Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung des Doktorgrades
der
Fakultät für Physik
der
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau

vorgelegt von

Nikolai Alexander Neumaier

aus Zell a.H.

Oktober 2001

Dekan:	Prof. Dr. K. Königsmann
Leiter der Arbeit:	Prof. Dr. H. Römer
Referent:	Prof. Dr. H. Römer
Korreferent:	Prof. Dr. J. J. van der Bij
Tag der Verkündung des Prüfungsergebnisses:	20.12.2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Zu Beginn des vorigen Jahrhunderts waren es insbesondere Experimente aus dem Bereich der Mikrophysik und der Optik, die zeigten, daß dem Gültigkeitsbereich der klassischen Physik Grenzen gesetzt sind und zur Erklärung der gefundenen Phänomene Modifikationen der klassischen Mechanik und der klassischen Feldtheorie hin zu einer quantenmechanischen Beschreibung notwendig sind. Da nun eine quantenmechanische Beschreibung im Gegensatz zur Beschreibung mit Hilfe der klassischen Physik unserem intuitiven Verständnis viel schwerer zugänglich ist, bleibt es trotz des fundamentalen Charakters der Quantenmechanik eine wichtige Fragestellung der theoretischen Physik, in welcher Beziehung diese beiden Beschreibungen stehen.

Sowohl in den mechanischen als auch den feldtheoretischen Modellen besteht das Quantisierungsproblem darin, den klassischen Observablen, also den Funktionen auf dem klassischen Phasenraum, quantenmechanische Operatoren auf einem komplexen Hilbert-Raum zuzuordnen. Ferner darf diese Zuordnung natürlich nicht willkürlich geschehen, sondern muß dem richtigen klassischen Limes Rechnung tragen, da die fundamentalere quantenmechanische Beschreibung die klassische umfassen soll. Der wesentliche Unterschied zwischen den klassischen und quantenmechanischen Observablenalgebren besteht darin, daß erstere kommutativ wohingegen letztere nichtkommutativ ist. In gewisser Weise entscheidet hierbei das Verhältnis von $\hbar$ zu einer für das System charakteristischen Größe der Dimension Wirkung über das Maß der Nichtkommutativität der quantenmechanischen Observablenalgebra.

Aufbauend auf den Ideen von Weyl, Moyal [82] und Berezin [9] stellt die Deformationsquantisierung in der Formulierung von Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz und Sternheimer die Bereitstellung der algebraischen Rahmenbedingungen, welche eine physikalisch sinnvolle Quantisierung besitzen soll in den Vordergrund, um diese von funktional-analytischen Fragestellungen, wie der Darstellung der Observablen als Operatoren auf einem Hilbert-Raum, zu trennen. Die grundlegende Idee hierbei ist es, als den der quantenmechanischen Observablenalgebra zugrundeliegenden Vektorraum, den der klassischen Observablenalgebra zu benutzen und der Nichtkommutativität der quantenmechanischen Algebra dadurch Rechnung zu tragen, daß dieser Vektorraum mit einem neuen, nichtkommutativen Produkt versehen wird, das eine Deformation des urpsrünglichen klassischen Produktes ist. Dieses Produkt, welches man Sternprodukt nennt, muß dann, um dem Korrespondenzprinzip zu entsprechen, so konstruiert sein, daß der Kommutator zweier Funktionen auf dem Phasenraum in erster Ordnung in $\hbar$ durch das $i\hbar$-fache der klassischen Poisson-Klammer dieser Funktionen gegeben ist. Auch wenn die Bedingungen an die nullte und die erste Ordnung in $\hbar$ dieses Produktes leicht erfüllt werden können, so zeigt sich doch, daß die Bedingung der Assoziativität des Sternproduktes tatsächlich einschneidend ist und die Frage der Existenz solcher Deformationen durchaus auf nicht-triviale kohomologische Probleme führt.

Nach erfolgter Konstruktion eines solchen Sternproduktes besteht dann der nächste Schritt darin, Darstellungen dieser Observablenalgebra auf einem Hilbert-Raum zu konstruieren und zu studieren. Der offensichtliche Vorteil, den diese Trennung von Observablenalgebra und Darstellung derselben mit sich bringt, besteht natürlich zum einen darin, daß klassischer Limes und Korrespondenzprinzip von vornherein berücksichtigt sind und nicht nach erfolgter quantenmechanischer Formulierung nach einer Entsprechung zwischen Operatoren auf einem Hilbert-Raum und Funktionen auf dem Phasenraum gesucht werden muß, da diese Entsprechnug (als Vektorraum) von quantenmechanischer und klassischer Observablenalgebra hier durch die Identitätsabbildung auf dem Raum der Funktionen auf dem Phasenraum gegeben ist. Ferner lassen sich Fragen nach etwaiger Implementierbarkeit von klassisch vorhandenen Symmetrien auf rein algebraischem Wege beantworten.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen stellt sich nun die Frage, welche physikalischen Systeme mit der Methode der Deformationsquantisierung behandelt werden können. Um das Konzept der Deformationsquantisierung definieren zu können, benötigt man lediglich die Existenz einer Poisson-Klammer auf den Funktionen auf dem klassischen Phasenraum, so daß im Prinzip sowohl feldtheoretische als auch Systeme der klassischen Mechanik betrachtet werden können. Für Anwendungen in der Feldtheorie ist jedoch schon die Definition einer Poisson-Struktur, also der klassisch notwendigen Struktur auf den relevanten Observablen, ein nicht-triviales Problem, so daß nur sehr vereinzeilt Ansätze für feldtheoretische Anwendungen der Deformationsquantisierung diskutiert werden. In der Tat werden hauptsächlich Systeme der klassischen Mechanik betrachtet, deren klassischer Phasenraum durch eine symplektische Mannigfaltigkeit gegeben ist. Die nicht-triviale Frage nach der Existenz von Sternprodukten ist für diese Anwendung in voller Allgemeinheit von DeWilde und Lecomte [32], Fedosov [42, 43, 44] und Omori, Maeda und Yoshioka [90] positiv beantwortet worden. Für den allgemeineren Fall einer Poisson-Mannigfaltigkeit hat Kontsevich die Existenz von Sternprodukten in [74] nachgewiesen.

Bei jeder Quantisierung etwa auf dem Phasenraum $T^*\mathbb{R}^n$ stellt sich, nachdem man den Orten und den Impulsen Operatoren zugeordnet hat, zwingend das Problem der Wahl einer Ordnungs-Vorschrift. In der Deformationsquantisierung besitzt diese Freiheit der Wahl einer Ordnungs-Vorschrift natürlich eine Entsprechung, die zu einem Äquivalenzbegriff von Sternprodukten führt. Die Äquivalenzklassen von Sternprodukten für symplektische Mannigfaltigkeiten sind Gegenstand zahlreicher Arbeiten von Nest und Tsygan [84, 85], Bertelson, Cahen, Gutt [11], Deligne [31] und anderen Autoren.

Wir wollen nun einige Ziele dieser Arbeit nennen. Zunächst wollen wir das Konzept der Deformationsquantisierung detailliert vorstellen und insbesondere eine der wichtigen Techniken, die Fedosov-Konstruktion, zur expliziten Bestimmung von Sternprodukten analysieren. Hierbei ist eines der Ziele, möglichst viele Informationen über die Struktur der Produkte bereits aus dieser Konstruktions-Vorschrift zu gewinnen, ohne diese explizit angeben zu müssen. Weiter wollen wir weitgehend Aufschluß darüber gewinnen, wie durch geeignete Modifikation der Daten, von denen diese Konstruktion abhängt, Einfluß auf die resultierenden Produkte und deren Äquivalenzklasse genommen werden kann. Hiermit eröffnet sich dann aber auch die Möglichkeit, die Frage nach der Existenz spezieller Sternprodukte, die mit zusätzlichen Strukturen, die vom physikalischen Standpunkt tatsächlich erforderlich, wie z.B. die Existenz einer *-Involution, sind, versehen sind, leichter untersuchen und beantworten zu können. Ferner soll der Zusammenhang zwischen den Äquivalenzklassen von Sternprodukten und solchen zusätzlichen algebraischen Eigenschaften näher beleuchtet werden. Als ein wichtiges Beispiel, in dem auch andere Methoden der Quantisierung, wie z.B. die geometrische Quantisierung sehr gut verstanden sind, geben wir eine vollständige Beschreibung aller Sternprodukte auf Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten, die die in der Quantenfeldtheorie Verwendung findende Wick-Ordnung verallgemeinern.

In den einzelnen Kapiteln erhalten wir dabei folgende Resultate:

Zum einen enthält Kapitel 1 eine Übersicht zum Themenkreis der Deformationsquantisierung als auch einige neue Resultate zur Deformationsquantisierung mittels der Fedosov-Konstruktion. Nachdem wir in Abschnitt 1.1 das Quantisierungsproblem im allgemeinen diskutiert haben und am Beispiel des $T^*\mathbb{R}^n$ verschiedene Quantisierungen vermöge Operator-Ordnungs-Vorschriften betrachtet haben, definieren und diskutieren wir in Abschnitt 1.2 den Begriff des Sternproduktes, dessen Definition wir durch Eigenschaften der Quantenprodukte auf $T^*\mathbb{R}^n$ motivieren und der insofern eine Axiomatisierung der dort gefundenen Beispiele darstellt. In diesem Zusammenhang wird neben Existenzaussagen für Sternprodukte wiederum durch Verallgemeinerung der Situation im $T^*\mathbb{R}^n$ ein geeigneter Äquivalenzbegriff für Sternprodukte vorgestellt, der gewissermaßen in allgemeinem Rahmen der Wahl verschiedener Ordnungs-Vorschriften entspricht. In Abschnitt 1.3 stellen wir die Fedosov-Konstruktion vor, die mehr als ein bloßer Existenzbeweis ist, sondern eine sehr allgemeine Konstruktions-Vorschrift für Sternprodukte darstellt, die im Prinzip eine völlig explizite Angabe von Sternprodukten ermöglicht. Hierbei nehmen wir gegenüber der von Fedosov ursprünglich angegebenen Konstruktion und der Darstellung in [109] einige Verallgemeinerungen vor, deren Einfluß auf die explizite Gestalt der hiermit erhaltenen Produkte wir in Abschnitt 1.3.6 und 1.3.7 diskutieren. In Abschnitt 1.3.3 untersuchen wir insbesondere in völliger Allgemeinheit die mit der Fedosov-Konstruktion erhaltenen Produkte hinsichtlich ihrer Beschreibung mittels Bidifferentialoperatoren. Weiter geben wir im Rahmen der Fedosov-Konstruktion eine Beschreibung von Äquivalenztransformationen zwischen verschiedenen äquivalenten Fedosov-Produkten und eine konkrete Konstruktion aller $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Derivationen eines Fedosov-Sternproduktes.

Nach diesem grundlegenden Kapitel wenden wir uns in Kapitel 2 der Klassifikation von Sternprodukten bis auf Äquivalenz zu. Nach einigen Ausführungen in 2.1.1, die das Deformationsproblem in Verbindung zu kohomologischen Fragestellungen bringen, geben wir in Abschnitt 2.1.2 einen kurzen Überblick über bekannte Resultate, die Beschreibungen von Automorphismen und Derivationen von Sternprodukten geben, die wir für den anschließenden Abschnitt, in dem wir die Klassifikation von Sternprodukten nach Deligne vorstellen, benötigen. Dieses Klassifikationsschema eröffnet die Möglichkeit, einem Sternprodukt auf funktorielle Art und Weise eine formale Laurent-Reihe mit Werten in der zweiten de Rham-Kohomologie der zugrundeliegenden symplektischen Mannigfaltigkeit zuzuordnen, die die Äquivalenzklasse dieses Sternproduktes eindeutig festlegt. In Abschnitt 2.3 wenden wir dieses Konzept der Klassifikation auf Fedosov-Sternprodukte an, die man mit dem ursprünglich von Fedosov verwendeten faserweisen Produkt erhält. Insbesondere erhalten wir hiermit Aufschluß darüber, welchen Einfluß die von uns vorgenommenen Verallgemeinerungen der Fedosov-Konstruktion in diesem Beispiel auf die Äquivalenzklasse der erhaltenen Sternprodukte haben. Anschließend betrachten wir in Abschnitt 2.4 Sternprodukte mit zusätzlichen algebraischen Eigenschaften und diskutieren den Zusammenhang dieser Eigenschaften mit der charakteristischen Klasse der jeweiligen Sternprodukte, wobei es sich herausstellt, daß die Forderung solcher zusätzlicher Eigenschaften einschränkende Bedingungen an die charakteristische Klasse dieser Sternprodukte zur Folge hat. Insbesondere beantworten wir hierbei allgemein die Existenzfrage von Sternprodukten mit *-Struktur und weisen für äquivalente Sternprodukte die Existenz spezieller Äquivalenztransformationen nach, die mit den jeweiligen zusätzlichen algebraischen Strukturen verträglich sind, was etwa für die Darstellungen dieser äquivalenten Sternprodukte von weitreichender Bedeutung ist. Für die Beantwortung der Existenzfrage spezieller Sternprodukte machen wir uns dabei unsere Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 zunutze, mit denen wir sogar konkrekte Konstruktionen von Sternprodukten mit den gewünschten Eigenschaften angeben können.

In Kapitel 3 betrachten wir die Deformationsquantisierung auf Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten. Nach einem einführenden Abschnitt 3.1, der die differentialgeometrischen Grundlagen dieser Beispielklasse von symplektischen Mannigfaltigkeiten zum Inhalt hat, geben wir in Abschnitt 3.2 wiederum unter Verwendung der Fedosov-Konstruktion eine explizite Konstruktion von Sternprodukten an, die die gegenüber einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit zusätzliche geometrische Struktur der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit berücksichtigt. Eines der Hauptziele dieses Kapitels ist es zu zeigen, daß man mit dieser von uns angegebenen Konstruktion alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit erhalten kann. Als einen ersten Schritt zeigen wir in Abschnitt 3.3, indem wir erneut das Klassifikationsschema von Deligne auf diese Produkte anwenden, daß es mit unserer Konstruktion möglich ist, Sternprodukte jeder möglichen, vorgegebenen Äquivalenzklasse zu erhalten. In Abschnitt 3.4 zeichnen wir unter den konstruierten Sternprodukten diejenigen aus, die tatsächlich die Eigenschaft besitzen, vom Wick-Typ zu sein, indem wir Bedingungen an gewisse Größen, die in die Fedosov-Konstruktion eingehen, ableiten, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß das resultierende Sternprodukt vom Wick-Typ ist. In Abschnitt 3.5 gelingt es uns schließlich, die Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ nachzuweisen. Hierzu stellen wir zunächst einen Bezug zu den Untersuchungen von Sternprodukten mit Separation der Variablen von A. Karabegov her und können für die von uns konstruierten Sternprodukte Eigenschaften nachweisen, die diese vollständig bestimmen. Hierzu geben wir einen Beweis dafür an, daß Sternprodukte vom Wick-Typ durch die Erfüllung gewisser lokaler Identitäten vollständig festgelegt sind, der auf Argumenten mit Hilfe der Hochschild-Kohomologie basiert und den Beweis des von A. Karabegov in [67] formulierten Satzes vervollständigt, der besagt, daß Sternprodukte vom Wick-Typ in Bijektion zu formalen Deformationen der Semi-Kähler-Form sind.

In Anhang A stellen wir die im Laufe dieser Arbeit benötigten Definitionen und Ergebnisse zu formalen Potenzreihen zusammen und geben eine Formulierung des Banachschen Fixpunkt-Satzes an, dessen wir uns an verschiedenen Stellen der vorliegenden Arbeit bedienen.

Kapitel 1

Deformationsquantisierung

1.1 Quantisierung

1.1.1 Das Quantisierungsproblem

In diesem einführenden Abschnitt wollen wir einige Aspekte der Problematik der Quantisierung diskutieren, die als Motivation für das mit der Deformationsquantisierung gewählte Vorgehen dienen sollen. Aufgrund der Vielschichtigkeit dieses Themenkreises erheben wir keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern wollen vielmehr einen Überblick über verschiedene Aspekte der mit der Quantisierung verbundenen Problemstellungen geben.

Ein möglicher Ausgangspunkt zur mathematischen Beschreibung physikalischer Systeme ist die Newtonsche Mechanik oder spezieller die Hamiltonsche Mechanik. Eine Vielzahl physikalischer Systeme zeigt jedoch Phänomene, die durch diese klassische Beschreibung nicht vorhergesagt bzw. erklärt werden können, so daß sich eine klassische Beschreibung als nicht immer zulässig erweist. Vielmehr verhält sich die Natur nach den Gesetzen der Quantenmechanik, die somit als die fundamentalere der beiden Theorien zur Beschreibung physikalischer Phänomene angesehen werden kann, so daß man von vornherein eine quantenmechanische Beschreibung hätte wählen sollen. Nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an das jeweilige physikalische System erweist sich die Beschreibung durch die klassische Mechanik als zulässig. Nun steht man aber vor dem Problem, eine aus grundlegenden Prinzipien abgeleitete quantenmechanische Beschreibung für ein beliebig vorgegebenes physikalisches System formulieren zu müssen. Dieses stellt nun aber in den meisten Fällen ein großes wenn nicht sogar unüberwindliches Hindernis dar, da eine direkte quantenmechanische Beschreibung der menschlichen Anschauung im Gegensatz zur klassischen Beschreibung kaum zugänglich ist. Aus diesem Problem ergibt sich die Fragestellung, ob nicht durch zusätzliche Annahmen aus der klassischen Beschreibung eines Systems, die konzeptionell (jedoch häufig technisch) keinerlei Schwierigkeiten darstellt, auf die quantenmechanische Beschreibung geschlossen werden kann. Diese Vorgehensweise wollen wir dann als Quantisierung bezeichnen. Quantisieren bedeutet hierbei keineswegs einem System, das den Gesetzen der klassischen Physik gehorcht, eine Quantennatur aufzuprägen, vielmehr verhält sich die Natur quantenmechanisch und es ist nur die klassische Beschreibung, die unzureichend ist und deshalb modifiziert werden muß.

Es stellt sich nun umgekehrt die Frage, warum sich die klassische Beschreibung in vielen Fällen als realistische Approximation der physikalischen Situation erweist. Dieses Phänomen des klassischen Limes kann man in gewisser Weise als Umkehrung der Quantisierung verstehen, wenngleich es sich hierbei tatsächlich um ein physikalisches Phänomen handelt, wohingegen der Prozeß der Quantisierung ein Hilfsmittel zur Formulierung einer möglichen quantenmechanischen Beschreibung darstellt. Die Existenz des klassischen Limes legt es nun nahe, die klassische Beschreibung nicht völlig zu verwerfen, obwohl sie im allgemeinen nicht von fundamentaler Bedeutung ist, sondern diese nur um gewisse Quantenkorrekturen zu bereichern, die dem quantenmechanischen Verhalten Rechnung tragen. Der Prozeß des klassischen Limes eröffnet einem in gewissen Grenzen auch, darüber zu entscheiden, ob eine gewählte, vermeintliche quantenmechanische Beschreibung eines Systems Aussicht auf Erfolg verspricht, indem man überprüft, ob sie einen sinnvollen klassischen Limes besitzt. Ist dem nicht so, so ist diese wieder zu verwerfen.

Wir wollen nun nach diesen allgemeinen Bemerkungen die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von klassischer und quantenmechanischer Beschreibung herausarbeiten.

Die hier gewählte Formulierung stellt den Begriff der Observablenalgebra als zentrales Objekt beider Theorien in den Vordergrund. Unter einer Observablen versteht man eine Kenngröße eines physikalischen Systems, deren Wert bzw. Erwartungswert sich durch eine Messung ermitteln läßt. Sowohl in der klassischen als auch in der quantenmechanischen Beschreibung ist die Observablenalgebra eine assoziative Algebra mit Eins über dem Körper der komplexen Zahlen. In beiden Fällen sei diese Algebra mit einer *-Involution versehen, die ein antilinearer Antiautomorphismus des jeweiligen assoziativen Produktes ist, so daß die tatsächlich beobachtbaren Elemente gerade die unter dieser Involution invarianten sind. Der wesentliche Unterschied zwischen klassischer und quantenmechanischer Beschreibung liegt darin, daß die klassischen Observablen eine kommutative Algebra bilden, die quantenmechanischen hingegen nicht. Betrachtet man zum Beispiel die fundamentalen Observablen Ort und Impuls für das einfachste physikalische System, dessen Phasenraum $\mathbb{R}^2$ ist, so vertauschen diese auf klassischer Seite, wohingegen ihr quantenmechanischer Kommutator gerade durch das $i\hbar$-fache des Einselementes gegeben ist. Insofern kontrolliert die Größe des Planckschen Wirkungsquantums die Nichtkommutativität der quantenmechanischen Algebra. Sind nun charakteristische Größen der Dimension Wirkung des Systems erheblich größer als $\hbar$, spielt diese Nichtkommutativität eine untergeordnete Rolle und die klassische Beschreibung des Systems stellt eine realistische Approximation der physikalischen Verhältnisse dar. Hiermit kommt man aber dem Verständnis des klassischen Limes näher, was zusammengefaßt so ausgedrückt werden kann, daß sich die quantenmechanische Algebra für „$\hbar = 0$“ auf die klassische reduzieren soll. Es steht natürlich außer Frage, daß der tatsächliche Wert von $\hbar$ in keinster Weise beeinflußbar ist, geschweigedenn auf 0 gesetzt werden kann, sondern die oben gewählte Schreibweise bedeutet nur eine Kompatibilität zwischen klassischer und quantenmechanischer Beschreibung, die besagt, daß die Quantenmechanik die klassische Mechanik umfassen soll und sich im Grenzfall unter der oben genannten Bedingung auf diese reduziert.

Neben dem Begriff der Observablen ist es auch notwendig, den Zustand eines Systems beschreiben zu können. Ein System kann sich in verschiedenen Zuständen befinden, die in einer gewissen zeitlichen Abfolge durchlaufen werden. Hierbei bleibt die Observablenalgebra zu allen Zeiten eine feste dem System zugeordnete Algebra. Aus der Kenntnis des momentanen Zustandes ist es möglich, klassisch den Wert einer Observablen bzw. quantenmechanisch den Erwartungswert und die Streuung um diesen Erwartungswert zu bestimmen. In der klassischen Mechanik ist nämlich (idealisierterweise) die Streuung der Meßwerte in einem reinen Zustand Null, wohingegen dies in der Quantenmechanik in der Regel nicht der Fall ist und somit der tatsächliche Meßwert vom Erwartungswert verschieden sein kann. Präziser formuliert liefert die Angabe eines Zustandes sowohl klassisch als auch quantenmechanisch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die möglichen Meßwerte, die man das Spektrum der Observablen nennt, einer Observablen. Also ist ein Zustand ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge der Spektralwerte. Der wesentliche Unterschied zwischen den Zuständen auf klassischer und quantenmechanischer Seite besteht nun darin, daß es in der klassischen Mechanik Zustände gibt, so daß das induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß für alle Observablen ein Punktmaß ist, wohingegen dies in der Quantenmechanik aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation unmöglich ist.

Als weiteres wichtiges Konzept beider Theorien betrachten wir die zeitliche Entwicklung eines Systems. Wir wählen hier die Formulierung der zeitlichen Entwicklung für die Observablen, wenngleich diese auch für die Zustände eines Systems formuliert werden kann. Da sich die Struktur der Observablen mit der zeitlichen Entwicklung nicht ändern soll, muß diese durch einen zeitabhängigen Automorphismus der jeweiligen Observablenalgebra gegeben sein. Zusätzlich muß dieser Automorphismus mit der jeweiligen *-Involution verträglich sein, denn eine observable Größe muß unabhängig von dem betrachteten Zeitpunkt observabel sein, also unter der *-Involution stabil sein. In beiden Theorien werden diese Automorphismen durch eine Differentialgleichung erzeugt, so daß die zeitliche Entwicklung durch eine durch die Zeit t parametrisierte Einparameter-Gruppe von *-Automorphismen gegeben ist. Die infinitesimale Größe, mit der ein Automorphismus erzeugt wird, ist durch eine Derivation der Algebra gegeben. Im Fall der klassischen Mechanik führt dies auf die Notwendigkeit einer zusätzlichen Struktur auf der Observablenalgebra nämlich der Poisson-Klammer, so daß die klassische Algebra zu einer Poisson-Lie-Algebra wird. Die zeitliche Entwicklung wird dann durch die Poisson-Klammer mit einem ausgezeichneten Algebra-Element, der Hamilton-Funktion, erzeugt. In der Quantenmechanik besteht aufgrund der Nichtkommutativität nicht die Notwendigkeit, eine äußere Derivation zur Beschreibung der Zeitentwicklung heranzuziehen, sondern diese wird vermöge einer inneren Derivation nämlich durch das $\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}$-fache des Kommutators mit dem Hamilton-Operator, der ein ausgezeichnetes Element der quantenmechanischen Observablenalgebra ist, vermittelt. Also besitzt die quantenmechanische Observablenalgebra ebenfalls die Struktur einer Lie-Algebra mit der Lie-Klammer, die durch das $\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}$-fache des Kommutators gegeben ist.

Das Vorhandensein der Poisson-Struktur auf der klassischen Seite und der Lie-Struktur auf der quantenmechanischen Seite, die man mit Hilfe des Kommutators erhält, bildet nun einen Anknüpfungspunkt zwischen beiden Theorien. Da beide Lie-Strukturen verträglich mit der jeweiligen Algebra-Struktur sind, nämlich derivativ wirken, ist es naheliegend bei der Quantisierung eine Entsprechung von Poisson-Klammern und einem Vielfachen des Kommutators anzustreben. Aus der kanonischen Vertauschungsrelation von Orten und Impulsen erhält man, daß der quantenmechanische Kommutator dem $\mathrm{i}\hbar$-fachen der klassischen Poisson-Klammer entsprechen soll. Fordert man nun aber eine exakte Entsprechung für alle relevanten Observablen, so ist diese Forderung zu stark, da das Groenewold-van Hove-Theorem [1, Thm. 5.4.9] besagt, daß dies selbst in einfachsten Fällen nur unter Verlust der Irreduzibilität der Darstellung zu erreichen ist. Der Ausweg aus dieser Situation, den man mit der Deformationsquantisierung wählt, besteht darin die Entsprechung von Kommutator und dem $\mathrm{i}\hbar$-fachen der Poisson-Klammer nur bis auf höhere Ordnungen in $\hbar$ zu fordern, was mit dem klassischen Limes verträglich ist. Weiter ist natürlich auch eine Entsprechung der *-Involutionen zumindest bis auf höhere Ordnungen in $\hbar$ aus Kompatibilitätsgründen mit dem klassischen Limes zu fordern. Stellt man sich auf den Standpunkt, daß eine in der klassischen Mechanik observable Größe auch in der Quantenmechanik observabel sein soll, so ist hier sogar eine exakte Entsprechung der jeweiligen *-Involutionen zu fordern. Diese exakte Entsprechung zu erreichen, erweist sich im Rahmen der Deformationsquantisierung tatsächlich als möglich.

1.1.2 Quantisierung auf $T^*\mathbb{R}^n$ via Ordnungs-Vorschriften

Als erstes Beispiel betrachten wir den Phasenraum $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ mit der kanonischen symplektischen Form $\omega_0 = dq^k \wedge dp_k$ und der hierdurch induzierten Poisson-Klammer. Die klassische Observablenalgebra ist also durch die glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^{2n}$ gegeben, zunächst wollen wir uns jedoch auf die Betrachtung von polynomialen Funktionen in den Orts- und Impulskoordinaten, d.h. Funktionen der Gestalt $(q,p) \mapsto q^{i_1} \dots q^{i_s} p_{j_1} \dots p_{j_t}$ beschränken. Im weiteren bezeichnen wir diese Funktionen mit $q^{i_1} \dots q^{i_s} p_{j_1} \dots p_{j_t}$ und fassen hierbei q^i und p_j als Funktionen auf $\mathbb{R}^{2n}$ auf, die wir als Koordinatenfunktionen bezeichnen. Wir wollen nun Funktionen dieser Gestalt in bijektiver Weise mit Differentialoperatoren auf den glatten Funktionen $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n_q)$ auf dem Unterraum $\mathbb{R}^n_q = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ von $\mathbb{R}^{2n}$ in Verbindung bringen. Zunächst legen wir fest, auf welche Operatoren die Koordinatenfunktionen q^i, p_j und die konstante Funktion 1 abgebildet werden sollen. Die von uns gewählte Zuordnung entspricht gerade der kanonischen Quantisierungsregel, das heißt wir definieren die Quantisierungsabbildung ϱ durch

$$\varrho : \begin{cases} 1 & \mapsto & \mathrm{id} \\ q^i & \mapsto & l_{q^i} \\ p_j & \mapsto & \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{q^j}, \end{cases} \tag{1.1}$$

wobei l_{q^i} die Linksmultiplikation mit der Koordinatenfunktion q^i bezeichnet. Da nun die Operatoren $\varrho(q^i)$, $\varrho(p_j)$ nicht miteinander kommutieren, sondern die kanonische Vertauschungsrelation $[\varrho(q^i), \varrho(p_j)] = -\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\delta^i_j \mathrm{id}$ erfüllen, ist es notwendig, um diese Abbildung in wohldefinierter Weise auf Polynome höheren Grades ausdehnen zu können, eine Ordnungs-Vorschrift zu wählen. Wir entscheiden uns zunächst für die Standard-Ordnungs-Vorschrift, welche darin besteht, vor der Ersetzung gemäß der Abbildung ϱ die Impulskoordinaten auf die rechte Seite zu schreiben. Umgekehrt bedeutet das bei gegebenem Differentialoperator, der im Bild der so definierten Abbildung liegt, diesen so umzuschreiben, daß alle Ableitungen auf der rechten Seite stehen, um dann durch die rückgängige Ersetzung die entsprechende in den Orts- und Impulskoordinaten polynomiale Funktion zu erhalten. Die somit auf diesen Funktionen erklärte Abbildung ϱ_{Std} ist offensichlich injektiv und es gilt

$$\varrho_{\mathrm{Std}}(q^{i_1}\dots q^{i_s} p_{j_1}\dots p_{j_t}) = \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^t l_{q^{i_1}\dots q^{i_s}} \frac{\partial^t}{\partial q^{j_1}\cdots\partial q^{j_t}}. \tag{1.2}$$

Mit Hilfe der kanonischen Vertauschungsregel läßt sich nun das Operatorprodukt der Bilder zweier Polynome unter ϱ_{Std} wieder in standard-geordneter Form schreiben, weshalb aufgrund der Injektivität von ϱ_{Std} für zwei in den Koordinaten polynomiale Funktionen F, G durch das Zurückziehen des Operatorproduktes eine assoziative Verknüpfung $\star_{\mathrm{Std}}$ durch

$$F \star_{\mathrm{Std}} G := \varrho^{-1}_{\mathrm{Std}}(\varrho_{\mathrm{Std}}(F)\varrho_{\mathrm{Std}}(G)) \tag{1.3}$$

definiert werden kann, welche ihnen wiederum eine in den Koordinaten polynomiale Funktion zuordnet, die zusätzlich polynomial von $\hbar$ abhängt. Das so definierte assoziative Produkt auf den in den Koordinaten polynomialen Funktionen hat die folgende explizite Gestalt

$$F \star_{\mathrm{Std}} G = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^l \frac{\partial^l F}{\partial p_{i_1}\cdots\partial p_{i_l}} \frac{\partial^l G}{\partial q^{i_1}\cdots\partial q^{i_l}}, \tag{1.4}$$

wobei die Summe über l bei einem endlichen Index abbricht, der von der Ordnung der Polynome F und G abhängt (vgl. [86, Abschnitt 2.5]). Offensichtlich kann man ϱ_{Std} als Darstellung der Algebra der in den Koordinaten polynomialen Funktionen mit dem Produkt $\star_{\mathrm{Std}}$ aufgefaßt werden und wird entsprechend Standard-Darstellung genannt und $\star_{\mathrm{Std}}$ das standard-geordnete Produkt. Wir bemerken zunächst, daß $F \star_{\mathrm{Std}} G$ in nullter Ordnung von $\hbar$ mit dem punktweisen Produkt übereinstimmt und daß die erste Ordnung in $\hbar$ des Kommutators (die nullte verschwindet) durch $\mathrm{i}\{F, G\}$ gegeben ist, womit tatsächlich gezeigt ist, daß der Kommutator des Quantenproduktes zumindest bis auf höhere Ordnungen in $\hbar$ dem $\mathrm{i}\hbar$-fachen der Poisson-Klammer der entsprechenden klassischen Observablen entspricht. Die Entsprechung ist sogar exakt, wenn eine der beiden Funktionen höchstens linear in den Koordinatenfunktionen ist. Weiter gilt, daß das Produkt $\star_{\mathrm{Std}}$ in jeder Ordnung in $\hbar$ durch Bidifferentialoperatoren beschrieben wird, die zudem in der Ordnung $\hbar^r$ von der Ordnung r in jedem Argument sind. Zudem ist die konstante Funktion 1 offensichtlich das Einselement bezüglich $\star_{\mathrm{Std}}$.

Zwar ist die Standard-Ordnung die einfachste Ordnungs-Vorschrift, die man verwenden kann um polynomialen Funktionen auf $T^*\mathbb{R}^n$ Operatoren zuzuordnen; aus physikalischen Gründen ist sie jedoch als Operatorordnung zu verwerfen. Um dies einzusehen schränken wir die durch ϱ_{Std} erhaltenen Differentialoperatoren auf den Prä-Hilbert-Raum $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_q^n)$ der Funktionen mit kompaktem Träger mit dem üblichen L^2-Produkt bezüglich des Lebesgue-Maßes ein und bestimmen für eine in den Koordinaten polynomiale Funktion F den zu $\varrho_{\mathrm{Std}}(F)$ formal adjungierten Operator $\varrho_{\mathrm{Std}}(F)^\dagger$, der für $\phi, \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_q^n)$ durch

$$\int_{\mathbb{R}_q^n} \overline{(\varrho_{\mathrm{Std}}(F)^\dagger\phi)(q)}\psi(q)d^nq = \int_{\mathbb{R}_q^n} \overline{\phi(q)}(\varrho_{\mathrm{Std}}(F)\psi)(q)d^nq$$

definiert ist. Durch sukzessive partielle Integration kann man zeigen, daß $\varrho_{\mathrm{Std}}(F)^\dagger$ folgendermaßen geschrieben werden kann

$$\varrho_{\mathrm{Std}}(F)^\dagger = \varrho_{\mathrm{Std}}(N^2\overline{F}), \tag{1.5}$$

wobei der Operator N durch

$$N = \exp\left(\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\Delta\right) \qquad \text{mit} \qquad \Delta = \partial_{q^k}\partial_{p_k} \tag{1.6}$$

gegeben ist. Offenbar bildet N in den Koordinaten polynomiale Funktionen wieder auf solche ab und ist bijektiv. Da nun ϱ_{Std} gemäß (1.5) reelle Polynome nicht notwendigerweise auf formal selbstadjungierte Operatoren abbildet, ist diese Ordnungs-Vorschrift physikalisch unbefriedigend. Gleichung (1.5) legt nun aber nahe, durch

$$\varrho_{\mathrm{Weyl}}(F) := \varrho_{\mathrm{Std}}(NF) \tag{1.7}$$

eine andere Abbildung, die einer polynomialen Funktion einen Differentialoperator zuordnet, zu definieren, da für diese Zuordnung dann

$$\varrho_{\mathrm{Weyl}}(F)^\dagger = \varrho_{\mathrm{Std}}(NF)^\dagger = \varrho_{\mathrm{Std}}(N^2\overline{NF}) = \varrho_{\mathrm{Std}}(N\overline{F}) = \varrho_{\mathrm{Weyl}}(\overline{F})$$

gilt, womit reellen Polynomen durch ϱ_{Weyl} formal selbst-adjungierte Operatoren zugeordnet werden. Ferner stellt man fest, daß auch hier $\varrho_{\mathrm{Weyl}}(q^i) = l_{q^i}$, $\varrho_{\mathrm{Weyl}}(p_j) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\partial_{q^j}$ und $\varrho_{\mathrm{Weyl}}(1) = \mathrm{id}$ gilt, so daß die kanonische Vertauschungsrelation durch die obige Modifikation erhalten bleibt, und ϱ_{Weyl} eine durch eine andere Ordnungs-Vorschrift aus der Zuordnung (1.1) definierte Abbildung ist. In der Tat kann man zeigen, daß ϱ_{Weyl} einer in den Orts- und Impulskoordinaten polynomialen Funktion gerade das vollständig symmetrisierte Polynom der Operatoren $\varrho(q^i)$ und $\varrho(p_j)$ zuordnet, was gerade der Weylschen Symmetrisierungs-Vorschrift entspricht (vgl. [86, Abschnitt 2.5]). Analog zur Definition von $\star_{\mathrm{Std}}$ erhalten wir nun, da ϱ_{Weyl} offensichtlich injektiv ist, da ϱ_{Std} injektiv ist und N bijektiv ist, ein neues Produkt $\star_{\mathrm{Weyl}}$ durch

$$F \star_{\mathrm{Weyl}} G := \varrho_{\mathrm{Weyl}}^{-1}(\varrho_{\mathrm{Weyl}}(F)\varrho_{\mathrm{Weyl}}(G)), \tag{1.8}$$

wobei die offensichtliche Tatsache eingeht, daß das Bild von ϱ_{Weyl} abgeschlossen unter Operatorverkettung ist. Auch hier ist das definierte Produkt $\star_{\mathrm{Weyl}}$ wieder assoziativ und wir erhalten

$$\begin{aligned} &\varrho_{\mathrm{Std}}(N(F \star_{\mathrm{Weyl}} G)) \\ &\quad= \varrho_{\mathrm{Weyl}}(F \star_{\mathrm{Weyl}} G) = \varrho_{\mathrm{Weyl}}(F)\varrho_{\mathrm{Weyl}}(G) = \varrho_{\mathrm{Std}}(NF)\varrho_{\mathrm{Std}}(NG) = \varrho_{\mathrm{Std}}((NF) \star_{\mathrm{Std}} (NG)), \end{aligned}$$

so daß also wegen der Injektivität von ϱ_{Std} folgende Beziehung zwischen $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{Std}}$ besteht:

$$F \star_{\mathrm{Weyl}} G = N^{-1}((NF) \star_{\mathrm{Std}} (NG)). \tag{1.9}$$

Das heißt aber, daß N ein Algebra-Isomorphismus zwischen $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{Std}}$ jeweils auf den in den Koordinaten polynomialen Funktionen ist. In völliger Analogie zu der Situation für ϱ_{Std} kann man ϱ_{Weyl} als Darstellung bezüglich des Produktes $\star_{\mathrm{Weyl}}$ auffassen, die man Weyl-Darstellung oder Schrödinger-Darstellung nennt. Bezeichnet man mit $\mu(F \otimes G) = FG$ die punktweise Multiplikation, so läßt sich mit (1.9) und der expliziten Gestalt von $\star_{\mathrm{Std}}$ zeigen, daß $\star_{\mathrm{Weyl}}$ explizit durch

$$F \star_{\mathrm{Weyl}} G = \mu \circ \exp\left(\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\partial_{p_k} \otimes \partial_{q^k} - \partial_{q^k} \otimes \partial_{p_k}\right)\right)(F \otimes G) \tag{1.10}$$

gegeben ist (vgl. [86, Abschnitt 2.5]). Anhand dieser Formel macht man sich sofort klar, daß die nullte Ordnung in $\hbar$ gerade das punktweise Produkt ist und die erste Ordnung in $\hbar$ durch $\frac{\mathrm{i}}{2}\{F, G\}$ gegeben ist, so daß der Kommutator bezüglich $\star_{\mathrm{Weyl}}$ bis auf höhere Ordnungen in $\hbar$ dem $\mathrm{i}\hbar$-fachen der Poisson-Klammer entspricht. Ferner wird $\star_{\mathrm{Weyl}}$ ebenso wie $\star_{\mathrm{Std}}$ in der Ordnung $\hbar^r$ durch Bidifferentialoperatoren der Ordnung (r, r) beschrieben und die konstante Funktion 1 ist wieder das Einselement bezüglich $\star_{\mathrm{Weyl}}$. Der entscheidende Unterschied, der zwischen $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{Std}}$ besteht, ist die Tatsache, daß die komplexe Konjugation ein antilinearer Antiautomorphismus von $\star_{\mathrm{Weyl}}$ ist, wohingegen dies für $\star_{\mathrm{Std}}$ nicht der Fall ist. Diese Eigenschaft spiegelt die physikalisch wünschenswerte Eigenschaft von ϱ_{Weyl} wider, reelle Polynome in den Koordinatenfunktionen auf formal selbstadjungierte Operatoren abzubilden, denn es gilt

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{Weyl}}(\overline{F \star_{\mathrm{Weyl}} G}) &= \varrho_{\mathrm{Weyl}}(F \star_{\mathrm{Weyl}} G)^\dagger = (\varrho_{\mathrm{Weyl}}(F)\varrho_{\mathrm{Weyl}}(G))^\dagger = \varrho_{\mathrm{Weyl}}(G)^\dagger \varrho_{\mathrm{Weyl}}(F)^\dagger \\
&= \varrho_{\mathrm{Weyl}}(\overline{G})\varrho_{\mathrm{Weyl}}(\overline{F}) = \varrho_{\mathrm{Weyl}}(\overline{G} \star_{\mathrm{Weyl}} \overline{F}),
\end{aligned}$$

so daß wegen der Injektivität von ϱ_{Weyl} das behauptete Verhalten von $\star_{\mathrm{Weyl}}$ unter komplexer Konjugation, also

$$\overline{F \star_{\mathrm{Weyl}} G} = \overline{G} \star_{\mathrm{Weyl}} \overline{F} \tag{1.11}$$

folgt.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch erwähnt, daß man analog zur Standard-Ordnung die Anti-Standard-Ordnung ϱ_{AStd} dadurch definieren kann, daß man vor der Ersetzung gemäß (1.1) alle Impulse auf die linke Seite schreibt. Das resultierende Produkt $\star_{\mathrm{AStd}}$, das man das anti-standardgeordnete Produkt nennt, besitzt dann die zu den Eigenschaften von $\star_{\mathrm{Std}}$ und $\star_{\mathrm{Weyl}}$ analogen Eigenschaften. Ebenso wie $\star_{\mathrm{Std}}$ erfüllt aber $\star_{\mathrm{AStd}}$ die physikalisch notwendige Gleichung (1.11) nicht. Explizit erhält man

$$F \star_{\mathrm{AStd}} G = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\right)^l \frac{\partial^l F}{\partial q^{i_1} \cdots \partial q^{i_l}} \frac{\partial^l G}{\partial p_{i_1} \cdots \partial p_{i_l}}, \tag{1.12}$$

woran die oben genannten Eigenschaften leicht überprüft werden können. Die Beziehungen zwischen den Produkten $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{AStd}}$ sind in unseren Arbeiten [18, 19, 17, 86] und in der Dissertation [109] ausführlich diskutiert worden, wo wir deren Verallgemeinerungen auf beliebige Kotangentenbündel behandelt haben. Die Produkte $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{AStd}}$ besitzen noch eine weitere spezielle Eigenschaft, die eine Verallgemeinerung auf beliebige Kotangentenbündel zuläßt. Hierzu betrachten wir $\hbar$ als eine zusätzliche Variable, von der die betrachteten Funktionen polynomial abhängen und definieren den Differentialoperator

$$\mathcal{H} := \hbar \partial_\hbar + \mathcal{L}_\xi, \tag{1.13}$$

wobei $\xi = p_i \partial_{p_i}$ das kanonische Liouville-Vektorfeld auf $T^*\mathbb{R}^n$ bezeichnet, welches man unter Verwendung der kanonischen Einsform $\theta_0 = p_i dq^i$ mit $\omega_0 = -d\theta_0$ durch $i_\xi \omega_0 = -\theta_0$ definiert. Offensichtlich gilt dann $\mathcal{L}_\xi \omega_0 = \omega_0$ und anhand der expliziten Gestalt der Produkte $\star_{\text{Std}}$, $\star_{\text{Weyl}}$ und $\star_{\text{AStd}}$ weist man leicht nach, daß $\mathcal{H}$ eine Derivation dieser Produkte ist. Diese Eigenschaft kann man auch leicht anhand der Eigenschaft der drei Darstellungen ϱ_{Std}, ϱ_{Weyl} und ϱ_{AStd} nachweisen, indem man beachtet, daß diese für alle in den Koordinatenfunktionen und in $\hbar$ polynomialen Funktionen F die folgende Homogenitätseigenschaft besitzen:

$$[\hbar\partial_\hbar, \varrho_\diamond(F)] = \varrho_\diamond(\mathcal{H}F), \tag{1.14}$$

wobei $\diamond$ für Std, Weyl oder AStd steht. Physikalisch gedeutet bedeutet diese Homogenität, daß der der Impulskomponente p_l entsprechende Operator die physikalische Dimension eines Impulses besizt, welche mit der Dimension von $\hbar$ dividiert durch Länge (der Dimension von q^j) übereinstimmt.

Ein letztes Beispiel, das wir an dieser Stelle anführen wollen ist die in Anlehnung an die in der Quantenfeldtheorie Verwendung findende Normal- oder Wick-Ordnung definierte Ordnungs-Vorschrift. Man bildet hierzu aus den kanonischen Koordinaten $q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n$ von $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ die komplexen Koordinaten $z^1, \ldots, z^n$ bzw. $\overline{z}^1, \ldots, \overline{z}^n$ durch

$$z^k = q^k + \mathrm{i}p_k \qquad \text{und} \qquad \overline{z}^k = q^k - \mathrm{i}p_k \tag{1.15}$$

und schreibt in den Koordinaten (q, p) polynomiale Funktionen in in den komplexen Koordinaten $(z, \overline{z})$ polynomiale Funktionen um. Die kanonische symplektische Form ω_0 besitzt dabei in den komplexen Koordinaten die Gestalt $\omega_0 = \frac{\mathrm{i}}{2}\delta_{k\overline{l}} dz^k \wedge d\overline{z}^l$. Man betrachtet dann die Zuordnung

$$\varrho : \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & \mathrm{id} \\ \overline{z}^i & \mapsto & l_{\overline{z}^i} \\ z^j & \mapsto & 2\hbar\partial_{\overline{z}^j}, \end{array} \right. \tag{1.16}$$

wobei die Abbildungen auf der rechten Seite dieser Zuordnung als Differentialoperatoren auf den antiholomorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ verstanden werden. Die Wick-Ordnung besteht nun darin, in einer in den komplexen Koordinaten polynomialen Funktion zunächst alle z-Koordinaten auf die rechte Seite zu schreiben und dann die Ersetzung gemäß (1.16) vorzunehmen. Analog zur Vorgehensweise für $\star_{\text{Std}}$ erhält man durch Zurückziehen der Operatorverkettung das Wick-Produkt auf polynomialen Funktionen F, G durch

$$F \star_{\text{Wick}} G := \varrho_{\text{Wick}}^{-1}(\varrho_{\text{Wick}}(F)\varrho_{\text{Wick}}(G)) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(2\hbar)^l \delta^{i_1\overline{j}_1} \ldots \delta^{i_l\overline{j}_l} \frac{\partial^l F}{\partial z^{i_1} \cdots \partial z^{i_l}} \frac{\partial^l G}{\partial \overline{z}^{j_1} \cdots \partial \overline{z}^{j_l}}. \tag{1.17}$$

Auch dieses Produkt erweist sich als zum Weyl-Produkt isomorphes Produkt, wobei ein Algebra-Isomorphismus durch

$$S = \exp(\hbar\Delta') \qquad \text{mit} \qquad \Delta' = \delta^{k\overline{l}}\partial_{z^k}\partial_{\overline{z}^l} \tag{1.18}$$

gegeben ist, mit dem für alle Polynome F, G

$$F \star_{\text{Weyl}} G = S^{-1}((SF) \star_{\text{Wick}} (SG)) \tag{1.19}$$

gilt. Da S offensichtlich reell ist, vertauscht S mit der komplexen Konjugation und $\star_{\text{Wick}}$ besitzt ebenso wie $\star_{\text{Weyl}}$ die Involutionseigenschaft bezüglich komplexer Konjugation: $\overline{F \star_{\text{Wick}} G} = \overline{G} \star_{\text{Wick}} \overline{F}$. Weiter kann man wieder leicht verifizieren, daß $\star_{\text{Wick}}$ ebenso wie die bisher in diesem Abschnitt diskutierten Beispiele alle Eigenschaften besitzt, die unseren Forderungen an ein Quantenprodukt entsprechen. Ferner läßt sich in Analogie zur Anti-Standard-Ordnung auch eine Anti-Wick-Ordnung definieren, die wiederum auf ein solches Quantenprodukt, das Anti-Wick-Produkt bzw. Produkt mit Separation der Variablen $\star_{\mathrm{SdV}}$ (vgl. [67]) führt. Dieses ist explizit durch

$$F \star_{\mathrm{SdV}} G = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}(-2\hbar)^l \delta^{i_1\overline{j}_1} \ldots \delta^{i_l\overline{j}_l} \frac{\partial^l F}{\partial \overline{z}^{j_1} \cdots \partial \overline{z}^{j_l}} \frac{\partial^l G}{\partial z^{i_1} \cdots \partial z^{i_l}} \tag{1.20}$$

gegeben.

Wir wollen nun darauf hinarbeiten, die in diesen Beispielen beobachteten Eigenschaften der Quantenprodukte so weit zu axiomatisieren, daß solche Produkte auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten definiert werden können. Das offensichtlich größte Hindernis bei der Verallgemeinerung der Produkte stellt die Tatsache dar, daß es auf einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit keinen sinnvollen Begriff von polynomialen Funktionen gibt. Zwar kann man für beliebige Kotangentenbündel den Begriff der in den Impulsen polynomialen Funktionen definieren und hiermit eine Verallgemeinerung der Konstruktion von $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{AStd}}$ finden, was wir in unserer Arbeit [87] ausführlich diskutiert haben, aber damit ist man noch immer weit von dem Fall einer beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeit entfernt. Da es also im allgemeinen a priori keine besonders ausgezeichnete Funktionenklasse gibt, auf die man sich beschränken kann, lassen wir alle glatten Funktionen auf der symplektischen Mannigfaltigkeit als der quantenmechanischen Algebra zugrundeliegenden Vektorraum zu. Betrachtet man die expliziten Formeln (1.4), (1.10), (1.12), (1.17) und (1.20), so wird klar, daß hierdurch für beliebige glatte Funktionen im allgemeinen keine wohldefinierten Ausdrücke mehr gegeben sind, jedoch machen die Produkte für beliebige glatte Funktionen Sinn, wenn man sie als formale Potenzreihe in $\hbar$ betrachtet. Andererseits ist aber auch nicht mehr zu erwarten, da man mit dem Borel-Lemma leicht zeigen kann, daß man immer glatte Funktionen finden kann, so daß die Ausdrücke für die Produkte $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$ für jedes $\hbar \neq 0$ divergieren. Trotz dieses unphysikalischen Verhaltens erweisen sich die formalen Potenzreihen als der richtige Weg zur Verallgemeinerung der obigen Produkte auf beliebige symplektische Mannigfaltigkeiten. Insbesondere können viele algebraische Eigenschaften wie beispielsweise die Assoziativität in diesem Rahmen bereits entschieden werden. In konkreten Fällen steht man dann nach erfolgter Konstruktion eines Quantenproduktes im formalen Rahmen vor der Aufgabe gewisse Unteralgebren zu finden, auf denen diese konvergieren. Für den Fall eines beliebigen Kotangentenbündels ist dies, wie wir in [18, 19, 86] gesehen haben, sehr einfach möglich. Das von uns im weiteren Verlauf der Arbeit betrachtete Konzept der Deformationsquantisierung eröffnet auch die Möglichkeit Produkte, die in enger Verwandtschaft zu den mit der Wick- bzw. Anti-Wick-Ordnung definierten Produkten stehen, auf beliebigen Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten zu definieren (vgl. Kapitel 3).

1.2 Sternprodukte

1.2.1 Definition von Sternprodukten

Das Bestreben der Definition von Sternprodukten ist eine Axiomatisierung der bei den speziellen Quantisierungs-Vorschriften auf $T^*\mathbb{R}^n$ gefundenen Eigenschaften der induzierten Produkte, die eine Formulierung der Deformationsquantisierung auf beliebigen Phasenräumen erlaubt. Hierbei stellen wir die algebraischen Aspekte in den Vordergrund, die eine physikalisch sinnvolle Quantisierung besitzen soll, um diese von funktional-analytischen Fragestellungen, wie der Darstellung der Observablen als Operatoren in einem Hilbert-Raum, zu trennen. Die geometrischen Eigenschaften des Phasenraumes treten hierbei zunächst in den Hintergrund und werden durch eine algebraische Beschreibung abgelöst, wenngleich sich einige topologische Eigenschaften des Phasenraumes bei weitergehenden Untersuchungen, wie der Klassifikation von Sternprodukten, dennoch als wichtig erweisen werden.

Die grundlegende Idee der Deformationsquantisierung besteht darin, die zu findende quantenmechanische Observablenalgebra nicht als neues, abstraktes Objekt zu suchen, um dann eine dem Korrespondenzprinzip Rechnung tragende Beziehung zu den klassischen Observablen herzustellen, sondern den Vektorraum der Funktionen auf dem Phasenraum mit einem neuen assoziativen Produkt zu versehen, das dem quantenmechanischen Operatorprodukt entsprechen soll. Der entscheidende Vorteil dieser Vorgehensweise besteht offenkundig darin, daß die Korrespondenz zwischen klassischen und quantenmechanischen Observablen durch die Identitätsabbildung auf dem Vektorraum der Funktionen auf dem Phasenraum gegeben ist. Weiter können auf klassischer Seite vorhandene Symmetrieeigenschaften des Phasenraumes in die quantenmechanische Beschreibung übertragen werden, so daß man leicht formulieren kann, welche Bedingungen man an das neue Produkt stellen muß, damit es die vorhandene Symmetrie des Phasenraumes respektiert, bzw. widerspiegelt.

Hat man nun eine quantenmechanische Observablenalgebra konstruiert, so besteht der nächste Schritt in der Konstruktion von Darstellungen dieser Algebra in Hilbert-Räumen, was den Anschluß an die übliche Quantenmechanik darstellt. Im Rahmen der Deformationsquantisierung kann ein erster Schritt in diese Richtung mit einer Verallgemeinerung der GNS-Konstruktion getan werden, indem man aufbauend auf der Vorgabe positiver Funktionale auf der deformierten Algebra Prä-Hilbert-Räume und die durch diese Funktionale auf diesen Räumen induzierten Darstellungen betrachtet.

Eine offenkundige Schwierigkeit des angestrebten Konzepts der Konstruktion der Observablenalgebra besteht in der richtigen Auswahl der betrachteten Funktionen auf dem Phasenraum. In konkreten Fällen kann eine solche Auswahl zwar häufig physikalisch motiviert werden, hängt aber in der Regel zu spezifisch von der Situation ab, als daß man hierzu ein allgemeingültiges Konzept entwickeln könnte. Deshalb sieht man sich bei der Deformationsquantisierung im allgemeinen zunächst gezwungen, alle glatten Funktionen auf dem Phasenraum zu betrachten und erst nach erfolgter Konstruktion des deformierten Produktes eine Auswahl zu treffen, indem man zusätzliche Konvergenzbedingungen stellt. In der Tat lassen sich in der Regel die deformierten Produkte für alle glatten Funktionen nur im Rahmen formaler Potenzreihen definieren, wie wir es schon für die Beispiele auf $T^*\mathbb{R}^n$ gesehen haben. Trotz dieser vom physikalischen Standpunkt unbefriedigenden Eigenschaft erweist sich die Deformationsquantisierung als reichhaltig genug, um in diesem formalen Rahmen viele Aspekte der Quantisierung, die rein algebraischer Natur sind, befriedigend herauszuarbeiten.

