu(0) . \quad (4.78)$$

Das Integral kann man numerisch bestimmen. Aber man kennt zunächst $\nu(0)$ nicht. Es kann erst später mit der Beziehung

$$\nu(0) = \nu(R) - \int_0^R \nu' dr = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right) - \int_0^R \nu' dr \quad (4.79)$$

ermittelt werden. $\nu(R)$ erhält man als Randbedingung aus der Gleichung (4.46). Dadurch ist dann

$$\tilde{g}_{00}(r) = e^{2\nu(r)} , \quad (r \leq R) . \quad (4.80)$$

Die Teilchenanzahl N innerhalb des Radius $r \leq R$ beträgt

$$N(r) = 4\pi \int_0^r \frac{n(r') r'^2 dr'}{\sqrt{1 - \frac{2M(r')}{r'}}} , \quad (4.81)$$

worin $n(r)$ die Teilchenzahldichte beim Radius r ist.

Die TOV-Gleichung wird vom Sternzentrum $r = 0$ mit der Anfangsbedingung $M(0) = 0$ und der Zentralenergiedichte $\varepsilon(0)$ als Parameter bis zur Sternoberfläche $r = R$ integriert, wo der Druck $p(r)$ verschwindet. Damit sind der Gravitationsradius R , die Gravitationsmasse $M(R)$ mit (4.64) und die Teilchenanzahl $N(R)$ mit (4.81) bekannt.

Kapitel 5

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dargestellt, die mit den Formeln der vorangegangenen Kapiteln ausgerechnet worden sind. Die Resultate sind die Zustandsgleichung und die Eigenschaften der Quarkmaterie und Quarksterne. Meine Ergebnisse stimmen mit denen von [19] überein, wenn man die Effektivmasse, die dort miteinkalkuliert wird, außer acht läßt und den Nullpunktsdruck abzieht. Für die Berechnungen muß man noch eine Bagkonstante B einführen, da der Druck sonst erst bei der Quarkdichte $n = 0$ verschwindet und dadurch die Radien der Quarksterne riesengroß werden. Durch Einführen der Bagkonstante kann die Randbedingung der TOV-Gleichung $p = 0$ bei $n > 0$ sofort erfüllt werden. Die Quarkmaterie, die mit Hilfe der QCD berechnet worden ist, wird also erst durch das Einführen der Bagkonstante zu einem Stern gebunden.

5.1 Die Quarkmaterie

Zunächst plottet man den Druck (2.223) gegen das quarkchemische Potential μ , siehe Abbildungen 5.1 und 5.2, um zu sehen, welcher der verschiedenen Fälle energetisch bevorzugt wird. Dies ist nämlich der Druck, der bei gegebenem μ am größten ist. Die Konstanten wählt man zu

$$m_s = 0.1407 \text{ GeV}, \quad (5.1)$$

$$\frac{g^2}{\Lambda^2} = 45.1467 \text{ GeV}^{-2}, \quad (5.2)$$

$$\kappa = 0.6533 \text{ GeV}, \quad (5.3)$$

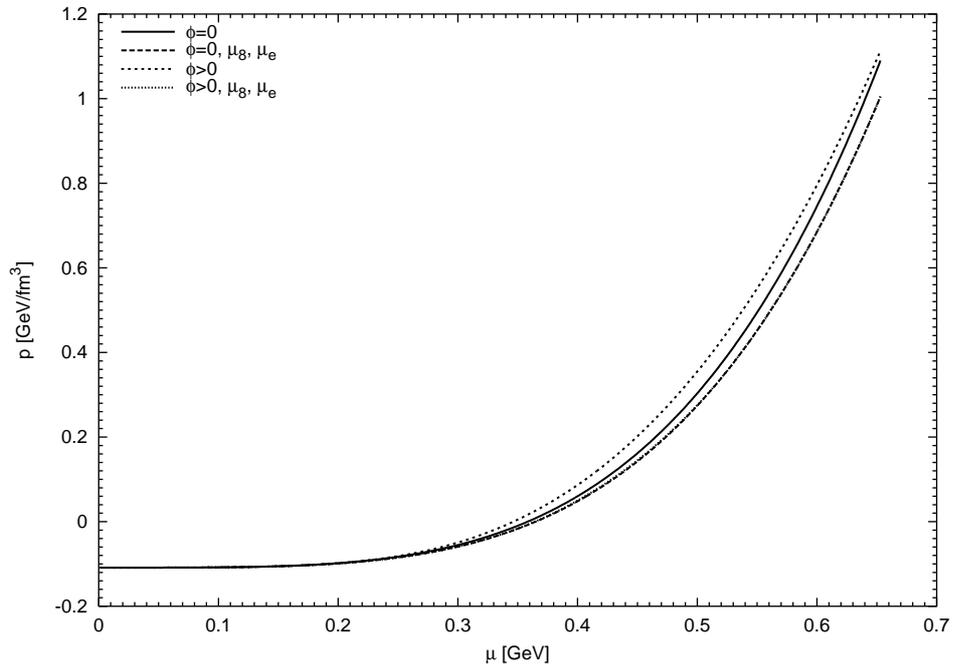
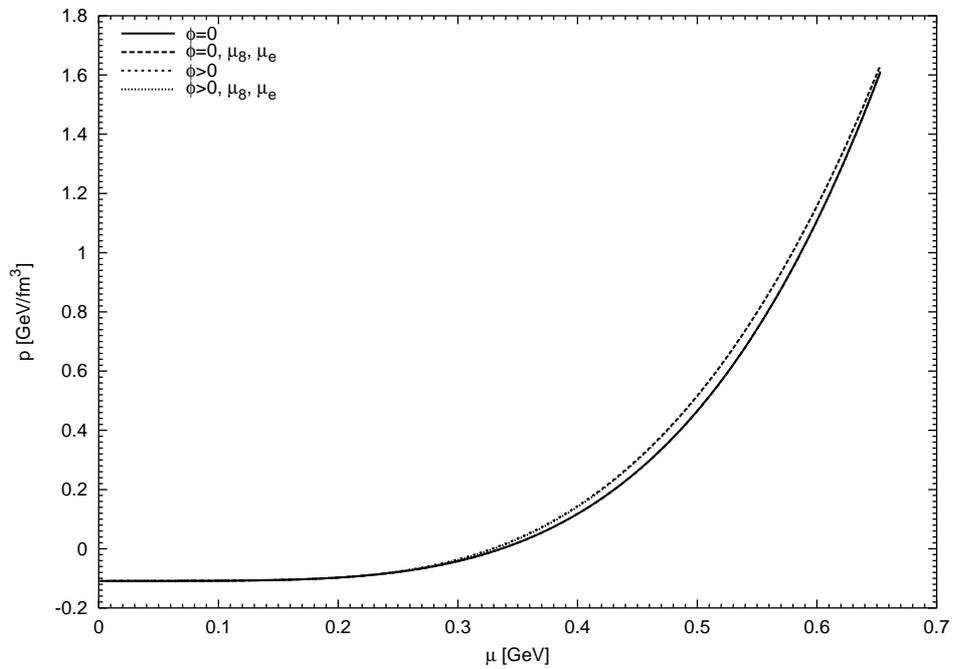
$$B^{1/4} = 0.17 \text{ GeV}, \quad (5.4)$$

um den experimentellen Wert der Pion-Zerfallskonstante $f_\pi = 93 \text{ MeV}$ zu reproduzieren und um meine Ergebnisse mit denen von [19] vergleichen zu können. Hiermit werden nun der Druck und die Energiedichte modifiziert zu

$$p \rightarrow p - B \quad (5.5)$$

$$\varepsilon \rightarrow \varepsilon + B. \quad (5.6)$$

$\phi = 0$ bedeutet, daß die Quarkmaterie nicht 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitend ist im Gegensatz zu den Berechnungen mit Gap, bei denen $\phi > 0$ ist. Ohne strange Quarks bedeutet, daß keine strange Quarks in der Quarkmaterie vorhanden sind. Mit strange Quarks bedeutet, daß strange Quarks nur dann in der Quarkmaterie vorhanden sind, wenn der Absolutbetrag des quarkchemischen Potentials der strange Quarks $|\mu_s^*|$ größer ist als die Strangequarkmasse m_s . Nicht neutralisiert bedeutet,

Abbildung 5.1: Der Druck ohne strange Quarks aufgetragen gegen μ Abbildung 5.2: Der Druck mit strange Quarks aufgetragen gegen μ

