Es gibt kein treues stochastisches Modell der Quantenmechanik

Diplomarbeit
24. April 1998

Roderich Tumulka

Fachbereich Mathematik
Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Inhaltsverzeichnis

1 Vorrede

1.1 Zusammenfassung

Die Vorstellung, daß ein Quantensystem zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Zustand (aus einem „klassischen“ Phasenraum) einnimmt, ist im Formalismus der Quantenmechanik nicht vorgesehen. Man kann eine solche Vorstellung zwar verträglich mit den Regeln der QM unterhalten, jedoch erweisen sich dann ganz verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf dem Phasenraum als experimentell ununterscheidbar; solche Modelle postulieren sozusagen die Existenz einer „verborgenenen Information“ neben den prüfbaren Fakten. Es wird gezeigt, daß dies für alle Modelle gilt, die mit den von der QM für jede Observable vorhergesagten Wahrscheinlichkeitsverteilung im Einklang stehen, selbst wenn sie erlauben,

1. daß nicht jede Verteilung auf dem Phasenraum durch makroskopische Apparaturen präpariert werden kann
2. daß das Meßergebnis garnicht deterministisch vom Zustand des Quantensystems abhängt, sondern das Meßgerät selbst einem (vom zu messenden System unabhängigen) Zufall unterliegt.

Dazu ist eine gründliche Auseinandersetzung mit der Theorie der Wahrscheinlichkeitsmaße auf distributiven und auf nicht-distributiven Verbänden nötig.

1.2 Gliederung

Der Text gruppiert sich um den einen Satz, den ich beweise. Kapitel 2 stellt den Formalismus der QM bereit und einige (bekannte) Methoden, Begriffe und Fakten dazu; Abschnitt 2.1 gibt eine Formulierung, wie man sie in Lehrbüchern der QM findet; Abschnitte 2.2 und 2.3 befassen sich mit statistischen Operatoren, die für uns deshalb interessant sind, weil sie genau die meßbare Information kodieren. Die Abschnitte 2.4 und 2.5 beschreiben die Grundlagen der Theorie der (σ-vollständigen, mit Komplementoperation ausgestatteten) Verbände und ihrer Maße; die Verbindung zur QM besteht im Theorem von Gleason.

Kapitel 3 stellt meine Ergebnisse dar. Die Abschnitt 3.1 und 3.2 erläutern die Definition von „treues stochastisches Modell der QM“. Abschnitt 3.3 bespricht ein altbekanntes Argument, nämlich daß die auf einen eindimensionalen Unterraum konzentrierten Maße die extremalen Punkte sind in der konvexen Menge der Quanten-W-Maße und daher als Zustände aufgefaßt werden sollten, und warum dieses Argument bei unserer Definition eines stochastischen Modells der QM nicht greift. Abschnitt 3.4 beweist den versprochenen Satz, Abschnitt 3.5 wertet ihn.

Kapitel 4 besteht aus dem Beweis des in 3.4 benötigten Lemmas.

2 Einführung

2.1 Formalismus der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik (QM) stellt einen Formalismus auf, der es erlaubt, die Ergebnisse von Experimenten (genauer: die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge der möglichen Ergebnisse) vorherzusagen. Der Formalismus schweigt sich jedoch darüber aus, was „in Wirklichkeit“ geschieht; dies zu erklären, insbesondere für Augenblicke, in denen gerade keine Messung stattfindet, bemühen sich die sogenannten Interpretationen der Quantenmechanik. Solche Interpretationen (in einem präzise definierten Sinn) werden wir betrachten. Zunächst formulieren wir einen (vereinfachten) Formalismus der QM (vgl. etwa [Je]) für ein System aus N spinlosen, unterscheidbaren Teilchen. Die (undefinierten) Grundbegriffe des Formalismus sind „Wellenfunktion“, „Observable“ und „Messung“.

1. Die Wellenfunktion ist ein Element von $L^2(\mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{C}) =: \mathcal{H}$ mit Norm 1.

2. Die Observablen sind die hermiteschen Operatoren des erwähnten Hilbertraumes. Für den Formalismus genügt es, die „eigentlichen Observablen“ zu betrachten (diejenigen mit endlichem Spektrum; sie sind endliche $\mathbb{R}-$Linearkombinationen von Projektionsoperatoren).

3. Findet in einem Zeitintervall keine Messung statt, so verändert sich die Wellenfunktion gemäß der Schrödingergleichung

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi}{dt} = \hat{H}\psi,$$

wobei $\hat{H}$ der (hermitesche) Hamilton-Operator ist.

Dies bedarf einer Erklärung insofern, als $\hat{H}$ nicht auf ganz L^2 definiert ist (ein typischer Fall ist ja $\hat{H} = -(\hbar^2/2m)\Delta + V(\hat{x})$): die formale Lösung der Schrödingergleichung lautet

$$\psi(t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar)\psi(0),$$

und $\exp(i\hat{H}t/\hbar)$ existiert tatsächlich auf ganz L^2, auch wenn $\hat{H}$ das nicht tut.

4. (Meßpostulat). Mögliche Ergebnisse der Messung der eigentlichen Observablen $\hat{R}$ sind ihre Eigenwerte; das Ergebnis ist im allgemeinen zufällig. Findet eine Messung von $\hat{R}$ an einem System statt, das unmittelbar vor der Messung die Wellenfunktion ψ hat, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert λ von $\hat{R}$ als Meßergebnis zu erhalten,

$$\|\hat{P}_{A_\lambda}\psi\|^2,$$

wobei A_λ der zugehörige Eigenraum von $\hat{R}$ ist und $\hat{P}_A$ stets die orthogonale Projektion auf den (abgeschlossenen) Unterraum A bedeutet. Hat man tatsächlich λ gemessen, so liegt unmittelbar nach der Messung als neue Wellenfunktion

$$\|\hat{P}_{A_\lambda}\psi\|^{-1}\hat{P}_{A_\lambda}\psi$$

vor.

Zur Notation: $|\psi\rangle = \psi$, und die zum Vektor ψ gehörige Linearform $\langle\psi|-\rangle$ schreiben wir $\langle\psi|$. Ist ein Operator $\hat{C}$ hermitesch, schreiben wir auch $\langle\phi|\hat{C}|\psi\rangle$ für $\langle\phi|\hat{C}\psi\rangle = \langle\hat{C}\phi|\psi\rangle$. Ist A ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$, so existiert der Projektionsoperator $\hat{P}_A$ und ist eine eigentliche Observable; die Messung von $\hat{P}_A$ nennen wir auch „das A-Experiment“ und sagen, es sei erfolgreich, wenn der Wert 1 gemessen wurde (bzw. erfolglos, wenn der Wert 0 gemessen wurde; 0 und 1 sind die einzigen Eigenwerte von $\hat{P}_A$). Demnach ist $\langle\psi|\hat{P}_A\psi\rangle$ die Erfolgswahrscheinlichkeit des A-Experimentes an der Wellenfunktion ψ.

Ich habe bewußt den Begriff „Zustand“ unterdrückt: in der klassischen Mechanik bezeichnet er einen Punkt des Phasenraumes, im Formalismus der QM kommt nichts Vergleichbares vor. Es ist weit verbreitet, Vektoren im Hilbertraum oder auch statistische Operatoren (s.u.) als „Zustände“ zu bezeichnen. Dies vermeiden wir. Da wir stochastische („klassische“) Modelle der QM betrachten werden, reservieren wir das Wort „Zustand“ für Phasenraumpunkte in klassischen Prozessen. Die Konfusion, die entsteht, wenn man diese sprachliche Trennung nicht vornimmt, führte in dem Lehrbuch [Ja] zu einem fehlerhaften Beweis für die unzutreffende Behauptung, es gebe überhaupt keine stochastischen Modelle der QM.

2.2 Statistische Operatoren

Es fällt auf, daß die Wellenfunktionen ψ und $e^{is}\psi$ für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ durch keinerlei Messung unterschieden werden können. Dies führt auf die Frage, wieviel man denn überhaupt über die Wellenfunktion eines quantenmechanischen Systems durch Messungen feststellen kann. Nehmen wir also an, wir hätten eine Maschine, die uns ein System beliebig oft in gleicher Weise präpariert, und wir dürfen beliebige Messungen daran vornehmen. Was heißt, in gleicher Weise präpariert? — sagen wir, sie präpariert eine zufällig ausgewählte Wellenfunktion, ausgewählt gemäß einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf der Einheitssphäre $S(\mathcal{H})$ im Hilbertraum. Der Formalismus legt für jede Observable die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\mathbb{R}$ fest, die wir bei (wiederholter) Messung dieser Observablen an unserem System beobachten werden: wenn eine eigentliche Observable $\hat{R}$ gegeben ist durch

$$\hat{R} = \sum_{\text{endl.}} r_n \hat{P}_{A_n},$$

wobei $r_n \in \mathbb{R}$ und die A_n paarweise orthogonale Unterräume sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von $\hat{R}$ an dem μ-verteilten System den Eigenwert r_n zu erhalten,

$$= \int_{S(\mathcal{H})} \langle\psi|\hat{P}_{A_n}\psi\rangle \; \mu(d\psi) = \mathrm{tr}\Big(\hat{P}_{A_n} \int_{S(\mathcal{H})} |\psi\rangle\langle\psi| \; \mu(d\psi)\Big),$$

wobei tr die Spur eines Operators bedeutet, das ist die Summe der Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen bezüglich irgendeiner Basis. Offenbar lassen sich alle diese Wahrscheinlichkeitsverteilungen bereits aus Kenntnis des *statistischen Operators*

$$\hat{W} = \int_{S(\mathcal{H})} |\psi\rangle\langle\psi| \; \mu(d\psi)$$

ermitteln, und dieser Operator läßt sich wiederum aus hinreichend vielen Meßergebnissen errechnen, wie wir in Kürze zeigen werden. Mit anderen Worten: Die Präparate, die gemäß μ und μ' resp. verteilt sind, sind genau dann experimentell ununterscheidbar (durch statistische Tests), wenn ihre statistischen Operatoren übereinstimmen; denn dann führen die beiden für jede Observable zu gleichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den möglichen Werten. Wir bemerken, daß statistische Operatoren selbstadjungiert, beschränkt und positiv sind und $\mathrm{tr}\hat{W} = 1$.

Um nun andersherum an einem gegebenen Präparat (das ist das, was eine Präpariermaschine wiederholbar ausspuckt) den statistischen Operator durch hinreichend viele Messungen (im Sinne des Gesetzes der großen Zahl) zu bestimmen, wählen wir eine Orthonormalbasis $\phi_1, \phi_2, \ldots$ und bestimmen auf folgende Weise die Matrixeinträge $\langle\phi_n|\hat{W}\phi_m\rangle$: Für die Diagonalelemente bemerken wir, daß $\hat{P}_n := |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \hat{P}_{\mathbb{C}\phi_n}$ eine eigentliche Observable ist mit den Eigenwerten 1 (und Eigenraum $\mathbb{C}\phi_n$) und 0 (und Eigenraum $(\mathbb{C}\phi_n)^\perp$). Die Wahrscheinlichkeit, bei Messung dieser Observablen an unserem Präparat den Wert 1 zu erhalten, lautet, wie oben gesehen:

$$\mathrm{tr}\big(\hat{P}_n\hat{W}\big) = \mathrm{tr}(\hat{P}_n^2\hat{W}) = \mathrm{tr}(\hat{P}_n\hat{W}\hat{P}_n) = \sum_m \langle\phi_m|\hat{P}_n\hat{W}\hat{P}_n\phi_m\rangle =$$

$$= \sum_m \langle\phi_m|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\hat{W}\phi_n\rangle\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \langle\phi_n|\hat{W}\phi_n\rangle,$$

wegen $\langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{nm}$. Also kann man die Diagonaleinträge durch Messungen bestimmen. (Übrigens sind die Diagonaleinträge immer reell und nichtnegativ.)

