Unschärfe, der supersymmetrische Replica Trick und Lokalisierung

Steffen Klassert

Diplomarbeit

vorgelegt am Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main

Juli 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Diplomarbeit basiert auf einem 1998 erschienenen Artikel von C. Shubin, R. Vakilian und T. Wolff [6]. Ziel dieser Arbeit ist es, für das eindimensionale diskrete Bernoulli-Anderson-Modell zwei Varianten der Wegner-Ungleichung [2] zu beweisen, die ein wichtiger Teil in Lokalisierungsbeweisen ist. Wir betrachten Schrödingeroperatoren der Form

$$H_I = \Delta + V_\omega, \qquad H_I : l^2(I) \to l^2(I)$$

auf einem diskreten Intervall $I := \{-l, \dots, l\} \subset \mathbb{Z}$. Hierbei ist Δ der diskrete Laplaceoperator,

$$(\Delta u)(x) = \tfrac{1}{2}(u(x+1) + u(x-1)).$$

V_ω ist ein zufälliges Potential,

$$(V_\omega u)(x) = \omega(x)u.$$

Der Zufallsparameter ω durchläuft hierbei einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω,F,P) mit einer σ-Algebra F auf und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P. Ein Modell mit unabhängig gleich verteiltem Potential V_ω bezeichnet man als das Anderson-Modell. Die zufälligen Potentiale in solchen Modellen stellen hierbei bestimmte Unordnungen dar. Verwendet man Potentiale V_ω, die nur zwei Werte annehmen, o.E. 0 und 1 mit jeweils Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, so bezeichnet man das Modell als Bernoulli-Anderson-Modell. In der Physik ist das Anderson-Modell besonders wichtig um Verunreinigungen in Festkörpern zu simulieren. Die diesbezüglich grundlegenden Arbeiten von P.W. Anderson [1] sowie N.F. Mott und W.D. Twose [3] wurden mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Das Bernoulli-Anderson-Modell eignet sich besonders zur physikalischen Beschreibung von Kristallen mit Defekten. Dabei bedeutet $(V_\omega)u(j) = 0$ gerade, daß an dem Punkt j des Intervalls I kein Defekt-Ion sitzt. Die Wegner-Ungleichung ist eine Abschätzung, daß sich in bestimmten Intervallen die zufälligen Eigenwerte nur begrenzt häufen. Für das Bernoulli-Anderson-Modell gibt es Beweise für die Wegner-Ungleichung in der Dimension $d = 1$. Für Dimensionen $d \geq 2$ ist bis heute kein Beweis bekannt. Eine ausführliche Abhandlung über ungeordnete Medien und Lokalisierung findet man in dem Buch von P. Stollmann [4]. Wir werden um die Wegner-Ungleichung in $d = 1$ zu beweisen wie, folgt vorgehen: In Kapitel 2 werden wir eine Unschärferelation beweisen. Das Prinzip der Unschärfe beruht auf der Tatsache, daß eine Funktion f und ihre Fouriertransformation $\hat{f}$ nicht beide auf einer kleinen Menge konzentriert sein können. Der bekannteste Vertreter der Unschärferelationen ist die in der Physik wohl bekannte Unschärferelation nach Heisenberg. Dann werden wir die bewiesene Unschärferelation verwenden um eine Normabschätzung für Operatoren der Form $T_H T_G$ zu erhalten ($||T_H T_G|| \leq \rho < 1$). Die Oparatoren T_G, T_H sind auf L^2 definiert durch $T_G f = \widehat{Gf}$ und $T_H f = \widehat{Hf}$, wobei G, H

Funktionen mit L^∞ Norm gleich 1 sind. Kapitel 3 gibt einen kurzen Überblick über Grassmann-Algebren und Analysis auf Superräumen. Wir werden die Superanalysis verwenden um den sogenannten supersymmetrischen Replica Trick zu beweisen. Der supersymmetrische Replica Trick ist im wesentlichen eine Darstellung der Inversen Matrix über ein supersymmetrisches Integral. In Kapitel 4 werden wir den supersymmetrischen Replica Trick verwenden um eine Darstellung der Resolventen des Schrödingeroperators H_I zu erhalten. Nach ausintegrieren der Supervariablen können wir letztlich die Normabschätzung $||T_H T_G|| \leq \rho$ verwenden um zwei Varianten der Wegner-Ungleichung für das diskrete Bernoulli-Anderson-Modell in einer Dimension zu beweisen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Besonders bedanken möchte ich mich bei meiner Frau Silke und meinen Eltern, die mich während meines ganzen Studiums unterstützt haben; bei P. Stollmann, D.Lenz und B.Metzger für manchen fachlichen Rat und nicht zuletzt bei Silke Klassert, Marion Gutermann und Michael Händler, die sich die Mühe gemacht haben diese Arbeit auf Tippfehler zu untersuchen.

2 Epsilon-dünne Mengen

Wir wollen in diesem Kapitel einige Vorarbeit leisten. Im wesentlichen beweisen wir in Teil 1 dieses Kapitels eine Unschärferelation nach Shubin, Vakilian und Wolff [6] Das Prinzip der Unschärfe beruht auf der Tatsache, daß eine Funktion f und ihre Fouriertransformation $\hat{f}$ nicht beide auf einer kleinen Menge konzentriert sein können. Im 2. Teil zeigen wir, daß unter geeigneten Voraussetzungen das maß der Menge, auf der die Fouriertransformation eines Wahrscheinlichkeismaßes nahe ihrem maximalen Wert 1 ist, klein ist. Wir werden dies und die Unschärferelation verwenden um zu zeigen, daß für geeignete Funktionen G, H die Operatoren $T_G f = \widehat{Gf}$ und $T_H = \widehat{Hf}$ auf L^2 die Normabschätzung $||T_G T_H||_{L^2 \to L^2} \leq \rho < 1$ erfüllen. Siehe auch [6].

2.1 Eine Unschärferelation

Im folgenden sei $D(x,r)$ die Kugel um x mit Radius r und $|\cdot|$ das Lebesgue Maß. Wir definieren folgende Dünnheitseigenschaft

Definition 2.1. *Sei $\rho(x) := \min(1, \frac{1}{|x|})$. Eine Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt ϵ-dünn, wenn für ein $\epsilon > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|E \cap D(x, \rho(x))| \leq \epsilon |D(x, \rho(x))|.$$

Die Fourier Transformation sei im folgenden $\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx$. Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ eine radial symmetrische Schwartz-Funktion, für die $0 \leq \hat{\Phi} \leq 1$, $\text{supp}\hat{\Phi} \subset D(0,2)$ gilt und $\hat{\Phi} = 1$ auf $D(0,1)$ ist. Für $j \in \mathbb{Z}_0$ sei $\Phi_j(x) := 2^{jn}\Phi(2^j x)$. Dann gilt $\| \Phi \|_1 = \| \Phi_j \|_1$ und $\hat{\Phi}_j(\xi) = \hat{\Phi}(2^j \xi)$. Damit erhalten wir $\text{supp}\Phi_j \subset D(0, 2^{j+1})$ und $\Phi_j = 1$ auf $D(0, 2^j)$. Sei nun $\psi_0 := \hat{\Phi}$ und für $j \in \mathbb{Z}^+$ sei $\psi_j := \hat{\Phi}_j - \hat{\Phi}_{j-1}$. Für den Träger von ψ_j gilt dann $\text{supp}\psi_j \subset D(0, 2^{j+1}) \backslash D(0, 2^{j-1})$. Für ein festes $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $i \in \mathbb{N}_0$ erhalten wir

$$\sum_{j=0}^{\infty} = \psi_i(x) + \psi_{i+1}(x) + \psi_{i+2}(x) = \hat{\Phi}_{i+2}(x) - \hat{\Phi}_{i-1}(x) = \hat{\Phi}_{i+2}(x) = 1.$$

Damit definiert $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(x)$ eine Zerlegung der Eins.

Lemma 2.2. *Sei E ϵ-dünn. Dann existiert ein C so, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \geq \rho(x)$*

$$|E \cap D(x,t)| \leq C\epsilon |D(x,t)|.$$

gilt.

Beweis. Wir führen den Beweis in 3 Schritten.
1. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|y - x| \leq \rho(x) \Rightarrow C^{-1}\rho(x) \leq \rho(y) \leq C\rho(x)$$

mit einem von x unabhängigen C.
Ist $\rho(x) = 1$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $\rho(x) = \frac{1}{|x|}$. Wir zeigen

$$|y - x| \leq \tfrac{1}{|x|} \Rightarrow C^{-1}\tfrac{1}{|x|} \leq \tfrac{1}{|y|} \leq C\tfrac{1}{|x|}.$$

Aus $|y - x| \leq \frac{1}{|x|}$ folgt $|x| - \frac{1}{|x|} \leq |y| \leq |x| + \frac{1}{|x|}$ und damit auch

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{|x|^2}} \cdot \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|y|} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{|x|^2}} \cdot \frac{1}{|x|}.$$

Für $|x| \geq 2$ können wir demnach $C = \frac{4}{3}$ wählen. Ist $|x| \leq 2$, so gilt wegen $y \in D(x, \rho(x))$ auch $y \in D(0, 3)$. Es gilt also $|y| \leq 3$ und damit $\min \rho(y) = \frac{1}{3}$ und $\max \rho(y) = 1$. Wir können demnach $C = 4$ für $\rho(y) = \frac{1}{3}$ und $C = 2$ für $\rho(y) = 1$ wählen. Für alle $C \geq 4$ gilt dann

$$|y - x| \leq \rho(x) \Rightarrow C^{-1}\rho(x) \leq \rho(y) \leq C\rho(x).$$

2. Es existiert eine maximale Menge von Punkten $\{x_k\} \subset D(x, t)$, so daß

$$|x_k - x_j| \geq \min(\rho(x_j), \rho(x_k))$$

für alle j, k gilt.
Sei M eine Menge von Punkten $\{x_k\} \subset D(x, t)$ und

$$Z := \{M : \forall x_j, x_k \in M \quad \text{gilt} \quad |x_k - x_j| \geq \min(\rho(x_j), \rho(x_k))\}$$

Seien $M, \tilde{M} \in Z$ und $M \prec \tilde{M} :\Leftrightarrow M \subseteq \tilde{M}$, dann ist Z halbgeordnet bezüglich $\prec$. Sei nun $G \subset Z$ und $G = (M_i)_{i \in I}$ mit $M_i \subseteq M_{i+1}$ für alle i einer Indexmenge I. Damit folgt $\tilde{M} := \cup_{i \in I} \in Z$. Sind nun $x_j, x_k \in \tilde{M}$, so gibt es ein i_0, für das gilt $x_j, x_k \in M_{i_0}$. Mit dem Lemma von Zorn existiert nun mindestens ein maximales Element in Z. Wir wählen nun ein maximales Element $M \in Z$. Da M eine Menge von Punkten $\{x_k\} \subset D(x, t)$ mit $|x_k - x_j| \geq \min(\rho(x_j), \rho(x_k))$ und maximal ist, überdecken die Kugeln $D(x_k, \rho(x_k))$ die Kugel $D(x, t)$. Aus Kompaktheitsgründen existiert eine endliche Teilüberdeckung von $D(x, t)$.
3. Es existiert ein C, so daß die Kugeln $D(x_k, C^{-1}\rho(x_k))$ mit $x_k \in M$ disjunkt und in $D(x, Ct)$ enthalten sind.
Es gilt

$$D(x_k, C^{-1}\rho(x_k)) \cap D(x_j, C^{-1}\rho(x_j)) = \emptyset \Leftrightarrow |x_j - x_k| \geq C^{-1}(\rho(x_j) + \rho(x_k)).$$

Wir haben zwei Fälle zu betrachten. Ist $\rho(x_j) \leq |x_j - x_k|$ und $\rho(x_k) \leq |x_j - x_k|$, so gilt $\rho(x_j) + \rho(x_k) \leq 2|x_j - x_k|$ und wir können $C = 2$ wählen. Gilt nun o.E. $\rho(x_k) > |x_j - x_k|$, so folgt $\rho(x_j) \leq |x_j - x_k|$. Mit Teil 1 des Lemmas folgt $\rho(x_k) + \rho(x_j) \leq 4|x_j - x_k| + |x_j - x_k|$ und wir können $C = 6$ wählen.
Wir können nun das Lemma beweisen. Es gilt

$$\sum_k C^{-n}|D(x_k, \rho(x_k))| \leq \sum_k |D(x_k, C^{-1}\rho(x_k))| \leq |D(x, Ct)| = C^n|D(x,t)|.$$

Da E ϵ-dünn ist erhalten wir letztlich

$$|D(x,t) \cap E| \leq \sum_k |D(x_k, \rho(x_k)) \cap E| \leq \epsilon \sum_k |D(x_k, \rho(x_k))| \leq \epsilon C^{2n}|D(x,t)|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > \rho(x)$.

□

Der Beweis der Unschärferelation basiert auf der Anwendung von Schurs Test. Das folgende Lemma beinhaltet die nötigen Abschätzungen.