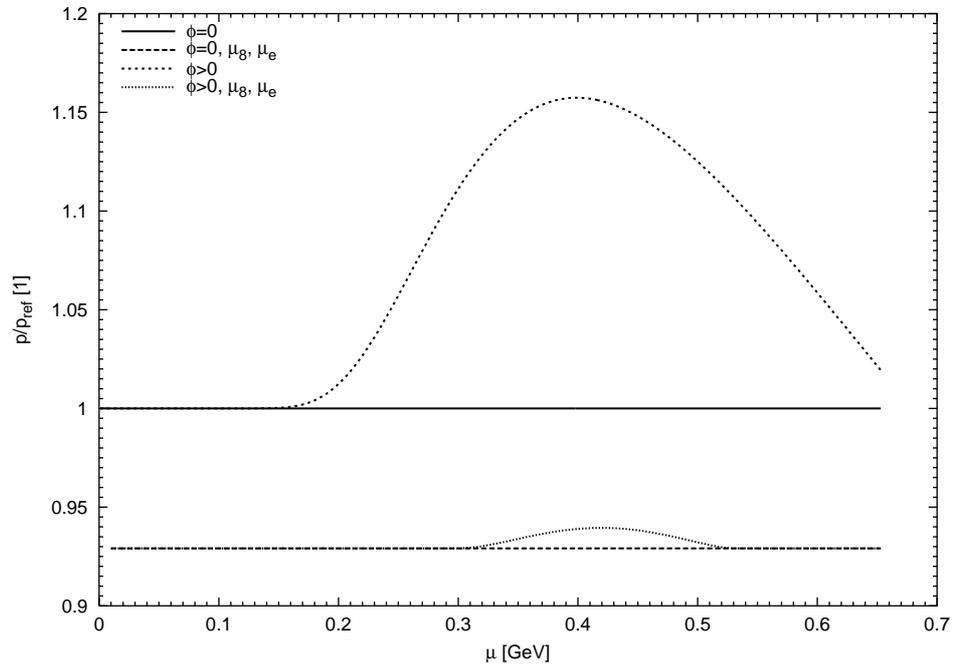


Abbildung 5.3: Der normierte Druck ohne strange Quarks aufgetragen gegen μ für $B = 0$

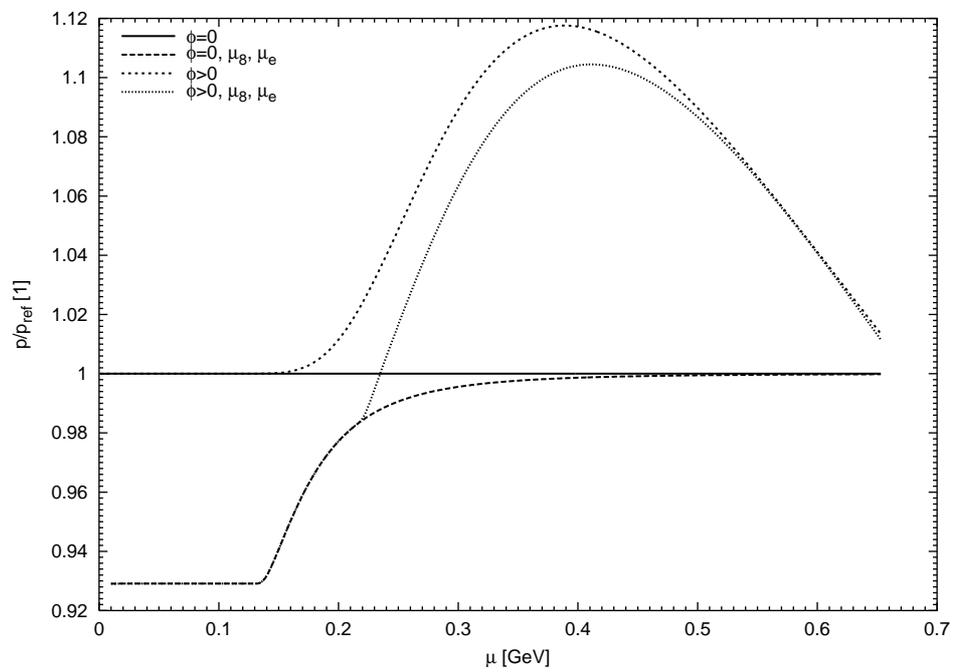


Abbildung 5.4: Der normierte Druck mit strange Quarks aufgetragen gegen μ für $B = 0$

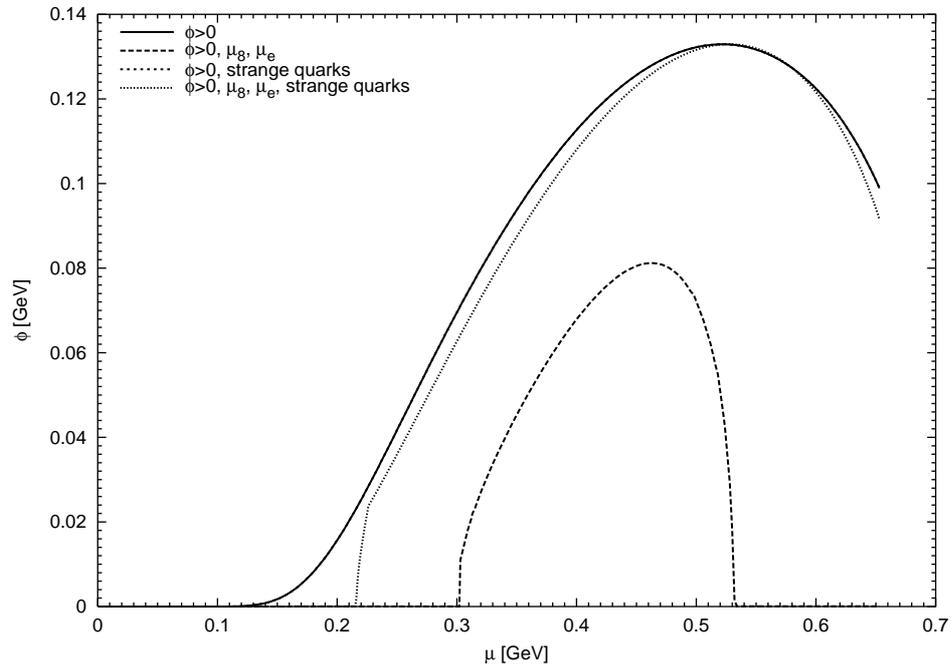


Abbildung 5.5: Der Gap aufgetragen gegen das quarkchemische Potential

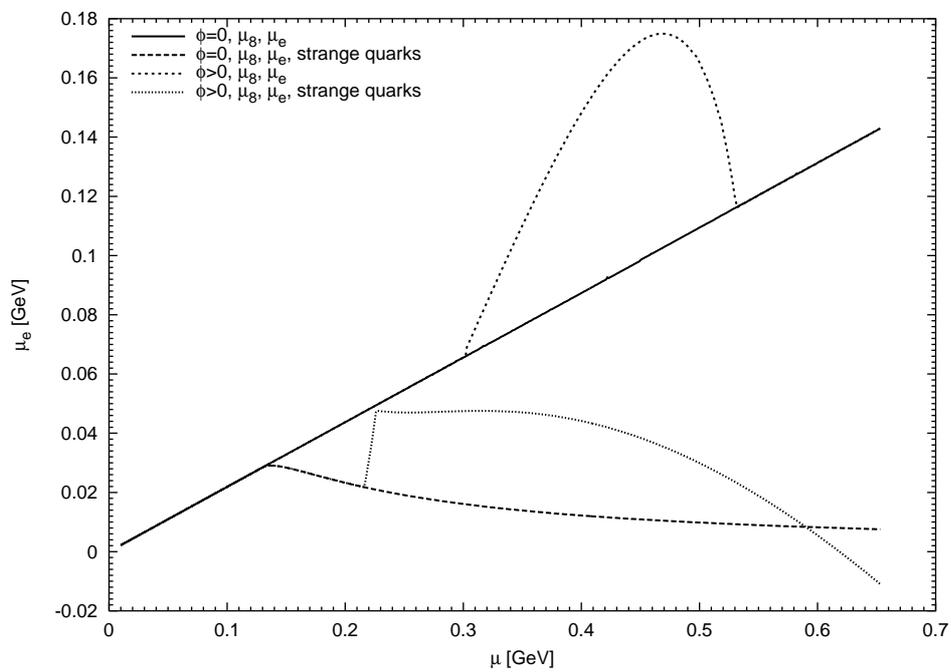


Abbildung 5.6: Das elektrochemische aufgetragen gegen das quarkchemische Potential

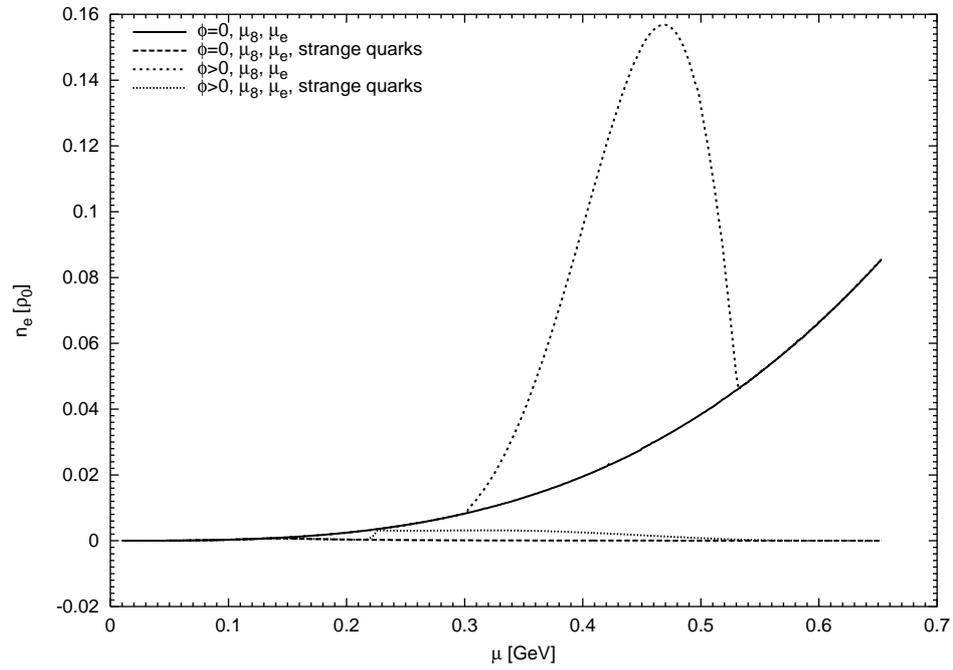


Abbildung 5.7: Die Elektronendichte aufgetragen gegen das quarkchemische Potential