Nichtdiagonaleinträge bestimmen wir aus Diagonaleinträgen gemäß

$$\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_n + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_m \middle| \hat{W} \middle| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_n + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_m \right\rangle = \tfrac{1}{2}\langle \phi_n|\hat{W}|\phi_n\rangle + \mathrm{Re}\langle \phi_n|\hat{W}|\phi_m\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \phi_m|\hat{W}|\phi_m\rangle \text{ und}$$

$$\left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_n + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\phi_m \middle| \hat{W} \middle| \tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_n + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\phi_m \right\rangle = \tfrac{1}{2}\langle \phi_n|\hat{W}|\phi_n\rangle - \mathrm{Im}\langle \phi_n|\hat{W}|\phi_m\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \phi_m|\hat{W}|\phi_m\rangle.$$

Man beachte dabei $\langle \phi_n + i\phi_m| = \langle \phi_n| - i\langle \phi_m|$ und $\langle \phi_m|\hat{W}|\phi_n\rangle = \langle \phi_n|\hat{W}|\phi_m\rangle^*$, da $\hat{W}$ selbstadjungiert ist. □

Das beschriebene Meßverfahren kann man zur Definition für den statistischen Operator eines Präparates machen, ohne daran zu glauben, daß jedesmal eine wohldefinierte Wellenfunktion vorliege. Wir bemerken weiter (siehe [Pa]), daß sich jeder positive (selbstadjungierte) Operator mit Spur 1 schreiben läßt als

$$\hat{W} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|,$$

wobei die ϕ_k eine Orthonormalbasis bilden, $p_k \in [0,1]$ und $\sum_k p_k = 1$. Daraus ersieht man auch, daß jeder solche Operator tatsächlich als statistischer Operator auftreten kann, nämlich als Ergebnis einer Präpariermaschine, die zuerst mit Wahrscheinlichkeit p_k die natürliche Zahl k wählt und dann die Wellenfunktion ϕ_k herstellt.

Der statistische Operator trägt in folgendem Sinne nur statistische Information: wenn die Präparationsapparatur als erstes eine zufällige Zahl $J \in \{1, \ldots, n\}$ wählt mit den respektiven Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_n$ und aus den statistischen Operatoren $\hat{W}_1, \ldots, \hat{W}_n$ den $\hat{W}_J$ präpariert, so wird derjenige Beobachter, der über den gezogenen J-Wert nicht informiert ist, insgesamt nur den statistischen Operator

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \hat{W}_j$$

feststellen können, wie man am erwähnten Meßverfahren verifiziert. D.h. stochastische Kombination äußert sich als Konvexkombination. Derjenige Beobachter aber, der den Wert J jedesmal erfährt, wird auch die $\hat{W}_1, \ldots, \hat{W}_n$ feststellen können. Derjenige Beobachter, der eine von J unabhängige Zufallszahl K genannt bekommt, gelangt zu dem Resultat $\hat{W}_1 = \ldots = \hat{W}_n$ — der statistische Operator gibt also in gewissem Sinne nur über *unser Wissen* über das Präparat Auskunft.

2.3 Der Formalismus in Begriffen des statistischen Operators

Die Evolutionsgleichung für statistische Operatoren lautet

$$\frac{\hbar}{i}\frac{d\hat{W}}{dt} = \hat{H}\hat{W} - \hat{W}\hat{H} = [\hat{H}, \hat{W}]$$

beziehungsweise

$$\hat{W}(t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar)\ \hat{W}(0)\ \exp(-i\hat{H}t/\hbar).$$

Dies folgt sofort aus $\psi(t) = \exp(i\hat{H}t/\hbar)\psi(0)$.

Das Meßpostulat: Mißt man an einem Präparat mit statistischem Operator $\hat{W}$ die Observable $\hat{R} = \sum_n r_n \hat{P}_{A_n}$ (endliche Summe), so beträgt die Wahrscheinlichkeit, r_n als Meßwert zu erhalten, $\mathrm{tr}(\hat{P}_{A_n}\hat{W})$; in diesem Fall liegt unmittelbar nach der Messung der statistische Operator

$$\frac{1}{\mathrm{tr}(\hat{P}_{A_n}\hat{W})}\hat{P}_{A_n}\hat{W}\hat{P}_{A_n}$$

vor.

Dies läßt sich anhand der Vorstellung nachweisen, der statistische Operator rühre von einer Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $S(\mathcal{H})$ her. Den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit hatten wir oben schon hergeleitet; wie lautet der neue statistische Operator? Nimmt man unmittelbar nach der Messung von $\hat{R}$ eine Messung der Observablen $\hat{S} = \sum_m s_m \hat{P}_{B_m}$ vor (wobei B_m paarweise orthogonale Unterräume sind), so beträgt die Wahrscheinlichkeit, an einem System mit Wellenfunktion ψ zuerst den Wert r_n für die Observable $\hat{R}$ zu messen und dann den Wert s_m für die Observable $\hat{S}$, gerade

$$\|\hat{P}_{A_n}\psi\|^2 \cdot \left\|\hat{P}_{B_m}\frac{\hat{P}_{A_n}\psi}{\|\hat{P}_{A_n}\psi\|}\right\|^2 = \|\hat{P}_{B_m}\hat{P}_{A_n}\psi\|^2.$$

Gewichtet mit μ erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, an einem System mit μ-zufälliger Wellenfunktion zuerst den Wert r_n für die Observable $\hat{R}$ zu messen und dann den Wert s_m für die Observable $\hat{S}$,

$$\int_{S(\mathcal{H})}\langle\hat{P}_{B_m}\hat{P}_{A_n}\psi|\hat{P}_{B_m}\hat{P}_{A_n}\psi\rangle\mu(d\psi) =$$

$$= \int_{S(\mathcal{H})}\langle\psi|\hat{P}_{A_n}\hat{P}_{B_m}\hat{P}_{A_n}\psi\rangle\mu(d\psi) = \mathrm{tr}(\hat{W}\hat{P}_{A_n}\hat{P}_{B_m}\hat{P}_{A_n}).$$

Für die auf das erste Ergebnis r_n bedingte Wahrscheinlichkeit der Messung von s_m ergibt sich

$$\frac{1}{\mathrm{tr}(\hat{W}\hat{P}_{A_n})}\mathrm{tr}(\hat{P}_{A_n}\hat{W}\hat{P}_{A_n}\hat{P}_{B_m}),$$

woran man den behaupteten statistischen Operator ablesen kann, denn das muß gerade $\mathrm{tr}(\hat{W}'\hat{P}_{B_m})$ sein mit neuem statistischem Operator $\hat{W}'$. □

2.4 Begriffliche Präzisierung: Verbände

Wir benötigen eine Redeweise, in der sich gleichermaßen über Quantenmechanik wie über stochastische Prozesse nach klassischem Vorbild sprechen läßt; insbesondere eine solche Redeweise, in der statistische Operatoren und Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf Phasenräumen dieselbe Art Objekte sind. Dies ist Zweck der folgenden Definitionen.

Definition. *Ein <u>$\sigma^\perp$-Verband</u> (σ-vollständiger Verband mit Komplement) besteht aus einer Menge $\mathcal{A}$, einer zweistelligen Relation $\leq$ auf $\mathcal{A}$, einem Element $\Lambda \in \mathcal{A}$, einer Abbildung $\bigwedge : \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{A}$ und einer Abbildung ${}^\perp : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ derart, daß gilt:*

1. *$\leq$ ist eine partielle Ordnung auf $\mathcal{A}$, d.h.*

   (a) *wenn $A \leq B$ und $B \leq C$, dann $A \leq C$*

   (b) *wenn $A \leq B$ und $B \leq A$, dann $A = B$*

   (c) *stets $A \leq A$.*

2. *Λ ist das kleinste Element von $\mathcal{A}$, d.h. $\forall A \in \mathcal{A} : \Lambda \leq A$.*

3. *$\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist das Infimum von $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ bezüglich $\leq$, d.h.*

   (a) *$\forall m \in \mathbb{N} : \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n \leq A_m$*

   (b) *wenn $\forall m \in \mathbb{N} : B \leq A_m$, dann $B \leq \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

4. *wenn $A \leq B$, dann $B^\perp \leq A^\perp$*

5. *$(A^\perp)^\perp = A$*

6. *wenn $B \leq A$ und $B \leq A^\perp$, dann $B = \Lambda$*

Wenn wir im folgenden von Verbänden sprechen, meinen wir stets $\sigma^\perp$-Verbände.

Folgerungen. $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist unabhängig von der Reihenfolge der A_n. Je zwei Elemente, $A, B \in \mathcal{A}$, besitzen ein Infimum, genannt $A \wedge B$; $\wedge$ ist eine assoziative und kommutative Operation. $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n := \left(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(A_n^\perp)\right)^\perp$ ist das Supremum von $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$. $\mathrm{V} := \Lambda^\perp$ ist das größte Element von $\mathcal{A}$. Je zwei Elemente, $A, B \in \mathcal{A}$, besitzen ein Supremum, genannt $A \vee B$; $\vee$ ist eine assoziative und kommutative Operation. Es gelten $A \wedge \Lambda = \Lambda, A \vee \Lambda = A, A \wedge \mathrm{V} = A, A \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$. Es gilt $A \leq B \Leftrightarrow A \vee B = B \Leftrightarrow A \wedge B = A$. Ferner $A \wedge A^\perp = \Lambda, A \vee A^\perp = V$.

Definition. *$A, B \in \mathcal{A}$ heißen <u>disjunkt</u>, in Zeichen $A \perp B$, wenn $A \leq B^\perp$.*

Es gilt: $A \perp B \Rightarrow B \perp A$, $A \perp B \Rightarrow A \wedge B = \Lambda$, $A \perp A \Rightarrow A = \Lambda$, $A \perp \mathrm{V} \Rightarrow A = \Lambda$ und stets $A \perp \Lambda$.

Definition. *Eine Teilmenge $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ heißt ein <u>Unterverband</u> von $\mathcal{A}$, wenn sie Λ enthält und mit den Einschränkungen von $\leq$, $\bigwedge$ und $^\perp$ einen Verband bildet.*

Hinreichend dafür ist, daß $\Lambda \in \mathcal{A}'$, $\bigwedge(\mathcal{A}'^{\mathbb{N}}) \subseteq \mathcal{A}'$ („abgeschlossen gegen $\bigwedge$") und $(\mathcal{A}')^\perp \subseteq \mathcal{A}'$ („abgeschlossen gegen Komplement"). Zu jeder Teilmenge $\mathcal{A}'$ von $\mathcal{A}$ gibt es einen kleinsten Unterverband, der $\mathcal{A}'$ umfaßt, den „von $\mathcal{A}'$ erzeugten Unterverband".

Beispiele. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über der Menge Ω, $\leq$ die Inklusion $\subseteq$, $\Lambda := \emptyset$, $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $A^\perp := \{x \in \Omega | x \notin A\}$. Dann liegt ein $\sigma^\perp$-Verband vor, der überdies noch *distributiv* ist, d.h.

$$B \vee \Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}(B \vee A_n) \text{ und } B \wedge \Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}}(B \wedge A_n).$$

Ist Ω ein topologischer Raum, betrachten wir meist die von den offenen Mengen erzeugte *Borel-σ-Algebra* $\mathcal{B}(\Omega)$.