Lemma 2.3. *Sei*

$$A_N(x,y) := \sum_{j=0}^{N} \psi_j(x)\Phi_j(x-y)$$

und

$$B_N(\xi,\eta) := \sum_{j=0}^{N} \hat{\psi}_j(\xi-\eta)(1-\hat{\Phi}_j(\eta)).$$

Dann gilt für eine von N unabhängige Konstante C
(i) $\int_{\mathbb{R}^n} |A_N(x,y)|dy \leq C$ *für alle* x.
(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} |A_N(x,y)|dx \leq C$ *für alle* y.
(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} |B_N(\xi,\eta)|d\eta \leq C$ *für alle* ξ.
(iv) $\int_{\mathbb{R}^n} |B_N(\xi,\eta)|d\xi \leq C$ *für alle* η.
Sind E und F ϵ-dünn gilt weiter
(v) $\int_E |A_N(x,y)|dy \leq C$ *für alle* x.
(vi) $\int_F |B_N(\xi,\eta)|d\xi \leq C$ *für alle* η

Beweis. (i) Für festes x gibt es maximal drei Werte von j, für die $\psi_j(x) \neq 0$ ist. Weiter ist $\| \psi_j \|_\infty \leq 1$ und $\| \Phi_j \|_1 = \| \Phi \|_1$ für alle j. Wir erhalten dadurch

$$\int_{\mathbb{R}^n} |A_N(x,y)|dy = \int |\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x)\Phi_j(x-y)|dy \leq 3 \| \Phi \|_1 .$$

(ii) Bezeichne $\sum_{\star}$ die Summe über alle $j \in \{1, \dots, N\}$ für die $\mathrm{dist}(y, \mathrm{supp}\psi_j) \geq 1$ ist. Da $\Phi \in \mathcal{S}$ ist, gilt $|\Phi_j(x-y)| \leq C 2^{jn}(1+2^j|x-y|)^{-3n}$. Für maximal drei Werte von j gilt $\mathrm{dist}(y, \mathrm{supp}\psi_j) < 1$. Dementsprechend erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} |A_N(x,y)| dx &= \int |\sum_{j=0}^{N} \psi_j(x)\Phi_j(x-y)| dx \\
&\leq 3 \parallel \Phi \parallel_1 + \int \sum_{\star} |\psi_j(x)\Phi_j(x-y)| dx \\
&\leq 3 \parallel \Phi \parallel_1 + C \int \sum_{\star} |\psi_j(x)| 2^{jn}(1+2^j|x-y|)^{-3n} dx \\
&\leq 3 \parallel \Phi \parallel_1 + C \int \sum_{\star} |\psi_j(x)| 2^{jn} \cdot 2^{-3jn} dx \\
&\leq 3 \parallel \Phi \parallel_1 + C \sum_{\star} 2^{-2jn} \int |\psi_j(x)| dx \\
&\leq 3 \parallel \Phi \parallel_1 + C \sum_{\star} 2^{-2jn} \parallel \psi_j \parallel_1 \\
&\leq 3 \parallel \Phi \parallel_1 + C \sum_{\star} 2^{-2jn} \cdot 2^{(j+1)n} \leq C.
\end{aligned}
$$

(iii)+(iv) Sei $i_\star := \min(i-1, N)$. Wir formen B_n wie folgt um.

$$
\begin{aligned}
B_N(\xi,\eta) &= \sum_{j=0}^{N} \hat{\psi}_j(\xi-\eta)(1-\hat{\Phi}_j(\eta)) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \hat{\psi}_j(\xi-\eta) \left(\sum_{i=0}^{N} \psi_i(\eta) - \hat{\Phi}_j(\eta) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{N} \hat{\psi}_j(\xi-\eta) \sum_{i<j} \psi_i(\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\eta) \sum_{j=0}^{i_\star} \hat{\psi}_j(\xi-\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\eta) \left(\Phi_0(\eta-\xi) + \sum_{j=1}^{i_\star} \Phi_j(\eta-\xi) - \Phi_{j-1}(\eta-\xi) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\eta) \Phi_{i_\star}(\eta-\xi).
\end{aligned}
$$

Da Φ radial symmetrisch ist, folgt

$$B_N(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\eta)\Phi_{i_\star}(\xi-\eta). \tag{2.1}$$

Durch Wiederholung des Beweises von (i) folgt (iv). Um (iii) zu beweisen, benötigen wir noch folgende Umformung.

$$\begin{aligned}
B_N(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(\eta)\Phi_{i_\star}(\xi-\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \psi_i(\eta)\Phi_{i-1}(\xi-\eta) + \sum_{i>N} \psi_i(\eta)\Phi_N(\xi-\eta) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \psi_i(\eta)\Phi_{i-1}(\xi-\eta) + (1-\hat{\Phi}_N(\eta))\Phi_N(\xi-\eta).
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |B_N(\xi,\eta)|d\eta \leq \int |\sum_{i=1}^{N} \psi_i(\eta)\Phi_{i-1}(\xi-\eta)|d\eta + \int |(1-\hat{\Phi}_N(\eta))\Phi_N(\xi-\eta)|d\eta.$$

Da $\hat{\Phi}_N(\eta) = \hat{\Phi}(2^{-N}\eta)$ und $0 \leq \hat{\Phi} \leq 1$ ist, gilt

$$\int |(1-\hat{\Phi}_N(\eta))\Phi_N(\xi-\eta)|d\eta \leq \| \Phi \|_1 .$$

Damit erhalten wir

$$B_N(\xi,\eta) \leq \int |\sum_{i=1}^{N} \psi_i(\eta)\Phi_{i-1}(\xi-\eta)|d\eta + \| \Phi \|_1 .$$

Durch Wiederholung des Beweises von (ii) folgt (iii).
(v)+(vi) Wir beweisen nur (v), da (vi) unter Verwendung von (2.1) durch gleiche Argumentation folgt. Wir wählen ein x und es sei j, so daß $\psi_j(x) \neq 0$ ist. Wenn wir

$$\int\limits_E |\Phi_j(x-y)|dy \leq C\epsilon$$

zeigen können, ist (v) bewiesen, da wie in (i) nur maximal drei Werte von j ungleich Null sind und ψ_j für alle j beschränkt ist. Falls $\psi_j(x) \neq 0$ ist gilt $2^{j-1} \leq$

$\max(1,|x|) = \rho(x)^{-1} \leq 2^{j+1}$, da $\mathrm{supp}\psi_j \subset D(0,2^{j+1})\backslash D(0,2^{j-1})$ ist. Es gilt weiter $|\Phi_j(x-y)| \leq C\rho(x)^{-n}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-2n}$, da $\Phi \in \mathcal{S}$ ist. Wir können nun abschätzen

$$
\begin{aligned}
\int\limits_E |\Phi_j(x-y)|dy &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{D(x,2^k\rho(x))\cap E} |\Phi_j(x-y)|dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} |D(x,2^k\rho(x))| \cdot \max_y |\Phi(y)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C\epsilon |D(x,2^k\rho(x))| \cdot C\rho(x)^{-n}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-2n} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C\epsilon 2^{kn}\rho(x)^n \cdot \rho(x)^{-n}\left(1+\frac{|x-y|}{\rho(x)}\right)^{-2n} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C\epsilon 2^{kn}\left(1+\frac{2^k\rho(x)}{\rho(x)}\right)^{-2n} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} C\epsilon 2^{-kn} \leq C\epsilon.
\end{aligned}
$$

□

Definition 2.4. *Eine approximierende Eins auf $\mathbb{R}^n$ ist eine Folge von Funktionen f_j der Form $f_j(x) = j^n f(jx)$ wobei $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$ ist.*

Demnach ist $\Phi_j(x) = 2^{jn}\Phi(2^jx)$ eine Teilfolge einer approximierenden Eins, denn $\lim_{j\to\infty} j^n\Phi(jx) = \lim_{j\to\infty} 2^{jn}\Phi(2^jx)$ und $\int \Phi(x)dx = \hat{\Phi}(0) = 1$. Für eine approximierende Eins gilt

Satz 2.5. *Sei Φ_j eine approximierende Eins auf $\mathbb{R}^n$ und $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt in $\mathcal{S}$*

$$\lim_{j\to\infty} \Phi_j \star f = f.$$

Einen Beweis findet man in [7]. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
S_N f &:= \sum_{j=0}^{N} \psi_j(\Phi_j \star f) \\
T_N f &:= \sum_{j=0}^{N} \psi_j(f - \Phi_j \star f).
\end{aligned}
$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ konvergieren $S_N f$ und $T_N f$ in $\mathcal{S}$. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\sup_x |x^\alpha D^\beta \left(S_M f(x) - S_N f(x)\right)|$ für alle Multiindizes α, β und großes N klein wird. Da $\mathcal{S}$ in der von diesen Halbnormen erzeugten Topologie vollständig ist, folgt Konvergenz. Hierzu sei o.E. $M > N$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_x |x^\alpha D^\beta \left(S_M f(x) - S_N f(x)\right)| \\
&= \sup_x |x^\alpha D^\beta \sum_{j=N}^{M} \psi_j(x)\Phi_j \star f(x)| \\
&= \sup_x |x^\alpha D^\beta \sum_{j=N}^{M} \psi_j(x)(\Phi_j \star f(x) - f(x)) + \sum_{j=N}^{M} \psi_j(x) f(x)| \\
&\leq \sup_x |x^\alpha D^\beta \sum_{j=N}^{M} \psi_j(x)(\Phi_j \star f(x) - f(x))| + \epsilon
\end{aligned}$$

für große N. Für festes x gilt

$$\begin{aligned}
&|x^\alpha D^\beta \sum_{j=N}^{M} \psi_j(x)(\Phi_j \star f(x) - f(x))| \\
&\leq \sum_{N_0}^{N_0+2} |x^\alpha D^\beta \psi_j(x)(\Phi_j \star f(x) - f(x))| \\
&\leq 3 \cdot \max_j |\sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} D^\gamma \psi_j(x) \cdot x^\alpha D^{\beta-\gamma}(\Phi_j \star f(x) - f(x))| \\
&\leq C \cdot \max_{\gamma \leq \beta} |x^\alpha D^{\beta-\gamma}(\Phi_j \star f(x) - f(x))| \\
&\leq C \cdot \max_{\gamma \leq \beta} \sup_x |x^\alpha D^{\beta-\gamma}(\Phi_j \star f(x) - f(x))|.
\end{aligned}$$

Da $\Phi_j \star f$ in $\mathcal{S}$ für $j \to \infty$ gegen f konvergiert, folgt

$$\sup_x |x^\alpha D^\beta \left(S_M f(x) - S_N f(x)\right)| \leq \epsilon + \epsilon.$$

Analog folgt Konvergenz für $T_N f$. Weiter konvergiert damit $S_n f + T_N f \to (S + T)f = f$ in $\mathcal{S}$. Für den Beweis der Unschärferelation für ϵ-dünne Mengen nach Shubin Vakilian Wolff [6] verwenden wir folgende Variante von Schurs Test.

Satz 2.6. *Sei $K : M_2 \times M_1 \to \mathbb{C}$ eine meßbare Funktion. Der Operator $P : L_2(M_1) \to L_2(M_2)$ sei definiert durch*

$$P_K f(x) := \int_{M_1} K(x,y) f(y) dy.$$

Seien weiter

$$\int_{M_1} |K(x,y)|dy \leq C_1$$

und

$$\int_{M_2} |K(x,y)|dx \leq C_2.$$

Dann ist der Operator P_K beschränkt mit $||P_K|| \leq \sqrt{C_1 C_2}$.

Einen Beweis findet man in Weidmann [5]. Wir beweisen nun die Unschärferelation für ϵ-dünne Mengen.

Satz 2.7. *Es existieren $\epsilon > 0$ und $C < \infty$ so, daß wenn $E, F \subset \mathbb{R}^n$ ϵ-dünn sind für jedes $f \in L^2$ gilt*

$$||f||_2 \leq C(||f||_{L^2(E^c)} + ||\hat{f}||_{L^2(F^c)}).$$

Beweis. Man rechnet leicht nach

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \int A_N(x,y) f(y) dy, \\ \widehat{T_N f}(\xi) &= \int B_N(\xi,\eta) \hat{f}(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

Nach Schurs Test und Lemma (2.3) (i), (ii) gilt $||S_N|| \leq C$ für alle N. Weiter gilt nach Schurs Test und Lemma (2.3) (iii), (iv) auch $||T_N|| \leq C$ für alle N. Mit S_N und T_N beschränkt für alle N sind auch S und T beschränkt und erfüllen $S+T = I$. Durch Anwendung von Lemma (2.3) (ii), (v) und Schurs Test erhalten wir $||S_N \chi_E|| \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}$. Damit gilt auch $||S(\chi_E f)||_2 \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}||f||_2$. Analog erhalten wir mit Lemma (2.3) (iii) und (vi) dann $||\chi_F \widehat{Tf}||_2 \leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}||f||_2$. Es gilt weiter

$$\hat{f} = \widehat{(S+T)}f = \widehat{S(\chi_E f)} + \widehat{S(\chi_E^c f)} + \chi_F \widehat{Tf} + \chi_F^c \widehat{Tf}.$$

Sei nun o.E. $||f||_2 = 1$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} ||\hat{f} - \widehat{S(\chi_{E^c} f)} - \chi_{F^c}\widehat{Tf}||_2 &= ||\widehat{S(\chi_E f)} + \chi_F \widehat{Tf}||_2 \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}||f||_2 + C\epsilon^{\frac{1}{2}}||f||_2 \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ist $||f||_{L^2(E^c)} \leq \alpha$, dann gilt

$$\begin{aligned} ||\hat{f}||_{L^2(F)} &= ||(\hat{f} - \chi_{F^c}\widehat{Tf})\chi_F|| \\ &\leq ||\hat{f} - \chi_{F^c}\widehat{Tf}|| \\ &\leq ||\hat{f} - \widehat{S(\chi_{E^c}f)} - \chi_F^c\widehat{Tf}|| + C||S(\chi_{E^c}f)|| \\ &\leq C(\epsilon^{\frac{1}{2}} + \alpha) \leq \sqrt{\tfrac{1}{2}} \end{aligned}$$

für ϵ und α klein genug. Somit gilt $||\hat{f}||_{L^2(F^c)} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$ und damit letztlich

$$||f||_2 \leq C(||f||_{L^2(E^c)} + ||\hat{f}||_{L^2(F^c)}).$$

□

2.2 Eine Anwendung der Unschärferelation

In diesem Abschnitt soll die oben erwähnte Normabschätzung $||T_H T_G||_{L^2 \to L^2} \leq \rho$ unter Verwendung der Unschärferelation bewiesen werden. Wir benötigen hierzu einige Vorbereitungen.