Nach diesen Vorbemerkungen geben wir nun die genaue Definition eines Sternproduktes, wie es von Bayen, Flato, Frønsdal, Lichnerowicz und Sternheimer in [8] eingeführt wurde, an. Wir benennen den formalen Parameter mit ν, und reservieren das Symbol $\hbar$ für das Plancksche Wirkungsquantum, wobei in konvergenten Situationen ν durch $\mathrm{i}\hbar$ zu ersetzen ist, so daß wir den formalen Parameter als rein imaginär betrachten. Diese Konvention birgt eher pragmatische denn philosophische Gründe, da somit das häufige Auftreten von i und die damit einhergehenden Vorzeichenprobleme vermieden werden, wenngleich diese Konvention in der Regel in der mathematischen Literatur Verwendung findet, wohingegen in den Arbeiten der Physiker der formale Parameter λ verwendet wird, der in konvergenten Situationen direkt mit $\hbar$ zu identifizieren ist, und somit als reell angesehen wird.

Definition 1.2.1 ([8]) *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und bezeichne $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ die von ω auf den glatten Funktionen $C^\infty(M)$ auf M induzierte Poisson-Klammer. Dann heißt eine*

$\mathbb{C}[[\nu]]$*-bilineare Abbildung*

$$\star : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \times \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],$$

die für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *als formale Reihe in* ν

$$f \star g = \sum_{r=0}^{\infty} \nu^r C_r(f, g)$$

mit $\mathbb{C}$*-bilinearen Abbildungen* $C_r : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *geschrieben werden kann, ein lokales Sternprodukt für* (M, ω)*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:*

i.) $\star$ *ist assoziativ:* $f \star (g \star h) = (f \star g) \star h \quad \forall f, g, h \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$.

ii.) $\star$ *ist eine Deformation des punktweisen Produktes:* $C_0(f, g) = fg \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

iii.) $\star$ *ist eine Deformation in Richtung der Poisson-Klammer:* $C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}$ $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

iv.) Die konstante Funktion 1 *ist Einselement für* $\star$*:* $f \star 1 = 1 \star f = f \quad \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$.

v.) $\star$ *ist lokal:* $\mathrm{supp}(C_r(f, g)) \subseteq \mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g) \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), \forall r \in \mathbb{N}$.

Anhand der expliziten Gestalt der Produkte $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$ auf $T^*\mathbb{R}^n$ macht man sich leicht klar, daß diese gerade den Anforderungen der gemachten Definition genügen, also Sternprodukte auf $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ definieren. Insbesondere ist die Lokalität gewährleistet, da die zugehörigen Abbildungen C_r sogar Bidifferentialoperatoren sind. Diese grundlegenden Beispiele stellen die Motivation für die folgende Definition dar.

Definition 1.2.2 ([11, Def. 1.1]) *Ein lokales Sternprodukt im Sinne der Definition 1.2.1 heißt differentielles Sternprodukt, falls die dort eingeführten* $\mathbb{C}$*-bilinearen Abbildungen* $C_r : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *für alle* $r \in \mathbb{N}$ *Bidifferentialoperatoren sind.*

Im weiteren Verlauf der Arbeit betrachten wir ausschließlich differentielle Sternprodukte und vereinbaren daher zur Vereinfachung der Sprechweise, den Terminus Sternprodukt synonym für differentielles Sternprodukt zu verwenden, ohne diese Eigenschaft immer zu betonen.

Weiter beobachtet man an den Beispielen $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$, daß die Bidifferentialoperatoren C_r in der r-ten Ordnung des formalen Parameters ν in beiden Argumenten von der Differentiationsordnung r sind. Da die Differentiationsordnung eines Differentialoperators eine kartenunabhängig definierte Größe ist, ist folgende Begriffsbildung auch für beliebige symplektische Mannigfaltigkeiten sinnvoll.

Definition 1.2.3 ([104]) *Ein Sternprodukt heißt vom Vey-Typ, falls die Bidifferentialoperatoren* C_r *für alle* $r \in \mathbb{N}$ *von der Ordnung* (r, r) *sind.*

Als ein erstes Ergebnis der in Abschnitt 1.1.2 betrachteten Beispiele und der gemachten Definitionen können wir nun folgende Proposition formulieren:

Proposition 1.2.4 *Definiert man für* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ *die Produkte* $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ *und* $\star_{\mathrm{SdV}}$ *durch die Gleichungen (1.4), (1.10), (1.12), (1.17) und (1.20), indem man in diesen* $\hbar$ *durch* $-\mathrm{i}\nu$ *ersetzt, und setzt diese durch Forderung nach* $\mathbb{C}[[\nu]]$*-Bilinearität zu Produkten* $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$, $\star_{\mathrm{SdV}} : \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)[[\nu]] \times \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)[[\nu]]$ *fort, so sind* $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ *und* $\star_{\mathrm{SdV}}$ *differentielle Sternprodukte für* $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ *vom Vey-Typ.*

Eine nähere Betrachtung der Beispiele $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$ gibt noch zu einigen weiteren in allgemeinerem Rahmen formulierbaren speziellen Begriffen von Typen von Sternprodukten Anlaß. So läßt sich das Verhalten von $\star_{\mathrm{Weyl}}$ unter komplexer Konjugation und die Symmetrie bzw. Antisymmetrie der Operatoren C_r für Sternprodukte auf beliebigen Mannigfaltigkeiten formulieren, was einen zum Begriff des Sternproduktes vom Weyl-Typ führt (vgl. Abschnitt 2.4.4). Weiter führt einen das Verhalten von $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$ unter komplexer Konjugation zur Definition von Sternprodukt-Algebren mit *-Struktur (vgl. Abschnitt 2.4.2). Die Eigenschaft von $\star_{\mathrm{Std}}$, daß die Bidifferentialoperatoren C_r im ersten Argument nur in Impulsrichtung differenzieren, läßt sich auf beliebigen Kotangentenbündeln formulieren und führt zum Begriff des standard-geordneten Sternproduktes, sowie die Eigenschaft der Bidifferentialoperatoren, die $\star_{\mathrm{AStd}}$ beschreiben, im zweiten Argument nur in Impulsrichtung zu differenzieren zum Begriff des anti-standard-geordneten Sternproduktes führt (vgl. [18, 19, 17, 86, 109]). Ferner ist für alle drei Sternprodukte $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$ und $\star_{\mathrm{AStd}}$ der Homogenitätsoperator $\mathcal{H} = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_\xi$ mit dem kanonischen Liouville-Vektorfeld $\xi = p_i\partial_{p_i}$ eine Derivation. Da sich das kanonische Liouville-Vektorfeld ξ mit der kanonischen Einsform θ_0 völlig analog durch $i_\xi\omega_0 = -\theta_0$ auf beliebigen Kotangentenbündeln (T^*Q, ω_0) einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit Q, wobei ω_0 die kanonische symplektische Form bezeichne, definieren läßt, kann man auf beliebigen Kotangentenbündeln (T^*Q, ω_0) den Begriff eines homogenen Sternproduktes dadurch einführen, daß ein Sternprodukt auf (T^*Q, ω_0) homogen heißt, falls $\mathcal{H}$ eine Derivation dieses Sternproduktes ist (vgl. [32] und unsere Arbeiten [18, 19, 17, 86]). Weiter läßt sich die Struktur der Bidifferentialoperatoren C_r von $\star_{\mathrm{Wick}}$, die im ersten Argument nur in holomorphe und im zweiten Argument nur in antiholomorphe Richtung differenzieren, auf beliebige Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten übertragen. Solche Sternprodukte nennt man dann Sternprodukte vom Wick-Typ, denen wir uns in Kapitel 3 ausführlich widmen wollen. Die analoge Eigenschaft des Sternproduktes $\star_{\mathrm{SdV}}$, bei dem die Bidifferentialoperatoren im ersten Argument nur in antiholomorphe und im zweiten Argument nur in holomorphe Richtungen differenzieren, überträgt sich ebenfalls auf beliebige Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten; derartige Sternprodukte nennt man Sternprodukte mit Separation der Variablen.

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß die Definition eines Sternproduktes nur von der Poisson-Struktur Gebrauch macht, die nicht notwendigerweise durch eine symplektische Form induziert sein muß, so daß man nicht die im symplektischen Fall geltende Nichtausgeartetheit des Poisson-Tensors benötigt, um von Sternprodukten reden zu können und Definition 1.2.1 auf beliebige Poisson-Mannigfaltigkeiten (M, Λ) zu übertragen.

1.2.2 Existenz von Sternprodukten

Natürlich stellt sich im Anschluß an die Definition von Sternprodukten die Frage nach der Existenz solcher Deformationen. Der Versuch der schrittweisen Konstruktion eines Sternproduktes führt einen in der Tat auf ein kohomologisches Problem (vgl. Abschnitt 2.1.1), so daß hierbei mit Obstruktionen und zwar in der dritten Hochschild-Kohomologie der zugrundeliegenden Algebra zu rechnen ist. Dieses Problem ergibt sich aus der Forderung der Assoziativität, die tatsächlich die einschneidendste Bedingung in Definition 1.2.1 darstellt. Es muß also mit zusätzlichen Argumenten gezeigt werden, daß diese Obstruktionen de facto vermieden werden können, da sich die betreffende Kohomologie als isomorph zu $\Gamma^\infty(\bigwedge^3 TM)$ also für $\dim(M) \geq 3$ keineswegs trivial erweist. Die nachfolgend erwähnten Existenzsätze zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist:

Zunächst haben Neroslavski und Vlassov in [83] durch eine kohomologische Analyse zeigen können, daß die dritte de Rham-Kohomologie von M als mögliche Quelle von Obstruktionen auftritt, so daß falls $H^3_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C}) = 0$ erfüllt ist, die Existenz von Sternprodukten gesichert ist. Wenig später zeigten Cahen und Gutt in [26], daß für Kotangentenbündel parallelisierbarer Mannigfaltigkeiten immer Sternprodukte existieren, was in [32] von DeWilde und Lecomte kurz darauf auf beliebige Kotangentenbündel ausgedehnt wurde. Im selben Jahr gelang diesen Autoren in [33] auch der Nachweis der Existenz von Sternprodukten auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten, der in [34] eine Erweiterung um ein Klassifikationsresultat erfuhr. Unabhängig davon gab Fedosov in [42, 43, 44] einen lange Zeit unbeachteten Existenzbeweis, der erst durch die Arbeit [45] allgemein bekannt wurde und auf einer eleganten, expliziten Konstruktion von Sternprodukten basiert, auf die wir in Abschnitt 1.3 noch näher eingehen werden. Einen dritten Existenzbeweis für symplektische Mannigfaltigkeiten erbrachten Omori, Maeda und Yoshioka in [90]. Insgesamt ist die Existenz von Sternprodukten hiermit für beliebige symplektische Mannigfaltigkeiten gesichert, was einen entscheidenden Vorteil gegenüber anderen Methoden wie zum Beispiel der geometrischen Quantisierung darstellt, die eine mit topologischen Bedingungen verbundene Existenz von Prä-Quantenbündeln voraussetzt.

Satz 1.2.5 ([33, 42, 90]) *Auf jeder symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) existiert ein (sogar differentielles) Sternprodukt.*

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß Kontsevich in [74] die Existenz von Sternprodukten für beliebige Poisson-Tensoren auf $\mathbb{R}^n$ nachgewiesen hat. Ein Nachweis der Existenz für beliebige Mannigfaltigkeiten ergibt sich mit dem dortigen Beweis, indem man die in [75, 105] formulierte formality conjecture beweist. Für eine weiterführende Diskussion der Deformationsquantisierung von Poisson-Mannigfaltigkeiten verweisen wir auf [89], wo auch physikalische Aspekte diskutiert werden und auf [29], wo eine angepaßte Version der Fedosov-Konstruktion Verwendung findet, um mit der Existenz von Sternprodukten für Poisson-Strukturen auf $\mathbb{R}^n$ auf die Existenz auf beliebigen Mannigfaltigkeiten zu schließen.

1.2.3 Äquivalenz von Sternprodukten

Wie man schon an den Beispielen auf $T^*\mathbb{R}^n$ erkennt, gibt es zu einer gegebenen symplektischen Mannigfaltigkeit kein eindeutig bestimmtes Sternprodukt. Vielmehr sind in diesen Beispielen verschiedene Sternprodukte die Konsequenz verschiedener Wahlen von Ordnungs-Vorschriften, dennoch sind die Algebren auf eine mit dem klassischen Limes verträgliche Weise isomorph und man nennt sie in diesem Sinne äquivalent. Um dieser Vieldeutigkeit (die auf $T^*\mathbb{R}^n$ tatsächlich die Eindeutigkeit bis auf Wahl einer Ordnungs-Vorschrift bedeutet) von Sternprodukten im allgemeinen Rechnung zu tragen, definiert man die Äquivalenz von Sternprodukten folgendermaßen:

Definition 1.2.6 ([8]) *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Zwei lokale Sternprodukte $\star$ und $\star'$ heißen äquivalent, falls es eine formale Potenzreihe*

$$S = \mathrm{id} + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r S_r \tag{1.21}$$

von $\mathbb{C}$-linearen, lokalen Operatoren $S_r : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $S_r(1) = 0$ für $r \geq 1$ gibt, so daß

$$S(f \star g) = (Sf) \star' (Sg) \tag{1.22}$$

für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt.

Für differentielle Sternprodukte definiert man analog den Begriff der differentiellen Äquivalenz:

Definition 1.2.7 ([11, Def. 1.2]) *Seien $\star$ und $\star'$ zwei differentielle Sternprodukte auf (M, ω), die äquivalent im Sinne der Definition 1.2.6 sind, dann heißen $\star$ und $\star'$ differentiell äquivalent, falls die $\mathbb{C}$-linearen Operatoren S_r für alle $r \geq 1$ Differentialoperatoren sind.*

Tatsächlich kann man zeigen, daß es für differentielle Sternprodukte keinen Unterschied zwischen den beiden Begriffen der Äquivalenz gibt.

Satz 1.2.8 ([56, Thm. 2.22]) *Seien $\star$ und $\star'$ zwei differentielle Sternprodukte, die im Sinne der Definition 1.2.6 äquivalent sind, dann sind die $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen S_r für alle $r \geq 1$ Differentialoperatoren.*

Da wir uns in der vorliegenden Arbeit auf die Betrachtung von differentiellen Sternprodukten beschränken, meinen wir angesichts des obigen Satzes, wenn wir von Äquivalenz sprechen immer differentielle Äquivalenz ohne diese Eigenschaft der Äquivalenztransformation immer zu betonen.

Offensichtlich ist der oben eingeführte Äquivalenzbegriff tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Geht man umgekehrt von einem (differentiellen) Sternprodukt $\star$ und einer formalen Reihe S von lokalen Operatoren (von Differentialoperatoren) der Gestalt (1.21) mit $S_r(1) = 0$ für $r \geq 1$ aus, so definiert $f \star' g := S((S^{-1}f) \star (S^{-1}g))$ ein neues zu $\star$ äquivalentes (differentielles) Sternprodukt. Insbesondere ist wegen $S(1) = 1$ die konstante Funktion 1 wieder das Einselement und durch Betrachtung der nullten Ordnung in ν und des antisymmetrischen Anteils der ersten Ordnung in ν der Gleichung $S(f \star g) = (Sf) \star' (Sg)$ weist man leicht nach, daß $\star'$ die in Definition 1.2.1 gestellten Bedingungen erfüllt. Diese Vorgehensweise zur Definition neuer Sternprodukte wird häufig Verwendung finden, um Sternprodukte mit bestimmten zusätzlichen Eigenschaften aus bereits gefundenen zu konstruieren.

Auch hier erhalten wir aus den in Abschnitt 1.1.2 bzw. Proposition 1.2.4 betrachteten Beispielen ein erstes Ergebnis:

Proposition 1.2.9 *Die Sternprodukte $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$ auf $(T^*\mathbb{R}^n, \omega_0)$ sind alle zueinander äquivalent. Insbesondere gilt*

$$N^{-1}((Nf) \star_{\mathrm{Std}} (Ng)) = f \star_{\mathrm{Weyl}} g = N((N^{-1}f) \star_{\mathrm{AStd}} (N^{-1}g)) \tag{1.23}$$

und

$$S^{-1}((Sf) \star_{\mathrm{Wick}} (Sg)) = f \star_{\mathrm{Weyl}} g = S((S^{-1}f) \star_{\mathrm{SdV}} (S^{-1}g)) \tag{1.24}$$

für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(T^*\mathbb{R}^n)[[\nu]]$, wobei die Äquivalenztransformationen N und S explizit durch $N = \exp(-\frac{\nu}{2}\Delta)$ und $S = \exp(-\mathrm{i}\nu\Delta')$ mit $\Delta = \partial_{q^k}\partial_{p_k}$ und $\Delta' = \delta^{k\bar{l}}\partial_{z^k}\partial_{\overline{z}^l}$ gegeben sind.

Physikalisch gedeutet bedeutet der oben eingeführte Äquivalenzbegriff also eine Quantisierung bis auf Wahl einer Ordnungs-Vorschrift und eine derartige Freiheit bei der Wahl eines Sternproduktes ist insofern verständlich, als da aus rein klassischen Informationen eine bestimmte Ordnungs-Vorschrift bestenfalls motiviert aber keinesfalls zwingend festgelegt werden kann. Die Forderung, daß S in nullter Ordnung mit der Identität beginnt, stellt hierbei die Kompatibilität mit dem klassischen Limes sicher. Interessant ist nun natürlich die Fragestellung, ob es Sternprodukte gibt, die nicht in dem oben definierten Sinn äquivalent sind, so daß die Wahl einer Ordnungs-Vorschrift nicht die einzige Freiheit bei der Quantisierung darstellt. Über viele Jahre hinweg haben sich verschiedene Autoren im Zuge der verschiedenen Existenzbeweise auch mit der Fragestellung der Klassifikation von Sternprodukten bis auf Äquivalenz beschäftigt. Das gemeinsame Ergebnis dieser Untersuchungen ist, daß die Klassifikation topologische Eigenschaften der zugrundeliegenden symplektischen Mannigfaltigkeit involviert:

Satz 1.2.10 ([11, 31, 84, 85, 111]) *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, dann ist die Menge der Äquivalenzklassen von Sternprodukten in Bijektion mit $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$.*

Mit einfachen kohomologischen Methoden und mit Kenntnis der Hochschild-Kohomologie ist es leicht zu sehen, daß für den Fall $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C}) = 0$ alle Sternprodukte äquivalent sind (vgl. Proposition 2.1.2). Insbesondere sind hiermit alle Sternprodukte auf $T^*\mathbb{R}^n$ äquivalent, so daß die in Abschnitt 1.1.2 bzw. Proposition 1.2.9 gefundenen Beziehungen zwischen $\star_{\mathrm{Std}}$, $\star_{\mathrm{Weyl}}$, $\star_{\mathrm{AStd}}$, $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star_{\mathrm{SdV}}$ nicht weiter verwunderlich sind.

Die Vorgehensweisen zur Definition eines Elementes von $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ zu einer gegebenen Äquivalenzklasse von Sternprodukten ist in der Regel bei verschiedenen Autoren unterschiedlich. Bertelson, Cahen, Gutt zeigen in [11, Thm. 3.8], daß der antisymmetrische Anteil der Differenz der Bidifferentialoperatoren C_k und C'_k, die die Sternprodukte $\star$ und $\star'$ beschreiben, die bis zur Ordnung k übereinstimmen (d.h $C_i = C'_i \quad \forall 0 \leq i \leq k-1$), eine geschlossene Zweiform auf M liefert, und daß diese Sternprodukte genau dann äquivalent sind, wenn diese Zweiform exakt ist. Eine analoge Aussage liefert der überarbeitete Existenzbeweis von DeWilde, Lecomte in [34]. Fedosov kann in seiner Arbeit [45] zeigen, daß die mit seiner expliziten Konstruktion gewonnenen Sternprodukte, genau dann äquivalent sind, wenn die in die Konstruktion eingehenden formalen Reihen geschlossener Zweiformen kohomolog sind (vgl. Abschnitt 1.3), so daß auch hierdurch eine Klassifikation durch $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ nahegelegt, wenn auch nicht bewiesen, ist. Indem Nest und Tsygan in [84, 85] jedoch zeigen können, daß jedes Sternprodukt zu einem mit der ursprünglichen Fedosov-Konstruktion gewonnenen Sternprodukt äquivalent ist, ist klar, daß das Resultat von Fedosov eine allgemeine Klassifikation von Sternprodukten impliziert. In [31] führt Deligne ein Klassifikationsschema für Sternprodukte ein, das in kanonischer und funktorieller Weise eine Bijektion zwischen Äquivalenzklassen von Sternprodukten und Elementen von $\frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ liefert. Die einem Sternprodukt $\star$ zugeordnete Klasse $c(\star)$ nennt man die charakteristische Klasse. Mit dieser von Deligne gegebenen Definition stellt sich nun die Frage, wie die bisherigen Klassifikationsergebnisse in diesen funktoriellen Rahmen eingeordnet werden können. In Abschnitt 2.3 können wir zeigen, wie die charakteristische Klasse des ursprünglichen Fedosov-Sternproduktes mit der von Fedosov definierten, klassifizierenden Klasse in Beziehung steht. Hiermit ist dann aber auch die Brücke zu den Ergebnissen von Nest und Tsygan geschlagen, da deren Klassifikation auf dem Vergleich mit Fedosov-Sternprodukten basiert. Einen Überblick über die Arbeit von Deligne findet man in [56], wo insbesondere ein Vergleich mit der Klassifikationsmethode von DeWilde, Lecomte gegeben wird. Die für unsere Belange wichtigen Ergebnisse haben wir [56] folgend in 2.2 dargestellt. Für Sternprodukte mit Separation der Variablen auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit (vgl. Kapitel 3) hat Karabegov in [68] eine speziellere kohomologische Klassifikation gegeben, die auf der von Deligne eingeführten Klassifikationsmethode basiert.

1.3 Die verallgemeinerte Fedosov-Konstruktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Fedosov-Konstruktion von Sternprodukten studieren, da diese neben der Existenzaussage für Sternprodukte auf symplektischen Mannigfaltigkeiten eine explizite, rekursive Konstruktions-Vorschrift für Sternprodukte liefert. Da wir insbesondere an Sternprodukten mit speziellen Eigenschaften in Situationen interessiert sein werden, in denen die symplektische Mannigfaltigkeit zusätzliche Strukturen besitzt, etwa eine Kähler-Mannigfaltigkeit oder das Kotangentenbündel T^*Q einer Mannigfaltigkeit Q ist, nehmen wir im Vergleich zur ursprünglichen Fedosov-Konstruktion, wie sie in [45, 46] dargestellt ist, einige geringfügige Verallgemeinerungen vor. Zum Teil sind diese Verallgemeinerungen schon in den gemeinsamen Arbeiten mit M. Bordemann und S. Waldmann [18, 19] und in der Dissertation [109] verwendet worden.

1.3.1 Definitionen und Grundlagen

Diesen ersten Abschnitt verwenden wir, um die von uns verwendete Notation zu erklären und um die grundlegenden Definitionen bereitzustellen. Im weiteren sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann definieren wir

$$\mathcal{W}\otimes\Lambda(M) := (\mathsf{X}_{s=0}^{\infty}\mathbb{C}\,(\Gamma^{\infty}(\bigvee^{s}T^{*}M\otimes\bigwedge T^{*}M)))\,[[\nu]]. \tag{1.25}$$

Um die Notation nicht unnötig zu komplizieren, treffen wir die Vereinbarung, immer die komplexifizierten Bündel zu betrachten, ohne dies explizit zu erwähnen. Im weiteren werden wir oft von faktorisierten (homogenen) Schnitten in den Bündeln $\bigvee^{s}T^{*}M\otimes\bigwedge T^{*}M$ Gebrauch machen, um die Abbildungen zu definieren, welche für uns von Wichtigkeit sind. Damit sind Schnitte der Gestalt

$$F_j := \nu^{n_j}T_j\otimes\alpha_j$$

mit $T_j\in\Gamma^{\infty}(\bigvee^{s_j}T^{*}M)$, $\alpha_j\in\Gamma^{\infty}(\bigwedge^{a_j}T^{*}M)$ gemeint (j sei hierbei aus einer Indexmenge I). Auf solchen Schnitten definieren wir die Grad-Abbildungen $\deg_s, \deg_a, \deg_\nu$ durch

$$\deg_s F_j := s_jF_j,\quad \deg_a F_j := a_jF_j,\quad \deg_\nu F_j := \nu\partial_\nu F_j = n_jF_j$$

und erweitern linear zu Abbildungen

$$\deg_s, \deg_a, \deg_\nu : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)\to\mathcal{W}\otimes\Lambda(M).$$

Auf die entsprechenden Grade beziehen wir uns als symmetrischen, antisymmetrischen und ν-Grad. Für den Raum der Elemente in $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit antisymmetrischem Grad a schreiben wir $\mathcal{W}\otimes\Lambda^{a}(M)$ und für den Raum der Elemente mit antisymmetrischem Grad Null kurz $\mathcal{W}(M) := \mathcal{W}\otimes\Lambda^{0}(M)$. Einen Endomorphismus E von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ nennen wir (homogen) vom Grad (s,a,n), falls für homogenes F_1 wie oben definiert gilt, daß

$$\deg_s(EF_1) = (s+s_1)EF_1 \qquad \deg_a(EF_1) = (a+a_1)EF_1 \qquad \deg_\nu(EF_1) = (n+n_1)EF_1.$$

Für zwei Elemente $a, b\in\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ definieren wir ihr punktweises, undeformiertes, mit $ab = \mu(a\otimes b)$ bezeichnetes Produkt durch das symmetrische $\vee$-Produkt im ersten Tensorfaktor und das antisymmetrische $\wedge$-Produkt im zweiten Tensorfaktor. $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ wird durch dieses Produkt zu einer assoziativen, superkommutativen (d.h. $ab = (-1)^{|a||b|}ba$, für $\deg_a a = |a|a, \deg_a b = |b|b$) Algebra mit Eins. Offensichtlich sind die Grad-Abbildungen $\deg_s, \deg_a, \deg_\nu$ Derivationen des undeformierten Produktes und $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ ist bezüglich des antisymmetrischen Grades eine gradierte Algebra. Bezüglich des symmetrischen Grades und des ν-Grades ist $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ nur noch formal gradiert, da $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ nur noch das kartesische Produkt aber nicht die direkte Summe der jeweiligen homogenen Elemente ist. Mit $\sigma : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)\to\mathcal{C}^{\infty}(M)[[\nu]]$ bezeichnen wir die Abbildung, die auf den Unterraum mit symmetrischem und antisymmetrischem Grad Null projiziert, welche offensichtlich ein Homomorphismus des undeformierten Produktes ist. Für ein Vektorfeld $X\in\Gamma^{\infty}(TM)$ bezeichnen wir die symmetrische Einsetzabbildung in den symmetrischen Anteil eines Elementes von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $i_s(X)$ und mit $i_a(X)$ bezeichnen wir die antisymmetrische Einsetzabbildung in den antisymmetrischen Anteil. Offensichtlich sind $i_s(X)$ bzw. $i_a(X)$ Superderivationen vom Grad $(-1,0,0)$ bzw. $(0,-1,0)$. Wir betrachten nun faserweise assoziative formale Deformationen $\circ$ des undeformierten Produktes von der Form

$$a\circ b = \sum_{r=0}^{\infty}\nu^{r}\mu_r(a,b), \tag{1.26}$$

wobei $\mu_0(a,b) = ab$ das undeformierte Produkt sei und μ_r für $r \geq 1$ durch

$$\mu_r(a,b) := \mu_r^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_r} i_s(\partial_{i_1})\ldots i_s(\partial_{i_r}) a\, i_s(\partial_{j_1})\ldots i_s(\partial_{j_r}) b \tag{1.27}$$

gegeben sei. Hier bezeichnen ∂_i für $1 \leq i \leq \dim(M)$ Koordinatenvektorfelder in einer lokalen Karte von M und $\mu_r^{i_1\ldots i_r, j_1\ldots j_r}$ die Komponenten eines Tensorfeldes $\mu_r \in \Gamma^\infty(\bigvee^r TM \otimes \bigvee^r TM)$ bezüglich dieser Karte. Die Bedingung der Assoziativität von $\circ$ liefert offensichtlich algebraische Bedingungen an die Tensorfelder μ_r, die aber in den von uns konkret betrachteten Fällen erfüllt sein wird. Da derartige Deformationen den antisymmetrischen Grad unberührt lassen, ist $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ)$ eine $\deg_a$-gradierte Algebra. Dagegen ist das deformierte Produkt im allgemeinen weder formal $\deg_s$- noch $\deg_\nu$-gradiert. Aufgrund der speziellen Gestalt von $\circ$ gilt jedoch, daß

$$\mathrm{Deg} := 2\deg_\nu + \deg_s \tag{1.28}$$

eine Derivation von $\circ$ ist und somit $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ)$ zu einer formal Deg-gradierten Algebra wird. Vermöge des Deg-Grades läßt sich die folgende Filtrierung von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ definieren: Man definiert $\mathcal{W}_k\otimes\Lambda(M)$ als diejenigen Elemente in $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, deren Deg-Grad größer oder gleich k ist, dann gilt offensichtlich

$$\mathcal{W}\otimes\Lambda(M) = \mathcal{W}_0\otimes\Lambda(M) \supseteq \mathcal{W}_1\otimes\Lambda(M) \supseteq \mathcal{W}_2\otimes\Lambda(M) \supseteq \cdots \supseteq \{0\} \tag{1.29}$$

$$\text{und} \quad \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{W}_k\otimes\Lambda(M) = \{0\}, \tag{1.30}$$

womit Deg eine absteigende Filtrierung definiert, die mit $\circ$ verträglich ist, da Deg eine Derivation bezüglich $\circ$ ist. Offensichtlich läßt sich nun jedes Element $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ als eine (unendliche) Summe von Deg-homogenen Elementen $a = \sum_{k=0}^\infty a^{(k)}$ mit $\mathrm{Deg}a^{(k)} = ka^{(k)}$ schreiben, weshalb $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ das kartesische Produkt aller Deg-homogenen Elemente ist. Bezüglich $\circ$ definieren wir $\deg_a$-gradierte Superkommutatoren und schreiben $\mathrm{ad}_\circ(a)b := [a,b]_\circ$.

Wir wollen nun noch eine Aussage beweisen, die unter gewissen Bedingungen an das faserweise Produkt die zentralen Elemente von $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ)$ eindeutig charakterisiert.

Lemma 1.3.1 *Falls für das Tensorfeld $\mu_1 \in \Gamma^\infty(TM \otimes TM)$, welches die erste Ordnung des faserweise deformierten Produktes $\circ$ beschreibt gilt, daß $\mathrm{Alt}(\mu_1)$ nicht ausgeartet ist, so ist ein Element $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ zentral, d.h. für alle $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt $\mathrm{ad}_\circ(a)b = 0$ genau dann, wenn $\deg_s a = 0$, d.h. $a = 1 \otimes \alpha$ mit $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$. Hierbei ist $\mathrm{Alt}(\mu_1) \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 TM)$ für $\beta, \gamma \in \Gamma^\infty(T^*M)$ durch $(\mathrm{Alt}(\mu_1))(\beta,\gamma) = \frac{1}{2}(\mu_1(\beta,\gamma) - \mu_1(\gamma,\beta))$ definiert.*

Beweis: Sei also $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ zentral, dann gilt für ein beliebiges $b = T \otimes 1$ wobei $T \in \Gamma^\infty(T^*M)$ offenbar $0 = \mathrm{ad}_\circ(a)b = \nu(\mu_1^{i,j} - \mu_1^{j,i}) i_s(\partial_j) T i_s(\partial_i) a$. Da $\mathrm{Alt}(\mu_1)$ nach Voraussetzung nicht ausgeartet ist und T beliebig ist, folgt aber $i_s(X)a = 0$ für alle $X \in \Gamma^\infty(TM)$, also muß a vom symmetrischen Grad 0 sein oder $a = 0$. Umgekehrt ist aufgrund der Gestalt des faserweisen Produktes $\circ$ offensichtlich, daß für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_s a = 0$ $\mathrm{ad}_\circ(a) = 0$ gilt. □

Die soeben bewiesene Aussage wird es uns in konkreten Beispielen, in denen die Bedingung an μ_1 erfüllt ist, erlauben aus der Tatsache, daß ein Element zentral ist, auf seine Gestalt zu schließen.

Bevor wir mit dem allgemeinen Teil der Fedosov-Konstruktion fortfahren, wollen wir an dieser Stelle einige wichtige Beispiele für Deformationen $\circ$ angeben, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit näher diskutieren werden.

Beispiele 1.3.2 *i.) Sei (M,ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit, dann definiert*

$$a \circ_{\mathrm{F}} b := \mu \circ \exp\left(\frac{\nu}{2}\Lambda^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j)\right)(a \otimes b) \tag{1.31}$$

ein assoziatives Produkt der Gestalt wie in Gleichung (1.26). Hierbei bezeichne Λ^{ij} *die Komponenten des zur symplektischen Form* ω *gehörenden Poisson-Tensors, die mit denen der symplektischen Form in der Beziehung* $\omega_{kj}\Lambda^{ij} = \delta^i_k$ *stehen. Dieses Produkt wurde von Fedosov bei seiner ursprünglichen Konstruktion verwendet, weshalb wir es als das Fedosovsche faserweise Produkt bezeichnen.*

ii.) Sei (M, ω, I) *eine Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (d.h. die entsprechende Kähler-Metrik muß nicht notwendigerweise positiv definit sein), dann definieren wir das faserweise Wick-Produkt als*

$$a \circ_{\mathrm{Wick}} b := \mu \circ \exp\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} i_s(Z_k) \otimes i_s(\overline{Z}_l)\right)(a \otimes b), \tag{1.32}$$

wobei in einer holomorphen Karte $\omega = \frac{\mathrm{i}}{2} g_{k\bar{l}} dz^k \wedge d\overline{z}^l$ *gelte und der zugehörige Poisson-Tensor durch* $\Lambda = \frac{2}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} Z_k \wedge \overline{Z}_l$ *mit* $g^{k\bar{l}} g_{n\bar{l}} = \delta^k_n$ *gegeben sei. Dieses faserweise Produkt wurde in [20] von M. Bordemann und S. Waldmann benutzt um ein Sternprodukt vom Wick-Typ zu konstruieren und wird von uns in Kapitel 3 in einer Verallgemeinerung der dortigen Vorgehensweise eingesetzt werden, um für alle Sternprodukte vom Wick-Typ eine Konstruktion anzugeben.*

iii.) Eng verwandt mit dem vorangehenden Beispiel ist das faserweise Produkt mit Separation der Variablen auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit $(M, -\omega, I)$*, welches durch*

$$a \circ_{\mathrm{SdV}} b := \mu \circ \exp\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} i_s(\overline{Z}_l) \otimes i_s(Z_k)\right)(a \otimes b) \tag{1.33}$$

gegeben ist und sich von $\circ_{\mathrm{Wick}}$ *nur durch die vertauschten Rollen von holomorphen und antiholomorphen Koordinaten unterscheidet, so daß für* $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ *mit* $\deg_a a = |a|a$ *und* $\deg_a b = |b|b$

$$a \circ_{\mathrm{SdV}} b = (-1)^{|a||b|} b \circ_{\mathrm{Wick}} a \tag{1.34}$$

gilt. Dieses faserweise Produkt werden wir in Abschnitt 3.5.4 noch benötigen, um eine Fedosov-Konstruktion für die von A. Karabegov in [67] definierten Sternprodukte anzugeben.

Grundlegend für das weitere Vorgehen sind die folgenden faserweisen Endomorphismen von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, die durch

$$\delta := (1 \otimes dx^i) i_s(\partial_i) \quad \text{und} \quad \delta^* := (dx^i \otimes 1) i_a(\partial_i) \tag{1.35}$$

definiert sind, wobei wir wiederum lokale Koordinaten von M verwendet haben. Offensichtlich sind sowohl δ als auch δ^* unabhängig von der verwendeten Karte definiert und man rechnet sofort nach, daß

$$\delta^2 = \delta^{*2} = 0 \tag{1.36}$$

gilt. Zudem sind δ bzw. δ^* $\deg_a$-gradierte Derivationen des undeformierten Produktes vom Grad $(-1, 1, 0)$ bzw. $(1, -1, 0)$. Aufgrund der speziellen Form des deformierten Produktes $\circ$ ist δ auch eine $\circ$-Superderivation, wohingegen dies für δ^* im allgemeinen nicht der Fall ist. Wegen $\delta^2 = 0$ definiert δ eine Kohomologie, deren Struktur für die Fedosov-Konstruktion grundlegend ist, und die fast trivial ist, wie wir gleich einsehen werden. Hierzu definiert man für homogene Elemente $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_s a = ka$ und $\deg_a a = la$ die Abbildung δ^{-1} durch

$$\delta^{-1} a := \begin{cases} \frac{1}{k+l}\delta^* a & \text{falls } k + l \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k + l = 0 \end{cases} \tag{1.37}$$

und erweitert linear zu einer Abbildung $\delta^{-1} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$. Durch einfaches Nachrechnen findet man, daß für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die Gleichung

$$a = \delta\delta^{-1}a + \delta^{-1}\delta a + \sigma(a) \tag{1.38}$$

gilt, die von Fedosov aus naheliegenden Gründen als Hodge-de Rham-Zerlegung bezeichnet wird und die die Kohomologie von δ in allen symmetrischen und antisymmetrischen Graden bestimmt. Die Abbildung $-\delta$ wird im folgenden Abschnitt, in dem wir die Fedosov-Derivation einführen, als Term mit dem niedrigsten Homogenitätsgrad bezüglich der Deg-Gradierung der Fedosov-Derivation Verwendung finden.

1.3.2 Fedosov-Derivation und Fedosov-Taylor-Reihe

Bevor wir nun die weiteren Bestandteile der Fedosov-Konstruktion anführen, wollen wir noch einiges über die ihr zugrundeliegende Philosophie sagen. Die Idee ist es, eine Unteralgebra der Algebra $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ)$ auszuzeichnen, welche in Bijektion zu den Elementen mit symmetrischem und antisymmetrischem Grad Null, also zu $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, ist und ein deformiertes Produkt auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ durch Zurückziehen des Produktes $\circ$ auf dieser Unteralgebra mittels dieser Bijektion zu definieren. Dabei ist darauf zu achten, daß die Bijektion in gewissem Sinn genügend nichttrivial ist, um tatsächlich ein deformiertes Produkt zu erhalten; so kann man z.B. zeigen, daß zwar $\ker(\delta) \cap \ker(\deg_a)$ die erwähnten Eigenschaften besitzt, das induzierte Produkt aber gerade wieder das ursprüngliche undeformierte Produkt liefert. Die Idee ist es nun, eine Superderivation von $\circ$ zu finden, deren Kern in Bijektion zu $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ steht. Die Eigenschaft Superderivation von $\circ$ zu sein impliziert nämlich, daß ihr Kern eine $\circ$-Unteralgebra ist. Außerdem fordern wir, daß das Quadrat der Superderivation verschwindet, was qualitativ formuliert sicher stellt, daß ihr Kern „genügend groß“ ist. Wir werden in diesem Abschnitt eine solche Superderivation, die Fedosov-Derivation, rekursiv definieren und zusätzlich die Abbildung, die Fedosov-Taylor-Reihe, welche einem Element in $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ das korrespondierende Element im Kern dieser Superderivation zuordnet. Außerdem werden wir einsehen, daß die Umkehrabbildung dieser Abbildung gerade durch die Einschränkung der Abbildung σ auf den Kern der Superderivation gegeben ist, und somit eine recht explizite Konstruktions-Vorschrift für ein assoziatives Produkt $*$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ finden, welches unter gewissen Voraussetzungen eine Deformation des punktweisen Produktes ist.

In Fedosovs ursprünglicher Konstruktion ist das wesentliche neue Element ein Endomorphismus von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, der nicht von einer faserweise definierten Abbildung herkommt. Vermöge eines torsionsfreien Zusammenhangs ∇ auf M definiert Fedosov eine Abbildung $\nabla : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ durch

$$\nabla := (1 \otimes dx^i)\nabla_{\partial_i}, \tag{1.39}$$

die vom Grad $(0, 1, 0)$ also vom Deg-Grad Null ist. Durch einfaches Nachrechnen erhält man, daß ∇^2 eine faserweise Abbildung ist, die durch die Krümmung des Zusammenhangs festgelegt ist. Darüberhinaus stellt man fest, daß $\nabla(1\otimes\alpha) = 1 \otimes d\alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ gilt, wobei d die äußere Ableitung bezeichnet. Weiter findet man, daß wegen der Torsionsfreiheit von ∇ die Gleichung $[\delta, \nabla] = 0$ erfüllt ist. Ohne weitere Voraussetzungen sind ∇ und $\circ$ nicht miteinander verträglich, weshalb wir also solche Zusammenhänge suchen müssen, die ∇ zu einer $\circ$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 machen. Das obige konkrete Beispiel legt also folgende Verallgemeinerung nahe: Wir betrachten eine $\circ$-Superderivation D vom antisymmetrischen Grad 1 und vom totalen Grad 0 mit folgenden Eigenschaften: $[\delta, D] = 0$, $D(1\otimes\alpha) = 1\otimes d\alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$, $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$ mit einem Element $R \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$, vom totalen Grad 2. Da R hierdurch offensichtlich nur bis auf zentrale Elemente festgelegt ist, werden wir in den meisten konkreten Situationen Elemente

R finden, die vom Grad $(2,2,0)$ sind, die die noch zu nennenden weiteren Voraussetzungen für die Fedosov-Konstruktion erfüllen. Weiter fordern wir, daß die Gleichungen $\delta R = DR = 0$ erfüllt sind, die im Fall eines torsionsfreien Zusammenhangs gerade den beiden Bianchi-Identitäten für den Krümmungstensor entsprechen. Offensichtlich muß $\circ$ hinreichend nicht-trivial sein, damit es überhaupt nicht-triviale quasi-innere Superderivationen geben kann. Mit einer solchen Superderivation D sind alle Voraussetzungen für folgenden Satz [45, Thm. 3.2] bzw. [46, Thm. 5.3.3] erfüllt:

Satz 1.3.3 ([18, Thm. 2.1], [87, Thm. 2.1]) *Sei* $D : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ *eine* $\mathbb{C}[[\nu]]$*-lineare* $\circ$*-Superderivation vom* $\deg_a$*-Grad* 1 *und* Deg*-Grad* 0*, so daß* $[\delta, D] = 0$*,* $D(1\otimes\alpha) = 1\otimes d\alpha$ *für alle* $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ *und* $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$ *mit einem Element* $R \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ *vom totalen Grad* 2*, welches* $\delta R = DR = 0$ *erfüllt, gilt. Sei weiter* $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i\Omega_i$ *eine formale Reihe geschlossener Zweiformen auf* M *und* $s \in \mathcal{W}_3(M)$ *mit* $\sigma(s) = 0$ *gegeben. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element* $r \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ *derart, daß*

$$\delta r = Dr - \frac{1}{\nu} r \circ r + R + 1\otimes\Omega \quad \textit{und} \quad \delta^{-1} r = s. \tag{1.40}$$

Darüberhinaus erfüllt r *die Gleichung*

$$r = \delta s + \delta^{-1}\left(Dr - \frac{1}{\nu} r\circ r + R + 1\otimes\Omega\right), \tag{1.41}$$

aus welcher r *rekursiv bestimmt werden kann. In diesem Fall ist die Fedosov-Derivation*

$$\mathfrak{D} := -\delta + D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r) \tag{1.42}$$

eine Superderivation vom $\deg_a$*-Grad* 1 *bezüglich* $\circ$ *und es gilt* $\mathfrak{D}^2 = 0$*.*

Fedosov nennt $\mathfrak{D}$ einen flachen Zusammenhang für das Bündel $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$. Entscheidend für den Beweis ist die fast triviale δ-Kohomologie (vgl. Gleichung (1.38)).

Bemerkung 1.3.4 *i.) Man kann den Satz 1.3.3 auch formulieren, indem man auf die Voraussetzung* $D(1\otimes\alpha) = 1\otimes d\alpha$ *für alle* $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ *verzichtet, dann ist aber auch die Voraussetzung an die formale Reihe* Ω *von Zweiformen zu modifizieren. Hierzu überlegt man sich leicht, daß aufgrund der anderen Voraussetzungen an die Abbildung* D*, die tatsächlich zwingend sind,* $D(1\otimes\alpha) = 1\otimes\tilde{d}\alpha$ *für alle* $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ *gilt, wobei* $\tilde{d}$ *die Eigenschaften* $\tilde{d}^2 = 0$ *und* $\tilde{d}(\alpha\wedge\beta) = \tilde{d}\alpha\wedge\beta + (-1)^k\alpha\wedge\tilde{d}\beta$ *für* $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge^k T^*M)$*,* $\beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)$ *besitzt. Also ist in diesem Fall die Geschlossenheit von* Ω_i *durch die Bedingung* $\tilde{d}\Omega_i$ *zu ersetzen. Die oben gemachte zusätzliche Voraussetzung entspricht also der zusätzlichen Forderung, daß* $Df = 1\otimes df$ *für alle* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *gilt, da dann nach der eindeutigen Charakterisierung der äußeren Ableitung* $\tilde{d} = d$ *folgt. Von diesem Standpunkt gesehen ist die obige Formulierung also sehr nahe an der allgemeinst möglichen. Da wir aber in der vorliegenden Arbeit immer Abbildungen* D *betrachten werden, die den Voraussetungen von Satz 1.3.3 genügen, wollen wir darauf verzichten auf diesen etwas allgemeineren Fall näher einzugehen.*

ii.) Offensichtlich ist das Element R *in den Voraussetzungen von Satz 1.3.3 vom totalen Grad* 2*, das* $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$ *und* $\delta R = DR = 0$ *erfüllt, hierdurch nur bis auf die Addition eines Terms der Form* $1\otimes\nu\vartheta$ *mit einer geschlossenen Zweiform* ϑ *auf* M *eindeutig bestimmt, da dieser Term zentral ist und offensichtlich im Kern von* δ *und* D *liegt. Da aber* Ω *eine beliebige formale Reihe geschlossener Zweiformen ist, wird diese Freiheit in der obigen Formulierung schon mitberücksichtigt.*

iii.) *In [71] haben Karabegov und Schlichenmaier eine Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte auf Fast-Kähler-Mannigfaltigkeiten angegeben, bei der auf die Bedingung* $[\delta, D] = 0$ *verzichtet werden muß, da dort die Abbildung* D *auf einem faktorisierten Schnitt* $S \otimes \alpha$ *durch* $D(S \otimes \alpha) = \nabla_{\partial_i} S \otimes dx^i \wedge \alpha + S \otimes d\alpha$ *definiert ist, wobei* ∇ *ein Zusammenhang ist, dessen Torsion nicht verschwindet. Diese konkrete Situation kann natürlich auch in völlig allgemeinem Rahmen behandelt werden: Gilt nämlich* $[\delta, D] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ *mit einem Element* $T \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^2(M)$ *vom totalen Grad* 1 *(also gilt* $\deg_s T = T$*), welches zusätzlich* $\delta T = 0$ *und* $DT = \delta R$ *erfüllt, wobei* $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$ *mit* $DR = 0$*, so existiert analog zu obigem Satz ein eindeutig definiertes Element* $r \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ *derart, daß* $\delta^{-1} r = s$ *und* $\delta r = Dr - \frac{1}{\nu} r \circ r + T + R + 1 \otimes \Omega$*, welches darüberhinaus rekursiv aus* $r = \delta s + \delta^{-1}\left(Dr - \frac{1}{\nu} r \circ r + T + R + 1 \otimes \Omega\right)$ *bestimmt werden kann und in diesem Fall gilt auch* $\mathfrak{D}^2 = 0$*. Wir werden auf diese Situation noch in Abschnitt 1.3.7 zu sprechen kommen und zeigen, daß diese Art der Fedosov-Konstruktion äquivalent zu einer der in Satz 1.3.3 angegebenen ist. Dort werden wir auch einen Beweis für diese etwas allgemeinere Situation angeben, der für den Spezialfall* $T = 0$ *natürlich auch einen Beweis für Satz 1.3.3 liefert.*

iv.) *Neben der Verallgemeinerung hinsichtlich der Abbildung* D *und des faserweisen Produktes* $\circ$ *haben wir gegenüber der von Fedosov gegebenen Formulierung des Satzes 1.3.3 zusätzlich die Normierungsbedingung* $\delta^{-1} r = s$*, die bei Fedosov durch* $\delta^{-1} r = 0$ *gegeben ist, eingeführt. In Abschnitt 1.3.6 werden wir für einige Anteile von* s *eine Interpretation dieser Normierungsbedingung liefern, die grob gesprochen besagt, daß hierdurch auf einfachste Weise eine gewisse Schar von möglichen Wahlen der Abbildung* D *und alle möglichen Wahlen einer zu* Ω *kohomologen formalen Reihe geschlossener Zweiformen parametrisiert wird. Im Spezialfall der ursprünglich von Fedosov angegebenen Konstruktion werden wir zeigen können, daß durch einen Anteil von* s *alle möglichen Wahlen eines symplektischen, torsionsfreien Zusammenhangs, der dort in* D *eingeht, parametrisiert werden.*

Der nächste wichtige Schritt in der Fedosov-Konstruktion besteht darin, die flachen Schnitte $a \in \mathcal{W}(M)$, also diejenigen Elemente mit $\mathfrak{D} a = 0$, in Bijektion mit $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ zu bringen. Auch hier geben wir eine kleine Verallgemeinerung von Fedosovs Resultat [45, Thm. 3.3] an:

Satz 1.3.5 ([18, Thm. 2.2]) *Sei* $\mathcal{Z} = -\delta + \mathcal{K} : \mathcal{W} \otimes \Lambda(M) \to \mathcal{W} \otimes \Lambda(M)$ *eine* $\mathbb{C}[[\nu]]$*-lineare Abbildung vom* $\deg_a$*-Grad* 1 *mit* $\mathcal{Z}^2 = 0$*, wobei* $\mathcal{K}$ *den* Deg*-Grad nicht verringere.*

i.) *Dann existiert für alle* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ *ein eindeutig bestimmtes Element* $\tau_{\mathcal{Z}}(f) \in \ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$*, so daß*

$$\sigma(\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = f \tag{1.43}$$

gilt und $\tau_{\mathcal{Z}} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$ *eine* $\mathbb{C}[[\nu]]$*-lineare, bijektive Abbildung ist, die man die Fedosov-Taylor-Reihe zu* $\mathcal{Z}$ *nennt.*

ii.) *Ist zudem* $\mathcal{K}$ *von der Form* $\mathcal{K} = \sum_{l=0}^\infty \mathcal{K}^{(l)}$ *mit homogenen Abbildungen* $\mathcal{K}^{(l)}$ *vom* Deg*-Grad* l*, dann gilt für* $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *für* $\tau_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{k=0}^\infty \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k)}$ *mit* $\mathrm{Deg}\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k)} = k\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k)}$ *folgende Rekursionsformel:*

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(0)} &= f \\ \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k+1)} &= \delta^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k} \mathcal{K}^{(l)} \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k-l)}\right). \end{aligned} \tag{1.44}$$

iii.) *Ist* $\mathcal{Z}$ *eine* $\circ$*-Superderivation, wie man sie etwa nach Satz 1.3.3 konstruieren kann, dann ist* $\ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$ *eine* $\circ$*-Unteralgebra und durch Zurückziehen von* $\circ$ *mit* $\tau_{\mathcal{Z}}$ *erhält man ein* *neues (unter gewissen Voraussetzungen deformiertes) assoziatives Produkt* $*_{\mathcal{Z}}$ *auf* $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ *durch*

$$f *_{\mathcal{Z}} g := \sigma(\tau_{\mathcal{Z}}(f) \circ \tau_{\mathcal{Z}}(g)). \tag{1.45}$$

Beweis: Der Vollständigkeit halber geben wir einen Beweis dieses Satzes an, wir folgen hierbei im wesentlichen der Darstellung in der Dissertation [109, Anhang B.1.1]. Um die Gleichung $\mathcal{Z}\tau_{\mathcal{Z}}(f) = 0$ unter der Bedingung $\sigma(\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = f$ für ein fest gewähltes aber beliebiges $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ zu lösen, wenden wir auf diese δ^{-1} an und erhalten mit der Zerlegung (1.38), daß $\tau_{\mathcal{Z}}(f)$ dann wegen $\sigma(\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = f$ und $\delta^{-1}\tau_{\mathcal{Z}}(f) = 0$ die Gleichung $\tau_{\mathcal{Z}}(f) = f + \delta^{-1}\mathcal{K}\tau_{\mathcal{Z}}(f)$ erfüllen muß. Wir betrachten also die Abbildung $T_f : \mathcal{W}(M) \to \mathcal{W}(M)$, die für $a \in \mathcal{W}(M)$ durch $T_f a := f + \delta^{-1}\mathcal{K}a$ definiert ist. Bezüglich der in Anhang A.2 eingeführten Metrik auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ ist die Abbildung T_f kontrahierend, da $\mathcal{K}$ den Deg-Grad nicht verringert und δ^{-1} den totalen Grad um eins erhöht. Es gibt also einen eindeutigen Fixpunkt $b_f \in \mathcal{W}(M)$ von T_f, für den $b_f = T_f b_f = f + \delta^{-1}\mathcal{K}b_f$ gilt. Für diesen Fixpunkt gilt offensichtlich $\sigma(b_f) = f$. Als nächstes zeigen wir, daß dieser Fixpunkt im Kern von $\mathcal{Z}$ liegt. Hierzu leiten wir eine Fixpunkt-Gleichung für $\mathcal{Z}b_f$ ab, deren einzige Lösung durch 0 gegeben ist. Wegen der Zerlegung (1.38) gilt unter Benutzung von $T_f b_f = b_f$ und $\sigma(b_f) = f$ offensichtlich $\delta^{-1}\mathcal{Z}b_f = -b_f + T_f b_f = 0$. Mit $\mathcal{Z}^2 = 0$ erhalten wir weiter $0 = \mathcal{Z}^2 b_f = -\delta\mathcal{Z}b_f + \mathcal{K}\mathcal{Z}b_f$, so daß wir wiederum mit der Zerlegung (1.38) wegen $\sigma(\mathcal{Z}b_f) = 0$ und $\delta^{-1}\mathcal{Z}b_f = 0$ die Gleichung $\mathcal{Z}b_f = \delta^{-1}\mathcal{K}\mathcal{Z}b_f$ erhalten. Da $\mathcal{K}$ den totalen Grad nicht verringert und δ^{-1} ihn um eins erhöht, ist die Abbildung $\delta^{-1}\mathcal{K} : \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ wiederum kontrahierend bezüglich der in Anhang A.2 eingeführten Metrik, so daß $\delta^{-1}\mathcal{K}$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Da aber $\delta^{-1}\mathcal{K}$ linear ist, ist 0 trivialerweise ein Fixpunkt dieser Abbildung und die Eindeutigkeit des Fixpunktes impliziert $\mathcal{Z}b_f = 0$, also gilt $b_f \in \ker(\mathcal{Z})$. Also erfüllt der Fixpunkt b_f von T_f die Gleichungen, die $\tau_{\mathcal{Z}}(f)$ erfüllen soll. Da aber ein Element, das diese Gleichungen erfüllt, wie wir oben gesehen haben immer auch Fixpunkt von T_f ist, folgt aus der Eindeutigkeit dieses Fixpunktes auch, daß $\tau_{\mathcal{Z}}(f)$ durch $\tau_{\mathcal{Z}}(f) \in \ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$ und $\sigma(\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = f$ eindeutig bestimmt ist. Wir zeigen nun, daß $f \mapsto \tau_{\mathcal{Z}}(f)$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung ist. Sei hierzu $f = k_1 f_1 + k_2 f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{C}[[\nu]]$, dann erfüllt $\tau_{\mathcal{Z}}(f_r)$ für $r = 1, 2$ die Fixpunkt-Gleichung $T_{f_r}\tau_{\mathcal{Z}}(f_r) = f_r + \delta^{-1}\mathcal{K}\tau_{\mathcal{Z}}(f_r) = \tau_{\mathcal{Z}}(f_r)$. Mit der $\mathbb{C}[[\nu]]$-Linearität von δ^{-1} und $\mathcal{K}$ folgt hieraus aber

$$k_1\tau_{\mathcal{Z}}(f_1) + k_2\tau_{\mathcal{Z}}(f_2) = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \delta^{-1}\mathcal{K}\left(k_1\tau_{\mathcal{Z}}(f_1) + k_2\tau_{\mathcal{Z}}(f_2)\right),$$

also erfüllt $k_1\tau_{\mathcal{Z}}(f_1) + k_2\tau_{\mathcal{Z}}(f_2)$ dieselbe Fixpunkt-Gleichung wie $\tau_{\mathcal{Z}}(f)$ und mit der Eindeutigkeit des Fixpunktes folgt $\tau_{\mathcal{Z}}(f) = k_1\tau_{\mathcal{Z}}(f_1) + k_2\tau_{\mathcal{Z}}(f_2)$ also die $\mathbb{C}[[\nu]]$-Linearität von $\tau_{\mathcal{Z}}$. Es bleibt noch zu zeigen, daß $\tau_{\mathcal{Z}}$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und $\ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$ ist. Die Injektivität ist trivial, da für $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ aus $\tau_{\mathcal{Z}}(f_1) = \tau_{\mathcal{Z}}(f_2)$ durch Anwenden von σ direkt $f_1 = f_2$ folgt. Es bleibt zu zeigen, daß $\tau_{\mathcal{Z}}$ surjektiv ist. Sei hierzu $a \in \ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$, dann folgt für a mit der Hodge-de Rham-Zerlegung aus $\mathcal{Z}a = 0$ die Fixpunkt-Gleichung $a = \sigma(a) + \delta^{-1}\mathcal{K}a$, womit a Fixpunkt von $T_{\sigma(a)}$ ist. Dieser ist aber eindeutig und durch $\tau_{\mathcal{Z}}(\sigma(a)) = a$ gegeben, womit $\tau_{\mathcal{Z}}$ also auch surjektiv ist. Die Rekursionsformel für $\tau_{\mathcal{Z}}(f)$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erhält man direkt aus der Fixpunkt-Gleichung $\tau_{\mathcal{Z}}(f) = f + \delta^{-1}\mathcal{K}\tau_{\mathcal{Z}}(f)$, indem man diese nach dem totalen Grad sortiert. Zum Beweis des dritten Teils beachten wir, daß der Kern einer $\circ$-Superderivation eine $\circ$-Unteralgebra ist, so daß $\ker(\mathcal{Z}) \cap \mathcal{W}(M)$ als Durchschnitt zweier $\circ$-Unteralgebren wieder eine $\circ$-Unteralgebra ist. Da nun $\circ$ assoziativ ist und $\tau_{\mathcal{Z}}$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Bijektion ist, liefert das Zurückziehen von $\circ$ ein assoziatives $\mathbb{C}[[\nu]]$-bilineares Produkt $*_{\mathcal{Z}}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt zudem $f *_{\mathcal{Z}} g = \sigma(\tau_{\mathcal{Z}}(f) \circ \tau_{\mathcal{Z}}(g)) = fg + O(\nu)$, so daß die unterste Ordnung von $*_{\mathcal{Z}}$ in ν tatsächlich durch das punktweise Produkt gegeben ist. □

1.3.3 Eigenschaften der Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathcal{Z}}$ und der Produkte $*_{\mathcal{Z}}$

Wir tragen an dieser Stelle noch einige allgemeine Eigenschaften, der Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathcal{Z}}$ und der induzierten, assoziativen (deformierten) Produkte $*_{\mathcal{Z}}$ zusammen, die für manche Spezialfälle der Fedosov-Konstruktion aus der Literatur bekannt sind, aber in etwas schwächerer Form auch in völliger Allgemeinheit Gültigkeit haben (vgl. [20, Thm. 3.4] und [18, Lemma 5.8]).

