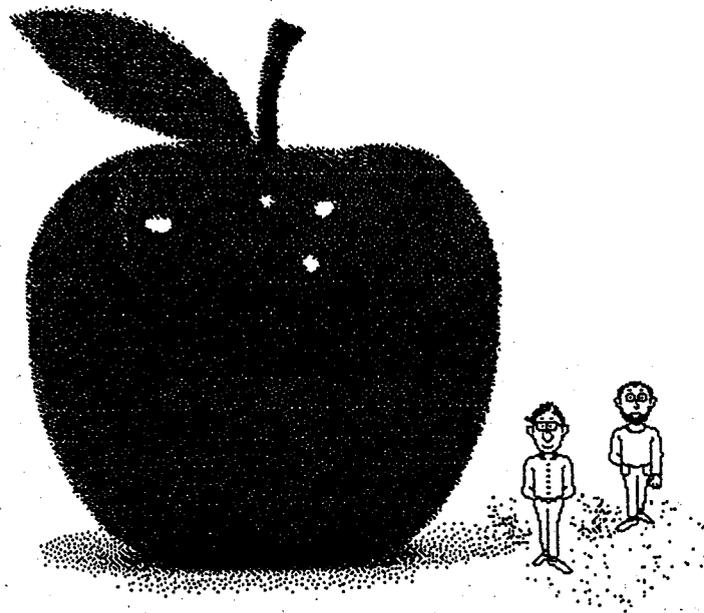


Messung der Shuntimpedanz bei Irisstrukturen
mit einem dielektrischen Stab

P. Hülsmann, M. Kurz

Institut für Angewandte Physik
der
Universität Frankfurt am Main



Frankfurt am Main
Juni 1990

Messung der Shuntimpedanz bei Irisstrukturen mit einem dielektrischen Stab

1) Grundlagen

Zur Beschreibung der Eigenschaften einer Beschleunigerstruktur werden ihre charakteristischen Kenngrößen herangezogen. Dies sind insbesondere die Resonanzfrequenz ω , die Güte Q und die Shuntimpedanz R . Während Meßmethoden zur Bestimmung von Q schon an anderer Stelle vorgestellt wurden, z.B. [1ap1], beschäftigt sich der vorliegende Artikel mit einer Methode zur Messung von R bzw. R/Q . Im folgenden wollen wir von den Definitionsgleichungen dieser Größen ausgehen:

Shuntimpedanz: Sie ist ein Maß für die Eignung einer Struktur als Beschleuniger. Wir benutzen die Shuntimpedanz pro Längeneinheit r_0 und die totale Shuntimpedanz R , mit $R = \int_0^L r_0 dz$, L ist dabei die Länge der Struktur.

$$r_0 = - \frac{E_{0z}^2}{\left(\frac{dP}{dz}\right)} \quad (1)$$

E_{0z} ist das totale elektrische E_z -Feld an einer Stelle z (in Flugrichtung der Teilchen), dP/dz die pro Längeneinheit in der Struktur verbrauchte Hochfrequenzleistung. In Laufwellenstrukturen ist die Bedeutung des Index 0 offensichtlich: Es gibt in der Regel nur eine Fourierkomponente der Welle in der Struktur, die die gleiche Phasengeschwindigkeit wie das zu beschleunigende Teilchen hat. Gleiches gilt, weniger anschaulich zu verstehen, für Stehwellenstrukturen.

Güte: Die Güte einer Struktur beschreibt das Verhalten einer Hf-Struktur als Resonator. Sie ist definiert als das Verhältnis von in der Struktur gespeicherter Energie mal die Resonanzfrequenz geteilt durch die Verlustleistung. Wir geben analog zu oben die Güte unter Verwendung der Verlustleistung pro Längeneinheit an:

$$Q = - \frac{\omega W}{\left(\frac{dP}{dz}\right)} \quad (2)$$

W beschreibt dabei die gespeicherte Energie pro Längeneinheit.

Das Verhältnis r_0/Q : Dies ist eine weitere oft gebrauchte Größe (z.B. für Skalierungszwecke, da r_0/Q für eine bestimmte Strukturform gerade proportional ω ist). Sie läßt sich aus den Gleichungen (1) und (2) erhalten:

$$r_0/Q = \frac{E_{0z}^2}{\omega W} \quad (3)$$

2) Die Meßmethode

Wir suchen nun einen Weg, wie man das Verhältnis r_0/Q der Messung zugänglich machen kann.