Lemma 2.8. *Sei $D(a, r)$ die Kugel um $a \in \mathbb{R}^m$ mit Radius r. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{R}^m$*

$$\sup_{a \in \mathbb{R}^m} |\{\xi \in D(a, 1) : \cos(2\pi k \cdot \xi) > 1 - \alpha\}| \leq C\alpha^{\frac{1}{2}} \max(1, |k|^{-1}).$$

Beweis. Aus Symmetriegründen reicht es den Fall $m = 1$ zu betrachten. Sei also $m = 1$. Wir betrachten den Cosinus im Intervall $[2\pi k\frac{n}{k} - \pi, 2\pi k\frac{n}{k} + \pi]$ wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $\frac{n}{k} \in [-1, 1]$ ist. Damit ist $\xi \in [\frac{n}{k} - \frac{1}{2k}, \frac{n}{k} + \frac{1}{2k}]$. Wir können o.E. $a = 0$ annehmen. Weiter können wir $n = 0$ annehmen, da mit n nur das zu betrachtende Intervall um $2\pi n$ verschoben wird. Sei also $\xi \in \left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right] \cap D(0, 1)$. Durch zählen der Intervalle $\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$ in $D(0, 1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &|\{\xi \in D(0, 1) : \cos(2\pi k\xi) > 1 - \alpha\}| \\ &= 2 \cdot \max(\tfrac{1}{2}, |k|)|\{\xi \in \left[-\tfrac{1}{2k}, \tfrac{1}{2k}\right] \cap D(0, 1) : \cos(2\pi k\xi) > 1 - \alpha\}| \\ &= 2 \cdot \max(\tfrac{1}{2}, |k|)|\{\xi \in \left[-\tfrac{1}{2\pi k}, \tfrac{1}{2\pi k}\right] : \cos(2\pi k\xi) > 1 - \alpha\}|. \end{aligned}$$

Sei nun $t \leq \frac{1}{2\pi|k|}$. Dann gilt $\sin(\frac{1}{2\pi|k|}t) \geq \frac{1}{2\pi|k|}\frac{t}{2}$, denn

$$\begin{aligned} \sin(\tfrac{1}{2\pi|k|}t) &= 0 + \tfrac{1}{2\pi|k|}t - \sin(\tfrac{1}{2\pi|k|}t)\left(\tfrac{1}{2\pi|k|}\right)^2 \tfrac{t^2}{2} + \ldots \\ &\geq \tfrac{1}{2\pi|k|}t - \left(\tfrac{1}{2\pi|k|}\right)^2 \tfrac{t^2}{2} \geq \tfrac{1}{2\pi|k|}\tfrac{t}{2}. \end{aligned}$$

Weiter gilt für $\xi \leq \frac{1}{2\pi|k|}$

$$\begin{aligned}
\cos(0) - \cos(2\pi|k|\xi) &= 1 - \cos(2\pi|k|\xi) \\
&\leq \int_0^x 2\pi|k|\sin(2\pi|k|t)dt \\
&\leq 2\pi|k|\int_0^x \tfrac{1}{2}atdt \\
&\leq \tfrac{(2\pi|k|)^2}{2}\tfrac{\xi^2}{2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten nun für $\cos(2\pi|k|\xi) > 1 - \alpha$

$$\alpha > \cos(0) - \cos(2\pi|k|\xi) \geq \tfrac{(2\pi|k|)^2}{4}\xi$$

und damit $\xi \leq \frac{2}{2\pi|k|}\alpha^{\frac{1}{2}}$. Dementsprechend gilt nun

$$|\{\xi \in D(0,1) : \cos(2\pi k\xi) > 1 - \alpha\}| \leq 2 \cdot \max(\tfrac{1}{2}, |k|)\tfrac{2}{2\pi|k|}\alpha^{\frac{1}{2}} \leq C\alpha^{\frac{1}{2}}\max(1, |k|^{-1}).$$

□

Wir zeigen nun, daß das Maß der Menge auf der die Fouriertransformation des unten definierten Wahrscheinlichkeismasses μ Werte nahe dem maximalen Wert 1 annimmt, klein ist.

Lemma 2.9. *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es gebe $\lambda, \gamma \in (0,1)$ mit*

$$\mu \times \mu\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x - y| \geq \lambda\}\right) \geq \gamma.$$

Sei $E_\delta := \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\hat{\mu}(\xi)| > 1 - \delta\}$, dann gibt es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$\sup_{a\in\mathbb{R}^n} |D(a,1) \cap E_\delta| < \epsilon.$$

Beweis. Wir wählen ein a und definieren $E_\delta^a := E_\delta \cap D(a,1)$. Es gilt

$$\int_{E_\delta^a} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \geq (1-\delta)^2|E_\delta^a| \geq (1 - 2\delta)|E_\delta^a|.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_{E_\delta^a} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{E_\delta^a}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\xi\cdot(x-y)}d\mu(x)d\mu(y)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{E_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)d\xi d\mu(x)d\mu(y).
\end{aligned}$$

Sei α so, daß $C\alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|E_\delta^a|\lambda$ ist mit der Konstanten C aus Lemma (2.8) und es sei

$$\begin{aligned} A_\delta^a : &= E_\delta^a \cap \{\xi : \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)) > 1-\alpha\} \\ B_\delta^a : &= E_\delta^a \cap \{\xi : \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)) \leq 1-\alpha\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int\limits_{E_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi &= \int\limits_{A_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi + \int\limits_{B_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi \\ &\leq \int\limits_{A_\delta^a} 1 d\xi + \int\limits_{B_\delta^a} (1-\alpha) d\xi \\ &= |E_\delta^a \cap \{\xi : \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)) > 1-\alpha\}| \\ &+ (1-\alpha)|E_\delta^a \cap \{\xi : \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)) \leq 1-\alpha\}|. \end{aligned}$$

Gilt $|x-y| \geq \lambda$, so folgt mit Lemma (2.8)

$$\begin{aligned} &|E_\delta^a \cap \{\xi : \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)) > 1-\alpha\}| \\ &\leq \sup_{a \in \mathbb{R}^n} |\{\xi \in D(a,1) : \cos(2\pi\xi \cdot (x-y)) > 1-\alpha\}| \\ &\leq C\alpha^{\frac{1}{2}} \max(1, |x-y|^{-1}) = \frac{1}{2}|E_\delta^a|\lambda \max(1, |x-y|^{-1}) \leq \frac{1}{2}|E_\delta^a|. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \int\limits_{E_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi &\leq |A_\delta^a| + (1-\alpha)(|E_\delta^a| - |A_\delta^a|) \\ &\leq |E_\delta^a| - \alpha(|E_\delta^a| - |A_\delta^a|) \\ &\leq (1 - \tfrac{\alpha}{2})|E_\delta^a| \end{aligned}$$

für $|x-y| \geq \lambda$. Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\int\limits_{E_\delta^a} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{E_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \int \int\limits_{|x-y|\geq\lambda} \int\limits_{E_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi d\mu(x) d\mu(y) \\
&+ \int \int\limits_{|x-y|<\lambda} \int\limits_{E_\delta^a} \cos(2\pi\xi \cdot (x-y) d\xi d\mu(x) d\mu(y) \\
&\leq \int \int\limits_{|x-y|\geq\lambda} (1-\tfrac{\alpha}{2})|E_\delta^a| d\mu(x) d\mu(y) \\
&+ \int \int\limits_{|x-y|<\lambda} |E_\delta^a| d\mu(x) d\mu(y) \\
&= (1-\tfrac{\alpha}{2})|E_\delta^a| \int \int\limits_{|x-y|\geq\lambda} 1 d\mu(x) d\mu(y) \\
&+ |E_\delta^a| \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} 1 d\mu(x) d\mu(y) - \int \int\limits_{|x-y|\geq\lambda} 1 d\mu(x) d\mu(y) \right].
\end{aligned}$$

Definieren wir $V := \int \int\limits_{|x-y|\geq\lambda} 1 d\mu(x) d\mu(y)$, so folgt

$$\int\limits_{E_\delta^a} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \leq |E_\delta^a| - \tfrac{\alpha}{2}|E_\delta^a| V \leq (1-\tfrac{\alpha\gamma}{2})|E_\delta^a|,$$

da nach Voraussetzung

$$V = \int \int\limits_{|x-y|\geq\lambda} 1 d\mu(x) d\mu(y) = \mu \times \mu\left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |x-y| \geq \lambda\}\right) \geq \gamma$$

ist. Letztlich gilt also

$$(1-2\delta)|E_\delta^a| \leq \int\limits_{E_\delta^a} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi \leq (1-\tfrac{\alpha\gamma}{2})|E_\delta^a|$$

und wir können $\frac{\alpha\gamma}{4} \leq \delta$ folgern. Da α die Gleichung $C\alpha^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}|E_\delta^a|\lambda$ erfüllt, folgt mit $4\alpha = C^{-2}|E_\delta^a|^2\lambda^2$ die Ungleichung $C^{-2}\gamma\lambda^2|E_\delta^a|^2 \leq \delta$. Wir können damit nun $\delta = C^{-2}\gamma\lambda^2\epsilon^2$ wählen. $\square$

Lemma 2.10. *Sei Q nichtausgeartete symmetrische quadratische Form in $\mathbb{R}^n$. Dann bildet Q jede Kugel $D(x, \rho(x))$ auf ein Intervall I_x ab mit $|I_x| \in [C^{-1}, C]$. Ist $E \subset I_x$, so gilt weiter*

$$\frac{|Q^{-1}(E) \cap D(x, \rho(x))|}{|D(x, \rho(x))|} \leq C|E|^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Wir beweisen das Lemma hier nur für den Fall, daß $E = [a, b]$ ein Intervall ist. Sei $Q(x) = \langle Ax, x\rangle$. Da Q nichtausgeartet ist, ist die Matrix A symmetrisch und invertierbar. Weiter seien $v_1, \dots, v_n$ die Eigenvektoren (ONB) zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A. Für mindestens eine Richtung v_j gilt $|\langle v_j, x\rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}|x|$. Wir nehmen dies o.E. für $j = 1$ an. Weiter sei o.E. A positiv definit und $\langle v_1, x\rangle > 0$. Wir definieren nun die Menge

$$S := Q^{-1}E \cap D(x, \rho(x)) = \{y \in D(x, \rho(x)) : a \leq Q(y) \leq b\}.$$

Sei $x = \zeta v_1 + \ldots + \zeta v_n$. Für die Menge S gilt dann

$$S = \{(\xi_i) : (\sum_{j=1}^{n}(\zeta_j - \xi_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(x) \wedge a \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j^2 \leq b\}.$$

Um das Maß der Menge S abzuschätzen, halten wir die letzten $n-1$ Koordinaten fest, mit

$$(\sum_{j=2}^{n}(\zeta_j - \xi_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(x).$$

Die Koordinate ξ_1 betrachen wir nun genauer. Wir unterscheiden zwei Fälle:
(i) $|x|$ ist klein. Ist $|x| \leq 1$, so ist $\rho(x) = 1$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}|b - a| \geq |Q(\xi_1 + h) - Q(\xi_1)| &= |\lambda_1(\xi_1 + h)^2 - \lambda_1 \xi_1^2| \\ &= 2\lambda_1|\xi_1 h| + \lambda_1 h^2 \\ &\geq \lambda_1 h^2.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$|h| \leq \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\rho(x)\sqrt{|b - a|}.$$

(ii) $|x|$ ist groß. Nach dem Mittelwertsatz gilt für eine Zwischenstelle θ_1 von $\underline{(\xi_1 + h)\xi_1}$

$$|b - a| \geq |Q(\xi_1 + h) - Q(\xi_1)| = 2\lambda_1\theta_1|h|.$$

Geht nun $|x| \to \infty$ so folgt $|\theta_1| \to |\zeta_1|$. Wir erhalten dann

$$|h| \leq \tfrac{1}{2\lambda_1}\tfrac{|b-a|}{|\zeta_1|} \leq C\rho(x)\sqrt{|b - a|}.$$

Für das Maß der Menge S gilt damit

$$\begin{aligned} |S| &= \int \chi_s(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \\ &\leq C\rho(x)\sqrt{|b-a|} \int_{(\sum_{j=2}^{n}(\zeta_j-\xi_j)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \rho(x)} d\xi_2 \dots d\xi_n \\ &\leq C\rho(x)^n \sqrt{|b-a|}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt letztlich die Behauptung. □

Sei G eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$ mit $||G||_\infty = 1$. Wir definieren einen Operator $T_G : L^2 \to L^2$ durch

$$T_G f = \widehat{Gf}.$$

Für den Operator T_G gilt $||T_G|| = 1$. Wir werden nun die bewiesene Unschärferelation verwenden um folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.11. *Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$. Keines der beiden sei ein Dirac Maß. Q_1, Q_2 seien nichtentartete symmetrische quadratische Formen auf $\mathbb{R}^n$. Seien weiter G, H Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ so, daß*

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq |\hat{\mu}(Q_1(x))| \\ |H(x)| &\leq |\hat{\nu}(Q_2(x))|. \end{aligned}$$

Dann gilt $||T_H T_G||_{L^2 \to L^2} \leq \rho$, wobei $\rho < 1$ nur von μ, ν, Q_1 und Q_2 abhängt.