Das andere Beispiel, das uns begleiten wird, ist die Menge $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ der abgeschlossenen Unterräume eines separablen Hilbertraumes $\mathcal{H}$, wobei $\leq$ wieder die Inklusion $\subseteq$ bedeutet, $\Lambda := \{0\}$, $\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und

$$A^\perp := \left\{\chi \in \mathcal{H} \middle| \forall\phi \in A : \langle\chi|\phi\rangle = 0\right\}.$$

Es liegt ein $\sigma^\perp$-Verband vor, und es gilt

$$\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n = \overline{\text{lineare Hülle}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)}.$$

Ein paar Notizen zum Beweis: Zu beachten ist, daß $A^\perp$ stets ein abgeschlossener Unterraum ist, und daß beliebige Schnitte von abgeschlossenen Unterräumen wieder abgeschlossene Unterräume sind. Die geforderten Eigenschaften prüft man leicht nach, raffinierter ist nur $A^{\perp\perp} = A$. Die Richtung $A^{\perp\perp} \supseteq A$ ist klar. Wäre $\chi \perp A^\perp$, aber $\chi \notin A$, so könnte $A \oplus A^\perp$ nicht dicht liegen in $\mathcal{H}$, da die orthogonale Summe zweier abgeschlossener Unterräume wieder abgeschlossen ist. Liegt aber ein Unterraum nicht dicht, so gibt es ein von Null verschiedenes Element, das auf diesem Unterraum senkrecht steht [SzN, S. 8], im Widerspruch zur Annahme. □

$\mathbb{L}(\mathcal{H})$ ist im allgemeinen nicht distributiv, wie das Beispiel von drei verschiedenen, komplanaren Geraden durch 0 zeigt. Allerdings ist $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ *Ketten-distributiv*, d.h. wenn $\mathcal{A}'$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}$ ist, auf der $\leq$ eine Totalordnung ist (also $A \leq B$ oder $B \leq A$ für alle $A, B \in \mathcal{A}'$), dann ist der von $\mathcal{A}'$ erzeugte Unterverband distributiv (siehe [Ni], S. 262-285).

Eine Folge der Ketten-Distributivität ist die Existenz relativer Komplemente $B \setminus A := B \wedge A^\perp$, für $A \leq B$, oder eigentlich nicht so sehr ihre Existenz als die Eigenschaften $A \vee (B \setminus A) = B$, $B \setminus (B \setminus A) = A$; außerdem gilt natürlich $A \wedge (B \setminus A) = \Lambda$, $B \setminus \Lambda = B$, $B \setminus B = \Lambda$ und, falls $A \leq A' \leq B$, $B \setminus A' \leq B \setminus A$.

Definition. *Ein Morphismus von $\sigma^\perp$-Verbänden ist eine Abbildung $\varphi : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. $A \leq_1 B \Rightarrow \varphi(A) \leq_2 \varphi(B)$
2. $\varphi(\Lambda_1) = \Lambda_2$
3. $\varphi\Big(\bigwedge_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \bigwedge_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$
4. $\varphi(A^\perp) = (\varphi(A))^\perp$

Einen Morphismus von der Borel-σ-Algebra $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}$ nennen wir auch eine reelle Spektralschar in $\mathcal{A}$, einen Morphismus $\varphi : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}$ eine komplexe Spektralschar in $\mathcal{A}$. Ein Isomorphismus von $\sigma^\perp$-Verbänden ist (wie man erwarten sollte) eine Bijektion, die in beiden Richtungen ein Morphismus im obigen Sinne ist.

Wir bemerken $\varphi(\mathrm{V}_1) = \mathrm{V}_2$ und $\varphi(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \varphi(A_n)$. Wir bemerken ferner, daß das Bild einer Spektralschar $\varphi(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ein distributiver Unterverband von $\mathcal{A}$ ist, wie stets das Bild eines distributiven Verbandes ein distributiver Unterverband ist. In der Funktionalanalysis ist folgender Sprachgebrauch üblich: die Familie $\{E_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\}$ von Projektoren, die sich aus $E_\lambda = \hat{P}_{\varphi(-\infty,\lambda]}$ ergibt, nennt man eine Spektralschar und ordnet sie dem Operator $\int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$ zu.

Beispiel. Daß $\sigma_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}(\mathcal{H})$ die Spektralschar des Projektionsoperators $\hat{P}_A$ sei, heißt

$$\sigma_A(B) = \begin{cases} \Lambda & \text{falls } 0 \notin B, 1 \notin B \\ A & \text{falls } 0 \notin B, 1 \in B \\ A^\perp & \text{falls } 0 \in B, 1 \notin B \\ \mathrm{V} & \text{falls } 0 \in B, 1 \in B \end{cases}$$

Für eine eigentliche Observable $\hat{R} = r_1\hat{P}_{A_1} + \ldots + r_s\hat{P}_{A_s}$ (mit $r_n \in \mathbb{R}$ und Eigenräumen $A_n \perp A_m$ für $n \neq m$) ist die Spektralschar

$$\sigma_{\hat{R}}(B) = \bigoplus_{r_n \in B} A_n.$$

Definition. *Eine Teilmenge $\mathcal{N}$ des $\sigma^\perp$-Verbandes $\mathcal{A}$ heißt ein Ideal, wenn*

1. $\Lambda \in \mathcal{N}$
2. *wenn $A \in \mathcal{N}$ und $B \leq A$, dann $B \in \mathcal{N}$*
3. *wenn $\forall n \in \mathbb{N} : A_n \in \mathcal{N}$, dann $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.*

Wenn ein Ideal $\mathcal{N}$ zusätzlich die Bedingung

$$\forall A \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{N} : \text{ wenn } A \wedge B^\perp \in \mathcal{N}, \text{ dann } A \in \mathcal{N}$$

erfüllt, dann läßt sich der Quotientenverband $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ bilden, dessen Elemente die Äquivalenzklassen der folgenden Relation sind:

$$A \sim B :\Leftrightarrow \exists X, Y \in \mathcal{N} : B \leq A \vee X \text{ und } A \leq B \vee Y.$$

(Den Beweis lassen wir aus.) In distributiven Verbänden erfüllt jedes Ideal die angegebene Faktorisierbarkeitsbedingung, denn $A = A \wedge \mathrm{V} = A \wedge (B \vee B^\perp) = (A \wedge B) \vee (A \wedge B^\perp)$, und wenn $B, A \wedge B^\perp \in \mathcal{N}$, dann auch $A \wedge B \in \mathcal{N}$ wegen $A \wedge B \leq B \in \mathcal{N}$, ergo $A \in \mathcal{N}$.

Im allgemeinen gilt jedoch für Verbände kein Analogon zum „ersten Isomorphiesatz“ (für Gruppen und Algebren) $G/ker(\varphi) \cong im(\varphi)$, denn die Menge $\varphi^{-1}(\Lambda)$ der Verbandselemente, die ein Morphismus φ auf Λ schickt, legt noch nicht fest, welche Verbandselemente A, B dasselbe Bild haben, $\varphi(A) = \varphi(B)$.

2.5 Maße auf $\sigma^\perp$-Verbänden

Definition. *Ein positives endliches Maß auf einem $\sigma^\perp$-Verband $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\xi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ derart, daß*

1. $\xi(\Lambda) = 0$
2. $A \leq B \Rightarrow \xi(A) \leq \xi(B)$
3. *für jede abzählbare Teilfamilie $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{A}$ mit $A_n \perp A_m$ für $n \neq m$ die Reihe $\sum_n \xi(A_n)$ (absolut) konvergiert und $\sum_n \xi(A_n) = \xi\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$.*

ξ heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß oder kurz W-Maß, wenn $\xi(V) = 1$. Die Menge der W-Maße auf $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $WM(\mathcal{A})$.

Definition. *Ein positives σ-endliches Maß auf einem $\sigma^\perp$-Verband $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\xi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ derart, daß*

1. $\xi(\Lambda) = 0$
2. $A \leq B \Rightarrow \xi(A) \leq \xi(B)$
3. *für jede abzählbare Teilfamilie $\{A_n | n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathcal{A}$ mit $A_n \perp A_m$ für $n \neq m$ gilt $\sum_n \xi(A_n) = \xi\Big(\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)$*
4. *eine Folge $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$ existiert mit $\xi(A_n) < \infty$ und $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n = V$.*

Zum Beispiel ist das Dimensionsmaß dim ein σ-endliches Maß auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, das als Gleichverteilung betrachtet werden kann, weil es invariant unter der Operation der unitären Gruppe ist. Wir bemerken, daß, wenn ξ ein (endliches oder σ-endliches) Maß auf $\mathcal{A}$ ist, $\{A \in \mathcal{A} |\ \xi(A) = 0\}$ ein Ideal ist.

Man kann einen zu diesen Maßen passenden Integralbegriff schaffen; der Einfachheit halber gehen wir so vor: wenn σ die Spektralschar einer Observablen ist und ξ ein Maß auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, dann ist $\xi \circ \sigma$ ein Maß auf $\mathbb{R}$, und das können wir integrieren: $\int x\ (\xi \circ \sigma)(dx)$ gilt uns als Wert des ξ-Integrals $\int \sigma\ d\xi$. An die Stelle von reellwertigen Funktionen als Integranden treten Observable. Für eigentliche Observable $\hat{R} = \sum_n r_n \hat{P}_{A_n}$ (endliche Summe) gilt

$$\int \hat{R} d\xi = \sum_n r_n \xi(A_n).$$

Das Integral bezüglich des Dimensionsmaßes ist gerade die Spur. Der folgende Satz sagt, daß W-Maße auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ so etwas wie eine Radon-Nikodym-Ableitung gegenüber dem Dimensionsmaß besitzen.

Satz. (Gleason 1957) *Falls $\dim \mathcal{H} \geq 3$, sind die W-Maße auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ von der Form*

$$\begin{array}{rccc} \xi_{\hat{W}}: & \mathbb{L}(\mathcal{H}) & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & tr(\hat{P}_A \hat{W}), \end{array}$$

wobei $\hat{W} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein positiver (selbstadjungierter) Operator mit $\mathrm{tr}\hat{W} = 1$ ist.

Beweis. Siehe [Gl] oder [Pa].

Ab jetzt nehmen wir grundsätzlich $\dim \mathcal{H} \geq 3$ an und machen keinen Unterschied mehr zwischen W-Maßen auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ und statistischen Operatoren. Wenn σ die Spektralschar einer Observablen ist und ξ ein W-Maß auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, dann ist das W-Maß $\xi \circ \sigma$ auf $\mathbb{R}$ gerade die Verteilung der Meßwerte bei Messung der erwähnten Observablen.

3 Hauptteil

3.1 Das Problem

Der Formalismus der Quantenmechanik spricht nur über Wahrscheinlichkeitsmaße, aber nirgends über so etwas wie „die Zustände" eines Quantensystems. Die Betrachtung von Wahrscheinlichkeitsmaßen erscheint natürlich, wenn man über häufig wiederholte Experimente oder den Wissensstand eines Beobachters sprechen möchte; bei einem nur einmal ausgeführten Experiment dagegen erscheint es unpassend, über Wahrscheinlichkeitsmaße zu sprechen. Wie aber werden wir die Wahrscheinlichkeitsmaße los? Es wird uns wohl nichts besseres einfallen als anzunehmen, daß es für ein betrachtetes Quantensystem (z.B. ein Atom) eine gewisse Menge Φ der möglichen Zustände gibt, und sich das Quantensystem zu jedem Zeitpunkt in einem Zustand, also einem Punkt von Φ aufhält. Das ist eine völlig „klassische" Annahme; Φ ist gerade das, was man einen Phasenraum nennen würde. Auch wenn wir nur ungern „klassische" Annahmen machen: was soll man denn sonst annehmen, um die W-Maße zu eliminieren?

Nehmen wir also doch mal an, auch ein Quantensystem besäße einen Phasenraum Φ. Ein zufälliger Zustand muß dann wohl beschrieben werden durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf Φ (daher sollte Φ von vornherein mit der Struktur eines meßbaren Raumes ausgestattet sein). Nach den Regeln der Quantenmechanik ist eine zufällige Konfiguration eines Quantensystems jedoch durch ein W-Maß auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ zu beschreiben. Demnach ist (erstes Problem) nach einer Bijektion zwischen $\mathrm{WM}(\mathcal{F})$ und $\mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ zu suchen, die eine sinnvolle Identifikation stiften könnte. Was dabei „sinnvoll" heißt, klären wir weiter unten.

Wir gehen noch allgemeiner vor: unter Umständen ist nur eine gewisse Teilmenge C der Menge aller W-Maße auf $\mathcal{F}$ als „durch makroskopische Apparaturen herstellbar", wir sagen *präparabel*, zu erachten.

Z.B. könnten die Punktmaße impräparabel sein, d.h. es könnte sein, daß es prinzipiell unmöglich ist, mit makroskopischen Apparaturen das Quantensystem in einen ganz bestimmten Zustand ($\in \Phi$) zu befördern. Z.B. wird in der statistischen Mechanik gelegentlich die Annahme betrachtet, nur solche Maße auf dem Phasenraum (eines Gases) seien präparabel, die auf jeder infinitesimal dicken Energieschale ein (von der Energie abhängiges) Vielfaches der Gleichverteilung, d.h. des Liouvilleschen invarianten Maßes, sind.