Wir benötigen an dieser Stelle einige grundlegende Definitionen und Eigenschaften von Differentialoperatoren, wie wir sie in unserer Arbeit [86, Bem. 3.4.17 und Anhang B.1] dargestellt haben, die wir aber als bekannt voraussetzen.

Wir betrachten im weiteren sowohl Differentialoperatoren auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ mit Werten in dem $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, die wir mit $\mathit{Diff}^\bullet(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$ bezeichnen, als auch $\mathcal{C}^\infty(M)$-Differentialoperatoren auf dem $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit Werten in $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, die wir mit $\mathit{Diff}^\bullet_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$ bezeichnen.

Lemma 1.3.6 *Sei $\mathcal{Z}$ eine $\circ$-Superderivation wie in Satz 1.3.5. Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist dann die in Satz 1.3.5 definierte Abbildung*

$$\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto \tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)} \in \mathcal{W}(M)$$

ein Differentialoperator der Ordnung k, d.h. $\tau_\mathcal{Z}^{(k)} \in \mathit{Diff}^k(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{W}(M))$. Schreibt man für $k \neq 0$ $\tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)} = \sum_{l=0}^{[\frac{k-1}{2}]} \nu^l \tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}_{k-2l}$, so sind also die Abbildungen $\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto \tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}_{k-2l} \in \Gamma^\infty(\bigvee^{k-2l} T^*M)$ Differentialoperatoren der Ordnung k.

Beweis: Zum Beweis dieses Lemmas benötigen wir einige Aussagen über die Differentiationsordnung der in der Rekursionsformel für $\tau_\mathcal{Z}$ vorkommenden Abbildungen.

Sublemma 1.3.7 *Sei $\mathcal{Z} = -\delta + \mathcal{K} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare $\circ$-Superderivation vom* $\deg_a$*-Grad 1, wobei $\mathcal{K} = \sum_{l=0}^\infty \mathcal{K}^{(l)}$ mit homogenen Abbildungen $\mathcal{K}^{(l)}$ vom* Deg*-Grad l den* Deg*-Grad nicht verringere. Dann gilt $\delta \in \mathit{Diff}^0_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$, $\mathcal{K}^{(l)} \in \mathit{Diff}^1_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $\delta^{-1} \in \mathit{Diff}^0_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$.*

Beweis: Die Aussagen über die Differentiationsordnung der Abbildungen δ und δ^{-1} sind offensichtlich, da sowohl δ als auch δ^{-1} faserweise Abbildungen sind und als solche mit der Linksmultiplikation mit Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ vertauschen. Sei nun $\widetilde{\mathcal{K}}$ eine $\circ$-Superderivation, dann gilt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die Gleichung $\widetilde{\mathcal{K}}(f \circ b) = (\widetilde{\mathcal{K}} f) \circ b + f \circ (\widetilde{\mathcal{K}} b)$. Wegen der Gestalt des faserweisen Produktes $\circ$ gilt aber $f \circ a = fa = l_f a$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ und wir erhalten $[\widetilde{\mathcal{K}}, l_f]b = (\widetilde{\mathcal{K}} f) \circ b$. Für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt wiederum wegen der Gestalt des faserweisen Produktes $(\widetilde{\mathcal{K}} f) \circ (gb) - g((\widetilde{\mathcal{K}} f) \circ b) = 0$, d.h. die Abbildung $b \mapsto (\widetilde{\mathcal{K}} f) \circ b$ ist ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Differentialoperator der Ordnung 0 und nach Definition von $\mathit{Diff}^1_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$ folgt $\widetilde{\mathcal{K}} \in \mathit{Diff}^1_{\mathcal{C}^\infty(M)}(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M))$. Da alle Abbildungen $\mathcal{K}^{(l)}$ für $l \in \mathbb{N}$ $\circ$-Superderivationen sind folgt hieraus die Behauptung. $\triangledown$

Die $\mathbb{C}$-Linearität von $\tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}$ ist nach Satz 1.3.5 für alle $k \in \mathbb{N}$ klar. Wir beweisen nun die Aussage über die Differentiationsordnung per Induktion über den totalen Grad k. Für $k = 0$ ist die Abbildung $\tau_\mathcal{Z}^{(0)} : f \mapsto \tau_\mathcal{Z}(f)^{(0)} = f$ offensichtlich ein Differentialoperator der Ordnung 0. Wir nehmen nun an, daß für $r = 0, \ldots, k$ gelte, daß $\tau_\mathcal{Z}^{(r)} \in \mathit{Diff}^r(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{W}(M))$. Unter Verwendung der Rekursionsformel (1.44) finden wir dann

$$\tau_\mathcal{Z}(f)^{(k+1)} = \delta^{-1}\left(\sum_{r=0}^k \mathcal{K}^{(r)} \tau_\mathcal{Z}(f)^{(k-r)}\right).$$

Nach den im vorangehenden Sublemma bewiesenen Aussagen über die Differentiationsordnungen von δ^{-1} und $\mathcal{K}^{(r)}$ und der Induktionsannahme gilt aber, daß die Abbildungen $f \mapsto \delta^{-1}(\mathcal{K}^{(r)} \tau_\mathcal{Z}(f)^{(k-r)})$ für $0 \leq r \leq k$ Differentialoperatoren der Ordnung $k - r + 1$ mit Werten in $\mathcal{W}(M)$ sind. Da sich die Summe über r von 0 bis k erstreckt, folgt also $\tau_\mathcal{Z}^{(k+1)} \in \mathit{Diff}^{k+1}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{W}(M))$. Die explizitere Form von $\tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}$ für $k \neq 0$ folgt direkt aus der Tatsache, daß $\tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}$ vom totalen Grad k ist, und $\sigma(\tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}) = 0$ für $k \neq 0$ gilt. Die Aussage über die Differentiationsordnung von $f \mapsto \tau_\mathcal{Z}(f)^{(k)}_{k-2l}$ folgt unmittelbar, aus der bereits bewiesenen Aussage des Lemmas. $\square$

Satz 1.3.8 *Das in (1.45) definierte assoziative Produkt $*_{\mathcal{Z}}$ ist für alle $\mathcal{Z}$, die den Voraussetzungen von Satz 1.3.5 genügen, differentiell, d.h. schreibt man für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$*

$$f *_{\mathcal{Z}} g = fg + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r C_r(f, g),$$

so sind die Abbildungen $C_r : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ Bidifferentialoperatoren. Ferner ist C_r von der Ordnung $(2r-1, 2r-1)$, so daß $*_{\mathcal{Z}}$ insbesondere vom Doppel-Vey-Typ ist.

Beweis: Unter Verwendung der in Lemma 1.3.6 eingeführten Notation für $\tau_{\mathcal{Z}}^{(k)}$ erhält man mit einer direkten Rechnung

$$f *_{\mathcal{Z}} g = fg + \sum_{r=1}^{\infty} \nu^r \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{l} \mu_{r-l}(\tau_{\mathcal{Z}}(f)_{r-l}^{(r-l+2k)}, \tau_{\mathcal{Z}}(g)_{r-l}^{(r+l-2k)}),$$

also $C_r(f, g) = \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{l} \mu_{r-l}(\tau_{\mathcal{Z}}(f)_{r-l}^{(r-l+2k)}, \tau_{\mathcal{Z}}(g)_{r-l}^{(r+l-2k)})$ für $r \geq 1$. Indem man die jeweiligen Summationsbereiche berücksichtigt, macht man sich leicht klar, daß die Terme mit dem höchsten oberen Index, der für den totalen Grad steht, in diesem Ausdruck den Index $2r-1$ besitzen. Da zudem $\mu_s : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \times \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ für alle $s \geq 1$ ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Bidifferentialoperator, der Ordnung $(0, 0)$ ist, folgt die Behauptung aus der Aussage von Lemma 1.3.6 unter Benutzung der bekannten Ergebnisse über die Differentiationsordnung von Verkettungen von Differentialoperatoren. □

Korollar 1.3.9 *Sei $\mathcal{Z}$ eine $\circ$-Superderivation, die den Voraussetzungen von Satz 1.3.5 genügt. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto \frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_\circ(h)\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = \mathsf{D}f$$

für alle $h \in \mathcal{W}(M)$ eine formale Reihe von Differentialoperatoren. Schreibt man $\mathsf{D} = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i \mathsf{D}_i$ so ist D_i von der Ordnung $2i+1$.

Beweis: Eine zum Beweis von Proposition analoge Rechnung liefert

$$\frac{1}{\nu}\sigma\left(\mathrm{ad}_\circ(h)\tau_{\mathcal{Z}}(f)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i \sum_{m=0}^{i} \sum_{t=0}^{m} 2\mu_{i+1-m}^{-}(h_{i+1-m}^{(i+1-m+2t)}, \tau_{\mathcal{Z}}(f)_{i+1-m}^{(i+1+m-2t)}),$$

wobei wir $h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[\frac{k}{2}]} h_{k-2l}^{(k)}$ mit $h_{k-2l}^{(k)} \in \Gamma^\infty(\bigvee^{k-2l} T^*M)$ geschrieben haben und μ_r^- für $a, b \in \mathcal{W}(M)$, $r \geq 1$ durch $\mu_r^-(a, b) := \frac{1}{2}(\mu_r(a, b) - \mu_r(b, a))$ definiert haben. Wir finden also für D_i den Ausdruck $\mathsf{D}_i f = \sum_{m=0}^{i} \sum_{t=0}^{m} 2\mu_{i+1-m}^{-}(h_{i+1-m}^{(i+1-m+2t)}, \tau_{\mathcal{Z}}(f)_{i+1-m}^{(i+1+m-2t)})$. Auch hier macht man sich anhand der Summationsbereiche klar, daß der höchste im Ausdruck für D_i vorkommende obere Index, der für den totalen Grad des jeweiligen Terms der Fedosov-Taylor-Reihe steht, durch $2i+1$ gegeben ist. Da für alle $r \geq 1$ und alle $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt, daß die Abbildungen $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \ni a \mapsto \mu_r(b, a)$ und $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \ni a \mapsto \mu_r(a, b)$ $\mathcal{C}^\infty(M)$-Differentialoperatoren der Ordnung 0 auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ sind, folgt hiermit die Behauptung wiederum aus der Aussage von Lemma 1.3.6 und den bekannten Aussagen über die Differentiationsordnung von Verkettungen von Differentialoperatoren. □

Unter relativ schwachen zusätzlichen Voraussetzungen an die $\circ$-Superderivation $\mathcal{K}$ können wir sogar zeigen, daß die Deformationen $*_{\mathcal{Z}}$ wie in den aus [20, Thm. 3.4], [18, Lemma 5.8] bzw. [109, Lemma 4.3.17] bekannten Spezialfällen vom Vey-Typ sind.

Lemma 1.3.10 *Sei $\mathcal{Z} = -\delta + \mathcal{K}$ eine $\circ$-Superderivation wie in Satz 1.3.5. Gilt zusätzlich, daß die Abbildungen $\mathcal{K}^{(r)}$ vom* Deg-*Grad r für alle $r \in \mathbb{N}$ von der Form $\mathcal{K}^{(r)} = \sum_{l=0}^{r+1} \nu^l \mathcal{K}_{r-2l}^{(r)}$ mit*

Abbildung $\mathcal{K}^{(r)}_{r-2l}$ *vom* $\deg_s$*-Grad* $r-2l$ *für* $0 \leq l \leq r+1$ *sind, wobei für alle* $r \in \mathbb{N}$ $\mathcal{K}^{(r)}_{r-2(r+1)}$ *ein Differentialoperator der Ordnung* 0 *sei, dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{C}^\infty(M) \ni f \mapsto \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k)}_{k-2l} \in \Gamma^\infty(\bigvee^{k-2l} T^*M)$$

für alle $k \geq 1$ *und* $0 \leq l \leq [\frac{k-1}{2}]$ *ein Differentialoperator der Ordnung* $k-l$.

Beweis: Wir führen den Beweis per Induktion über den totalen Grad k. Zunächst bemerken wir, daß die Abbildungen $\mathcal{K}^{(r)}_{r-2l}$ wegen Sublemma 1.3.7 für $0 \leq l \leq r+1$ Differentialoperatoren der Ordnung 1 sind und zusätzlich gilt wegen der gemachten Voraussetzungen, daß $\mathcal{K}^{(r)}_{r-2(r+1)}$ sogar ein Differentialoperator der Ordnung 0 ist. Für den Induktionsanfang betrachten wir $\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(1)}$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Offensichtlich ist $\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(1)} = \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(1)}_1$ und wegen $\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(0)} = f$ erhalten wir mit $\mathcal{K}^{(0)} = \mathcal{K}^{(0)}_0 + \mathcal{K}^{(0)}_{-2}$ und der Rekursionsformel (1.44) $\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(1)}_1 = \delta^{-1}(\mathcal{K}^{(0)}_0 f)$, da $\mathcal{K}^{(0)}_{-2} f = 0$. Da $\mathcal{K}^{(0)}_0$ ein Differentialoperator der Ordnung 1 und δ^{-1} ein Differentialoperator der Ordnung 0 ist, ist also ${\tau_{\mathcal{Z}}}^{(1)}_1 \in \mathit{Diff}^1(\mathcal{C}^\infty(M), \Gamma^\infty(T^*M))$. Für den Induktionsschritt betrachten wir

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k+1)} &= \delta^{-1}\left(\sum_{r=0}^{k-1} \mathcal{K}^{(r)} \sum_{l=0}^{[\frac{k-r-1}{2}]} \nu^l \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k-r)}_{k-r-2l} + \mathcal{K}^{(k)} f\right) \\
&= \delta^{-1}\left(\sum_{r=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{r} \nu^m \mathcal{K}^{(r)}_{r-2m} \sum_{l=0}^{[\frac{k-r-1}{2}]} \nu^l \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k-r)}_{k-r-2l}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=0}^{k-1} \nu^{r+1} \mathcal{K}^{(r)}_{r-2(r+1)} \sum_{l=0}^{[\frac{k-r-1}{2}]} \nu^l \tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k-r)}_{k-r-2l} + \mathcal{K}^{(k)} f\right).
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{K}^{(k)}$ ein Differentialoperator der Ordnung 1 ist, ist die Abbildung $f \mapsto \delta^{-1}(\mathcal{K}^{(k)} f)$ nach Sublemma 1.3.7 ein Differentialoperator der Ordnung 1. Wir betrachten nun die beiden anderen Summanden getrennt. Gemäß Induktionsannahme ist ${\tau_{\mathcal{Z}}}^{(k-r)}_{k-r-2l}$ für $0 \leq r \leq k$ ein Differentialoperator der Ordnung $k-r-l$. Da $\mathcal{K}^{(r)}_{r-2m}$ für $0 \leq m \leq r$ ein Differentialoperator der Ordnung 1 vom symmetrischen Grad $r-2m$ ist, und δ^{-1} von der Ordnung 0 ist und den symmetrischen Grad um eins erhöht, sind die Summanden der ersten Summe von der Form $\nu^{l+m} {D_{r,m,l}}^{(k-r-l+1)}_{k+1-2(l+m)} f$, mit Differentialoperatoren ${D_{r,m,l}}^{(k-r-l+1)}_{k+1-2(l+m)} \in \mathit{Diff}^{k-r-l+1}(\mathcal{C}^\infty(M), \Gamma^\infty(\bigvee^{k+1-2(l+m)} T^*M))$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{K}^{(r)}_{r-2(r+1)}$ von der Ordnung 0 und vom symmetrischen Grad $r-2(r+1)$ ist, sind wiederum wegen der Induktionsannahme und den Eigenschaften von δ^{-1} die Summanden der zweiten Summe von der Form $\nu^{l+r+1} {D_{r,l}}^{(k-r-l)}_{k+1-2(l+r+1)} f$, mit Differentialoperatoren ${D_{r,l}}^{(k-r-l)}_{k+1-2(l+r+1)} \in \mathit{Diff}^{k-r-l}(\mathcal{C}^\infty(M), \Gamma^\infty(\bigvee^{k+1-2(l+r+1)} T^*M))$. Da sich die Summe über m nur von 1 bis r erstreckt, stehen also im ersten Summanden im symmetrischen Grad $k+1-2(l+m)$ nur Differentialoperatoren der Ordnung $k+1-(l+m)$, da $k-r-l+1 \leq k+1-(l+m) \iff m \leq r$. Im zweiten Summanden stehen im symmetrischen Grad $k+1-2(l+r+1)$ nur Differentialoperatoren der Ordnung $k+1-(l+r+1) = k-l-r$. Da der letzte Summand unabhängig von den vorkommenden symmetrischen Graden von der Ordnung 1 ist und für $0 \leq n \leq [\frac{k}{2}]$ immer $1 \leq k+1-n$ gilt, folgt also $\tau_{\mathcal{Z}}(f)^{(k+1)}_{k+1-2n} \in \mathit{Diff}^{k+1-n}(\mathcal{C}^\infty(M), \Gamma^\infty(\bigvee^{k+1-2n} T^*M))$ für $0 \leq n \leq [\frac{k}{2}]$, womit die Behauptung durch Induktion über den totalen Grad bewiesen ist. □

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir den Satz.

Satz 1.3.11 *Für alle* $\mathcal{K}$*, die den Voraussetzungen von Lemma 1.3.10 genügen, ist das nach Satz 1.3.5 mit* $\mathcal{Z} = -\delta + \mathcal{K}$ *konstruierte assoziative Produkt* $*_{\mathcal{Z}}$ *vom Vey-Typ, d.h. schreibt man* $f *_{\mathcal{Z}} g = fg + \sum_{r=1}^\infty \nu^r C_r(f,g)$ *für* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$*, so sind die Abbildungen* $C_r : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ *Bidifferentialoperatoren der Ordnung* (r,r).

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 1.3.8 gilt $C_r(f,g) = \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{l}\mu_{r-l}(\tau_{\mathcal{Z}}(f)_{r-l}^{(r-l+2k)}, \tau_{\mathcal{Z}}(g)_{r-l}^{(r+l-2k)})$. Gemäß der Aussage des vorangegangenen Lemmas ist $\tau_{\mathcal{Z}}{}_{r-l}^{(r+l-2k)}$ ein Differentialoperator der Ordnung $r-k$ und $\tau_{\mathcal{Z}}{}_{r-l}^{(r-l+2k)}$ ein Differentialoperator der Ordnung $r-l+k$. Also ist die höchste vorkommende Differentiationsordnung sowohl im zweiten als auch im ersten Argument r und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung 1.3.12 *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.3.10 kann man mit einer zum vorangegangenen Beweis analogen Argumentation auch zeigen, daß eine zur Aussage von Korollar 1.3.9 analoge Aussage in einer etwas strengeren Form gilt, d.h.* $\frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_\circ(h)\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = \sum_{i=0}^{\infty}\nu^i \mathsf{D}_i f$*, wobei* $\mathsf{D}_i \in \mathit{Diff}^{i+1}(\mathcal{C}^\infty(M))$*.*

Schließlich können wir nun zeigen, daß unter einer geringfügig einschränkenden Bedingung an die Abbildung D, vermöge der wir in Satz 1.3.3 die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}$ konstruiert haben, alle assoziativen Deformationen $*_{\mathfrak{D}}$ vom Vey-Typ sind.

Satz 1.3.13 *Sei* $D : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ *eine Abbildung, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllt. Zudem sei* D *von der Form* $D = D_0^{(0)} + \nu D_{-2}^{(0)}$*, wobei* $D_0^{(0)}$ *ein* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-Differentialoperator der Ordnung* 1 *vom* $\deg_s$*-Grad* 0 *und* $D_{-2}^{(0)}$ *ein* $\mathcal{C}^\infty(M)$*-Differentialoperator der Ordnung* 0 *vom* $\deg_s$*-Grad* -2 *auf* $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ *sei. Dann erfüllt* $\mathfrak{D} = -\delta + \mathcal{K} = -\delta + D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)$ *die in Lemma 1.3.10 gestellten Bedingungen, also ist das assoziative Produkt* $*_{\mathfrak{D}}$ *nach Satz 1.3.11 vom Vey-Typ.*

Beweis: Wir müssen nur nachweisen, daß $\mathcal{K}^{(0)} = D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r^{(2)})$ und $\mathcal{K}^{(n)} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r^{(n+2)})$ für $n \geq 1$ die in Lemma 1.3.10 genannten Eigenschaften besitzt. Da $-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r^{(k)})$ eine faserweise Abbildung ist, ist offensichtlich, daß $\mathcal{K}^{(n)}$ für $n \geq 1$ ein $\mathcal{C}^\infty(M)$-Differentialoperator der Ordnung 0 ist. Aufgrund der Voraussetzungen an D ist aber auch klar, daß $\mathcal{K}_0^{(0)} = D_0^{(0)}$ ein Differentialoperator der Ordnung 1 ist und alle weiteren Terme von $\mathcal{K}^{(0)}$ Differentialoperatoren der Ordnung 0 sind. Hiermit sind die Bedingungen an die Differentiationsordnungen der Anteile von $\mathcal{K}^{(n)}$ sicher erfüllt, es bleibt nachzuweisen, daß $\mathcal{K}^{(n)}$ die in Lemma 1.3.10 vorausgesetzte Gestalt hat. Hierzu beachtet man, daß für $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{|a|}(M)$ mit $r^{(n+2)} = \sum_{l=0}^{[\frac{n+2}{2}]}\nu^l r_{n+2-2l}^{(n+2)}$, wobei der untere Index den symmetrischen Grad bezeichne, folgende Gleichung gilt

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r^{(n+2)})a = \sum_{l=0}^{[\frac{n+2}{2}]}\sum_{k=0}^{n+1-2l}\nu^{l+k}\left(\mu_{k+1}(r_{n+2-2l}^{(n+2)}, a) - (-1)^{|a|}\mu_{k+1}(a, r_{n+2-2l}^{(n+2)})\right).$$

Aufgrund der jeweiligen Summationsbereiche überlegt man sich leicht, daß immer $l + k \leq n+1$ gilt, und $\mathcal{K}^{(n)}$ somit die geforderte Gestalt besitzt, womit der Satz bewiesen ist. □

Bemerkung 1.3.14 *Wir werden in der vorliegenden Arbeit fast ausschließlich Fedosov-Derivationen betrachten, die man mit* $D = \nabla$*, wobei* ∇ *wie in Gleichung (1.39) unter Verwendung eines geeigneten Zusammenhangs definiert ist, erhält. Mit der Aussage des oben bewiesenen Satzes ist dann unmittelbar klar, daß die Produkte* $*_{\mathfrak{D}}$ *vom Vey-Typ sind.*

Da wir nicht an beliebigen Deformationen des punktweisen Produktes interessiert sind, sondern uns für Sternprodukte auf symplektischen Mannigfaltigkeiten (M,ω) interessieren, geben wir nun ein Kriterium an, unter welchen Voraussetzungen an das faserweise Produkt $\circ$ das oben definierte Produkt $*_{\mathfrak{D}}$, wobei $\mathfrak{D}$ wie in Satz 1.3.3 definiert sei, ein Sternprodukt ist.

Satz 1.3.15 *Sei* (M,ω) *eine symplektische Mannigfaltigkeit, und sei* $*_{\mathfrak{D}}$ *das oben konstruierte assoziative Produkt auf* $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$*. Dann gilt:* $*_{\mathfrak{D}}$ *ist ein differentielles Sternprodukt für* (M,ω) *genau dann, wenn das Tensorfeld* $\mu_1 \in \Gamma^\infty(TM\otimes TM)$*, welches die erste Ordnung in* ν *des faserweise deformierten Produktes festlegt, die Gleichung*

$$2\mathrm{Alt}(\mu_1) = \Lambda \tag{1.46}$$

erfüllt, wobei Λ den zu ω gehörenden Poisson-Tensor bezeichnet und $\mathrm{Alt}(\mu_1) \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 TM)$ wie in Lemma 1.3.1 für $\alpha, \beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$ durch $(\mathrm{Alt}(\mu_1))(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\mu_1(\alpha,\beta) - \mu_1(\beta,\alpha))$ gegeben ist.

BEWEIS: Die Assoziativität von $*_{\mathfrak{D}}$ ist klar. Außerdem gilt offensichtlich $f = f *_{\mathfrak{D}} 1 = 1 *_{\mathfrak{D}} f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, da $\tau_{\mathfrak{D}}(1) = 1$. Nach Satz 1.3.8 wird $*_{\mathfrak{D}}$ durch Bidifferentialoperatoren beschrieben, woraus insbesondere folgt, daß $*_{\mathfrak{D}}$ lokal ist. Für den Fall, daß $*_{\mathfrak{D}}$ tatsächlich ein Sternprodukt definiert, ist also auch offensichtlich, daß dieses differentiell ist. Zum weiteren Beweis schreiben wir für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ das (deformierte) Produkt gemäß obiger Definition als $f *_{\mathfrak{D}} g = \sigma(\tau_{\mathfrak{D}}(f)\tau_{\mathfrak{D}}(g)) + \nu\mu_1^{i,j}\sigma(i_s(\partial_i)\tau_{\mathfrak{D}}(f)\, i_s(\partial_j)\tau_{\mathfrak{D}}(g)) + O(\nu^2)$. Um also das Produkt bis zur Ordnung 1 in ν angeben zu können, müssen wir nur den Term vom totalen Grad 1 der Fedosov-Taylor-Reihe bestimmen, da alle Terme vom symmetrischen Grad 1 in den Termen von höherem totalen Grad mindestens von der Ordnung 1 in ν sind. Mit der obigen Rekursionsformel ergibt sich $\tau_{\mathfrak{D}}^{(1)}(f) = \delta^{-1}(Df - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r^{(2)})f) = \delta^{-1}(1 \otimes df) = df \otimes 1$ und wir erhalten wegen $\sigma(\tau_{\mathfrak{D}}(f)) = f$

$$f *_{\mathfrak{D}} g = fg + \nu\mu_1^{i,j}(\partial_i f)(\partial_j g) + O(\nu^2).$$

Insbesondere folgt hier, daß $f *_{\mathfrak{D}} g = fg + O(\nu)$ für alle Wahlen von $\circ$ gilt. Also ist $*_{\mathfrak{D}}$ ein Sternprodukt genau dann, wenn $(\mu_1^{i,j} - \mu_1^{j,i})(\partial_i f)(\partial_j g) = \{f, g\} = \Lambda^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt, wobei $\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ die zu ω gehörige Poisson-Klammer bezeichnet. □

Insbesondere implizert Gleichung (1.46), daß $\mathrm{Alt}(\mu_1)$ nicht ausgeartet ist, da für symplektische Mannigfaltigkeiten mit der symplektischen Form ω auch der zugehörige Poisson-Tensor Λ nicht ausgeartet ist. Wenn wir also ein solches faserweises Produkt $\circ$ voraussetzen, ist auch immer Lemma 1.3.1, welches die zentralen Elemente in $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ)$ charakterisiert, anwendbar. Aufgrund des oben bewiesenen Satzes macht man sich leicht klar, daß die faserweisen Produkte $\circ_{\mathrm{F}}$, $\circ_{\mathrm{Wick}}$ und $\circ_{\mathrm{SdV}}$, die wir oben als Beispiele angegeben haben, benutzt werden können, um Sternprodukte mit der zugehörigen Fedosov-Konstruktion zu gewinnen, da für diese faserweisen Produkte Gleichung (1.46) erfüllt ist, vorausgesetzt man findet eine geeignete Abbildung D wie in Satz 1.3.3. Mit einem an die jeweilige Situation angepaßten Zusammenhang auf M und der wie in Gleichung (1.39) definierten Abbildung ∇ kennt man für die Beispiele $\circ_{\mathrm{F}}$, $\circ_{\mathrm{Wick}}$ und $\circ_{\mathrm{SdV}}$ eine solche Abbildung.

Bemerkung 1.3.16 *i.) Fedosovs ursprüngliche Konstruktion geht vom faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ aus und mittels eines symplektischen, torsionsfreien Zusammenhangs erhält man wie in Gleichung (1.39) eine $\circ$-Superderivation ∇, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllt. Hierbei ist $R \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ explizit durch $R = \frac{1}{4}\omega_{it}R^t_{jkl}dx^i \vee dx^j \otimes dx^k \wedge dx^l$ gegeben, wobei R^t_{jkl} die Komponenten des Krümmungstensors des verwendeten Zusammenhangs bezeichnet. Man bemerke, daß auf allen symplektischen Mannigfaltigkeiten symplektische, torsionsfreie Zusammenhänge existieren, jedoch gibt es im allgemeinen keinen eindeutigen, besonders ausgezeichneten derartigen Zusammenhang.*

ii.) Für den Fall einer Kähler-Mannigfaltigkeit haben M. Bordemann und S. Waldmann in [20] in einem Spezialfall der obigen Konstruktion mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ konstruiert. Hier gibt es einen ausgezeichneten Zusammenhang, den Kähler-Zusammenhang, so daß die zugehörige Abbildung ∇ eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivation, wie wir sie benötigen, wird. Für R erhält man hier $R = \frac{\mathrm{i}}{2}g_{k\bar{t}}R^{\bar{t}}_{\bar{l}i\bar{j}}dz^k \vee d\bar{z}^l \otimes dz^i \wedge d\bar{z}^j$.

iii.) Im Prinzip sind die Sternprodukte, die man mit der oben vorgestellten Methode erhält, bis zu jeder gewünschten Ordnung rekursiv explizit bestimmbar. In der Praxis lassen sich die Rekursionsformeln aber nur in den einfachsten Fällen - etwa für flache Zusammenhänge - geschlossen lösen. Trotzdem lassen sich viele Aussagen über die algebraischen Eigenschaften der konstruierten Produkte nur anhand der Konstruktions-Vorschrift ohne explizite Kenntnis des Sternproduktes erkennen, wie wir im weiteren an vielen Stellen der Arbeit sehen werden.

iv.) Eine direkte Übertragung der Fedosov-Konstruktion auf Poisson-Mannigfaltigkeiten scheitert daran, daß es hier im allgemeinen keinen Zusammenhang gibt, so daß der Poisson-Tensor kovariant konstant ist.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch zeigen, daß die Kohomologie einer Abbildung $\mathcal{Z}$ wie in Satz 1.3.5 auf den Elementen von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit positivem antisymmetrischen Grad trivial ist. Da der ursprüngliche Beweis hierzu [46, 5.2.5] rein algebraisch ist, überträgt er sich leicht auf die obige verallgemeinerte Situation. Zunächst definieren wir $\mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ als das Unterbündel der Elemente mit positivem $\deg_a$-Grad, also

$$\mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M) := \bigoplus_{k=1}^{\dim(M)} \mathcal{W}\otimes\Lambda^k(M). \tag{1.47}$$

Sei nun $\mathcal{K} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung vom $\deg_a$-Grad 1, die den Deg-Grad nicht verringere, dann gilt

$$[\delta^{-1}, [\delta^{-1}, \mathcal{K}]] = \delta^{-1}(\delta^{-1}\mathcal{K} + \mathcal{K}\delta^{-1}) - (\delta^{-1}\mathcal{K} + \mathcal{K}\delta^{-1})\delta^{-1} = 0,$$

da ${\delta^{-1}}^2 = 0$. Zudem erhöht $[\delta^{-1}, \mathcal{K}]$ den Deg-Grad mindestens um eins, weshalb $\mathrm{id} - [\delta^{-1}, \mathcal{K}]$ durch eine geometrische Reihe invertierbar ist. Da δ^{-1} den $\deg_a$-Grad um eins verringert, ist $[\delta^{-1}, \mathcal{K}]$ homogen vom $\deg_a$-Grad 0.

Proposition 1.3.17 *Sei $\mathcal{Z} = -\delta + \mathcal{K} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung vom* $\deg_a$*-Grad 1 mit $\mathcal{Z}^2 = 0$, wobei $\mathcal{K}$ den* Deg*-Grad nicht verringere. Dann gilt für*

$$\mathcal{Z}^{-1} := -\delta^{-1}(\mathrm{id} - [\delta^{-1}, \mathcal{K}])^{-1} \tag{1.48}$$

und alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ die deformierte Zerlegung

$$a = \mathcal{Z}\mathcal{Z}^{-1}a + \mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}a, \tag{1.49}$$

womit gezeigt ist, daß die $\mathcal{Z}$-Kohomologie auf allen Elementen von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit positivem antisymmetrischen Grad trivial ist. Die Abbildung $\mathcal{Z}^{-1}$ besitzt die Eigenschaft, den Deg*-Grad mindestens um eins zu erhöhen.*

BEWEIS: Zunächst ist $\mathcal{Z}^{-1}$ als Abbildung wohldefiniert und für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ gilt wegen $\sigma(a) = 0$ nach Gleichung (1.38) die Zerlegung

$$a = \delta^{-1}\delta a + \delta\delta^{-1}a = [\delta^{-1}, \mathcal{K}]a - \left(\delta^{-1}\mathcal{Z}a + \mathcal{Z}\delta^{-1}a\right). \tag{1.50}$$

Wegen $\mathcal{Z}^2 = 0$ erhält man durch Anwenden von $\mathcal{Z}$ auf diese Gleichung bzw. durch Verwendung dieser Gleichung für $\mathcal{Z}a$ anstelle von a die Identitäten

$$\mathcal{Z}\delta^{-1}\mathcal{Z}a = -\mathcal{Z}a + \mathcal{Z}[\delta^{-1}, \mathcal{K}]a \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{Z}\delta^{-1}\mathcal{Z}a = -\mathcal{Z}a + [\delta^{-1}, \mathcal{K}]\mathcal{Z}a$$

für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$, womit gezeigt ist, daß $\mathcal{Z}[\delta^{-1}, \mathcal{K}]|\mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M) = [\delta^{-1}, \mathcal{K}]\mathcal{Z}|\mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ gilt. Da $\mathcal{Z}$ den $\deg_a$-Grad um eins erhöht und $[\delta^{-1}, \mathcal{K}]$ ihn unverändert läßt, folgt induktiv $\mathcal{Z}[\delta^{-1}, \mathcal{K}]^n|\mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M) = [\delta^{-1}, \mathcal{K}]^n\mathcal{Z}|\mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hiermit und mit der Gleichung $[\delta^{-1}, [\delta^{-1}, \mathcal{K}]] = 0$ folgt nun die behauptete Zerlegung direkt aus (1.50) unter Berücksichtigung der Gestalt von $(\mathrm{id} - [\delta^{-1}, \mathcal{K}])^{-1}$. Da $(\mathrm{id} - [\delta^{-1}, \mathcal{K}])^{-1}$ den Deg-Grad nicht verringert und δ^{-1} ihn um eins erhöht ist klar, daß $\mathcal{Z}^{-1}$ den Deg-Grad mindestens um eins erhöht. $\square$

1.3.4 Faserweise Äquivalenztransformationen und Automorphismen

Wir wollen nun untersuchen, wie faserweise Äquivalenztransformationen und Automorphismen auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ Äquivalenztransformationen der deformierten Produkte auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ induzieren.

Definition/Lemma 1.3.18 *i.) Seien $\circ$ und $\circ'$ zwei assoziative Produkte auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ wie in Gleichung (1.26). Eine faserweise Abbildung $\mathcal{S} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ der Gestalt*

$$\mathcal{S} = \mathrm{id} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu^k \mathcal{S}_k \quad \text{mit } \mathcal{S}_k = \sum_{l=1}^{2k} \frac{1}{l!} S_{k,l}^{i_1\ldots i_l} i_s(\partial_{i_1})\ldots i_s(\partial_{i_l}), \tag{1.51}$$

wobei $S_{k,l}^{i_1\ldots i_l}$ die Komponenten eines Tensorfeldes $S_{k,l} \in \Gamma^\infty(\bigvee^l TM)$ sind, heißt faserweise Äquivalenztransformation von $\circ$ nach $\circ'$, falls $\mathcal{S}(a \circ b) = (\mathcal{S}a) \circ' (\mathcal{S}b)$ für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt.

ii.) Sei $\circ$ ein assoziatives Produkt auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ und $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$, dann ist $\mathcal{A}_h := \exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)$ eine wohldefinierte Abbildung auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ und für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt

$$\mathcal{A}_h(a \circ b) = (\mathcal{A}_h a) \circ (\mathcal{A}_h b), \tag{1.52}$$

weshalb wir $\mathcal{A}_h$ einen faserweisen Automorphismus von $\circ$ nennen.

Beweis: Zum Beweis von ii.) bemerken wir zunächst, daß die Abbildung $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)$ wegen $h \in \mathcal{W}_3(M)$ den Deg-Grad mindestens um eins erhöht, woraus sich die Wohldefiniertheit von $\mathcal{A}_h = \exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)$ ergibt. Da $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)$ eine (quasi-innere) $\circ$-(Super-)Derivation (vom antisymmetrischen Grad 0) ist, ist die Gültigkeit von Gleichung (1.52) offensichtlich. $\square$

Offenbar gilt $\mathcal{S}(1) = \mathcal{A}_h(1) = 1$. Weiter existieren $\mathcal{S}^{-1}$ und $\mathcal{A}_h^{-1} = \mathcal{A}_{-h}$ und $\mathcal{S}^{-1}$ ist eine faserweise Äquivalenztransformation von $\circ'$ nach $\circ$, sowie $\mathcal{A}_{-h}$ ebenfalls ein faserweiser Automorphismus von $\circ$ ist. Die spezielle Gestalt von $\mathcal{S}$ gemäß (1.51) und die Tatsache, daß $h \in \mathcal{W}_3(M)$ gewährleisten, daß sowohl $\mathcal{S}$ als auch $\mathcal{A}_h$ den Deg-Grad nicht verringern.

Sei nun $\mathcal{Z} = -\delta + \mathcal{K}$ eine $\circ$-Superderivation vom antisymmetrischen Grad 1 mit $\mathcal{Z}^2 = 0$ und $\mathcal{K}$ eine Abbildung, die den Deg-Grad nicht verringert. Dann existiert nach Satz 1.3.5 eine zugehörige Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_\mathcal{Z}$, die ein assoziatives Produkt $*_\mathcal{Z}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ induziert. Man verifiziert sofort, daß

$$\mathcal{Z}' := \mathcal{S}\mathcal{Z}\mathcal{S}^{-1} = -\delta + \mathcal{K}'$$

mit $\mathcal{K}' = \mathcal{S}\mathcal{K}\mathcal{S}^{-1}$ eine $\circ'$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 mit $\mathcal{Z}'^2 = 0$ ist. Da wegen der expliziten Gestalt von $\mathcal{S}$ die Abbildung $\mathcal{K}'$ den Deg-Grad nicht verringert, besitzt auch $\mathcal{Z}'$ eine zugehörige Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathcal{Z}'}$, die ihrerseits ein assoziatives Produkt $*_{\mathcal{Z}'}$ induziert. Die folgende Proposition besagt, daß unter diesen Umständen $*_\mathcal{Z}$ und $*_{\mathcal{Z}'}$ äquivalent sind.

Proposition 1.3.19 ([18, Prop. 2.3]) *Mit den obigen Bezeichnungen ist die Abbildung*

$$Sf := \sigma(\mathcal{S}\tau_\mathcal{Z}(f)) \tag{1.53}$$

mit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Äquivalenztransformation von $*_\mathcal{Z}$ nach $*_{\mathcal{Z}'}$. Für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt also $S(f *_\mathcal{Z} g) = (Sf) *_{\mathcal{Z}'} (Sg)$, und das Inverse von S ist durch

$$S^{-1}f = \sigma(\mathcal{S}^{-1}\tau_{\mathcal{Z}'}(f)) \tag{1.54}$$

gegeben.

BEWEIS: Die $\mathbb{C}[[\nu]]$-Linearität von S und S^{-1} ist offensichtlich. Weiter gilt $\mathcal{Z}'\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(f) = \mathcal{S}\mathcal{Z}\tau_{\mathcal{Z}}(f) = 0$, weshalb nach Satz 1.3.5 $\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(f) = \tau_{\mathcal{Z}'}(\sigma(\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(f))) = \tau_{\mathcal{Z}'}(Sf)$ gilt. Hiermit erhält man

$$\begin{aligned} S(f *_{\mathcal{Z}} g) &= \sigma(\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(f *_{\mathcal{Z}} g)) = \sigma(\mathcal{S}(\tau_{\mathcal{Z}}(f) \circ \tau_{\mathcal{Z}}(g))) = \sigma((\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(f)) \circ' (\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(g))) \\ &= \sigma(\tau_{\mathcal{Z}'}(Sf) \circ' \tau_{\mathcal{Z}'}(Sg)) = (Sf) *_{\mathcal{Z}'} (Sg). \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, daß (1.54) das Inverse von S definiert. Wegen $\mathcal{Z}\mathcal{S}^{-1}\tau_{\mathcal{Z}'}(f) = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{Z}'\tau_{\mathcal{Z}'}(f) = 0$ gilt $\mathcal{S}^{-1}\tau_{\mathcal{Z}'}(f) = \tau_{\mathcal{Z}}(\sigma(\mathcal{S}^{-1}\tau_{\mathcal{Z}'}(f))) = \tau_{\mathcal{Z}}(S^{-1}f)$ und man findet

$$S^{-1}Sf = \sigma(\mathcal{S}^{-1}\tau_{\mathcal{Z}'}(Sf)) = \sigma(\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(f)) = f \quad \text{und} \quad SS^{-1}f = \sigma(\mathcal{S}\tau_{\mathcal{Z}}(S^{-1}f)) = \sigma(\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1}\tau_{\mathcal{Z}'}(f)) = f,$$

womit die Proposition bewiesen ist. □

Analog zur obigen Proposition beweist man, daß man vermöge eines faserweisen Automorphismus $\mathcal{A}_h$ ebenfalls Äquivalenztransformationen konstruieren kann. Hierzu sei $\mathcal{Z}$ wie oben gegeben, dann erhält man eine weitere $\circ$-Superderivation $\widetilde{\mathcal{Z}}$ vom $\deg_a$-Grad 1 mit $\widetilde{\mathcal{Z}}^2 = 0$ durch

$$\widetilde{\mathcal{Z}} := \mathcal{A}_h\mathcal{Z}\mathcal{A}_{-h} = \mathcal{Z} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)}(\mathcal{Z}h)\right),$$

wobei wir folgendes Lemma verwendet haben.

Lemma 1.3.20 *Für alle $h \in \mathcal{W}_3(M)$ und alle $\circ$-Superderivationen $\mathcal{Z}$ gilt:*

$$\mathcal{A}_h\mathcal{Z}\mathcal{A}_{-h} = \mathcal{Z} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)}(\mathcal{Z}h)\right). \tag{1.55}$$

BEWEIS: Mit $\mathrm{ad}(E)E' = [E, E']$ bezeichnen wir den $\deg_a$-gradierten Superkommutator, wobei E, E' Endomorphismen von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ seien. Hiermit gilt dann offensichtlich

$$\mathcal{A}_h\mathcal{Z}\mathcal{A}_{-h} = \exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}(\mathrm{ad}_\circ(h))\right)\mathcal{Z} = \mathcal{Z} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^r \mathrm{ad}(\mathrm{ad}_\circ(h))^{r-1}\left[\mathrm{ad}_\circ(h), \mathcal{Z}\right].$$

Da $\mathcal{Z}$ eine $\circ$-Superderivation ist, gilt offensichtlich $[\mathrm{ad}_\circ(h), \mathcal{Z}] = -\mathrm{ad}_\circ(\mathcal{Z}h)$. Ferner gilt für $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die Gleichung $\mathrm{ad}(\mathrm{ad}_\circ(h))\mathrm{ad}_\circ(b) = \mathrm{ad}_\circ(\mathrm{ad}_\circ(h)b)$. Setzt man diese Beziehungen in die obige Gleichung für $\mathcal{A}_h\mathcal{Z}\mathcal{A}_{-h}$ ein und verwendet $\frac{\exp(x)-\mathrm{id}}{x} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}x^{r-1}$, so erhält man die behauptete Gleichung (1.55). □

Da wir $h \in \mathcal{W}_3(M)$ vorausgesetzt haben, gilt somit $\widetilde{\mathcal{Z}} = -\delta + \widetilde{\mathcal{K}}$, wobei die Abbildung $\widetilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)-\mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)}(\mathcal{Z}h)\right)$ den Deg-Grad nicht verringert, so daß die Existenz einer zugehörigen Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ und eines induzierten Produktes $*_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ gesichert ist. Völlig analog zu Proposition 1.3.19 beweist man dann folgendes Korollar:

Korollar 1.3.21 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen ist die Abbildung*

$$A_h f := \sigma(\mathcal{A}_h\tau_{\mathcal{Z}}(f)) \tag{1.56}$$

mit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Äquivalenztransformation von $*_{\mathcal{Z}}$ nach $*_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ und das Inverse von A_h ist durch

$$A_h^{-1}f = \sigma(\mathcal{A}_{-h}\tau_{\widetilde{\mathcal{Z}}}(f)) \tag{1.57}$$

gegeben.

Bemerkung 1.3.22 *Man beachte, daß im allgemeinen die Abbildung A_h kein Automorphismus von $*_{\mathcal{Z}}$ sein wird, auch wenn die entsprechende faserweise Abbildung $\mathcal{A}_h$ ein faserweiser Automorphismus ist, und somit $*_{\mathcal{Z}}$ und $*_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$ tatsächlich verschieden sind.*

Diese allgemeinen Konstruktionen von Äquivalenztransformationen werden nun an einigen Stellen der vorliegenden Arbeit Verwendung finden. Insbesondere werden wir in spezielleren Situationen hiermit das Werkzeug dafür besitzen, um Aussagen über die Äquivalenztransformationen von Sternprodukten zu machen, ohne diese explizit, sondern nur deren Konstruktions-Vorschrift, zu kennen. Desweiteren werden wir in einigen dieser speziellen Situationen auch zeigen können, daß das Vorgehen wie in Korollar 1.3.21 in gewissem Sinne umgekehrt werden kann, d.h. wir gehen von zwei verschiedenen $\circ$-Superderivationen $\mathcal{Z}$ und $\widetilde{\mathcal{Z}}$ und den zugehörigen Produkten aus und können zeigen, daß dann unter gewissen Voraussetzungen ein $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ gefunden werden kann, so daß $\widetilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{A}_h \mathcal{Z} \mathcal{A}_{-h}$ gilt. Korollar 1.3.21 liefert dann die Existenz einer Äquivalenztransformation zwischen $*_{\mathcal{Z}}$ und $*_{\widetilde{\mathcal{Z}}}$.

1.3.5 $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Derivationen für verallgemeinerte Fedosov-Sternprodukte

Als eine erste Anwendung der Aussage von Proposition 1.3.17 für $\mathcal{Z} = \mathfrak{D}$, wobei $\mathfrak{D}$ wie in Satz 1.3.5 konstruiert sei, geben wir hier eine explizite Konstruktion für alle $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen eines Sternproduktes $*_{\mathfrak{D}}$ an (Wegen Satz 1.3.15 setzen wir also voraus, daß das faserweise Produkt $\circ$ die dort gefundene Bedingung erfüllt und somit auch Lemma 1.3.1 anwendbar ist.). Insbesondere finden wir für allgemeine Fedosov-Sternprodukte eine konkrete Realisierung der Bijektion zwischen $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen und formalen Reihen von geschlossenen Einsformen auf M. Mittels dieses Ergebnisses finden wir zudem eine Bijektion zwischen $H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ und dem Quotientenraum der $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen modulo der quasi-inneren Derivationen. Für die Situation beliebiger Sternprodukte sei auf Abschnitt 2.1.2 verwiesen. Wir wollen die Konstruktion $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Derivationen für allgemeine Fedosov-Sternprodukte hier insbesondere deshalb demonstrieren, da eine eng verwandte Methode auch zur Konstruktion anderer (nicht $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer) Derivationen benutzt werden kann, derer wir uns in den Abschnitten 2.3.2 und 3.3.1 bedienen werden.

Ähnlich der Konstruktion von Äquivalenztransformationen gehen wir von geeigneten faserweisen (Super-)Derivationen des faserweisen Produktes $\circ$ aus. Wir betrachten also eine faserweise quasi-innere (Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0 der Gestalt

$$\mathcal{D}_h = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h), \tag{1.58}$$

wobei $h \in \mathcal{W}(M)$ und ohne Einschränkung angenommen werden kann, daß $\sigma(h) = 0$, da für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ offensichtlich $\mathrm{ad}_\circ(f) = 0$ gilt. Unser Ziel ist es durch $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \ni f \mapsto \sigma(\mathcal{D}_h \tau_{\mathfrak{D}}(f))$ $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivationen von $*_{\mathfrak{D}}$ zu erklären. Für ein beliebiges Element $h \in \mathcal{W}(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ wird die so definierte Abbildung jedoch im allgemeinen keine Derivation von $*_{\mathfrak{D}}$ sein, da $\mathcal{D}_h$ Elemente aus $\ker(\mathfrak{D}) \cap \mathcal{W}(M)$ im allgemeinen nicht wieder auf Elemente im Kern von $\mathfrak{D}$ abbildet. Damit dies der Fall ist, muß nämlich $\mathfrak{D}$ mit $\mathcal{D}_h$ (super-)kommutieren. Da $\mathfrak{D}$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare $\circ$ Superderivation ist gilt offensichtlich

$$[\mathfrak{D}, \mathcal{D}_h] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\mathfrak{D}h)$$

und somit muß $\mathfrak{D}h$ offensichlich zentral also von der Form $1 \otimes A$ mit $A \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ sein, damit $[\mathfrak{D}, \mathcal{D}_h] = 0$ gilt. Da $\mathfrak{D}^2 = 0$ erhalten wir als notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $\mathfrak{D}h = 1 \otimes A$ indem wir $\mathfrak{D}$ anwenden $0 = \mathfrak{D}(1 \otimes A) = 1 \otimes dA$, also muß A eine formale Reihe geschlossener Einsformen auf M sein. Da die $\mathfrak{D}$-Kohomologie nach Proposition 1.3.17 auf Elementen mit positivem antisymmetrischen Grad trivial ist, ist diese Bedingung aber auch hinreichend für die Lösbarkeit der genannten Gleichung. Diese Beobachtungen führen uns zu folgenden Aussagen.

Proposition 1.3.23 *i.) Für alle formalen Reihen $A \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ geschlossener Einsformen auf M existiert ein eindeutig bestimmtes Element $h_A \in \mathcal{W}(M)$ mit $\mathfrak{D} h_A = 1 \otimes A$ und $\sigma(h_A) = 0$. Darüberhinaus ist h_A explizit durch*

$$h_A = \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A) \tag{1.59}$$

gegeben.

ii.) Für alle formalen Reihen geschlossener Einsformen $A \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ auf M definiert die Abbildung $\mathsf{D}_A : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, wobei

$$\mathsf{D}_A f := \sigma(\mathcal{D}_{h_A} \tau_{\mathfrak{D}}(f)) = \sigma\left(-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h_A)\tau_{\mathfrak{D}}(f)\right) \tag{1.60}$$

für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $*_{\mathfrak{D}}$, so daß $Z^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]] \ni A \mapsto \mathsf{D}_A \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathfrak{D}})$ eine Abbildung mit Werten in den $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen von $*_{\mathfrak{D}}$ erklärt.

Beweis: Zum Beweis von i.) wenden wir auf $1 \otimes A$ die nach Proposition 1.3.17 auf $\mathcal{W} \otimes \Lambda^+(M)$ geltende Zerlegung an, so daß die zu lösende Gleichung wegen $dA = 0$ die Form $\mathfrak{D} h_A = 1 \otimes A = (\mathfrak{D}\mathfrak{D}^{-1} + \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{D})(1 \otimes A) = \mathfrak{D}\mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A)$ annimmt. Also ist für $h_A = \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A)$ die Gleichung $\mathfrak{D} h_A = 1 \otimes A$ erfüllt und da $\mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A)$ wegen der Gestalt von $\mathfrak{D}^{-1}$ nur aus Termen vom symmetrischen Grad größer oder gleich 1 besteht gilt auch $\sigma(h_A) = 0$. Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei $\widetilde{h_A}$ eine weitere Lösung, dann gilt $\mathfrak{D}(h_A - \widetilde{h_A}) = 0$, das bedeutet aber nach Satz 1.3.5 $h_A - \widetilde{h_A} = \tau_{\mathfrak{D}}(\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Wendet man nun σ auf diese Gleichung an findet man $0 = \sigma(\tau_{\mathfrak{D}}(\varphi)) = \varphi$, da $\sigma(h_A) = \sigma(\widetilde{h_A}) = 0$, also folgt schließlich $\widetilde{h_A} = h_A$. Zum Beweis von ii.) bemerken wir, daß wegen $\mathfrak{D} h_A = 1 \otimes A$ nach den obigen Überlegungen offensichtlich $[\mathfrak{D}, \mathcal{D}_{h_A}] = 0$ gilt. Damit gilt aber für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Gleichung $\mathfrak{D}\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f) = 0$, so daß nach Satz 1.3.5 $\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f) = \tau_{\mathfrak{D}}(g_{A,f})$ mit einer von A und f abhängigen formalen Funktion $g_{A,f} \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ folgt. Durch Anwenden von σ erhält man weiter $g_{A,f} = \sigma(\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f)) = \mathsf{D}_A f$ also $\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f) = \tau_{\mathfrak{D}}(\mathsf{D}_A f)$. Mit dieser Gleichung weist man nun leicht nach, daß D_A eine Derivation von $*_{\mathfrak{D}}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathsf{D}_A(f *_{\mathfrak{D}} g) &= \sigma(\mathcal{D}_{h_A}(\tau_{\mathfrak{D}}(f) \circ \tau_{\mathfrak{D}}(g))) = \sigma((\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f)) \circ \tau_{\mathfrak{D}}(g) + \tau_{\mathfrak{D}}(f) \circ (\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(g))) \\ &= \sigma(\tau_{\mathfrak{D}}(\mathsf{D}_A f) \circ \tau_{\mathfrak{D}}(g) + \tau_{\mathfrak{D}}(f) \circ \tau_{\mathfrak{D}}(\mathsf{D}_A g)) = (\mathsf{D}_A f) *_{\mathfrak{D}} g + f *_{\mathfrak{D}} (\mathsf{D}_A g). \end{aligned}$$

Die $\mathbb{C}[[\nu]]$-Linearität von D_A ist offensichtlich, da $\tau_{\mathfrak{D}}$ nach Satz 1.3.5 $\mathbb{C}[[\nu]]$-linear ist und die Abbildungen $\mathcal{D}_{h_A}$ als auch σ ebenfalls $\mathbb{C}[[\nu]]$-linear sind. □

Wir können nun zeigen, daß man mit den oben konstruierten Derivationen D_A sogar alle $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen von $*_{\mathfrak{D}}$ erhält.