Beweis. Wir zeigen zunächst unter Verwendung von Lemma (2.9) und Lemma (2.10), daß die Mengen auf denen die Funktionen G und H Werte nahe 1 annehmen, ϵ-dünn sind. Für gegebenes ϵ sind die Mengen

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}^n : |\hat{\mu}(Q_1(x))| > 1 - \delta\} \\ B &= \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\hat{\nu}(Q_2(\xi))| > 1 - \delta\} \end{aligned}$$

$\sqrt{\epsilon}$-dünn. Denn sei $D(a, 1)$ die Kugel um a mit Radius 1 in $\mathbb{R}$, so gilt für die Menge

$$E_\delta^a = \{x \in D(a, 1) : |\hat{\mu}(x)| > 1 - \delta\}$$

nach Lemma (2.9) $\sup_{a \in \mathbb{R}} |E_\delta^a| < \epsilon$. Weiter ist

$$\begin{aligned} Q^{-1}(E_\delta^a) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \in E_\delta^a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : |\hat{\mu}(Q(x))| > 1 - \delta\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma (2.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} |Q^{-1}(E^a_\delta) \cap D(x,\rho(x))| &\leq C|E^a_\delta|^{\frac{1}{2}}|D(x,\rho(x))| \\ &\leq C\epsilon^{\frac{1}{2}}|D(x,\rho(x))|. \end{aligned}$$

Für $\delta = C^{-1}\gamma\lambda^2\epsilon^2$ (siehe Beweis von Lemma (2.9)) sind die Mengen A und B $\sqrt{\epsilon}$-dünn. Es sei bemerkt, daß C hier nur von den quadratischen Formen Q_1 und Q_2 abhängt. Da nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} |G(x)| &\leq |\hat{\mu}(Q_1(x))|, \\ |H(x)| &\leq |\hat{\nu}(Q_2(x))| \end{aligned}$$

gilt, sind nun die Mengen

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R}^n : |G(x)| > 1-\delta\}, \\ F &= \{\xi \in \mathbb{R}^n : |H(\xi)| > 1-\delta\} \end{aligned}$$

ϵ-dünn. Mit der Unschärferelation für ϵ-dünne Mengen erhalten wir die gewünschte Abschätzung. Denn der Operator $T_H T_G$ multipliziert einmal mit der Funktion G im Ortsraum und nach der Fouriertransformation mit der Funktion H im Impulsraum. Genauer können wir nach der Unschärferelation (Satz (2.7)) nun $\beta > 0$ und $\eta > 0$ in Abhängigkeit von Q_1 und Q_2 wählen, so daß mit $\delta = \beta\gamma\lambda^2$ für alle Funktionen $f \in L^2$

$$2\eta||f||_2 \leq ||f||_{L_2(E^c)} + ||\hat{f}||_{L^2(F^c)}$$

gilt. Es gilt also für f entweder

$$||f||_{L_2(E^c)} \leq \eta||f||_2,$$

oder

$$||\hat{f}||_{L^2(F^c)} \leq \eta||f||_2.$$

Wir wählen ein f und betrachen die zwei Fälle

$$\begin{aligned} (i) \qquad ||f||_{L^2(E^c)} &\geq \eta||f||_2, \\ (ii) \qquad ||f||_{L^2(E^c)} &\leq \eta||f||_2. \end{aligned}$$

In Fall (i) haben wir

$$\begin{aligned} ||Gf||_2^2 &= ||Gf||^2_{L^2(E^c)} + ||Gf||^2_{L^2(E)} \\ &\leq (1-\delta)^2||f||^2_{L^2(E^c)} + ||Gf||^2_{L^2(E)} \\ &= (1-\delta)^2||f||^2_{L^2(E^c)} + ||f||_2^2 - ||f||^2_{L^2(E^c)} \\ &\leq ((1-\delta)^2 - 1)\eta^2||f||_2^2 + ||f||_2^2 \\ &= ((1-\delta)^2\eta^2 + 1 - \eta^2)||f||_2^2 \\ &= (1-\alpha)||f||_2^2 \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha = (2\delta - \delta^2)\eta^2 \tag{2.2}$$

ist. Es gilt demnach $||\widehat{H\widehat{Gf}}||_2^2 \leq ||Gf||_2^2 \leq (1-\alpha)||f||_2^2$. Im Fall (ii) gilt

$$||Gf||_{L^2(E^c)} < \eta ||Gf||_2,$$

da $\sup_{E^c} |G| \leq \inf_E |G|$ ist. Dementsprechend gilt

$$||\widehat{Gf}||_{L^2(F^c)} \geq \eta ||Gf||_2$$

also auch

$$||\widehat{Gf}||_{L^2(F^c)} \geq \eta ||\widehat{Gf}||_2.$$

Mit den Argumenten von (i) und α aus Gleichung (2.2) erhalten wir dann
$||\widehat{H\widehat{Gf}}||_2^2 \leq (1-\alpha)||f||_2^2$. Da $0 < \alpha < 1$ ist folgt die Behauptung. □
Wir werden noch folgende Variante von Satz (2.11) verwenden.

Korollar 2.12. *Sei U eine feste orthogonale Abbildung auf $\mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$T_G f(x) = \widehat{Gf}(Ux).$$

Beweis. Wir erhalten dies, indem wir in Satz (2.11) F durch $f \circ U$ und Q_j durch $Q_j \circ U$ ersetzen. □

3 Der supersymmetrische Formalismus

In diesem Abschnitt wollen wir die benötigten Grundlagen über Superräume und formale Ableitungen bzw. Integration behandeln, sowie eine supersymmetrische Darstellung der inversen Matrix beweisen.

3.1 Grassmann-Algebren

Wir konstruieren die Grassmann Algebra Λ_n mit n Erzeugenden über dem Körper $\mathbb{K}$. Dazu ordnen wir jeder Teilmenge M von $\{1, 2, \ldots, n\}$ einen Vektor ψ_M zu und definieren eine Multiplikation auf den Basiselementen ψ_M wie folgt. Sei M in natürlicher Weise geordnet. Wir drücken dies durch die Schreibweise $M = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ für $M = \{i_1, \ldots, i_k\}$ aus. Sind nun $M = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ und $N = \{j_1 < \ldots < j_l\}$ gegeben, so definieren wir

$$\psi_M \wedge \psi_N := \begin{cases} 0 & , \quad \text{falls} \quad M \cap N \neq \emptyset \\ (-1)^\sigma \, \psi_{M \cup N} & , \quad \text{falls} \quad M \cap N = \emptyset, \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $(-1)^\sigma$ das Vorzeichen einer Permutation von $\{i_1, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_l\}$ ist, die die Elemente von $M \cup N$ in die Reihenfolge

$$M \cup N = \{m_1 < \ldots < m_{k+l}\}$$

bringt. Wir definieren die Grassmann Algebra Λ_n als den von den Vektoren ψ_M frei erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der assoziativen Multiplikation

$$\Lambda_n \times \Lambda_n \xrightarrow{\wedge} \Lambda_n$$

und dem Einselement $\psi_\emptyset$. Die Erzeugenden der Grassmann Algebra Λ_n sind die Vektoren $\psi_i := \psi_{\{i\}} \quad (i = 1, \ldots, n)$. Denn für $M = \{i_1 < \ldots < i_k\}$ gilt

$$\psi_M = \psi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \psi_{i_k}.$$

Definition 3.1. *Sei A eine Algebra und G eine abelsche Halbgruppe. A heisst G-graduierte Algebra falls $A = \bigoplus_{k \in G} A^k$ und $A^k \cdot A^l \subseteq A^{k+l}$ gilt.*

Die Grassmann Algebra Λ_n ist eine $\mathbb{Z}$-graduierte Algebra. Für $0 \leq k \leq n$ definieren wir

$$\Lambda_n^k := \operatorname{lin}\{\psi_M \mid \#M = k\},$$

für $k < 0$ und $k > n$ sei $\Lambda_n^k := \{0\}$. Für $0 \leq k \leq n$ ist Λ_n^k ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $\binom{n}{k}$ und es gilt

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_n^k.$$

Weiter gilt nach (3.1) für das Dachprodukt

$$\Lambda_n^k \wedge \Lambda_n^l \subseteq \Lambda_n^{k+l}.$$

Die Multiplikation in Grassmann-Algebren ist nach Definition antikommutativ und erfüllt demnach die Vertauschungsregel

$$u \wedge v = (-1)^{kl} v \wedge u \qquad \forall u \in \Lambda_n^k, \quad v \in \Lambda_n^l. \tag{3.2}$$

Weiter bemerken wir, daß die $\mathbb{Z}$-Graduierung von Λ_n eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung induziert. Mit

$$\begin{aligned} \Lambda_n^0 &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_n^{2k} \\ \Lambda_n^1 &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_n^{2k+1} \end{aligned}$$

gilt für die Grassmann-Algebra

$$\Lambda_n = \Lambda_n^0 \oplus \Lambda_n^1$$

und

$$\Lambda_n^i \wedge \Lambda_n^j \subseteq \Lambda_n^{i+j},$$

wobei hier die Addition $i+j$ in $\mathbb{Z}_2$, d.h. mod 2 zu verstehen ist. Die Elemente von Λ_n^0 heißen gerade, die von Λ_n^1 heißen ungerade. Nach (3.2) gilt somit

$$u \wedge v = v \wedge u \qquad \forall u \in \Lambda_n^0, \quad v \in \Lambda_n.$$

$$u \wedge v = -v \wedge u \qquad \forall u, v \in \Lambda_n^1.$$

Insbesondere gilt $u \wedge u = 0$ für $u \in \Lambda_n^1$.

3.2 Analysis auf Superräumen

Die in diesem Abschnitt zu betrachtenden Objekte sind $\mathbb{Z}_2$-graduierte Vektorräume $V = V_0 \oplus V_1$. Ein Beispiel für Superräume sind die im vorigen Abschnitt eingeführten Grassmann-Algebren aufgefasst als Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Ausgehend von der Grassmann-Algebra Λ_n über $\mathbb{R}$ mit Erzeugenden $\psi_1, \ldots, \psi_n$ kann ein $\alpha \in \Lambda_n$ eindeutig geschrieben werden in der Form

$$\alpha = \alpha_0 + \sum_{\mu} \alpha_\mu \psi_\mu + \sum_{\mu_1,\mu_2} \alpha_{\mu_1\mu_2} \psi_{\mu_1\mu_2} + \cdots + \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_n} \alpha_{\mu_1\cdots\mu_n} \psi_{\mu_1} \cdots \psi_{\mu_n}, \qquad (3.3)$$

wobei wir $\psi_i \wedge \psi_j := \psi_i\psi_j$ gesetzt haben. Man beachte hierbei, daß $\psi_i\psi_i = 0$ ist und dadurch einige Terme der Summe entfallen. Wir definieren nun einen Raum der C^∞-Funktionen mit m kommutierenden und n antikommutierenden Variablen durch

$$C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right) := C^\infty\left(\mathbb{R}^m\right) \otimes \Lambda_n.$$

Hierbei ist das Tensorprodukt über $\mathbb{R}$ zu verstehen. Man kann also eine Funktion $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right)$ analog zu (3.3) eindeutig darstellen als

$$\begin{aligned} f(x,\psi) &= f(x_1, \ldots, x_m, \psi_1 \ldots, \psi_n) \\ &= f_0(x) + f_1(x)\psi_1 + \cdots + f_n(x)\psi_n + \cdots + f_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)\psi_{\mu_1} \cdots \psi_{\mu_n}. \end{aligned}$$

Wir können also den Raum $C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right)$ als Grassmann-Algebra mit Koeffizienten in $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ auffassen.

Beispiele.

1. Für $n = 0$ ist der $C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|0}\right)$ ein gewöhnlicher $C^\infty(\mathbb{R}^m)$.
2. Für $m = 0$ ist der $C^\infty\left(\mathbb{R}^{0|n}\right)$ die Grassmann-Algebra Λ_n.
3. Für $n = m$ ist der $C^\infty\left(\mathbb{R}^{n|n}\right)$ die Algebra der Differentialformen auf $\mathbb{R}^n$.

Wir wollen nun partielle Ableitungen und ein Integral auf Superräumen erklären.

Definition 3.2. *Sei $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right)$ eine Funktion in den Variablen $(x_1, \ldots, x_m, \psi_1, \ldots, \psi_n)$. Dann ist die partielle Ableitung von $f(x,\psi)$ definiert durch*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\psi_{\mu_1}\cdots\psi_{\mu_k} &= \frac{\partial f_{\mu_1\cdots\mu_k}(x)}{\partial x_i}\psi_{\mu_1}\cdots\psi_{\mu_k}\\ \frac{\partial}{\partial \psi_{\mu_i}} f_{\mu_1\cdots\mu_k}(x)\psi_{\mu_1}\cdots\psi_{\mu_k} &= (-1)^{\mu_i-1} f_{\mu_1\cdots\mu_k}\psi_{\mu_1}\cdots\psi_{\mu_{i-1}}\psi_{\mu_{i+1}}\cdots\psi_{\mu_k}.\end{aligned}$$

Die partielle Ableitung nach x_i ist die gewöhnliche partielle Ableitung auf $\mathbb{R}^m$. Die partielle Ableitung nach den antikommutierenden Variablen ist linear

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \psi_{\mu_i}}(cf) &= c\frac{\partial f}{\partial \psi_{\mu_i}},\\ \frac{\partial}{\partial \psi_{\mu_i}}(f+g) &= \frac{\partial f}{\partial \psi_{\mu_i}} + \frac{\partial g}{\partial \psi_{\mu_i}}\end{aligned}$$

und es gilt die Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{\mu_i}}(fg) = \frac{\partial f}{\partial \psi_{\mu_i}} g + (-1)^{\tilde{f}} f \frac{\partial g}{\partial \psi_{\mu_i}}$$

wobei $\tilde{f}$ der $\mathbb{Z}_2$-Grad von f ist.