Das wirft die Frage auf (zweites Problem), ob es eine Bijektion gibt zwischen C (einer Menge von W-Maßen auf einem distributiven Verband) und $\mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$

(der Menge aller W-Maße auf einem nicht-distributiven Verband), die eine sinnvolle Identifikation stiften könnte.

Was heißt dabei „sinnvoll“? Diese Bijektion sollte in beiden Richtungen konvexlinear sein, ja sogar noch mehr: bedenkt man, daß die „präparablen Maße“ gewissen Präparier-Apparaturen entsprechen, so können wir im ersten Schritt durch irgendeinen Zufallsmechanismus eine (unter allen möglichen) Präpariermaschine auswählen und diese im zweiten Schritt zum Einsatz bringen; dadurch erhalten wir eine Mischung der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaße, und zwar bei den Quanten-W-Maßen ebenso wie bei den „klassischen“ auf der Menge Φ. Dieselbe Mischung einander entsprechender Maße sollte daher auf einander entsprechende Maße führen. Wir präzisieren dies:

Definition. *Sei $\mathcal{A}$ ein $\sigma^\perp$-Verband, $C \subseteq WM(\mathcal{A})$, $\mathcal{F}_C$ eine σ-Algebra auf C, die wenigstens die einpunktigen Mengen und für jedes $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}[0,1]$ die Menge $\{\mu \in C | \mu(A) \in B\}$ enthält. Der Schwerpunkt eines W-Maßes π auf $\mathcal{F}_C$ ist dasjenige W-Maß auf $\mathcal{A}$, das definiert ist durch*

$$E_\pi = \int_C \mu \; \pi(d\mu) : \begin{array}{rcl} \mathcal{A} & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \int_C \mu(A) \; \pi(d\mu) \end{array}$$

(Man beachte, daß dieses Integral immer existiert.)

$(C, \mathcal{F}_C)$ heißt mischbar, wenn für jedes W-Maß π auf C der Schwerpunkt E_π wieder in C liegt.

Eine Abbildung $\varphi : C_1 \to C_2$ zwischen mischbaren Mengen heißt mischungserhaltend, wenn sie $\mathcal{F}_{C_1} - \mathcal{F}_{C_2}$-meßbar ist und für jedes W-Maß π auf C_1 gilt

$$\varphi\Big(\int_{C_1} \mu \; \pi(d\mu)\Big) = \int_{C_2} \mu \; (\pi \circ \varphi^{-1})(d\mu),$$

(wobei $\varphi^{-1} : \mathcal{F}_{C_2} \to \mathcal{F}_{C_1}$ als Verbandsmorphismus zu lesen ist).

In unserem Fall also verlangen wir von der Menge C der präparablen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf der (hypothetischen) Menge Φ der „wahren“ Zustände, mischbar zu sein, und von der (ebenfalls hypothetischen) Identifikation $\varphi : C \to \mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$, in beiden Richtungen mischungserhaltend zu sein. Um noch die Anforderungen an die σ-Algebra $\mathcal{F}_C$ über C zu kommentieren: diese dienen erstens dazu, alle Auswertungsfunktionen, die jedem Maß seinen Wert auf dem Verbandselement A zuweisen, meßbar zu machen, und zweitens, zu garantieren, daß mischungserhaltende Abbildungen auch konvexlinear sind (und mischbare Mengen auch konvex).

Wäre nun ein Vorschlag für Φ abzulehnen, wenn es keinen solchen „Mischungs-Isomorphismus“ φ gibt? Nicht unbedingt. Zumindest sollte man aber die Mischbarkeit von C verlangen und die Existenz einer surjektiven mischungserhaltenden Abbildung $\varphi : C \to \mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$, denn: wenn das System in einem Zustand $x \in \Phi$ vorliegt (wobei der Experimentator womöglich nicht weiß, welches x vorliegt), dann können wir das Experiment ausführen, das zum Unterraum $A \leq \mathcal{H}$ gehört, und werden ein Ergebnis 0 oder 1 erhalten; x muß festlegen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das A-Experiment Erfolg hat (= den Wert 1 liefert), denn einerseits soll ja in x sozusagen alle Information kodiert sein, die der Natur über das Quantensystem vorliegt; andererseits können wir zugestehen, daß das Meßergebnis vielleicht nicht deterministisch von x abhängt, sondern das Meßgerät ein zufälliges Ergebnis liefert (z.B. unterliegt das Meßgerät als makroskopische Apparatur vielleicht thermischem Zufall). Wir führen dafür eine Bezeichnung ein:

$$w(A,x) \quad := \quad \text{Wahrscheinlichkeit, bei Messung von } \hat{P}_A \text{ an einem System im Zustand } x \text{ den Wert 1 zu erhalten.}$$

Aus dieser Funktion $w : \mathbb{L}(\mathcal{H}) \times \Phi \to [0,1]$ läßt sich die entsprechende Erfolgswahrscheinlichkeit bestimmen für ein System, das in einem zufälligen Zustand vorliegt, der durch das W-Maß $\mu \in C$ auf Φ beschrieben wird: die Wahrscheinlichkeit, bei dem zum Unterraum A gehörigen Experiment als Ergebnis 1 zu erhalten, beträgt

$$\int_\Phi w(A,x)\mu(dx) =: P(A)$$

Um diesen Ausdruck bilden zu können, muß $w(A,-) : \Phi \to [0,1]$ meßbar sein. Nach den Regeln der Quantenmechanik muß nun $A \mapsto P(A)$ ein W-Maß auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ sein. Dieses W-Maß wird ein Beobachter, der von Φ und μ nichts weiß, als *das* W-Maß (als statistischen Operator) des Präparates feststellen. Dieses Maß nennen wir $\varphi(\mu)$, und auf diese Weise bekommen wir eine (von Natur aus mischungserhaltende) Abbildung $\varphi : C \to \mathbb{L}(\mathcal{H})$.

Nun hatte ich noch behauptet, φ müsse surjektiv sein. Das trägt der quantenmechanischen Regel Rechnung, daß uns jedes W-Maß auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ im Experiment begegnen kann; ein Vorschlag für $\Phi, \mathcal{F}, C, w$, bei dem φ nicht surjektiv ist, ist abzulehnen, weil nicht jede Situation, die in der Quantenmechanik auftritt, durch dieses Modell erklärt werden kann.

Ein Beispiel zeigt, daß es sehr einfach (und sehr wenig hilfreich) ist, einen solchen Vorschlag zu machen, bei dem φ nicht surjektiv ist: sei Φ endlich, etwa $\Phi = \{1,\ldots,n\}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}otenzmenge(\Phi)$, $C := \mathrm{WM}(\mathcal{F})$, und seien $\chi_1,\ldots,\chi_n \in \mathcal{H}$ paarweise orthogonal und auf 1 normiert; sei ferner $w(A,x) := \langle \chi_x | \hat{P}_A \chi_x \rangle$. Das bedeutet, daß das W-Maß μ auf Φ, sagen wir $\mu(\{x\}) = p_x$, durch φ abgebildet wird auf das W-Maß mit statistischem Operator

$$\sum_{x\in\Phi} p_x |\chi_x\rangle\langle\chi_x|.$$

Die so erreichten statistischen Operatoren kommutieren paarweise; in diesem Modell gibt es keine Phänomene wie Interferenz, und die Messung einer Observable, die nicht mit all diesen statistischen Operatoren kommutiert, führt auf einen statistischen Operator, der nicht durch ein W-Maß auf Φ beschrieben werden kann.

Fassen wir zusammen:

Definition. *Ein stochastisches Modell der Quantenmechanik besteht aus einem meßbaren Raum $(\Phi, \mathcal{F})$, einer mischbaren Teilmenge $(C, \mathcal{F}_C)$ von $WM(\mathcal{F})$, einer mischungserhaltenden und surjektiven Abbildung $\varphi : C \to WM(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ und einer*

Funktion $w : \mathbb{L}(\mathcal{H}) \times \Phi \to [0,1]$, derart daß für jedes $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ die Funktion $w(A,-) : \Phi \to [0,1]$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}[0,1]$−meßbar ist und

$$\forall \mu \in C \ \forall A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) : \quad \int_\Phi w(A,x)\mu(dx) = \varphi(\mu)(A).$$

Ein stochastisches Modell der Quantenmechanik heißt treu, wenn φ injektiv ist.

Der Wohldefiniertheit von „mischungserhaltend“ zuliebe müssen wir noch erklären, mit welcher σ-Algebra wir $\mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ auszustatten wünschen: wir wählen die schwächste, die nach Definition mischbarer Mengen erlaubt ist, nämlich die von den einpunktigen Mengen und den Auswertungsfunktionen $\xi \mapsto \xi(A)$ erzeugte. Diese Wahl läßt maximal viele Abbildungen $\varphi : C \to \mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ als mischungserhaltend zu.

Was bedeutet „Treue“ physikalisch? In einem nicht treuen Modell gibt es zwei Verteilungen $\mu \neq \mu'$ auf dem Zustandsraum Φ, die durch keinerlei Messung zu unterscheiden sind, $\varphi(\mu) = \varphi(\mu')$. Trotzdem behauptet das Modell, die beiden Verteilungen seien „in Wirklichkeit“ verschieden; denn das Modell soll uns ja gerade darüber Auskunft geben, was „in Wirklichkeit“ geschieht (und nicht nur statistisch). Man könnte einem solchen Modell vorwerfen, es würde den nachprüfbaren Fakten einige frei erfundene hinzufügen. In einem treuen Modell andererseits ist φ ein Mischungs-Isomorphismus wie zu Beginn dieses Abschnitts besprochen; ein solches Modell bietet also eine völlig klassische Erklärung der Quanten-Stochastik.

Es bietet nur eine Erklärung des stochastischen Aspektes, nicht der ganzen Quantenmechanik; unsere Definition von stochastischen Modellen der QM fordert z.B. keine Angabe einer Bewegungsgleichung für die Punkte in Φ.

Daß wir zeigen werden, daß es keine treuen stochastischen Modelle der QM gibt, bedeutet eine gewisse Rechtfertigung für die nicht treuen Modelle: da es unmöglich ist, in einem stochastischen Modell *nichts* hinzuzuerfinden, ist das Hinzuerfinden (über das Nachmeßbare hinaus) auch keine Schande, so kann man argumentieren.

Diese Arbeit entstand aus dem Versuch, durch das Auffinden eines treuen stochastischen Modells die Quantenmechanik besser zu verstehen.