Mit Hilfe von Slater's Theorem können wir den Zusammenhang zwischen der Änderung des Energieinhalts und der Änderung der Resonanzfrequenz eines schwingungsfähigen Systems herstellen. Die Slaterformel soll im folgenden für den Fall eines allgemeinen Hohlraumresonators hergeleitet werden.

2.1) Die Slaterformel für einen Hohlraumresonator

Mit Hilfe der Störungsrechnung und den Maxwellgleichungen wollen wir auf das Frequenzverhalten eines durch Stoffeinsätze gestörten Hohlraumresonators schließen. Dazu stellen wir die Maxwellgleichungen für das ungestörte und das gestörte System auf.

$$\begin{aligned} \text{rot } E_0 &= -j\omega_0 \mu H_0, & \text{rot } H_0 &= j\omega_0 \varepsilon E_0 & (\text{ungestört}) & (4) \\ \text{rot } E &= -j\omega (\mu + \Delta\mu) H, & \text{rot } H &= j\omega (\varepsilon + \Delta\varepsilon) E & (\text{gestört}) \end{aligned}$$

Dabei ist $\Delta\mu = \mu_0(\mu_r - 1)$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)$. Multiplikation von Gleichung (4) mit den komplex konjugierten Eigenfunktionen und Anwendung der Produktregel für die Divergenz eines Vektorproduktes führt, z.B. [Si], auf:

$$\begin{aligned} \text{div}(H_0 \times E) &= j\omega (\mu + \Delta\mu) H H_0^* - j\omega_0 \varepsilon E E_0^* & (5) \\ \text{div}(H \times E_0) &= j\omega (\varepsilon + \Delta\varepsilon) E E_0^* - j\omega_0 \mu H H_0^* \end{aligned}$$

Die Berandung des Hohlraumresonators soll idealleitend angenommen werden, $n \times E = 0$, $n \times E_0 = 0$. Daher verschwinden die linken Seiten in Gleichung (5) und wir können schreiben:

$$0 = \int_V \{ \{ \omega (\varepsilon + \Delta\varepsilon) - \omega_0 \varepsilon \} E E_0^* + \{ \omega (\mu + \Delta\mu) - \omega_0 \mu \} H H_0^* \} dV, \quad (6)$$

und schließlich folgt unter der Annahme kleiner Störung ($E \approx E_0$ im Nenner)

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\int_V \{ \Delta\varepsilon E E_0^* + \Delta\mu H H_0^* \} dV}{\int_V \{ \varepsilon |E_0|^2 + \mu |H_0|^2 \} dV} = \frac{\Delta W}{4 W}. \quad (7)$$

W bezeichnet die totale in der Struktur gespeicherte Energie. Gleichung (7) ist also

gerade die gesuchte Slaterformel.

Wir nehmen nun einen sehr dünnen kreiszylindrischen dielektrischen Stab (Durchmesser \ll Wellenlänge) und bringen ihn parallel zur Strahlachse in die Struktur ein. Wegen der Stetigkeit der Tangentialkomponente des E-Feldes folgt hier: $E \approx E_0$. Nun denken wir uns den Stab in viele Stücke der Länge ΔL_i unterteilt. Wir lösen Gleichung (7) nach W auf, wobei wir berücksichtigen, daß $W = dW/dL$. An einer Stelle z_i finden wir:

$$W = \frac{\omega \Delta \epsilon A |E_i|^2 \Delta L_i}{4 \Delta \omega L} \quad (8)$$

In Gleichung (3) eingesetzt erhalten wir:

$$r_0/Q = \frac{4 \Delta \omega |E_i|^2 L}{\omega^2 \Delta \epsilon A |E_i|^2 \Delta L_i} = \frac{4 \Delta \omega L}{\omega^2 \Delta \epsilon A \Delta L_i} \quad (9)$$

aufsummiert über die ganze Länge des Stabes finden wir so für die Shuntimpedanz der ganzen Struktur:

$$R/Q = \frac{4 \Delta \omega L}{\omega^2 \Delta \epsilon A} = \frac{4 \Delta \omega L}{\omega^2 A \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} = \frac{2 \Delta f L}{\pi f^2 A \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} \quad (10)$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß die Messung stets einen zu großen Wert für R liefert, da der dielektrische Stab über alle Fourierkomponenten summiert, während ein die Struktur durchquerendes Teilchen nur die Fourierkomponente mit der richtigen Phasengeschwindigkeit sieht. Der Fehler für diese Meßmethode liegt dabei im Bereich um 5% [Eu].