Definition 3.3 (Berezin Integral). *Sei $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right)$, und es seien alle Koeffizienten von f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Wir definieren das Integral von f auf $\mathbb{R}^{m|n}$ durch*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} f(x,\psi)dx_1\cdots dx_m d\psi_1\cdots d\psi_n := (-1)^{nm}\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mu_1\cdots\mu_n}(x_1,\ldots,x_m)dx_1\cdots dx_m.$$

Für $\mathbb{R}^{m|n}$ definieren wir

$$d(x,\psi) := dx_1\cdots dx_m d\psi_1\cdots d\psi_n.$$

Seien $f, g \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right)$ mit Koeffizienten in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ und $c \in \mathbb{R}$, dann gelten für das Berezin Integral folgende später wichtige Beziehungen:
Das Berezin Integral ist linear

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} (f(x,\psi)+g(x,\psi))\, d(x,\psi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} f(x,\psi)d(x,\psi) + \int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} g(x,\psi)d(x,\psi),\\ \int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} cf(x,\psi)d(x,\psi) &= c\int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} f(x,\psi)d(x,\psi)\end{aligned}$$

und es gilt (Fubini)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}\times\mathbb{R}^{p|q}} f\left[(x,\psi),(y,\bar{\psi})\right] d(y,\bar{\psi})d(x,\psi)$$
$$= (-1)^{(n+m)p} \int\limits_{\mathbb{R}^{m|n}} \int\limits_{\mathbb{R}^{p|q}} f\left[(x,\psi),(y,\bar{\psi})\right] d(y,\bar{\psi})d(y,\psi).$$

Im Folgenden betrachten wir speziell den Raum $C^\infty(\mathbb{R}^{2n|2n})$. Hierzu ändern wir unsere Notation und gruppieren die $4n$ Koordinaten in $2n$ Koordinatenpaare. Seien $x_i \in \mathbb{R}^2 \quad (i = 1,\dots,n)$ die kommutierenden Variablen und $\psi_i, \bar{\psi}_i \in \Lambda_n \quad (i = 1,\dots,n)$ die antikommutierenden Variablen. Für diese gelten nach (3.1) die Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned}
\left[\psi_i, \bar{\psi}_j\right] &= \psi_i\bar{\psi}_j + \bar{\psi}_j\psi_i = 0 \\
\left[\psi_i, \psi_j\right] &= \psi_i\psi_j + \psi_j\psi_i = 0 \\
\left[\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_j\right] &= \bar{\psi}_i\bar{\psi}_j + \bar{\psi}_j\bar{\psi}_i = 0 \\
\psi_i^2 &= \bar{\psi}_i^2 = 0.
\end{aligned}$$

Wir schreiben ein Element $X \in \mathbb{R}^{2n|2n}$ als $(X_1,\dots,X_n)$ wobei wir die Notation $X_i = (x_i, \psi_i, \bar{\psi}_i) \in \mathbb{R}^{2|2}$ verwenden. Eine allgemeine Konstruktion eines Superkoordinatensystems findet man in [10]. Wir definieren ein Super-Punktprodukt durch

$$X_i \cdot X_j := x_i \cdot x_j + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_i\psi_j + \bar{\psi}_j\psi_i)$$

wobei $X_i \cdot X_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{2|2})$ist und $x_i \cdot x_j$ das Skalarprodukt von x_i und x_j auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Wir bezeichnen die Menge der Koordinatentransformationen unter denen das Super-Punktprodukt invariant ist, als supersymmetrische Transformationen oder Supersymmetrien.

Definition 3.4. *Eine Superfunktion $F \in C^\infty\left(\mathbb{R}^{m|n}\right)$ heißt supersymmetrisch, wenn für alle supersymmetrischen Transformationen τ*

$$F(X_1 \dots, X_n) = F(\tau X_1, \dots, \tau X_n)$$

gilt.

Zum Schluß des Kapitels wollen wir noch einen wichtigen Satz für supersymmetrische Funktionen zitieren.

Satz 3.5. *Sei $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n|2n})$ supersymmetrisch und seien alle Koeffizienten von F in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$. Weiter sei $dX_i = \frac{d^2x_i}{\pi}d\bar{\psi}d\psi$. Dann gilt*

$$\int F(X_1,\dots,X_n)dX_1\cdots dX_n = F_0(0,\dots,0).$$

Einen Beweis findet man in [8, 9]. Wir haben nun alle benötigten Hilfsmittel aus der Superanalysis eingeführt. Weit ausführlichere Einführungen findet man z.B. in [10].

3.3 Der supersymmetrische Replica Trick

Wir wollen nun die Inverse einer Matrix über ein supersymmetrisches Gaußintegral darstellen. Siehe dazu auch [11, 13]. Hierzu benötigen wir Aussagen über Gaußsche Integrale in $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{R}^{0|2n}$.

Lemma 3.6. *Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, dann gilt für die inverse Matrix A^{-1}*

$$(A^{-1})_{kl} = \frac{1}{\det A} \cdot \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \det A.$$

Beweis. Nach der Cramerschen Regel gilt

$$(A^{-1})_{kl} = \frac{\det \tilde{A}_{kl}}{\det A},$$

wobei hier $\tilde{A}_{kl} = (a^1, \ldots, a^{l-1}, e_k, a^{l+1}, \ldots, a^n)$ ist. Es ist also zu zeigen

$$\frac{\partial}{\partial a_{kl}} \det A = \det \tilde{A}_{kl}.$$

Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz (Entwicklung nach der k-ten Zeile) gilt

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det A'_{kj},$$

wobei A'_{kj} die Streichmatrix der k-ten Zeile und der j-ten Spalte ist. Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial a_{kl}} \det A = \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot \det A'_{kj} = (-1)^{k+l} \cdot \det A'_{kl} = \det \tilde{A}_{kl}.$$

$\square$

Satz 3.7. *Sei I eine endliche Indexmenge und $|I|$ die Anzahl der Elemente von I. Sei weiter $x_i, x_j \in \mathbb{R}^2$, A eine Matrix auf $\mathbb{R}^{|I|}$ mit $A = A_1 + iA_2$ wobei $A_1 > 0$ und A_2 reelle symmetrische Matrizen sind. Dann gilt*

$$\frac{1}{\det A} = \int e^{-\sum\limits_{i,j \in I} a_{ij} x_i \cdot x_j} \prod_{j \in I} \frac{d^2 x_j}{\pi} \tag{3.4}$$

und

$$\frac{(A^{-1})_{ab}}{\det A} = \int x_a \cdot x_b e^{-\sum\limits_{i,j \in I} a_{ij} x_i \cdot x_j} \prod_{j \in I} \frac{d^2 x_j}{\pi}. \tag{3.5}$$

Beweis. Wir beweisen Gleichung (3.4) zunächst für den Fall, daß $A > 0$ eine reelle symmetrische Matrix ist. Für jedes solche A gibt es eine unitäre Matrix S, so daß $SAS^{-1} = A'$ gilt wobei A' diagonal ist. Ist $A > 0$, so existiert das Integral, und es gilt nach Substitution

$$\int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a'_{ij} x_i \cdot x_j} \prod_{j\in I} d^2 x_j = \int \prod_{j\in I} e^{-a'_{jj} x_j \cdot x_j} \prod_{j\in I} d^2 x_j = \prod_{j\in I} \frac{\pi}{a'_{jj}}.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{\det A'} = \int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a'_{ij} x_i \cdot x_j} \prod_{j\in I} \frac{d^2 x_j}{\pi}.$$

Da die Determinanten von A' und A gleich sind, gilt auch

$$\frac{1}{\det A} = \int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij} x_i \cdot x_j} \prod_{j\in I} \frac{d^2 x_j}{\pi}.$$

Wir zeigen nun den allgemeinen Fall. Sei $M_\epsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < \epsilon\}$, $A(z) = A_1 + zA_2$ mit $A_1 > 0$ und A_1, A_2 reell und symmetrisch. Für den Fall $z = 0$ ist Gleichung (3.4) bewiesen, denn es gilt $A(0) = A_1 > 0$ ist reelle symmetrische Matrix. Ist nun $A(0) > 0$, so ist auch $A(z) > 0$ für $z \in M_\epsilon \cap \mathbb{R}$ mit ϵ klein genug. Es gilt also für $z \in M_\epsilon \cap \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\det A(z)} = \int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij}(z) x_i \cdot x_j} \prod_{j\in I} \frac{d^2 x_j}{\pi}.$$

Sei nun $z \in M_\epsilon$ und

$$\begin{aligned} f_1(z) &:= \int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij}(z) x_i \cdot x_j} \prod_{j\in I} \frac{d^2 x_j}{\pi} \\ f_2(z) &:= \frac{1}{\det A(z)}. \end{aligned}$$

Die Funktionen f_1, f_2 sind holomorph und auf $M_\epsilon \cap \mathbb{R}$ identisch. Nach dem Identitätssatz gilt dann $f_1(z) = f_2(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$. Setzt man jetzt $z = i$, folgt die Behauptung. Gleichung (3.5) folgt aus Gleichung (3.4) durch Anwendung von Lemma (3.6). Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial a_{kl}} \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{(\det A)^2} \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \det A = -\frac{(A^{-1})_{kl}}{\det A}.$$

Durch ableiten von Gleichung (3.4) nach a_{kl} folgt nun

$$\frac{(A^{-1})_{kl}}{\det A} = \int x_k \cdot x_l \exp^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij} x_i \cdot x_j} \prod_{j\in I} \frac{d^2 x_j}{\pi}.$$

$\square$

Satz 3.8. *Sei wieder I eine endliche Indexmenge, $|I|$ die Anzahl der Elemente von I und A eine Matrix auf $\mathbb{R}^I$ mit $A = A_1 + iA_2$ wobei $A_1 > 0$, A_2 reelle symmetrische Matrizen sind. ψ, $\bar{\psi}$ seien Grassmann Erzeuger. Dann gilt*

$$\det A = \int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij}\psi_i\cdot\bar{\psi}_j} \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j \tag{3.6}$$

und

$$(A^{-1})_{ab} \det A = \int \psi_a \cdot \bar{\psi}_b e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij}\bar{\psi}_i\cdot\psi_j} \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j. \tag{3.7}$$

Beweis. Wir beweisen zuerst Gleichung (3.6) und setzen $|I| = n$. Da bei dem Berezin Integral nur Koeffizienten maximaler Ordnung berücksichtigt werden, gilt

$$\begin{aligned}
&\int e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij}\psi_i\cdot\bar{\psi}_j} \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&= \int \prod_{i,j\in I}(1 - a_{ij}\bar{\psi}_i\psi_j) \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&= \int (-1)^n \sum_{\substack{i_k \neq i_l \\ j_k \neq j_l}} a_{i_1 j_1}\bar{\psi}_{i_1}\psi_{j_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n j_n}\bar{\psi}_{i_n}\psi_{j_n} \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&= (-1)^n \int \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\bar{\psi}_1\psi_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}\bar{\psi}_n\psi_{\sigma(n)} \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&= (-1)^n \int \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}\bar{\psi}_1\psi_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot \bar{\psi}_n\psi_{\sigma(n)} \prod_{j\in I} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
&= \det A.
\end{aligned}$$

Damit gilt Gleichung (3.6). Die Gleichung (3.7) folgt aus Gleichung (3.6) durch Anwendung von Lemma (3.6). □

Durch Kombination von Satz (3.7) und (3.8) erhalten wir

Korollar 3.9 (supersymmetrischer Replica Trick). *Seien I, A wie oben und $X_i, X_j \in \mathbb{R}^{2|2}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
(A^{-1})_{ab} &= \int x_a \cdot x_b e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij} X_i\cdot X_j} \prod_{j\in I} dX_j \\
&= \int \psi_a\bar{\psi}_b e^{-\sum\limits_{i,j\in I} a_{ij} X_i\cdot X_j} \prod_{j\in I} dX_j
\end{aligned}$$

wobei $dX_j = \frac{d^2 x_j}{\pi} d\bar{\psi}_j d\psi_j$ *ist.*

Beweis. Kombiniert man Gleichung (3.5) mit Gleichung (3.6) und Gleichung (3.4) mit Gleichung (3.7) so folgt die Behauptung. $\square$

4 Diskrete Schrödingeroperatoren

4.1 Das Bernoulli-Anderson-Modell

Im folgenden wollen wir Schrödingeroperatoren auf einem eindimensionalen diskreten Intervall mit zufälligem Potential betrachten. Wir betrachten also Operatoren auf einem Intervall $I := \{-l, \dots, l\} \subset \mathbb{Z}$ der Form

$$H_I := \Delta + V_\omega, \qquad H_I : l^2(I) \to l^2(I).$$

Falls klar ist welches Gitter I gemeint ist schreiben wir für den Operator H_I kurz H. Der Hilbertraum $l^2(I)$ sei definiert durch

$$l^2(I) := \left\{ u : I \to \mathbb{C} \mid \sum_{x \in I} |u(x)|^2 < \infty \right\}.$$

Im diskreten Fall wird aus dem Laplace Differentialoperator Δ ein Differenzenoperator, den wir definieren wollen durch

$$(\Delta u)(x) := \frac{1}{2} \left(u(x+1) + u(x-1) \right).$$

Weiter sei der Potentialterm V_ω auf $l^2(I)$ erklärt als

$$(V_\omega u)(x) := \omega(x) u.$$

Hierbei sei $\omega(x) \in \{0,1\}$ eine unabhängig gleich verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) mit einer σ-Algebra F auf $\Omega = \{0,1\}^I$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $P = \nu^{\otimes I}$. Hierbei gilt für die Einzelverteilungen

$$\nu(A) = \frac{1}{2}\delta_1(A) + \frac{1}{2}\delta_0(A)$$

wobei A Element der von $\{0,1\}$ erzeugten σ-Algebra ist und

$$\delta_k(\{A\}) = \begin{cases} 1 & k \in A \\ 0 & k \notin A \end{cases}$$

das Dirac-Maß ist. Ein Potential mit Werten in $\{0,1\}$ nennt man auch Bernoulli Potential. Schrödinger Operatoren mit unabhängig gleich verteiltem Potential bezeichnet man als das Anderson Modell. Demnach bezeichnen wir unser hier definiertes Modell als Bernoulli-Anderson Modell. Die Resolvente des Operators H im Punkt z ist gegeben durch

$$R(H,z) := (H-z)^{-1}, \qquad R(H,z) : \varrho(H) \to B\left(l^2(I)\right).$$

Hier bezeichnet $\varrho(H) \subset \mathbb{C}$ die Resolventenmenge von H und $B\left(l^2(I)\right)$ die beschränkten Operatoren auf $l^2(I)$. Da $|I|$ endlich vorausgesetzt war, können wir $l^2(I)$ mit $\mathbb{C}^{|I|}$ durch den Isomorphismus

$$F : l^2(I) \to \mathbb{C}^{|I|}, \qquad u \mapsto F(u) = \begin{pmatrix} u(-l) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(l) \end{pmatrix}$$

identifizieren. Wir können also im folgenden den Operator $\tilde{H} : \mathbb{C}^{|I|} \to \mathbb{C}^{|I|}$ betrachten. Da im Fall $|I| < \infty$ die Räume $l^2(I)$ und $\mathbb{C}^{|I|}$ isomorph sind schreiben wir für $\tilde{H}$ und H gleichermasen H. Der Schrödingeroperator H hat demnach eine Matrixdarstellung

$$H = \begin{pmatrix} V_\omega(-l) & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & \cdot & \cdot & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & \cdot & \cdot & \frac{1}{2} \\ & & & \frac{1}{2} & V_\omega(l) \end{pmatrix}.$$

4.2 Eine Darstellung der Resolvente

Wir wollen den in Kapitel 3.3 bewiesenen supersymmetrischen Replica Trick nun auf das Bernoulli-Anderson-Modell anwenden und die Grassmann-Variablen ausintegrieren. Die so erhaltene Resolventendarstellung verwenden wir dann letztlich, um Lokalisierung zu zeigen. Die Idee eine solche Darstellung zu verwenden ist aus Campanino, Klein [12]. Wir benutzen hier folgende Variante des supersymmetrischen Replica Tricks.