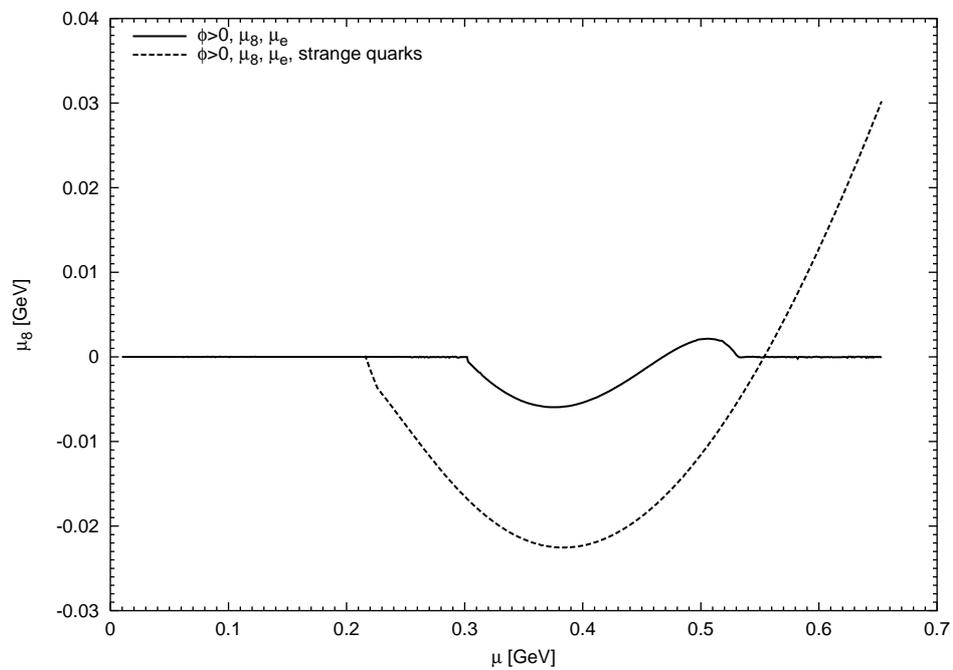


Abbildung 5.8: Das farbchemische aufgetragen gegen das quarkchemische Potential

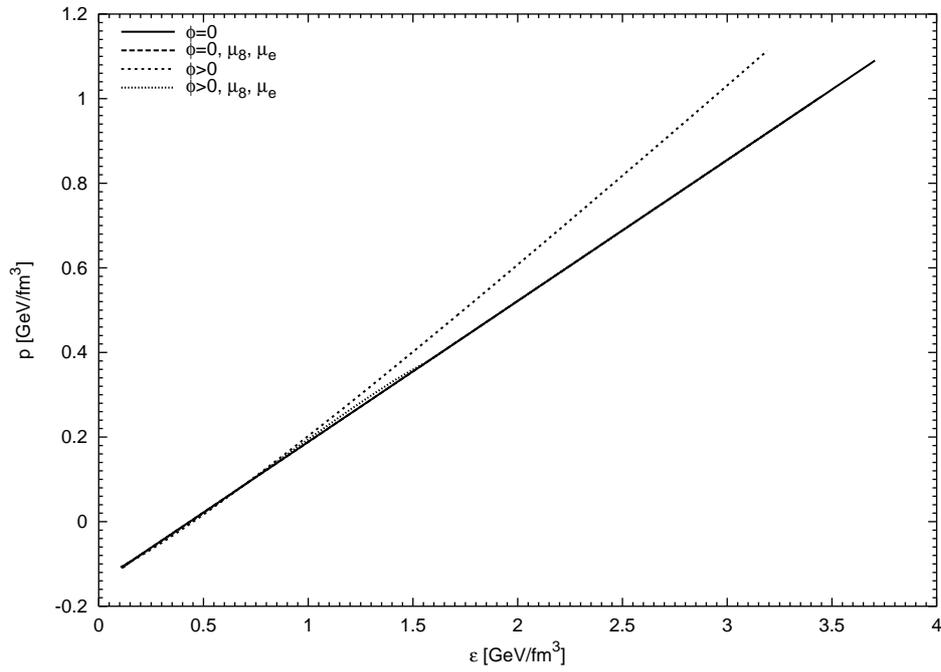


Abbildung 5.9: Die Zustandsgleichungen ohne strange Quarks

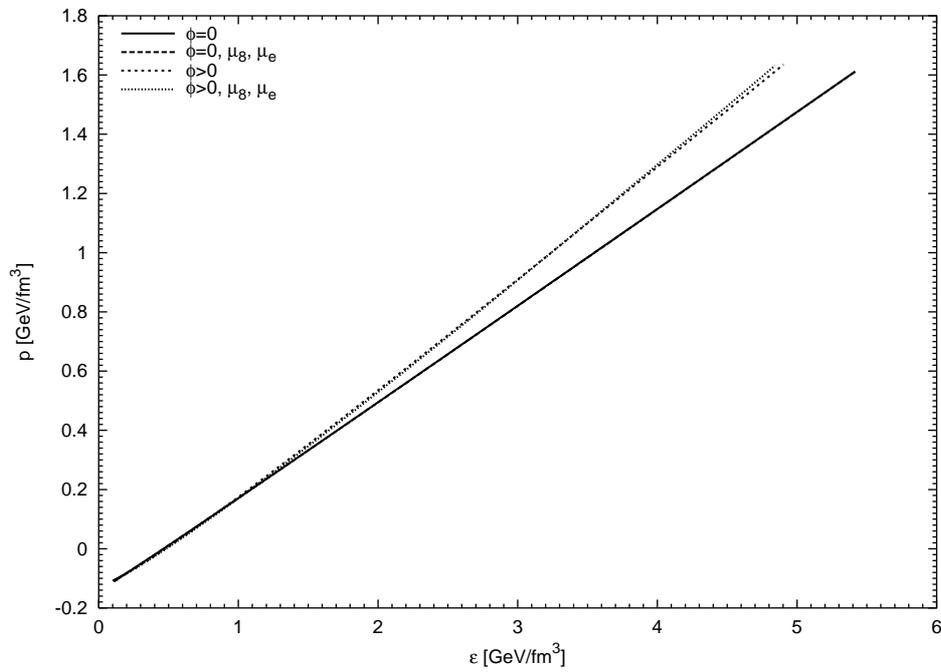


Abbildung 5.10: Die Zustandsgleichungen mit strange Quarks

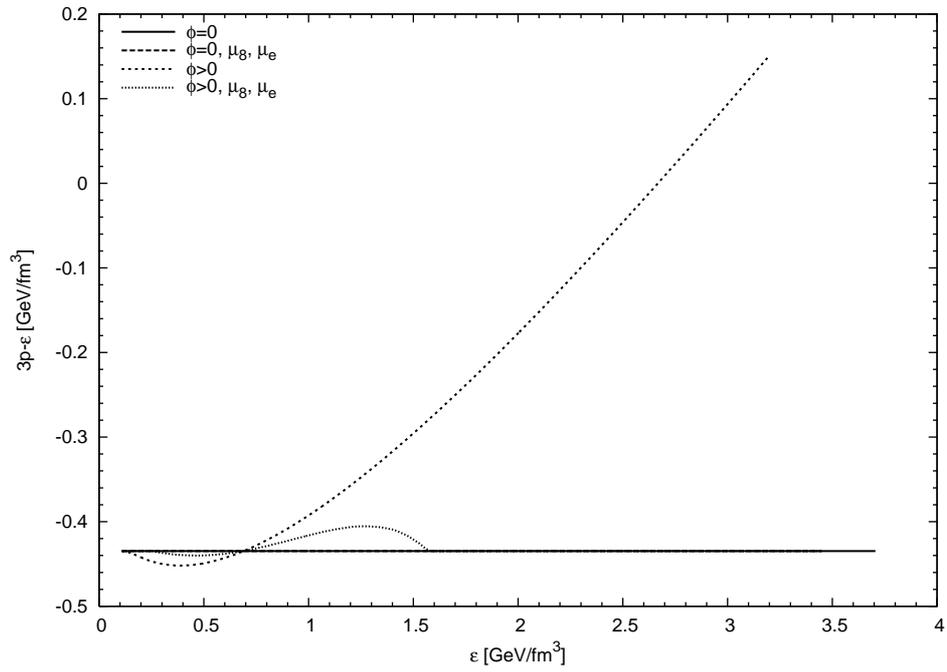


Abbildung 5.11: $3p - \epsilon$ aufgetragen gegen ϵ bei Verwendung von Quarkmaterie ohne strange Quarks