2.2) Meßergebnisse für einen Pillbox-Resonator

Für die Messung wurde ein Keramikstab (Al_2O_3 , $\epsilon_r = 9.5$) von 0.95 mm Durchmesser verwendet. Zuerst wurde die ungestörte Resonanzfrequenz gemessen und die Güte (Fig. 1 Anhang) bei loser Anopplung (Fig. 3 Anhang) bestimmt. Anschließend wurde der Störkörper auf der Strahlachse angebracht und die Frequenzverschiebung gemessen (Fig. 2 Anhang). Die Auswertung der Messung ergab folgende Werte:

$$R/Q = 234 \Omega, \quad R = 0.492 M\Omega .$$

Die Genauigkeit der Messung kann noch durch eine sorgfältigere Justage des Störstabes verbessert werden. Das Ergebnis für die Shuntimpedanz hängt natürlich wesentlich von der erreichte Resonatorgüte ab, wie wir beim Vergleich mit den theoretischen Werten sehen werden.

3) Vergleich mit den theoretischen Werten

An dieser Stelle soll nun der theoretische Wert für R/Q einer Pillbox-Struktur in TM_{010} -Mode abgeleitet werden. Das elektrische Feld in der Struktur, und somit auch seine z -Komponenten, kann als Eigenwellenentwicklung nach den normierten Eigenlösungen dargestellt werden. Im Falle der TM_{010} -Mode existiert nur eine einzige Feldkomponente, das bekannte in z -Richtung konstante E-Feld. Wir können also schreiben:

$$E_z = a E_z^n,$$

wobei der Index n das normierte Feld bezeichnet. Die Definitionsgleichung für R/Q läßt sich nun einfach aus Gleichung (3) ableiten (vgl. auch Gleichung (10)).

$$\frac{R}{Q} = \frac{\left| \int^L E_z dz \right|^2}{\omega W} \quad (11)$$

Die doppelte gespeicherte Energie W ist aber gerade proportional dem Integral über das Betragsquadrat des elektrischen Feldes in der Struktur und damit auch

$$2W = a^2 \int_V |E_z^n|^2 dV = a^2,$$

da wegen der Normierung des E-Feldes das Integral über das Volumen der Struktur gerade eins ergibt. Ebenfalls läßt sich der Faktor a^2 aus dem Zähler der rechten Seite der Gleichung (11) herausziehen, so daß wir schließlich

$$\frac{R}{Q} = \frac{2 \left| \int^L E_z^n dz \right|^2}{\omega} \quad (12)$$

erhalten.

Der Ausdruck für E_z^n kann z.B. in [Iap2] nachgeschlagen werden. Die Auswertung des Integrals ist einfach und liefert gerade:

$$\int_0^L E_z^n dz = \frac{J_0\left(\frac{x_{01}}{r} \rho\right) x_{01} L}{i\omega \varepsilon \sqrt{\mu} L \pi r^2 J_1(x_{01})}$$

In Gleichung (12) eingesetzt erhalten wir das Ergebnis:

$$\frac{R}{Q} = \frac{2 J_0\left(\frac{x_{01}}{r} \rho\right) L}{\varepsilon \pi c_0 r J_1^2(x_{01}) x_{01}} \quad (13)$$

Messen wir auf der Symmetrieachse der Struktur und nehmen wir die folgenden Werte

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0, \\ r &= 56 \text{ mm}, L = 40.79 \text{ mm}, \end{aligned}$$

an, so finden wir:

$$\frac{R}{Q} = 269.52 \Omega$$

Um den theoretischen Wert für die Shuntimpedanz zu finden muß nun noch die Güte einer Pillbox-Struktur berechnet werden. Ausgehend von der Definitionsgleichung (4) gelangt man für die TM_{010} -Mode zu dem folgenden Ausdruck für die Güte (vgl. auch [Un1]):

$$Q = \frac{\eta \times_{01}}{2 \delta (1+r/L)}, \quad \text{mit } \delta = \sqrt{\frac{\mu_0 \times_{01} c_0}{2 r \sigma}}, \quad \eta = 377 \Omega$$