Satz 4.1. *Sei $H \in L(l^2(I))$, $a, b \in I$ und* $\operatorname{Im} z > 0$. *Für die Resolvente von H gilt dann*

$$(H-z)^{-1}_{ab} = \left\langle e_a, (H-z)^{-1} e_b \right\rangle = \frac{i}{2\pi} \int \psi_a \bar{\psi}_b e^{-2\pi i \sum\limits_{i,j\in I} (H-z)_{ij} X_i \cdot X_j} \prod_{n\in I} dX_n. \quad (4.1)$$

Beweis. Es gilt

$$\left\langle e_a,(H-z)^{-1}e_b\right\rangle = \tfrac{2\pi}{2\pi}i\bar{i}\left\langle e_a,(H-z)^{-1}e_b\right\rangle = \tfrac{i}{2\pi}\left\langle e_a,2\pi i(H-z)^{-1}e_b\right\rangle.$$

Sei $z := x+iy$ und E die Einheitsmatrix. Dann gilt

$$2\pi i(H-zE) = 2\pi iH - 2\pi ixE + 2\pi yE = 2\pi yE + 2\pi i(H-xE).$$

Definieren wir $A_1 := yE$ und $A_2 := (H-zE)$, so gilt $\operatorname{Im} z > 0$ genau dann wenn $A_1 > 0$ ist. Durch Anwendung des supersymmetrischen Replica Tricks (vgl. Korollar (3.9)) folgt die Behauptung. □

Setzt man die Definition des Operators H in Gleichung (4.1) ein, erhält man

$$(H-z)^{-1}_{ab} = \frac{i}{2\pi}\int \psi_a\bar{\psi}_b e^{-2\pi i\sum\limits_{i,j\in I}\left(\Delta_{ij}X_i\cdot X_j+(V_{\omega_{ij}}-z)X_i\cdot X_j\right)}\prod_{n\in I} dX_n.$$

Da wir den Operator in eine symmetrische Matrix mit Werten ungleich Null nur auf den Nebendiagonalen und eine Diagonalmatrix zerlegt haben, können wir den Ausdruck vereinfachen. Wir summieren also über die Hauptdiagonale von $V-z$ und zwei Mal über die untere Nebendiagonale des diskreten Laplaceoperators. Wenn wir abkürzend $X^2 := X\cdot X$ definieren erhalten wir

$$(H-z)^{-1}_{ab} = \frac{i}{2\pi}\int \psi_a\bar{\psi}_b e^{-2\pi i\sum\limits_{j=-l}^{l-1}X_j\cdot X_{j+1}-2\pi i\sum\limits_{j=-l}^{l}(V_{\omega_j}-z)X_j^2}\prod_{n\in I} dX_n.$$

Um eine für uns brauchbare Darstellung der Resolventen des Operators H zu bekommen müssen wir die Grassmann-Variablen ausintegrieren. Hierzu benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Lemma 4.2. *Sei $F : C^\infty(\mathbb{R}^{2|2}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2|2})$ und $F_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ der Koeffizient nullter Ordnung der Superfunktion F. Dann gilt*

$$F(X\cdot X) = F_0(x\cdot x) + F_0'(x\cdot x)\bar{\psi}\psi.$$

Beweis. Nach Definition gilt

$$X\cdot X = x\cdot x + \frac{1}{2}(\bar{\psi}\psi+\bar{\psi}\psi) = x\cdot x+\bar{\psi}\psi.$$

Betrachten wir nun die Potenzreihen Entwicklung von F, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(X\cdot X) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x\cdot x+\bar{\psi}\psi)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(x\cdot x)^n + n(x\cdot x)^{n-1}\bar{\psi}\psi\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x\cdot x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x\cdot x)^{n-1}\bar{\psi}\psi \\
&= F_0(x\cdot x) + F_0'(x\cdot x)\bar{\psi}\psi
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.3. *Seien $F, G : C^\infty(\mathbb{R}^{2|2}) \to C^\infty(\mathbb{R}^{2|2})$, mit F_0, G_0 wie in Lemma (4.2) und es gelte*

$$G_0(x_i^2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} F_0'(x_j^2) \frac{d^2 x_j}{\pi},$$

wobei wir abkürzend $x \cdot x := x^2$ gesetzt haben. Dann gilt

$$\int e^{-2\pi i X_i \cdot X_j} F(X_j^2) dX_j = -\left[G_0(x_i^2) + G_0'(x_i^2)\bar{\psi}_i \psi_i\right] = -G(X_i^2).$$

Beweis. Nach Lemma (4.2) gilt $F(X^2) = F_0(x^2) + F_0'(x^2)\bar{\psi}\psi$. Weiter gilt

$$e^{-2\pi i X_i \cdot X_j} = e^{-2\pi i x_i \cdot x_j - \frac{2\pi i}{2}\bar{\psi}_i \psi_j - \frac{2\pi i}{2}\bar{\psi}_j \psi_i} = e^{-2\pi i x_i \cdot x_j}(1 - \pi i \bar{\psi}_i \psi_j)(1 - \pi i \bar{\psi}_j \psi_i).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int e^{-2\pi i X_i \cdot X_j} F(X_j^2) dX_j = \int e^{-2\pi i X_i \cdot X_j} \left[F_0(x_j^2) + F_0'(x_j^2)\bar{\psi}_j \psi_j\right] dX_j \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \int e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} \left[F_0(x_j^2) + F_0'(x_j^2)\bar{\psi}_j \psi_j\right] (1 - \pi i \bar{\psi}_i \psi_j)(1 - \pi i \bar{\psi}_j \psi_i) \tfrac{d^2 x_j}{\pi} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} \left[F_0'(x_j^2) + \pi^2 F_0(x_j^2)\bar{\psi}_i \psi_i\right] \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \\
&= -\left[\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} F_0'(x_j^2) \tfrac{d^2 x_j}{\pi} + \pi^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} F_0(x_j^2) \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \cdot \bar{\psi}_i \psi_i\right] \\
&= -\left[G_0(x_i^2) + \pi^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} F_0(x_j^2) \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \cdot \bar{\psi}_i \psi_i\right].
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen $G_0'(x_i^2) = \pi^2 \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} F_0(x_j^2) \frac{d^2 x_j}{\pi}$. Sei nun $r := x_i^2$ mit $x_i = \sqrt{r} e_1$ wobei e_1 Einheitsvektor im $\mathbb{R}^2$ ist. Durch Einsetzen folgt nun

$$G_0(r) = \int e^{-2\pi i \sqrt{r} e_1 \cdot x_j} F_0'(x_j^2) \tfrac{d^2 x_j}{\pi}$$

Wir differenzieren jetzt nach r und erhalten

$$\begin{aligned}
G_0'(r) &= \int \tfrac{-2\pi i e_1 \cdot x_j}{2\sqrt{r}} e^{-2\pi i \sqrt{r} e_1 \cdot x_j} F_0'(x_j^2) \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \\
&= \int \tfrac{-2\pi i}{4\sqrt{r}} e^{-2\pi i \sqrt{r} e_1 \cdot x_j} 2 e_1 \cdot x_j F_0'(x_j^2) \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \\
&= \int\int \tfrac{-2\pi i}{4\sqrt{r}} e^{-2\pi i \sqrt{r} e_1 \cdot x_j} \tfrac{\partial}{\partial x_{j1}} F_0(x_j^2) \tfrac{1}{\pi} dx_{j_1} dx_{j_2}.
\end{aligned}$$

Integrieren wir jetzt partiell nach x_{j_1} und setzen $x_i = \sqrt{r}e_1$ ein, so erhalten wir letztlich

$$\begin{aligned} G_0' &= \tfrac{(2\pi)^2}{4} \int\int e^{-2\pi i\sqrt{r}e_1\cdot x_j} F_0(x_j^2)\tfrac{1}{\pi} dx_{j_1} dx_{j_2} \\ &= \pi^2 \int e^{-2\pi i x_i \cdot x_j} F_0(x_j^2)\tfrac{d^2x_j}{\pi}. \end{aligned}$$

$\square$

Sei der Ableitungsoperator einer differenzierbaren Funktion auf $\mathbb{R}^+$ definiert durch

$$Df = -\tfrac{1}{\pi}f'.$$

Weiter sei T die Fouriertransformation auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist folgendes Korollar zu Lemma (4.3) bewiesen.

Korollar 4.4. *Seien F_0, G_0 wie in Lemma (4.2). Dann gilt*

$$G_0'(x_i^2) = DTDF_0(x_i^2) = TF_0(x_i^2).$$

Wir können nun folgende Darstellung der Resolvente des Operators H beweisen.

Satz 4.5. *Sei H der oben definierte Schrödingeroperator. Weiter seien* Im $z > 0$ *und β_j der Multiplikationsoperator mit der Funktion $\tilde{\beta}_j(|x_j|^2) = e^{-2\pi i(V_{\omega_j}-z)|x_j|^2}$. Dann gilt für die Resolvente von H*

$$\begin{aligned} (H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{(-i)^{b-a}}{2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\prod_{j=-l}^{a-1} TD\beta_j\right) 1\right](|x_a|^2) \\ &\quad \left[\left(\prod_{j=0}^{b-a-1} T\beta_{b-j}\right)\left(\prod_{j=0}^{l-b-1} TD\beta_{l-j}\right) 1\right](|x_a|^2)\,(\beta_a 1)\,(|x_a|^2) dx_a. \end{aligned}$$

Für Operatoren O_j bezeichnet $\prod_{j=1}^n O_j$ den Operator $O_nO_{n-1}\dots O_1$. Zum Beispiel bedeutet $\left[\left(\prod_{j=-l}^{a-1} TD_j\beta_j\right) 1\right](|x_a^2)$ starte mit der konstanten Funktion 1, wende den Operator β_{-l} an, dann D, dann T, dann β_{-l+1} und so weiter. Der so entstandene Ausdruck wird letztlich in $|x_a|^2$ ausgewertet. Es sei hier noch bemerkt, daß wir vereinfachend $|x_j|^2 = x_j^2$ gesetzt hatten. Wir werden dies im Beweis verwenden. Für Produkte von Funktionen verwenden wir die Konvention $\prod_{j=1}^n f_j(x_j) = f_n(x_n)f_{n-1}f(x_{n-1})\dots f_1(x_1)$.

Beweis. Der Beweis der Resolventendarstellung beruht im wesentlichen auf wiederholter Anwendung von Lemma (4.3), wobei auf die Reihenfolge der supersymmetrischen Integration zu achten ist. Diese Darstellung erhalten wir, wenn wir die Grassmann-Variablen in der Reihenfolge

$$d\bar{\psi}_l d\psi_l d\bar{\psi}_{l-1} d\psi_{l-1} \dots d\bar{\psi}_{a+1} d\psi_{a+1} d\bar{\psi}_{-l} d\psi_{-l} d\bar{\psi}_{-l+1} d\psi_{-l+1} \dots d\bar{\psi}_a d\psi_a$$

ausintegrieren, wobei o.E. $a < b$ angenommen wird. Die Grassmannvariablen der Komponenten l bis $b+1$ und $-l$ bis $a-1$ werden durch Anwendung von Lemma (4.3) integriert. Die restlichen Komponenten müssen manuell integriert werden. Die Einzelheiten zeigt nachstehende Rechnung. Sei also o.E. $a < b$ und wir definieren vereinfachend $v := V_\omega - z$. Dann gilt nach Satz (4.1)

$$\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi} \int \psi_a \bar{\psi}_b e^{-2\pi i \sum\limits_{j=-l}^{l-1} X_j \cdot X_{j+1}} e^{-2\pi i \sum\limits_{j=-l}^{l} v_j X_j^2} \prod_{j \in I} dX_j \\
&= \frac{i}{2\pi} \int \psi_a e^{-2\pi i v_a X_a^2} \prod_{j=-l}^{a-1} e^{-2\pi i X_{j+1} \cdot X_j} e^{-2\pi i v_j X_j^2} \\
&\quad \cdot \prod_{j=1}^{b-a-1} e^{-2\pi i X_{b-j-1} \cdot X_{b-j}} e^{-2\pi i v_{b-j} X_{b-j}^2} \\
&\quad \cdot \bar{\psi}_b \prod_{j=0}^{l-b} e^{-2\pi i X_{l-j-1} \cdot X_{l-j}} e^{-2\pi i v_{l-j} X_{l-j}^2} \prod_{j=a+1}^{l} dX_j \prod_{j=0}^{l+a} dX_{a-j}.
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
A &= \psi_a e^{-2\pi i v_a X_a^2} \prod_{j=-l}^{a-1} e^{-2\pi i X_{j+1} \cdot X_j} e^{-2\pi i v_j X_j^2} \\
B &= \prod_{j=1}^{b-a-1} e^{-2\pi i X_{b-j-1} \cdot X_{b-j}} e^{-2\pi i v_{b-j} X_{b-j}^2}
\end{aligned}$$

verwenden. Definieren wir $\tilde{F}_j(X_j^2) := e^{-2\pi i v_j X_j^2}$ und $G_{j-1} := \int e^{-2\pi i X_{j-1} \cdot X_j} \tilde{F}_j(X_j^2) dX_j$, so gilt für $j = l$ nach Lemma (4.3)

$$\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi} \int AB \cdot \bar{\psi}_b \prod_{j=2}^{l-b} e^{-2\pi i X_{l-j-1} \cdot X_{l-j}} e^{-2\pi i v_{l-j} X_{l-j}^2} \\
&\quad \cdot \int e^{-2\pi i X_{l-2} \cdot X_{l-1}} e^{-2\pi i v_{l-1} X_{l-1}^2} G_{l-1}(X_{l-1}^2) dX_{l-1} \prod_{j=a+1}^{l-2} dX_j \prod_{j=0}^{l+a} dX_{a-j}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun $F_j(X_j^2) := e^{-2\pi i v_j X_j^2} G_j(X_j^2)$ erhält man durch $(l-b)$ maliges Anwenden von Lemma (4.3)

$$
\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi}(-1)^{l-b} \int AB \\
&\quad \cdot \int \bar{\psi}_b e^{-2\pi i X_{b-1}\cdot X_b} F_b(X_b^2) dX_b \prod_{j=a+1}^{b-1} dX_j \prod_{j=0}^{l+a} dX_{a-j}.
\end{aligned}
$$