Satz 1.3.24 *Die in Proposition 1.3.23 definierte Abbildung*

$$Z^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]] \ni A \mapsto \mathsf{D}_A \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathfrak{D}})$$

ist eine Bijektion. Darüberhinaus gilt, daß D_{df} für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ eine quasi-innere Derivation ist, d.h. $\mathsf{D}_{df} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathfrak{D}}}(f)$. Also induziert die Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$ eine Abbildung von $H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]] \cong Z^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]/B^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ in den Raum der $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathfrak{D}})$ von $*_{\mathfrak{D}}$ modulo der quasi-inneren Derivationen $\mathrm{Der}^{\mathrm{qi}}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathfrak{D}})$ durch

$$[A] \mapsto [\mathsf{D}_A],$$

die ebenfalls eine Bijektion ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$ injektiv ist. Sei dazu $\mathsf{D}_{A'} = \mathsf{D}_A$, dann gilt wegen $\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f) = \tau_{\mathfrak{D}}(\mathsf{D}_A f)$ und der analogen Gleichung für A' für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Gleichung $\mathcal{D}_{h_A}\tau_{\mathfrak{D}}(f) - \mathcal{D}_{h_{A'}}\tau_{\mathfrak{D}}(f) = 0$, d.h. $\mathrm{ad}_\circ(h_A - h_{A'})\tau_{\mathfrak{D}}(f) = 0$. Da ein Element, das mit allen Fedosov-Taylor-Reihen $\circ$-(super-)kommutiert, zentral ist muß also $h_A - h_{A'}$ zentral also wegen $h_A, h_{A'} \in \mathcal{W}(M)$ eine formale Funktion sein. Da aber auch $\sigma(h_A) = \sigma(h_{A'}) = 0$ folgt sogar $h_A - h_{A'} = 0$. Hiermit ist aber $1 \otimes A = \mathfrak{D}h_A = \mathfrak{D}h_{A'} = 1 \otimes A'$, womit die Injektivität gezeigt ist. Zum Beweis der Surjektivität wollen wir für eine gegebene Derivation D von $*_{\mathfrak{D}}$ induktiv eine formale Reihe von geschlossenen Einsformen A_i finden, so daß $\sum_{i=0}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{A_i} = \mathsf{D}$ gilt. Wir nehmen an, daß wir die geschlossenen Einsformen A_i für $0 \leq i \leq k-1$ bereits gefunden haben, so daß $\mathsf{D}' = \mathsf{D} - \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i \mathsf{D}_{A_i}$, was offensichtlich wieder eine Derivation von $*_{\mathfrak{D}}$ ist, die Form $\mathsf{D}' = \sum_{i=k}^\infty \nu^i \mathsf{D}'_i$ besitzt. Die k-te Ordnung in ν der Gleichung $\mathsf{D}'(f *_{\mathfrak{D}} g) = (\mathsf{D}'f) *_{\mathfrak{D}} g + f *_{\mathfrak{D}} (\mathsf{D}'g)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ liefert $\mathsf{D}'_k(fg) = (\mathsf{D}'_k f)g + f(\mathsf{D}'_k g)$, d.h. D'_k ist ein Vektorfeld $X_k \in \Gamma^\infty(TM)$. Aus dem antisymmetrischen Anteil der $k+1$-ten Ordnung in ν der Gleichung $\mathsf{D}'(f *_{\mathfrak{D}} g) = (\mathsf{D}'f) *_{\mathfrak{D}} g + f *_{\mathfrak{D}} (\mathsf{D}'g)$ erhält man $\mathcal{L}_{X_k}\{f, g\} = \{\mathcal{L}_{X_k} f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{X_k} g\}$, so daß X_k ein symplektisches Vektorfeld ist, d.h. $\mathcal{L}_{X_k}\omega = 0$. Wegen $d\omega = 0$ und der Cartan-Formel für die Lie-Ableitung gilt dann $di_{X_k}\omega = 0$, so daß $A_k := -i_{X_k}\omega$ eine geschlossene Einsform definiert. Dann ist $\nu^k \mathsf{D}_{A_k}$ offensichtlich eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation. Weiter gilt $\mathsf{D}_{A_k} f = -\sigma(\mu_1(\mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A_k), \tau_{\mathfrak{D}}(f)) - \mu_1(\tau_{\mathfrak{D}}(f), \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A_k))) + O(\nu)$. Anhand der expliziten Form von $\mathfrak{D}^{-1}$ macht man sich leicht klar, daß $\mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes A_k)$ wegen $(D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r))(1 \otimes A_k) = 0$ von der Form $-A_k \otimes 1+$ Terme vom totalen Grad größer oder gleich 2 ist. Diese sind aber für die Berechnung der nullten Ordnung in ν von D_{A_k} irrelevant und wegen $\tau_{\mathfrak{D}}(f)^{(1)} = df \otimes 1$ und $-i_{X_k}\omega = A_k$ erhalten wir $\mathsf{D}_{A_k} f = (\mu_1^{i,j} - \mu_1^{j,i})A_k(\partial_i)(\partial_j f) + O(\nu) = \Lambda^{ij} A_k(\partial_i)(\partial_j f) + O(\nu) = X_k(f) + O(\nu)$. Damit ist aber $\mathsf{D}' - \nu^k \mathsf{D}_{A_k}$ eine Derivation von $*_{\mathfrak{D}}$, die erst in der Ordnung $k+1$ in ν beginnt, womit die Behauptung induktiv bewiesen ist. Für den Beweis der zweiten Aussage des Satzes beachten wir zunächst, daß für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Fedosov-Taylor-Reihe als $f - \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes df)$ geschrieben werden kann, da zum einen $\sigma(f - \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes df)) = f$ und auch $\mathfrak{D}(f - \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes df)) = 1 \otimes df - (1 \otimes df - \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{D}(1 \otimes df)) = \mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes d^2 f) = 0$ gilt, wobei wir wieder Proposition 1.3.17 verwendet haben. Hiermit finden wir aber wegen $\mathrm{ad}_\circ(f) = 0$

$$\mathsf{D}_{df}\, g = \sigma\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(-\mathfrak{D}^{-1}(1 \otimes df))\tau_{\mathfrak{D}}(g)\right) = \frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_\circ(\tau_{\mathfrak{D}}(f))\tau_{\mathfrak{D}}(g)) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathfrak{D}}}(f)g$$

für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Hiermit ist aber auch die Wohldefiniertheit der Abbildung $[A] \mapsto [\mathsf{D}_A]$ bewiesen. Die Bijektivität dieser Abbildung folgt direkt aus der Bijektivität der Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$. □

Wir wollen an dieser Stelle darauf hinweisen, daß sich unsere Vorgehensweise, um nachzuweisen, daß $Z^1_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ in Bijektion zu $\mathrm{Der}_{\mathbb{C}[[\nu]]}(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathfrak{D}})$ ist, in sehr ähnlicher Weise auf den Fall beliebiger Sternprodukte übertragen läßt (vgl. Abschnitt 2.1.2).

1.3.6 Interpretation der Normierungsbedingung an r

Zum Abschluß dieses allgemeinen Abschnittes zur Fedosov-Konstruktion wollen wir noch untersuchen, welche Konsequenzen die von uns in Satz 1.3.3 gegenüber der von Fedosov gegebenen Formulierung dieses Satzes neu eingeführte Normierungsbedingung $\delta^{-1}r = s$ hat. Hierzu gehen wir von zwei Sätzen von Eingangsdaten (D_1, Ω_1, s_1) und (D_2, Ω_2, s_2), die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllen, aus und betrachten die resultierenden Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$. Nun ist die Fragestellung, unter welchen Bedingungen an diese Eingangsdaten diese Fedosov-Derivationen und damit auch die induzierten assoziativen Produkte $*_{\mathfrak{D}_1}$ und $*_{\mathfrak{D}_2}$ übereinstimmen, naheliegend. Wenn das faserweise Produkt $\circ$ die Voraussetzung von Lemma 1.3.1 erfüllt, läßt sich diese Frage zufriedenstellend beantworten. Da dies nach Satz 1.3.15 aber, um mit der Fedosov-Konstruktion Sternprodukte zu erhalten, immer der Fall sein muß, wollen wir annehmen, daß diese Voraussetzung erfüllt ist, also $\mathrm{Alt}(\mu_1)$ nicht ausgeartet ist. Grundlegend für unsere Analyse ist die Beziehung zwischen zwei möglichen Abbildungen D_1 und D_2, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllen, die wir im folgenden Lemma näher beleuchten wollen.

Lemma 1.3.25 *Seien $D_1, D_2 : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ zwei $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare $\circ$-Superderivationen vom $\deg_a$-Grad 1 und Deg-Grad 0, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllen. Insbesondere* *sei $D_1^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R_1)$ und $D_2^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R_2)$ mit Elementen $R_1, R_2 \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ vom totalen Grad 2. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Tensorfeld $T^{1,2} \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes T^*M) \subseteq \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$, so daß*

$$D_1 - D_2 = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2}) \tag{1.61}$$

gilt. Darüberhinaus erfüllt dieses Tensorfeld die Gleichungen

$$\delta T^{1,2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{l} D_1 T^{1,2} = R_2 - R_1 + \frac{1}{\nu}T^{1,2}\circ T^{1,2} + 1\otimes\nu\vartheta^{1,2} \\ D_2 T^{1,2} = R_2 - R_1 - \frac{1}{\nu}T^{1,2}\circ T^{1,2} + 1\otimes\nu\vartheta^{1,2}, \end{array} \tag{1.62}$$

wobei $\vartheta^{1,2}$ eine durch D_1, D_2, R_1, R_2 eindeutig bestimmte geschlossene Zweiform auf M ist.

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß $D_1 - D_2$ eine faserweise $\circ$-Superderivation ist. Nach Voraussetzung gilt $D_1 f = 1\otimes df = D_2 f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Hiermit erhalten wir aber für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, die Gleichung $(D_1 - D_2)(fa) = (D_1 - D_2)(f\circ a) = ((D_1 - D_2)f)\circ a + f\circ((D_1 - D_2)a) = f(D_1 - D_2)a$, also ist $D_1 - D_2$ eine faserweise Abbildung. Für einen faktorisierten Schnitt der Form $T\otimes\alpha \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ erhält man wegen $D_1(1\otimes\alpha) = D_2(1\otimes\alpha) = 1\otimes d\alpha$ weiter, $(D_1 - D_2)(T\otimes\alpha) = (D_1 - D_2)((T\otimes 1)\circ(1\otimes\alpha)) = (D_1 - D_2)(T\otimes 1)(1\otimes\alpha)$, so daß $D_1 - D_2$ nur im symmetrischen Anteil von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ operiert. Weiter ist $D_1 - D_2$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung vom totalen Grad 0, so daß $D_1 - D_2 = \sum_{r=0}^\infty \nu^r D_{-2r}$, wobei die $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen D_{-2r} vom symmetrischen Grad $-2r$ sind. Verwendet man nun, daß $D_1 - D_2$ eine $\circ$-Superderivation ist, mit zwei Elementen von $\mathcal{W}(M)$, so findet man in nullter Ordnung in ν, daß D_0 eine Derivation des $\vee$-Produktes ist. Folglich ist D_0, da D_0 eine faserweise Abbildung ist, von der Gestalt $D_0 = S^l_{ij}(dx^i\otimes dx^j)i_s(\partial_l)$, wobei S^l_{ij} die Komponenten eines Tensorfeldes $S \in \Gamma^\infty(T^*M\otimes T^*M\otimes TM)$ bezeichnet. Betrachtet man die nullte Ordnung in ν der Gleichung $[D_1 - D_2, \delta] = 0$, so erhält man zudem $S^l_{ij} = S^l_{ji}$. Weiter betrachten wir den antisymmetrischen Anteil der Gleichung $(D_1 - D_2)((\alpha\otimes 1)\circ(\beta\otimes 1)) = ((D_1 - D_2)(\alpha\otimes 1))\circ(\beta\otimes 1) + (\alpha\otimes 1)\circ((D_1 - D_2)(\beta\otimes 1))$ für Einsformen $\alpha, \beta \in \Gamma^\infty(T^*M)$ und erhalten mit einer einfachen Rechnung in Koordinaten $G^{ki}S^l_{ij} = G^{li}S^k_{ij}$, wobei wir $G^{ik} = \mu_1^{i,k} - \mu_1^{k,i}$ verwendet haben, wobei G^{ik} die Komponenten eines nicht ausgearteten Tensorfeldes $G \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 TM)$ bezeichnet. Insbesondere existiert ein Tensorfeld $g \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 T^*M)$, dessen Komponenten mit denen von G durch $g_{ki}G^{li} = \delta^l_k$ verknüpft sind. Mit diesem Tensorfeld definieren wir $T_0 \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M\otimes T^*M)$ in lokalen Koordinaten durch $T_0 := \frac{1}{2}g_{ik}S^k_{rl}dx^i \vee dx^l \otimes dx^r$, und betrachten $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T_0)$. Eine direkte Rechnung unter Benutzung der für S^k_{rl} oben nachgewiesenen Gleichung liefert mit der Symmetrie von S, daß der Term in nullter Ordnung von ν dieser $\circ$-Superderivation mit D_0 übereinstimmt, so daß $D_1 - D_2 - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T_0)$ eine $\circ$-Superderivation der Form $\sum_{r=1}^\infty \nu^r \widetilde{D}_{-2r}$ ist, wobei $\widetilde{D}_{-2r}$ vom symmetrischen Grad $-2r$ ist. Wie oben folgt, daß $\widetilde{D}_{-2}$ eine faserweise Derivation des $\vee$-Produktes ist, da $\widetilde{D}_{-2}$ aber vom symmetrischen Grad -2 sein soll, folgt $\widetilde{D}_{-2} = 0$, denn für eine Einsform α gilt dann $\widetilde{D}_{-2}\alpha = 0$. Da aber eine Derivation bezüglich $\vee$ dadurch festgelegt ist, wie sie auf den Einsformen operiert folgt hieraus $\widetilde{D}_{-2} = 0$. Durch wiederholtes Anwenden dieser Argumentation erhalten wir $D_1 - D_2 - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T_0) = 0$, also die Existenz eines Tensorfeldes $T^{1,2} := T_0$, das die behauptete Gleichung (1.61) erfüllt. Die Eindeutigkeit dieses Tensorfeldes unter der Bedingung ein Element von $\Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M\otimes T^*M)$ zu sein ist offensichtlich, da Gleichung (1.61) das Element $T^{1,2}$ bis auf zentrale Elemente in $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ)$ festlegt, die aber durch die Elemente vom symmetrischen Grad 0 gegeben sind. Nach diesem sehr technischen Teil des Beweises erhalten wir wegen $0 = [\delta, D_1 - D_2] = [\delta, \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2})] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta T^{1,2})$, daß $\delta T^{1,2}$ zentral ist. Auf der anderen Seite ist $\delta T^{1,2}$ vom symmetrischen Grad 1, so daß die erste Identität in (1.62) folgt. Durch Quadrieren der Gleichung $D_1 = D_2 + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2})$ erhalten wir $-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R_1) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R_2) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(D_2T^{1,2}) + \frac{1}{\nu^2}\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2}\circ T^{1,2})$, so daß sich $D_2T^{1,2}$ und $R_2 - R_1 - \frac{1}{\nu}T^{1,2}\circ T^{1,2}$ um ein zentrales Element vom totalen Grad 2 und vom antisymmetrischen Grad 2 unterscheiden. Also gilt $D_2T^{1,2} = R_2 - R_1 - \frac{1}{\nu}T^{1,2}\circ T^{1,2} + 1\otimes\nu\vartheta^{1,2}$, woraus man durch Anwenden von D_2 mit $D_2R_2 = D_1R_1 = 0$ die Gleichung $-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R_2)T^{1,2} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R_1)T^{1,2} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(D_2T^{1,2})T^{1,2} + 1\otimes\nu d\vartheta^{1,2}$ erhält. Nochmaliges Einsetzen der ursprünglichen Gleichung liefert dann $d\vartheta^{1,2} = 0$. Mit $D_2 = D_1 - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2})$ folgt schließlich die Gleichung für $D_1T^{1,2}$, da $\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2})T^{1,2} = 2T^{1,2}\circ$

$T^{1,2}$, und das Lemma ist bewiesen, da es offensichtlich ist, daß $\vartheta^{1,2}$ unter den gegebenen Voraussetzungen wegen der Eindeutigkeit von $T^{1,2}$ durch D_1, D_2, R_1, R_2 eindeutig festgelegt ist. $\square$

Man beachte, daß das gerade bewiesene Lemma insbesondere alle möglichen Abbildungen D angibt, die man verwenden kann, um bei einem gegebenen faserweisen Produkt, das die eingangs erwähnte Bedingung erfüllt, eine Fedosov-Derivation zu konstruieren, vorausgesetzt man kennt eine solche Abbildung. Es gilt nämlich das folgende Lemma:

Lemma 1.3.26 *Sei $D : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare $\circ$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 und vom Deg-Grad 0, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllt, insbesondere sei $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$. Sei ferner $S \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$ und $T := \delta(S\otimes 1) \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$, dann ist $D' = D + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ für alle $S \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$ wieder eine solche Abbildung, wobei $D'^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R')$ mit $R' = R - DT - \frac{1}{\nu}T\circ T$. Nach dem vorangehenden Lemma sind dies auch alle möglichen derartigen Abbildungen, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllen.*

Beweis: Gemäß der Definition von T gilt $T \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes T^*M)$ und somit ist klar, daß $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ vom totalen Grad 0 und vom antisymmetrischen Grad 1 ist. Offensichtlich gilt aber auch $D'(1\otimes\alpha) = D(1\otimes\alpha) = 1\otimes d\alpha$, da $(1\otimes\alpha)$ für $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ zentral ist. Ferner folgt aus $[\delta, D] = 0$ mit $\delta T = 0$ (da $\delta^2 = 0$) direkt $[\delta, D'] = 0$. Durch Quadrieren von $D' = D + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ erhält man $D'^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(DT + \frac{1}{\nu}T\circ T)$, also gilt für $R' = R - DT - \frac{1}{\nu}T\circ T$ die Gleichung $D'^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R')$. Ferner folgt aus $\delta R = 0 = \delta T$ wegen $[\delta, D] = 0$ unmittelbar $\delta R' = 0$. Es bleibt nachzuweisen, daß $D'R' = 0$ gilt. Hierzu berechnet man aber mit $DR = 0$ und $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$ direkt

$$D'R' = D(R - DT - \frac{1}{\nu}T\circ T) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)(R - DT - \frac{1}{\nu}T\circ T) = 0,$$

wobei wir benutzt haben, daß D eine $\circ$-Superderivation ist und $\mathrm{ad}_\circ(T)(T\circ T) = 0$ gilt. $\square$

Wir betrachten nun die Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_1 = -\delta + D_1 - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r_1)$ und $\mathfrak{D}_2 = -\delta + D_2 - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r_2)$, die man mit den Lösungen der Gleichungen $\delta r_1 = D_1 r_1 - \frac{1}{\nu}r_1\circ r_1 + R_1 + 1\otimes\Omega_1$ und $\delta^{-1}r_1 = s_1$ bzw. $\delta r_2 = D_2 r_2 - \frac{1}{\nu}r_2\circ r_2 + R_2 + 1\otimes\Omega_2$ und $\delta^{-1}r_2 = s_2$ erhält, wobei $\Omega_1, s_1, \Omega_2, s_2$ die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllen.

Proposition 1.3.27 *Mit den Bezeichnungen von Lemma 1.3.25 gelten folgende Äquivalenzen:*

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 \iff T^{1,2} - r_1 + r_2 = 1\otimes\rho \iff \delta^{-1}T^{1,2} - s_1 + s_2 = \rho\otimes 1 \text{ und } \nu\vartheta^{1,2} + \Omega_1 - \Omega_2 = d\rho, \quad (1.63)$$

wobei $\rho = \sum_{i=1}^\infty \nu^i\rho_i \in \Gamma^\infty(T^*M)$ eine formale Reihe von Einsformen auf M ist.

Beweis: Unter Verwendung von (1.61) gilt offensichtlich $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 \iff \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T^{1,2} - r_1 + r_2) = 0$. Das ist aber äquivalent dazu, daß $T^{1,2} - r_1 + r_2$ zentral ist, so daß dieser Ausdruck wegen Lemma 1.3.1 von der Form $1\otimes\rho$ mit einer formalen Reihe von Einsformen sein muß. Da weiter $T^{1,2} - r_1 + r_2 \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ gilt, darf diese formale Reihe erst in erster Ordnung in ν von 0 verschiedene Terme besitzen. Für den Beweis der zweiten Äquivalenz gelte zunächst $T^{1,2} - r_1 + r_2 = 1\otimes\rho$, woraus man durch Anwenden von δ^{-1} unter Verwendung der Normierungsbedingungen an r_1 und r_2 die Gleichung $\delta^{-1}T^{1,2} - s_1 + s_2 = \rho\otimes 1$ erhält. Wendet man δ auf $T^{1,2} - r_1 + r_2 = 1\otimes\rho$ an, so findet man wegen $\delta T^{1,2} = 0$ und $\delta(1\otimes\rho) = 0$ mit den Gleichungen für r_1 und r_2

$$\begin{aligned}
0 &= D_2 r_2 - D_1 r_1 - \frac{1}{\nu}r_2\circ r_2 + \frac{1}{\nu}r_1\circ r_1 + R_2 - R_1 + 1\otimes(\Omega_2 - \Omega_1)\\
&= D_2(1\otimes\rho + r_1 - T^{1,2}) - \frac{1}{\nu}(r_1 - T^{1,2})\circ(r_1 - T^{1,2}) + R_2 - R_1 - D_1 r_1 + \frac{1}{\nu}r_1\circ r_1 + 1\otimes(\Omega_2 - \Omega_1)\\
&= 1\otimes(d\rho - \nu\vartheta^{1,2} + \Omega_2 - \Omega_1),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Gleichung für $D_2T^{1,2}$ und (1.61) verwendet haben. Für die Umkehrung der zweiten Äquivalenz gelte $\delta^{-1}T^{1,2} - s_1 + s_2 = \rho\otimes 1$ und $\nu\vartheta^{1,2} + \Omega_1 - \Omega_2 = d\rho$. Wir definieren $B :=$

$r_1 - r_2 + 1 \otimes \rho - T^{1,2} \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ und wollen zeigen, daß aus den gegebenen Gleichungen $B = 0$ folgt. Hierzu berechnen wir unter Ausnutzung der Gleichungen für r_1 und r_2 und der Gleichungen für $T^{1,2}$

$$\begin{aligned}
&-\delta B + D_1 B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r_1)B + \frac{1}{\nu} B \circ B \\
&= -\delta r_1 + \delta r_2 + D_1 r_1 - D_1 r_2 + 1 \otimes d\rho - D_1 T^{1,2} - \frac{1}{\nu} r_1 \circ r_1 + \frac{1}{\nu} r_2 \circ r_2 + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r_2) T^{1,2} + \frac{1}{\nu} T^{1,2} \circ T^{1,2} \\
&= -R_1 + R_2 + 1 \otimes (\Omega_2 - \Omega_1 + d\rho) - D_1 T^{1,2} + \frac{1}{\nu} T^{1,2} \circ T^{1,2} = 1 \otimes (\Omega_2 - \Omega_1 - \nu \vartheta^{1,2} + d\rho) = 0.
\end{aligned}$$

Weiter gilt $\delta^{-1} B = s_1 - s_2 + \rho \otimes 1 - \delta^{-1} T^{1,2} = 0$, so daß wir wegen $\sigma(B) = 0$ mit der Zerlegung (1.38) schließlich $B = \delta^{-1}(D_1 B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r_1)B + \frac{1}{\nu} B \circ B)$ erhalten. Nun erhöht die Abbildung $L : \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M) \to \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ mit $La := \delta^{-1}(D_1 a - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r_1)a + \frac{1}{\nu} a \circ a)$ den totalen Grad mindestens um eins, so daß es nach dem Fixpunkt-Satz (vgl. Anhang A.2 oder [109, Kor. A.1.6 ii.)]) einen eindeutigen Fixpunkt $B \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ mit $B = LB$ gibt. Da $B = 0$ trivialerweise diese Gleichung löst, folgt mit der Eindeutigkeit des Fixpunktes $0 = r_1 - r_2 + 1 \otimes \rho - T^{1,2}$, also die zu zeigende Gleichung. □

Um die Aussage dieser Proposition leichter deuten zu können wollen wir einige spezielle Situationen betrachten.

Beispiele 1.3.28 *i.) Betrachten wir zunächst den Fall, in dem $D_1 = D_2$, $R_1 = R_2$ und somit $T^{1,2} = 0$ und $\vartheta^{1,2} = 0$ gilt. Dann besagt die obige Proposition, daß ausgehend von den Daten (Ω, s) der Übergang zu $(\Omega, \widetilde{s} = s + \rho \otimes 1)$ gleichbedeutend mit der Beibehaltung der Normierungsbedingung s und dem Übergang zu $\Omega + d\rho$ ist. Für fixiertes Ω parametrisiert man also durch geeignete Variation der Normierungsbedingung alle zu Ω kohomologen Wahlen einer anderen formalen Reihe geschlossener Zweiformen.*

ii.) Weiter können wir den Fall $\rho = 0$ betrachten, der eintritt, wenn die Anteile vom symmetrischen Grad 1 von s_1 und s_2 übereinstimmen. Hier bedeutet die oben bewiesene Aussage, daß ausgehend von den Daten (D, Ω, s) der Übergang zu $(D, \Omega, \widetilde{s} = s + S \otimes 1)$ mit $S \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$, wobei $S \otimes 1 = \delta^{-1} T$, bzw. $T = \delta(S \otimes 1)$, gleichbedeutend mit der Beibehaltung von Ω und der Normierungsbedingung und dem Übergang zu $D' = D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ ist, wobei $D'^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R + DT - \frac{1}{\nu} T \circ T)$ und somit $R' = R + DT - \frac{1}{\nu} T \circ T$ verwendet wird. Somit beeinflußt eine solche Variation der Normierungsbedingung den Term vom totalen Grad 0 in der Fedosov-Derivation. In einigen speziellen Beispielen, auf die wir in den folgenden Kapiteln der Arbeit noch stoßen werden, werden wir nochmals auf die Interpretation der Normierungsbedingung zurückkommen, da es sich dort zeigen wird, daß dieser Anteil der Normierungsbedingung alle geeigneten Abbildungen ∇, die man wie in (1.39) mit einem Zusammenhang ∇ definiert, durchparametrisiert.

1.3.7 Die Fedosov-Konstruktion mit Torsion

Motiviert durch die Arbeit [71] in der Karabegov und Schlichenmaier eine Fedosov-Konstruktion mit einem torsionsbehafteten Zusammenhang angegeben haben, wollen wir den Satz 1.3.3 noch leicht verallgemeinern und zeigen, daß im allgemeinen auf die Voraussetzung $[\delta, D] = 0$ an die $\circ$-Superderivation verzichtet werden kann. Da in dem von Karabegov und Schlichenmaier betrachteten Spezialfall $[\delta, D]$ durch eine von der Torsion abhängige Abbildung gegeben ist, wollen wir die Verallgemeinerung dieser Fedosov-Konstruktion als Fedosov-Konstruktion mit Torsion bezeichnen, wenngleich $[\delta, D]$ im allgemeinen natürlich nicht zwingend von der Torsion eines Zusammenhangs herrühren muß. Wir können jedoch zeigen, daß diese Konstruktion unter Verzicht auf die Voraussetzung $[\delta, D] = 0$ tatsächlich äquivalent zu einer Fedosov-Konstruktion gemäß Satz 1.3.3 ist, so daß diese tatsächlich keine wirkliche Verallgemeinerung darstellt. Unsere Vorgehensweise wird hierbei ähnlich zu der in Abschnitt 1.3.6 sein.

Proposition 1.3.29 *Sei $D : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to WL(M)$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare $\circ$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 und Deg-Grad 0, so daß $[\delta, D] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ mit einem Element $T \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ vom totalen Grad 1 mit $\delta T = 0$, $D(1\otimes\alpha) = 1\otimes d\alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ und $D^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)$ mit einem Element $R \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ vom totalen Grad 2, welches $\delta R = DT$ und $DR = 0$ erfüllt, gilt. Sei weiter $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i\Omega_i$ eine formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M und $s \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(s) = 0$ gegeben. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $r \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ derart, daß*

$$\delta r = Dr - \frac{1}{\nu} r\circ r + T + R + 1\otimes\Omega \qquad \textit{und} \qquad \delta^{-1} r = s. \tag{1.64}$$

Darüberhinaus erfüllt r die Gleichung

$$r = \delta s + \delta^{-1}\left(Dr - \frac{1}{\nu} r\circ r + T + R + 1\otimes\Omega\right), \tag{1.65}$$

aus welcher r rekursiv bestimmt werden kann. In diesem Fall ist die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D} := -\delta + D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)$ eine Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 bezüglich $\circ$ und es gilt $\mathfrak{D}^2 = 0$.

Beweis: Um die Gleichungen (1.64) zu lösen wenden wir auf $\delta r = Dr - \frac{1}{\nu} r\circ r + T + R + 1\otimes\Omega$ die Abbildung δ^{-1} an und verwenden die Zerlegung $\delta\delta^{-1} + \delta^{-1}\delta + \sigma = \mathrm{id}$ und erhalten mit $\sigma(r) = 0$, da $r \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$, und $\delta^{-1} r = s$ die Gleichung (1.65). Wir betrachten nun die Abbildung $L : \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M) \to \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$, welche durch $La := \delta s + \delta^{-1}\left(Da - \frac{1}{\nu} a\circ a + T + R + 1\otimes\Omega\right)$ definiert ist. Aufgrund der totalen Grade von R, T, Ω, der Tatsache, daß $s \in \mathcal{W}_3(M)$, und da δ^{-1} den totalen Grad um eins erhöht, macht man sich leicht klar, daß L tatsächlich nach $\mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ abbildet und bezüglich der in Anhang A.2 erklärten Metrik kontrahierend ist, so daß es nach dem Fixpunkt-Satz (vgl. Anhang A.2 oder [109, Kor. A.1.6 ii.)]) genau einen Fixpunkt $r = Lr \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ von L gibt. Es bleibt nun noch zu zeigen, daß dieser Fixpunkt r tatsächlich auch die Gleichungen (1.64) erfüllt. Hierzu betrachten wir $A := \delta r - Dr + \frac{1}{\nu} r\circ r - T - R - 1\otimes\Omega$ und müssen $A = 0$ zeigen. Hierzu berechnen wir unter Verwendung der gemachten Voraussetzungen an D, T, R und Ω

$$\begin{aligned}
\delta A &= -\delta D r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta r) r - DT \\
&= -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T) r + D\delta r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(A + Dr - \frac{1}{\nu} r\circ r + T + R\right) r - DT \\
&= D\left(A + Dr - \frac{1}{\nu} r\circ r + T + R + 1\otimes\Omega\right) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(A + Dr + R\right) r - DT \\
&= DA - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R) r - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(Dr) r + DT + -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r) A + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(Dr) r + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R) r - DT \\
&= DA - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r) A.
\end{aligned}$$

Wegen $(\delta^{-1})^2 = 0$ gilt für den Fixpunkt r der Abbildung L offensichtlich $\delta^{-1} r = \delta^{-1}\delta s = s - \delta\delta^{-1} s - \sigma(s) = s$. Hiermit und mit $Lr = r$ finden wir $\delta^{-1} A = 0$, so daß mit der Hodge-de Rham-Zerlegung angewandt auf A, da offensichtlich $\sigma(A) = 0$, die Gleichung

$$A = \delta^{-1}\left(DA - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r) A\right)$$

folgt. Damit ist also $A \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ Fixpunkt der Abbildung $\widetilde{L} = \delta^{-1}\left(D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)\right)$, die wegen $r \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ den totalen Grad mindestens um eins erhöht, also auch einen eindeutigen Fixpunkt nämlich $A \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ besitzt. Andererseits ist $\widetilde{L}$ linear und besitzt 0 als trivialen Fixpunkt, so daß aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes $A = 0$ folgt. Also erfüllt der Fixpunkt r der Abbildung L die Gleichungen (1.64). Da wir aber schon gezeigt haben, daß eine Lösung von (1.64) auch immer Fixpunkt von L ist, folgt somit aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes r auch die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichungen (1.64).

Es bleibt noch zu zeigen, daß mit dem so bestimmten Element $r \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ für die $\circ$-Superderivation $\mathfrak{D} = -\delta + D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)$ tatsächlich $\mathfrak{D}^2 = 0$ gilt. Hierzu berechnen wir einfach

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^2 &= \delta^2 + D^2 + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(\frac{1}{\nu} r \circ r\right) - [\delta, D] + \left[\delta, \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)\right] - \left[D, \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)\right] \\ &= \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(-R + \frac{1}{\nu} r \circ r - T + \delta r - Dr\right) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(1 \otimes \Omega) = 0.\end{aligned}$$

□

Wir wollen nun zeigen, daß aus einer $\circ$-Superderivation D, die die Voraussetzungen von Proposition 1.3.29 erfüllt, auf einfache Weise eine andere $\circ$-Superderivation D' gefunden werden kann, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllt. Mit deren Hilfe werden wir dann durch geeignete Wahl der Daten Ω' und s' eine Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}'$ konstruieren können, die mit der Derivation $\mathfrak{D}$ aus Proposition 1.3.29 übereinstimmt.

Lemma 1.3.30 *Sei D eine $\circ$-Superderivation, die die Voraussetzungen von Proposition 1.3.29 erfüllt, dann erfüllt $D' := D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)$ die Voraussetzungen von Satz 1.3.3, wobei $R' = R + D\delta^{-1}T - \frac{1}{\nu}(\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T)$.*

Beweis: Da T vom totalen Grad 1 ist, ist T vom $\deg_s$-Grad 1 und vom $\deg_\nu$-Grad 0 und es gilt $\sigma(T) = 0$. Ferner ist deshalb $\delta^{-1}T$ vom $\deg_s$-Grad und vom Deg-Grad 2, so daß insbesondere klar ist, daß D' vom totalen Grad 0 ist. Die Tatsache, daß D' vom $\deg_a$-Grad 1 ist, ist ebenfalls offenkundig, da $T \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M)$. Nun gilt aber offensichtlich $[\delta, D'] = [\delta, D] - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta\delta^{-1}T)$ und mit der Hodge-de Rham-Zerlegung erhalten wir wegen $\delta T = 0$ und $\sigma(T) = 0$ die Gleichung $\delta\delta^{-1}T = T$, so daß wegen $[\delta, D] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)$ schließlich $[\delta, D'] = 0$ folgt. Da $\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)$ auf $1 \otimes \alpha$ verschwindet gilt natürlich auch $D'(1 \otimes \alpha) = 1 \otimes d\alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$. Durch Quadrieren der Definition $D' = D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)$ erhält man $D'^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(R + D\delta^{-1}T - \frac{1}{\nu}(\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T)\right)$, so daß die Wahl $R' = R + D\delta^{-1}T - \frac{1}{\nu}(\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T)$ nahegelegt wird. Wir müssen nun noch nachweisen, daß $\delta R' = D'R' = 0$. Zunächst macht man sich aber leicht klar, daß R' vom Deg-Grad 2 ist, da R und $\delta^{-1}T$ vom Deg-Grad 2 sind. Zunächst berechnen wir $\delta R'$

$$\begin{aligned}\delta R' &= \delta R + \delta D\delta^{-1}T - \frac{1}{\nu}\delta((\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T)) \\ &= DT + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(T)(\delta^{-1}T) - D\delta\delta^{-1}T - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta\delta^{-1}T)(\delta^{-1}T) = 0,\end{aligned}$$

da $\delta\delta^{-1}T = T$. Ferner bestimmen wir $D'R'$ durch direkte Rechnung

$$D'R' = DR - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)R - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(R)(\delta^{-1}T) - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)(D\delta^{-1}T) - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(D\delta^{-1}T)(\delta^{-1}T) = 0,$$

da $\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)((\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T)) = 0$. Somit erfüllt D' mit dem so definierten R' die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 und die Aussage des Lemmas ist bewiesen. □

Wir geben nun eine Bedingung an die Daten, aus denen man mit D' eine Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}'$ erhält, an, so daß diese mit der nach Proposition 1.3.29 konstruierten Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}$ übereinstimmt.

Proposition 1.3.31 *Sei D eine $\circ$-Superderivation, die die Voraussetzungen von Proposition 1.3.29 erfüllt und sei D' die gemäß Lemma 1.3.30 hieraus konstruierte $\circ$-Superderivation, die die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 erfüllt. Seien dann $r, r' \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ die eindeutigen Lösungen der Gleichungen $\delta r = Dr - \frac{1}{\nu} r \circ r + T + R + 1 \otimes \Omega$, $\delta^{-1} r = s$ bzw. $\delta r' = D'r' - \frac{1}{\nu} r' \circ r' + R' + 1 \otimes \Omega$, $\delta^{-1} r' = s$, wobei $D' = D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T)$ und $R' = R + D\delta^{-1}T - \frac{1}{\nu}(\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T)$, dann gilt $\delta^{-1}T + r' - r = 0$, d.h. die Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D} = -\delta + D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)$ und $\mathfrak{D}' = -\delta + D' - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r')$ und somit auch die hierdurch induzierten assoziativen Produkte $*_{\mathfrak{D}}$ und $*_{\mathfrak{D}'}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ stimmen überein.*

Beweis: Wir wollen zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen $\delta^{-1}T + r' - r = 0$ gilt. Hierzu definieren wir $B := \delta^{-1}T + r' - r \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ und leiten eine Fixpunkt-Gleichung für B ab, die nur 0 als Lösung besitzt. Zunächst gilt wegen $(\delta^{-1})^2 = 0$ und $\delta^{-1}r' = \delta^{-1}r = s$ die Gleichung $\delta^{-1}B = 0$ und offensichtlich ist $\sigma(B) = 0$. Weiter finden wir mit $\delta\delta^{-1}T = T$ und den Gleichungen für r und r'

$$\begin{aligned}
\delta B &= \delta\delta^{-1}T + \delta r' - \delta r = D'r' - \frac{1}{\nu} r' \circ r' + R' - Dr + \frac{1}{\nu} r \circ r - R \\
&= \left(D - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(\delta^{-1}T) \right)(B + r - \delta^{-1}T) - \frac{1}{\nu}(B + r - \delta^{-1}T) \circ (B + r - \delta^{-1}T) + R' - Dr + \frac{1}{\nu} r \circ r - R \\
&= DB - D\delta^{-1}T + R' - R + \frac{1}{\nu} r \circ r + \frac{1}{\nu}(\delta^{-1}T) \circ (\delta^{-1}T) - \frac{1}{\nu}(B + r) \circ (B + r) \\
&= DB - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)B - \frac{1}{\nu} B \circ B.
\end{aligned}$$

Mit der Hodge-de Rham-Zerlegung folgt hieraus mit $\delta^{-1}B = 0$ und $\sigma(B) = 0$ aber $B = \delta^{-1}(DB - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)B - \frac{1}{\nu} B \circ B)$. Nun besitzt die Abbildung $L : \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M) \to \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$, die durch $La := \delta^{-1}(Da - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(r)a - \frac{1}{\nu} a \circ a)$ definiert ist, wieder einen eindeutigen Fixpunkt, da diese den totalen Grad mindestens um eins erhöht. Trivialerweise ist 0 ein Fixpunkt von L, aber wie wir gezeigt haben gilt auch $LB = B$, so daß schließlich $B = 0$ und somit $r' = r - \delta^{-1}T$ folgt. Die Aussage, daß dann $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}'$ gilt, ist eine triviale Konsequenz dieser Gleichung und der Definition von D'. □

Aufgrund der Aussage dieser Proposition stellt also eine Fedosov-Konstruktion mit Torsion keinerlei Verallgemeinerung gegenüber einer solchen mit $[\delta, D] = 0$ dar. Jedoch kann der Verzicht auf die Voraussetzung $[\delta, D] = 0$ in manchen Beispielen wie etwa in [71] das Auffinden einer der Situation angemessenen $\circ$-Superderivation D erleichtern.

Kapitel 2

Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung

2.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt stellen wir die Grundlagen dar, die für die folgenden Abschnitte über die Klassifikation von Sternprodukten von Nöten sind. Hierbei stellen wir zunächst den Zusammenhang zwischen Deformationstheorie assoziativer Algebren und der Hochschild-Kohomologie her. Im Anschluß berichten wir über einige Resultate über Derivationen und Automorphismen von Sternprodukten, die im weiteren Verlauf der Arbeit immer wieder Verwendung finden werden.

2.1.1 Hochschild-Kohomologie und Deformationstheorie

Um den kohomologischen Gehalt des Deformationsproblems diskutieren zu können, erinnern wir in diesem Abschnitt an die Definition des Hochschild-Komplexes assoziativer Algebren. Für eine assoziative Algebra A über einem Körper $\mathbb{K}$ definiert man die Hochschild-Koketten mit Werten in A durch

$$C^{\bullet}_{\mathrm{H}}(A,A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n(A,A) \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rcll} C^n_{\mathrm{H}}(A,A) & := & \mathsf{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}, A) & n>0 \\ C^0_{\mathrm{H}}(A,A) & := & A & \\ C^n_{\mathrm{H}}(A,A) & := & \{0\} & n<0. \end{array} \tag{2.1}$$

Elemente $C \in C^n_{\mathrm{H}}(A,A)$ können also als $\mathbb{K}$-multilineare Abbildungen $C : A\times\ldots\times A$ (n Einträge) $\to A$ aufgefaßt werden. Das Hochschild-Differential $\delta_{\mathrm{H}} : C^{\bullet}_{\mathrm{H}}(A,A) \to C^{\bullet+1}_{\mathrm{H}}(A,A)$ ist für $C \in C^n_{\mathrm{H}}(A,A)$ und $a_0,\ldots,a_n \in A$ durch

$$(\delta_{\mathrm{H}}C)(a_0,\ldots,a_n) \tag{2.2}$$

$$:= \quad a_0C(a_1,\ldots,a_n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^kC(a_0,\ldots,a_{k-1}a_k,\ldots,a_n) + (-1)^{n+1}C(a_0,\ldots,a_{n-1})a_n \tag{2.3}$$

definiert. Unter Verwendung der Assoziativität von A kann man durch elementares Nachrechnen $\delta_{\mathrm{H}}^2 =$ zeigen, womit δ_{H} also eine Kohomologie definiert. Als Hochschild-Kozykeln vom Grad n bezeichnet man die Elemente des Kerns $Z^n_{\mathrm{H}}(A,A)$ von δ_{H} eingeschränkt auf $C^n_{\mathrm{H}}(A,A)$. Also Hochschild-Koränder $B^n_{\mathrm{H}}(A,A)$ bezeichnet man die Elemente in $C^n_{\mathrm{H}}(A,A)$, die im Bild von δ_{H} liegen. Offensichtlich gilt wegen $\delta_{\mathrm{H}}^2 = 0$ $B^n_{\mathrm{H}}(A,A) \subseteq Z^n_{\mathrm{H}}(A,A)$, und man definiert die Hochschild-Kohomologie von A als

$$H^{\bullet}_{\mathrm{H}}(A,A) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n_{\mathrm{H}}(A,A) \qquad \text{mit} \qquad H^n_{\mathrm{H}}(A,A) := Z^n_{\mathrm{H}}(A,A)/B^n_{\mathrm{H}}(A,A). \tag{2.4}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir uns nun dem Deformationsproblem zuwenden. Das assoziative Produkt der Algebra A sei wieder mit $\mu_0(a,b) = ab$ mit $\mu_0 \in C^2_{\mathrm{H}}(A,A)$ bezeichnet und die Assoziativität der Algebra A ist äquivalent zu $\delta_{\mathrm{H}}\mu_0 = 0$. Sei nun weiter $\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i \mu_i \in C^2_{\mathrm{H}}(A,A)[[\nu]]$ eine formale Deformation von μ_0, wobei $A[[\nu]]$ als $\mathbb{K}[[\nu]]$-Algebra aufgefaßt wird. Dann ist μ genau dann assoziativ, wenn folgende Gleichungen erfüllt sind

$$-\delta_{\mathrm{H}}\mu_1 = 0 \quad \text{und} \quad -(\delta_{\mathrm{H}}\mu_k)(a,b,c) + \sum_{l=1}^{k-1} (\mu_l(\mu_{k-l}(a,b),c) - \mu_l(a,\mu_{k-l}(b,c))) = 0 \quad \forall k \geq 2, \tag{2.5}$$

die man erhält, wenn man die Gleichung $\mu(a,\mu(b,c)) = \mu(\mu(a,b),c)$ für $a,b,c \in A$ Ordnung für Ordnung im formalen Parameter ν betrachtet. Die nullte Ordnung in ν dieser Gleichung ist gerade wieder äquivalent zur Assoziativität von A, die wir vorausgesetzt haben. Die erste Ordnung bedeutet gerade, daß die Richtung der Deformation μ_1 ein Hochschild-Kozyklus sein muß. Hat man nun zu einem $\mu_1 \in Z^2_{\mathrm{H}}(A,A)$ höhere Ordnungen $\mu_2,\ldots,\mu_{k-1}$ gefunden, so daß die Assoziativität von μ bis zur Ordnung $k-1$ erfüllt ist, so muß das noch zu findende μ_k (2.5) erfüllen. Dies stellt aber ein kohomologisches Problem dar. Zwar läßt sich unter diesen Bedingungen zeigen, daß $E_k \in C^3_{\mathrm{H}}(A,A)$ mit $E_k(a,b,c) = \sum_{l=1}^{k-1}(\mu_l(\mu_{k-l}(a,b),c) - \mu_l(a,\mu_{k-l}(b,c)))$ die notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $\delta_{\mathrm{H}}\mu_k = E_k$ erfüllt, also δ_{H}-geschlossen ist. Es ist aber im allgemeinen nicht klar, ob E_k auch δ_{H}-exakt ist. Damit tritt beim Deformationsproblem einer assoziativen Algebra also im allgemeinen eine Obstruktion in der dritten Hochschild-Kohomologie $H^3_{\mathrm{H}}(A,A)$ der Algebra A auf. Im günstigsten Fall ist $H^3_{\mathrm{H}}(A,A) = 0$ und damit (2.5) immer lösbar. Im Fall der Deformationsquantisierung ist dies aber nicht richtig, womit die Existenz von Deformationen zu gegebenem μ_1 durch zusätzliche Überlegungen gezeigt werden muß.

Nach dieser allgemeinen Diskussion des Deformationsproblems wollen wir uns der speziellen Situation der Deformationsquantisierung zuwenden. Wir betrachten die $\mathbb{C}$-Algebra $\mathcal{C}^\infty(M)$ der glatten komplex-wertigen Funktionen auf einer glatten Mannigfaltigkeit M und fragen nach der Hochschild-Kohomologie von $\mathcal{C}^\infty(M)$. Der rein algebraische Rahmen allein scheint hier aufgrund der $\mathcal{C}^\infty$-Struktur und der topologischen Struktur der Mannigfaltigkeit M unangemessen, so daß man folgende speziellere Koketten betrachtet:

$$\begin{aligned}
C^n_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) &:= \{C \in C^n_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \mid C \text{ ist lokal}\}\\
C^n_{\mathrm{H,lok,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) &:= \{C \in C^n_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \mid C \text{ verschwindet auf Konstanten}\}\\
C^n_{\mathrm{H,diff}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) &:= \{C \in C^n_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \mid C \text{ ist multidifferentiell}\}\\
C^n_{\mathrm{H,diff,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) &:= \{C \in C^n_{\mathrm{H,diff}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \mid C \text{ verschwindet auf Konstanten}\}.
\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet Lokalität einer Kokette $C \in C^n_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))$, daß für alle $f_1,\ldots,f_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ die Inklusion $\operatorname{supp}(C(f_1,\ldots,f_n)) \subseteq \operatorname{supp}(f_1) \cap \ldots \cap \operatorname{supp}(f_n)$ gilt. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
&C^n_{\mathrm{H,diff,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \subseteq C^n_{\mathrm{H,diff}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \subseteq C^n_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))\\
\text{und}\quad &C^n_{\mathrm{H,lok,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)) \subseteq C^n_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, da alle Multidifferentialoperatoren lokal sind. Der algebraisch definierte Hochschild-Korandoperator δ_{H} bildet zudem offensichtlich lokale Koketten auf lokale, differentielle auf differentielle und so weiter ab, so daß $(C^\bullet_{\mathrm{H,diff,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)),\delta_{\mathrm{H}})$, $(C^\bullet_{\mathrm{H,diff}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)),\delta_{\mathrm{H}})$, $(C^\bullet_{\mathrm{H,lok,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)),\delta_{\mathrm{H}})$ und $(C^\bullet_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)),\delta_{\mathrm{H}})$ Unterkomplexe des algebraischen Hochschild-Komplexes $(C^\bullet_{\mathrm{H}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M)),\delta_{\mathrm{H}})$ sind. Diese Unterkomplexe induzieren natürlich die entsprechenden Hochschild-Kohomologien $H^n_{\mathrm{H,diff,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))$, $H^n_{\mathrm{H,diff}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))$, $H^n_{\mathrm{H,lok,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))$ und $H^n_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M),\mathcal{C}^\infty(M))$ und man versucht das Deformationsproblem in einer dieser Kohomologien zu lösen. Das Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem bestimmt diese Kohomologien alle als isomorph zu den antisymmetrischen Multivektorfeldern auf M. Ursprünglich wurde dieser Satz von Hochschild, Kostant und Rosenberg für algebraische Variätäten bewiesen [65]. Der Beweis für eine beliebige Mannigfaltigkeit M ist in [27] zu finden. Einen direkten Beweis für den differentiellen Fall findet man auch in [54].

Satz 2.1.1 (Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem) *Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}\Gamma^\infty(\textstyle\bigwedge^n TM) &\cong H^n_{\mathrm{H,diff,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \cong H^n_{\mathrm{H,diff}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \\ &\cong H^n_{\mathrm{H,lok,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)) \cong H^n_{\mathrm{H,lok}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)),\end{aligned}$$

wobei die totale Antisymmetrisierung der Koketten den Isomorphismus induziert. Es gilt also für alle δ_{H}-geschlossenen $C \in C^n_{\mathrm{H},\diamond}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M))$ und alle $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$C(f_1, \ldots, f_n) = (\delta_{\mathrm{H}} B)(f_1, \ldots, f_n) + \Lambda(df_1, \ldots, df_n)$$

mit einem $B \in C^{n-1}_{\mathrm{H},\diamond}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M))$ und $\Lambda \in \Gamma^\infty(\bigwedge^n TM)$, wobei $\diamond$ für lok, $\mathrm{lok,nk}$, diff oder $\mathrm{diff,nk}$ steht.

Insbesondere impliziert dieser Satz, daß die dritte Hochschild-Kohomologie für $\dim(M) \geq 3$ nicht-trivial ist und deshalb bei der Konstruktion von Sternprodukten a priori mit dem Auftreten von Obstruktionen zu rechnen ist. Daß diese tatsächlich vermieden werden können, ist ein Ergebnis zusätzlicher Argumente.

Da für ein Sternprodukt $\star$ immer $f \star 1 = 1 \star f = f$ gelten soll, betrachten wir ausschließlich Koketten, die auf den Konstanten verschwinden, so daß von den obigen Isomorphien jeweils nur die erste jeder Zeile für unseren Fall relevant ist. Zudem betrachten wir in dieser Arbeit nur differentielle Sternprodukte, so daß für unsere Zwecke nur die oben erstgenannte Isomorphie zum tragen kommt. Für eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) läßt sich die Gleichung für einen Hochschild n-Kozyklus C unter Verwendung der Hamiltonschen Vektorfelder $X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ als $C(f_1, \ldots, f_n) = (\delta_{\mathrm{H}} B)(f_1, \ldots, f_n) + \beta(X_{f_1}, \ldots, X_{f_n})$ schreiben, wobei $\beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^n T^*M)$. Das Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem wird sich in vielen Beweisen der folgenden Abschnitte als ein wichtiges Werkzeug erweisen.

2.1.2 Lokale Äquivalenzen, $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivationen und Automorphismen

In diesem Abschnitt stellen wir einige grundlegende Resultate über die topologischen Bedingungen zusammen, die bei der Frage nach der Existenz von Äquivalenztransformationen zwischen Sternprodukten von Wichtigkeit sind. Weiter zeigen wir, wodurch die $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen von Sternprodukten klassifiziert werden und welche Gestalt $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Automorphismen von Sternprodukten haben und wie diese mit den Derivationen in Zusammenhang stehen.

Ein erstes wichtiges Resultat ist, daß alle Sternprodukte für (M, ω) lokal äquivalent sind.

Proposition 2.1.2 ([56, Prop. 3.1]) *Seien $\star$ und $\star'$ zwei differentielle Sternprodukte auf (M, ω). Wenn die zweite de Rham-Kohomologie verschwindet, also $H^2_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C}) = 0$ gilt, dann existiert eine Äquivalenztransformation T, so daß $T(f \star g) = (Tf) \star' (Tg)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt.*

Beweis: Wir nehmen an, daß die Sternprodukte $\star$ und $\star'$ bis zur Ordnung k übereinstimmen (d.h. für die beschreibenden Bidifferentialoperatoren gilt $C_i = C'_i$ für $0 \leq i \leq k-1$). Aus der Assoziativität von $\star$ und $\star'$ in k-ter Ordnung in ν folgt, daß $\delta_{\mathrm{H}}(C_k - C'_k) = 0$, also kann man nach dem Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem $(C_k - C'_k)(f, g) = (\delta_{\mathrm{H}} B)(f, g) + A(X_f, X_g)$ mit einem Differentialoperator B und einer Zweiform

A auf M schreiben. Aus der totalen Antisymmetrisierung der Assoziativität beider Sternprodukte in der $k+1$-ten Ordnung erhält man zudem, daß A geschlossen ist. Damit erhält man aber $A = \frac{1}{2} d\alpha$ für eine Einsform α, da $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C}) = 0$. Transformiert man nun $\star'$ mit der Äquivalenztransformation T', welche durch $T'f := f + \nu^{k-1}\alpha(X_f)$ definiert ist, so erhält man durch $T'(f \star' g) = (T'f) \star'' (T'g)$ ein Sternprodukt $\star''$ und es gilt, daß der antisymmetrische Anteil von $C_k - C''_k$ verschwindet. Um dies einzusehen betrachtet man einerseits den antisymmetrischen Anteil aus der k-ten Ordnung der Definitionsgleichung von $\star''$, der $C'_k(f,g) - C'_k(g,f) = C''_k(f,g) - C''_k(g,f) - d\alpha(X_f, X_g)$ liefert. Da andererseits wegen der Symmetrie von $\delta_{\mathrm{H}} B$ $C_k(f,g) - C_k(g,f) - 2A(X_f, X_g) = C'_k(f,g) - C'_k(g,f)$ gilt, folgt also wegen $A = \frac{1}{2}d\alpha$ die behauptete Gleichung. Also gilt $C_k = C''_k + \delta_{\mathrm{H}} B'$, da natürlich weiterhin $C_i = C''_i$ für $0 \leq i \leq k-1$. Transformiert man nun dieses Sternprodukt abermals mit einer Äquivalenztransformation $T'' := \mathrm{id} - \nu^k B'$, so stimmte das resultierende Sternprodukt $\star'''$ mit $T''(f \star'' g) = (T''f) \star''' (T''g)$ bis zur Ordnung $k+1$ mit $\star$ überein, denn die k-te Ordnung dieser Gleichung lautet $C''_k = C'''_k - \delta_{\mathrm{H}} B'$. Da je zwei Sternprodukte immer in der nullten Ordnung miteinander übereinstimmen folgt somit induktiv, daß sie auch äquivalent sind. □

Folgerung 2.1.3 ([56, Cor. 3.2]) *Seien $\star$ und $\star'$ zwei differentielle Sternprodukte für (M,ω) und $\mathcal{U} \subseteq M$ eine offene zusammenziehbare Menge, dann existiert eine lokale Äquivalenztransformation T, so daß $T(f \star g) = (Tf) \star' (Tg)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})[[\nu]]$ gilt.*

Beweis: Da $H^2_{\mathrm{dR}}(\mathcal{U};\mathbb{C}) = 0$ folgt die Behauptung direkt aus Proposition 2.1.2. □

Die eben bewiesene Existenz lokaler Äquivalenztransformationen zwischen je zwei Sternprodukten, wird in den folgenden Abschnitten zur Definition der charakteristischen Klasse noch eine wichtige Rolle spielen.