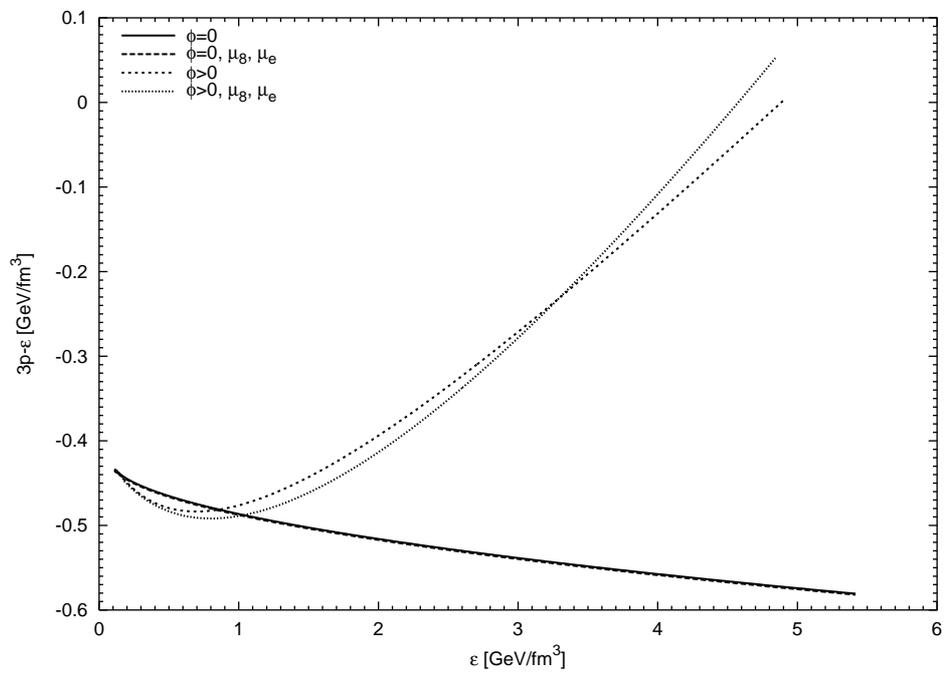


Abbildung 5.12: $3p - \epsilon$ aufgetragen gegen ϵ bei Verwendung von Quarkmaterie mit strange Quarks

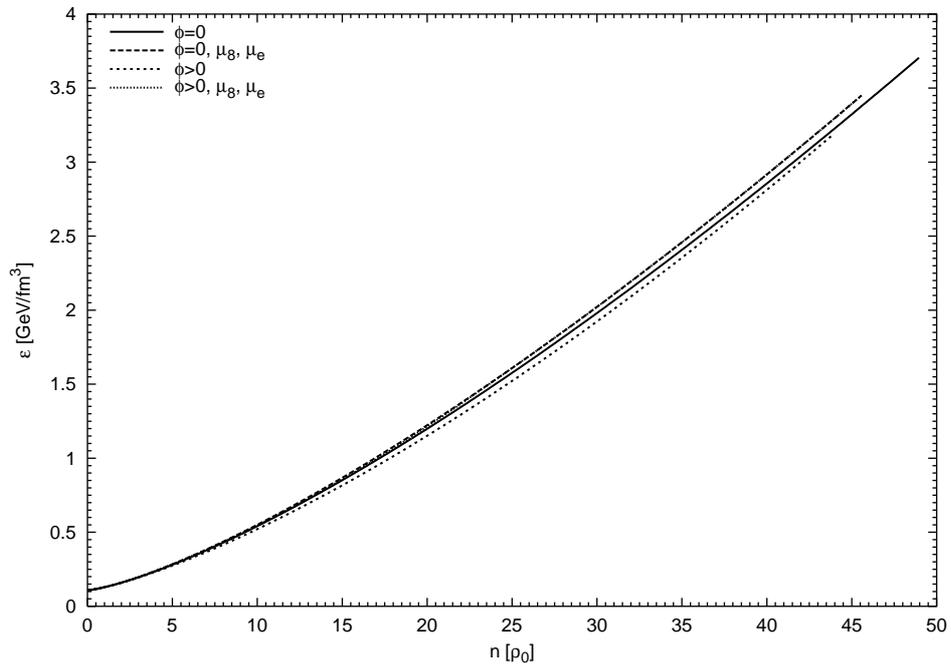


Abbildung 5.13: Die Energiedichte aufgetragen gegen die Quarkdichte bei Verwendung von Quarkmaterie ohne strange Quarks

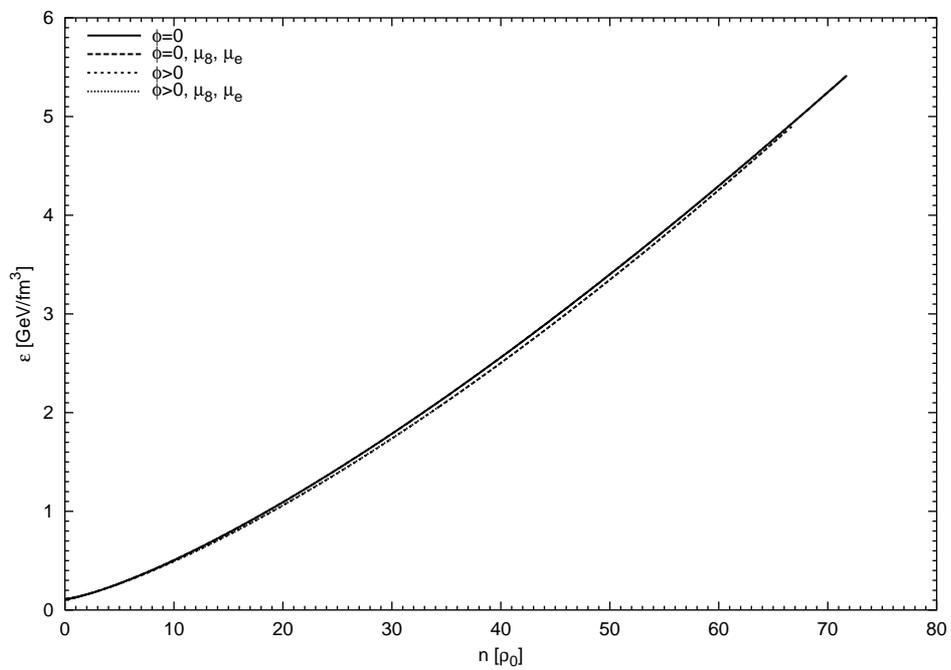


Abbildung 5.14: Die Energiedichte aufgetragen gegen die Quarkdichte bei Verwendung von Quarkmaterie mit strange Quarks

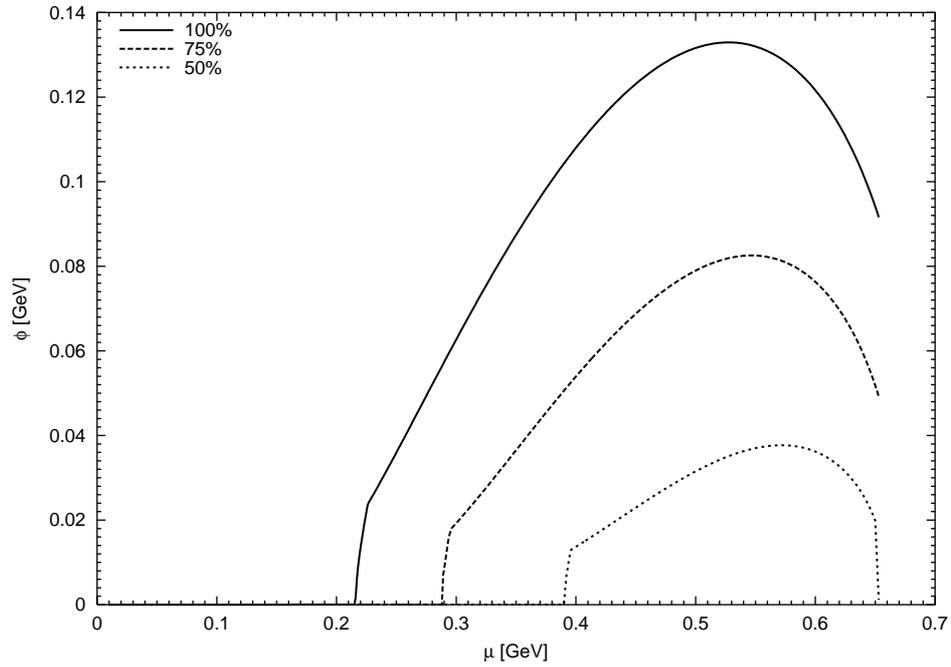


Abbildung 5.15: Der Gap für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks aufgetragen gegen μ mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt

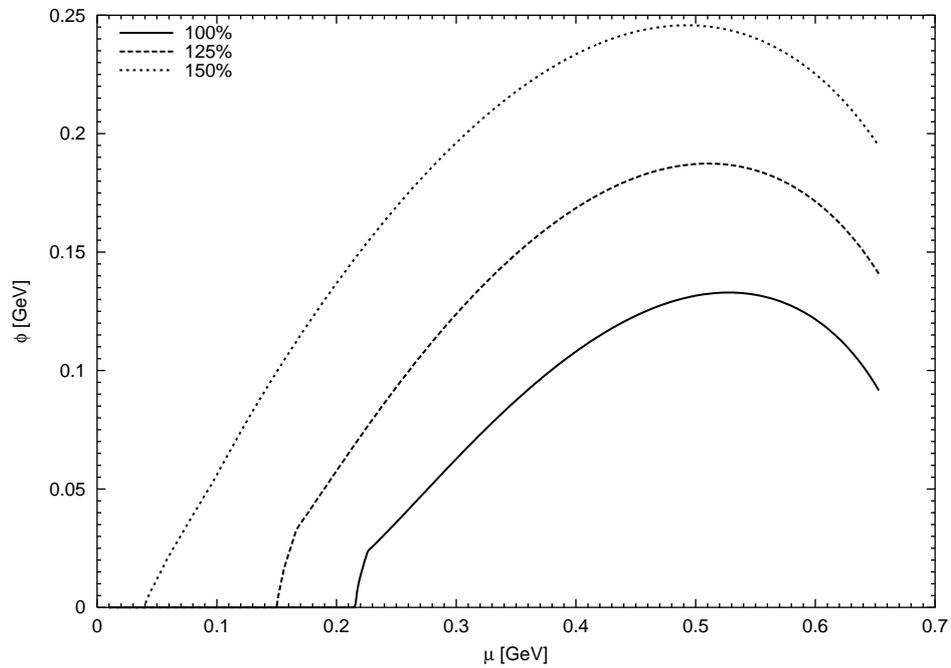


Abbildung 5.16: Der Gap für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks aufgetragen gegen μ mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt

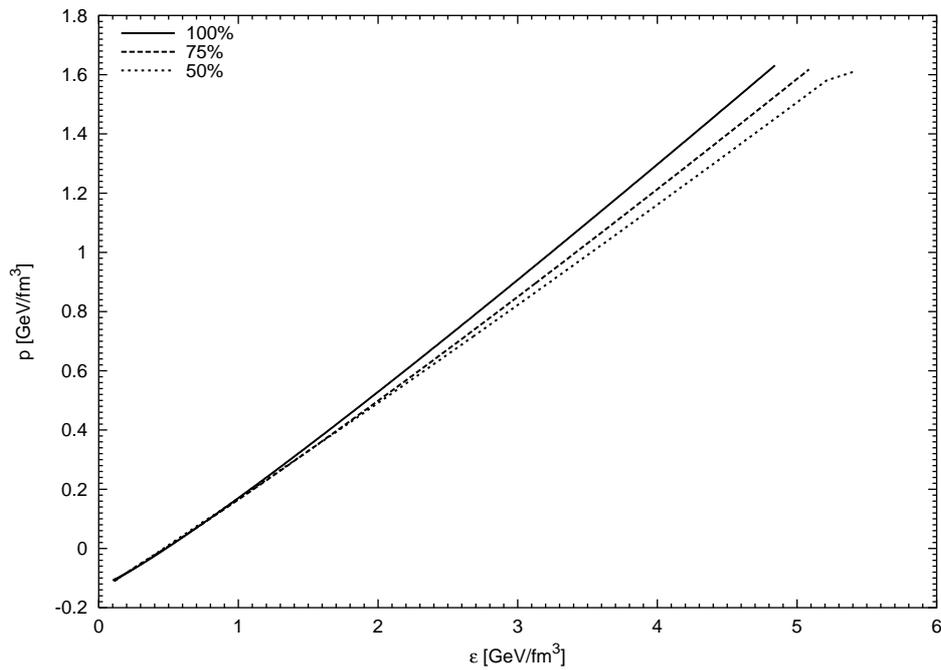


Abbildung 5.17: Die Zustandsgleichung für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt

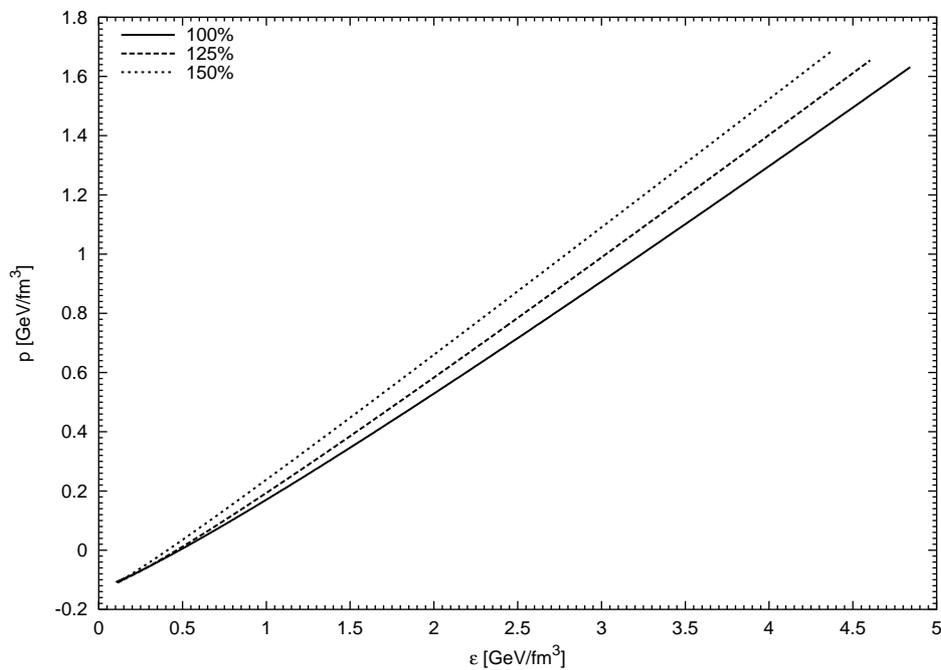


Abbildung 5.18: Die Zustandsgleichung für neutralisierte Quarkmaterie mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt

daß $\mu_8 = \mu_e = 0$ gesetzt wird und damit weder ein farbchemisches Potential noch Elektronen vorhanden sind, die eine geladene Quarkmaterie neutralisieren könnten. Neutralisiert bedeutet, daß $\mu_8 \neq 0$ und $\mu_e \neq 0$ sein kann und das farbchemische Potential und die Elektronen geladene Quarkmaterie neutralisieren.

Besser ist der Graph des maximalen Drucks in den normierten Druckabbildungen 5.3 und 5.4 zu erkennen. Die normierten Drücke sind die vom quarkchemischen Potential abhängigen Drücke dividiert durch den vom quarkchemischen Potential abhängigen Druck ohne Gap und ohne Neutralisation. Die Bagkonstante ist in den normierten Druckabbildungen vernachlässigt worden, weil dadurch die Graphen besser unterscheidbar sind und B sowieso keinen Einfluß auf die Reihenfolge der maximalen Drücke hat. Anhand dieser Abbildungen sieht man, daß der Graph mit Gap, mit strange Quarks und ohne Neutralisation der mit dem maximalen Druck ist. D. h., daß 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie mit freien strange Quarks ohne Neutralisation bevorzugt wird. Für die Quarksterne bedeutet das, daß sie sowohl farb-, als auch elektrisch geladen wären. Aber wegen der abstoßenden Coulombkraft würde der Stern nicht stabil sein und explodieren. Der nächste bevorzugte, neutralisierte Zustand ist der mit Gap und mit strange Quarks. Desweiteren ist in den Abbildungen 5.3 und 5.4 zu erkennen, daß die Neutralisation den Druck sowohl von 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitender, als auch von freier Quarkmaterie reduziert und daher keine ladungsneutrale 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie bevorzugt wird. 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende hat immer einen höheren Druck als freie Quarkmaterie und wird daher immer bevorzugt. Die Hinzunahme von strange Quarks führt immer zu einer Druckerhöhung. Daher wird Quarkmaterie, 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitend oder nicht, mit strange Quarks immer bevorzugt.

In den Abbildungen 1 und 2 von [20] wird ΔF gegen den Gap bzw. μ aufgetragen. Diese Graphen sind mit Gaps dargestellt, die nicht von μ abhängen. In Abbildung 5.5 sieht man jedoch, daß der Gap von μ abhängt. In [19] und [21] ist der Gap in Abhängigkeit von μ dargestellt. Auch dort ist zu sehen, daß 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende gegenüber freier Quarkmaterie bevorzugt wird. In Abbildung 3 von [21] sind der Druck der CFL-, der 2SC- und der normalen, freien Phase eingetragen. Wie man sieht, wird die CFL-Phase bei $\mu \gtrsim 0.45$ GeV gegenüber der 2SC-Phase bevorzugt. Jedoch wird die 2SC- bei kleineren μ der CFL-Phase vorgezogen. Die normale Phase ist immer benachteiligt, was die Ergebnisse von [19] und auch meine beweisen. In [20] wird behauptet, daß die normale der 2SC-Phase bei niedrigem chemischem Potential vorgezogen werden würde. Diese Aussage wird durch die Ergebnisse von [19], [21] und mir widerlegt. Man berücksichtige jedoch, daß die Ergebnisse in [20] und [21] nicht exakt sind, weil dort Näherungen mit Hilfe von Taylorentwicklungen durchgeführt worden sind. Die numerisch bestimmten Ergebnisse von [19] und mir sind deshalb genauer. In meiner Diplomarbeit werden ausschließlich die Auswirkungen der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase auf Quarksterne untersucht, nur um zu sehen, ob der Effekt der Farbsupraleitung überhaupt die Eigenschaften der Quarksterne verändert. Die Untersuchung der CFL-Phase auf Quarksterne würde den Rahmen dieser Diplomarbeit sprengen.