Nach Lemma (4.2) gilt $F_j(X_j^2) = F_{j,0}(x_j^2) + F'_{j,0}(x_j^2)\bar{\psi}_j\psi_j$. Wir berechnen nun ein Integral der Form

$$
\begin{aligned}
&\int \bar{\psi}_j e^{-2\pi i X_{j-1}\cdot X_j} F_j(X_j^2) dX_j \\
&= \int \bar{\psi}_j e^{-2\pi i X_{j-1}\cdot X_j} \left[F_{j,0}(x_j^2) + F'_{j,0}(x_j^2)\bar{\psi}_j\psi_j\right] d\bar{\psi}_j d\psi_j \tfrac{d^2x_j}{\pi} \\
&= \int e^{-2\pi i x_{j-1}\cdot x_j} \bar{\psi}_j \left(1 - \pi i \bar{\psi}_{j-1}\psi_j\right)\left(1 - \pi i \bar{\psi}_j \psi_{j-1}\right)\left[F_{j,0}(x_j^2) + F'_{j,0}(x_j^2)\bar{\psi}_j\psi_j\right] d\bar{\psi}_j d\psi_j \tfrac{d^2x_j}{\pi} \\
&= -\pi i \int e^{-2\pi i x_{j-1}\cdot x_j} F_{j,0}(x_j^2) \bar{\psi}_{j-1} \tfrac{d^2x_j}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Wir werden π hier erst zum Ende des Beweises kürzen. Für $j = b$ ergibt sich durch einsetzen in $(H-z)^{-1}_{ab}$

$$
\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi}(-1)^{l-b}(-\pi i) \int AB \\
&\quad \cdot \bar{\psi}_{b-1} \int e^{-2\pi i x_{b-1}\cdot x_b} F_{b,0}(x_b^2) \tfrac{d^2x_b}{\pi} \prod_{j=a+1}^{b-1} dX_j \prod_{j=0}^{l+a} dX_{a-j} \\
&= \frac{i}{2\pi}(-1)^{l-b}(-\pi i) \int A \\
&\quad \cdot \prod_{j=2}^{b-a-1} e^{-2\pi i X_{b-j-1}\cdot X_{b-j}} e^{-2\pi i v_j X_{b-j}^2} \\
&\quad \cdot \int \bar{\psi}_{b-1} e^{-2\pi i X_{b-2}\cdot X_{b-1}} \tilde{F}_{b-1}(X_{b-1}^2) d\bar{\psi}_{b-1} d\psi_{b-1} \\
&\quad \cdot \int e^{-2\pi i x_{b-1}\cdot x_b} F_{b,0}(x_b^2) \tfrac{d^2x_b}{\pi} \tfrac{d^2x_{b-1}}{\pi} \prod_{j=a+1}^{b-2} dX_j \prod_{j=0}^{l+a} dX_{a-j}.
\end{aligned}
$$

Wiederholen wir diese Integration für $j = b-1, \ldots, a+1$, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi}(-1)^{l-b}(-\pi i)^{b-a+1} \\
&\cdot \int \psi_a \bar{\psi}_a e^{-2\pi i v_a X_a^2} \prod_{j=-l}^{a-1} e^{-2\pi i X_{j+1}\cdot X_j} e^{-2\pi i v_j X_j^2} \prod_{j=-l}^{a} d\bar{\psi}_j d\psi_j \\
&\cdot \int e^{-2\pi i x_a \cdot x_{a+1}} \tilde{F}_{a+1,0}(x_{a+1}^2) \cdot \ldots \cdot \int e^{-2\pi i x_{b-2}\cdot x_{b-1}} \tilde{F}_{b-1,0}(x_{b-1}^2) \\
&\cdot \int e^{-2\pi i x_{b-1}\cdot x_b} F_{b,0}(x_b^2) \prod_{j=a+1}^{b} \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \prod_{j=0}^{l+a} \tfrac{d^2 x_{a-j}}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Durch $(l+a-1)$ maliges Anwenden von Lemma (4.3) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi}(-1)^{l-b}(-\pi i)^{b-a+1}(-1)^{a-1+l} \\
&\cdot \int \psi_a \bar{\psi}_a e^{-2\pi i v_a X_a^2} G_a(X_a^2) d\bar{\psi}_a d\psi_a \\
&\cdot \int e^{-2\pi i x_a \cdot x_{a+1}} \tilde{F}_{a+1,0}(x_{a+1}^2) \cdot \ldots \cdot \int e^{-2\pi i x_{b-2}\cdot x_{b-1}} \tilde{F}_{b-1,0}(x_{b-1}^2) \\
&\cdot \int e^{-2\pi i x_{b-1}\cdot x_b} F_{b,0}(x_b^2) \prod_{j=a+1}^{b} \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \tfrac{d^2 x_a}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Mit Lemma (4.2) können wir die verbliebenen Grassmann-Variablen ausintegrieren und erhalten

$$
\int \psi_a \bar{\psi}_a e^{-2\pi i v_a X_a^2} G_a(X_a^2) d\bar{\psi}_a d\psi_a = e^{-2\pi i v_a x_a^2} G_{a,0}(x_a^2).
$$

Einsetzen ergibt letztlich

$$
\begin{aligned}
(H-z)^{-1}_{ab} &= \frac{i}{2\pi}(-1)^{l-b}(-\pi i)^{b-a+1}(-1)^{a-1+l} \int e^{-2\pi i v_a x_a^2} G_{a,0}(x_a^2) \\
&\cdot \int e^{-2\pi i x_a \cdot x_{a+1}} \tilde{F}_{a+1,0}(x_{a+1}^2) \cdot \ldots \cdot \int e^{-2\pi i x_{b-2}\cdot x_{b-1}} \tilde{F}_{b-1,0}(x_{b-1}^2) \\
&\cdot \int e^{-2\pi i x_{b-1}\cdot x_b} F_{b,0}(x_b^2) \prod_{j=a+1}^{b} \tfrac{d^2 x_j}{\pi} \tfrac{d^2 x_a}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun die Definition von $G_{j,0}$ rückwärts wiederholt ein und beachten $F_{b,0}(x_b^2) = e^{-2\pi i v_b x_b^2} G_{b,0}(x_b^2)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G_{a,0}(x_a^2) &= \left[\left(\prod_{j=-l}^{a-1} TD\beta_j\right) 1\right](x_a^2) \\
G_{b,0}(x_b^2) &= \left[\left(\prod_{j=0}^{l-b-1} TD\beta_{l-j}\right) 1\right](x_a^2).
\end{aligned}
$$

Durch einsetzen in $(H-z)^{-1}_{ab}$ folgt nun die Behauptung. $\square$

4.3 Zwei Varianten der Wegner-Ungleichung

In diesem letzten Abschnitt beweisen wir zwei Varianten der Wegner-Ungleichung nach [6], die in Kombination mit den üblichen multiscale argumenten Lokalisierung beweisen. Wir gehen vor wie in [12] und definieren die Hilberträume H_0 und H_1 durch

$$\begin{aligned} ||f||^2_{H_0} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|f(|x|^2)|}{|x|}\right)^2 dx, \\ ||f||^2_{H_1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} |f(|x|^2)|^2 + |Df(|x|^2)|^2 dx. \end{aligned}$$

Sei eine Funktion f auf $\mathbb{R}^+$ gegeben, so daß

$$f(|x|^2)\tfrac{x}{|x|^2}$$

in $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist. Die Fourier Transformation dieser Funktion hat wieder die Form

$$g(|x|^2)\tfrac{x}{|x|^2}.$$

Wir definieren einen Operator R durch $Rf = ig$. Weiter bezeichne $S = TD$ und Γ gleichermasen die Funktion $\Gamma(r) = \hat{\nu}(r)e^{2\pi izr}$ mit $r \in \mathbb{R}^+$, sowie den Multiplikationsoperator mit der Funktion Γ. Hierbei sei $z = E + i\eta$, wobei $E, \eta \in \mathbb{R}$ sind und $\eta > 0$ ist. Bilden wir mit der aus Satz (4.5) erhaltenen Formel für $(H-z)^{-1}_{ab}$ den Erwartungswert an der Stelle $a = 0$ und $b = 0$, so erhalten wir

$$\mathcal{E}\left[(H-z)^{-1}_{00}\right] = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left[(S\Gamma)^l(|x|^2)\right]^2 \Gamma(|x|^2)dx.$$

Im Folgenden bezeichne $G(a,b,z) = \left[(H-z)^{-1}_{ab}\right]$ und $G(z) = \mathcal{E}\left[(H-z)^{-1}_{00}\right]$. Betrachten wir auf $\mathbb{R}^+$ Funktionen der Form $h_z(r) = e^{2\pi izr}$ mit $\operatorname{Im} z > 0$, so gilt

Lemma 4.6.

$$Sh_z = h_{-\frac{1}{4z}}.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst für die eindimensionale Fouriertransformation und reelle α mit $\alpha > 0$

$$\widehat{e^{-2\pi\alpha x^2}} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi iyx}e^{-2\pi\alpha x^2}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-2\pi iyx - 2\pi\alpha x^2}dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{2\pi\alpha}}e^{\frac{-2\pi y^2}{4\alpha}}.$$

Es gilt nach quadratischer Ergänzung und dem Cauchy-Integralsatz

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i y x-2\pi\alpha x^2}dx &= e^{-\frac{2\pi y^2}{4\alpha}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi\alpha(\frac{iy}{2\alpha}+x)^2}dx\\
&= e^{-\frac{2\pi y^2}{4\alpha}}\int_{L} e^{-2\pi\alpha\zeta^2}d\zeta\\
&= e^{-\frac{2\pi y^2}{4\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{2\pi\alpha}}
\end{aligned}
$$

wobei L die Gerade $\zeta(x)=\frac{iy}{2\alpha}+x$ ist. Für Komplexe α folgt dies Analog dem Beweis von Satz (3.7) mit dem Identitätssatz. Sei nun $s^2=r$. Mit dem Einheitsvektor e_1 gilt

$$
\begin{aligned}
Sh_z(|se_1|^2) &= TDh_z(|se_1|^2)\\
&= -\frac{2\pi iz}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i s e_1\cdot x}e^{2\pi iz|x|^2}dx\\
&= -\frac{2\pi iz}{\pi}\sqrt{-\frac{\pi}{2\pi iz}}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i s_1 x_1}e^{2\pi i z x_1^2}dx_1\\
&= -\frac{2\pi iz}{\pi}\sqrt{-\frac{\pi}{2\pi iz}}e^{-\frac{2\pi y^2}{4\alpha}}\sqrt{-\frac{\pi}{2\pi\alpha}}\\
&= e^{-\frac{2\pi y^2}{4\alpha}}.
\end{aligned}
$$

□

Insbesondere ist die Klasse der Funktionen h_z abgeschlossen unter S und unter Produktbildung. Dementsprechend hat $(S\Gamma)^n 1$ und andere ähnliche später verwendete Ausdrücke L^∞ Norm ≤ 1, denn sie sind über ein Wahrscheinlichkeitsmaß gemittelte Funktionen der Form h_z. Nach [12] gilt folgendes Lemma.

Lemma 4.7. *Seien f, Sund R wir oben, dann gilt $Sf=f(0)+Rf$. Ist $f(0)=0$, so ist auch $Sf(0)=0$ und Rf stimmt mit Sf überein.*

Mit dem Lemma gilt auch

Korollar 4.8. *Seien S, R und Γ wie oben, dann gilt*

$$(S\Gamma)^l 1=\sum_{j=0}^{l}(R\Gamma)^j 1.$$

Beweis. Wir beweisen das Korollar durch vollständige Induktion. Für $l=1$ ist die Behauptung durch Lemma (4.7) bewiesen. Wir nehmen an, die Behauptung gelte für $l = n$ und betrachten.

$$\begin{aligned}
(S\Gamma)^{n+1}1(r) &= S\Gamma\left(\sum_{j=0}^{n}(R\Gamma)^j 1(r)\right)\\
&= \Gamma\left(\sum_{j=0}^{n}(R\Gamma)^j 1(0)\right) + \left(\sum_{j=1}^{n+1}(R\Gamma)^j 1(r)\right)\\
&= \Gamma\left(\sum_{j=1}^{n}(R\Gamma)^j 1(0)\right) + \left(\sum_{j=0}^{n+1}(R\Gamma)^j 1(r)\right).
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen $\Gamma(\sum_{j=1}^{n}(R\Gamma)^j 1(0)) = 0$. Können wir $R\Gamma(0) = 0$ zeigen, so folgt mit einer weiteren vollständigen Induktion die Behauptung. Es gilt $R\Gamma(0) = S\Gamma(0) - \Gamma(0) = TD\Gamma(0) - \Gamma(0)$. Beachten wir, daß $\Gamma(0) = 1$ ist, so müssen wir $TD\Gamma(0) = 1$ zeigen. Sei $s^2 = r$, so gilt mit dem Einheitsvektor e_1

$$\begin{aligned}
TD\Gamma(r) &= TD\Gamma(|se_1|^2)\\
&= -\tfrac{1}{\pi}\left(\int e^{-2\pi i s e_1\cdot x}\hat{\nu}'(|x|^2)e^{2\pi i z|x|^2}dx + \int 2\pi i z e^{-2\pi i s e_1\cdot x}\hat{\nu}(|x|^2)e^{2\pi i z|x|^2}dx\right)\\
&= -\tfrac{1}{\pi}\int\int 2\pi i(z-y)e^{-2\pi i s e_1\cdot x}e^{-2\pi i y|x|^2}e^{2\pi i z|x|^2}d\nu(y)dx.
\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$TD\Gamma(0) = -\tfrac{1}{\pi}\int\int 2\pi i(z-y)e^{2\pi i(z-y)|x|^2}d\nu(y)dx = 1$$

□

Die nächsten drei Lemmata beinhalten den größten Teil des Beweises der ersten Variante der Wegner-Ungleichung. Für den Beweis des folgenden Lemmas werden wir die aus Satz (2.11) erhaltene Normabschätzung für den Operator $T_H T_G$ verwenden. Damit geht die gesammte Vorarbeit aus Kapitel 2 hier in den Beweis der Wegner-Ungleichung ein.