3.2 Stochastische Modelle

Beispiel. Wir basteln ein stochastisches Modell der QM, in dem die Zustände durch Wellenfunktionen gegeben sind, d.h. Φ ist die Sphäre vom Radius 1 in $\mathcal{H}$. $\mathcal{F}$ sei ihre Borel-σ-Algebra, C die Menge aller W-Maße auf $\mathcal{F}$, und $w(A,\psi) := \langle\psi|\hat{P}_A\psi\rangle$. Das bedeutet für φ, daß dem W-Maß μ auf der Hilbert-Sphäre der statistische Operator

$$\int_{S(\mathcal{H})} |\psi\rangle\langle\psi| \; \mu(d\psi)$$

zugeordnet wird. φ ist offenbar surjektiv, aber nicht injektiv, denn für jedes komplexe α mit $|\alpha| = 1$ wird einerseits das Punktmaß mit allem Gewicht auf ψ, andererseits auch dasjenige mit allem Gewicht auf $\alpha\psi$ auf das W-Maß mit statistischem Operator

$|\alpha\psi\rangle\langle\alpha\psi| = |\psi\rangle\langle\psi|$ abgebildet. Das ist natürlich ein triviales Beispiel für die mangelnde Injektivität dieses Modells; es lädt dazu ein, die Sphäre durch den projektiven Raum zu ersetzen, d.h. solche Wellenfunktionen zu identifizieren, die sich nur um einen Faktor unterscheiden. Doch auch dadurch würde φ nicht injektiv:

Beispiel. Man betrachte ein W-Maß μ auf $S(\mathcal{H})$, das nur endlich vielen Punkten positives Gewicht gibt; dazu läßt sich stets ein zweites Maß μ' finden, das ebenfalls nur endlich viele Punkte gewichtet, aber so, daß diese Punkte (als Vektoren in $\mathcal{H}$) orthogonal zueinander sind, und das denselben statistischen Operator zugewiesen bekommt wie μ. Man berechne nämlich mal den statistischen Operator von $\varphi(\mu)$ und diagonalisiere diesen! Wir geben dafür ein explizites Beispiel an (das ökonomischerweise gleich so gewählt ist, daß wir es im nächsten Abschnitt noch einmal verwenden können). Sei $\langle\phi|\phi\rangle = \langle\chi|\chi\rangle = 1,\ \langle\phi|\chi\rangle = 0$. Dann

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}\left|\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\phi + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\chi\right\rangle\left\langle\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\phi + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\chi\right| + \\ + \ & \frac{1}{3}\left|\tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\chi\right\rangle\left\langle\tfrac{1}{\sqrt{2}}\phi - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\chi\right| = \\ = \ & \frac{3+\sqrt{3}}{6}\Big|\phi\Big\rangle\Big\langle\phi\Big| + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\Big|\chi\Big\rangle\Big\langle\chi\Big|. \end{aligned}$$

Ich möchte noch die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Definition eines stochastischen Modells der QM kommentieren. Erstens ist es prinzipiell in der Lage, die Unschärferelation zu simulieren, indem die Menge C der präparablen Verteilungen nur solche einer gewissen Mindest-Streuung enthält. Zweitens: Durch einen Meßvorgang wird sich die Verteilung auf Φ ändern — welche Verteilung wird unmittelbar nach der Messung vorliegen? Da man sinnvollerweise verlangen wird, daß die sofortige Wiederholung der Messung zu demselben Ergebnis führt, muß die Verteilung nach der Messung auf die Menge $\{x \in \Phi | w(A,x) = 1\}$ konzentriert sein, wobei A der Eigenraum ist zum Eigenwert, den man als Meßwert erhielt. Zugleich muß die Verteilung nach der Messung wieder ein Element von C sein, und das wird im allgemeinen bedeuten, daß die Verteilung μ' nach der Messung nicht einfach die Einschränkung der Verteilung μ vor der Messung auf $\eta(A) := \{x \in \Phi | w(A,x) = 1\}$ ist, wie man das in der klassischen Mechanik annehmen würde: $\mu'(M) = \mu(\eta(A))^{-1} \cdot \mu(M \cap \eta(A))$. Sondern das (in einem geeigneten Sinne) nächstgelegene Maß in C. Das läßt sich deuten als Beeinflussung des Zustandes durch das Meßgerät. Die Folge ist die Nicht-Vertauschbarkeit von Messungen verschiedener Observablen. Solche Effekte können unsere (völlig „klassischen“) stochastischen Modelle also durchaus nachahmen.

3.3 Irreduzible Maße

Der Spezialfall $C = \mathrm{WM}(\mathcal{F})$, d.h. alle W-Maße sind präparabel, läßt sich besonders leicht behandeln; dieser Fall sei daher vorweg besprochen (nicht daß er etwas zum allgemeinen Beweis beitragen würde!). Wie also kann man sehen, daß $\mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ etwas anderes ist als WM von einem distributiven Verband?

Definition. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf einem $\sigma^\perp$-Verband heißt irreduzibel, wenn es sich nur auf triviale Weise als Konvexkombination von Wahrscheinlichkeitsmaßen schreiben läßt, d.h.*

$$\mu = s\nu + (1-s)\lambda \Rightarrow (s = 0 \text{ oder } s = 1 \text{ oder } \nu = \lambda = \mu).$$

Auf dem Teilmengenverband einer endlichen Menge beispielsweise sind genau die Punktmaße irreduzibel (die einem Punkt das Gewicht 1 geben und allen anderen das Gewicht 0).

Im allgemeinen sind irreduzible W-Maße nicht immer Punktmaße; z.B. betrachte man auf einer überabzählbaren Menge die σ-Algebra, die alle (höchstens) abzählbaren und alle co-abzählbaren Mengen (deren Komplement höchstens abzählbar ist) enthält: das W-Maß, das allen co-abzählbaren Mengen den Inhalt 1 zuschreibt und die abzählbaren Mengen als Nullmengen hat, ist irreduzibel.

Wir bemerken über das Aussehen irreduzibler W-Maße auf σ-Algebren, daß sie nur die Werte 0 und 1 annehmen, denn wenn μ ein W-Maß ist und B ein Element der σ-Algebra mit $0 < \mu(B) < 1$, setze $s := \mu(B)$, $\nu(A) := s^{-1}\mu(A \cap B)$, $\lambda(A) := (1-s)^{-1}\mu(A \cap B^c)$, und wir finden, daß ν und λ W-Maße sind mit $\mu = s\nu + (1-s)\lambda$.

Die irreduziblen W-Maße auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ sind gerade die der Form $A \mapsto \langle\psi|\hat{P}_A\psi\rangle$, d.h. die, deren statistischer Operator die Projektion auf einen eindimensionalen Unterraum ist. Zum Beweis beachte man, daß alle statistischen Operatoren die Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k |\chi_k\rangle\langle\chi_k|$$

haben, wobei $\{\chi_k | k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis ist und $p_k \in [0,1], \sum_k p_k = 1$. Man sieht diesem Ausdruck eine Zerlegung an, wenn nicht alle p_k bis auf eines Null sind. Die Irreduzibilität der Maße mit Operator $|\psi\rangle\langle\psi|$ sieht man daran, daß sie $(\mathbb{C}\psi)^\perp$ mit Null bewerten. Man bemerke, daß die irreduziblen W-Maße auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ keineswegs nur die Werte 0 und 1 annehmen. □

Bemerkung. *Sei $\vartheta : WM(\mathcal{A}) \to WM(\mathcal{B})$ injektiv und konvexlinear. Wenn $\vartheta(\mu)$ irreduzibel ist, dann auch μ.*

Beweis. Wenn $\mu = s\nu + (1-s)\lambda$, dann $\vartheta(\mu) = s\vartheta(\nu) + (1-s)\vartheta(\lambda)$, und aus der Irreduzibilität von $\vartheta(\mu)$ folgt, daß $s = 0$ oder $s = 1$ oder $\vartheta(\nu) = \vartheta(\lambda) = \vartheta(\mu)$, und im letzten Fall gilt aufgrund der Injektivität auch $\nu = \lambda = \mu$. □

Behauptung. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Es gibt keine konvexlineare Bijektion $\varphi : WM(\mathcal{A}) \to WM(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$.*

Beweis. Andernfalls müßten die eindimensionalen Projektionen (die irreduziblen W-Maße auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$) als Urbilder Maße haben, die nur die Werte 0 und 1 annehmen. Die Pointe ist, daß die eindimensionalen Projektionen linear abhängig sind; z.B. kann ein geeignetes Quanten-W-Maß auf zwei verschiedene Weisen als Konvexkombination irreduzibler Quanten-W-Maße geschrieben werden.

Das greift das Beispiel im vorangegangenen Abschnitt auf: eine Konvexkombination der irreduziblen Maße zu nicht-orthogonalen eindimensionalen Unterräumen läßt sich (diagonalisiere den statistischen Operator!) als Konvexkombination der irreduziblen Maße zu *orthogonalen* eindimensionalen Unterräumen schreiben.

In einer σ-Algebra hingegen ist es nicht möglich, ein W-Maß auf zwei verschiedene Weisen als Konvexkombination von irreduziblen W-Maßen zu schreiben: sind ν und λ irreduzibel, so nimmt $\mu = s\nu + (1-s)\lambda$ nur die Werte $0,\ s,\ 1-s$ und 1 an, und, falls s nicht gerade $0, 1$ oder $\frac{1}{2}$ ist, kann man dem μ diese Zerlegung ansehen: aus $\mu(M) = s$ folgt $\nu(M) = 1, \lambda(M) = 0$ etc. (Auch im Fall $s = \frac{1}{2}$ bleibt letztlich nur die Freiheit, ν und λ zu vertauschen, aber darauf sind wir garnicht angewiesen.)

Da die Umkehrabbildung von φ wieder konvexlinear wäre, würde sie W-Maße, die mehrere Zerlegungen in zwei irreduzible haben, in ebensolche übersetzen. □

Diese Argumentation läßt sich nicht auf den Allgemeinfall der treuen stochastischen Modelle der QM übertragen: es folgt lediglich, daß die Urbilder unter φ der irreduziblen Maße in $\mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ irreduzibel-in-C sein müssen. Zwischen den in C irreduziblen Maßen können aber durchaus lineare Abhängigkeiten bestehen, warum nicht.

3.4 Die Lösung

Satz. *Es gibt kein treues stochastisches Modell der Quantenmechanik.*

Bevor wir den Beweis antreten, benötigen wir ein Lemma, dessen Beweis wir erst auf S.20 nachholen.

Lemma. *Wäre $(\Phi, \mathcal{F}, C, \varphi, w)$ ein treues stochastisches Modell der Quantenmechanik, so gäbe es ein σ-endliches Maß ϱ auf $\mathcal{F}$ und eine Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \eta : \mathbb{L}(\mathcal{H}) & \to & \mathcal{F}/\mathcal{N} \\ A & \mapsto & \{x \in \Phi \mid w(A,x) = 1\} \mod \mathcal{N} \end{array}$$

(wobei $\mathcal{N}$ das Ideal der ϱ-Nullmengen ist) mit den Eigenschaften

(i) $\eta(\Lambda) = \emptyset,\ \eta(V) = \Phi$

(ii) wenn $A \leq B$, dann $\eta(A) \subseteq \eta(B)$

(iii) wenn $A \perp B$, dann $\eta(A) \cap \eta(B) = \emptyset$

(iv) wenn $A \perp B$, dann $\eta(A) \cup \eta(B) = \eta(A \vee B)$

(v) $\eta(A^{\perp}) = \Phi \setminus \eta(A)$

(vi) $\varrho(\eta(A) \cap \eta(B)) = tr(\hat{P}_A \hat{P}_B)$.

(vii) $\varrho(\eta(A)) = \dim A$.

(viii) wenn $\xi \in WM(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ den statistischen Operator $\hat{W} = \sum_k p_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ hat (wobei $\{\phi_k | k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis ist, $p_k \in [0,1]$ und $\sum_k p_k = 1$), dann $\forall M \in \mathcal{F}:\ \varphi^{-1}(\xi)(M) = \sum_k p_k\ \varrho(M \cap \eta(\mathbb{C}\phi_k))$.

Sind andersherum $\Phi, \mathcal{F}$, eine Abbildung $\eta : \mathbb{L}(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}/\mathcal{N}$ und ein σ-endliches Maß ϱ auf $\mathcal{F}$ gegeben mit den Eigenschaften (i) bis (vii), dann definiert (viii) eine Injektion $\varphi^{-1} : WM(\mathbb{L}(\mathcal{H})) \to WM(\mathcal{F})$, und wir erhalten ein treues stochastisches Modell der QM, wenn wir setzen $C := \varphi^{-1}(WM(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$, $\varphi :=$ Umkehrabbildung von φ^{-1}, und

$$w(A,x) := \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in \eta(A) \text{ und } x \notin \eta(A^\perp) \\ 0 \text{ falls } x \notin \eta(A) \text{ und } x \in \eta(A^\perp) \\ \text{beliebig sonst } \in [0,1] \end{cases}$$

wobei „beliebig" jedoch so zu verstehen ist, daß wenigstens für alle $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ die Funktion $w(A,-) : \Phi \to [0,1]$ meßbar ist.

Hierbei ist kurzerhand das größte Element von $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ wieder mit Φ (statt $\Phi \bmod \mathcal{N}$) bezeichnet etc. Man beachte, daß η keineswegs ein Morphismus von Verbänden ist: das würde z.B. $\eta(A \wedge B) = \eta(A) \cap \eta(B)$ und $\eta(A \vee B) = \eta(A) \cup \eta(B)$ erfordern, was nicht allgemein stimmt.