Der Gap, siehe Abbildung 5.5, ist für geladene Quarkmaterie mit und ohne strange Quarks identisch, weil die strange Quarks keinen Einfluß auf ihn haben, wenn die Quarkmaterie nicht neutralisiert ist. Die Neutralisation verursacht große Einbußen sowohl beim Gap, als auch beim Druck, besonders wenn die strange Quarks weggelassen werden. Der Knick in den Gapgraphen kommt durch die abschneidenden Integralgrenzen (2.222) zustande, in denen Θ -Funktionen enthalten sind. Durchschnittlich beträgt der Gap 0.1 GeV, wenn die strange Quarks nicht weggelassen werden und die geladene Quarkmaterie nicht neutralisiert wird, denn sonst reduziert sich der Gap erheblich. Er beträgt dann nur noch durchschnittlich 0.06 GeV und bei $\mu \cong 0.535$ GeV verschwindet er. Alle Gapgraphen steigen zunächst mit wachsendem quarkchemischem Potential an. Maximal wird der Gap bei $\mu = 0.525$

GeV mit $\phi = 0.134$ GeV bzw. bei $\mu = 0.47$ GeV mit $\phi = 0.082$ GeV. In der Nähe des Cutoffs fallen die Gaps mit zunehmendem μ immer schneller ab.

Das elektrochemische Potential μ_e , siehe Abbildung 5.6, steigt linear an, wenn die Quarkmaterie nur aus up und down Quarks besteht und nicht 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitend ist. 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie benötigt im Gegensatz hierzu viel mehr Elektronen, um diese zu neutralisieren. Die hohen elektrochemischen Potentiale sind deswegen auch für die niedrigeren Gaps und Drücke verantwortlich. Fügt man nun noch die strange Quarks hinzu, dann nimmt das elektrochemische Potential mit wachsendem μ immer mehr ab, weil diese mit ihrer elektrischen Ladung $-1/3$ die positiv elektrisch geladene Quarkmaterie immer mehr mit wachsendem μ neutralisieren kann. Im Fall von 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitender Quarkmaterie werden bei $\mu \cong \kappa$ sogar Positronen benötigt, um Neutralität herzustellen, da $\mu_e < 0$ wird. Der Knick in den Kurven kommt auch hier wieder aufgrund der abschneidenden Integralgrenzen zustande.

Genau dieselben Erkenntnisse liefert die Abbildung 5.7. Man sieht, daß immer mehr Elektronen benötigt werden, um die Quarkmaterie, die nur aus freien up und down Quarks besteht, zu neutralisieren. Ist sie zusätzlich noch 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitend, dann benötigt man fast das achtfache an Elektronen, um sie zu neutralisieren. Wenn die Quarkmaterie strange Quarks beinhaltet, dann beträgt die Elektronendichte nur maximal $0.00072\rho_0$ bzw. $0.00314\rho_0$ in der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase, weil die strange Quarks schon mit ihrer negativen Ladung für das Neutralisieren der sonst positiv geladenen Quarkmaterie sorgen.

Nicht farbsupraleitende Quarkmaterie ist immer farbneutral. Im Gegensatz dazu ist 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie von Natur aus immer farbgeladen. In der Abbildung 5.8 sind daher nur die neutralisierten Quarkmateriegraphen mit der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase dargestellt. Auffällig ist, daß diese Quarkmaterien sowohl positive, als auch negative μ_8 -Werte besitzen. Bei der neutralisierten Quarkmaterie, die nur up und down Quarks beinhaltet, könnte man $\mu_8 = 0$ setzen, da es vernachlässigbar kleine Werte annimmt. Quarksterne mit solcher Materie wären dann so gut wie bzw. überhaupt nicht farbgeladen. Die μ_8 -Werte des anderen Graphen dürfen nicht vernachlässigt werden.

In den Abbildungen 5.9, 5.10, 5.11 und 5.12 sieht man, daß der Druck normalleitender Quarkmaterie bestehend aus up und down Quarks mit und ohne Elektronen der Relation $p = (\varepsilon - 4B)/3$ genügt. Der Grund dafür ist, daß die Quarks und Elektronen frei und als masselos angenommen worden sind. Alle anderen Graphen weichen vom idealen, relativistischen Quantengas ab. Mit größer werdender Energiedichte nimmt auch der Druck ständig zu.

Mit wachsender Quarkdichte steigt die Energiedichte an, siehe Abbildungen 5.13 und 5.14. Man erkennt auch hier, daß die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende gegenüber der ungepaarten Phase immer bevorzugt wird, weil sie energetisch günstiger ist.

Die Abbildungen 5.15 und 5.16 zeigen, daß der Gap bei kleineren Kopplungskonstanten abnimmt und bei größeren zunimmt.

In den Abbildungen 5.17 und 5.18 sind die Zustandsgleichungen mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter dargestellt.

5.2 Quarksterne

Mit Hilfe der Massenformel (4.64), der TOV-Gleichung (4.75) und der Teilchenanzahl (4.81) lassen sich nun aus den Zustandsgleichungen der Quarkmaterien die Eigenschaften von Quarksternen ermitteln.

In Abbildung 5.19 sind die Masse-Radius-Graphen der Quarksterne dargestellt. Es sind nur neutralisierte Quarksterne berechnet worden, weil geladene Quarksterne aufgrund der abstoßenden Coulombkraft explodieren würden. Es ist deut-

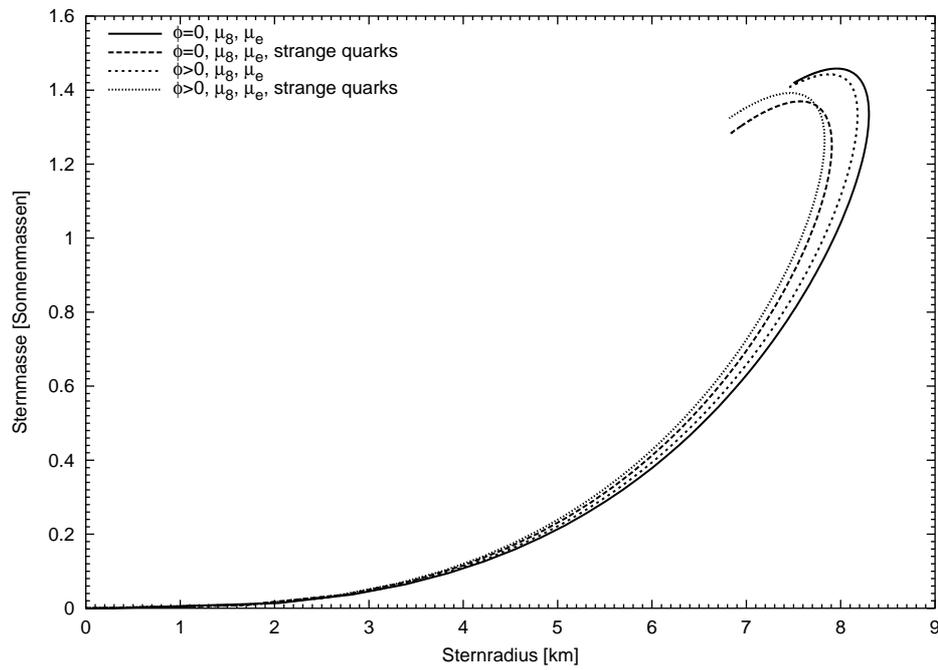


Abbildung 5.19: Das Masse-Radius-Diagramm der Quarksterne

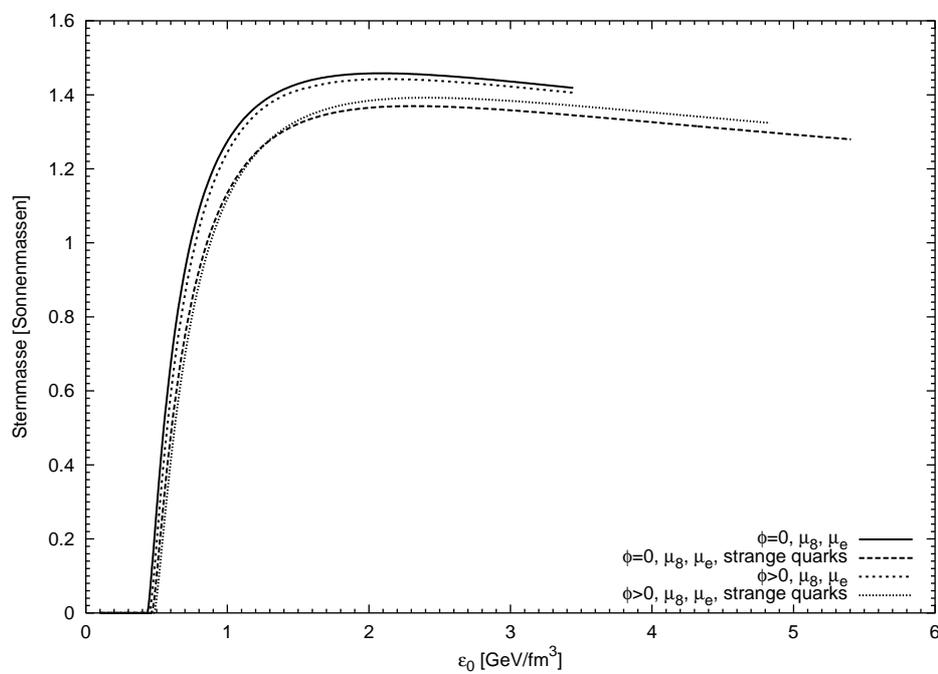


Abbildung 5.20: Die Quarksterne Masse aufgetragen gegen die Zentralenergie dichte

lich sichtbar, daß sich die Eigenschaften der Quarksterne durch die 2SC- $\langle ud \rangle$ -Farbsupraleitung verändern. Der Quarksternradius reduziert sich bei 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitender Quarkmaterie ohne strange Quarks um maximal 0.122 Kilometer. Die Quarksternmasse verringert sich um maximal $0.016 M_{\odot}$. Betrachtet man Quarksterne, die strange Quarks enthalten, dann erkennt man, daß diese kleiner und masseärmer sind als solche ohne strange Quarks. Die 2SC- $\langle ud \rangle$ -Farbsupraleitung bewirkt, daß der Quarksternradius um maximal 0.072 Kilometer abnimmt und die Quarksternmasse um maximal $0.023 M_{\odot}$ zunimmt. Im Graphabschnitt links von den maximalen Quarkmassen, wo der Radius wieder abfällt, sind die Quarksterne aufgrund von radialen Oszillationen instabil.