Die zur Messung verwendete Struktur ist aus Messing (MS 58) gefertigt, die in der Literatur angegebenen Leitfähigkeit für diese Legierung beträgt $\sigma = 1.46 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Damit ergibt sich eine Güte von

$$Q = 8116 \quad \text{und} \quad R = 2.188 \text{ M}\Omega$$

Beim Vergleich mit den gemessenen Werten zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung des gemessenen Wertes für R/Q mit der Theorie. Die gemessene Güte allerdings, und damit auch die Shuntimpedanz, liegt deutlich unter dem theoretischen Wert. Dies hat seine Ursache in Kontaktproblemen an den Deckeln der Struktur. Bei sorgfältiger Messung mit neuen, unverbrauchten Schneidkanten, lassen sich Güten von ≈ 7000 ohne weiteres erzielen. Damit würde man eine Shuntimpedanz von $\approx 1.68 \text{ M}\Omega$ erreichen, was dem theoretischen Wert deutlich näherkommt.

Literaturhinweise:

- [Eu] H. Euteneuer, Interne Notiz MAMI 5-87, Table 6a,b,
Inst. f. Kernphysik, Mainz

- [Iap1] P. Hülsmann, M. Kurz, Gütemessung mit dem Network-Analyzer,
Int.-Rep. 89-4, Institut f. Angew. Physik, Frankfurt

- [Iap2] P. Hülsmann, M. Kurz, Normierung der TM- und TE-Moden für
Zylinderresonatoren, Int.-Rep. 90-7, Institut f. Angew. Physik, Frankfurt

- [Si] K. Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, VEB Deutscher Verlag der
Wissenschaften Berlin, 8. Aufl., 1980

- [Un1] G.F. Unger, Elektromagnetische Theorie für die Hochfrequenztechnik,
Bd. 1, 1981, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg

Anhang

Fig. 1

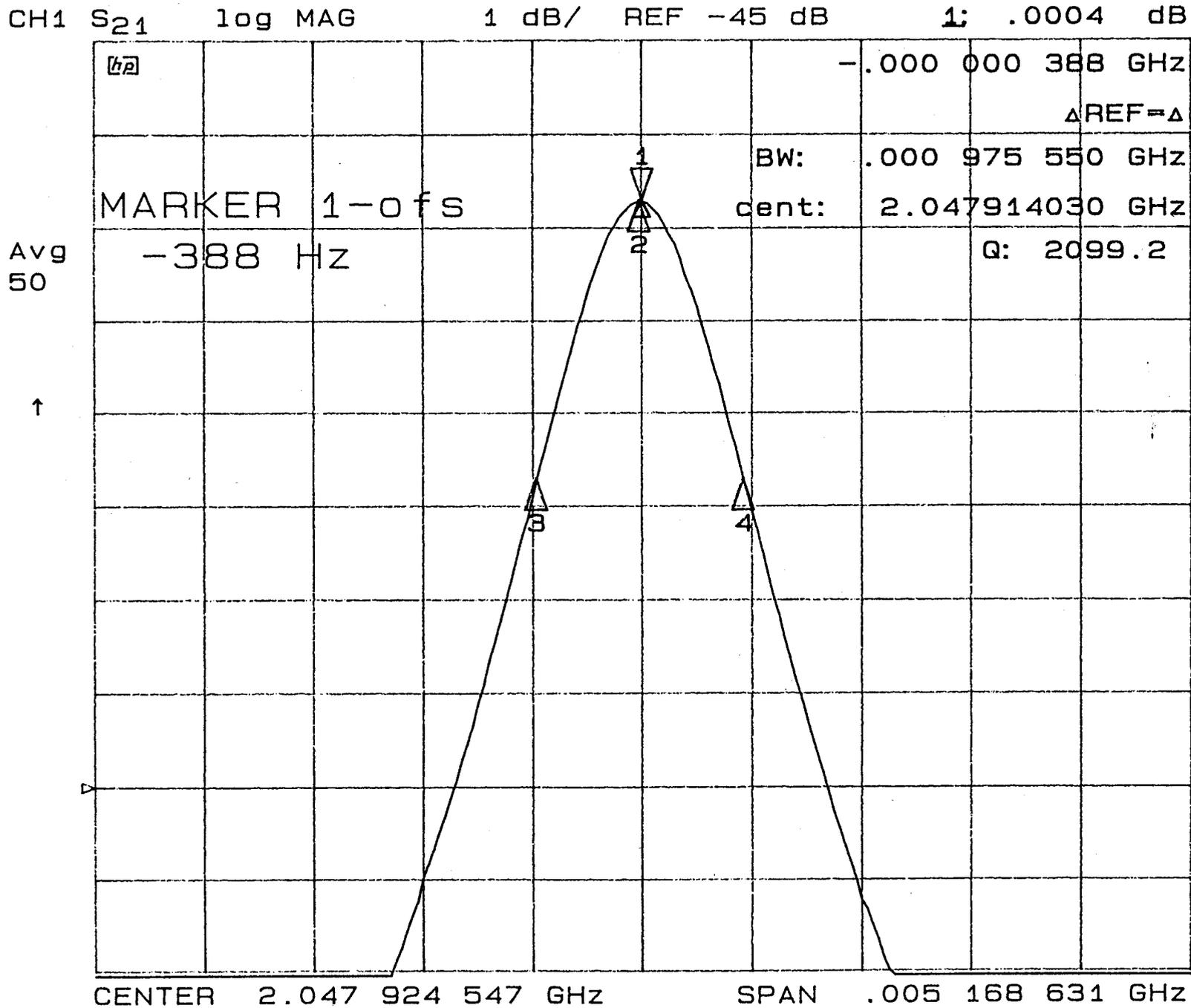
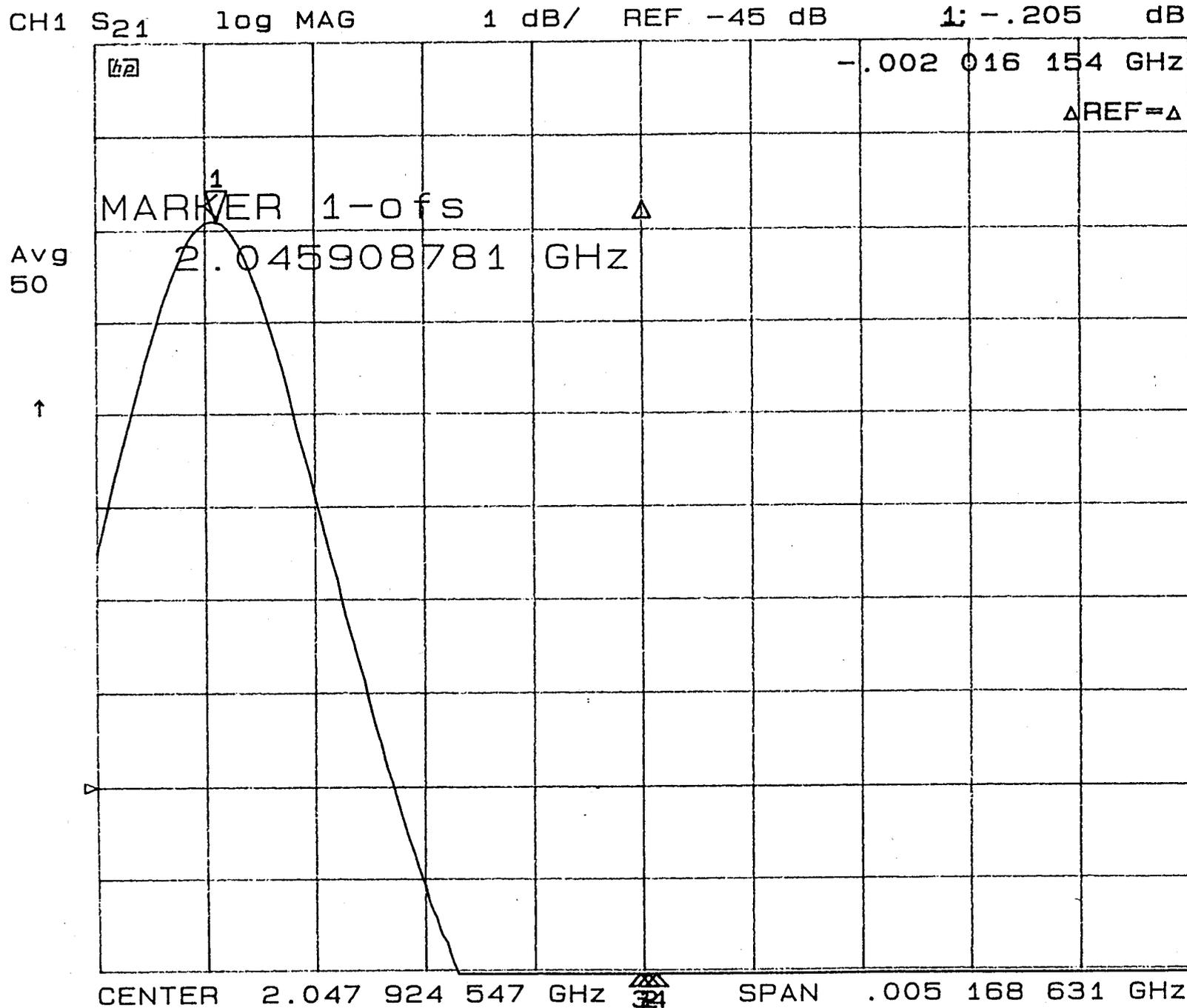