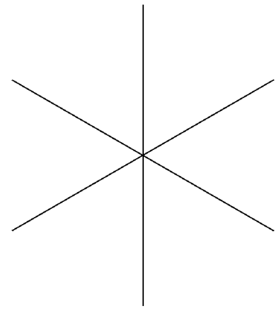
Im Lemma spielt ϱ die Rolle einer Gleichverteilung auf Φ: Wenn man die Bijektion φ von den W-Maßen auf die σ-endlichen Maße ausdehnt, dann entspricht ϱ dem σ-endlichen Dimensionsmaß dim, der Gleichverteilung auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$.

Das Lemma beschreibt das Aussehen der treuen stochastischen Modelle und sagt uns nebenbei, daß unsere Großzügigkeit vergebens war, dem Meßgerät zu erlauben, ein zufälliges Ergebnis zu produzieren. (Tatsächlich zeigt sich im Beweis des Lemmas, daß $\{x \in \Phi |\ 0 < w(A,x) < 1\}$ stets eine ϱ-Nullmenge ist.) Hätten wir verlangt, daß das Meßergebnis deterministisch vom Zustand des Quantensystems abhängt, so hätten wir gleich jedem Unterraum A von $\mathcal{H}$ eine Teilmenge $\eta'(A) \subseteq \Phi$ zuweisen können, die all diejenigen Zustände enthält, bei denen das A-Experiment erfolgreich ist. In diesem Fall gelten die Aussagen *(i)* bis *(vii)* ebensogut für η' statt η.

Beweis des Satzes. Angenommen, es gäbe ein treues stochastisches Modell der QM. Wir wählen einen zweidimensionalen Unterraum $E \leq \mathcal{H}$ und erklären ein W-Maß λ auf Φ durch $\lambda(M) := \frac{1}{2}\varrho(M \cap \eta(E))$, d.h. durch Einschränkung des σ-endlichen Maßes ϱ aus dem Lemma auf die Menge $\eta(E)$, die (nach *(vii)*) Inhalt 2 hat, und anschließende Halbierung. Y_E sei eine Φ-wertige Zufallsvariable, die gemäß λ verteilt ist. Mit jedem eindimensionalen Unterraum $g \leq E$ assoziieren wir eine $\{0,1\}$-wertige Zufallsvariable $X_g = 1_{\eta(g)}(Y_E)$. Für 2 Geraden g, h können wir die gemeinsame Verteilung von X_g, X_h ermitteln: zunächst gilt $Ws\{X_g = 1 \text{ und } X_h = 1\} = \lambda(\eta(g) \cap \eta(h)) = \frac{1}{2}\varrho(\eta(g) \cap \eta(h) \cap \eta(E)) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{2}\varrho(\eta(g) \cap \eta(h)) \overset{(vi)}{=} \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{P}_g \hat{P}_h)$. Ferner gilt $Ws\{X_g = 1\} = \lambda(\eta(g)) = \frac{1}{2}\varrho(\eta(g) \cap \eta(E)) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{2}\varrho(\eta(g)) \overset{(vii)}{=} \frac{1}{2}$. Also:

$$\begin{aligned} Ws\{X_g = 1 \text{ und } X_h = 1\} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{P}_g \hat{P}_h), \\ Ws\{X_g = 1 \text{ und } X_h = 0\} &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{P}_g \hat{P}_h), \\ Ws\{X_g = 0 \text{ und } X_h = 1\} &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{P}_g \hat{P}_h), \\ Ws\{X_g = 0 \text{ und } X_h = 0\} &= \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\hat{P}_g \hat{P}_h). \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß dabei unmögliche gemeinsame Verteilungen auftreten, nämlich solche, in denen von drei solchen $\{0,1\}$-wertigen Zufallsvariablen jede dazu neigt, anders auszufallen als die beiden anderen; dazu betrachten wir folgende drei Geraden in E, wobei wir E als $\mathbb{C}^2$ schreiben:



$$\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Diese Komponenten ergeben im $\mathbb{R}^2$ drei Geraden, die paarweise einen Winkel von 60° einschließen, d.h. die Diagonalen eines regelmäßigen Sechsecks. Wie man leicht der Formel

$$\mathrm{tr}(\hat{P}_{\mathbb{C}\phi}\hat{P}_{\mathbb{C}\psi}) = \frac{\langle\phi|\psi\rangle\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle}$$

entnimmt, beträgt für je 2 dieser drei Geraden dann

$$\mathrm{tr}(\hat{P}_g\hat{P}_h) = 1/4.$$

Also lautet für je 2 der drei zugehörigen Zufallsvariablen die gemeinsame Verteilung:

	0	1
0	1/8	3/8
1	3/8	1/8

Wenn p_{ijk} die Wahrscheinlichkeit ist, daß die drei Zufallsvariablen die Werte ijk respektive annehmen, dann gilt

$$\begin{array}{rll} 0 \leq & p_{000} + p_{111} = & [\text{wegen } p_{000} + p_{001} = 1/8] \\ = & 1/8 - p_{001} + p_{111} = & [\text{wegen } p_{001} + p_{011} = 3/8] \\ = & 1/8 - 3/8 + p_{011} + p_{111} = & [\text{wegen } p_{011} + p_{111} = 1/8] \\ = & 1/8 - 3/8 + 1/8 = -1/8. & [\text{Aua}] \end{array}$$

□

Was war nun eigentlich der Grund für das Versagen des hypothetischen treuen stochastischen Modells? In unserem Modell hätte die „Messung“ von X_g im Falle des Meßwerts 1 die Verteilung $M \mapsto \varrho(M \cap \eta(g))$ auf Φ hinterlassen; eine anschließende „Messung“ von X_h hätte mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ den Wert 1 geliefert (und die Verteilung $M \mapsto \varrho(M \cap \eta(h))$ hinterlassen) und mit Wahrscheinlichkeit $3/4$ den Wert 0 (und die Verteilung $M \mapsto \varrho(M \cap \eta(E \wedge h^\perp))$). Erneute Messung von X_g hätte nicht notwendig wieder den Wert 1 ergeben (sondern nur mit Wahrscheinlichkeit $5/8$). Während also die Störung des Zustandes durch den Meßvorgang die simultane Festlegung der Werte von X_g, X_h und X_k unmöglich macht, kann man sich auf einem *distributiven* Verband diese Störung immer wegdenken und eben doch nach der gemeinsamen Verteilung der drei Zufallsvariablen fragen — und das führt auf den Widerspruch.

3.5 Schlußbemerkungen

Das erzielte Ergebnis läßt sich so auffassen: es wurde ein präzises Konzept vorgelegt, was eine „klassische“ Theorie sei, und gezeigt, daß *die Quantenmechanik nicht isomorph zu irgendeiner klassischen Theorie ist.* So etwas vermutet man schnell, wenn man Quantenmechanik erlernt; es aber in großer Allgemeinheit nachzuweisen, nämlich für beliebige „klassische Theorien“ (d.h. die erwähnten „stochastischen Modelle der Quantenmechanik“), ist nicht oberflächlich. So gelingt es der vorgestellten Definition von stochastischen Modellen der QM immerhin, das einfache Argument der irreduziblen Maße abzuwehren.

Man erhält daraus außerdem einigen Aufschluß darüber, welche Charakterzüge der Quantenmechanik eigentlich „typisch quantenmechanisch“ sind und welche nicht. Z.B. können Unschärferelationen und die Nicht-Vertauschbarkeit von Messungen auch in klassischen stochastischen Prozessen vorkommen; solche Phänomene sind daher nicht als quantentypisch zu werten.

Der Wert des bewiesenen Satzes scheint mir darin zu liegen, daß er an einer ziemlich großen Klasse von Sackgassen Schilder mit der Aufschrift „Sackgasse“ anbringt.

4 Technische Einzelheiten

Beweis des Lemmas.

1. Für $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ sei
$$\eta(A) := \{x \in \Phi | w(A,x) = 1\}.$$

   Genaugenommen ist dieses η ein anderes als das im Lemma erwähnte; wenn π die Projektion $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{N}$ bezeichnet, so ist $\eta_{\text{Lemma}} = \pi \circ \eta_{\text{Beweis}}$. Ich hoffe, daß diese sparsame Doppelbezeichnung nicht zu Konfusion führt.

   Der Grundgedanke des Beweises ist, die Korrespondenz φ von W-Maßen auf Maße zu erweitern, die keine Wahrscheinlichkeitsmaße mehr sind: zunächst auf (positive) endliche Maße (also Vielfache von W-Maßen) und dann, wenn möglich, auf σ-endliche Maße. Insbesondere soll die Gleichverteilung auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, das Dimensionsmaß dim, mit Hilfe von φ in eine „Gleichverteilung“ auf Φ, das versprochene σ-endliche Maß ϱ, übersetzt werden. Die Übersetzung geht so: ein endliches Maß normieren wir zu einem W-Maß, schicken es durch φ, und machen dann die Normierung rückgängig. Z.B. betrachten wir für $0 < \dim A < \infty$ das endliche Maß $B \mapsto \operatorname{tr}(\hat{P}_B \hat{P}_A)$ (die Gleichverteilung auf A), bilden daraus das W-Maß
$$\xi_A : B \mapsto (\dim A)^{-1} \cdot \operatorname{tr}(\hat{P}_B \hat{P}_A)$$
   und erklären
$$\varrho_A := (\dim A) \cdot \varphi^{-1}(\xi_A).$$
   ϱ_A ist ein positives endliches Maß auf $\mathcal{F}$. Wir ergänzen $\varrho_\Lambda := 0$.

   Die entsprechende Übersetzung gestaltet sich natürlich für das „dicke“ Dimensionsmaß schwieriger, weil man es nicht normieren kann. φ^{-1} erweist sich als ein Nadelöhr. Das wird uns in den nächsten Schritten beschäftigen.

2. Weil φ konvexlinear ist und die Umkehrabbildung einer konvexlinearen Bijektion ebenso konvexlinear ist, ist φ^{-1} konvexlinear.

3. Für endlichdimensionale $A \perp B$ gilt

$$\xi_{A\vee B} = \frac{\dim A}{\dim A \vee B}\xi_A + \frac{\dim B}{\dim A \vee B}\xi_B,$$

folglich (wegen 2.) $\varrho_{A\vee B} = \varrho_A + \varrho_B$. Insbesondere: wenn $A \leq B$, dann $\varrho_A \leq \varrho_B$.

4. Falls $\dim A = \infty$, sei für $M \in \mathcal{F}$

$$\varrho_A(M) := \sup\{\varrho_B(M)|\ B \leq A, \dim B < \infty\}. \quad \varrho := \varrho_{\mathrm{V}}.$$

Wir zeigen: $\varrho_A : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ ist ein positives Maß. (Die Frage, ob es stets σ-endlich ist, lassen wir zunächst noch offen.)

Beweis: $\varrho_A(\emptyset) = 0$ ist klar; klar ist auch, daß wenn $M \subseteq N$, dann $\varrho_A(M) \leq \varrho_A(N)$, denn das gilt für jedes endlichdimensionale $B \leq A$. In puncto σ-Additivität sei eine Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $M_n \cap M_m = \emptyset$ für $n \neq m$; von der Gleichung $\varrho_A(\bigcup_n M_n) = \sum_n \varrho_A(M_n)$ ist die „$\leq$"-Relation klar; was „$\geq$" angeht: falls die rechte Seite endlich ist, wähle zu $\varepsilon > 0$ ein n_0 so, daß die Partialsumme bis n_0 bis auf $\varepsilon/2$ genau an den Reihenwert heranreicht und für jedes $n \leq n_0$ ein endlichdimensionales $B_n \leq A$ mit $\varrho_{B_n}(M_n) > \varrho_A(M_n) - \varepsilon/2n_0$. Für $B := B_1 \vee \ldots \vee B_{n_0}$ gilt wegen 3. erst recht $\varrho_B(M_n) > \varrho_A(M_n) - \varepsilon/2n_0$, folglich $\varrho_B(\bigcup_n M_n) = \sum_n \varrho_B(M_n) \geq \varrho_B(M_1) + \ldots + \varrho_B(M_{n_0}) > \varrho_A(M_1) + \ldots + \varrho_A(M_{n_0}) - \varepsilon/2 \geq \sum_n \varrho_A(M_n) - \varepsilon$. Falls nun aber die Reihe unendlich ist, sieht man entsprechend, daß auch $\varrho_A(\bigcup_n M_n)$ nicht endlich sein kann.