Weiter benötigen wir noch einige Ergebnisse über die lokale Gestalt von $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen eines Sternproduktes.

Proposition 2.1.4 ([11, Thm. 4.2]) *Die $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen eines Sternproduktes $\star$ auf (M,ω) sind in Bijektion mit $Z^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$. Der Raum der $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen modulo der quasi-inneren Derivationen ist in Bijektion mit $H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$. Präzise ausgedrückt ist jede $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation D von $\star$ von der Gestalt*

$$\mathsf{D}_{A\alpha} = \mathsf{D}_A|_{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)} = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i \frac{1}{\nu} \mathrm{ad}_\star(H_{i\alpha}) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(H_\alpha), \tag{2.6}$$

wobei $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine lokal endliche, gute, offene Überdeckung von M ist und $dH_{i\alpha} = A_i|_{\mathcal{U}_\alpha}$ gilt. Hierbei sei $A = \sum_{i=0}^\infty \nu^i A_i$ eine formale Reihe geschlossener Einsformen auf M, mit der für $H_\alpha = \sum_{i=0}^\infty \nu^i H_{i\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ die Gleichung $dH_\alpha = A|_{\mathcal{U}_\alpha}$ erfüllt ist. Insbesondere ist D_A durch (2.6) global wohldefiniert.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß der Raum der $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen von $\star$ in Bijektion mit formalen Reihen geschlossener Einsformen auf M ist. Hierzu benötigen wir folgende Vorüberlegung. Sei $A \in Z^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$, dann existieren nach dem Poincaré-Lemma Funktionen $H_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ mit $dH_\alpha = A|_{\mathcal{U}_\alpha}$ und aufgrund der Assoziativität von $\star$ ist durch $\mathsf{D}_{A\alpha} = \mathsf{D}_A|_{\mathcal{U}_\alpha} := \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(H_\alpha)$ eine lokale Derivation von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]], \star)$ erklärt. Da aber auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ offensichtlich $H_\alpha - H_\beta = c_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ gilt, erhalten wir, da die beschreibenden Bidifferentialoperatoren C_k von $\star$ für $k \geq 1$ auf Konstanten verschwinden, $\mathsf{D}_{A\alpha} - \mathsf{D}_{A\beta} = 0$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$. Somit ist D_A durch obige Definition eine global erklärte $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $\star$. Hiermit ist aber offensichtlich, daß man für jede formale Reihe A geschlossener Einsformen auf M durch (2.6) eine global erklärte $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $\star$ erhält. Um zu zeigen, daß man hiermit schon alle $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen erhält, gehen wir induktiv vor, um für eine gegebene Derivation D von $\star$ eine formale Reihe von geschlossenen Einsformen A_i zu finden, so daß $\sum_{i=0}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{A_i} = \mathsf{D}$ gilt. Wir nehmen an, daß wir die geschlossenen Einsformen A_i für $0 \leq i \leq k-1$ bereits gefunden haben, so daß $\mathsf{D}' = \mathsf{D} - \sum_{i=0}^{k-1} \nu^i \mathsf{D}_{A_i}$, was offensichtlich wieder eine Derivation von $\star$ ist, die Form $\mathsf{D}' = \sum_{i=k}^{\infty} \nu^i \mathsf{D}'_i$ besitzt. Die k-te Ordnung in ν der Gleichung $\mathsf{D}'(f \star g) = (\mathsf{D}'f) \star g + f \star (\mathsf{D}'g)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ liefert $\mathsf{D}'_k(fg) = (\mathsf{D}'_k f)g + f(\mathsf{D}'_k g)$, d.h. D'_k ist ein Vektorfeld $X_k \in \Gamma^\infty(TM)$. Aus dem antisymmetrischen Anteil der $k+1$-ten Ordnung in ν der Gleichung $\mathsf{D}'(f \star g) = (\mathsf{D}'f) \star g + f \star (\mathsf{D}'g)$ erhält man $\mathcal{L}_{X_k}\{f, g\} = \{\mathcal{L}_{X_k} f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{X_k} g\}$, so daß X_k ein symplektisches Vektorfeld ist, d.h. $\mathcal{L}_{X_k}\omega = 0$. Wegen $d\omega = 0$ und der Cartan-Formel für die Lie-Ableitung gilt dann $di_{X_k}\omega = 0$, so daß $A_k := -i_{X_k}\omega$ eine geschlossene Einsform definiert. Dann ist $\nu^k \mathsf{D}_{A_k}$ offensichtlich eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation und $D' - \nu^k \mathsf{D}_{A_k}$ ist eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation, die erst in $k+1$-ter Ordnung beginnt, womit die Surjektivität induktiv bewiesen ist. Um die Injektivität der durch Gleichung (2.6) erklärten Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$ zu beweisen, betrachten wir zwei $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivationen D_A, $\mathsf{D}_{A'}$ mit $\mathsf{D}_{A\,\alpha} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(H_\alpha)$, $\mathsf{D}_{A'\,\alpha} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(H'_\alpha)$, aus deren Übereinstimmung dann natürlich $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(H_\alpha - H'_\alpha) = 0$ folgt. Dies impliziert aber, da eine Funktion auf $\mathcal{U}_\alpha$, deren Poisson-Klammer mit allen Funktionen auf $\mathcal{U}_\alpha$ verschwindet, konstant ist, daß $H_\alpha - H'_\alpha = c_\alpha \in \mathbb{C}[[\nu]]$ und somit $A|_{\mathcal{U}_\alpha} = dH_\alpha = dH'_\alpha = A'|_{\mathcal{U}_\alpha}$ gilt. Da $\alpha \in I$ beliebig war, folgt hieraus also $A = A'$ und somit die zu zeigende Injektivität der Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$. Offensichtlich gilt für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ $\mathsf{D}_{df} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(f)$, so daß die durch Gleichung (2.6) erklärte Abbildung $A \mapsto \mathsf{D}_A$ eine Bijektion zwischen den Quotienten $H^1_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ und dem Raum der $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen modulo der quasi-inneren Derivationen durch $[A] \mapsto [\mathsf{D}_A]$ induziert (vgl. Satz 1.3.24). □

Folgerung 2.1.5 ([56, Cor. 3.6]) *Jede lokale $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})[[\nu]], \star)$, wobei $\mathcal{U} \subseteq M$ eine offene zusammenziehbare Menge sei, ist eine quasi-innere Derivation.*

Beweis: Sei $\mathsf{D}|_{\mathcal{U}}$ eine lokale $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})[[\nu]], \star)$, dann findet man wie im Beweis der Proposition 2.1.4 eine formale Reihe $H = \sum_{i=0}^{\infty} \nu^i H_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})[[\nu]]$, so daß $\mathsf{D}|_{\mathcal{U}} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(H)$. □

Schließlich wollen wir noch einige Eigenschaften von Automorphismen von Sternprodukten und deren lokale Struktur untersuchen. Wir beschränken uns hierbei auf $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Automorphismen, die mit id beginnen, die in der Literatur gelegentlich auch als Selbstäquivalenzen eines Sternproduktes bezeichnet werden.

Proposition 2.1.6 *Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Automorphismus eines differentiellen Sternproduktes $\star$ für (M, ω), der mit* id *beginnt, dann gilt $\mathcal{A} = \exp(\nu \mathsf{D})$, wobei D eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $\star$ ist.*

Beweis: Wiederum erhalten wir den Beweis dieser Proposition mit einem induktiven Argument. Sei also $\mathcal{A} = \mathrm{id} + \nu^k \mathcal{A}_k + O(\nu^{k+1})$, dann erhalten wir aus der k-ten Ordnung der Gleichung $\mathcal{A}(f \star g) = (\mathcal{A}f) \star (\mathcal{A}g)$, daß $\mathcal{A}_k$ ein Vektorfeld auf M ist. Der antisymmetrische Anteil der Gleichung in $k+1$-ter Ordnung zeigt, daß dieses Vektorfeld symplektisch ist. Wie im Beweis von Proposition 2.1.4 findet man also eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation D_k von $\star$, so daß $\mathsf{D}_k = \mathcal{A}_k + O(\nu)$ und $\exp(-\nu^k \mathsf{D}_k)\mathcal{A} = \mathrm{id} + \nu^{k+1}\mathcal{A}'_{k+1} + O(\nu^{k+2})$ ist offensichtlich wieder eine Selbstäquivalenz von $\star$. Induktiv erhalten wir also die Existenz von $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Derivationen D_k für $k \geq 1$ von $\star$ derart, daß $\mathrm{id} = \ldots \exp(-\nu^k \mathsf{D}_k) \ldots \exp(-\nu \mathsf{D}_1)\mathcal{A}$. Da sich die Ordnung in ν im Exponenten von einem Faktor zum nächsten jeweils um eins erhöht, ist dieses unendliche Produkt von Exponentialfunktionen offensichtlich wohldefiniert. Da der Kommutator zweier Derivationen wieder eine Derivation ist, erhalten wir aus der Gestalt der Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe, daß $\ldots \exp(-\nu^k \mathsf{D}_k) \ldots \exp(-\nu \mathsf{D}_1) = \exp(-\nu \mathsf{D})$, wobei D eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $\star$ ist. Hiermit gilt aber $\mathcal{A} = \exp(\nu \mathsf{D})$. □

Folgerung 2.1.7 ([56, Cor. 3.4]) *Jede lokale Selbstäquivalenz $\mathcal{A}|_{\mathcal{U}}$ eines Sternproduktes $\star$ ist ein lokaler innerer Automorphismus von $\star$, d.h. $\mathcal{A}|_{\mathcal{U}} = \exp(\mathrm{ad}_\star(a))$, wobei $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})[[\nu]]$ und $\mathcal{U} \subseteq M$ eine offene zusammenziehbare Menge bezeichnet.*

Beweis: Die Folgerung ist eine direkte Konsequenz der Proposition 2.1.6 und der Folgerung 2.1.5. □

Auch diese Aussagen über lokale Selbstäquivalenzen von Sternprodukten, werden sich als essentielle Bestandteile der Definitionen der klassifizierenden Klassen im folgenden Abschnitt erweisen.

2.2 Deligne's Čech-Kohomologie-Klassen

In diesem Abschnitt werden wir die Klassifikation von Sternprodukten bis auf Äquivalenz wie sie von Deligne in [31] eingeführt wurde vorstellen. Anstatt der in [31] gewählten algebraisch-geometrischen Formulierung folgen wir der Darstellung von Gutt und Rawnsley [56], die sich auf die Verwendung Čech-kohomologischer Techniken beschränkt und somit direkte, elementare Beweise der wichtigen Aussagen ermöglicht. Wir wollen betonen, daß die Ergebnisse und Definitionen, die wir in diesem Abschnitt darstellen nicht neu sind, sondern in einer Zusammenfassung der Resultate aus [31, 56] bestehen. Um jedoch eine Einordnung der von uns erzielten Resultate, die wir in den Abschnitten 2.3, 2.4 und 3.3 diskutieren werden und die von den allgemeinen Klassifikationsaussagen Gebrauch machen, zu ermöglichen, erscheint es uns unerläßlich diese anzuführen.

Wir werden in den folgenden drei Abschnitten verschiedene Čech-Kohomologie-Klassen aus $H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ definieren und deren Eigenschaften untersuchen. Da es sich jedoch an einigen Stellen als geschickter erweist, mit den vermöge des de Rham-Isomorphismus entsprechenden Klassen der zweiten de Rham-Kohomologie $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ zu arbeiten, verabreden wir für die beiden in Eins-zu-Eins-Beziehung stehenden Kohomologie-Klassen dieselben Bezeichnungen und Symbole zu verwenden, da aus dem Zusammenhang unmittelbar klar wird, von welcher der beiden Klassen die Rede ist.

2.2.1 Die relative Klasse

Dieser Abschnitt beschreibt die relative Čech-Kohomologie-Klasse, die von Deligne als Obstruktion für das Zusammensetzen lokaler Äquivalenztransformationen zwischen zwei Sternprodukten eingeführt wurde. Fixiert man ein Sternprodukt, so ordnet diese Klasse jeder Äquivalenzklasse von Sternprodukten ein Element in $H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ (d.h. eine formale Potenzreihe mit Werten in der zweiten de Rham-Kohomologie) zu. Wir werden also eine Čech-Kohomologie-Klasse betrachten, die zwei differentiellen Sternprodukten zugeordnet ist, welche mittels lokaler Äquivalenztransformationen zwischen diesen Sternprodukten definiert werden kann. Wir machen hierzu von einem Ergebnis aus Abschnitt 2.1.2 Gebrauch, welches besagt, daß jede Selbstäquivalenz eines Sternproduktes $\star$ eingeschränkt auf eine offene, zusammenziehbare Menge U von der Gestalt $\exp(\mathrm{ad}_\star(f))$ für ein $f \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ ist. Da wir im weiteren Verlauf des Abschnitts häufig mit Verkettungen lokaler Selbstäquivalenzen der Form $\exp(\mathrm{ad}_\star(f))\exp(\mathrm{ad}_\star(g))$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ arbeiten werden, erweist es sich als bequem, diese Verkettung in Termen von f und g zu schreiben. Dies geschieht mit der Baker-Campbell-Hausdorff Reihe $f \circ_\star g$ bezüglich der Lie-Algebren-Struktur, welche durch Sternprodukt-Kommutatoren gegeben ist. Eine kompakte Form diese Reihe anzugeben ist:

$$f \circ_\star g = f + \int_0^1 \eta(\exp(\mathrm{ad}_\star(f))\exp(t\,\mathrm{ad}_\star(g)))g\,dt, \tag{2.7}$$

wobei η durch

$$\eta(z) := \frac{z\log(z)}{z-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)(z-1)^n$$

definiert ist. Das folgende Lemma faßt einige wichtige Eigenschaften und Identitäten der durch Gleichung (2.7) gegebenen Verknüpfung $\circ_\star$ zusammen.

Lemma 2.2.1 ([56, Lemma 4.1])

i.) $\circ_\star$ *ist eine assoziative Verknüpfung.*

ii.) $\exp(\mathrm{ad}_\star(f \circ_\star g)) = \exp(\mathrm{ad}_\star(f))\exp(\mathrm{ad}_\star(g))$, *iii.)* $f \circ_\star g \circ_\star (-f) = \exp(\mathrm{ad}_\star(f))g$,

iv.) $-(f \circ_\star g) = (-g) \circ_\star (-f)$,

v.) $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} (-f) \circ_\star (f + tg) = \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(f))}{\mathrm{ad}_\star(f)} g$.

BEWEIS: Die Aussagen des Lemmas sind aus der Literatur wohlbekannt; man vergleiche hierzu [23, II. §6.]. □

Sei nun $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine lokal endliche, offene Überdeckung von M durch Darboux-Koordinaten-Definitionsbereiche, so daß die $\mathcal{U}_\alpha$ und alle ihre endlichen, nicht-leeren Durchschnitte zusammenziehbar sind, d.h. $\mathcal{U}$ ist eine lokal endliche, gute, offene Überdeckung von M durch Darboux-Koordinaten-Definitionsbereiche. Weiter sei $\{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine $\mathcal{U}$ untergeordnete Zerlegung der Eins.

Seien nun $\star$ und $\star'$ zwei differentielle Sternprodukte auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω). Wie wir in Abschnitt 2.1.2 gesehen haben sind ihre Einschränkungen auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ äquivalent, also existieren formale Reihen von Differentialoperatoren $T_\alpha : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, so daß für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$

$$T_\alpha(f \star g) = (T_\alpha f) \star' (T_\alpha g)$$

gilt. Auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ ist nun $T_\beta^{-1} T_\alpha$ eine Selbstäquivalenz von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]], \star)$, also existieren Elemente $t_{\beta\alpha} = -t_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ mit

$$T_\beta^{-1} T_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})).$$

Auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma)[[\nu]]$ induziert das Element

$$t_{\gamma\beta\alpha} = t_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star t_{\beta\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma)[[\nu]]$$

die Identität als Automorphismus von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma)[[\nu]], \star)$ also ist $t_{\gamma\beta\alpha}$ ein Element des Zentrums $\mathbb{C}[[\nu]]$ von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma)[[\nu]], \star)$. Die Familie $t_{\gamma\beta\alpha}$ ist also ein Čech-2-Kozyklus für die Überdeckung $\mathcal{U}$ mit Werten in $\mathbb{C}[[\nu]]$. Die üblichen Argumente zeigen, daß die zugehörige Klasse nicht von den gemachten Wahlen abhängt und mit Verfeinerungen verträglich ist. Es folgt also, daß $t_{\gamma\beta\alpha}$ eindeutig eine Čech-Kohomologie-Klasse $[t_{\gamma\beta\alpha}] \in H^2(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ definiert. Diese Überlegungen führen zur folgenden Definition:

Definition 2.2.2 ([56, Def. 4.2]) *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen definiert*

$$t(\star', \star) := [t_{\gamma\beta\alpha}] \in H^2(M; \mathbb{C})[[\nu]]$$

Deligne's relative Klasse von $\star'$ bezüglich $\star$.

Das weitere Ziel dieses Abschnittes ist es die Bedeutung der relativen Klasse in Bezug auf die Äquivalenz von Sternprodukten zu untersuchen. Eine erste Folgerung aus der Definition der relativen Klasse ist:

Proposition 2.2.3 ([56, Prop 4.3]) *Seien $\star, \star', \star''$ drei differentielle Sternprodukte auf (M, ω), dann gilt:*

$$t(\star'', \star) = t(\star'', \star') + t(\star', \star). \tag{2.8}$$

BEWEIS: Seien die lokalen Äquivalenztransformationen zwischen $\star$ und $\star'$ bzw. $\star'$ und $\star''$ mit T_α bzw. S_β bezeichnet. Auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ seien $t_{\beta\alpha}, s_{\beta\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ durch

$$T_\beta^{-1} T_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) \quad \text{und} \quad S_\beta^{-1} S_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_{\star'}(s_{\beta\alpha}))$$

gegeben. Weiter seien mit $V_\alpha := S_\alpha T_\alpha$ lokale Äquivalenzen von $\star$ und $\star''$ bezeichnet. Es gilt dann

$$V_\beta^{-1} V_\alpha = T_\beta^{-1} T_\alpha T_\alpha^{-1} \exp(\mathrm{ad}_{\star'}(s_{\beta\alpha})) T_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) \exp(\mathrm{ad}_\star(T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha})) = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha})),$$

also können wir $v_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha}$ wählen. Man beachte, daß $v_{\beta\alpha} = -v_{\alpha\beta}$ gilt, denn

$$t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1}(s_{\beta\alpha}) \circ_\star (-t_{\beta\alpha}) = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))(T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha}) = T_\beta^{-1} T_\alpha T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha} = -T_\beta^{-1} s_{\alpha\beta},$$

woraus wegen $f \circ_\star (-g) \circ_\star g = f$ die Gleichung

$$v_{\beta\alpha} = t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha} = (-T_\beta^{-1} s_{\alpha\beta}) \circ_\star (-t_{\alpha\beta}) = -(t_{\alpha\beta} \circ_\star T_\beta^{-1} s_{\alpha\beta}) = -v_{\alpha\beta}$$

folgt. Auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$ gilt dann weiter für $s \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma)[[\nu]]$

$$T_\gamma^{-1} s \circ_\star t_{\gamma\beta} = t_{\gamma\beta} \circ_\star (-t_{\gamma\beta}) \circ_\star T_\gamma^{-1} s \circ_\star t_{\gamma\beta} = t_{\gamma\beta} \circ_\star \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\gamma})) T_\gamma^{-1} s = t_{\gamma\beta} \circ_\star T_\beta^{-1} s$$

und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{\gamma\beta\alpha} &= v_{\alpha\gamma} \circ_\star v_{\gamma\beta} \circ_\star v_{\beta\alpha} = t_{\alpha\gamma} \circ_\star T_\gamma^{-1} s_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star T_\beta^{-1} s_{\gamma\beta} \circ_\star t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha} \\ &= t_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star T_\beta^{-1} s_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\gamma\beta} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha} = t_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star t_{\beta\alpha} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\alpha\gamma} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\gamma\beta} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Da die T_α^{-1} lokale Äquivalenztransformationen zwischen $\star'$ und $\star$ sind, gilt

$$T_\alpha^{-1} s_{\alpha\gamma} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\gamma\beta} \circ_\star T_\alpha^{-1} s_{\beta\alpha} = T_\alpha^{-1}(s_{\alpha\gamma} \circ_{\star'} s_{\gamma\beta} \circ_{\star'} s_{\beta\alpha}) = T_\alpha^{-1} s_{\gamma\beta\alpha} = s_{\gamma\beta\alpha},$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, daß $s_{\gamma\beta\alpha} \in \mathbb{C}[[\nu]]$ und die Differentialoperatoren in den Ordnungen $r \geq 1$ im formalen Parameter der lokalen Äquivalenztransformationen auf Konstanten verschwinden. Schließlich erhalten wir

$$v_{\gamma\beta\alpha} = t_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star t_{\beta\alpha} \circ_\star s_{\gamma\beta\alpha} = t_{\gamma\beta\alpha} \circ_\star s_{\gamma\beta\alpha} = t_{\gamma\beta\alpha} + s_{\gamma\beta\alpha},$$

wobei der letzte Schritt wiederum aus der Tatsache folgt, daß $t_{\gamma\beta\alpha}, s_{\gamma\beta\alpha} \in \mathbb{C}[[\nu]]$ also zentral sind. □

Die folgende Proposition beantwortet die Frage nach dem Zusammenhang der relativen Klasse mit den Äquivalenzklassen von Sternprodukten.

Proposition 2.2.4 ([56, Prop. 4.4]) *Die relative Klasse $t(\star', \star)$ verschwindet genau dann, wenn die beiden differentiellen Sternprodukte $\star$ und $\star'$ äquivalent sind.*

Beweis: Falls $\star$ und $\star'$ äquivalent vermöge der Äquivalenztransformation T sind, so können wir als lokale Äquivalenztransformationen T_α die Einschränkungen von T auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ wählen und somit verschwindet die relative Klasse $t(\star', \star)$ offensichtlich. Nun betrachten wir was passiert, wenn die Klasse $t(\star', \star)$ verschwindet. Dann können wir $t_{\beta\alpha}$ durch Addition eines zentralen Elementes (womit seine adjungierte Wirkung nicht verändert wird) so modifizieren, daß $t_{\alpha\beta\gamma} = 0$ gilt. Dann ist $t_{\gamma\beta}$ aber ein Kozyklus und somit ein Korand, also gibt es Funktionen $t_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ mit $t_{\gamma\beta} = (-t_\gamma) \circ_\star t_\beta$. Dies beweist man mit der folgenden induktiven Argumentation. In nullter Ordnung in ν lautet die Kozyklusbedingung $t^0_{\alpha\gamma} + t^0_{\gamma\beta} + t^0_{\beta\alpha} = 0$. Definiert man mit der oben eingeführten Zerlegung der Eins $t_\beta^{\{0\}} := \sum_{\alpha \in I} u_\beta t^0_{\alpha\beta}$, so gilt $t_{\gamma\beta} - (-t_\gamma^{\{0\}}) \circ_\star t_\beta^{\{0\}} = O(\nu)$. Gibt es nun eine Lösung $t_\alpha^{\{k\}} = \sum_{r=0}^k \nu^r t_\alpha^r$, so daß $t_{\gamma\beta} - (-t_\gamma^{\{k\}}) \circ_\star t_\beta^{\{k\}} = O(\nu^{k+1})$, dann hat der Kozyklus $c_{\gamma\beta} = (-t_\gamma^{\{k\}}) \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star t_\beta^{\{k\}}$ den ersten nichtverschwindenden Term in der Ordnung $k+1$ in ν mit $c^{k+1}_{\alpha\gamma} + c^{k+1}_{\gamma\beta} + c^{k+1}_{\beta\alpha} = 0$. Definiert man $t_\beta^{k+1} := \sum_{\alpha \in I} u_\alpha c^{k+1}_{\alpha\beta}$ und $t_\alpha^{\{k+1\}} := t_\alpha^{\{k\}} + \nu^{k+1} t_\alpha^{k+1}$, so gilt $t_{\gamma\beta} - (-t_\gamma^{\{k+1\}}) \circ_\star t_\beta^{\{k+1\}} = O(\nu^{k+2})$, womit die Behauptung per Induktion folgt. Setzt man nun $T'_\alpha = T_\alpha \exp(\mathrm{ad}_\star(t_\alpha))$, so ist $T'_\alpha = T'_\beta$ auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ und somit existiert eine globale Äquivalenztransformation T' auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ mit $T'|_{\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]} = T'_\alpha$. □

Für ein gegebenes differentielles Sternprodukt $\star$ haben wir also eine Abbildung von Äquivalenzklassen von differentiellen Sternprodukten nach $H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, welche durch

$$[\star'] \mapsto t(\star', \star)$$

gegeben ist und wir haben gerade gezeigt, daß diese Abbildung injektiv ist.

Proposition 2.2.5 ([56, Prop. 4.5]) *Sei $\star$ ein festes differentielles Sternprodukt. Die Abbildung von Äquivalenzklassen von differentiellen Sternprodukten nach $H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, welche durch*

$$[\star'] \mapsto t(\star', \star)$$

gegeben ist, ist surjektiv.

Beweis: Um einzusehen, daß die Abbildung surjektiv ist, gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst zeigen wir, daß man für einen gegebenen 2-Kozyklus $t_{\gamma\beta\alpha}$ formale Reihen von lokal definierten Funktionen $t_{\beta\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ finden kann, so daß $t_{\gamma\beta\alpha} = t_{\alpha\gamma} \circ_\star t_{\gamma\beta} \circ_\star t_{\beta\alpha}$ gilt. Danach konstruieren wir eine formale Reihe von Differentialoperatoren T_α auf $\mathcal{U}_\alpha$ die mit id beginnt, so daß $T_\beta^{-1} T_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))$ erfüllt ist. Für den ersten Schritt verwenden wir wie oben, daß die Garbe der Funktionen fein ist. In nullter Ordnung nimmt die Kozyklusbedingung die Gestalt $t^0_{\gamma\beta\alpha} - t^0_{\delta\beta\alpha} + t^0_{\delta\gamma\alpha} - t^0_{\delta\gamma\beta} = 0$ an. Wir definieren $t^0_{\beta\alpha} := \sum_{\gamma\in I} u_\gamma t^0_{\gamma\beta\alpha}$, so daß $t^0_{\gamma\beta\alpha} = t^0_{\alpha\gamma} + t^0_{\gamma\beta} + t^0_{\beta\alpha}$, also $t_{\gamma\beta\alpha} - t^0_{\alpha\gamma} \circ_\star t^0_{\gamma\beta} \circ_\star t^0_{\beta\alpha} = O(\nu)$ gilt. Wir nehmen nun an, daß wir $t^{\{k\}}_{\beta\alpha}$ mit $t^{\{k\}}_{\beta\alpha} = -t^{\{k\}}_{\alpha\beta}$ gefunden haben und $t_{\gamma\beta\alpha} - t^{\{k\}}_{\alpha\gamma} \circ_\star t^{\{k\}}_{\gamma\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\alpha} = O(\nu^{k+1})$ erfüllt ist. Wir definieren $c_{\gamma\beta\alpha} := t^{\{k\}}_{\alpha\gamma} \circ_\star t^{\{k\}}_{\gamma\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\alpha}$, also sind die Koeffizienten $c^r_{\gamma\beta\alpha}$ Konstanten $\forall r \leq k$. Man beachte, daß $c_{\gamma\beta\alpha}$ in einer nichtkommutativen Situation nicht notwendigerweise ein Kozyklus ist. Dennoch sind die $c^{k+1}_{\gamma\beta\alpha}$ total antisymmetrisch in ihren Indizes, denn wegen $t^{\{k\}}_{\beta\gamma} = -t^{\{k\}}_{\gamma\beta}$ gilt

$$\begin{aligned}
c^{k+1}_{\alpha\gamma\beta} &= \left(t^{\{k\}}_{\gamma\beta} + t^{\{k\}}_{\beta\alpha} \circ_\star t^{\{k\}}_{\alpha\gamma} \circ_\star t^{\{k\}}_{\gamma\beta} + t^{\{k\}}_{\beta\gamma}\right)^{k+1} = \left(t^{\{k\}}_{\gamma\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\alpha} \circ_\star t^{\{k\}}_{\alpha\gamma} \circ_\star t^{\{k\}}_{\gamma\beta} + t^{\{k\}}_{\beta\gamma}\right)^{k+1} \\
&= \left(t^{\{k\}}_{\gamma\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\alpha} \circ_\star t^{\{k\}}_{\alpha\gamma} + t^{\{k\}}_{\gamma\beta} + t^{\{k\}}_{\beta\gamma}\right)^{k+1} = c^{k+1}_{\beta\alpha\gamma}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
c_{\beta\alpha\gamma} &= t^{\{k\}}_{\gamma\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\alpha} \circ_\star t^{\{k\}}_{\alpha\gamma} = \left(-t^{\{k\}}_{\beta\gamma}\right) \circ_\star \left(-t^{\{k\}}_{\alpha\beta}\right) \circ_\star \left(-t^{\{k\}}_{\gamma\alpha}\right) \\
&= \left(-\left(t^{\{k\}}_{\alpha\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\gamma}\right)\right) \circ_\star \left(-t^{\{k\}}_{\gamma\alpha}\right) = -\left(t^{\{k\}}_{\gamma\alpha} \circ_\star t^{\{k\}}_{\alpha\beta} \circ_\star t^{\{k\}}_{\beta\gamma}\right) = -c_{\alpha\beta\gamma}.
\end{aligned}$$

Weiterhin überprüft man, daß $(c_{\gamma\beta\alpha} \circ_\star c_{\delta\beta\alpha} \circ_\star c_{\delta\gamma\alpha} \circ_\star c_{\delta\gamma\beta})^{k+1} = c^{k+1}_{\gamma\beta\alpha} - c^{k+1}_{\delta\beta\alpha} + c^{k+1}_{\delta\gamma\alpha} - c^{k+1}_{\delta\gamma\beta} = 0$, also definieren wir $t^{k+1}_{\beta\alpha} := \sum_{\gamma\in I} u_\gamma (t^{k+1}_{\gamma\beta\alpha} - c^{k+1}_{\gamma\beta\alpha})$ und $t^{\{k+1\}}_{\beta\alpha} := t^{\{k\}}_{\beta\alpha} + \nu^{k+1} t^{k+1}_{\beta\alpha}$. Es ist dann $t_{\gamma\beta\alpha} - t^{\{k+1\}}_{\alpha\gamma} \circ_\star t^{\{k+1\}}_{\gamma\beta} \circ_\star t^{\{k+1\}}_{\beta\alpha} = O(\nu^{k+2})$ erfüllt und es gilt $t^{\{k+1\}}_{\beta\alpha} = -t^{\{k+1\}}_{\alpha\beta}$, womit der erste Teil des Beweises per Induktion erbracht ist. Für den zweiten Teil benötigen wir formale Reihen von Differentialoperatoren T_α auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, welche mit id beginnen und $\exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) = T_\beta^{-1} T_\alpha$ erfüllen. Wiederum verwenden wir eine rekursive Argumentation. Wir nehmen an wir haben $T^{\{k\}}_\alpha$ bereits so konstruiert, daß $T^{\{k\}}_\beta \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) T^{\{k\}}_\alpha = \mathrm{id} + \nu^k S_{\beta\alpha} + \ldots$ erfüllt ist. Diese Gleichung liefert, daß $S_{\beta\alpha}$ ein 1-Kozyklus mit Werten in den Differentialoperatoren ist, die auf Konstanten verschwinden. Da diese wiederum eine feine Garbe bilden, ist dieser 1-Kozyklus ein Korand, also existieren Differentialoperatoren S_α auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, die ebenfalls auf Konstanten verschwinden und auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ die Gleichung $S_{\beta\alpha} = S_\alpha - S_\beta$ erfüllen. Definiert man nun $T^{\{k+1\}}_\alpha := (\mathrm{id} + \nu^{k+1} S_\alpha) T^{\{k\}}_\alpha$, so gilt $T^{\{k+1\}}_\beta \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) T^{\{k+1\}}_\alpha = \mathrm{id} + \nu^{k+1} S'_{\beta\alpha} + \ldots$, womit auch der zweite Schritt per Induktion bewiesen ist. Mit den so gefundenen formalen Reihen von Differentialoperatoren T_α definiert man $\star'$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ durch

$$f \star' g := T_\alpha \left(T_\alpha^{-1}(f) \star T_\alpha^{-1}(g)\right),$$

womit aber $\star'$ global d.h. für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ definiert ist, da wegen obiger Konstruktion $T_\beta^{-1} T_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))$ gilt und letzterer Operator ein lokaler Automorphismus von $\star$ ist. Aufgrund der Konstruktion von $\star'$ ist es offensichtlich, daß die relative Klasse von $\star'$ durch $t(\star', \star) = [t_{\gamma\beta\alpha}]$ gegeben ist. □

Die Ergebnisse dieses Abschnittes fassen wir in folgendem Satz zusammen:

Satz 2.2.6 ([56, Thm. 4.6]) *Fixiert man ein differentielles Sternprodukt $\star$, so hängt die relative Klasse $t(\star', \star) \in H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ nur von der Äquivalenzklasse des differentiellen Sternproduktes $\star'$ ab und vermittelt eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen differentieller Sternprodukte und $H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$.*

2.2.2 Die intrinsische Derivations-verwandte Klasse

In diesem Abschnitt beschreiben wir die intrinsische Derivations-verwandte Klasse, die einem Sternprodukt zugeordnet ist. Diese erhält man indem man sogenannte lokale ν-Euler Derivationen dieses Sternproduktes vergleicht. Darüberhinaus werden wir eine Beziehung zwischen der relativen Klasse zweier Sternprodukte und deren intrinsischen Derivations-verwandten Klassen finden.

Die Additionsformel für relative Klassen gemäß Proposition 2.2.3 legt nahe, daß es sich bei $t(\star', \star)$ um die Differenz zweier Klassen $c(\star'), c(\star) \in H^2(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ handeln sollte. Darüberhinaus sollte die Klasse $c(\star)$ wegen Satz 2.2.6 das Sternprodukt bis auf Äquivalenz festlegen. Als einen Schritt in diese Richtung betrachten wir eine intrinsische Klasse, welche eine Obstruktion dafür darstellt, spezielle, lokale Derivationen eines Sternproduktes zusammenzusetzen.

Definition 2.2.7 ([56, Def. 5.1]) *Eine Derivation* E *von* $(\mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]], \star)$ *auf einer offenen Menge* $U \in M$ *heißt lokale* ν*-Euler Derivation von* $\star$ *auf* U*, falls sie die Gestalt*

$$\mathsf{E} = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_\xi + \mathsf{D} \tag{2.9}$$

besitzt, wobei $\xi \in \Gamma^\infty(TU)$ *ein konform symplektisches lokales Vektorfeld ist d.h.* $\mathcal{L}_\xi\omega|_U = \omega|_U$ *und* $\mathsf{D} = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{D}_i$ *eine formale Reihe von Differentialoperatoren auf* $\mathcal{C}^\infty(U)$ *ist.*

Die folgende Proposition liefert die Existenz lokaler ν-Euler Derivationen für beliebige differentielle Sternprodukte.

Proposition 2.2.8 ([56, Prop. 5.2]) *Sei* $\star$ *ein differentielles Sternprodukt auf* (M, ω)*, dann gibt es für alle* $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{U}$ *eine lokale* ν*-Euler Derivation* $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha$ *der Algebra* $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]], \star)$ *auf* $\mathcal{U}_\alpha$*.*

Beweis: Auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit der kanonischen symplektischen Struktur ω_0 betrachten wir das Weyl-Produkt $\star_{\mathrm{Weyl}}$, welches wie wir in Abschnitt 1.2 gesehen haben ein homogenes Sternprodukt ist, d.h. $\mathcal{H} = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_\xi$ mit $\xi = p_i \partial_{p_i}$ ist eine Derivation von $\star_{\mathrm{Weyl}}$. Weiter sei $\Phi_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{O}_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n}$ ein Symplektomorphismus ($\Phi_\alpha^* \omega_0|_{\mathcal{U}_\alpha} = \omega|_{\mathcal{U}_\alpha}$), vermöge dessen man ein Sternprodukt $\star_\alpha$ auf $(\mathcal{O}_\alpha, \omega_0)$ durch $\Phi_\alpha^*(f \star_\alpha g) = (\Phi_\alpha^* f) \star (\Phi_\alpha^* g)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\alpha)[[\nu]]$ erklären kann. Da alle Sternprodukte auf offenen, zusammenziehbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^{2n}$ äquivalent zu $\star_{\mathrm{Weyl}}$ sind, existiert eine formale Reihe von Differentialoperatoren T_α auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\alpha)$ mit $T_\alpha(f \star_{\mathrm{Weyl}} g) = (T_\alpha f) \star_\alpha (T_\alpha g) \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\alpha)[[\nu]]$. Man erhält somit eine lokale Derivation E_α von $\star$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ durch $\mathsf{E}_\alpha := \Phi_\alpha^* T_\alpha \mathcal{H} T_\alpha^{-1} \Phi_\alpha^{-1^*}$. Um einzusehen, daß E_α eine ν-Euler Derivation ist beachtet man zunächst, daß $T_\alpha \mathcal{H} T_\alpha^{-1} = \mathcal{H} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{d}_{\alpha,i}$ mit gewissen Differentialoperatoren $\mathsf{d}_{\alpha,i}$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}_\alpha)$ gilt, da T_α mit id beginnt. Somit hat also E_α die Gestalt $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{\alpha,i}$ wobei $\xi_\alpha \in \Gamma^\infty(T\mathcal{U}_\alpha)$ und die Differentialoperatoren $\mathsf{D}_{\alpha,i}$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ durch $\xi_\alpha = \Phi_\alpha^* \xi$ und $\mathsf{D}_{\alpha,i} = \Phi_\alpha^* \mathsf{d}_{\alpha,i} \Phi_\alpha^{-1^*}$ gegeben sind. Um zu zeigen, daß ξ_α lokal konform symplektisch ist, berechnet man auf $\mathcal{U}_\alpha$

$$\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega = \mathcal{L}_{\Phi_\alpha^*\xi} \Phi_\alpha^* \omega_0 = \Phi_\alpha^*(\mathcal{L}_\xi \omega_0) = \Phi_\alpha^* \omega_0 = \omega,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Wir betrachten nun eine Sammlung von lokalen ν-Euler Derivationen E_α wie in Proposition 2.2.8 und auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ deren Differenzen $\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha$. Diese sind ebenfalls Derivationen von $\star$ und die Ableitungen nach ν fallen weg, so daß $\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha$ eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation von $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]], \star)$ ist. Da jede $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Derivation auf einer offenen, zusammenziehbaren Menge U von der Form $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d)$ mit $d \in \mathcal{C}^\infty(U)[[\nu]]$ ist, existieren formale Funktionen $d_{\beta\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ mit

$$\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha}), \tag{2.10}$$

wobei $d_{\beta\alpha}$ eindeutig bis auf ein zentrales Element, also bis auf eine formale Reihe mit Werten in den komplexen Zahlen, ist. Auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma$ muß die Summe $d_{\alpha\gamma} + d_{\gamma\beta} + d_{\beta\alpha}$ zentral sein und definiert deshalb $d_{\gamma\beta\alpha} \in \mathbb{C}[[\nu]]$. Es ist leicht zu sehen, daß die $d_{\gamma\beta\alpha}$ einen 2-Kozyklus definieren, dessen Čech-Kohomologie-Klasse $[d_{\gamma\beta\alpha}] \in H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ von keiner der getroffenen Wahlen abhängt.

Definition 2.2.9 ([56, Def. 5.3]) *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen definiert*

$$d(\star) := [d_{\gamma\beta\alpha}] \in H^2(M;\mathbb{C})[[\nu]]$$

Deligne's intrinsische Derivations-verwandte Klasse von $\star$.

Eine erste Folgerung aus der gemachten Definition ist:

Proposition 2.2.10 ([56, Prop. 5.5]) *Für zwei äquivalente, differentielle Sternprodukte* $\star$ *und* $\star'$ *auf* (M,ω) *stimmen die Derivations-verwandten Klassen* $d(\star)$ *und* $d(\star')$ *überein.*

Beweis: Sei T eine Äquivalenztransformation von $\star$ nach $\star'$, d.h. $T(f\star g) = (Tf)\star'(Tg)\forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Weiter seien E_α lokale ν-Euler Derivationen für $\star$, aus welchen man mit $\mathsf{E}'_\alpha = T\mathsf{E}_\alpha T^{-1}$ lokale ν-Euler Derivationen für $\star'$ erhält. Dann gilt

$$\mathsf{E}'_\beta - \mathsf{E}'_\alpha = T(\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha)T^{-1} = T\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha})\right)T^{-1} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star'}(Td_{\beta\alpha}).$$

Also gilt mit den gewählten ν-Euler Derivationen $d'_{\beta\alpha} = Td_{\beta\alpha}$ und somit $d'_{\gamma\beta\alpha} = Td_{\gamma\beta\alpha} = d_{\gamma\beta\alpha}$, da alle Terme außer der nullten Ordnung von T Differentialoperatoren sind, die auf Konstanten verschwinden. Folglich gilt $d(\star) = d(\star')$. □

Proposition 2.2.11 ([56, Prop. 5.6]) *Die Terme der nullten und der ersten Ordnung der intrinsischen Derivations-verwandten Klasse* $d(\star) = \sum_{i=0}^\infty \nu^i d(\star)^i$ *sind durch*

$$d(\star)^0 = -[\omega] \qquad \text{und} \qquad d(\star)^1 = 0$$

gegeben.

Beweis: Für die Berechnung von $d(\star)^0$ betrachten wir die Terme der nullten Ordnung in ν der Gleichung (2.10) angewandt auf eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ und erhalten $\mathcal{L}_{\xi_\beta - \xi_\alpha} f = \{d^0_{\beta\alpha}, f\}$. Definiert man $\theta_\alpha := -i_{\xi_\alpha}\omega$, so erhält man mit der Cartan-Formel aus $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega|_{\mathcal{U}_\alpha} = \omega|_{\mathcal{U}_\alpha}$, daß $\omega|_{\mathcal{U}_\alpha} = -d\theta_\alpha$ gilt. Also folgt mit dem Hamiltonschen Vektorfeld X_f der Funktion f

$$(\theta_\beta - \theta_\alpha)(X_f) = \omega(X_f, \xi_\beta - \xi_\alpha) = \mathcal{L}_{\xi_\beta - \xi_\alpha} f = \{d^0_{\beta\alpha}, f\} = d(d^0_{\beta\alpha})(X_f),$$

so daß $\theta_\beta - \theta_\alpha = d(d^0_{\beta\alpha})$ auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ gilt. Wegen $d\theta_\beta = -\omega$ folgt hieraus, daß $d^0_{\gamma\beta\alpha}$ ein Repräsentant der Čech-Kohomologie-Klasse ist, die vermöge des de Rham-Isomorphismus der Klasse $-[\omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$ entspricht, womit die erste Aussage der Proposition bewiesen ist. Für den Beweis der Aussage über $d(\star)^1$ beachten wir zunächst, daß wir wegen Proposition 2.2.10 $\star$ durch ein äquivalentes Sternprodukt ersetzen dürfen, von dem wir annehmen dürfen, daß $C_1(f,g) = \frac{1}{2}\{f,g\}$ und $C_2^-(f,g) = \frac{1}{2}(C_2(f,g) - C_2(g,f)) = A(X_f, X_g)$ für eine geschlossene Zweiform A gilt. Schreibt man die Terme der ersten Ordnung in ν der Gleichung (2.10) aus, so erhält man

$$(\mathsf{D}_{\beta,1} - \mathsf{D}_{\alpha,1})f = \{d^1_{\beta\alpha}, f\} + 2C_2^-(d^0_{\beta\alpha}, f) = \{d^1_{\beta\alpha}, f\} + 2A(X_{d^0_{\beta\alpha}}, X_f) \tag{2.11}$$

für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$. Schreibt man außerdem die ersten Ordnungen der Gleichung $\mathsf{E}_\alpha(f\star g) = (\mathsf{E}_\alpha f)\star g + f\star(\mathsf{E}_\alpha g)$ für $f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ aus, so findet man aus der ersten Ordnung in ν, daß $\mathsf{D}_{\alpha,1}$ eine Derivation des punktweisen Produktes, also ein lokales Vektorfeld Y_α auf $\mathcal{U}_\alpha$ ist. Der antisymmetrische Anteil der zweiten Ordnung in ν liefert

$$2C_2^-(f,g) + \mathcal{L}_{\xi_\alpha}C_2^-(f,g) + \frac{1}{2}\mathsf{D}_{\alpha,1}\{f,g\} = \frac{1}{2}\{\mathsf{D}_{\alpha,1}f, g\} + \frac{1}{2}\{f, \mathsf{D}_{\alpha,1}g\} + C_2^-(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}f, g) + C_2^-(f, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}g),$$

was man unter Benutzung von A und Y_α als

$$2(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}A)(X_g, X_f) = \{\mathcal{L}_{Y_\alpha}f, g\} + \{f, \mathcal{L}_{Y_\alpha}g\} - \mathcal{L}_{Y_\alpha}\{f,g\} \tag{2.12}$$

schreiben kann. Hierbei haben wir folgendes Lemma benutzt:

Lemma 2.2.12 *Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ erfüllt das zugehörige Hamiltonsche Vektorfeld*

$$\mathcal{L}_{\xi_\alpha} X_g = X_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g} - X_g.$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich durch folgende Rechnung

$$\begin{aligned}
\omega(X_g, \mathcal{L}_{\xi_\alpha} X_f) &= \mathcal{L}_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha} X_f} g = -\mathcal{L}_{\xi_\alpha} \omega(X_f, X_g) + \omega(X_f, X_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g}) \\
&= -\omega(X_f, X_g) - \omega(\mathcal{L}_{\xi_\alpha} X_f, X_g) - \omega(X_f, \mathcal{L}_{\xi_\alpha} X_g) + \omega(X_f, X_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g}),
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega = \omega$ benutzt wurde. Man erhält also $0 = \omega(X_f, X_g + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} X_g - X_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha} g})$ und somit die behauptete Gleichung. $\triangledown$

Definiert man nun lokale Einsformen B_α durch $B_\alpha = -\frac{1}{2} i_{Y_\alpha}\omega$, so gilt $B_\alpha(X_f) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{Y_\alpha} f$ und man erhält aus Gleichung (2.12)

$$(\mathcal{L}_{\xi_\alpha} A)(X_f, X_g) = \mathcal{L}_{X_g} B_\alpha(X_f) - \mathcal{L}_{X_f} B_\alpha(X_g) - B_\alpha([X_g, X_f]) = -dB_\alpha(X_f, X_g).$$

Da A geschlossen ist folgt aus der Cartan-Formel, daß $i_{\xi_\alpha} A + B_\alpha$ auf $\mathcal{U}_\alpha$ geschlossen ist, also existiert nach dem Poincaré-Lemma eine Funktion $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ mit $df_\alpha = i_{\xi_\alpha} A + B_\alpha$. Setzt man die hergeleiteten Beziehungen nun in Gleichung (2.11) ein, so erhält man mit $\xi_\beta - \xi_\alpha = -X_{d^0_{\beta\alpha}}$

$$\mathcal{L}_{Y_\beta - Y_\alpha} f = \{d^1_{\beta\alpha}, f\} - 2\left(i_{\xi_\beta - \xi_\alpha} A\right)(X_f) = \{d^1_{\beta\alpha}, f\} + 2df_\alpha(X_f) - 2B_\alpha(X_f) - 2df_\beta(X_f) + 2B_\beta(X_f).$$

Wegen $B_\alpha(X_f) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{Y_\alpha} f$ erhält man schließlich

$$\{d^1_{\beta\alpha}, f\} = 2\{f_\beta - f_\alpha, f\}.$$

Wählt man also $d^1_{\beta\alpha} = 2(f_\beta - f_\alpha)$ so sieht man, daß die Klasse $d(\star)^1$ verschwindet. $\square$

Lemma 2.2.13 ([56, Lemma 5.7]) *Seien $\star$ und $\star'$ zwei differentielle Sternprodukte auf (M, ω) mit lokalen Äquivalenztransformationen $T_\alpha : (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]], \star) \to (\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]], \star')$ und seien E_α lokale ν-Euler Derivationen für $\star$. Dann sind $\mathsf{E}'_\alpha := T_\alpha \mathsf{E}_\alpha T_\alpha^{-1}$ lokale ν-Euler Derivationen für $\star'$. Sei auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ weiter $\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha})$ und $T_\beta^{-1} T_\alpha = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))$ mit $d_{\beta\alpha}, t_{\beta\alpha} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$. Dann gilt $\mathsf{E}'_\beta - \mathsf{E}'_\alpha = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d'_{\beta\alpha})$, wobei*

$$d'_{\beta\alpha} = T_\beta d_{\beta\alpha} - \nu T_\beta \left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) (\mathsf{E}_\alpha t_{\alpha\beta}) \right). \tag{2.13}$$

Beweis: Wegen $\mathsf{E}'_\beta - \mathsf{E}'_\alpha = T_\beta(\mathsf{E}_\beta - (T_\beta^{-1} T_\alpha)\mathsf{E}_\alpha(T_\alpha^{-1} T_\beta))T_\beta^{-1}$ erhält man mit

$$\exp(\mathrm{ad}_\star(-t_{\alpha\beta}))\mathsf{E}_\alpha \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})) = \mathsf{E}_\alpha + \mathrm{ad}_\star\left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) (\mathsf{E}_\alpha t_{\alpha\beta}) \right),$$

was man ähnlich zum Beweis von Lemma 1.3.20 nachweisen kann,

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}'_\beta - \mathsf{E}'_\alpha &= T_\beta(\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha)T_\beta^{-1} - T_\beta \left(\mathrm{ad}_\star \left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) (\mathsf{E}_\alpha t_{\alpha\beta}) \right) \right) T_\beta^{-1} \\
&= \frac{1}{\nu} T_\beta \mathrm{ad}_\star \left(d_{\beta\alpha} - \nu \left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) (\mathsf{E}_\alpha t_{\alpha\beta}) \right) T_\beta^{-1} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star'}(d'_{\beta\alpha})
\end{aligned}$$

mit den in Gleichung (2.13) angegebenen lokalen formalen Funktionen $d'_{\beta\alpha}$. Man beachte, daß tatsächlich $d'_{\alpha\beta} = -d'_{\beta\alpha}$ gilt, denn

$$\begin{aligned}
d'_{\alpha\beta} &= T_\alpha d_{\alpha\beta} - \nu T_\beta (T_\beta^{-1} T_\alpha) \left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})} \right) (\mathsf{E}_\beta t_{\beta\alpha}) \right) \\
&= T_\alpha d_{\alpha\beta} - \nu T_\beta \left(\left(\frac{\exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) - \mathrm{id}}{\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})} \right) (\mathsf{E}_\beta t_{\beta\alpha}) \right) \\
&= T_\alpha d_{\alpha\beta} + \nu T_\beta \left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) (\mathsf{E}_\alpha t_{\alpha\beta}) \right) \\
&\quad + \nu T_\beta \left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) ((\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha) t_{\alpha\beta}) \right).
\end{aligned}$$

Da $\nu(\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha)t_{\alpha\beta} = \mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha})t_{\alpha\beta} = -\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})d_{\beta\alpha}$ gilt, liefert die obige Gleichung

$$\begin{aligned} d'_{\alpha\beta} &= T_\alpha d_{\alpha\beta} + \nu T_\beta \left(\left(\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta})} \right) (\mathsf{E}_\alpha t_{\alpha\beta}) \right) - T_\beta d_{\beta\alpha} + T_\beta \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) d_{\beta\alpha} \\ &= -d'_{\beta\alpha} + T_\alpha d_{\alpha\beta} + T_\beta T_\beta^{-1} T_\alpha d_{\beta\alpha} = -d'_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.14 ([56, Lemma 5.8]) *Unter den Voraussetzungen und mit der Notation des Lemmas 2.2.13 gilt*

$$d'_{\gamma\beta\alpha} = T_\alpha(d_{\gamma\beta\alpha} + \nu^2 \partial_\nu t_{\gamma\beta\alpha}). \tag{2.14}$$

Beweis: Wir benutzen die Formel für die Ableitung der Exponentialfunktion, die für (lokale) formale Funktionen f, g, h insbesondere $\frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ_\star - g)\circ_\star(g+th)\circ_\star(-f) = \exp(\mathrm{ad}_\star(c))\frac{\mathrm{id}-\exp(-\mathrm{ad}_\star(g))}{\mathrm{ad}_\star(g)}h$ liefert und die Tatsache, daß für jede (lokale) Derivation D von $\star$ die Gleichung $D(f\circ_\star g) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(f+tDf)\circ_\star g + \frac{d}{dt}|_{t=0} f\circ_\star(g+tDg)$ gilt. Wegen $t_{\gamma\beta\alpha} \in \mathbb{C}[[\nu]]$ folgt dann

$$\begin{aligned} \nu\partial_\nu t_{\gamma\beta\alpha} &= \mathsf{E}_\gamma(t_{\alpha\gamma}\circ_\star t_{\gamma\beta}\circ_\star t_{\beta\alpha}) = \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\gamma}))\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\gamma}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\gamma})}\mathsf{E}_\gamma t_{\alpha\gamma} \\ &\quad + \exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\alpha\beta}))\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\beta})}\mathsf{E}_\gamma t_{\gamma\beta} + \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})}\mathsf{E}_\gamma t_{\beta\alpha} \\ &= \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\alpha})}\mathsf{E}_\gamma t_{\alpha\gamma} + T_\alpha^{-1}T_\beta\frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\beta})}\mathsf{E}_\gamma t_{\gamma\beta} \\ &\quad + \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})}\mathsf{E}_\beta t_{\beta\alpha} + \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})}(\mathsf{E}_\gamma - \mathsf{E}_\beta)t_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite gilt nach Lemma 2.2.13

$$\begin{aligned} d'_{\alpha\gamma} - d'_{\beta\gamma} - d'_{\alpha\beta} &= T_\alpha d_{\alpha\gamma} - \nu T_\alpha \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\alpha})}\mathsf{E}_\gamma t_{\gamma\alpha} - T_\beta d_{\beta\gamma} + \nu T_\beta \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\beta}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\gamma\beta})}\mathsf{E}_\gamma t_{\gamma\beta} \\ &\quad - T_\alpha d_{\alpha\beta} + \nu T_\alpha \frac{\mathrm{id} - \exp(-\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha}))}{\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})}\mathsf{E}_\beta t_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} d'_{\alpha\gamma} - d'_{\beta\gamma} - d'_{\alpha\beta} &= T_\alpha(\nu^2\partial_\nu t_{\gamma\beta\alpha}) + T_\alpha d_{\alpha\gamma} - T_\beta d_{\beta\gamma} - T_\alpha d_{\alpha\beta} + T_\alpha(\mathrm{id} - T_\alpha^{-1}T_\beta)d_{\gamma\beta} \\ &= T_\alpha(\nu^2\partial_\nu t_{\gamma\beta\alpha} + d_{\alpha\gamma} + d_{\gamma\beta} + d_{\beta\alpha}), \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Wir erhalten also den folgenden Satz:

Satz 2.2.15 ([56, Thm. 5.9]) *Die relative Klasse und die intrinsischen Derivations-verwandten Klassen zweier differentieller Sternprodukte $\star$ und $\star'$ auf (M, ω) erfüllen*

$$\nu^2\partial_\nu t(\star', \star) = d(\star') - d(\star). \tag{2.15}$$

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 2.2.14 und den Definitionen der Klassen unter Berücksichtigung der Tatsache, daß wegen $t_{\gamma\beta\alpha} \in \mathbb{C}[[\nu]]$ die Gleichung $T_\alpha(\nu^2\partial_\nu t_{\gamma\beta\alpha}) = \nu^2\partial_\nu t_{\gamma\beta\alpha}$ gilt. □

2.2.3 Die charakteristische Klasse

Dieser Abschnitt führt die charakteristische Klasse ein, die durch die intrinsische Derivations-verwandte Klasse und den zweiten Term der Deformation des punktweisen Produktes definiert werden kann. Wir zeigen einige Äquivarianzeigenschaften dieser Klasse und die wesentliche Tatsache, daß sie die Äquivalenzklasse eines Sternproduktes charakterisiert.