Aus der Abbildung 5.20 ist ersichtlich, daß diejenigen Quarksterne mit der niedrigeren Zentralenergiedichte die größeren Maximalmassen besitzen.

Die Abbildung 5.21 soll dem Leser zeigen, wieviele Quarks sich in einem Quarkstern befinden. Die Quarkanzahl ist in Einheiten von 10^{57} angegeben. Je größer die Masse des Quarksterns ist, desto mehr Quarks sind in ihm enthalten.

In den Abbildungen 5.22 und 5.23 sind neutralisierte Quarksterne, die strange Quarks beinhalten, mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter dargestellt. Durch das Erhöhen der Kopplungskonstante nehmen auch die Gaps zu. Die Auswirkungen von größeren Gaps auf die Quarksterneigenschaften soll hiermit überprüft werden. Die Prozentangaben geben den Faktor an, mit dem der Referenzwert der Kopplungskonstante (5.2) multipliziert worden ist. Zum Vergleichen sind nochmals nichtfarbsupraleitende und 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarksterne mit der Kopplungskonstante (5.2) eingetragen. Durch Erhöhen der Kopplungskonstante ist eine deutliche Massen- und Radiuszunahme der Quarksterne erkennbar. Man stellt fest, daß der Quarksternradius bei Kopplungskonstanten, die kleiner als der Referenzwert (5.2) sind, gegenüber nichtfarbsupraleitenden Quarksternen geringer ist, bei größeren Kopplungskonstanten als der Referenzwert aber zunimmt. Die maximale Radiusdifferenz zwischen nichtfarbsupraleitenden und 2SC- $\langle ud \rangle$ -

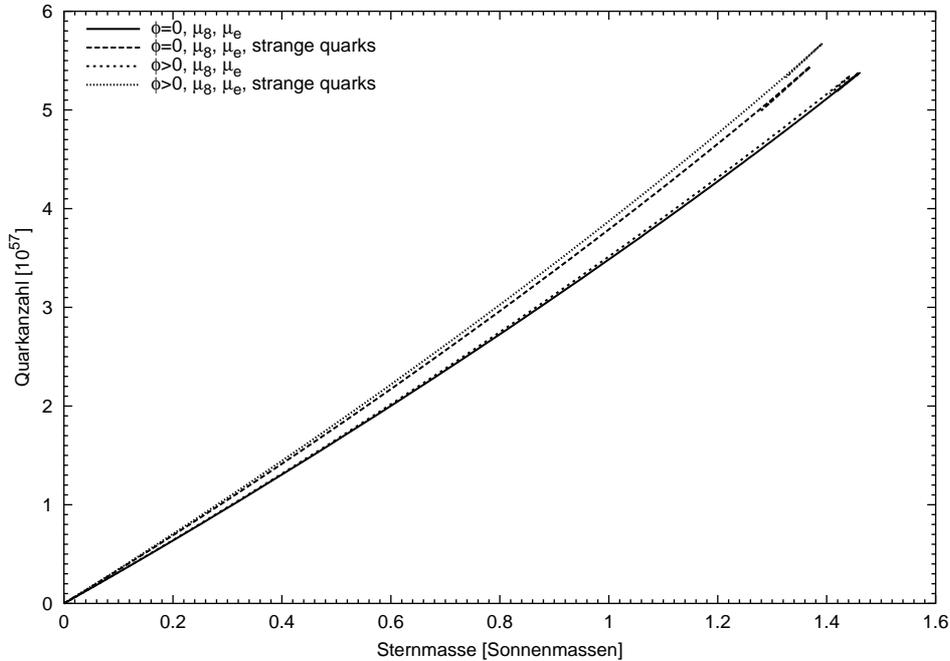


Abbildung 5.21: Die Anzahl der Quarks aufgetragen gegen die Quarksternmasse

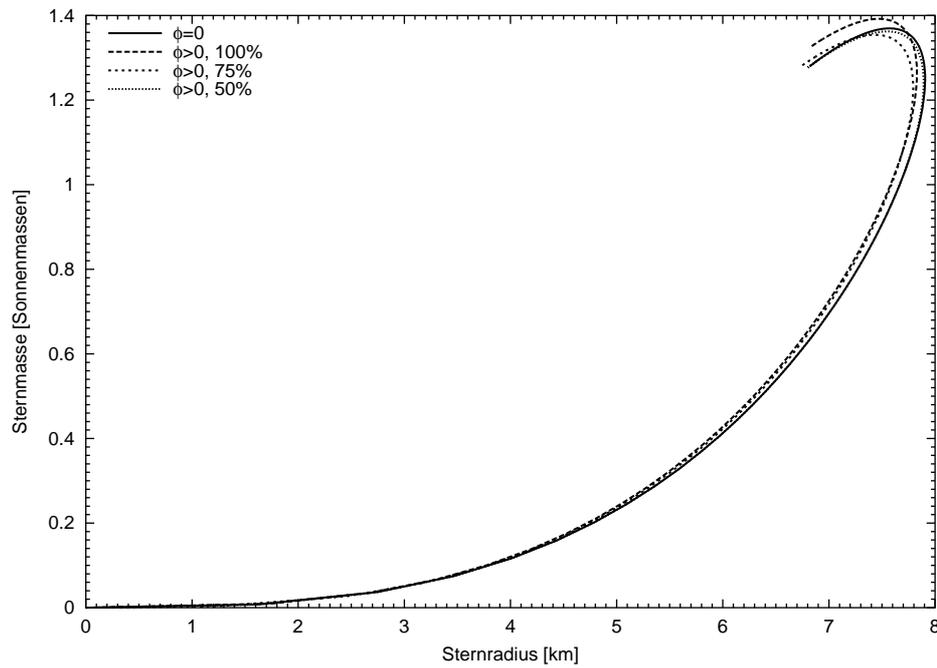


Abbildung 5.22: Das Masse-Radius-Diagramm für Quarksterne mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt

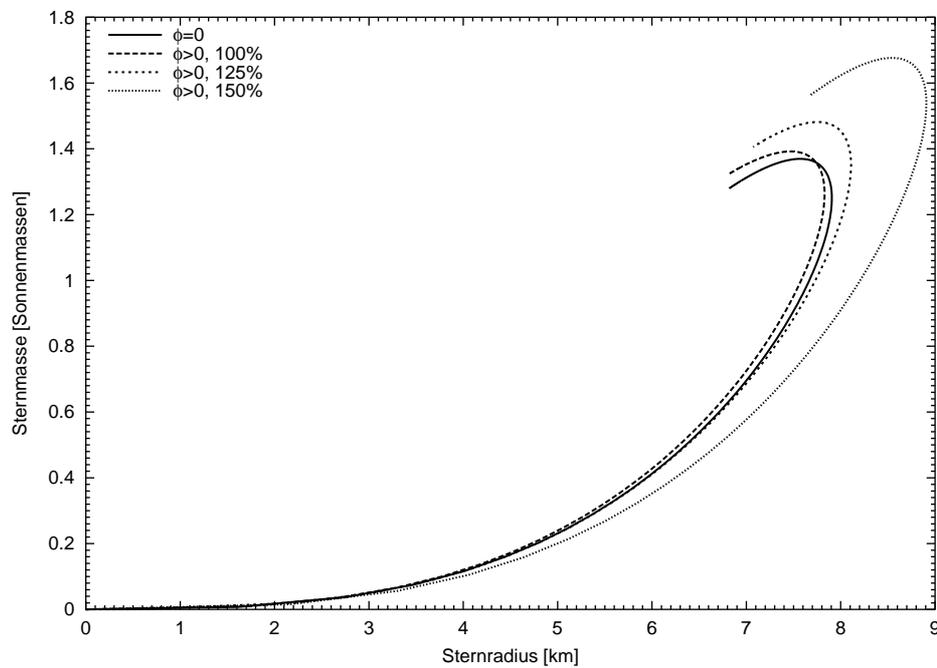


Abbildung 5.23: Das Masse-Radius-Diagramm für Quarksterne mit strange Quarks mit der Kopplungskonstante g^2/Λ^2 als Parameter, die sich aus dem Referenzwert (5.2) multipliziert mit der angegebenen Prozentzahl ergibt

farbsupraleitenden Quarksternen, die mit einer Kopplungskonstante, die 125% des Referenzwertes (5.2) entspricht, gerechnet worden sind, beträgt 0.21 Kilometer und die maximale Massendifferenz $0.11 M_{\odot}$. Der Vergleich von nichtfarbsupraleitenden mit 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Quarksternen, die mit einer Kopplungskonstante, die 150% des Referenzwertes (5.2) entspricht, gerechnet worden sind, ergibt, daß die maximale Radiusdifferenz einen Kilometer und die maximale Massendifferenz $0.31 M_{\odot}$ betragen. Verringert man die Kopplungskonstante auf 75% oder 50% des Referenzwertes, dann nehmen auch die Gaps ab, und es sind nur geringe Veränderungen im Vergleich zu nichtfarbsupraleitenden Quarksternen erkennbar.