5. Wenn $A \perp B$, dann $\varrho_{A\vee B} = \varrho_A + \varrho_B$. Insbesondere: wenn $A \leq B$, dann $\varrho_A \leq \varrho_B$.

Beweis: Sei $M \in \mathcal{F}$. Klar ist $\sup\{\varrho_{\tilde{A}}(M)|\tilde{A} \leq A \vee B, \dim \tilde{A} < \infty\} \geq \sup\{\varrho_{A'}(M)|A' \leq A, \dim A' < \infty\} + \sup\{\varrho_{B'}(M)|B' \leq B, \dim B' < \infty\}$ wegen 3.

„$\leq$": $\tilde{A} \leq \hat{P}_A(\tilde{A}) \vee \hat{P}_B(\tilde{A}) \leq A \vee B$, und der zur orthogonalen Summe aufgeblasene Raum $\hat{P}_A(\tilde{A}) \vee \hat{P}_B(\tilde{A})$ hat immer noch endliche Dimension; folglich (wegen 3) $\varrho_{\tilde{A}}(M) \leq \varrho_{\hat{P}_A(\tilde{A})\vee\hat{P}_B(\tilde{A})}(M) = \varrho_{\hat{P}_A(\tilde{A})}(M) + \varrho_{\hat{P}_B(\tilde{A})}(M)$.

6. Gegeben $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ von unendlicher Dimension und eine Folge $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$ ineinandergeschachtelter endlichdimensionaler Unterräume mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$, d.h. die A_n „schöpfen A aus". Dann $\varrho_{A_n} \nearrow \varrho_A$.

Beweis: Klar ist $\varrho_{A_1} \leq \varrho_{A_2} \leq \ldots$, zu zeigen ist die Konvergenz. Fixiere dazu eine Menge $M \in \mathcal{F}$ und ein $\varepsilon > 0$. Wähle ein endlichdimensionales $B \leq A$ mit $\varrho_B(M) > \varrho_A(M) - \varepsilon/2$. Gesucht ist nun ein n mit $\varrho_{A_n}(M) > \varrho_B(M) - \varepsilon/2$. Es gilt $\hat{P}_B \leq \hat{P}_{A_n} + (\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})^+$, wobei $(\cdot)^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ den Positivteil bezeichnet,

$$x^+ = \begin{cases} x \text{ falls } x \geq 0, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Also $\hat{P}_B = \hat{P}_{A_n} + (\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})^+ -$ Rest, wobei „Rest“ ein positiver (selbstadjungierter) Operator ist. All diese positiven Operatoren haben endliche Spuren und entsprechen daher positiven endlichen Maßen auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, die wir mit φ^{-1} in endliche Maße auf $\mathcal{F}$ von gleichem Gesamtgewicht übersetzen können. Es folgt

$$\varrho_B \leq \varrho_{A_n} + \mathrm{tr}(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})^+ \cdot \text{W-Maß}.$$

Es reicht also zu zeigen, daß

$$\mathrm{tr}(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})^+ \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dies erfordert einige Rechnung und ist daher in eine Hilfsbehauptung auf S. 25 ausgegliedert.

7. Für alle $A, B \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ gilt:

$$\int_\Phi w(A,x)\varrho_B(dx) = \mathrm{tr}(\hat{P}_A\hat{P}_B).$$

Beweis: Für endlichdimensionales B folgt dies aus der Definition eines stochastischen Modells der Quantenmechanik, für unendlichdimensionales durch Approximation mit einer Folge wie in 6.

8. $\varrho_A(\Phi \setminus \eta(A)) = 0.$

Beweis: Falls $\dim A < \infty$: Wäre für ein $q < 1$ $\varrho_A\{x \in \Phi | w(A,x) \leq q\} > 0$, so wäre

$$\dim A = \mathrm{tr}(\hat{P}_A\hat{P}_A) \stackrel{7.}{=} \int_\Phi w(A,x)\varrho_A(dx) = \int_{\{x|w(A,x)\leq q\}} \cdots + \int_{\{x|w(A,x)>q\}} \cdots \leq$$

$$\leq q \cdot \varrho_A\{x|w(A,x) \leq q\} + \varrho_A\{x|w(A,x) > q\} < \varrho_A(\Phi) = \dim A.$$

Also $\varrho_A\{x|w(A,x) < 1\} =$

$$= \varrho_A \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x|w(A,x) \leq 1 - \tfrac{1}{n}\} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \varrho_A\{x|w(A,x) \leq 1 - \tfrac{1}{n}\} = 0.$$

Falls nun aber $\dim A = \infty$, wähle eine Folge $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$ wie in 6. mit $\varrho_{A_n} \nearrow \varrho_A$. Würde für ein $q < 1$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gelten $\varrho_{A_n}\{x|w(A,x) \leq q\} > 0$, so wäre

$$\dim A_n = \mathrm{tr}(\hat{P}_{A_n}\hat{P}_A) \stackrel{7.}{=} \int_\Phi w(A,x)\varrho_{A_n}(dx) \leq$$

$$\leq q \cdot \varrho_{A_n}\{x|w(A,x) \leq q\} + \varrho_{A_n}\{x|w(A,x) > q\} < \varrho_{A_n}(\Phi) = \dim A_n.$$

Also $\varrho_{A_n}\{x|w(A,x) < 1\} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, also

$$\varrho_A(\Phi \setminus \eta(A)) = \lim_n \varrho_{A_n}(\Phi \setminus \eta(A)) = 0.$$

9. $\varrho_A(\eta(A^\perp)) = 0,$

denn aus $w(A^\perp, -) \geq 1_{\eta(A^\perp)}$ folgt

$$0 = \mathrm{tr}(\hat{P}_A\hat{P}_{A^\perp}) \stackrel{7.}{=} \int_\Phi w(A^\perp, x)\varrho_A(dx) \geq \varrho_A(\eta(A^\perp)).$$

10. Für $M \in \mathcal{F}$ gilt $\varrho_A(M) = \varrho(M \cap \eta(A))$.

    Beweis: Die rechte Seite $\stackrel{5.}{=} \varrho_A(M \cap \eta(A)) + \varrho_{A^\perp}(M \cap \eta(A))$, und der zweite Term ist Null wegen 9.

    Die linke Seite $= \varrho_A(M \cap \eta(A)) + \varrho_A(M \cap [\Phi \setminus \eta(A)])$, und der zweite Term ist Null wegen 8.

11. ϱ ist σ-endlich.

    Beweis: Sei $A_1 \leq A_2 \leq \ldots$ ein Folge endlichdimensionaler Unterräume mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathrm{V}$. Es gilt $\varrho(\eta(A_n)) \stackrel{10.}{=} \varrho_{A_n}(\Phi) = \dim A_n < \infty$, und $\bigcup_n \eta(A_n) = \Phi \mod \mathcal{N}$ wegen

$$\varrho(\Phi \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n)) = \varrho(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\Phi \setminus \eta(A_n)]) \stackrel{6.}{=}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \varrho_{A_k}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [\Phi \setminus \eta(A_n)]) \leq \lim_{k\to\infty} \varrho_{A_k}(\Phi \setminus \eta(A_k)) \stackrel{8.}{=} 0.$$

12. $\varrho\{x|0 < w(A,x) < 1\} = 0$.

    Beweis: Dies ist gerade

$$(\varrho_A + \varrho_{A^\perp})\{x|0 < w(A,x) < 1\} \leq \varrho_A\{x|w(A,x) < 1\} + \varrho_{A^\perp}\{x|0 < w(A,x)\},$$

    und der erste Term ist Null wegen 8. Da für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$0 = \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{P}_{A^\perp}) \stackrel{7.}{=} \int w(A,x)\varrho_{A^\perp}(dx) \geq \varepsilon \cdot \varrho_{A^\perp}\{x|\varepsilon \leq w(A,x)\},$$

    folgt

$$\varrho_{A^\perp}\{x|0 < w(A,x)\} = \varrho_{A^\perp} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x|\tfrac{1}{n} \leq w(A,x)\} \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \varrho_{A^\perp}\{x|\tfrac{1}{n} \leq w(A,x)\} = 0.$$

13. $\varrho(\eta(A) \cap \eta(B)) = \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{P}_B)$.

    Beweis:

$$\mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{P}_B) \stackrel{7.}{=} \int w(B,x)\varrho_A(dx) \stackrel{10.}{=} \int w(B,x) 1_{\eta(A)}(x)\varrho(dx) =$$

$$= \int_{\{x|w(B,x)=0\}} + \int_{\{x|0<w(B,x)<1\}} + \int_{\{x|w(B,x)=1\}} \stackrel{12.}{=} \varrho(\eta(A) \cap \eta(B)).$$

    Das beweist *(vi)*.

14. $\varrho(\eta(\Lambda)) \stackrel{10.}{=} \varrho_\Lambda(\Phi) = 0$.

    $\varrho(\Phi \setminus \eta(\mathrm{V})) = 0$ wegen $\varrho = \varrho_V$ und 8. Das beweist *(i)*.

15. Wenn $A \leq B$, dann (5.) $\varrho_A \leq \varrho_B$, folglich $\varrho(\eta(A) \setminus \eta(B)) \stackrel{10.}{=} \varrho_A(\Phi \setminus \eta(B)) \leq \varrho_B(\Phi \setminus \eta(B)) \stackrel{8.}{=} 0$. Das beweist *(ii)*.

16. Wenn $A \perp B$, dann $\varrho(\eta(A) \cap \eta(B)) \stackrel{13.}{=} \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{P}_B) = 0$. Das beweist *(iii)*.

17. Wenn $A \perp B$, dann $\varrho(\eta(A \vee B) \setminus [\eta(A) \cup \eta(B)]) = 0$,
denn dies ist (wegen 5.) gerade $(\varrho_A + \varrho_B + \varrho_{(A\vee B)^\perp})(\eta(A \vee B) \cap [\Phi \setminus \eta(A)] \cap [\Phi \setminus \eta(B)])$, und das verschwindet wegen 9. und 8. Mit *(ii)* folgt *(iv)*.

18. *(v)* folgt aus *(i)*, *(iii)* und *(iv)*. *(vii)* folgt aus *(vi)*.

19. Was *(viii)* angeht: gegeben ein Element von $\mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$, etwa $\xi = \sum_k p_k \, \xi_{\mathbb{C}\phi_k}$, wobei ξ_A wieder das zum Operator $(\dim A)^{-1} \cdot \hat{P}_A$ gehörige Maß ist. Klar ist $\varphi(\varrho_{\mathbb{C}\phi_k}) = \xi_{\mathbb{C}\phi_k}$, und wegen der Mischbarkeit von C und der Mischungserhaltung von φ ist $\sum_k p_k \varrho_{\mathbb{C}\phi_k} \in C$ und $\varphi(\sum_k p_k \varrho_{\mathbb{C}\phi_k}) = \sum_k p_k \xi_{\mathbb{C}\phi_k} = \xi$. Die Behauptung *(viii)* folgt mit 10.