Gleichung (2.15) stellt die Verbindung zwischen der relativen Klasse und den intrinsischen Derivations-verwandten Klassen zweier differentieller Sternprodukte $\star$ und $\star'$ her. Sie zeigt auch, daß die Information, die in $d(\star') - d(\star)$ verloren geht, dem Term der Ordnung 0 in ν von $t(\star', \star)$ entspricht. Im folgenden werden wir den fehlenden Anteil berechnen.

Seien $\star$ und $\star'$ durch $f \star g = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k C_k(f,g)$ und $f \star' g = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k C'_k(f,g)$ mit Bidifferentialoperatoren C_k, C'_k auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ gegeben. Aus der Assoziativität beider Sternprodukte in erster Ordnung in ν folgt, daß $C_1 - C'_1$ ein symmetrischer Hochschild 2-Kozyklus ist, wobei wir beachtet haben, daß die antisymmetrischen Anteile von C_1 und C'_1 übereinstimmen und durch $\frac{1}{2}\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ gegeben sind. Wir können also

$$C'_1(f,g) = C_1(f,g) - fE_1(g) - E_1(f)g + E_1(fg)$$

schreiben, wobei E_1 ein Differentialoperator auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ ist, der bis auf Addition eines Vektorfeldes festgelegt ist. Aus der Assoziativität beider Sternprodukte in zweiter Ordnung in ν erhält man

$$\begin{aligned}
&\delta_{\mathrm{H}}(C_2'^{-} - C_2^{-})(f,g,h) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\{(\delta_{\mathrm{H}}E_1)(f,g),h\} + \{(\delta_{\mathrm{H}}E_1)(h,g),f\} + (\delta_{\mathrm{H}}E_1)(\{f,g\},h) + (\delta_{\mathrm{H}}E_1)(\{h,g\},f)\right) \\
&= -\frac{1}{2}(\delta_{\mathrm{H}}B)(f,g,h),
\end{aligned}$$

wobei $B(f,g) = \{f, E_1(g)\} + \{E_1(f), g\} - E_1(\{f,g\})$ und $C^-(f,g) = \frac{1}{2}(C(f,g) - C(g,f))$. Also gilt

$$(C_2'^{-} - C_2^{-})(f,g) = -\frac{1}{2}(\{f, E_1(g)\} + \{E_1(f), g\} - E_1(\{f,g\})) + A(X_f, X_g),$$

wobei A eine geschlossene Zweiform ist, wie man aus der totalen Antisymmetrisierung der Assoziativität beider Sternprodukte in dritter Ordnung in ν erhält. Man beachte, daß die de Rham-Klasse $[A]$ von A nicht von der Wahl von E_1 abhängt, da für ein Vektorfeld X die Gleichung $\{f, X(g)\} + \{X(g), f\} - X(\{f,g\}) = (di_X\omega)(X_f, X_g)$ gilt. Die Klasse von A bezeichnen wir im folgenden mit

$$[A] = (C_2'^{-} - C_2^{-})^\sharp.$$

Wir werden nun einen Zusammenhang zwischen dem Term nullter Ordnung der relativen Klasse $t(\star', \star)$ und der Klasse von A herstellen. Auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ gibt es eine lokale Äquivalenztransformation $T_\alpha = \mathrm{id} + \nu E_\alpha + \ldots$ mit $T_\alpha(f \star g) = (T_\alpha f) \star' (T_\alpha g)$, wobei $E_\alpha(f) = E_1(f) + B_\alpha(X_f)$ und $A|_{\mathcal{U}_\alpha} = \frac{1}{2} dB_\alpha$. Man findet also

$$\exp(\mathrm{ad}_\star(t_{\beta\alpha})) = T_\beta^{-1} T_\alpha = \mathrm{id} + \nu(E_\alpha - E_\beta) + \ldots = \mathrm{id} + \nu(B_\alpha - B_\beta)(X_{\_}) + \ldots,$$

das heißt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ gilt

$$\{t^0_{\beta\alpha}, f\} = (B_\alpha - B_\beta)(X_f) = -db_{\beta\alpha}(X_f) = -\{b_{\beta\alpha}, f\},$$

woraus schließlich

$$[t^0_{\gamma\beta\alpha}] = -[b_{\gamma\beta\alpha}] = -2[A]$$

folgt.

Bemerkung 2.2.16 *Man kann zeigen, daß jeder auf Konstanten verschwindende Bidifferentialoperator C, der ein 2-Kozyklus der Chevalley-Kohomologie von $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\cdot\,,\,\cdot\})$ mit Werten in $\mathcal{C}^\infty(M)$ bezüglich der adjungierten Darstellung ist, als*

$$C(f,g) = aS^3_\Gamma(f,g) + A(X_f, X_g) + (\{f, E(g)\} + \{E(f), g\} - E(\{f,g\}))$$

geschrieben werden kann. Hierbei ist $a \in \mathbb{C}$, S^3_Γ ein bidifferentieller auf Konstanten verschwindender 2-Kozyklus, der niemals ein Korand ist und dessen Symbol von der Ordnung 3 in jedem Argument ist, A eine geschlossene Zweiform auf M und E ein Differentialoperator, der auf Konstanten verschwindet. Also ist

$$H^2_{\mathrm{Chev,nk}}(\mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{C}^\infty(M)) = \mathbb{C} \oplus H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})$$

und die Abbildung $^\sharp$ ist die Projektion auf den zweiten Anteil in dieser Zerlegung. Schreibt man den total antisymmetrischen Teil der Assoziativität eines Sternproduktes in dritter Ordnung in ν aus, so findet man, daß C_2^- gerade die Bedingungen an das obige C erfüllt. Falls für ein Sternprodukt sogar $C_1(f,g) = \frac{1}{2}\{f,g\}$ gilt, so nimmt die obige Zerlegung von C_2^- eine besonders einfache Gestalt an, denn unter dieser Voraussetzung gilt

$$C_2^-(f,g) = A(X_f, X_g).$$

Unser obiges Resultat kann also folgendermaßen formuliert werden:

Proposition 2.2.17 ([56, Prop. 6.2]) *Seien $\star$ und $\star'$ differentielle Sternprodukte auf (M,ω), dann ist der Term nullter Ordnung der relativen Klasse $t(\star', \star)$ durch*

$$t(\star', \star)^0 = -2(C_2'^-)^\sharp + 2(C_2^-)^\sharp \tag{2.16}$$

gegeben.

Aus dem bisher gezeigten folgt, daß $(C_2^-)^\sharp$ und $d(\star)$ die Äquivalenzklasse eines Sternproduktes vollständig festlegen.

Wir wollen nun eine Klasse $c(\star)$ definieren, die die Äquivalenzklasse von $\star$ festlegt und äquivariant bezüglich eines Wechsels des formalen Parameters ist. Damit ist folgendes gemeint:

Man betrachte ein für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch $f \star g = \sum_{k=0}^\infty \nu^k C_k(f,g)$ gegebenes Sternprodukt und einen Parameterwechsel $p(\nu) = \nu + \sum_{r=2}^\infty \nu^r p_r$ mit $p_r \in \mathbb{C}$ und das durch den Wechsel des Parameters definierte Sternprodukt $\star'$ mit $f \star' g = \sum_{k=0}^\infty (p(\nu))^k C_k(f,g)$. Die Forderung nach Äquivarianz von c bezüglich Parameterwechsels bedeutet dann, daß

$$c(\star') = c(\star) \circ p \quad \text{bzw.} \quad c(\star')(\nu) = c(\star)(p(\nu))$$

gelten soll.

Man beachte, daß für eine lokale ν-Euler Derivation $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha(\nu)$ von $\star$ durch $\widetilde{\mathsf{E}_\alpha} = \frac{p(\nu)}{p'(\nu)}\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha(p(\nu))$ eine lokale Derivation von $\star'$ gegeben ist, so daß man mit

$$\mathsf{E}'_\alpha = \nu\partial_\nu + \frac{\nu p'(\nu)}{p(\nu)}\left(\mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha(p(\nu))\right)$$

eine lokale ν-Euler Derivation von $\star'$ erhält, da $\frac{\nu p'(\nu)}{p(\nu)} = 1 + \nu p_2 + \ldots$. Mit $(\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha)(\nu) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha}(\nu))$ findet man also

$$(\mathsf{E}'_\beta - \mathsf{E}'_\alpha)(\nu) = \frac{\nu p'(\nu)}{p(\nu)}(\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha)(p(\nu)) = \frac{\nu p'(\nu)}{(p(\nu))^2}\mathrm{ad}_{\star'}(d_{\beta\alpha}(p(\nu))) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star'}(d'_{\beta\alpha}(\nu))$$

mit $d'_{\beta\alpha}(\nu) = \frac{\nu^2 p'(\nu)}{(p(\nu))^2} d_{\beta\alpha}(p(\nu))$. Hieraus folgt aber

$$d(\star')(\nu) = \frac{\nu^2 p'(\nu)}{(p(\nu))^2} d(\star)(p(\nu)). \tag{2.17}$$

Sei nun $c(\star)$ eine Lösung von

$$\partial_\nu c(\star)(\nu) = \frac{1}{\nu^2} d(\star)(\nu), \tag{2.18}$$

so wird hierdurch $c(\star)$ bis auf den Term nullter Ordnung $c(\star)^0$ bestimmt und Gleichung (2.17) wird zu

$$\partial_\nu c(\star')(\nu) = \partial_\nu (c(\star)(p(\nu))).$$

Wegen Proposition 2.2.11 gilt $d(\star)^0 = -[\omega]$ und $d(\star)^1 = 0$ und mit der Definition von $c(\star)$ erhält man

$$\begin{aligned} c(\star)(p(\nu)) &= \frac{[\omega]}{p(\nu)} + c(\star)^0 + p(\nu) d(\star)^2 + \ldots = \frac{[\omega]}{\nu}(1 - \nu p_2 + \nu^2(p_2^2 - p_3) + \ldots) + c(\star)^0 + \nu d(\star)^0 \\ &= \frac{[\omega]}{\nu} - p_2[\omega] + c(\star)^0 + \nu(d(\star)^0 + (p_2^2 - p_3)[\omega]) + \ldots . \end{aligned}$$

Also ist $c(\star)$ äquivariant unter Parameterwechseln genau dann, wenn $c(\star')^0 = c(\star)^0 - p_2[\omega]$ gilt. Wegen $C'_2 = C_2 + p_2 C_1$ gilt $C'^-_2 = C^-_2 + \frac{p_2}{2}\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$, das heißt $(C'^-_2)^\sharp = (C^-_2)^\sharp + \frac{p_2}{2}[\omega]$ also erhält man

$$c(\star')^0 + 2(C'^-_2)^\sharp = c(\star)^0 + 2(C^-_2)^\sharp$$

und es gilt Äquivarianz, wenn $c(\star)^0 = -2(C^-_2)^\sharp$. Die durchgeführten Überlegungen führen zu der Definition:

Definition 2.2.18 ([56, Def. 6.3]) *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines differentiellen Sternproduktes $\star$ auf (M,ω) ist das Element des affinen Raumes $\frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, welches durch*

$$\begin{aligned} c(\star)^0 &= -2(C^-_2)^\sharp \quad \textit{und} & (2.19)\\ \partial_\nu c(\star)(\nu) &= \frac{1}{\nu^2} d(\star)(\nu) & (2.20) \end{aligned}$$

definiert ist.

Satz 2.2.19 ([56, Thm. 6.4]) *Die charakteristische Klasse besitzt die folgenden Eigenschaften:*

i.) Die relative Klasse ist in Termen der charakteristischen Klasse durch

$$t(\star', \star) = c(\star') - c(\star) \tag{2.21}$$

gegeben.

ii.) Die Abbildung C von Äquivalenzklassen von Sternprodukten auf (M,ω) in den affinen Raum $\frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, die $[\star]$ auf $c(\star)$ abbildet ist eine Bijektion.

iii.) Für einen Diffeomorphismus $\phi : M \to M'$ und ein Sternprodukt $\star$ auf (M,ω) definiert $f \star' g = (\phi^{-1})^*(\phi^* f \star \phi^* g)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M')[[\nu]]$ ein Sternprodukt $\star' = (\phi^{-1})^* \star$ auf $(M', \omega' = (\phi^{-1})^*\omega)$. Die charakteristische Klasse ist natürlich bezüglich Diffeomorphismen, das heißt

$$c(\star') = c((\phi^{-1})^* \star) = (\phi^{-1})^* c(\star). \tag{2.22}$$

iv.) Sei $p(\nu) = \sum_{r=1}^\infty \nu^r p_r$, wobei $p_r \in \mathbb{C}$ und $p_1 \neq 0$ gilt, ein Parameterwechsel und sei $\star'$ das durch diesen Parameterwechsel auf $(M, \omega' = \frac{1}{p_1}\omega)$ definierte Sternprodukt, das heißt $f \star' g = \sum_{k=0}^\infty (p(\nu))^k C_k(f,g)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Die charakteristische Klasse ist äquivariant unter solchen Parameterwechseln, das heißt

$$c(\star')(\nu) = c(\star)(p(\nu)). \tag{2.23}$$

BEWEIS: Die Aussage i.) ergibt sich aus der Definition der charakteristischen Klasse unter Verwendung des Resultates von Satz 2.2.15, der besagt, daß $\nu^2\partial_\nu t(\star', \star) = d(\star') - d(\star) = \nu^2\partial_\nu(c(\star') - c(\star))$, woraus die Richtigkeit der behaupteten Gleichung in den von Null verschiedenen Ordnungen in ν folgt. Daß die behauptete Gleichung auch in nullter Ordnung in ν erfüllt ist, folgt aus Proposition 2.2.17, denn diese liefert $t(\star', \star)^0 = -2(C_2'^-)^\sharp + 2(C_2^-)^\sharp = c(\star')^0 - c(\star)^0$. Die Behauptung ii.) folgt direkt aus i.) und Satz 2.2.6. Für den Beweis von iii.) beachte man, daß man für lokale ν-Euler Derivationen $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha$ von $\star$ lokale ν-Euler Derivationen E'_α für $\star'$ durch $\mathsf{E}'_\alpha = (\phi^{-1})^*\mathsf{E}_\alpha\phi^* = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi'_\alpha} + (\phi^{-1})^*\mathsf{D}_\alpha\phi^*$ erhält, wobei $\xi'_\alpha = (\phi^{-1})^*\xi_\alpha$ konform symplektische lokale Vektorfelder für $\omega' = (\phi^{-1})^*\omega$ sind. Sei dann $\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha})$, so erhält man

$$\mathsf{E}'_\beta - \mathsf{E}'_\alpha = \frac{1}{\nu}(\phi^{-1})^*\mathrm{ad}_\star(d_{\beta\alpha})\phi^* = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star'}((\phi^{-1})^* d_{\beta\alpha}),$$

also gilt $d(\star') = [(\phi^{-1})^* d_{\gamma\beta\alpha}] = (\phi^{-1})^*[d_{\gamma\beta\alpha}] = (\phi^{-1})^* d(\star)$. Hieraus erhält man direkt, $c(\star')^k = (\phi^{-1})^* c(\star)^k$ für alle $k \neq 0$. Um einzusehen, daß diese Aussage auch für $k = 0$ gilt, betrachten wir C_2^- in der in Bemerkung 2.2.16 angegebenen Form $C_2^-(f,g) = aS^3_\Gamma(f,g) + A(X_f^\omega, X_g^\omega) + (\{f, E(g)\}^\omega + \{E(f), g\}^\omega - E(\{f,g\}^\omega))$ und erhalten somit für $C_2'^-(f,g) = (\phi^{-1})^*(C_2^-(\phi^* f, \phi^* g)) = a(\phi^{-1})^*(S^3_\Gamma(\phi^* f, \phi^* g)) + ((\phi^{-1})^* A)(X_f^{\omega'}, X_g^{\omega'}) + (\{f, E'(g)\}^{\omega'} + \{E'(f), g\}^{\omega'} - E'(\{f,g\}^{\omega'}))$, hierbei sei $E' f = (\phi^{-1})^* E\phi^* f$. Darüberhinaus haben wir die Gleichungen $X^\omega_{\phi^* f} = \phi^* X_f^{\omega'}$ und $(\phi^{-1})^*\{\phi^* f, \phi^* g\}^\omega = \{f, g\}^{\omega'}$ verwendet, die man leicht aus $(\phi^{-1})^*\omega = \omega'$ ableitet. Also findet man $(C_2'^-)^\sharp = (\phi^{-1})^*(C_2^-)^\sharp$ und somit $c(\star')^0 = (\phi^{-1})^* c(\star)^0$, was den Beweis von iii.) vervollständigt. Zum Beweis von iv.) schreiben wir den Parameterwechsel p als $p(\nu) = (p^1 \circ \widetilde{p})(\nu)$, wobei $p^1(\nu) := p_1\nu$ und $\widetilde{p}(\nu) := \nu + \sum_{r=2}^\infty \nu^r \frac{p_r}{p_1}$ und betrachten zunächst als Hilfsgröße das Sternprodukt $\star''$ zur symplektischen Form $\omega' = \frac{1}{p_1}\omega$, das durch den Parameterwechsel p^1 entsteht, und bestimmen dessen charakteristische Klasse in Termen der charakteristischen Klasse $c(\star)$. Aus lokalen ν-Euler Derivationen $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha(\nu)$ für $\star$ erhält man ebensolche Derivationen für $\star''$ durch $\mathsf{E}''_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha(p^1(\nu))$, so daß mit $d_{\beta\alpha}$ wie in iii.) $(\mathsf{E}''_\beta - \mathsf{E}''_\alpha)(\nu) = (\mathsf{E}_\beta - \mathsf{E}_\alpha)(p^1(\nu)) = \frac{1}{p^1(\nu)}\mathrm{ad}_{\star''}(d_{\beta\alpha}(p^1(\nu))) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star''}(d''_{\beta\alpha}(\nu))$ mit $d''_{\beta\alpha}(\nu) = \frac{1}{p_1} d_{\beta\alpha}(p^1(\nu))$ gilt. Also erhalten wir $\partial_\nu c(\star'') = \frac{1}{\nu^2} d(\star'') = p_1 \frac{1}{(p^1(\nu))^2} d(\star)(p^1(\nu)) = \partial_\nu(c(\star)(p^1(\nu)))$ und somit $c(\star'')^k = c(\star)(p^1(\nu))^k$ für $k \neq 0$. Wegen $C''_2 = p_1^2 C_2$ und $X_f^{\omega'} = p_1 X_f^\omega$ erhält man $(C_2''^-)^\sharp = (C_2^-)^\sharp$, also $c(\star'')^0 = c(\star)^0$, womit die Gleichung $c(\star'')(\nu) = c(\star)(p^1(\nu))$ bewiesen ist. Da wir die charakteristische Klasse gerade so definiert hatten, daß sie unter Parameterwechseln der Form von $\widetilde{p}$ äquivariant ist, erhalten wir insgesamt $c(\star')(\nu) = c(\star'')(\widetilde{p}(\nu)) = c(\star)(p^1(\widetilde{p}(\nu))) = c(\star)(p(\nu))$, wobei wir benutzt haben, daß das Sternprodukt $\star'$ aus dem Sternprodukt $\star''$ durch den Parameterwechsel $\widetilde{p}$ entsteht, und der Satz ist bewiesen. □

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Klassifikationskonzept für differentielle Sternprodukte, werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit in vielen konkreten Situationen, in denen wir direkte Konstruktionen von Sternprodukten (mit speziellen Eigenschaften) angeben, verwenden um deren Äquivalenzklassen zu bestimmen.

2.3 Deligne's charakteristische Klasse von Fedosov-Sternprodukten

In diesem Abschnitt betrachten wir die Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω), die bis auf die verallgemeinerte Normierungsbedingung an das

Element r aus Satz 1.3.3 mit der ursprünglich von Fedosov in [45] angegebenen Vorgehensweise übereinstimmt. Indem wir das in Abschnitt 2.2 vorgestellte Klassifikationsschema auf diese Sternprodukte anwenden, können wir zeigen, wie die Äquivalenzklasse der konstruierten Produkte von den Eingangsdaten der Fedosov-Konstruktion abhängt, indem wir deren charakteristische Klasse explizit bestimmen. Wir folgen hierbei im wesentlichen der Darstellung in unserer Arbeit [87]. Um Verwechslungen mit der völlig allgemeinen Situation in Abschnitt 1.3 auszuschließen und einige Notationen einzuführen, stellen wir kurz die wichtigen Bestandteile der spezielleren Konstruktion zusammen.

Wir gehen aus von der Algebra $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ_{\mathrm{F}})$, wobei $\circ_{\mathrm{F}}$ für $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ durch

$$a \circ_{\mathrm{F}} b := \mu \circ \exp\left(\frac{\nu}{2}\Lambda^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j)\right)(a \otimes b) \tag{2.24}$$

gegeben sei und Λ^{ij} die Komponenten des zu ω gehörenden Poisson-Tensors bezeichnet. Mit einem symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇ erhält man durch $\nabla := (1 \otimes dx^i)\nabla_{\partial_i}$ eine Abbildung $\nabla : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, die alle Voraussetzungen an die Abbildung D aus Satz 1.3.3 erfüllt. Die Tatsache, daß der Zusammenhang torsionsfrei ist, gewährleistet hierbei, daß $[\delta, \nabla] = 0$ und $\nabla(1 \otimes \alpha) = 1 \otimes d\alpha$ für alle $\alpha \in \Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)[[\nu]]$ gilt. Aufgrund der Symplektizität des Zusammenhangs erhält man zum einen, daß ∇ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 ist, da $\nabla\omega = 0$, und daß $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R)$, wobei $R = \frac{1}{4}\omega_{it}R^t_{jkl}dx^i \vee dx^j \otimes dx^k \wedge dx^l$ durch die Komponenten $R^t_{jkl} = dx^t(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\partial_j - \nabla_{\partial_l}\nabla_{\partial_k}\partial_j)$ des Krümmungstensors von ∇ festgelegt ist. Wiederum garantieren die Torsionsfreiheit und die Symplektizität, daß $\delta R = \nabla R = 0$, was äquivalent zu den beiden Bianchi-Identitäten für den Krümmungstensor des Zusammenhangs ist. Für alle formalen Reihen geschlossener Zweiformen $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i\Omega_i$ und alle $s \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(s) = 0$ existiert dann nach Satz 1.3.3 ein eindeutig bestimmtes Element $r_{\mathrm{F}} \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ derart, daß

$$\delta r_{\mathrm{F}} = \nabla r_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{F}} \circ_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{F}} + R + 1 \otimes \Omega \quad \text{und} \quad \delta^{-1} r_{\mathrm{F}} = s \tag{2.25}$$

und r_{F} läßt sich aus der Gleichung

$$r_{\mathrm{F}} = \delta s + \delta^{-1}\left(\nabla r_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{F}} \circ_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{F}} + R + 1 \otimes \Omega\right) \tag{2.26}$$

rekursiv bestimmen. In diesem Fall ist die Fedosov-Derivation

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} = -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}}) \tag{2.27}$$

eine Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 bezüglich $\circ_{\mathrm{F}}$ und es gilt ${\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}}^2 = 0$. Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ existiert dann nach Satz 1.3.5 die zugehörige Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}}(f)$, die wir kurz mit $\tau_{\mathrm{F}}(f)$ bezeichnen wollen, und die mit

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{F}}(f)^{(0)} &= f \\ \tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k+1)} &= \delta^{-1}\left(\nabla\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k)} - \frac{1}{\nu}\sum_{l=0}^{k-1}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}}^{(l+2)})\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k-l)}\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

rekursiv bestimmt werden kann. Ebenfalls nach Satz 1.3.5 existiert das induzierte assoziative Produkt $*_{\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, das wir kurz mit $*_{\mathrm{F}}$ bezeichnen wollen, welches nach Satz 1.3.15 ein Sternprodukt ist. Da die Abbildung ∇ vom symmetrischen Grad 0 ist, sind die Voraussetzungen von Satz 1.3.13 erfüllt, so daß $*_{\mathrm{F}}$ ein Sternprodukt vom Vey-Typ ist. Auf dieses Sternprodukt beziehen wir uns in dem nun folgenden Abschnitt als das Fedosov-Sternprodukt. Man beachte, daß dieses Sternprodukt von drei wesentlichen Eingangsdaten abhängt, die noch variiert werden können, nämlich dem symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇, der formalen Reihe geschlossener Zweiformen Ω und dem Element s, das die Normierungsbedingung an r_{F} festlegt. Insofern wäre es richtiger von einer ganzen Schar von Fedosov-Sternprodukten zu sprechen, bei der alle möglichen Wahlen der Eingangsdaten zugelassen sind. Ein wichtiges Ergebnis der nun folgenden Untersuchung wird sein, wie diese Eingangsdaten Einfluß auf die Äquivalenzklasse des erhaltenen Sternproduktes nehmen. An dieser Stelle bietet es sich an, auf die in Abschnitt 1.3.6 im allgemeinen Rahmen gegebene Interpretation der Normierungsbedingung in dem uns konkret vorliegenden Beispiel zu sprechen zu kommen, da sich in diesem Fall die Verhältnisse im Vergleich zu der allgemeinen Situation (vgl. Proposition 1.3.27) etwas einfacher darstellen.

2.3.1 Die Normierungsbedingung in der Konstruktion von $*_{\mathrm{F}}$

Zunächst wollen wir an einige bekannte Eigenschaften von symplektischen, torsionsfreien Zusammenhängen auf (M,ω) erinnern, die wir in folgendem Lemma zusammenstellen.

Lemma 2.3.1 *Seien ∇ und ∇' zwei symplektische, torsionsfreie Zusammenhänge auf (M,ω), dann gilt:*

i.) Durch $S^{\nabla-\nabla'}(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla'_X Y$ für $X,Y \in \Gamma^\infty(TM)$ ist ein symmetrisches Tensorfeld $S^{\nabla-\nabla'} \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes TM)$ auf M definiert.

ii.) Definiert man mit $X,Y,Z \in \Gamma^\infty(TM)$ weiter $\sigma^{\nabla-\nabla'}(X,Y,Z) := \omega(S^{\nabla-\nabla'}(X,Y),Z)$, so ist $\sigma^{\nabla-\nabla'} \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$ ein total symmetrisches Tensorfeld.

iii.) Ist umgekehrt $\sigma \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$ beliebig und ∇ ein gegebener symplektischer, torsionsfreier Zusammenhang auf (M,ω), und definiert man $S^\sigma \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes TM)$ durch $\sigma(X,Y,Z) = \omega(S^\sigma(X,Y),Z)$, dann ist ∇^σ wobei $\nabla^\sigma_X Y := \nabla_X Y - S^\sigma(X,Y)$ wieder ein symplektischer, torsionsfreier Zusammenhang. Auf diese Weise erhält man alle derartigen Zusammenhänge auf (M,ω).

Beweis: Mit der Tatsache, daß ∇ und ∇' Zusammenhänge sind, weist man sofort nach, daß für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und $X,Y \in \Gamma^\infty(TM)$ die Gleichung $fS^{\nabla-\nabla'}(X,Y) = S^{\nabla-\nabla'}(fX,Y) = S^{\nabla-\nabla'}(X,fY)$ gilt, also ist $S^{\nabla-\nabla'}$ ein Tensorfeld. Weiter folgt die Symmetrie dieses Tensorfeldes direkt aus der Torsionsfreiheit von ∇ und ∇'. Da sowohl ∇ als auch ∇' symplektisch sind, erhalten wir $0 = (\nabla_X\omega)(Y,Z) = X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla'_X Y + S^{\nabla-\nabla'}(X,Y),Z) - \omega(Y,\nabla'_X Z + S^{\nabla-\nabla'}(X,Z)) = (\nabla'_X\omega)(Y,Z) - \sigma^{\nabla-\nabla'}(X,Y,Z) + \sigma^{\nabla-\nabla'}(X,Z,Y)$ also $\sigma^{\nabla-\nabla'}(X,Y,Z) = \sigma^{\nabla-\nabla'}(X,Z,Y)$. Da $\sigma^{\nabla-\nabla'}$ nach i.) in den ersten beiden Argumenten symmetrisch ist, folgt hieraus die totale Symmetrie von $\sigma^{\nabla-\nabla'}$. Indem man die Argumentationen in i.) und ii.) umkehrt ist es ein leichtes nachzuweisen, daß man in der angegebenen Art und Weise wieder einen symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang definiert. Nach i.) und ii.) ist aber auch klar, daß man somit alle derartigen Zusammenhänge erhält, womit das Lemma bewiesen ist. □

Wir wenden uns nun der Frage zu, die entsprechenden Abbildungen, ∇ und ∇', die man vermöge zweier symplektischer, torsionsfreier Zusammenhänge wie in (1.39) definieren kann, zu vergleichen.

Lemma 2.3.2 *Seien ∇ und ∇' zwei symplektische, torsionsfreie Zusammenhänge auf (M,ω) und seien die entsprechenden Abbildungen auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gemäß (1.39) mit denselben Symbolen bezeichnet, dann gilt mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.3.1*

$$\nabla - \nabla' = -(dx^j \otimes dx^i) i_s(S^{\nabla-\nabla'}(\partial_i,\partial_j)) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T^{\nabla-\nabla'}), \tag{2.29}$$

wobei $T^{\nabla-\nabla'} \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M \otimes T^*M) \subseteq \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ durch $T^{\nabla-\nabla'}(Z,Y;X) := \sigma^{\nabla-\nabla'}(X,Y,Z) = \omega(S^{\nabla-\nabla'}(X,Y),Z)$ definiert ist. Weiter erfüllt $T^{\nabla-\nabla'}$ die Gleichungen

$$\delta T^{\nabla-\nabla'} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \nabla T^{\nabla-\nabla'} &= R' - R + \tfrac{1}{\nu} T^{\nabla-\nabla'} \circ_{\mathrm{F}} T^{\nabla-\nabla'} \\ \nabla' T^{\nabla-\nabla'} &= R' - R - \tfrac{1}{\nu} T^{\nabla-\nabla'} \circ_{\mathrm{F}} T^{\nabla-\nabla'}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

wobei $R = \frac{1}{4}\omega_{it} R^t_{jkl} dx^i \vee dx^j \otimes dx^k \wedge dx^l$ und $R' = \frac{1}{4}\omega_{it} R'^t_{jkl} dx^i \vee dx^j \otimes dx^k \wedge dx^l$ die mit den entsprechenden Krümmungstensoren von ∇ und ∇' gebildeten Elemente von $\mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ bezeichnen.

Beweis: Für den Beweis von (2.29) ist es genug auf faktorisierten Schnitten der Form $T\otimes\beta \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ zu arbeiten. Dann gilt in lokalen Koordinaten offensichtlich $(\nabla-\nabla')(T\otimes\beta) = (1\otimes dx^i)((\nabla_{\partial_i} - \nabla'_{\partial_i})T\otimes\beta)$. Für $T \in \Gamma^\infty(T^*M)$ berechnet man weiter $(\nabla_{\partial_i} - \nabla'_{\partial_i})T = dx^j \vee ((\nabla_{\partial_i} - \nabla'_{\partial_i})T)(\partial_j) = -dx^j \vee T(\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla'_{\partial_i}\partial_j) = -dx^j \vee i_s(S^{\nabla-\nabla'}(\partial_i,\partial_j))T$. Da nun sowohl $\nabla_{\partial_i} - \nabla'_{\partial_i}$ als auch $-dx^j \vee i_s(S^{\nabla-\nabla'}(\partial_i,\partial_j))$ Derivationen bezüglich $\vee$ sind, folgt hiermit aber, daß diese beiden Abbildungen übereinstimmen, da sie auf den Einsformen übereinstimmen. Somit ist die erste Gleichung in (2.29) bewiesen. Für den Beweis der zweiten Gleichung schreiben wir $T^{\nabla-\nabla'} = -\frac{1}{2}\omega_{ij} S^{\nabla-\nabla'}{}^j_{kl} dx^i \vee dx^l \otimes dx^k$ wobei $S^{\nabla-\nabla'}{}^j_{kl} = dx^j(S^{\nabla-\nabla'}(\partial_k,\partial_l))$ die Komponenten des Tensorfeldes $S^{\nabla-\nabla'}$ bezeichnet. Unter Verwendung der expliziten Gestalt des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{F}}$ erhält man $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T^{\nabla-\nabla'}) = \Lambda^{ij} i_s(\partial_i) T^{\nabla-\nabla'} i_s(\partial_j)$. Man beachte an dieser Stelle, daß hierbei wesentlich eingeht, daß der Term in zweiter Ordnung in ν des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{F}}$ symmetrisch ist, was dazu führt, daß in $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T^{\nabla-\nabla'})$ kein Term in erster Ordnung in ν auftritt. Durch eine offensichtliche Rechnung in lokalen Koordinaten erhält man nun $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T^{\nabla-\nabla'}) = -(dx^j \otimes dx^i) i_s(S^{\nabla-\nabla'}(\partial_i,\partial_j))$, wobei man die Gleichung $\omega_{lj} S^{\nabla-\nabla'}{}^j_{ki} = \omega_{ij} S^{\nabla-\nabla'}{}^j_{kl}$, die aus der totalen Symmetrie von $\sigma^{\nabla-\nabla'}$ folgt, benutzt. Die bewiesene Aussage ist natürlich ein Spezialfall von Lemma 1.3.25, wobei hier nicht nur die bloße Existenz und Eindeutigkeit des Tensorfeldes $T^{\nabla-\nabla'}$ sondern auch seine explizite Gestalt von Wichtigkeit ist. Die Gleichungen (2.30) folgen nun direkt aus Lemma 1.3.25, wobei wir nur beachten müssen, daß die dort auftretende geschlossene Zweiform $\vartheta^{\nabla-\nabla'}$ hier verschwindet, da $\nabla T^{\nabla-\nabla'} - \frac{1}{\nu} T^{\nabla-\nabla'} \circ_{\mathrm{F}} T^{\nabla-\nabla'}$ keinen Anteil vom symmetrischen Grad 0 besitzt, was wiederum eine Konsequenz der Symmetrie des Terms der zweiten Ordnung in ν des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{F}}$ und der Tatsache, daß ∇ vom symmetrischen Grad 0 ist, ist. □

Betrachtet man nun zwei Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ und $\mathfrak{D}'_{\mathrm{F}}$, die man aus den Eingangsdaten (∇,Ω,s) und (∇',Ω',s') erhält, so stimmen diese nach Proposition 1.3.27 genau dann überein, wenn $d\rho = \Omega - \Omega'$ und $\sigma^{\nabla-\nabla'} - s + s' = \rho\otimes 1$ mit einer formalen Reihe $\rho = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \rho_i$ von Einsformen auf M gilt. Dies bedeutet aber folgendes: Geht man von einem fixierten symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇, einer fixierten formalen Reihe geschlossener Zweiformen Ω und einem Element $s \in \mathcal{W}_4(M)$ mit $\sigma(s) = 0$, welches zusätzlich keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzt, aus und geht über zur Normierungsbedingung $\widetilde{s} = s + \rho\otimes 1 + \sigma\otimes 1$, wobei $\sigma \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$, so ist das gleichbedeutend mit dem Übergang zu $\Omega + d\rho$ und $\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\delta(\sigma\otimes 1)) = \nabla^\sigma$ unter Beibehaltung der Normierungsbedingung s, hierbei sei ∇^σ wie in Lemma 2.3.1 definiert. Also parametrisieren die Anteile vom symmetrischen Grad 1 und der Anteil vom ν-Grad 0 und symmetrischen Grad 3 der Normierungsbedingung alle möglichen Wahlen eines symplektischen, torsionsfreien Zusammenhangs und alle zu Ω kohomologen Wahlen einer formalen Reihe geschlossener Zweiformen.

2.3.2 Explizite Konstruktion lokaler ν-Euler Derivationen

Nach Abschnitt 2.2 bildet die explizite Angabe lokaler ν-Euler Derivationen die Grundlage für die Berechnung der charakteristischen Klasse eines Sternproduktes. Für das Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ werden wir in diesem Abschnitt eine explizite Konstruktion für solche Derivationen finden, die uns später den Zugang zur Bestimmung der Derivations-verwandten Klasse und somit zur charakteristischen Klasse ermöglicht.

Sei wie im vorangehenden Abschnitt $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine lokal endliche, gute, offene Überdeckung von M durch Darboux-Koordinaten-Definitionsbereiche. Um die Notation zu vereinfachen, benutzen wir die Konvention, daß eine Gleichung, wenn sie Indizes α, β, γ beinhaltet, immer bedeutet, daß diese Gleichung auf dem Durchschnitt der entsprechenden Mengen $\mathcal{U}_\alpha, \mathcal{U}_\beta, \mathcal{U}_\gamma$, deren Indizes in der Gleichung erscheinen, gilt.

Als ersten Schritt in der Konstruktion lokaler ν-Euler Derivationen müssen wir lokale, konform symplektische Vektorfelder $\xi_\alpha \in \Gamma^\infty(T\mathcal{U}_\alpha)$ finden. Da $d\omega = 0$ können wir nach dem Poincaré-Lemma auf allen $\mathcal{U}_\alpha$ Einsformen θ_α finden, so daß $\omega = -d\theta_\alpha$ gilt. Vermöge dieser Einsformen können wir lokale Vektorfelder ξ_α durch $i_{\xi_\alpha}\omega = -\theta_\alpha$ definieren. Wegen der Cartan-Formel für die Lie-Ableitung erfüllen diese Vektorfelder offensichtlich $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega = \omega$. Unter Verwendung dieser Vektorfelder finden wir das folgende Lemma:

Lemma 2.3.3 ([87, Lemma 3.1]) *Sei $\mathcal{H}_\alpha : \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$ definiert durch*

$$\mathcal{H}_\alpha := \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha}. \tag{2.31}$$

Dann ist $\mathcal{H}_\alpha$ eine lokale (Super-)Derivation bezüglich des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{F}}$ vom antisymmetrischen Grad 0 und vom totalen Grad 0, d.h.

$$\mathcal{H}_\alpha(a \circ_{\mathrm{F}} b) = (\mathcal{H}_\alpha a)\circ_{\mathrm{F}} b + a \circ_{\mathrm{F}} (\mathcal{H}_\alpha b) \tag{2.32}$$

für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$. Darüberhinaus gilt $[\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \delta] = [\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \delta^*] = 0$ und $[\mathcal{H}_\alpha, \delta] = [\mathcal{H}_\alpha, \delta^*] = 0$.

Beweis: Die Aussagen über den antisymmetrischen und den totalen Grad von $\mathcal{H}_\alpha$ sind offensichtlich aus der Definition von $\mathcal{H}_\alpha$. Da sowohl $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ als auch $\nu\partial_\nu$ Derivationen bezüglich des undeformierten Produktes μ sind, gilt $\mathcal{H}_\alpha \circ \mu = \mu \circ (\mathcal{H}_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{H}_\alpha)$. Weiter gilt

$$[\mathcal{H}_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{H}_\alpha, \frac{\nu}{2}\Lambda^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j)] = \frac{\nu}{2}\Lambda^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j) + \frac{\nu}{2}(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\Lambda)^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j) = 0,$$

da wegen $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega = \omega$ die Gleichung $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\Lambda = -\Lambda$ erfüllt ist. Insgesamt erhält man also

$$\mathcal{H}_\alpha(a \circ_{\mathrm{F}} b) = \mu \circ \exp\left(\frac{\nu}{2}\Lambda^{ij} i_s(\partial_i) \otimes i_s(\partial_j)\right)(\mathcal{H}_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{H}_\alpha)(a \otimes b) = (\mathcal{H}_\alpha a)\circ_{\mathrm{F}} b + a \circ_{\mathrm{F}} (\mathcal{H}_\alpha b),$$

womit (2.32) bewiesen ist. Die Vertauschungsrelationen für $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ folgen direkt aus den Tatsachen, daß die Lie-Ableitung eine Derivation bezüglich Tensorprodukten ist und mit Kontraktionen kommutiert. Die Vertauschungsrelationen für $\mathcal{H}_\alpha$ sind dann offensichtlich. □

Wie es die Philosophie der Fedosov-Konstruktion nahelegt, besteht unser weiteres Vorgehen darin, geeignete faserweise ν-Euler Derivationen zu finden, die mit der Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ verträglich sind und auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ dann ν-Euler Derivationen induzieren. Man vergleiche hierzu unsere Vorgehensweise in Abschnitt 1.3.5. Auf den ersten Blick könnte es denkbar sein, lokale Derivationen bezüglich $*_{\mathrm{F}}$ zu erhalten, indem man $\mathcal{H}_\alpha$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ einschränkt. In der Tat kann man in einigen speziellen Fällen, in denen der Zusammenhang ∇ mit der Lie-Ableitung bezüglich der Vektorfelder ξ_α verträglich ist, so vorgehen. Ein wichtiges Beispiel für diese Situation sind homogene Sternprodukte auf Kotangentenbündeln, die wir in [18, 19, 86, 109] genauer betrachtet haben. Aber im allgemeinen kann dies nicht getan werden, da die Inkompatibilität des Zusammenhangs mit den obigen Lie-Ableitungen zur Folge hat, daß die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ nicht mit $\mathcal{H}_\alpha$ kommutiert. Somit bildet also $\mathcal{H}_\alpha$ im allgemeinen Elemente aus $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}})$ nicht wieder auf Elemente in $\ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}})$ ab. Also versuchen wir $\mathcal{H}_\alpha$ zu einer $\circ_{\mathrm{F}}$-(Super-)Derivation vom antisymmetrischen Grad 0 zu erweitern, die mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ vertauscht. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha) = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha) \tag{2.33}$$

mit $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$, so daß $\sigma(h_\alpha) = 0$ und berechnen $[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathcal{E}_\alpha]$.

Lemma 2.3.4 ([87, Lemma 3.2]) *Sei $\mathcal{E}_\alpha$ wie in Gleichung (2.33) gegeben, dann ist $\mathcal{E}_\alpha$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-(Super-)Derivation vom antisymmetrischen Grad* 0 *und es gilt*

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathcal{E}_\alpha] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} h_\alpha) + [\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}}). \tag{2.34}$$

Beweis: Nach Lemma 2.3.3 ist $\mathcal{H}_\alpha$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0. Da aber auch $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)$ für alle $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ eine solche ist, ist $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)$ offensichtlich auch eine $\circ_{\mathrm{F}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0. Da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ eine Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 ist und $\mathcal{H}_\alpha$ gemäß Lemma 2.3.3 eine (Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0 bezüglich $\circ_{\mathrm{F}}$ ist, finden wir

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathcal{E}_\alpha] = [-\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}}), \mathcal{H}_\alpha] + [\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)] = [\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}}) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} h_\alpha).$$

Hierbei haben wir $[\delta, \mathcal{H}_\alpha] = 0$ und $[\nabla, \mathcal{H}_\alpha] = [\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}]$ benutzt. □

Nun betrachten wir die Abbildung $[\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}]$ genauer. Die Formeln, die wir in den beiden folgenden Lemmas zusammenfassen, sind essentiell für die ganze Konstruktion lokaler ν-Euler Derivationen.

Lemma 2.3.5 ([87, Lemma 3.3]) *Für die lokal definierten Vektorfelder ξ_α besitzt die Abbildung $[\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}]$ die folgenden Eigenschaften:*

i.) In lokalen Koordinaten gilt

$$[\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] = (dx^j \otimes dx^i) i_s((\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla)_{\partial_i}\partial_j) = (dx^j \otimes dx^i) i_s(S_\alpha(\partial_i, \partial_j)), \tag{2.35}$$

wobei das lokale Tensorfeld $S_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*\mathcal{U}_\alpha \otimes T^*\mathcal{U}_\alpha \otimes T\mathcal{U}_\alpha)$ durch

$$S_\alpha(\partial_i, \partial_j) = (\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla)_{\partial_i}\partial_j := \mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_j - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\partial_j = R(\xi_\alpha, \partial_i)\partial_j + \nabla^{(2)}_{(\partial_i,\partial_j)}\xi_\alpha \tag{2.36}$$

definiert ist.

ii.) S_α wie oben definiert ist symmetrisch, d.h. $S_\alpha \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*\mathcal{U}_\alpha \otimes T\mathcal{U}_\alpha)$.

iii.) Für alle $X, Y, Z \in \Gamma^\infty(T\mathcal{U}_\alpha)$ gilt

$$\omega(Z, S_\alpha(X, Y)) = -\omega(S_\alpha(X, Z), Y). \tag{2.37}$$

Beweis: Auf einem faktorisierten Schnitt der Form $T \otimes \beta \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ berechnen wir mit $\nabla(T \otimes \beta) = \nabla_{\partial_i} T \otimes dx^i \wedge \beta + T \otimes d\beta$

$$\begin{aligned}
[\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}](T \otimes \beta) &= \nabla_{\partial_i}\mathcal{L}_{\xi_\alpha} T \otimes dx^i \wedge \beta + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} T \otimes d\beta + \nabla_{\partial_i} T \otimes dx^i \wedge \mathcal{L}_{\xi_\alpha}\beta + T \otimes d\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\beta \\
&\quad -\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla_{\partial_i} T \otimes dx^i \wedge \beta - \nabla_{\partial_i} T \otimes \mathcal{L}_{\xi_\alpha}(dx^i \wedge \beta) - \mathcal{L}_{\xi_\alpha} T \otimes d\beta - T \otimes \mathcal{L}_{\xi_\alpha} d\beta \\
&= \left([\nabla_{\partial_i}, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] + \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\right) T \otimes dx^i \wedge \beta.
\end{aligned}$$

Da sowohl ∇ als auch $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ mit Kontraktionen vertauschen erhalten wir für $T \in \Gamma^\infty(T^*M)$

$$\begin{aligned}
&\left([\nabla_{\partial_i}, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] + \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\right) T \\
&\quad = dx^j \vee \left(\left([\nabla_{\partial_i}, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] + \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\right) T\right)(\partial_j) = dx^j \vee i_s(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_j - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\partial_j) T.
\end{aligned}$$

Da sowohl $dx^j \vee i_s(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_j - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\partial_j)$ als auch $[\nabla_{\partial_i}, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] + \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}$ Derivationen bezüglich $\vee$ sind, gilt diese Gleichung aber für alle symmetrischen Tensorfelder, womit (2.35) bewiesen ist. Zum Beweis der letzten Gleichheit in (2.36) verwenden wir die Torsionsfreiheit von ∇ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\partial_i}\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_j - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\partial_i}\partial_j = [\xi_\alpha, \nabla_{\partial_i}\partial_j] - \nabla_{\partial_i}[\xi_\alpha, \partial_j] - \nabla_{[\xi_\alpha, \partial_i]}\partial_j \\
&\quad = \nabla_{\xi_\alpha}\nabla_{\partial_i}\partial_j - \nabla_{\nabla_{\partial_i}\partial_j}\xi_\alpha - \nabla_{\partial_i}\nabla_{\xi_\alpha}\partial_j + \nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\xi_\alpha - \nabla_{[\xi_\alpha, \partial_i]}\partial_j = R(\xi_\alpha, \partial_i)\partial_j + \nabla^{(2)}_{(\partial_i,\partial_j)}\xi_\alpha.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ist aber auch offensichtlich, daß S_α ein lokales Tensorfeld definiert. Für den Beweis von ii.) berechnen wir mit $X, Y \in \Gamma^\infty(T\mathcal{U}_\alpha)$

$$\begin{aligned} & S_\alpha(X,Y) - S(Y,X) \\ = \;& R(\xi_\alpha, X)Y - R(\xi_\alpha, Y)X + \nabla^{(2)}_{(X,Y)}\xi_\alpha - \nabla^{(2)}_{(Y,X)}\xi_\alpha = R(\xi_\alpha, X)Y + R(Y,\xi_\alpha)X + R(X,Y)\xi_\alpha = 0, \end{aligned}$$

wegen der ersten Bianchi-Identität. Mit $\nabla\omega = 0$ und $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega = \omega$ erhält man $[\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X]\omega - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X}\omega = 0$; zudem gilt $[\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X]f - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X} f = 0$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, so daß man, da sowohl ∇ als auch $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ mit Kontraktionen vertauschen und $[\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X] - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X}$ eine Derivation bezüglich Tensorprodukten ist,

$$\begin{aligned} & \omega(Z, S_\alpha(X,Y)) \\ = \;& \omega(Z, ([\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X] - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X})Y) \\ = \;& -(([\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X] - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X})\omega)(Z,Y) + ([\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X] - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X})(\omega(Z,Y)) - \omega(([\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X] - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X})Z, Y) \\ = \;& -\omega(([\mathcal{L}_{\xi_\alpha}, \nabla_X] - \nabla_{\mathcal{L}_{\xi_\alpha}X})Z, Y) = -\omega(S_\alpha(X,Z), Y) \end{aligned}$$

erhält. □

Die oben definierten lokalen Tensorfelder S_α induzieren auf natürliche Weise Elemente $T_\alpha \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*\mathcal{U}_\alpha \otimes T^*\mathcal{U}_\alpha)$ von $\mathcal{W}\otimes\Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$ vom Grad $(2,1,0)$ durch

$$T_\alpha(Z,Y;X) := \omega(Z, S_\alpha(X,Y)). \tag{2.38}$$

In lokalen Koordinaten bedeutet das $T_\alpha = \frac{1}{2}\omega_{ij} S_{\alpha}{}^{j}_{kl} dx^i \vee dx^l \otimes dx^k$, wobei $S_{\alpha}{}^{j}_{kl} = dx^j(S_\alpha(\partial_k, \partial_l))$ die Komponenten von S_α in lokalen Koordinaten bezeichnet.

Lemma 2.3.6 ([87, Lemma 3.4]) *Die in Gleichung (2.38) definierten lokalen Tensorfelder $T_\alpha \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$ erfüllen die folgenden Gleichungen:*

i.)

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha) = [\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}], \tag{2.39}$$

ii.)

$$T_\alpha = i_a(\xi_\alpha)R + \nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_\alpha \otimes 1\right), \tag{2.40}$$

wobei der Operator der symmetrischen kovarianten Ableitung D durch $D := dx^i \vee \nabla_{\partial_i}$ definiert ist und $\theta_\alpha = -i_{\xi_\alpha}\omega$.

iii.)

$$\delta T_\alpha = 0 \quad \textit{und} \quad \nabla T_\alpha = \mathcal{L}_{\xi_\alpha} R - R. \tag{2.41}$$

Beweis: Zunächst folgt aus Lemma 2.3.5 iii.), daß $T_\alpha(Z,Y;X) = \omega(Z, S_\alpha(X,Y)) = -\omega(S_\alpha(X,Z), Y) = \omega(Y, S_\alpha(X,Z)) = T_\alpha(Y,Z;X)$, also $T_\alpha \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*\mathcal{U}_\alpha \otimes T^*\mathcal{U}_\alpha)$. Den Nachweis von i.) erbringen wir durch einfaches Nachrechnen unter Verwendung der Eigenschaften von S_α gemäß Lemma 2.3.5

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)a &= \Lambda^{rs} i_s(\partial_r) T_\alpha i_s(\partial_s) a = (dx^l \otimes dx^k)\frac{1}{2}\Lambda^{rs}\left(\omega_{rj} S_{\alpha}{}^{j}_{lk} + \omega_{lj} S_{\alpha}{}^{j}_{rk}\right) i_s(\partial_s) a \\ &= (dx^l \otimes dx^k)\Lambda^{rs}\omega_{rj} S_{\alpha}{}^{j}_{lk} i_s(\partial_s) a = (dx^l \otimes dx^k) i_s(S_\alpha(\partial_k, \partial_l)) a = [\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] a \end{aligned}$$

für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$. Wegen $S_\alpha(\partial_i, \partial_j) = R(\xi_\alpha, \partial_i)\partial_j + \nabla^{(2)}_{(\partial_i, \partial_j)}\xi_\alpha$ erhält man weiter

$$T_\alpha = \frac{1}{2}\omega_{ij} S_{\alpha}{}^{j}_{lk} dx^i \vee dx^l \otimes dx^k = \frac{1}{2}\omega_{ij}\left(R^j_{lnk}\xi_\alpha{}^n + dx^j\left(\nabla^{(2)}_{(\partial_k, \partial_l)}\xi_\alpha\right)\right) dx^i \vee dx^l \otimes dx^k. \tag{2.42}$$

Wegen $R = \frac{1}{4}\omega_{ij}R^j_{knl}dx^i \vee dx^k \otimes dx^n \wedge dx^l$ gilt offensichtlich $\frac{1}{2}\omega_{ij}R^j_{lnk}\xi_\alpha{}^n dx^i \vee dx^l \otimes dx^k = i_a(\xi_\alpha)R$. Um den zweiten Summanden im Ausdruck für T_α weiter umzuformen, verwenden wir die Definition $i_{\xi_\alpha}\omega = -\theta_\alpha$ von ξ_α, um wegen $\nabla\omega = 0$ die Gleichungen

$$-\nabla_{\partial_l}\theta_\alpha = i_{\nabla_{\partial_l}\xi_\alpha}\omega \quad \text{und} \quad -\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\theta_\alpha = i_{\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\xi_\alpha}\omega$$

zu erhalten, aus denen mit der Definition der zweiten kovarianten Ableitung $i_{\nabla^{(2)}_{(\partial_k,\partial_l)}\xi_\alpha}\omega = -\nabla^{(2)}_{(\partial_k,\partial_l)}\theta_\alpha$ folgt, so daß wir in (2.42) $\omega_{ij}dx^j\left(\nabla^{(2)}_{(\partial_k,\partial_l)}\xi_\alpha\right)$ durch $\left(\nabla^{(2)}_{(\partial_k,\partial_l)}\theta_\alpha\right)(\partial_i)$ ersetzen können. Also gilt

$$T_\alpha = i_a(\xi_\alpha)R + \frac{1}{2}\nabla^{(2)}_{(\partial_k,\partial_l)}\theta_\alpha \vee dx^l \otimes dx^k.$$

Auf der anderen Seite berechnen wir

$$\nabla\left(\frac{1}{2}D\theta_\alpha\right) = \frac{1}{2}\nabla_{\partial_k}\left(dx^l \vee \nabla_{\partial_l}\theta_\alpha\right)\otimes dx^k = \frac{1}{2}\left(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\theta_\alpha - \nabla_{\nabla_{\partial_k}\partial_l}\theta_\alpha\right)\vee dx^l \otimes dx^k = \frac{1}{2}\nabla^{(2)}_{(\partial_k,\partial_l)}\theta_\alpha \vee dx^l \otimes dx^k,$$

womit (2.40) bewiesen ist. Für den Beweis der ersten Gleichung unter iii.) verwenden wir die Super-Jacobi-Identität für $[[\delta,\nabla],\mathcal{L}_{\xi_\alpha}]$ und erhalten wegen $[\delta,\nabla] = 0 = [\delta,\mathcal{L}_{\xi_\alpha}]$ und Gleichung (2.39)

$$0 = [[\delta,\nabla],\mathcal{L}_{\xi_\alpha}] = [\delta,[\nabla,\mathcal{L}_{\xi_\alpha}]] + [\nabla,[\delta,\mathcal{L}_{\xi_\alpha}]] = \frac{1}{\nu}\left[\delta, \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)\right] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\delta T_\alpha),$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, daß δ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 ist. Also folgt, daß δT_α zentral ist; da aber δT_α positiven symmetrischen Grad nämlich 1 besitzt, folgt hieraus $\delta T_\alpha = 0$, da die einzig nicht-trivialen zentralen Elemente in $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha),\circ_{\mathrm{F}})$ durch alle $1\otimes\alpha$ für $\alpha\in\Gamma^\infty(\bigwedge T^*\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ gegeben sind, $\delta T_\alpha = 0$. Für den Beweis der zweiten Gleichung in iii.) benutzen wir $\nabla^2 = \frac{1}{2}[\nabla,\nabla] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R)$ und berechnen

$$\frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\nabla,\nabla]] = [\mathcal{H}_\alpha, -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R)] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R) - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{H}_\alpha R) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R),$$

da $\mathcal{H}_\alpha$ nach Lemma 2.3.3 eine lokale $\circ_{\mathrm{F}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0 ist und $\nu\partial_\nu R = 0$ gilt. Auf der anderen Seite gilt nach der Super-Jacobi-Identität

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\nabla,\nabla]]\\ =\ &\frac{1}{2}\left([[\mathcal{H}_\alpha,\nabla],\nabla] + [\nabla,[\mathcal{H}_\alpha,\nabla]]\right) = [\nabla,[\mathcal{H}_\alpha,\nabla]] = [\nabla,[\mathcal{L}_{\xi_\alpha},\nabla]] = [\nabla,-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\nabla T_\alpha),\end{aligned}$$

wobei wir neben der Tatsache, daß ∇ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation vom Grad 1 ist, wieder (2.39) benutzt haben. Insgesamt folgt also, daß

$$\nabla T_\alpha + R - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R$$

zentral ist. Mit einer analogen Argumentation wie für den ersten Teil des Beweises von iii.) erhält man hieraus, da $\nabla T_\alpha + R - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R$ vom symmetrischen Grad 2 ist, $\nabla T_\alpha + R - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R = 0$, also die zu zeigende Gleichung. □

Zusammenfassend haben wir also gezeigt, daß für $\mathcal{E}_\alpha$ wie in (2.33)

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}},\mathcal{E}_\alpha] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h_\alpha + T_\alpha + \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}}) \tag{2.43}$$

gilt. Unser nächstes Ziel ist es nun zu zeigen, daß $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ mit $\sigma(h_\alpha) = 0$ so gewählt werden kann, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}h_\alpha + T_\alpha + \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}} = 1\otimes A_\alpha$, wobei A_α eine formale Reihe von lokal definierten Einsformen, die geeignet zu wählen sind, ist, da dann $[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}},\mathcal{E}_\alpha] = 0$ gilt. Die notwendige Bedingung dafür, daß diese Gleichung lösbar ist, ist $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1\otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) = 0$, da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^2 = 0$. Diese ist aber auch hinreichend, da die $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$-Kohomologie auf Elementen $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ mit positivem antisymmetrischen Grad trivial ist, da die folgende Homotopieformel $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}a + \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}a = a$, wobei $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}a := -\delta^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{id}-[\delta^{-1},\nabla-\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})]}a\right)$, gilt (vgl. Proposition 1.3.17). Mit den für T_α in Lemma 2.3.6 nachgewiesenen Eigenschaften gelingt es uns im folgenden Lemma zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von A_α die obige notwendige Bedingung erfüllbar ist.