Kapitel 6

Zusammenfassung

Die Motivation dieser Diplomarbeit bestand darin, die Unterschiede zwischen der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden und der normalleitenden Phase der Quarkmaterie aufzuzeigen und die Auswirkungen der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase auf Quarksterne zu untersuchen. Dabei sollte festgestellt werden, wie groß der farbsupraleitende Gap sein muß, damit sich die Eigenschaften der Quarksterne merklich ändern. Dazu wurde die Kopplungskonstante variiert. Die Ergebnisse aus Kapitel 5 lassen sich somit zu folgenden Resultaten zusammenfassen:

Die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende wird immer der normalleitenden Phase der Quarkmaterie vorgezogen, weil sie energetisch günstiger ist. Zudem muß die Quarkmaterie neutral sein, denn sonst würde sie wegen der abstoßenden Coulombkraft nicht stabil sein und die Quarksterne würden explodieren. 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie mit freien, massiven strange Quarks besitzt den höchsten Druck bei gegebenem quarkchemischen Potential und ist damit am meisten bevorzugt vor allen anderen in dieser Diplomarbeit betrachteten Quarkmateriephasen. Durch das Einführen des farbchemischen und elektrischen Potentials wird die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarkmaterie neutralisiert. In der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase ohne strange Quarks werden jedoch so viele Elektronen zur Neutralisation benötigt, daß der farbsupraleitende Gap erheblich verringert wird. Die 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Phase mit freien, massiven strange Quarks wird gegenüber der 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitenden Phase ohne strange Quarks energetisch bevorzugt, weil erstere nicht so viele Elektronen zur Neutralisation benötigt, da diese Aufgabe hauptsächlich von den strange Quarks übernommen und dadurch der Gap nicht so erheblich reduziert wird. Zudem kommt noch der freie strange Quarkdruck hinzu, der diesen Zustand energetisch begünstigt.

2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarksterne ohne strange Quarks besitzen einen maximal 122 Meter kleineren Radius und eine maximal $0.016 M_{\odot}$ kleinere Masse als normalleitende Quarksterne ohne strange Quarks. 2SC- $\langle ud \rangle$ -farbsupraleitende Quarksterne mit strange Quarks besitzen einen maximal 72 Meter kleineren Radius und eine maximal $0.023 M_{\odot}$ kleinere Masse als normalleitende Quarksterne mit strange Quarks. Erhöht man den farbsupraleitenden Gap, dann werden die Quarksterne größer und schwerer. Vergrößert man die Kopplungskonstante um das 1.5-fache des angegebenen Referenzwertes (5.2), dann ungefähr verdoppelt sich der farbsupraleitende Gap. Ein Quarkstern mit strange Quarks weist dann eine Radiusdifferenz von einem Kilometer und eine Massendifferenz von $0.31 M_{\odot}$ zu einem Quarkstern mit normalleitender Phase auf. Durch Verringern des Referenzwertes der Kopplungskonstante wird auch der farbsupraleitende Gap reduziert und es treten so gut wie keine Unterschiede mehr zur normalleitenden Phase des Quarksterns auf.

Anhang A

Matrizendefinitionen

A.1 Die Pauli-Matrizen

Die Paulimatrizen sind gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (\text{A.2})$$

Es gelten für die Paulimatrizen folgende Relationen

$$\sigma_i^2 = 1, \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma_i \sigma_j = i \sigma_k, \quad (\text{A.4})$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sigma_k. \quad (\text{A.5})$$

A.2 Die Bjorken-Drell-Definition der γ -Matrizen

Die Bjorken-Drell-Definition der γ -Matrizen lautet

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (\text{A.9})$$

Es gelten für die γ -Matrizen folgende Relationen

$$\gamma_0^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad \boldsymbol{\gamma}^2 = -1, \quad \gamma_5^2 = 1, \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma_\nu = g^{\mu\nu} \gamma^\mu \quad (\text{A.11})$$

und

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.12})$$

mit

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

A.3 Die ladungskonjugierende Matrix

Die ladungskonjugierende Matrix in Dirac-Darstellung ist definiert durch

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = i\gamma^2\gamma_0. \quad (\text{A.14})$$

Hierin ist γ^2 durch die Gleichung (A.7) gegeben. Es gelten die Relationen

$$C = -C^{-1} = -C^T = -C^\dagger, \quad (\text{A.15})$$

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T. \quad (\text{A.16})$$

A.4 Die Gell-Mann-Matrizen

Die Gell-Mann-Matrizen sind definiert durch

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.17})$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Für die Gell-Mann-Matrizen gelten folgende Beziehungen

$$\text{Sp}[\lambda_a] = 0, \quad (\text{A.21})$$

$$\lambda_a^* = \lambda_a^T, \quad (\text{A.22})$$

$$\lambda_a^\dagger = \lambda_a, \quad (\text{A.23})$$

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda_c}{2}, \quad (\text{A.24})$$

wobei über $c = 1, \dots, 8$ summiert wird. Es ist $f_{abc} = 0$ außer

$$f_{123} = 1, \quad (\text{A.25})$$

$$f_{147} = -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = 1/2, \quad (\text{A.26})$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2. \quad (\text{A.27})$$

A.5 Die Vektorwechselwirkungsmatrix

Die Vektorwechselwirkungsmatrix ist gegeben durch

$$\Gamma_a^\mu = T_a \gamma^\mu, \quad (\text{A.28})$$

worin die T_a die Generatoren der $SU(3)$ sind. Diese sind durch

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2} \quad (\text{A.29})$$

definiert. Die ladungskonjugierte Vektorwechselwirkung schreibt sich zu

$$\bar{\Gamma}_a^\mu = C (\Gamma_a^\mu)^T C^{-1} = -T_a^T \gamma^\mu. \quad (\text{A.30})$$

Anhang B

Erklärung

Ich versichere hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet und sämtliche Stellen, die benutzten Werken im Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, mit Quellen- bzw. Herkunftsangaben kenntlich gemacht habe.

Frankfurt, den 28. Juni 2006

Literaturverzeichnis

- [1] D.-H. Rischke and W. Greiner, *A functional integral approach to the thermodynamics of the σ - ω model*, Int. J. Mod. Phys. **E3**, 1157 (1994)
- [2] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106** (1957) 162; **108** (1957) 1175
- [4] H. Vogel, *Gerthsen Physik*, 19. Auflage, Springer Verlag
- [5] Mark Alford, *Color superconductivity in dense quark matter*, hep-ph/0003185
- [6] Mark Alford, Jürgen Berges und Krishna Rajagopal, *Magnetic fields within color superconducting neutron star cores*, Nucl. Phys. B **571**, 269-284 (2000)
- [7] Mark Alford, Jeffrey A. Bowers and Krishna Rajagopal, *Color Superconductivity in Compact Stars*, J. Phys. G **27**, 541-556 (2001), Lect. Notes Phys. **578**, 235-252 (2001)
- [8] Mark Alford, *Color superconducting quark matter*, hep-ph/0102047
- [9] Robert D. Pisarski and Dirk H. Rischke, *Superfluidity in a Model of Massless Fermions Coupled to Scalar Bosons*, Phys. Rev. D **60**, 094013 (1999)
- [10] Robert D. Pisarski and Dirk H. Rischke, *Color superconductivity in weak coupling*, Phys. Rev. D **61**, 074017 (2000)
- [11] H. H. Voigt, *Abriß der Astronomie*, 5. Auflage
- [12] J. Herrmann, *dtv-Atlas zur Astronomie*, 10. Auflage
- [13] W. H. Kegel, *Aufbau und Dynamik der Milchstraße*, SS 2000
- [14] Hans-Ulrich Keller, *Das Himmelsjahr 1997*, (Monatsthema vom Juli)
- [15] Klaus Strobels, Christoph Schaab and Manfred K. Weigel, *Properties of non-rotating and rapidly rotating protoneutron stars*, astro-ph/9908132
- [16] N. K. Glendenning, *Compact Stars*
- [17] Scheffler-Elsässer, *Physik der Sterne und der Sonne*
- [18] T. Fließbach, *Allgemeine Relativitätstheorie*, 2. Auflage
- [19] Mei Huang, Pengfei Zhuang, Weiqin Chao, *Charge Neutrality Effects on 2-flavor Color Superconductivity*, hep-ph/0207008
- [20] Mark Alford and Krishna Rajagopal, *Absence of two-flavor color superconductivity in compact stars*, hep-ph/0204001
- [21] Andrew W. Steiner, Sanjay Reddy and Madappa Prakash, *Color-Neutral Superconducting Quark Matter*, hep-ph/0205201