Lemma 4.9. *Sei $j \geq 2$ und $\rho < 1$, dann gilt für $f \in H_0$*

$$||(R\Gamma)^j f||_{H_0} \leq \rho^j ||f||_{H_0},$$

wobei ρ nur von ν abhängt.

Beweis. Nach dem Satz von Plancherel ist R eine Isometrie auf H_0. Da $f \in H_0 \Leftrightarrow f\frac{x}{|x|^2} \in L^2$ können wir Satz (2.11) auf Funktionen $f\frac{x}{|x|^2}$ anwenden, indem wir $H = G = \Gamma$ und $T_G = T_H = R\Gamma$ setzen. Es gilt $||\Gamma||_\infty = 1$, $||R\Gamma||_{L^2\to L^2} = 1$. Mit $Q(x) = |x|^2$ folgt

$$\begin{aligned} |\Gamma(|x|^2)| &= |\hat{\nu}(Q(x))e^{2\pi i z Q(x)}| \\ &\le |\hat{\nu}(Q(x))| \cdot |e^{2\pi i E Q(x)}| \cdot |e^{-2\pi\eta Q(x)}| \\ &\le |\hat{\nu}(Q(x))|. \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen für Satz (2.11) erfüllt und es gilt

$$||(R\Gamma)^2 f \tfrac{x}{|x|^2}||_{L^2} = ||(R\Gamma)^2 f||_{H_0} \le \rho^2 ||f||_{H_0},$$

wobei $\rho^2 < 1$ ist. Durch Iteration erhalten wir $||(R\Gamma)^{2j} f||_{H_0} \le \rho^{2j}||f||_{H_0}$. Für $\tilde{\rho} \ge \rho^{\frac{2}{3}}$ und $j \ge 2$ gilt dann $||(R\Gamma)^j f||_{H_0} \le \tilde{\rho}^j ||f||_{H_0}$. □

Lemma 4.10. *Sei $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ und* supp $(1-\Phi) \subset [a,b]$ *mit* $0 < a < b$. *Weiter seien $k > 2$ und $\rho < 1$. Dann gilt*

$$||(R\Gamma)^k(1-\Phi)||_{H_0} \le \rho^k (\log \tfrac{1}{\eta})^{\frac{1}{2}}$$

und

$$||(R\Gamma)^2 1||_{H_0} \le C \left(\log \tfrac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Wir definieren eine weitere Funktion $\Phi_t(r) := \Phi(t^{-1}r)$, so gilt supp $(1-\Phi_t) \subset [t^{-1}a, t^{-1}b]$. Beachten wir nun $|\Gamma(|x|^2) \le e^{-2\pi\eta|x|^2} \le 1$. Für diese gilt $\eta \le t$

$$\begin{aligned} ||(1-\Phi_t)\Gamma|| &\le ||1-\Phi_t||_{H_0} \\ &\le \left(\int\limits_{t^{-1}a \le |x|^2 \le t^{-1}b} \frac{|1-\phi_t(|x|^2)|^2}{|x|^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C \left(\int_{t^{-1}a}^{t^{-1}b} \frac{|1-\phi_t(r^2)|^2}{r} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C \left(\int_{t^{-1}a}^{t^{-1}b} \frac{1}{r} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le C \left(\ln \tfrac{1}{\eta}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Wählen wir $t = 1$ und verwenden Lemma (4.9), so erhalten wir für $j = k$

$$||(R\Gamma)^k(1 - \Phi)||_{H_0} \leq \rho^k(\log \tfrac{1}{\eta})^{\frac{1}{2}}.$$

Definieren wir nun eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = \frac{x}{|x|^2}(\Phi_\eta\Gamma)(|x|^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ||g||_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |\tfrac{x}{|x|^2}(\Phi\Gamma)(|x|^2)dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^2} |\Phi(\eta^{-1}|x|^2)|dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}} |\Phi(\eta^{-1}r^2)|rdr \\ &\leq C\eta^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit gilt auch $||\hat{g}||_\infty \leq C\eta^{\frac{1}{2}}$ und $|R\Gamma\Phi_\eta(r^2)| \leq C\eta^{\frac{1}{2}}r$. Wegen $|\Gamma(r^2)| \leq e^{-2\pi\eta r^2}$ folgt

$$|\Gamma R\Gamma\Phi_\eta(r^2)| \leq C\eta^{\frac{1}{2}}re^{-2\pi\eta r^2}.$$

Wir erhalten somit nun

$$||\Gamma R\Gamma\Phi_\eta||_{H_0} = C\int_0^\infty \eta e^{-4\pi\eta r^2}rdr < \infty$$

unabhängig von η. Da R eine Isometrie auf H_0 ist gilt auch $||(R\Gamma)^2\Phi_\eta||_{H_0} < \infty$. Nun gilt

$$\begin{aligned} ||(R\Gamma)^2 1|| &= ||(R\Gamma)^2(1 - \Phi_\eta + \Phi_\eta)||_{H_0} \\ &\leq ||(R\Gamma)^2(1 - \Phi_\eta)||_{H_0} + ||(R\Gamma)^2\Phi_\eta||_{H_0} \\ &\leq C_1(\log \tfrac{1}{\eta})^{\frac{1}{2}} + C_2 \leq C(\log \tfrac{1}{\eta})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.11. *Sei $\int |x|d\nu(x) < \infty$. Dann gilt für $f \in H_1$*

$$||S\Gamma f||_{H_1} \leq A||f||_{H_1},$$

wobei A nur von $|E|$ abhängt.

Beweis. Nach Korollar (4.4) ist S eine Isometrie auf H_1. Mit $\int |x| d\nu(x) < \infty$ gilt auch $\hat{\nu}'(|x|^2) < \infty$. Nun erhalten wir wieder mit Korollar (4.4)

$$||S\Gamma f||_{H_1} = ||\Gamma f||_{H_1} \leq A||f||_{H_1}.$$

□

Wir können nun die erste Variante der Wegner-Ungleichung beweisen.

Satz 4.12. *Seien $\eta \leq \frac{1}{2}$ und $l > \epsilon_0 \log \frac{1}{\eta}$. Für jedes $\epsilon_0 > 0$ existieren dann $\epsilon_1 > 0$ und $C < \infty$, abhängend von ν, ϵ_0 und $|E|$, so daß gilt*

$$|G(z)| \leq C\eta^{-(1-\epsilon_1)}.$$

Beweis. Sei Φ wie in Lemma (4.10). Für $k \geq 2$ und $l > k$ gilt dann

$$(S\Gamma)^l \Phi = (S\Gamma)^{l-1} 1 + (R\Gamma)^l \Phi.$$

Dementsprechend können wir $(S\Gamma)^l 1$ in folgender Form ausdrücken

$$(S\Gamma)^l 1 = \sum_{j=k+1}^{l} (R\Gamma)^j 1 + (S\Gamma)^k \Phi + (R\Gamma)^k (1 - \Phi).$$

Nach Lemma (4.11) gilt die Abschätzung

$$||(S\Gamma)^k \Phi||_{H_1} \leq CA^k.$$

Mit Lemma (4.9) und Lemma (4.10) erhalten wir

$$||(R\Gamma)^j||_{H_0} \leq C\rho^j (\log \tfrac{1}{\eta})^{\frac{1}{2}}.$$

Für jedes $k \geq 2$ und $l > k$ ist nun $(S\Gamma)^l 1 = f + g$ mit Funktionen f und g für die gilt

$$||f||_{H_1} \leq CA^k,$$

$$||g||_{H_0} \leq C\rho^k (\log \tfrac{1}{\eta})^{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir jetzt $k = \epsilon_0 \log \frac{1}{\eta}$, dann ist $(S\Gamma)^l 1 = f + g$ wobei

$$||f||^2_{H_1} \leq C(e^{\epsilon_0 \log \frac{1}{\eta} \log A})^2 \leq C\eta^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$||g||^2_{H_0} \leq C\eta^{\epsilon_1}$$

ist. Da $|\Gamma(r^2)| \leq e^{-2\pi\eta r^2}$ ist gilt letztlich

$$
\begin{aligned}
|G(z)| &\leq (||f||_{H_1}^2 + ||g||_{H_0}^2) \sup_r (r^2 e^{-2\pi\eta r^2}) \\
&\leq C\eta^{\epsilon_1 - 1}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Die zweite Variante der Wegner-Ungleichung erhalten wir indem wir die aus Satz (4.5) erhaltene Formel mit ihrem Komplex konjugierten multiplizieren und den Erwartungswert bilden. Wir erhalten

$$
\mathcal{E}(|G_l(a,b,z)|^2) = \frac{1}{4\pi^4} \int\limits_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} (T\Gamma)^{b-a}\Theta_b(x,y)\Theta_a(x,y)\Gamma(x,y)dxdy.
$$

Hier ist T die $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ Fouriertransformation, die definiert ist durch

$$
Tf(\xi,\eta) = \int\limits_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(\xi\cdot x - \eta\cdot y)} dxdy
$$

und

$$
\Gamma(x,y) = \hat{\nu}(|x|^2 - |y|^2)e^{2\pi i E(|x|^2-|y|^2)}e^{-2\pi\eta(|x|^2+|y|^2)}.
$$

Wie vorher bezeichne Γ auch den Multipikationsoperator mit der Funktion Γ. Nach Lemma (4.6) haben Θ_a und Θ_b L^∞ Norm ≤ 1. Demnach gilt

$$
||T\Gamma\Theta_b||_{L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)} \leq ||e^{-2\pi\eta(|x|^2+|y|^2)}\Theta_a||_{L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)} \leq C\eta^{-1}.
$$

Genauso erhalten wir

$$
||\Gamma\Theta_b||_{L^2(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)} \leq C\eta^{-1}.
$$

Mit Korollar (2.12) und der quadratischen Form $Q(x,y) = |x|^2 - |y|^2$ folgt nun die Abschätzung $||(T\Gamma)^2||_{L^2\to L^2} \leq \rho^2$, wobei $\rho^2 < 1$ nur von ν abhängt. Wenden wir diese Abschätzung etwa $|b-a|$ mal auf die Funktion $T\Gamma\Theta_a(x,y)$ an erhalten wir für $|a| \leq \frac{l}{4}$ und $|b| \geq \frac{l}{2}$ analog zu Lemma (4.9)

$$
||(T\Gamma)^{b-a}||_{L^2\to L^2} \leq \tilde{\rho}^{b-a} \leq \tilde{\rho}^{\frac{1}{2}l} = e^{\frac{1}{2}l\log\tilde{\rho}} = e^{-Cl}.
$$

Das führt letztlich zu folgender Varianten der Wegner-Ungleichung

Satz 4.13. *Sei $a,b \in \{-l,\dots,l\}$ mit $|a| \leq \frac{l}{4}$ und $|b| \geq \frac{l}{2}$. Weiter sei $z = E + i\eta$ mit $0 < \eta \leq 1$. Dann gilt*

$$
\mathcal{E}(|G_l(a,b,z)|^2) \leq Ce^{-Cl}\eta^{-2}.
$$

Literatur

[1] P.W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, Phys. Rev. **109** 1492-1505 (1958)

[2] F. Wegner, Bounds on density of states in dissordered systems, Z. Phys. B **44**, 9-15 (1981)

[3] N.F. Mott, W.D. Twose, The theory of impurity conduction, Adv. Phys. **10**, 107-163 (1961)

[4] P. Stollmann, Caught by disorder: bound states in random media, in Vorbereitung bei Birkhäuser, Boston, (2001)

[5] J. Weidmann, Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teubner, (1976)

[6] C. Shubin, R. Vakilian, T. Wolff, Some harmonic analysis questions suggested by Anderson-Bernoulli models, GAFA, geom. funct. anal **8**, 932-964 (1998)

[7] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill series in higher mathematics, (1973)

[8] A. Klein, The supersymmetric replica trick and smoothness of the density of states for the random Schrödinger operators, Proceedings of Symposium in Pure Mathematics **51**, (1990)

[9] A.Klein and A.Spies, Smoothness of the density of states in the Anderson model on a one dimensional strip, Anals of Physics **183**, 352-398 (1988)

[10] F. Constantinescu, H.F. deGroote, Geometrische und algebraische Methoden der Physik: Supermanigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren, Teubner, (1994)

[11] J. Sjöstrand and W.M. Wang, Supersymmetric Measures and Maximum Principles in the Complex Domain, Preprint mp_arc 98-116

[12] M. Campanino and A. Klein, A Supersymmetric Transfer Matrix and Differentiability of the Density of States in the One-Dimensional Anderson Model, CMP, Commun. Math. Phys. **104**, 227-241 (1986)

[13] Antonio Claudio Reis de Paiva, Supersymmetrische Methoden in der Theorie der ungeordneten Systeme: rigorose Ergebnisse für die Zustandsdichte, Dissertation, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, (1988)