Proposition 2.3.7 ([87, Lemma 3.5])

i.) Sei $A_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ eine formale Reihe von lokal definierten Einsformen auf $\mathcal{U}_\alpha$, dann gilt

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) = 0 \tag{2.44}$$

genau dann, wenn

$$dA_\alpha = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\,\Omega, \tag{2.45}$$

wobei $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty}\nu^i\Omega_i$ die formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M bezeichnet, die in der Gleichung (2.25) für r_{F} erscheint.

ii.) Wählt man lokale Potentiale $\Theta_{i\alpha}$ der geschlossenen Zweiformen Ω_i auf $\mathcal{U}_\alpha$, d.h. $d\Theta_{i\alpha} = \Omega_i$ für $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und definiert $\Theta_\alpha := \sum_{i=1}^{\infty}\nu^i\Theta_{i\alpha}$, so ist für

$$A_\alpha := (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\Theta_\alpha = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\sum_{i=1}^{\infty}\nu^i\Theta_{i\alpha} \tag{2.46}$$

die Gleichung (2.45) erfüllt und es gilt $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) = 0$.

Beweis: Zum Beweis von i.) berechnen wir $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}})$ für eine beliebige formale Reihe lokaler Einsformen A_α auf $\mathcal{U}_\alpha$:

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha) = 1 \otimes dA_\alpha + \delta T_\alpha - \nabla T_\alpha + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})T_\alpha = 1 \otimes dA_\alpha - \nabla T_\alpha + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})T_\alpha,$$

da $\delta T_\alpha = 0$ nach Lemma 2.3.6 iii.). Weiter gilt wegen $[\delta, \mathcal{H}_\alpha] = 0$ unter Verwendung von Gleichung (2.25)

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}}) &= -\mathcal{H}_\alpha\delta r_{\mathrm{F}} + \delta r_{\mathrm{F}} + \nabla\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - \nabla r_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})r_{\mathrm{F}} \\ &= \mathcal{H}_\alpha\left(\frac{1}{\nu}r_{\mathrm{F}}\circ_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{F}} - \nabla r_{\mathrm{F}} - R - 1 \otimes \Omega\right) - \frac{1}{\nu}r_{\mathrm{F}}\circ_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{F}} + R + 1 \otimes \Omega + \nabla\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} \\ &\quad -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})r_{\mathrm{F}}.\end{aligned}$$

Verwendet man nun, daß $\mathcal{H}_\alpha$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0 ist, so erhält man wegen $\nu\partial_\nu R = 0$

$$\mathcal{H}_\alpha\left(\frac{1}{\nu}r_{\mathrm{F}}\circ_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{F}} - \nabla r_{\mathrm{F}} - R - 1 \otimes \Omega\right) = -\frac{1}{\nu}r_{\mathrm{F}}\circ_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{F}} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - \mathcal{H}_\alpha\nabla r_{\mathrm{F}} - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R - 1 \otimes \mathcal{H}_\alpha\Omega.$$

Schließlich erhält man wegen $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})r_{\mathrm{F}} = 2r_{\mathrm{F}}\circ_{\mathrm{F}}r_{\mathrm{F}}$ und $[\nabla, \mathcal{H}_\alpha] = [\nabla, \mathcal{L}_{\xi_\alpha}] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)$

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}}) = 1 \otimes (\Omega - \mathcal{H}_\alpha\Omega) + R - \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)r_{\mathrm{F}} = 1 \otimes (\Omega - \mathcal{H}_\alpha\Omega) - \nabla T_\alpha + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})T_\alpha,$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 2.3.6 iii.) und $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)r_{\mathrm{F}} = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})T_\alpha$ verwendet haben. Insgesamt finden wir also

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) = 1 \otimes (dA_\alpha - (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\Omega)$$

und dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn (2.45) erfüllt ist und i.) ist bewiesen. Zum Beweis von ii.) berechnet man einfach $dA_\alpha = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)d\Theta_\alpha = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\Omega$, da die äußere Ableitung d mit $\nu\partial_\nu$ vertauscht und $d\mathcal{L}_{\xi_\alpha} = \mathcal{L}_{\xi_\alpha}d$ gilt. □

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir die folgende wichtige Proposition:

Proposition 2.3.8 ([87, Prop. 3.6]) *Seien formale Reihen A_α lokal definierter Einsformen wie in Proposition 2.3.7 ii.) gewählt. Dann existieren eindeutig definierte Elemente $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$, so daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} h_\alpha = 1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}$ und $\sigma(h_\alpha) = 0$ erfüllt ist. Darüberhinaus ist h_α explizit durch*

$$h_\alpha = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) \tag{2.47}$$

gegeben, wobei $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1} a = -\delta^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{id} - [\delta^{-1}, \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})]} a\right)$. Weiter gilt $h_\alpha \in \mathcal{W}_3(\mathcal{U}_\alpha)$. Mit den so bestimmten Elementen h_α kommutieren die faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen $\mathcal{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)$ mit der Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$.

Beweis: Zum Beweis wenden wir die Homotopie-Formel $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1} a + \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} a = a$, die für $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^+(M)$ gilt auf $1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}$ an und erhalten aus Aussage ii.) der vorangehenden Proposition

$$1\otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}} = \left(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1} + \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\right)(1\otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1\otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}).$$

Da wir aber $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ so bestimmen wollen, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} h_\alpha = 1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}$ gilt, erhalten wir $h_\alpha - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) \in \ker(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}) \cap \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$. Aus Satz 1.3.5 folgt dann aber $h_\alpha - \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}}) = \tau_{\mathrm{F}}(\varphi_\alpha)$, wobei $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ beliebige lokal definierte formale Funktionen sind. Da $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$ den symmetrischen Grad mindestens um eins erhöht, gilt dann $\sigma(h_\alpha) = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(\varphi_\alpha)) = \varphi_\alpha$, so daß wir aus der Forderung $\sigma(h_\alpha) = 0$ schließlich $\varphi_\alpha = 0$ und

$$h_\alpha = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}(1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}})$$

erhalten, womit die Eindeutigkeit und die explizite Gestalt der gesuchten Elemente h_α bewiesen ist. Um einzusehen, daß $h_\alpha \in \mathcal{W}_3(\mathcal{U}_\alpha)$ gilt, beachten wir zunächst, daß $1 \otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} + r_{\mathrm{F}} \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$ gilt, da offensichtlich $1 \otimes A_\alpha, T_\alpha \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$. Da aber auch $r_{\mathrm{F}} \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ und $\mathcal{H}_\alpha$ vom totalen Grad 0 ist, ist auch $\mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$. Nach Satz 1.3.17 erhöht $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}^{-1}$ den totalen Grad mindestens um eins und folglich gilt $h_\alpha \in \mathcal{W}_3(\mathcal{U}_\alpha)$. Mit den so bestimmten h_α erhalten wir aus Gleichung (2.43)

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathcal{E}_\alpha] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} h_\alpha + T_\alpha + \mathcal{H}_\alpha r_{\mathrm{F}} - r_{\mathrm{F}}) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(1 \otimes A_\alpha) = 0$$

und die Proposition ist bewiesen. □

Mittels der von uns konstruierten faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen $\mathcal{E}_\alpha$ sind wir nun in der Lage lokale ν-Euler Derivationen für das Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ zu definieren.

Definition 2.3.9 ([87, Def. 3.7]) *Seien die Elemente $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ wie in Gleichung (2.47) gegeben. $\mathcal{E}_\alpha : \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$ bezeichne die faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen $\mathcal{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)$. Dann definieren wir Abbildungen $\mathsf{E}_\alpha : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ durch*

$$\mathsf{E}_\alpha f := \sigma(\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{F}}(f)). \tag{2.48}$$

Mit dieser Definition erhalten wir das Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 2.3.10 ([87, Thm. 3.8]) *Die in Gleichung (2.48) definierten Abbildungen E_α sind lokale Derivationen des Fedosov-Sternproduktes $*_{\mathrm{F}}$. Darüberhinaus gilt $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha$, wobei $\mathsf{D}_\alpha = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{\alpha,i}$ eine formale Reihe von Differentialoperatoren auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ ist. Die Abbildungen E_α sind also lokale ν-Euler Derivationen für das Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$.*

Beweis: Per Konstruktion der faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen $\mathcal{E}_\alpha$ gilt $[\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}, \mathcal{E}_\alpha] = 0$, so daß wir für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ die Gleichung $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\mathcal{E}_\alpha\tau_{\mathrm{F}}(f) = \mathcal{E}_\alpha\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{F}}(f) = 0$ erhalten, und wegen Satz 1.3.5 gilt $\mathcal{E}_\alpha\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(g_f)$ mit einer formalen Funktion $g_f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$. Wendet man σ auf diese Gleichung an, so findet man mit Gleichung (2.48) $g_f = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(g_f)) = \sigma(\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{F}}(f)) = \mathsf{E}_\alpha f$ d.h. $\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{E}_\alpha f)$. Mit dieser Identität berechnet man nun für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_\alpha(f *_{\mathrm{F}} g) &= \sigma(\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{F}}(f *_{\mathrm{F}} g)) = \sigma(\mathcal{E}_\alpha(\tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g))) = \sigma((\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{F}}(f)) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g) + \tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} (\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{F}}(g))) \\ &= \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{E}_\alpha f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(g) + \tau_{\mathrm{F}}(f) \circ_{\mathrm{F}} \tau_{\mathrm{F}}(\mathsf{E}_\alpha f)) = (\mathsf{E}_\alpha f) *_{\mathrm{F}} g + f *_{\mathrm{F}} (\mathsf{E}_\alpha g),\end{aligned}$$

womit die erste Aussage des Satzes bewiesen ist. Um die Aussage über die explizite Gestalt von E_α zu beweisen, beachten wir zunächst, daß sowohl $\nu\partial_\nu$ als auch $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ mit σ vertauschen, so daß wir wegen $\sigma(\tau_{\mathrm{F}}(f)) = f$

$$\mathsf{E}_\alpha f = \nu \partial_\nu f + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} f + \frac{1}{\nu} \sigma\left(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha) \tau_{\mathrm{F}}(f)\right)$$

erhalten. Nach Korollar 1.3.9 ist die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha) \ni f \mapsto \frac{1}{\nu}\sigma\left(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)\tau_{\mathrm{F}}(f)\right) = \mathsf{D}_\alpha f$ eine formale Reihe von Differentialoperatoren. Es bleibt noch zu zeigen, daß diese formale Reihe erst in der Ordnung 1 im formalen Parameter ν beginnt. Hierzu berechnen wir zunächst unter Berücksichtigung der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{F}}$

$$\frac{1}{\nu}\sigma\left(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(h_\alpha)\tau_{\mathrm{F}}(f)\right) = \Lambda^{rs}\sigma(i_s(\partial_r)h_\alpha)\sigma(i_s(\partial_s)\tau_{\mathrm{F}}(f)) + O(\nu^2).$$

Da nach Proposition 2.3.8 $h_\alpha \in \mathcal{W}_3(\mathcal{U}_\alpha)$ gilt, ist $i_s(\partial_r)h_\alpha$ vom totalen Grad größer oder gleich 2, so daß $\sigma(i_s(\partial_r)h_\alpha)$ nur Terme der Ordnung größer oder gleich eins in ν beinhaltet, womit $\mathsf{D}_\alpha = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{\alpha,i}$ folgt und der Satz bewiesen ist. □

Der soeben bewiesene Satz stellt die Grundlage für die Bestimmung der Derivations-verwandten Klasse von Fedosov-Sternprodukten dar.

2.3.3 Die deformierte Cartan-Formel für $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$

Ziel dieses kurzen, eher technischen Abschnittes ist es, die deformierte Cartan-Formel für die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ zu beweisen, die sich für die weitere Berechnung der Derivations-verwandten Klasse $d(*_{\mathrm{F}})$ als sehr praktisch erweisen wird. Diese Formel und der Beweis, den wir angeben werden, stammen aus [15, Lemma 4.6].

Proposition 2.3.11 ([87, Prop. A.1]) *Für alle Vektorfelder $X \in \Gamma^\infty(TM)$ kann die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ in der folgenden Weise ausgedrückt werden:*

$$\mathcal{L}_X = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} i_a(X) + i_a(X)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} + i_s(X) + (dx^i \otimes 1) i_s(\nabla_{\partial_i} X) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(i_a(X) r_{\mathrm{F}}). \tag{2.49}$$

Für den Fall, daß $X = X_f$ das Hamiltonsche Vektorfeld einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ d.h. $i_{X_f}\omega = df$ ist, nimmt diese Formel die folgende Form an:

$$\mathcal{L}_{X_f} = \mathfrak{D}_{\mathrm{F}} i_a(X_f) + i_a(X_f)\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}\left(f + df \otimes 1 + \frac{1}{2} Ddf \otimes 1 - i_a(X_f) r_{\mathrm{F}}\right), \tag{2.50}$$

wobei $D = dx^i \vee \nabla_{\partial_i}$ den Operator der symmetrischen kovarianten Ableitung bezeichnet.

Beweis: Auf einem faktorisierten Schnitt $a = T \otimes \beta \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ berechnen wir

$$\begin{aligned}&(\delta i_a(X) + i_a(X)\delta)a \qquad\qquad (2.51)\\ &= i_s(\partial_i)T \otimes dx^i \wedge i_a(X)\beta + i_s(\partial_i)T \otimes dx^i(X)\beta - i_s(\partial_i)T \otimes dx^i \wedge i_a(X)\beta = i_s(X)T \otimes \beta = i_s(X)a.\end{aligned}$$

Da $i_a(X)$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad -1 ist, gilt weiter

$$\frac{1}{\nu}\left(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}}) i_a(X) + i_a(X)\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})\right) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(i_a(X) r_{\mathrm{F}}). \tag{2.52}$$

Zudem berechnen wir mit $\nabla(T\otimes\beta) = \nabla_{\partial_i}T\otimes dx^i\wedge\beta + T\otimes d\beta$

$$\begin{aligned}
&(\nabla i_a(X) + i_a(X)\nabla)a \qquad (2.53)\\
&= \nabla_{\partial_i}T\otimes dx^i\wedge i_a(X)\beta + T\otimes di_a(X)\beta + \nabla_X T\otimes\beta - \nabla_{\partial_i}T\otimes dx^i\wedge i_a(X)\beta + T\otimes i_a(X)d\beta\\
&= \nabla_X T\otimes\beta + T\otimes\mathcal{L}_X\beta.
\end{aligned}$$

Da ∇ torsionsfrei ist, gilt für eine Einsform T

$$\nabla_X T = dx^i\vee(\nabla_X T)(\partial_i) = \mathcal{L}_X T + dx^i\vee T([X,\partial_i] - \nabla_X\partial_i) = \mathcal{L}_X T - dx^i\vee i_s(\nabla_{\partial_i}X)T.$$

Da aber sowohl ∇_X als auch $\mathcal{L}_X - dx^i\vee i_s(\nabla_{\partial_i}X)$ Derivationen bezüglich $\vee$ sind folgt hieraus

$$\nabla_X T = \mathcal{L}_X T - dx^i\vee i_s(\nabla_{\partial_i}X)T$$

für alle symmetrischen Formen. Folglich erhalten wir insgesamt mit (2.53)

$$\nabla i_a(X) + i_a(X)\nabla = \mathcal{L}_X - (dx^i\otimes 1)i_s(\nabla_{\partial_i}X). \qquad (2.54)$$

Kombiniert man nun die Gleichungen (2.51), (2.52) und (2.54) unter Berücksichtigung von $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} = -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(r_{\mathrm{F}})$ so erhält man Gleichung (2.49), womit der erste Teil der Proposition bewiesen ist. Für die zweite Aussage der Proposition berechnet man zunächst unter Benutzung der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{F}}$

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(df\otimes 1) = \partial_r(f)\Lambda^{rs}i_s(\partial_s) = -i_s(X_f), \qquad (2.55)$$

da $X_f = -\Lambda^{rs}\partial_r(f)\partial_s$. Analog erhält man

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}\left(\frac{1}{2}Ddf\otimes 1\right) = \Lambda^{rs}(i_s(\partial_r)\frac{1}{2}Ddf\otimes 1)i_s(\partial_s).$$

Mit der Definition von D erhält man weiter

$$i_s(\partial_r)\frac{1}{2}Ddf = \frac{1}{2}\nabla_{\partial_r}df + \frac{1}{2}dx^j(\nabla_{\partial_j}df)(\partial_r) = dx^j(\nabla_{\partial_j}df)(\partial_r),$$

da man aus der Torsionsfreiheit von ∇ die Gleichung $(\nabla_{\partial_j}df)(\partial_r) = (\nabla_{\partial_r}df)(\partial_j)$ erhält. Da ∇ symplektisch ist, findet man mit $df(Y) = \omega(X_f, Y)$ die Gleichung $(\nabla_{\partial_j}df)(Y) = \omega(\nabla_{\partial_j}X_f, Y)$ also

$$dx^j(\nabla_{\partial_j}df)(\partial_r) = dx^j\omega(\nabla_{\partial_j}X_f, \partial_r)$$

und berechnet weiter

$$\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}\left(\frac{1}{2}Ddf\otimes 1\right) = \Lambda^{rs}(dx^j\omega(\nabla_{\partial_j}X_f, \partial_r)\otimes 1)i_s(\partial_s) = -(dx^j\otimes 1)i_s(\nabla_{\partial_j}X_f). \qquad (2.56)$$

Mit $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(f) = 0$ liefern die Gleichungen (2.56) und (2.55) zusammen mit (2.49) die zu beweisende Identität (2.50). □

Die oben bewiesene Formel für die Lie-Ableitung als deformierte Cartan-Formel zu bezeichnen, ist insofern naheliegend, als da diese auf Elementen $(1\otimes\beta)\in\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\beta\in\Gamma^\infty(\Lambda T^*M)[[\nu]]$ gerade $\mathcal{L}_X\beta = (di_X + i_X d)\beta$ liefert, was aber gerade die Cartan-Formel für die Lie-Ableitung auf der äußeren Algebra ist.

2.3.4 Berechnung der Derivations-verwandten Klasse

Mit Hilfe der lokalen ν-Euler Derivationen E_α, die wir in Abschnit 2.3.2 konstruiert haben, sind wir nun in der Lage die Derivations-verwandte Klasse $d(*_{\mathrm{F}})$ für alle Fedosov-Sternprodukte zu bestimmen. Hierzu müssen wir nach Abschnitt 2.2.2 formale Funktionen $d_{\alpha\beta}\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ finden, so daß auf $\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta$ die Gleichung $\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{F}}}(d_{\alpha\beta})$ gilt. Aus der Definition der lokalen ν-Euler Derivationen E_α und mit der deformierten Cartan-Formel aus dem vorangehenden Abschnitt erhalten wir:

Lemma 2.3.12 ([87, Lemma 4.1]) *Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ gilt*

$$(\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta)(g) = \frac{1}{\nu}\sigma\left(\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}\left(h_\alpha - h_\beta + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}\right)\tau_\mathrm{F}(g)\right), \tag{2.57}$$

wobei $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ die Gleichung $df_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta$ erfüllt, die lokalen Einsformen θ_α die Gleichung $d\theta_\alpha = -\omega$ erfüllen und $X_{f_{\alpha\beta}}$ das Hamiltonsche Vektorfeld zu $f_{\alpha\beta}$ bezeichnet.

BEWEIS: Gemäß der Definition der lokalen ν-Euler Derivationen gilt

$$(\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta)(g) = \sigma((\mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}(h_\alpha - h_\beta))\tau_\mathrm{F}(g)).$$

Nun gilt auf $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ die Gleichung $-d\theta_\alpha = \omega = -d\theta_\beta$, so daß wir nach dem Poincaré-Lemma lokal definierte Funktionen $f_{\alpha\beta}$ finden können, so daß $df_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta$ gilt. Gemäß der Definition der lokalen Vektorfelder ξ_α erhält man weiter $i_{\xi_\alpha - \xi_\beta}\omega = -(\theta_\alpha - \theta_\beta) = d(-f_{\alpha\beta})$, was impliziert, daß $\xi_\alpha - \xi_\beta = X_{-f_{\alpha\beta}}$ das Hamiltonsche Vektorfeld der Funktion $-f_{\alpha\beta}$ ist. Also können wir die deformierte Cartan-Formel (2.50) anwenden, um $\mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta}$ im Ausdruck für $\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta$ zu ersetzen. Da nach Satz 1.3.5 $\mathfrak{D}_\mathrm{F}\tau_\mathrm{F}(g) = 0$ und $i_a(X_{-f_{\alpha\beta}})\tau_\mathrm{F}(g) = 0$, da $\deg_a \tau_\mathrm{F}(g) = 0$, gilt, erhält man so schließlich die behauptete Gleichung (2.57). □

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß der Term, der in Gleichung (2.57) im Argument von $\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}$ steht, durch eine lokal definierte, formale Funktion $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$, die offensichtlich $\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}(a_{\alpha\beta}) = 0$ erfüllt, so ergänzt werden kann, daß das gesamte Argument die Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_\mathrm{F}(f_{\alpha\beta} - \sigma(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}) + a_{\alpha\beta})$ der lokalen formalen Funktion $d_{\alpha\beta} := f_{\alpha\beta} - \sigma(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}) + a_{\alpha\beta}$ ist. Wenn es uns gelingt, solche lokalen, formalen Funktionen zu finden, so liefert (2.57) $\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_\mathrm{F}}(d_{\alpha\beta})$ und wir sind mit Hilfe der $d_{\alpha\beta}$ in der Lage, einen Ausdruck für die Derivations-verwandte Klasse $d(*_\mathrm{F})$ zu finden. Wir müssen also zeigen, daß $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ so gewählt werden kann, daß

$$\mathfrak{D}_\mathrm{F}\left(h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}\right) = 0 \tag{2.58}$$

gilt.

Lemma 2.3.13 ([87, Lemma 4.2]) *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.3.12 gilt*

$$\mathfrak{D}_\mathrm{F}\left(h_\alpha - h_\beta + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}\right) = 1\otimes((i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha) - (i_{\xi_\beta}\Omega + A_\beta)), \tag{2.59}$$

wobei $A_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ wie in Proposition 2.3.7 ii.) gegeben ist.

BEWEIS: Aus der Konstruktion der Elemente $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$, die wir in Abschnitt 2.3.2 (vgl. Proposition 2.3.8) angegeben haben, erhalten wir

$$\mathfrak{D}_\mathrm{F}(h_\alpha - h_\beta) = 1\otimes A_\alpha - T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha r_\mathrm{F} - 1\otimes A_\beta + T_\beta + \mathcal{H}_\beta r_\mathrm{F} = 1\otimes(A_\alpha - A_\beta) - T_\alpha + T_\beta - \mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta}r_\mathrm{F}.$$

Weiter findet man mit $\mathfrak{D}_\mathrm{F} = -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}(r_\mathrm{F})$ durch direkte Rechnung

$$\mathfrak{D}_\mathrm{F}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}\left(df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right)r_\mathrm{F} + \nabla\left(\frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right).$$

Wir verwenden nun nochmals die deformierte Cartan-Formel (2.50), die Definition von $\mathfrak{D}_\mathrm{F}$ und Gleichung (2.25), um

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_\mathrm{F}(-i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}) &= -(\mathfrak{D}_\mathrm{F} i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F} + i_a(X_{f_{\alpha\beta}})\mathfrak{D}_\mathrm{F} r_\mathrm{F}) + i_a(X_{f_{\alpha\beta}})\left(-\delta r_\mathrm{F} + \nabla r_\mathrm{F} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}(r_\mathrm{F})r_\mathrm{F}\right)\\
&= \mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta}r_\mathrm{F} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}\left(-df_{\alpha\beta}\otimes 1 - \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1 + i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_\mathrm{F}\right)r_\mathrm{F} - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})\left(R + 1\otimes\Omega + \frac{1}{\nu}r_\mathrm{F}\circ_\mathrm{F} r_\mathrm{F}\right)\\
&= \mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta}r_\mathrm{F} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}\left(-df_{\alpha\beta}\otimes 1 - \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right)r_\mathrm{F} + i_a(\xi_\alpha - \xi_\beta)R + 1\otimes i_{\xi_\alpha - \xi_\beta}\Omega
\end{aligned}$$

zu erhalten, da $-X_{f_{\alpha\beta}} = \xi_\alpha - \xi_\beta$ und $i_a(X_{f_{\alpha\beta}})(r_{\mathrm{F}} \circ_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{F}}) = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{F}})r_{\mathrm{F}}$. Insgesamt finden wir also

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(h_\alpha - h_\beta + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta} \otimes 1 + \frac{1}{2} Ddf_{\alpha\beta} \otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{F}}\right) \\
&= \quad 1 \otimes ((A_\alpha + i_{\xi_\alpha}\Omega) - (A_\beta + i_{\xi_\beta}\Omega)) - T_\alpha + T_\beta + \nabla\left(\frac{1}{2}D(\theta_\alpha - \theta_\beta) \otimes 1\right) + i_a(\xi_\alpha - \xi_\beta)R.
\end{aligned}
$$

Da aber nach Lemma 2.3.6 ii.) die Gleichung $T_\alpha = i_a(\xi_\alpha)R + \nabla(\frac{1}{2}D\theta_\alpha \otimes 1)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. □

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Lemmas finden wir nun:

Proposition 2.3.14 ([87, Prop. 4.3])

i.) Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$$
\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}\left(h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta} \otimes 1 + \frac{1}{2} Ddf_{\alpha\beta} \otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{F}}\right) = 0 \tag{2.60}
$$

genau dann, wenn die lokal definierten formalen Funktionen $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ die Gleichung

$$
da_{\alpha\beta} = -((i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha) - (i_{\xi_\beta}\Omega + A_\beta)) \tag{2.61}
$$

erfüllen.

ii.) Es existieren lokal definierte formale Funktionen $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ derart, daß (2.61) und somit auch (2.60) erfüllt ist. In diesem Fall gilt

$$
h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta} \otimes 1 + \frac{1}{2} Ddf_{\alpha\beta} \otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{F}} = \tau_{\mathrm{F}}(d_{\alpha\beta}), \tag{2.62}
$$

wobei die lokalen formalen Funktionen $d_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ durch

$$
d_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + a_{\alpha\beta} - \sigma(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{F}}) \tag{2.63}
$$

gegeben sind.

Beweis: Die Aussage i.) folgt direkt aus Lemma 2.3.13 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}} a_{\alpha\beta} = 1 \otimes da_{\alpha\beta}$. Um die Existenz der $a_{\alpha\beta}$ wie in (2.61) nachzuweisen, berechnen wir mit der Cartan-Formel und mit $[d, \mathcal{H}_\alpha] = 0$, was wegen $\mathcal{H}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ offensichtlich ist,

$$
d(i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha) = \mathcal{L}_{\xi_\alpha}\Omega - i_{\xi_\alpha}d\Omega + d\Theta_\alpha - \mathcal{H}_\alpha d\Theta_\alpha = \Omega - \nu\partial_\nu\Omega,
$$

da $d\Omega = 0$ und $d\Theta_\alpha = \Omega$. Also ist die rechte Seite der Gleichung (2.61) geschlossen und die Existenz von lokal definierten formalen Funktionen $a_{\alpha\beta}$, die diese erfüllen, durch das Poincaré-Lemma gesichert. Wegen Satz 1.3.5 gilt für diese $a_{\alpha\beta}$ die Gleichung (2.62) und $d_{\alpha\beta}$ ist durch

$$
d_{\alpha\beta} = \sigma\left(h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta} \otimes 1 + \frac{1}{2} Ddf_{\alpha\beta} \otimes 1 - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{F}}\right)
$$

gegeben. Hieraus erhält man aber sofort den Ausdruck (2.63), da wir die h_α so konstruiert haben, daß $\sigma(h_\alpha) = 0$ gilt. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz 2.3.15 ([87, Prop. 4.3]) *Mit den lokalen formalen Funktionen $d_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ aus Proposition 2.3.14 ii.) gilt*

$$\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_\mathrm{F}}(d_{\alpha\beta}). \tag{2.64}$$

Darüberhinaus erfüllen diese formalen Funktionen $dd_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta + d(\sigma(i_a(\xi_\alpha)r_\mathrm{F})) - d(\sigma(i_a(\xi_\beta)r_\mathrm{F})) - ((i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha) - (i_{\xi_\beta}\Omega + A_\beta))$. Also definieren die $d_{\alpha\beta}$ einen 2-Kozyklus und das Bild der entsprechenden Čech-Kohomologie-Klasse unter dem de Rham-Isomorphismus, also die Derivations-verwandte Klasse des Sternproduktes $*_\mathrm{F}$, ist durch

$$d(*_\mathrm{F}) = -[\omega] - [\Omega - \nu\partial_\nu\Omega] \tag{2.65}$$

gegeben.

Beweis: Wegen $\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}(a_{\alpha\beta}) = 0$ gilt nach Lemma 2.3.12 und Proposition 2.3.14 ii.)

$$(\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta)(g) = \frac{1}{\nu}\sigma\left(\mathrm{ad}_{\circ_\mathrm{F}}(\tau_\mathrm{F}(d_{\alpha\beta}))\tau_\mathrm{F}(g)\right) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_\mathrm{F}}(d_{\alpha\beta})g$$

für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$, also die erste Aussage des Satzes. Aus Gleichung (2.63) erhalten wir wegen $df_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta$, $da_{\alpha_\beta} = -((i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha) - (i_{\xi_\beta}\Omega + A_\beta))$ und $\xi_\alpha - \xi_\beta = -X_{f_{\alpha\beta}}$ den behaupteten Ausdruck für die äußere Ableitung von $d_{\alpha\beta}$, aus dem offensichtlich ist, daß durch diese formalen Funktionen ein 2-Kozyklus definiert ist (vgl. Abschnitt 2.2.2). Um die entsprechende de Rham-Klasse, also die Derivations-verwandte Klasse $d(*_\mathrm{F})$ zu bestimmen, berechnet man $d(\theta_\alpha + d(\sigma(i_a(\xi_\alpha)r_\mathrm{F})) - (i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha)) = -\omega - (\Omega - \nu\partial_\nu\Omega)$, wobei wir das Ergebnis für $d(i_{\xi_\alpha}\Omega + A_\alpha)$ aus dem Beweis von Proposition 2.3.14 ii.) verwendet haben. Also folgt $d(*_\mathrm{F}) = -[\omega] - [\Omega - \nu\partial_\nu\Omega]$ und der Satz ist bewiesen. □

2.3.5 Berechnung der charakteristischen Klasse

Mit der im vorangehenden Abschnitt erfolgten Bestimmung der Derivations-verwandten Klasse $d(*_\mathrm{F})$ haben wir schon fast alles bereitgestellt, um in diesem Abschnitt die charakteristische Klasse $c(*_\mathrm{F})$ aller Fedosov-Sternprodukte angeben zu können.

2.3.5.1 Bestimmung von $c(*_\mathrm{F}) - c(*_\mathrm{F})^0$ aus der definierenden Differentialgleichung

Wie wir in Abschnitt 2.2.3 allgemein gesehen haben, kann man aus der Gleichung $\partial_\nu c(\star) = \frac{1}{\nu^2}d(\star)$ bei Kenntnis von $d(\star)$ alle Terme von $c(\star) \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ außer dem Term $c(\star)^0$ in der nullten Ordnung in ν bestimmen. Für den Fall der Fedosov-Sternprodukte $*_\mathrm{F}$ erhält man:

Proposition 2.3.16 ([87, Thm. 4.4]) *Die charakteristische Klasse $c(*_\mathrm{F}) \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ der (leicht verallgemeinerten) Fedosov-Sternprodukte $*_\mathrm{F}$ erfüllt*

$$c(*_\mathrm{F}) - c(*_\mathrm{F})^0 = \frac{1}{\nu}[\omega] + \frac{1}{\nu}\sum_{i=2}^\infty \nu^i[\Omega_i]. \tag{2.66}$$

Beweis: Aus dem Ergebnis von Satz 2.3.15 erhalten wir mit $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i\Omega_i$

$$\partial_\nu c(*_\mathrm{F}) = -\frac{1}{\nu^2}[\omega] - \frac{1}{\nu^2}[\Omega - \nu\partial_\nu\Omega] = \partial_\nu\left(\frac{1}{\nu}[\omega]\right) + \sum_{i=2}^\infty \nu^{i-2}(i-1)[\Omega_i] = \partial_\nu\left(\frac{1}{\nu}[\omega] + \frac{1}{\nu}\sum_{i=2}^\infty \nu^i[\Omega_i]\right).$$

Hieraus folgt aber offensichtlich die behauptete Gleichung. □

Den noch unbekannten Term $c(*_\mathrm{F})^0$ bestimmen wir im nächsten Abschnitt.

2.3.5.2 Konkrete Berechnung von $c(*_{\mathrm{F}})^0$ aus den Rekursionsformeln

Um den noch fehlenden Term $c(*_{\mathrm{F}})^0$ der charakteristischen Klasse zu bestimmen, benötigen wir nach Abschnitt 2.2.3 einen expliziten Ausdruck für den antisymmetrischen Anteil C_2^- des Bidifferentialoperators C_2, der in der Beschreibung des Sternproduktes $*_{\mathrm{F}}$ durch $f *_{\mathrm{F}} g = fg + \nu C_1(f,g) + \nu^2 C_2(f,g) + \ldots$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erscheint.

Hierzu beweisen wir folgende Proposition:

Proposition 2.3.17 ([87, Prop. B.1]) *Der antisymmetrische Anteil C_2^- des Bidifferentialoperators C_2 ist durch*

$$C_2^-(f,g) = \frac{1}{2}\left(C_2(f,g) - C_2(g,f)\right) = -\frac{1}{2}\left(\Omega_1 + ds_1^{(3)}\right)(X_f, X_g) =: \rho_2(X_f, X_g) \tag{2.67}$$

gegeben, wobei $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und X_f, X_g die entsprechenden Hamiltonschen Vektorfelder bezüglich ω bezeichnen. $s_1^{(3)} \in \Gamma^\infty(T^*M)$ bezeichnet hierbei die Einsform, die im Term der ersten Ordnung in ν in $s^{(3)} = (s_3^{(3)} + \nu s_1^{(3)}) \otimes 1$, wobei $s_3^{(3)} \in \Gamma^\infty(\bigvee^3 T^*M)$, erscheint und der Normierungsbedingung $\delta^{-1} r_{\mathrm{F}} = s$ (vgl. Gleichung (2.25)) entspringt. Also gilt

$$c(*_{\mathrm{F}})^0 = -2C_2^{-\sharp} = -2[\rho_2] = [\Omega_1]. \tag{2.68}$$

Beweis: Unter Benutzung der expliziten Gestalt des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{F}}$ erhalten wir $f *_{\mathrm{F}} g - g *_{\mathrm{F}} f = \nu\sigma(\Lambda^{rs} i_s(\partial_r)\tau_{\mathrm{F}}(f) i_s(\partial_s)\tau_{\mathrm{F}}(g)) + O(\nu^3)$. Um die Terme der Ordnung kleiner oder gleich zwei in ν zu berechnen, müssen wir also $\tau_{\mathrm{F}}(f)$ und $\tau_{\mathrm{F}}(g)$ nur bis auf Terme mit symmetrischem Grad oder ν-Grad größer als eins kennen. Also ist es genug $\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(0)}, \ldots, \tau_{\mathrm{F}}(f)^{(3)}$ zu betrachten, da für $\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(k)}$ mit $k \geq 4$ entweder der symmetrische Grad oder der ν-Grad der vorkommenden Terme größer als eins ist. Aus der Rekursionsformel (2.28) ersieht man, daß die Terme von r_{F}, die wir hierzu benötigen, durch $r_{\mathrm{F}}^{(2)} = \delta s^{(3)}$ und $r_{\mathrm{F}}^{(3)} = \delta s^{(4)} + \delta^{-1}\left(\nabla r_{\mathrm{F}}^{(2)} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{F}}^{(2)} \circ_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{F}}^{(2)} + R + 1 \otimes \nu\Omega_1\right)$ gegeben sind, was man aus (2.26) erhält, indem man die Terme vom totalen Grad 2 und 3 aufschreibt. Mit $O(\nu^2, \deg_s^2)$ bezeichnen wir im folgenden alle Terme, deren ν-Grad oder symmetrischer Grad größer als eins ist. Aus einer längeren aber völlig offensichtlichen Rechnung erhält man

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(0)} &= f \\
\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(1)} &= df \otimes 1 \\
\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(2)} &= \frac{1}{2} Ddf \otimes 1 - i_s(X_f)s_3^{(3)} \otimes 1 = O(\nu^2, \deg_s^2) \\
\tau_{\mathrm{F}}(f)^{(3)} &= -\delta^{-1}(i_s(X_f) r_{\mathrm{F}}^{(3)}) + O(\nu^2, \deg_s^2) = -\nu\left(i_s(X_f)s_2^{(4)} + \frac{1}{2} i_{X_f}\left(\Omega_1 + ds_1^{(3)}\right)\right) \otimes 1 + O(\nu^2, \deg_s^2),
\end{aligned}$$

wobei wir $s^{(4)} = (s_4^{(4)} + \nu s_2^{(4)}) \otimes 1$ mit $s_k^{(4)} \in \Gamma^\infty(\bigvee^k T^*M)$ geschrieben haben. Setzt man diese Resultate in $f *_{\mathrm{F}} g - g *_{\mathrm{F}} f$, wie oben angegeben ein, so fallen die Terme, die $s_2^{(4)} \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*M)$ enthalten, aufgrund ihrer Symmetrie heraus, und man erhält

$$f *_{\mathrm{F}} g - g *_{\mathrm{F}} f = \nu\{f, g\} - \nu^2(\Omega_1 + ds_1^{(3)})(X_f, X_g) + O(\nu^3),$$

womit Gleichung (2.67) bewiesen ist. Die Gleichung (2.68) für $c(*_{\mathrm{F}})^0$ ist hieraus offensichtlich und die Proposition bewiesen. □

Man beachte, daß der Beweis der vorangehenden Proposition die einzige Stelle in der Bestimmung der charakteristischen Klasse ist, an der die modifizierte Normierungsbedingung für r_{F} in unsere Betrachtungen konkret eingeht, wohingegen alle anderen Terme von $c(*_{\mathrm{F}})$ bestimmt werden konnten, ohne hiervon Gebrauch zu machen.

Unser Hauptresultat dieses Abschnittes fassen wir zusammen als

Satz 2.3.18 ([87, Thm. 4.4]) *Deligne's charakteristische Klasse $c(*_{\mathrm{F}})$ eines Fedosov-Sternproduktes $*_{\mathrm{F}}$ ist durch*

$$c(*_{\mathrm{F}}) = \frac{1}{\nu}[\omega] + \frac{1}{\nu}[\Omega] \tag{2.69}$$

gegeben.

Beweis: Die Aussage ist eine direkte Konsequenz der Aussagen von Proposition 2.3.16 und Proposition 2.3.17. □

Insbesondere ersieht man aus der Aussage dieses Satzes, daß die Wahlen des symplektischen, torsionsfreien Zusammenhangs als auch der Normierungsbedingung keinen Einfluß auf die Äquivalenzklasse des erhaltenen Sternproduktes haben. Jedoch hängt die konkrete Gestalt des Sternproduktes sehr wohl von der Wahl dieser beiden Größen ab.

Als eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes, die für den Fall der Normierungsbedingung $\delta^{-1}r_{\mathrm{F}} = 0$ ursprünglich von Fedosov in [46, Cor. 5.5.4] gezeigt wurde, finden wir:

Folgerung 2.3.19 *Zwei Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ und $*_{\mathrm{F}}'$ für (M, ω), die aus den Eingangsdaten (∇, Ω, s) und (∇', Ω', s') konstruiert sind, sind äquivalent genau dann, wenn $[\Omega] = [\Omega']$.*

Beweis: Nach Satz 2.2.19 ii.) sind zwei Sternprodukte äquivalent genau dann, wenn ihre charakteristischen Klassen übereinstimmen. Wegen Satz 2.3.18 ist dies für die Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ und $*_{\mathrm{F}}'$ der Fall genau dann, wenn $[\Omega] = [\Omega']$. □

Eine weitere Folgerung aus Satz 2.3.18 ist:

Folgerung 2.3.20 *Für alle Klassen $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) existiert ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ mit*

$$c(*_{\mathrm{F}}) = c. \tag{2.70}$$

Insbesondere ist also jedes Sternprodukt $\star$ auf (M, ω) äquivalent zu einem Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$.

Beweis: Wir schreiben $c = \frac{1}{\nu}[\omega] + c_{\geq 0}$ mit $c_{\geq 0} \in H^2_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ und sei $\mathrm{R}(c_{\geq 0})$ ein Repräsentant von $c_{\geq 0}$, d.h. $\mathrm{R}(c_{\geq 0})$ ist eine formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M und es gilt $[\mathrm{R}(c_{\geq 0})] = c_{\geq 0}$. Definiert man $\Omega := \nu \mathrm{R}(c_{\geq 0})$, so erfüllt Ω also alle Voraussetzungen, um in der oben benutzten Fedosov-Konstruktion verwendet zu werden. Das mit diesem Ω konstruierte Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ erfüllt dann aber nach Satz 2.3.18

$$c(*_{\mathrm{F}}) = \frac{1}{\nu}[\omega] + [\mathrm{R}(c_{\geq 0})] = \frac{1}{\nu}[\omega] + c_{\geq 0} = c.$$

Sei $\star$ ein beliebiges Sternprodukt auf (M, ω) und sei $c(\star) \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M; \mathbb{C})[[\nu]]$ seine charakteristische Klasse. Nach der eben bewiesenen Aussage existiert dann ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ mit $c(*_{\mathrm{F}}) = c(\star)$. Nach Satz 2.2.19 ii.) folgt hieraus aber, daß $\star$ äquivalent zu $*_{\mathrm{F}}$ ist. □

Die Aussage dieser Folgerung werden wir uns im folgenden Abschnitt an vielen Stellen zunutze machen, um für Klassen, die gewissen einschränkenden Bedingungen genügen, Sternprodukte mit ebendiesen Klassen als charakeristische Klassen zu konstruieren, die zusätzliche algebraische Eigenschaften besitzen.

2.4 Spezielle Sternprodukte, ihre charakteristischen Klassen und Äquivalenztransformationen

In diesem Abschnitt betrachten wir Sternprodukte, die zusätzliche algebraische Eigenschaften besitzen und berechnen deren charakteristische Klassen. Wir können zeigen, daß die zusätzlichen

Eigenschaften Einschränkungen an die möglichen charakteristischen Klassen bedeuten, d.h. nicht alle Äquivalenzklassen von Sternprodukten können als Repräsentanten Sternprodukte mit diesen zusätzlichen Eigenschaften enthalten. Umgekehrt können wir aber zeigen, daß, wenn die charakteristische Klasse die notwendige Bedingung erfüllt, daß ein Sternprodukt dieser Klasse die gewünschte algebraische Eigenschaft besitzen kann, wir auch immer Sternprodukte (sogar Fedosov-Sternprodukte mit geeignet gewählten Daten (∇, Ω, s)), also Repräsentanten dieser Äquivalenzklasse, finden können, die diese algebraische Eigenschaft tatsächlich besitzen. Darüberhinaus betrachten wir Äquivalenztransformationen zwischen Sternprodukten mit zusätzlichen algebraischen Eigenschaften, die vermöge Abbildungen von $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ definiert sind, und zeigen, daß es immer solche Äquivalenztransformationen gibt, die mit diesen Abbildungen in einem noch zu präzisierenden Sinn verträglich sind. Allgemeiner betrachten wir in einigen Fällen $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Isomorphismen zwischen solchen Sternprodukten und untersuchen, ob es dann auch immer Isomorphismen gibt, die mit den obengenannten Abbildungen verträglich sind. Die hier vorgestellten Ergebnisse sind in der Literatur bisher unerwähnt geblieben außer für den in [20, Lemma 3.3] erwähnten sehr speziellen Fall, in dem für das Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ mit $\Omega = 0$, $s = 0$ gezeigt wird, daß dieses verschiedene spezielle, algebraische Eigenschaften besitzt. Unsere Herangehensweise, vermöge der charakteristischen Klasse entscheiden zu können, ob diese Klasse gewisse, speziellere Sternprodukte enthalten kann, hat dagegen noch an keiner Stelle in der Literatur Verwendung gefunden.

2.4.1 Abbildungen, induzierte Sternprodukte und ihre charakteristischen Klassen

Im weiteren bezeichne $\mathrm{C} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die komplexe Konjugation, wobei wir angesichts unserer Konvention den formalen Parameter ν als rein imaginär anzusehen $\mathrm{C}\nu := -\nu$ definieren. Für Elemente a aus dem Ring $\mathbb{C}[[\nu]]$ schreiben wir manchmal auch kurz $\mathrm{C}a = \overline{a}$. Mit $\mathrm{P} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, wobei $\mathrm{P} := (-1)^{\deg_\nu}$, bezeichnen wir den sogenannten ν-Paritäts-Operator. Offensichtlich erfüllen diese Abbildungen $\mathrm{C}^2 = \mathrm{P}^2 = \mathrm{id}$. Weiter sei im fogenden Φ ein Symplektomorphismus von (M, ω), d.h. $\Phi : M \to M$ ist ein Diffeomorphismus und es gilt $\Phi^*\omega = \omega$. Zusätzlich sei $\mathrm{L} = \mathrm{id} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathrm{L}_i$ eine formale Reihe von Differentialoperatoren auf $\mathcal{C}^\infty(M)$. Mit Hilfe dieser Abbildungen werden wir in diesem Abschnitt verschiedene spezielle Typen von Sternprodukten definieren.

Definition 2.4.1 ([87, Def. 5.1 i.)]) *Für ein gegebenes Sternprodukt $\star$ auf (M, ω) definieren wir mit den oben eingeführten Bezeichnungen die Sternprodukte $\star_{\mathrm{opp}}$, $\star_{\mathrm{P}}$, $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ für $(M, -\omega)$ durch*

$$f \star_{\mathrm{opp}} g := g \star f \tag{2.71}$$

$$f \star_{\mathrm{P}} g := \mathrm{P}((\mathrm{P}f) \star (\mathrm{P}g)) = fg + \sum_{i=1}^\infty (-\nu)^i C_i(f, g) \tag{2.72}$$

$$f \star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}} g := \mathrm{L}^{-1}(\Phi^{-1})^*\mathrm{C}((\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}f) \star (\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}g)), \tag{2.73}$$

wobei $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und die Bidifferentialoperatoren C_i das Sternprodukt $\star$ durch $f \star g = fg + \sum_{i=1}^\infty \nu^i C_i(f, g)$ beschreiben. Für $\Phi = \mathrm{id}_M$ bezeichnen wir $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ mit $\star_{\mathrm{C},\mathrm{L}}$, d.h.

$$f \star_{\mathrm{C},\mathrm{L}} g = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{C}((\mathrm{CL}f) \star (\mathrm{CL}g)). \tag{2.74}$$

Für $\mathrm{L} = \mathrm{id}$ bezeichnen wir $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ mit $\star_{\mathrm{C},\Phi^*}$, d.h.

$$f \star_{\mathrm{C},\Phi^*} g = (\Phi^{-1})^*\mathrm{C}((\mathrm{C}\Phi^*f) \star (\mathrm{C}\Phi^*g)). \tag{2.75}$$

Für $\Phi = \mathrm{id}_M$ und $\mathrm{L} = \mathrm{id}$ bezeichnen wir $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ mit $\star_{\mathrm{C}}$, d.h.

$$f \star_{\mathrm{C}} g = \mathrm{C}((\mathrm{C}f) \star (\mathrm{C}g)). \tag{2.76}$$

Zunächst macht man sich leicht klar, daß es sich bei den oben definierten assoziativen Produkten $\star_{\mathrm{opp}}$, $\star_{\mathrm{P}}$, $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ tatsächlich um Sternprodukte für $(M, -\omega)$ handelt, indem man jeweils die nullte Ordnung in ν und den antisymmetrischen Anteil der ersten Ordnung in ν der jeweiligen Produkte betrachtet. Da $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ also ein Sternprodukt für $(M, -\omega)$ ist, ist unmittelbar klar, daß auch die Produkte $\star_{\mathrm{C},\mathrm{L}}$, $\star_{\mathrm{C},\Phi^*}$ und $\star_{\mathrm{C}}$ Sternprodukte für $(M, -\omega)$ sind, da es sich hierbei um Spezialfälle von $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ handelt. Weiter findet man, daß zwischen den Produkten $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$, $\star_{\mathrm{C},\mathrm{L}}$, $\star_{\mathrm{C},\Phi^*}$ und $\star_{\mathrm{C}}$ die folgenden Beziehungen bestehen: Für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt

$$\begin{aligned}
f \star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}} g &= \mathrm{L}^{-1}((\mathrm{L}f) \star_{\mathrm{C},\Phi^*} (\mathrm{L}g)) & (2.77)\\
f \star_{\mathrm{C},\mathrm{L}} g &= \mathrm{L}^{-1}((\mathrm{L}f) \star_{\mathrm{C}} (\mathrm{L}g)) & (2.78)\\
f \star_{\mathrm{C},\Phi^*} g &= f\,((\Phi^{-1})^* \star_{\mathrm{C}})\,g = (\Phi^{-1})^*((\Phi^* f) \star_{\mathrm{C}} (\Phi^* g)), & (2.79)
\end{aligned}$$

wobei wir in (2.79) die Bezeichnung wie in Satz 2.2.19 iii.) verwendet haben.

Mit den von uns gemachten Definitionen und ersten Beobachtungen finden wir:

Proposition 2.4.2 ([87, Lemma 5.2 i.)]) *Die charakteristischen Klassen der Sternprodukte $\star_{\mathrm{opp}}$, $\star_{\mathrm{P}}$, $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ für $(M, -\omega)$ sind mit der charakteristischen Klasse $c(\star)$ des Sternproduktes $\star$ für (M, ω) durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
c(\star_{\mathrm{opp}}) &= -c(\star) & (2.80)\\
c(\star_{\mathrm{P}})(\nu) &= c(\star)(-\nu) = \mathrm{P}(c(\star)(\nu)) & (2.81)\\
c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}) &= c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*}) = (\Phi^{-1})^* c(\star_{\mathrm{C}}) = (\Phi^{-1})^* \mathrm{C} c(\star) & (2.82)
\end{aligned}$$

verknüpft. Insbesondere gilt:

$$c(\star_{\mathrm{C}}) = c(\star_{\mathrm{C},\mathrm{L}}) = \mathrm{C}c(\star). \tag{2.83}$$

Beweis: Seien E_α lokale ν-Euler Derivationen für $\star$. Zum Beweis von (2.80) bemerken wir, daß dann offensichtlich E_α ebensolche Derivationen für $\star_{\mathrm{opp}}$ sind. Man erhält dann, wegen $\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\alpha\beta}) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{opp}}}(-d_{\alpha\beta})$, daß die Derivations-verwandten Klassen von $\star$ und $\star_{\mathrm{opp}}$ durch $d(\star) = -d(\star_{\mathrm{opp}})$ in Beziehung stehen. Wegen $\partial_\nu c(\star) = \frac{1}{\nu^2} d(\star)$ gilt dann aber $\partial_\nu c(\star_{\mathrm{opp}}) = -\partial_\nu c(\star)$ und wir erhalten $c(\star_{\mathrm{opp}}) - c(\star_{\mathrm{opp}})^0 = -(c(\star) - c(\star)^0)$. Bezeichnet man mit $C_{2,\mathrm{opp}}$ den Bidifferentialoperator, der in der zweiten Ordnung in ν das Sternprodukt $\star_{\mathrm{opp}}$ beschreibt, so gilt $C_{2,\mathrm{opp}}(f,g) = C_2(g,f)$. Hiermit findet man aber $C^-_{2,\mathrm{opp}} = -C^-_2$, also $c(\star_{\mathrm{opp}})^0 = -2{C^-_{2,\mathrm{opp}}}^\sharp = -(-2{C^-_2}^\sharp) = -c(\star)^0$, woraus mit dem bereits gezeigten schließlich $c(\star_{\mathrm{opp}}) = -c(\star)$ folgt. Gemäß der Definition von $\star_{\mathrm{P}}$ gilt, daß $\star_{\mathrm{P}}$ dasjenige Sternprodukt ist, welches man aus $\star$ durch den Parameterwechsel $p(\nu) = -\nu$ erhält. Wegen der Aussage iv.) von Satz 2.2.19 gilt dann aber $c(\star_{\mathrm{P}})(\nu) = c(\star)(-\nu) = \mathrm{P}(c(\star_{\mathrm{P}})(\nu))$ also (2.81). Als nächstes beweisen wir Gleichung (2.83). Mit ν-Euler Derivationen E_α für $\star$ sind wegen $\mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$ die Abbildungen $\mathsf{E}_{\alpha,\mathrm{C}} := \mathrm{C}\mathsf{E}_\alpha\mathrm{C}$ offensichtlich ν-Euler Derivationen für $\star_{\mathrm{C}}$ und wir finden wegen $\mathrm{C}\nu = -\nu$

$$\mathsf{E}_{\alpha,\mathrm{C}} - \mathsf{E}_{\beta,\mathrm{C}} = \mathrm{C}\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\star(d_{\alpha\beta})\right)\mathrm{C} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\star_{\mathrm{C}}}(\mathrm{C}d_{\alpha\beta}).$$

Also gilt für die Derivations-verwandten Klassen $d(\star_{\mathrm{C}}) = -\mathrm{C}d(\star)$ und wir erhalten

$$\partial_\nu c(\star_{\mathrm{C}}) = \frac{1}{\nu^2} d(\star_{\mathrm{C}}) = -\frac{1}{\nu^2}\mathrm{C}d(\star) = -\mathrm{C}\left(\frac{1}{\nu^2}d(\star)\right) = -\mathrm{C}\partial_\nu c(\star) = \partial_\nu \mathrm{C}c(\star),$$

wobei wir im letzten Schritt $\mathrm{C}\partial_\nu = -\partial_\nu \mathrm{C}$ verwendet haben. Somit gilt also $c(\star_{\mathrm{C}}) - c(\star_{\mathrm{C}})^0 = \mathrm{C}(c(\star) - c(\star)^0)$. Schreibt man $C_{2,\mathrm{C}}$ für den Bidifferentialoperator, der $\star_{\mathrm{C}}$ in der zweiten Ordnung in ν beschreibt, so gilt $C^-_{2,\mathrm{C}}(f,g) = \mathrm{C}C^-_2(\mathrm{C}f, \mathrm{C}g)$. Damit ist dann aber offensichtlich $c(\star_{\mathrm{C}})^0 = -2{C^-_{2,\mathrm{C}}}^\sharp = -2\mathrm{C}{C^-_2}^\sharp = \mathrm{C}c(\star)^0$, womit wir schließlich $c(\star_{\mathrm{C}}) = \mathrm{C}c(\star)$ erhalten. Die Gleichheit $c(\star_{\mathrm{C}}) = c(\star_{\mathrm{C,L}})$ in (2.83) ist klar, da nach (2.78) $\star_{\mathrm{C}}$ und $\star_{\mathrm{C,L}}$ vermöge L äquivalent sind. Weiter ergibt sich nach Satz 2.2.19 iii.) wegen (2.79) die Gleichung $c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*}) = (\Phi^{-1})^* c(\star_{\mathrm{C}})$, womit mit dem bereits bewiesenen die letzte Gleichheit in (2.82) klar ist. Weiter gilt nach (2.77), daß $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ und $\star_{\mathrm{C},\Phi^*}$ vermöge L äquivalent sind, somit stimmen aber auch die charakteristischen Klassen $c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}})$ und $c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*})$ überein und (2.82) ist bewiesen. □

Mit der obigen Proposition haben wir die Grundlage dafür geschaffen, zu untersuchen, welche Bedingungen die Forderungen nach speziellen algebraischen Eigenschaften von Sternprodukten an die charakteristische Klasse dieser Sternprodukte stellen. Warum hierbei die oben definierten und untersuchten Sternprodukte $\star_{\mathrm{opp}}$, $\star_{\mathrm{P}}$ und $\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}$ eine besonders wichtige Rolle spielen, wird in den nächsten Abschnitten klar werden, in denen wir definieren, was wir unter Sternprodukten mit *-Strukturen, mit ν-Parität und vom Weyl-Typ verstehen wollen.