Fig. 2

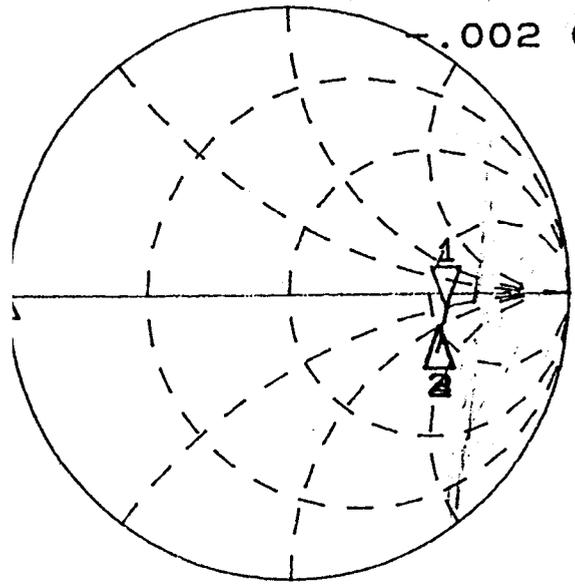


$\epsilon_r = 9.5$
 $\frac{R}{Q}$
 $R = 0,492 \text{ n}\Omega$
 $\Delta f = 2,0162 \text{ MHz}$
 $\phi_{\text{slab}} = 0,95 \text{ mm}$
 $f = 2.04590886 \text{ GHz}$

Fig. 3

CH1 S₁₁ 1 U FS
[]

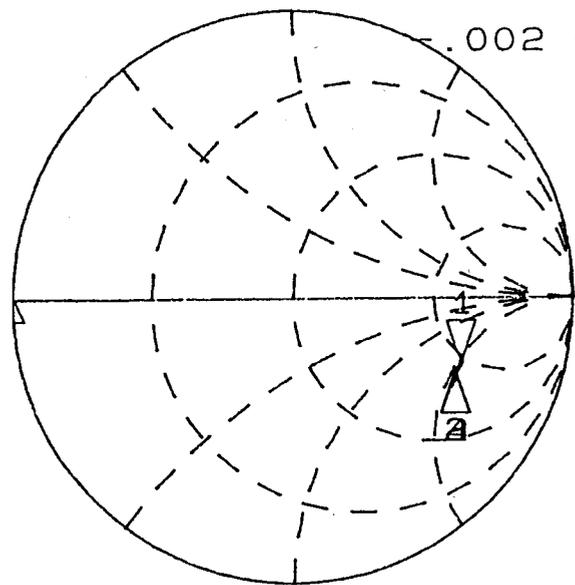
1 174.23 Ω -26.578 Ω 2.0981 μ H
.002 016 154 GHz
 Δ REF= Δ



tsH

CH2 S₂₂ 1 U FS

1 139.27 Ω -104.96 Ω 8.2856 μ H
.002 016 154 GHz
 Δ REF= Δ



↑

CENTER 2.047 924 547 GHz

SPAN .005 168 631 GHz