20. Kommen wir nun zur zweiten Hälfte des Lemmas, dem Umkehrschluß. Zunächst prüft man leicht, daß die Gleichung in *(viii)* für jedes $\xi \in \mathrm{WM}(\mathbb{L}(\mathcal{H}))$ ein W-Maß $\varphi^{-1}(\xi)$ auf $(\Phi, \mathcal{F})$ definiert. Wir bemerken $\varphi^{-1}(\xi)(\eta(A)) = \sum_k p_k \varrho(\eta(A) \cap \eta(\mathbb{C}\phi_k)) \stackrel{(vi)}{=} \sum_k p_k \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{P}_{\mathbb{C}\phi_k}) = \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{W}) = \xi(A)$. Daraus folgt, daß wenn $\xi \neq \xi'$, etwa $\xi(A) \neq \xi'(A)$, dann $\varphi^{-1}(\xi) \neq \varphi^{-1}(\xi')$ wegen $\varphi^{-1}(\xi)(\eta(A)) = \xi(A) \neq \xi'(A) = \varphi^{-1}(\xi)(\eta(A))$. Also ist φ^{-1} injektiv und besitzt auf $C := \mathrm{Bild}\,(\varphi^{-1})$ eine Umkehrabbildung φ, die natürlich auch bijektiv ist. $\mathcal{F}_C$ sei die kleinste σ-Algebra auf C, die die einpunktigen Mengen enthält und die Auswertungs-Funktionen meßbar macht; dann ist φ meßbar, C mischbar und φ mischungserhaltend. Außerdem gilt

$$\int_\Phi w(A,x)\varphi^{-1}(\xi)(dx) = \int_\Phi w(A,x) \sum_{k=1}^{\infty} p_k \; \varrho(dx \cap \eta(\mathbb{C}\phi_k)) =$$

$$= \sum_k p_k \int w(A,x) 1_{\eta(\mathbb{C}\phi_k)}(x) \varrho(dx) \stackrel{(v)}{=}$$

$$= \sum_k p_k \varrho(\eta(A) \cap \eta(\mathbb{C}\phi_k)) \stackrel{(vi)}{=} \sum_k p_k \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{P}_{\mathbb{C}\phi_k}) = \mathrm{tr}(\hat{P}_A \hat{W}) = \xi(A).$$

Und damit sind alle Anforderungen an ein treues stochastisches Modell der QM erfüllt. □

Der Beweis vereinfacht sich erheblich, wenn man $\dim \mathcal{H} < \infty$ annimmt. Es entfallen dann die Nummern 4. bis 7. und die Hälfte von 8. Tatsächlich wird zum Beweis des Satzes von S. 17 nur der endlichdimensionale Fall benötigt. Da die eleganten Aussagen des Lemmas jedoch auch im unendlichdimensionalen Fall gelten, habe ich mich entschieden, den Beweis allgemeiner zu führen als unbedingt nötig.

Hilfsbehauptung. *Sei $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$ eine Folge endlichdimensionaler Unterräume mit $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathcal{H}$, $B \leq \mathcal{H}$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Dann gilt*

$$tr(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})^+ \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis. Um $\mathrm{tr}(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})^+$ zu berechnen, ermitteln wir die Eigenwerte von $\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n}$ und addieren die positiven unter ihnen. Zunächst stellen wir fest, daß $\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n}$ selbstadjungiert ist und diagonalisierbar, weil $(B \vee A_n)^\perp$ im Eigenraum zum Eigenwert 0 enthalten (und im Endlichdimensionalen jeder selbstadjungierte Operator diagonalisierbar) ist. Die Eigenwerte sind reell und liegen wegen $\langle\psi|(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_B\psi\rangle - \langle\psi|\hat{P}_{A_n}\psi\rangle$ alle im Intervall $[-1,1]$. Der Eigenwert 1 kann nur für endlich viele n auftreten, denn ein zugehöriger (normierter) Eigenvektor ψ müßte (wegen $\langle\psi|\hat{P}_B\psi\rangle \in [0,1]$ und $\langle\psi|\hat{P}_{A_n}\psi\rangle \in [0,1]$) $\langle\psi|\hat{P}_B\psi\rangle = 1$ und $\langle\psi|\hat{P}_{A_n}\psi\rangle = 0$ erfüllen, folglich in $B \wedge A_n^\perp$ liegen; das aber ist eine absteigende Folge von Unterräumen von B, die stationär werden muß (weil $\dim B < \infty$), und würde sie nicht schließlich $\{0\}$ wie behauptet, dann würde ein gewisses $\psi \in B, \psi \neq 0$ auf allen A_n senkrecht stehen und damit auch auf $\bigvee_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathcal{H}$, was unmöglich ist.

Wir betrachten nun einen Eigenwert $\lambda \notin \{-1,0,1\}$. Sei $\psi \neq 0$ ein Eigenvektor dazu, also

$$(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})\psi = \lambda\psi.$$

Wir stellen fest $\chi := \hat{P}_B\psi \neq 0$ (andernfalls müßte der Eigenwert 0 oder -1 sein). Aus der Eigenwertgleichung folgt

$$\chi = (1+\lambda)\hat{P}_{A_n}\psi + \lambda\hat{P}_{A_n^\perp}\psi$$

und daraus, indem man χ in einen Anteil $\in A_n$ und einen senkrecht dazu zerlegt und auf beiden Seiten die Komponenten vergleicht,

$$\psi = \frac{1}{1+\lambda}\hat{P}_{A_n}\chi + \frac{1}{\lambda}\hat{P}_{A_n^\perp}\chi.$$

Daran sehen wir schon mal, daß $\psi \in \hat{P}_{A_n}(B) \vee \hat{P}_{A_n^\perp}(B)$, und das ist ein Unterraum mit Dimension $\leq 2\dim B$. Folglich gibt es höchstens $2\dim B$ Eigenwerte (inklusive Vielfachheit) $\notin \{-1,0,1\}$. Einsetzen der letzten Gleichung in die Beziehung $\chi = \hat{P}_B\psi$ liefert

$$\chi = \frac{1}{1+\lambda}\hat{P}_B\hat{P}_{A_n}\chi + \frac{1}{\lambda}\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi$$

Daraus ergibt sich durch Multiplikation mit $\lambda(1+\lambda)$:

$$\lambda(1+\lambda)\chi = \lambda\hat{P}_B\hat{P}_{A_n}\chi + (1+\lambda)\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi =$$

$$= \lambda\hat{P}_B(\hat{P}_{A_n} + \hat{P}_{A_n^\perp})\chi + \hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi = \lambda\chi + \hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi,$$

folglich

$$\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi = \lambda^2\chi.$$

Daraus schließen wir, daß

$$\psi_- := \frac{1}{1-\lambda}\hat{P}_{A_n}\chi - \frac{1}{\lambda}\hat{P}_{A_n^\perp}\chi$$

ein Eigenvektor von $\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n}$ zum Eigenwert $-\lambda$ ist:

$$(\hat{P}_B - \hat{P}_{A_n})\psi_- = \frac{1}{1-\lambda}\underbrace{\hat{P}_B\hat{P}_{A_n}\chi}_{\chi-\lambda^2\chi} - \frac{1}{\lambda}\underbrace{\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi}_{\lambda^2\chi} - \frac{1}{1-\lambda}\hat{P}_{A_n}\chi =$$

$$= (1+\lambda)\chi - \lambda\chi - \frac{1}{1-\lambda}\hat{P}_{A_n}\chi = (1-\frac{1}{1-\lambda})\hat{P}_{A_n}\chi + \hat{P}_{A_n^\perp}\chi = -\lambda\psi_-.$$

Ferner gilt $\hat{P}_B\psi_- = \chi$, denn

$$\hat{P}_B\psi_- = \frac{1}{1-\lambda}\underbrace{\hat{P}_B\hat{P}_{A_n}\chi}_{\chi-\lambda^2\chi} - \frac{1}{\lambda}\underbrace{\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi}_{\lambda^2\chi} = (1+\lambda)\chi - \lambda\chi = \chi.$$

Fassen wir zusammen: Die Eigenvektoren (außer zu den uninteressanten Eigenwerten $-1, 0, 1$) treten gepaart auf mit entgegengesetzten Eigenwerten, d.h. wenn ψ Eigenvektor ist und $\chi = \hat{P}_B\psi$, dann liegt in dem 2-dimensionalen Unterraum $\mathbb{C}\hat{P}_{A_n}\chi \vee \mathbb{C}\hat{P}_{A_n^\perp}\chi$ noch ein Eigenvektor zum entgegengesetzten Eigenwert, der auch χ als Projektion auf B hat. Demnach ist die Anzahl der positiven Eigenwerte (inklusive Vielfachheit) $\leq \dim B$. Für die Größe des Eigenwertes folgt aus der Beziehung $\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi = \lambda^2\chi$, daß

$$\|\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\|^2 = \langle\hat{P}_{A_n^\perp}\chi|\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\rangle = \langle\chi|\hat{P}_{A_n^\perp}\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\rangle =$$

$$= \langle\hat{P}_B\chi|\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\rangle = \langle\chi|\hat{P}_B\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\rangle = \langle\chi|\lambda^2\chi\rangle = \lambda^2\|\chi\|^2,$$

daher

$$|\lambda| = \frac{\|\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\|}{\|\chi\|}.$$

Die Summe der positiven Eigenwerte ist daher

$$\leq \dim B \cdot \sup\Big\{\frac{\|\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\|}{\|\chi\|}\Big|\chi \in B\Big\}.$$

Um zu zeigen, daß sie für $n \to \infty$ gegen 0 geht, müssen wir nur noch das erwähnte Supremum abschätzen. Anstatt durch $\|\chi\|$ zu dividieren, können wir uns ebensogut auf diejenigen $\chi \in B$ mit $\|\chi\| = 1$ beschränken. Ist $\phi_1, \ldots, \phi_r$ irgendeine Orthonormalbasis von B ($r = \dim B$), und etwa $\chi = c_1\phi_1 + \ldots + c_r\phi_r$, dann

$$\|\hat{P}_{A_n^\perp}\chi\| = \Big\|\sum_k c_k\hat{P}_{A_n^\perp}\phi_k\Big\| \leq \sum_k |c_k| \cdot \|\hat{P}_{A_n^\perp}\phi_k\| \leq r \cdot \max\Big\{\|\hat{P}_{A_n^\perp}\phi_k\| \Bigm| k = 1, \ldots, r\Big\}.$$

Also genügt es zu zeigen, daß für jeden festen Vektor $\phi \in B$ gilt

$$\|\hat{P}_{A_n^\perp}\phi\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Es gibt eine solche Orthonormalbasis $e_1, e_2, \ldots$ in $\mathcal{H}$, daß $A_n = \mathbb{C}e_1 \vee \mathbb{C}e_2 \vee \ldots \vee \mathbb{C}e_{m_n}$, wobei (m_n) eine unbeschränkte aufsteigende Folge natürlicher Zahlen ist. Wenn

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} c'_m e_m, \text{ dann } \|\phi\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |c'_m|^2,$$

(insbesondere ist das eine konvergente Reihe) und

$$\|\hat{P}_{A_n^\perp}\phi\|^2 = \sum_{m=m_n+1}^{\infty} |c'_m|^2$$

ist der Rest der Reihe und konvergiert für $m_n \to \infty$ gegen 0, folglich tut das auch $\|\hat{P}_{A_n^\perp}\phi\|^2$ und folglich auch dessen Wurzel. □

5 Literatur

[Gl] Gleason, Andrew M.: *Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert space*, Journal of Mathematics and Mechanics, **6**, 1957.

[Ja] Jauch, Josef M.: *Foundations Of Quantum Mechanics*, 1968.

[Je] Jelitto, Rainer J.: *Quantenmechanik I.*

[Ni] Nikodým, Otton M.: *The Mathematical Apparatus for Quantum-Theories*, 1966.

[Pa] Parthasarathy, Kalyanapuram R.: *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus*, 1992.

[SzN] Szökefalvi-Nagy, Bla: *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*, 1942.

6 Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. H.F. de Groote, der sich für die Betreuung meiner Arbeit sehr viel Zeit genommen hat. Er hat einige sehr wertvolle Literaturhinweise zu geben vermocht und die Überlegungen in das rechte begriffliche Umfeld gerückt. Für ihre Verbesserungsvorschläge bin ich Herrn Dr. J. Reinhardt vom Fachbereich Physik und besonders meiner Kommilitonin Angelika Esser zu Dank verpflichtet. Die Stochastiker Prof. G. Kersting und Prof. A. Wakolbinger hatten immer ein offenes Ohr für meine Fragen und haben meine Fortschritte mit freundlichem Interesse verfolgt.