2.4.2 Sternprodukte mit *-Strukturen

Definition 2.4.3 *i.) Ein Sternprodukt $\star$ auf (M,ω) mit einer Abbildung $\mathrm{S} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, die ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-antilinearer, involutiver Antiautomorphismus von $\star$ ist, nennt man ein Sternprodukt mit *-Struktur. Das Tripel $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{S})$ nennt man dann eine formale *-Sternprodukt-Algebra mit *-Involution* S*. S soll also die Bedingungen*

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(af) &= \overline{a}\mathrm{S}(f) \qquad \forall a \in \mathbb{C}[[\nu]], \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] && (2.84)\\ \mathrm{S}^2 &= \mathrm{id} \quad \textit{und} && (2.85)\\ \mathrm{S}(f \star g) &= (\mathrm{S}g) \star (\mathrm{S}f) \qquad \forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]] && (2.86) \end{aligned}$$

erfüllen.

ii.) Zwei formale *-Sternprodukt-Algebren $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{S})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star', \mathrm{S}')$ heißen äquivalent, wenn $\star$ und $\star'$ äquivalente Sternprodukte sind, und es eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T} = \mathrm{id} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathcal{T}_i$ mit $\mathcal{T}(f \star g) = (\mathcal{T}f) \star' (\mathcal{T}g)$ gibt, die zusätzlich

$$\mathcal{T}^{-1}\mathrm{S}'\mathcal{T} = \mathrm{S} \qquad (2.87)$$

erfüllt. In diesem Fall nennen wir die entsprechenden *-Strukturen, bzw. *-Involutionen S *und* S′ *äquivalent.*

iii.) Zwei formale *-Sternprodukt-Algebren $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{S})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star', \mathrm{S}')$ heißen isomorph, wenn $\star$ und $\star'$ isomorphe Sternprodukte als $\mathbb{C}[[\nu]]$-Algebren sind und es einen Isomorphismus $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(f \star g) = (\mathcal{I}f) \star' (\mathcal{I}g)$ gibt, der zusätzlich

$$\mathcal{I}^{-1}\mathrm{S}'\mathcal{I} = \mathrm{S} \qquad (2.88)$$

erfüllt. In diesem Fall nennen wir die entsprechenden *-Strukturen, bzw. *-Involutionen S *und* S′ *isomorph.*

Zunächst einmal ist nicht klar, ob und unter welchen Umständen es tatsächlich solche wie oben definierte formale *-Sternprodukt-Algebren gibt. Darüberhinaus ist nicht klar, ob es, sofern man die Existenz solcher *-Sternprodukt-Algebren nachweisen kann, in jeder Äquivalenzklasse von Sternprodukten einen Repräsentanten dieser Klasse gibt, der eine formale *-Sternprodukt-Algebra ist.

Die Antwort auf die zuletzt formulierte Frage ist, wie wir im weiteren zeigen werden, im allgemeinen negativ. Um der Beantwortung der Frage nach der Existenz formaler *-Sternprodukt-Algebren näher zu kommen, untersuchen wir zunächst, welche Gestalt die *-Involution S haben kann.

Lemma 2.4.4 *Sei $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{S})$ eine formale *-Sternprodukt-Algebra für (M, ω), dann ist die *-Involution* S *von folgender Gestalt*

$$\mathrm{S} = \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}, \tag{2.89}$$

wobei C *die komplexe Konjugation bezeichnet,* $\Phi : M \to M$ *ein Symplektomorphismus von* (M, ω) *mit* $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$ *ist, und* $\mathrm{L} = \mathrm{id} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathrm{L}_i$ *eine formale Reihe von Differentialoperatoren auf* $\mathcal{C}^\infty(M)$ *bezeichnet. Schreibt man* $\mathrm{L} = \mathrm{id} + \mathrm{L}^+$, *so gilt* $\mathrm{L}^+ + \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}^+\mathrm{C}\Phi^* + \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}^+\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}^+ = 0$. *Für den Spezialfall* $\Phi = \mathrm{id}_M$ *gilt* $\mathrm{CLC} = \mathrm{L}^{-1}$.

Beweis: Wegen $\mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$ schreiben wir $\mathrm{S} = \mathrm{C}^2\mathrm{S} = \mathrm{CT}$, wobei $\mathrm{T} := \mathrm{CS}$. Offensichtlich ist T eine $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung von $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Wegen $\mathrm{S}(f \star g) = (\mathrm{S}g) \star (\mathrm{S}f)$ gilt mit der Definition von $\star_{\mathrm{opp}}$ und $\star_{\mathrm{C}}$ für diese Abbildung

$$\mathrm{T}(g \star_{\mathrm{opp}} f) = \mathrm{CS}(f \star g) = \mathrm{C}((\mathrm{C}^2\mathrm{S}g) \star (\mathrm{C}^2\mathrm{S}f)) = (\mathrm{CS}g) \star_{\mathrm{C}} (\mathrm{CS}f) = (\mathrm{T}g) \star_{\mathrm{C}} (\mathrm{T}f), \tag{2.90}$$

d.h. $\mathrm{T} : (\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_{\mathrm{opp}}) \to (\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_{\mathrm{C}})$ ist ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Algebra-Isomorphismus. Schreiben wir also $\mathrm{T} = \sum_{i=0}^\infty \nu^i \mathrm{T}_i$, mit $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen T_i, so folgt aus der nullten Ordnung in ν der Gleichung (2.90) mit $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, daß $\mathrm{T}_0(gf) = (\mathrm{T}_0 g)(\mathrm{T}_0 f)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt, somit ist $\mathrm{T}_0 = \Phi^*$, wobei $\Phi : M \to M$ ein Diffeomorphismus ist. Betrachtet man die erste Ordnung in ν der Gleichung (2.90) und nimmt hiervon den antisymmetrischen Anteil, so erhält man $\Phi^*\{f, g\} = \{\Phi^* f, \Phi^* g\}\ \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, also gilt $\Phi^*\omega = \omega$, womit gezeigt ist, daß Φ ein Symplektomorphismus ist. Definiert man nun $\mathrm{L} := (\Phi^{-1})^*\mathrm{T}$, so gilt zum einen $\mathrm{T} = \Phi^*\mathrm{L}$ und wegen $T_0 = \Phi^*$ ist L von der Gestalt $\mathrm{L} = \mathrm{id} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathrm{L}_i$. Weiter erhält man aus (2.90) mit Gleichung (2.79) folgende Beziehung

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(g \star_{\mathrm{opp}} f) &= (\Phi^{-1})^*\mathrm{T}(g \star_{\mathrm{opp}} f) = (\Phi^{-1})^*((\Phi^*(\Phi^{-1})^*\mathrm{T}g) \star_{\mathrm{C}} (\Phi^*(\Phi^{-1})^*\mathrm{T}f)) = ((\Phi^{-1})^*\mathrm{T}g) \star_{\mathrm{C},\Phi^*} ((\Phi^{-1})^*\mathrm{T}f) \\ &= (\mathrm{L}g) \star_{\mathrm{C},\Phi^*} (\mathrm{L}f), \end{aligned} \tag{2.91}$$

also ist L eine Äquivalenztransformation von $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_{\mathrm{opp}})$ nach $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_{\mathrm{C},\Phi^*})$. Da aber für ein differentielles Sternprodukt $\star$ die Sternprodukte $\star_{\mathrm{opp}}$ und $\star_{\mathrm{C},\Phi^*}$ ebenfalls differentiell sind, folgt nach Satz 1.2.8, daß L eine formale Reihe von Differentialoperatoren ist. Wegen der Bedingung $\mathrm{S}^2 = \mathrm{id}$ muß offensichtlich $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L} = \mathrm{id}$ gelten. Betrachtet man die nullte Ordnung in ν dieser Gleichung, so erhält man, da L mit id beginnt, $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{C}\Phi^* = \mathrm{id}$. Da aber C mit Φ^* kommutiert und $\mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$ folgt hieraus $(\Phi^*)^2 = \mathrm{id}$, also $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$. Mit $\mathrm{L} = \mathrm{id} + \mathrm{L}^+$, folgt aus $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L} = \mathrm{id}$ mit $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{C}\Phi^* = \mathrm{id}$ die behauptete Gleichung für L^+. Für $\Phi = \mathrm{id}_M$ ist $\mathrm{S} = \mathrm{CL}$ und wegen $\mathrm{S}^2 = \mathrm{id}$ folgt $\mathrm{CLC} = \mathrm{L}^{-1}$ und das Lemma ist bewiesen. □

Da $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star)$ eine Deformation des punktweisen Produktes ist, und die *-Involution für die klassische Observablen-Algebra durch die komplexe Konjugation gegeben ist, ist es sinnvoll die Definition 2.4.3 i.) einer *-Involution S um die Forderung $\mathrm{S} = \mathrm{C} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathrm{S}_i$ zu erweitern, was gerade der Forderung entspricht, daß der klassische Limes der *-Involution durch die Involution C der klassischen Algebra gegeben ist.

Definition 2.4.5 *Sei $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{S})$ eine formale *-Sternprodukt-Algebra mit *-Involution* S, *dann nennen wir $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{S})$ eine formale *-Sternprodukt-Algebra mit korrektem klassischen Limes, falls* $\mathrm{S} = \mathrm{C} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathrm{S}_i$. *Zwei formale *-Sternprodukt-Algebren mit korrektem klassischen Limes nennen wir äquivalent bzw. isomorph, wenn sie äquivalent bzw. isomorph im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) bzw. iii.) sind.*

Da nach Lemma 2.4.4 die *-Involutionen mit korrektem klassischen Limes durch $S = \mathrm{CL}$ mit einer formalen Reihe L von Differentialoperatoren, die mit id beginnt, gegeben sind, wollen wir eine solche *-Involution für $\mathrm{L} \neq \mathrm{id}$ kurz auch formale *-Involution nennen.

Wir arbeiten nun auf die Beantworung der Existenzfrage von formalen *-Sternprodukt-Algebren hin, indem wir zunächst einmal speziellere *-Involutionen als die oben gefundene allgemeine Form $S = \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ einer *-Involution zulassen. Tatsächlich ist die einfachste Gestalt einer *-Involution, nämlich diejenige, die nur in der komplexen Konjugation C besteht, die vom physikalischen Standpunkt relevante (vgl. Abschnitt 1.1), mit der wir uns im folgenden Abschnitt genauer auseinandersetzen werden. Hier besitzt die *-Involution nicht nur den korrekten klassischen Limes, sondern stimmt tatsächlich mit der klassischen *-Involution überein.

2.4.2.1 Hermitesche Sternprodukte

In diesem Abschnitt definieren wir den Begriff Hermitesches Sternprodukt und leiten aus dieser Definition eine Einschränkung an die charakteristische Klasse Hermitescher Sternprodukte ab. Weiter können wir zeigen, daß für jede Klasse, die dieser einschränkenden Bedingung genügt, auch tatsächlich Hermitesche Sternprodukte (sogar Fedosov-Sternprodukte) existieren. Darüberhinaus können wir zeigen, daß zwei Hermitesche Sternprodukte, die als Sternprodukte äquivalent bzw. isomorph sind, auch als formale *-Sternprodukt-Algebren äquivalent bzw. isomorph sind, d.h. es existiert dann eine Äquivalenztransformation, die mit den *-Involutionen C verträglich wie in (2.87) ist, bzw. ein Isomorphismus, der mit C verträglich wie in (2.88) ist.

Definition 2.4.6 ([87, Def. 5.1 iii.)]) *Ein Sternprodukt $\star$ für (M,ω) heißt Hermitesches Sternprodukt, falls $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star,\mathrm{C})$ eine formale *-Sternprodukt-Algebra mit *-Involution C ist, d.h. es gilt*

$$f\star_{\mathrm{C}}g = f\star_{\mathrm{opp}}g \quad \forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{2.92}$$

Ein erstes Ergebnis dieser Definition ist das folgende Lemma.

Lemma 2.4.7 ([87, Lemma 5.2 iii.)]) *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Hermiteschen Sternproduktes $\star$ für (M,ω) erfüllt*

$$\mathrm{C}c(\star) = -c(\star). \tag{2.93}$$

Beweis: Nach Gleichung (2.92) gilt für ein Hermitesches Sternprodukt $\star$ offensichtlich $c(\star_{\mathrm{C}}) = c(\star_{\mathrm{opp}})$. Da aber nach Proposition 2.4.2 $c(\star_{\mathrm{C}}) = \mathrm{C}c(\star)$ und $c(\star_{\mathrm{opp}}) = -c(\star)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. □

Dieses Lemma besagt also, daß es im allgemeinen Äquivalenzklassen von Sternprodukten (die in Bijektion mit den charakteristischen Klassen stehen) gibt, die keinen Repräsentanten besitzen, der ein Hermitesches Sternprodukt ist, nämlich diejenigen, deren entsprechende charakteristische Klasse nicht die Gleichung (2.93) erfüllt. Umgekehrt zeigen wir in der folgenden Proposition, daß man für jede Klasse $c\in\frac{[\omega]}{\nu}+H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, die die Gleichung $\mathrm{C}c=-c$ erfüllt, Sternprodukte (sogar Fedosov-Sternprodukte) finden kann, die Hermitesch sind und deren charakteristische Klasse durch c gegeben ist.

Proposition 2.4.8 ([87, Prop. 5.3 ii.)]) *Für alle $c\in\frac{[\omega]}{\nu}+H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\mathrm{C}c=-c$ gibt es Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ für (M,ω) mit*

$$c(*_{\mathrm{F}}) = c \quad \text{und} \quad \mathrm{C}(f*_{\mathrm{F}}g) = (\mathrm{C}g)*_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}f) \quad \forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]].$$

Insbesondere existieren also für alle $c\in\frac{[\omega]}{\nu}+H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\mathrm{C}c=-c$ Hermitesche Sternprodukte, deren charakteristische Klasse c ist.

BEWEIS: Zum Beweis beachten wir zunächst, daß das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ wegen der Antisymmetrie des Poisson-Tensors und wegen $\mathrm{C}\nu = -\nu$ für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_a a = |a|a$, $\deg_a b = |b|b$ die Gleichung $\mathrm{C}(a\circ_{\mathrm{F}} b) = (-1)^{|a||b|}(\mathrm{C}b)\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}a)$ erfüllt. Weiter schreiben wir $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ als $c = \frac{[\omega]}{\nu} + c_{\geq 0}$, wobei wegen $Cc = -c$ offensichtlich $Cc_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ gilt. Sei $R(c_{\geq 0})$ nun ein Repräsentant der Klasse $c_{\geq 0}$, dann definieren wir $\Omega := \frac{\nu}{2}(R(c_{\geq 0}) - \mathrm{C}R(c_{\geq 0}))$. Wegen $\mathrm{C}\nu = -\nu$ und $\mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$ gilt dann offensichtlich $\mathrm{C}\Omega = \Omega$. Zudem erhält man $\frac{1}{\nu}[\Omega] = \frac{1}{2}([R(c_{\geq 0})] - \mathrm{C}[R(c_{\geq 0})]) = \frac{1}{2}(c_{\geq 0} - \mathrm{C}c_{\geq 0}) = c_{\geq 0}$. Darüberhinaus sei $u \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(u) = 0$ und wir definieren $s := \frac{1}{2}(u + \mathrm{C}u)$, so daß $\mathrm{C}s = s$ erfüllt ist. Mit den so definierten Daten s, Ω und einem beliebigen symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇ starten wir die Fedosov-Konstruktion und erhalten für $\mathrm{C}r_{\mathrm{F}}$ wegen der oben genannten Eigenschaft des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{F}}$ die Gleichungen $\delta^{-1}\mathrm{C}r_{\mathrm{F}} = s$ und $\delta\mathrm{C}r_{\mathrm{F}} = \nabla\mathrm{C}r_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu}(\mathrm{C}r_{\mathrm{F}})\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}r_{\mathrm{F}}) + R + 1\otimes\Omega$. Da diese Gleichungen mit den Gleichungen für r_{F} übereinstimmen, und deren Lösung eindeutig ist, folgt hieraus $\mathrm{C}r_{\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}}$. Für ein solches Element r_{F} kommutiert die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ offensichtlich mit C und wir erhalten $\mathrm{C}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(g_f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und ein $g_f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Da aber C auch mit σ kommutiert, folgt hieraus weiter $g_f = \mathrm{C}f$, also $\mathrm{C}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}f)$. Schließlich finden wir

$$\mathrm{C}(f*_{\mathrm{F}}g) = \sigma(\mathrm{C}(\tau_{\mathrm{F}}(f)\circ_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{F}}(g))) = \sigma((\mathrm{C}\tau_{\mathrm{F}}(g))\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}\tau_{\mathrm{F}}(f))) = \sigma(\tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}g)\circ_{\mathrm{F}}\tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}f)) = (\mathrm{C}g)*_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}f),$$

also ist $*_{\mathrm{F}}$ ein Hermitesches Sternprodukt. Wegen Satz 2.3.18 und der obigen Berechnung von $\frac{1}{\nu}[\Omega]$ gilt $c(*_{\mathrm{F}}) = \frac{[\omega]}{\nu} + c_{\geq 0} = c$, womit die Proposition bewiesen ist. □

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir Äquivalenztransformationen und Isomorphismen zwischen Hermiteschen Sternprodukten studieren.

Proposition 2.4.9 ([87, Prop. 5.6 i.)]) *Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei Hermitesche Sternprodukte für (M,ω) mit $c(\star_1) = c(\star_2)$, dann sind die formalen *-Sternprodukt-Algebren $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_1, \mathrm{C})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_2, \mathrm{C})$ äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.), d.h. es existiert eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(f \star_1 g) = (\mathcal{T}f) \star_2 (\mathcal{T}g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, die*

$$\mathcal{T}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T} = \mathrm{C} \tag{2.94}$$

erfüllt, also ist $\mathcal{T}$ eine reelle Äquivalenztransformation.

BEWEIS: Da nach Voraussetzung $c(\star_1) = c(\star_2)$ gilt, existiert eine Äquivalenztransformation T von $\star_1$ nach $\star_2$. Dann ist aber offensichtlich CTC ebenfalls eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$, da C sowohl für $\star_1$ als auch für $\star_2$ eine *-Involution ist. Folglich gibt es einen Automorphismus $\mathcal{A}$ von $\star_1$, so daß $CTC = T\mathcal{A}$ und die nullte Ordnung in ν von $\mathcal{A}$ die Identität ist. Konjugiert man $CTC = T\mathcal{A}$ mit C und verwendet $\mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$, so erhält man $T = CTCC\mathcal{A}C = T\mathcal{A}C\mathcal{A}C$, also findet man $\mathcal{A}C\mathcal{A}C = \mathrm{id}$. Da nun jeder Automorphismus von $\star_1$, der mit id beginnt, von der Form $\mathcal{A} = \exp(\nu\mathsf{D})$ ist, wobei D eine Derivation von $\star_1$ ist, schließen wir $\mathrm{id} = \exp(\nu\mathsf{D})\exp(-\nu\mathrm{C}\mathsf{D}\mathrm{C})$, also $\mathrm{C}\mathsf{D}\mathrm{C} = \mathsf{D}$. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir dann den Automorphismus $\mathcal{A}^t := \exp(t\nu\mathsf{D})$ von $\star_1$, für den $\mathrm{C}\mathcal{A}^t\mathrm{C} = (\mathcal{A}^t)^{-1} = \mathcal{A}^{-t}$ gilt. Nun ist $\mathcal{T}_t := T\mathcal{A}^t$ offensichtlich eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$ und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{C}\mathcal{T}_t\mathrm{C} = CTC\mathrm{C}\mathcal{A}_t\mathrm{C} = T\mathcal{A}\mathcal{A}^{-t} = T\mathcal{A}^{1-t} = \mathcal{T}_{1-t}$. Darum erfüllt $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{1/2}$ die Gleichungen $\mathcal{T}(f \star_1 g) = (\mathcal{T}f) \star_2 (\mathcal{T}g)$ und $\mathrm{C}\mathcal{T}\mathrm{C} = \mathcal{T}$, also (2.94) und die Proposition ist bewiesen. □

Bemerkung 2.4.10 *Die Aussage über die Existenz einer reellen Äquivalenztransformation zwischen zwei äquivalenten Hermiteschen Sternprodukten hat eine weitreichende Konsequenz für die GNS-Darstellungen, die man für diese Sternprodukte konstruieren kann. Es gilt nämlich, daß eine reelle Äquivalenztransformation eine unitäre Abbildung zwischen den aus der GNS-Konstruktion erhaltenen GNS-Hilbert-Räumen induziert, die eine Beziehung zwischen den entsprechenden GNS-Darstellungen herstellt (vgl. [19, Prop. 5.1]).*

Wir wenden uns nun der Betrachtung von isomorphen Hermiteschen Sternprodukten auf (M,ω) zu. Hierzu benötigen wir zunächst eine einfache Aussage über die mögliche Gestalt eines $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearen Isomorphismus zwischen zwei Sternprodukten $\star$ und $\star'$, die auch eine Aussage über den Zusammenhang deren charakteristischer Klassen zur Folge hat.

Lemma 2.4.11 *Ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Isomorphismus $I : (\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star) \to (\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star')$ zwischen zwei Sternprodukten $\star$ und $\star'$ auf (M, ω) ist von der Gestalt*

$$I = \phi^* T, \tag{2.95}$$

wobei $\phi : M \to M$ ein Symplektomorphismus und T eine formale Reihe von Differentialoperatoren, die mit id *beginnt, ist. Insbesondere gilt dann für die charakteristischen Klassen $c(\star)$ und $c(\star')$ die Gleichung*

$$c(\star) = c((\phi^{-1})^* \star') = (\phi^{-1})^* c(\star'). \tag{2.96}$$

Beweis: Als $\mathbb{C}[[\nu]]$-lineare Abbildung ist I von der Form $I = \sum_{i=0}^\infty \nu^i I_i$ mit $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $I_i : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$. Wie im Beweis von Lemma 2.4.4 erhält man durch Betrachtung der nullten Ordnung in ν der Gleichung $I(f \star g) = (If) \star' (Ig)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, daß I_0 ein Homomorphismus des punktweisen Produktes, also der Pull-back mit einem Diffeomorphismus $\phi : M \to M$, ist. Die Betrachtung des antisymmetrischen Anteils derselben Gleichung in erster Ordnung in ν liefert dann wieder, daß $\phi^*\omega = \omega$ gelten muß, ϕ also ein Symplektomorphismus ist. Nun ist $T := (\phi^{-1})^* I = \mathrm{id} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i T_i$ und es gilt

$$T(f \star g) = (\phi^{-1})^*((If) \star' (Ig)) = (\phi^{-1})^*((\phi^* Tf) \star' (\phi^* Tg)) = (Tf)((\phi^{-1})^* \star')(Tg),$$

also ist T eine Äquivalenztransformation von $\star$ nach $(\phi^{-1})^*\star'$ und somit eine formale Reihe von Differentialoperatoren, die mit id beginnt, da wir ausschließlich differentielle Sternprodukte betrachten. Hiermit ist aber die Aussage über die Gestalt von I bewiesen und mit Satz 2.2.19 iii,) erhalten wir zudem $c(\star) = c((\phi^{-1})^*\star') = (\phi^{-1})^* c(\star')$, womit das Lemma bewiesen ist. □

Nach dieser allgemeinen Vorbereitung betrachten wir nun isomorphe Hermitesche Sternprodukte.

Lemma 2.4.12 *Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei isomorphe Hermitesche Sternprodukte für (M, ω), dann sind die formalen *-Sternprodukt-Algebren $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_1, \mathrm{C})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_2, \mathrm{C})$ isomorph im Sinne der Definition 2.4.3 iii.), d.h. es existiert ein Isomorphismus $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(f \star_1 g) = (\mathcal{I}f) \star_2 (\mathcal{I}g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, der $\mathcal{I}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{I} = \mathrm{C}$ erfüllt, also ist $\mathcal{I}$ ein reeller Isomorphismus.*

Beweis: Sei $I = \phi^* T$ ein Isomorphismus von $\star_1$ und $\star_2$, der nach Voraussetzung existiert, dann betrachten wir das Sternprodukt $(\phi^{-1})^*\star_2$, welches wegen dieser Voraussetzung und (2.96) äquivalent zu $\star_1$ ist und zudem wegen $\mathrm{C}\phi^* = \phi^*\mathrm{C}$ ebenfalls ein Hermitesches Sternprodukt ist. Nach Proposition 2.4.9 existiert dann eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ von $\star_1$ nach $(\phi^{-1})^*\star_2$, die $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T} = \mathrm{C}$ erfüllt. Damit erhält man aber durch $\mathcal{I} := \phi^*\mathcal{T}$ einen Isomorphismus von $\star_1$ nach $\star_2$, der offensichtlich $\mathcal{I}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{I} = \mathrm{C}$ erfüllt und die Behauptung ist bewiesen. □

Somit sind also isomorphe als auch äquivalente Hermitesche Sternprodukt-Algebren immer auch als formale *-Sternprodukt-Algebren isomorph bzw. äquivalent.

2.4.2.2 Sternprodukte mit geometrischer *-Struktur

Wir fahren nun mit der Untersuchung von Sternprodukten mit *-Strukturen fort, indem wir nach dem Fall der *-Struktur C den nächst komplizierteren Fall einer *-Struktur betrachten. Unsere Vorgehensweise ist dabei analog zu der im vorangehenden Abschnitt.

Definition 2.4.13 *Ein Sternprodukt $\star$ für (M, ω) heißt Sternprodukt mit geometrischer *-Struktur, falls $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{C}\Phi^*)$ eine formale *-Sternprodukt-Algebra mit *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ ist, d.h. es gilt*

$$f \star_{\mathrm{C},\Phi^*} g = f \star_{\mathrm{opp}} g \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{2.97}$$

Nach Lemma 2.4.4 ist hierbei $\Phi : M \to M$ ein Symplektomorphismus von (M, ω) mit $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$.

Lemma 2.4.14 *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Sternproduktes $\star$ für (M,ω) mit geometrischer *-Struktur und *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ erfüllt*

$$\mathrm{C}\Phi^* c(\star) = \Phi^*\mathrm{C}c(\star) = (\Phi^{-1})^*\mathrm{C}c(\star) = -c(\star). \tag{2.98}$$

Beweis: Nach Gleichung (2.97) gilt für ein Sternprodukt mit geometrischer *-Struktur $\mathrm{C}\Phi^*$ offensichtlich $c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*}) = c(\star_{\mathrm{opp}})$. Da aber nach Proposition 2.4.2 $c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*}) = (\Phi^{-1})^*\mathrm{C}c(\star)$ und $c(\star_{\mathrm{opp}}) = -c(\star)$ gilt, folgt hieraus mit $\mathrm{C}\Phi^* = \Phi^*\mathrm{C}$ die Behauptung, da wegen $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$ zudem $\Phi^{-1} = \Phi$ gilt. □

Wie für den Fall Hermitescher Sternprodukte erhalten wir also, daß es im allgemeinen Äquivalenzklassen von Sternprodukten gibt, die keinen Repräsentanten besitzen, der ein Sternprodukt mit der geometrischen *-Struktur $\mathrm{C}\Phi^*$ ist. Umgekehrt zeigen wir in der folgenden Proposition, daß man für alle Symplektomorphismen Φ von (M,ω) mit $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$ und jede Klasse $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, die die Gleichung $\mathrm{C}\Phi^* c = -c$ erfüllt, Sternprodukte (wiederum sogar Fedosov-Sternprodukte) finden kann, für die $\mathrm{C}\Phi^*$ eine *-Involution ist und deren charakteristische Klasse durch c gegeben ist.

Proposition 2.4.15 *Für alle Symplektomorphismen Φ von (M,ω) mit $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$ und alle $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\mathrm{C}\Phi^* c = -c$ gibt es Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ für (M,ω) mit*

$$c(*_{\mathrm{F}}) = c \quad \textit{und} \quad \mathrm{C}\Phi^*(f *_{\mathrm{F}} g) = (\mathrm{C}\Phi^* g) *_{\mathrm{F}} (\mathrm{C}\Phi^* f) \qquad \forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]].$$

Beweis: Zum Beweis dieser Proposition reicht es nicht, wie es für die *-Involution C der Fall war, nur die Eingangsdaten s und Ω der Fedosov-Konstruktion geeignet anzupassen, sondern auch der symplektische, torsionsfreie Zusammenhang muß der Situation angepaßt werden. Wir zeigen dazu das folgende:

Sublemma 2.4.16 *Für alle Symplektomorphismen Φ von (M,ω) und alle $a,b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt*

$$\Phi^*(a \circ_{\mathrm{F}} b) = (\Phi^* a) \circ_{\mathrm{F}} (\Phi^* b).$$

Sei $\tilde{\tilde\nabla}$ die wie in (1.39) mit einem beliebigen symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang $\tilde\nabla$ definierte Abbildung und Φ erfülle zusätzlich $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$. Für

$$\nabla := \frac{1}{2}(\tilde{\tilde\nabla} + \Phi^*\tilde{\tilde\nabla}\Phi^*)$$

gilt dann

$$\Phi^*\nabla = \nabla\Phi^*$$

und für $R \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ mit $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R)$ gilt

$$\Phi^* R = R.$$

Diese Definition von ∇ entspricht der Wahl des symplektischen, torsionsfreien Zusammenhangs, den man aus $\tilde\nabla$ erhält, indem man $\nabla_X Y := \frac{1}{2}(\tilde\nabla_X Y + \tilde\nabla^\Phi_X Y)$ für $X,Y \in \Gamma^\infty(TM)$ definiert, wobei $\tilde\nabla^\Phi$ den mit Φ zurückgeholten Zusammenhang bezeichnet.

Beweis: Die Aussage, daß Φ^* für alle Symplektomorphismen Φ ein Automorphismus von $\circ_{\mathrm{F}}$ ist, folgt unmittelbar aus der Gestalt von $\circ_{\mathrm{F}}$, die den Poisson-Tensor zu ω beinhaltet, der aber mit ω auch unter Φ invariant ist. Um die Aussagen über ∇ und R zu beweisen, gibt es zwei Möglichkeiten. Einerseits kann man direkt zeigen, daß es sich bei dem durch $\nabla_X Y := \frac{1}{2}(\tilde\nabla_X Y + \tilde\nabla^\Phi_X Y)$ für $X,Y \in \Gamma^\infty(TM)$ definierten Zusammenhang um einen symplektischen, torsionsfreien, Φ-invarianten Zusammenhang handelt, so daß auch sein Krümmungstensor Φ-invariant ist, womit dann alle Aussagen des Lemmas offensichtlich wären. Wir wollen einen etwas anderen Weg beschreiten. Daß die oben definierte Abbildung ∇ mit der aus dem Zusammenhang, der durch $\nabla_X Y := \frac{1}{2}(\tilde\nabla_X Y + \tilde\nabla^\Phi_X Y)$ für $X,Y \in \Gamma^\infty(TM)$ definiert ist, erhaltenen übereinstimmt, ist eine direkte Folge der Definition des längs Φ zurückgeholten Zusammenhangs. Da wegen $[\delta,\Phi^*] = 0$ und

$[\delta, \widetilde{\nabla}] = 0$ aber offensichtlich auch $[\delta, \nabla] = 0$ gilt, ist dieser Zusammenhang torsionsfrei. Zudem weist man direkt nach, daß ∇ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation vom antisymmetrischen Grad 1 ist, da dies für $\widetilde{\nabla}$ gilt und Φ^* ein Automorphismus von $\circ_{\mathrm{F}}$ ist. Hieraus folgt aber, daß der Zusammenhang ∇ symplektisch ist. Weiter gilt für die oben definierte Abbildung ∇ offensichtlich $\nabla = \Phi^* \nabla \Phi^*$ und durch Quadrieren dieser Gleichung erhält man wiederum weil Φ^* ein Automorphismus von $\circ_{\mathrm{F}}$ ist $\Phi^* R = R$ und das Lemma ist bewiesen. $\triangledown$

Aus der ersten Aussage des Sublemmas erhalten wir, daß für alle $a, b \in \mathcal{W} \otimes \Lambda(M)$ mit $\deg_a a = |a| a$ und $\deg_a b = |b| b$ die Gleichung $\mathrm{C}\Phi^*(a \circ_{\mathrm{F}} b) = (-1)^{|a||b|} (\mathrm{C}\Phi^* b) \circ_{\mathrm{F}} (\mathrm{C}\Phi^* a)$ erfüllt ist. Weiter schreiben wir c als $c = \frac{[\omega]}{\nu} + c_{\geq 0}$, wobei wegen $\mathrm{C}\Phi^* c = -c$ offensichtlich $\mathrm{C}\Phi^* c_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ gilt. Sei $R(c_{\geq 0})$ nun ein Repräsentant der Klasse $c_{\geq 0}$, dann definieren wir $\Omega := \frac{\nu}{2}(R(c_{\geq 0}) - \mathrm{C}\Phi^* R(c_{\geq 0}))$. Wegen $\mathrm{C}\nu = -\nu$ und $\mathrm{C}\Phi^* \mathrm{C}\Phi^* = \mathrm{id}$ gilt dann offensichtlich $\mathrm{C}\Phi^* \Omega = \Omega$. Zudem erhält man $\frac{1}{\nu}[\Omega] = \frac{1}{2}([R(c_{\geq 0})] - \mathrm{C}\Phi^*[R(c_{\geq 0})]) = \frac{1}{2}(c_{\geq 0} - \mathrm{C}\Phi^* c_{\geq 0}) = c_{\geq 0}$. Darüberhinaus sei $u \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(u) = 0$ und wir definieren $s := \frac{1}{2}(u + \mathrm{C}\Phi^* u)$, so daß $\mathrm{C}\Phi^* s = s$ gilt. Mit den so definierten Daten Ω und s und der im obigen Sublemma definierten Abbildung ∇ führen wir die Fedosov-Konstruktion durch. Mit den für r_{F} geltenden Gleichungen zeigt man dann leicht, daß für $\mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}}$ die Gleichungen $\delta^{-1} \mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}} = s$ und $\delta \mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}} = \nabla \mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu}(\mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}}) \circ_{\mathrm{F}} (\mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}}) + R + 1 \otimes \Omega$ gelten, wobei wir $\Phi^* R = R$ und $[\Phi^*, \nabla] = [\Phi^*, \delta] = 0$ benutzt haben. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dieser Gleichungen, die mit denen für r_{F} übereinstimmen folgt $\mathrm{C}\Phi^* r_{\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}}$. Mit einem solchen Element r_{F} kommutiert die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ offensichtlich mit $\mathrm{C}\Phi^*$ und wir erhalten $\mathrm{C}\Phi^* \tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}\Phi^* f)$, da σ ebenfalls mit $\mathrm{C}\Phi^*$ vertauscht. Mit einer kurzen zum Beweis von Proposition 2.4.8 analogen Rechnung weist man hiermit nach, daß für das so konstruierte Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ die Gleichung

$$\mathrm{C}\Phi^*(f *_{\mathrm{F}} g) = (\mathrm{C}\Phi^* g) *_{\mathrm{F}} (\mathrm{C}\Phi^* f)$$

erfüllt ist. Nach Satz 2.3.18 gilt mit der oben für $\frac{1}{\nu}[\Omega]$ gezeigten Identität für dieses Sternprodukt $c(*_{\mathrm{F}}) = c$ und die Proposition ist bewiesen. $\square$

Die Aussage dieser Proposition sichert also, daß für alle möglichen (potentiellen) geometrischen *-Involutionen der Gestalt $\mathrm{C}\Phi^*$ auch tatsächlich Sternprodukte existieren, so daß $\mathrm{C}\Phi^*$ als *-Involution dieser Sternprodukte realisiert ist. Auch diesen Abschnitt wollen wir mit der Betrachtung von Äquivalenztransformationen zwischen Sternprodukten mit geometrischer *-Struktur abschließen.

Proposition 2.4.17 *Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei Sternprodukte für (M, ω) mit geometrischer *-Struktur mit $c(\star_1) = c(\star_2)$, dann sind die formalen *-Sternprodukt-Algebren $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_1, \mathrm{C}\Phi^*)$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_2, \mathrm{C}\Phi^*)$ äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.), d.h. es existiert eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(f \star_1 g) = (\mathcal{T} f) \star_2 (\mathcal{T} g)$, die*

$$\mathcal{T}^{-1} \mathrm{C}\Phi^* \mathcal{T} = \mathrm{C}\Phi^* \tag{2.99}$$

erfüllt.

Beweis: Da nach Voraussetzung $c(\star_1) = c(\star_2)$ gilt, existiert eine Äquivalenztransformation T von $\star_1$ nach $\star_2$. Offensichtlich ist dann aber auch $\mathrm{C}\Phi^* T \mathrm{C}\Phi^*$ eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$. Also gibt es einen Automorphismus $\mathcal{A}$ von $\star_1$, der mit id beginnt, so daß $\mathrm{C}\Phi^* T \mathrm{C}\Phi^* = T\mathcal{A}$. Konjugiert man diese Gleichung mit $\mathrm{C}\Phi^*$, so findet man wegen $(\mathrm{C}\Phi^*)^2 = \mathrm{id}$ die Gleichung $T = \mathrm{C}\Phi^* T \mathrm{C}\Phi^* \mathrm{C}\Phi^* \mathcal{A} \mathrm{C}\Phi^* = T\mathcal{A}\mathrm{C}\Phi^* \mathcal{A} \mathrm{C}\Phi^*$, also $\mathcal{A}\mathrm{C}\Phi^* \mathcal{A} \mathrm{C}\Phi^* = \mathrm{id}$. Da $\mathcal{A}$ ein Automorphismus von $\star_1$ ist, der mit id beginnt, gilt $\mathcal{A} = \exp(\nu \mathsf{D})$, wobei D eine Derivation von $\star_1$ ist. Wir erhalten also $\mathrm{id} = \exp(\nu \mathsf{D}) \mathrm{C}\Phi^* \exp(\nu \mathsf{D}) \mathrm{C}\Phi^* = \exp(\nu \mathsf{D}) \exp(-\nu \mathrm{C}\Phi^* \mathsf{D} \mathrm{C}\Phi^*)$, d.h. $\mathsf{D} = \mathrm{C}\Phi^* \mathsf{D} \mathrm{C}\Phi^*$. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir nun den Automorphismus $\mathcal{A}^t := \exp(t\nu \mathsf{D})$ von $\star_1$, der $\mathrm{C}\Phi^* \mathcal{A}^t \mathrm{C}\Phi^* = \mathcal{A}^{-t}$ erfüllt. Weiter betrachten wir $\mathcal{T}_t := T\mathcal{A}^t$, wodurch offensichtlich für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$ gegeben ist. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt dann $\mathrm{C}\Phi^* \mathcal{T}_t \mathrm{C}\Phi^* = T\mathcal{A}^{1-t} = \mathcal{T}_{1-t}$ und $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{1/2}$ genügt den Anforderungen an die gesuchte Äquivalenztransformation. $\square$

Bemerkung 2.4.18 *In den Beweis der obigen Proposition geht wesentlich ein, daß der Symplektomorphismus, der die geometrische *-Involution für $\star_1$ festlegt, mit dem entsprechenden Symplektomorphismus für $\star_2$ übereinstimmt. Unter gewissen zusätzlichen Annahmen an die charakteristische*

Klasse $c(\star_1)$ und an die verschiedenen Symplektomorphismen Φ_1 und Φ_2 ist es zwar möglich, daß es zwei äquivalente Sternprodukte mit verschiedenen geometrischen *-Strukturen gibt, aber der obige Beweis läßt sich nicht auf diese Situation verallgemeinern, um zu zeigen, daß diese *-Sternprodukt-Algebren äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) sind. Wie oben erhält man dann zwar, daß $\mathsf{C}\Phi_2^* T \mathsf{C}\Phi_1^*$ ein Isomorphismus von $\star_1$ nach $\star_2$ ist, aber dieser beginnt nicht mit der Identität sondern mit $\Phi_2^*\Phi_1^*$, ist also keine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$. Es gilt zwar immer noch $\mathsf{C}\Phi_2^* T \mathsf{C}\Phi_1^* = T\mathcal{A}$, mit einem Automorphismus von $\star_1$, aber $\mathcal{A}$ beginnt nicht mit id *sondern mit $\Phi_2^*\Phi_1^*$ und somit scheitert die weitere oben verwendete Argumentation, da $\mathcal{A}^{1/2}$ nicht sinnvoll definiert werden kann.*

Die in der Bemerkung 2.4.18 gemachte Beobachtung führt mit Proposition 2.4.17 zu folgender Folgerung.

Folgerung 2.4.19 *Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei Sternprodukte für (M, ω) mit geometrischer *-Struktur mit $c(\star_1) = c(\star_2)$, dann sind die formalen *-Sternprodukt-Algebren $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_1, \mathsf{C}\Phi_1^*)$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_2, \mathsf{C}\Phi_2^*)$ äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) genau dann, wenn*

$$\Phi_1 = \Phi_2,$$

also wenn die geometrischen *-Involutionen übereinstimmen.

Beweis: Nach Proposition 2.4.17 sind zwei Sternprodukte mit übereinstimmender geometrischer *-Involution äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.). Umgekehrt folgt aus der Existenz einer Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ von $\star_1$ nach $\star_2$ mit $\mathcal{T}^{-1}\mathsf{C}\Phi_2^*\mathcal{T} = \mathsf{C}\Phi_1^*$, indem man die nullte Ordnung in ν dieser Gleichung betrachtet $\Phi_2^* = \Phi_1^*$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Insbesondere erhalten wir aus dieser Folgerung auch, daß ein Sternprodukt mit geometrischer *-Struktur $\mathsf{C}\Phi^*$, wobei $\Phi \neq \mathrm{id}_M$, nie äquivalent zu einem Hermiteschen Sternprodukt im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) sein kann, auch wenn diese als Sternprodukte äquivalent sind, was möglich ist, sofern die Klasse des Hermiteschen Sternproduktes unter Φ invariant ist. Für geometrische *-Strukturen ist also der Äquivalenzbegriff als *-Algebra etwas feiner als der Begriff der Äquivalenz als Sternprodukt, was wir folgendermaßen zusammenfassen:

Korollar 2.4.20 *Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich Äquivalenz von geometrischen *-Strukturen für Sternprodukte auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist in Bijektion zur Menge der Symplektomorphismen $\Phi : M \to M$ mit $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$.*

Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) gibt es also genausoviele inäquivalente geometrische *-Strukturen, wie es Symplektomorphismen $\Phi : M \to M$ mit $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$ gibt.

Zwar kann man für Sternprodukt-Algebren mit geometrischer *-Struktur $\mathsf{C}\Phi$ mit $\Phi \neq \mathrm{id}_M$, die isomorph als $\mathbb{C}[[\nu]]$-Algebren sind, die Frage, ob diese auch als formale *-Sternprodukt-Algebren isomorph sind, stellen, jedoch kann diese Frage ohne zusätzliche Voraussetzungen an den Symplektomorphismus ϕ, der in dem Isomorphismus dieser Sternprodukte erscheint, sogar wenn die geometrischen *-Strukturen übereinstimmen, im allgemeinen nicht positiv beantwortet werden. Da derartige Sternprodukt-Algebren mit geometrischer *-Struktur aber von untergeordnetem Interesse sind, da es sich hierbei nicht um *-Strukturen mit korrektem klassischen Limes handelt, wollen wir auf eine weitere detaillierte Analyse dieser Fragestellung verzichten.

2.4.2.3 Sternprodukte mit formaler *-Struktur

Eng verwandt mit den Hermiteschen Sternprodukten sind die Sternprodukte mit formaler *-Struktur, denen wir uns in diesem Abschnitt widmen.

Definition 2.4.21 *Ein Sternprodukt $\star$ für (M,ω) heißt Sternprodukt mit formaler Sternstruktur, falls $(\mathcal{C}^\infty(M),\star,\mathrm{CL})$ eine formale *-Sternprodukt-Algebra mit *-Involution* CL *ist, d.h. es gilt*

$$f\star_{\mathrm{C,L}}g = f\star_{\mathrm{opp}}g \qquad \forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{2.100}$$

Nach Lemma 2.4.4 ist hierbei L *eine formale Reihe von Differentialoperatoren, die mit* id *beginnt und* $\mathrm{L}^{-1}=\mathrm{CLC}$ *erfüllt.*

Das folgende Lemma zeigt, daß die Sternprodukte mit formaler *-Struktur in sehr enger Beziehung zu den Hermiteschen Sternprodukten stehen.

Lemma 2.4.22 *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Sternproduktes $\star$ für (M,ω) mit formaler *-Struktur und *-Involution* CL *erfüllt*

$$\mathrm{C}c(\star) = -c(\star). \tag{2.101}$$

Beweis: Nach Gleichung (2.100) gilt für ein Sternprodukt mit formaler *-Struktur CL offensichtlich $c(\star_{\mathrm{C,L}}) = c(\star_{\mathrm{opp}})$. Nach Proposition 2.4.2 gilt $c(\star_{\mathrm{C,L}})=\mathrm{C}c(\star)$ und $c(\star_{\mathrm{opp}})=-c(\star)$ woraus wir die Behauptung erhalten. □

Die in (2.101) gefundene Bedingung an die charakteristische Klasse eines Sternproduktes mit formaler *-Struktur stimmt mit der Bedingung an die charakteristische Klasse eines Hermiteschen Sternproduktes überein. Da wir aber in Proposition 2.4.8 nachgewiesen haben, daß für jede Klasse $c\in\frac{[\omega]}{\nu}+H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, die dieser Bedingung genügt, auch ein Hermitesches Sternprodukt mit ebendieser Klasse als charakteristische Klasse existiert, gibt es zu jedem Sternprodukt mit formaler *-Struktur (sofern ein solches zu vorgegebenem $\mathrm{L}\neq\mathrm{id}$ existiert) ein äquivalentes Hermitesches Sternprodukt. Um also für alle (potentiellen) formalen *-Involutionen der Gestalt CL die Existenz eines Sternproduktes nachzuweisen, für welches CL als *-Involution realisiert ist, gehen wir von einem Hermiteschen Sternprodukt aus und geben mit einer von L abhängigen Äquivalenztransformation ein Sternprodukt an, das die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Proposition 2.4.23 *Für alle formalen Reihen mit Werten in den Differentialoperatoren* L*, die mit* id *beginnen und* $\mathrm{CLC}=\mathrm{L}^{-1}$ *erfüllen und alle* $c\in\frac{[\omega]}{\nu}+H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ *mit* $\mathrm{C}c=-c$ *gibt es ein Sternprodukt $\star$ für (M,ω) mit*

$$c(\star)=c \quad \textit{und} \quad \mathrm{CL}(f\star g) = (\mathrm{CL}g)\star(\mathrm{CL}f) \qquad \forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]].$$

Darüberhinaus ist $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star,\mathrm{CL})$ äquivalent zu $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star',\mathrm{C})$ im Sinne der Definition 2.4.3 ii.), wobei $\star'$ ein Hermitesches Sternprodukt mit $c(\star')=c$ ist. Die Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(f\star' g)=(\mathcal{T}f)\star(\mathcal{T}g)$ und $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{CL}\mathcal{T}=\mathrm{C}$ ist hierbei durch $\mathcal{T}=\mathrm{L}^{-1/2}:=\exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ definiert.

Beweis: Nach Proposition 2.4.8 existiert für alle $c\in\frac{[\omega]}{\nu}+H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\mathrm{C}c=-c$ ein Hermitesches Sternprodukt $\star'$ mit $c(\star')=c$. Von einem solchen Sternprodukt ausgehend, suchen wir nun nach einer formalen Reihe von Differentialoperatoren $\mathcal{T}$, die mit id beginnt und $\mathrm{L}=\mathrm{C}\mathcal{T}\mathrm{C}\mathcal{T}^{-1}$ erfüllt. Also suchen wir nach einem $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}^{-1}=\mathrm{C}\mathcal{T}\mathrm{C}$ und ${\mathcal{T}^{-1}}^2=\mathrm{L}$. Wir definieren nun $\mathcal{T}:=\exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ und weisen hierfür die gewünschten Eigenschaften nach. Zunächst ist nachzuweisen, daß $\mathcal{T}$ wohldefiniert ist. Da L mit id beginnt ist $\ln(\mathrm{L})$ wohldefiniert und beginnt in erster Ordnung in ν, somit ist aber auch $\exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ wohldefiniert und beginnt mit id. Offensichtlich ist $\mathcal{T}^{-1} = \exp(\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$, so daß ${\mathcal{T}^{-1}}^2 = \exp(\ln(\mathrm{L})) = \mathrm{L}$ folgt. Weiter gilt wegen $\mathrm{CLC} = \mathrm{L}^{-1}$

$$\mathrm{C}\mathcal{T}\mathrm{C} = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{C}\ln(\mathrm{L})\mathrm{C}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{CLC})\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}^{-1})\right).$$

Da aber L trivialerweise mit L^{-1} kommutiert folgt $0 = \ln(\mathrm{L}\mathrm{L}^{-1}) = \ln(\mathrm{L}) + \ln(\mathrm{L}^{-1})$ und mit dem bereits gezeigten erhalten wir $\mathrm{C}\mathcal{T}\mathrm{C} = \mathcal{T}^{-1}$. Wir definieren nun $f \star g := \mathcal{T}((\mathcal{T}^{-1}f) \star' (\mathcal{T}^{-1}g))$, so daß offensichtlich $c(\star) = c(\star') = c$ gilt. Wie wir bereits gezeigt haben gilt für $\mathcal{T}$ die Gleichung $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{CL}\mathcal{T} = \mathrm{C}$. Da aber $\star'$ ein Hermitesches Sternprodukt ist, erhält man hiermit und mit der Definition von $\star$ unmittelbar $\mathrm{CL}(f \star g) = (\mathrm{CL}g) \star (\mathrm{CL}f) \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, womit die Proposition bewiesen ist. □

Indem wir beachten, daß wir die Argumentation aus dem Beweis der vorangehenden Proposition umkehren können, um aus einem Sternprodukt mit formaler *-Struktur ein Hermitesches Sternprodukt zu erhalten und die Aussage von Proposition 2.4.9 verwenden, erhalten wir die folgende Folgerung.

Folgerung 2.4.24 *i.) Sei $\star$ ein Sternprodukt für (M, ω) mit formaler *-Involution* CL *und sei $\star''$ ein Hermitesches Sternprodukt für (M, ω), so daß $c(\star) = c(\star'')$, dann sind $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star, \mathrm{CL})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star'', \mathrm{C})$ äquivalente formale *-Sternprodukt-Algebren.*

ii.) Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei Sternprodukte mit formaler *-Struktur für (M, ω) mit $c(\star_1) = c(\star_2)$, dann sind $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_1, \mathrm{CL}_1)$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_2, \mathrm{CL}_2)$ äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.).

Beweis: Für den Beweis von i.) kehren wir die Argumentation des Beweises von Proposition 2.4.23 um, und definieren mit $\mathcal{T} = \exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ ein Hermitesches Sternprodukt $\star'$ durch $f \star' g := \mathcal{T}^{-1}((\mathcal{T}f)) \star (\mathcal{T}g)$, welches wegen der Eigenschaften von $\mathcal{T}$ äquivalent zu $\star$ im Sinne von 2.4.3 ii.) ist. Weiter ist sicher $c(\star') = c(\star'')$ und nach Proposition 2.4.9 existiert eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}'$ von $\star''$ nach $\star'$ mit ${\mathcal{T}'}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T}' = \mathrm{C}$, so daß $\mathcal{T}'' := \mathcal{T}\mathcal{T}'$ eine Äquivalenztransformation von $\star''$ nach $\star$ liefert, die ${\mathcal{T}''}^{-1}\mathrm{CL}\mathcal{T}'' = \mathrm{C}$ erfüllt, womit der erste Teil der Folgerung bewiesen ist. Für den Beweis von ii.) beachten wir zunächst, daß wegen Proposition 2.4.8 und Gleichung (2.101) zu jedem Sternprodukt $\star$ mit formaler *-Struktur ein Hermitesches Sternprodukt $\star''$ mit $c(\star) = c(\star'')$ existiert, so daß also die Voraussetzungen von i.) erfüllt sind. Also findet man nach i.) zu $\star_1$ ein Hermitesches im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) äquivalentes Hermitesches Sternprodukt $\star''$. Wiederum wegen i.) und $c(\star_1) = c(\star_2)$ ist auch $\star_2$ in diesem Sinn äquivalent zu $\star''$ und es folgt die Behauptung. □

Ernüchternderweise ist also der Äquivalenzbegriff für Sternprodukte mit formaler *-Struktur, wie wir ihn eingeführt haben, nicht feiner als der übliche Begriff der Äquivalenz als Sternprodukte. Andererseits bedeutet dies aber auch, daß es für das Studium von Sternprodukten mit formaler *-Struktur, genügt Hermitesche Sternprodukte zu studieren, da diese nach Aussage i.) der vorangehenden Folgerung äquivalent als formale *-Sternprodukt-Algebren sind, sofern deren charakteristische Klassen übereinstimmen, sie also als Sternprodukte äquivalent sind. Da wir für formale *-Sternprodukt-Algebren mit korrektem klassischen Limes denselben Äquivalenzbegriff wie in 2.4.3 ii.) verwenden, gibt es modulo Äquivalenz, wie aus Folgerung 2.4.24 folgt, genau eine *-Involution nämlich die komplexe Konjugation und das Studium von formalen *-Sternprodukt-Algebren mit korrektem klassischen Limes reduziert sich auf das Studium von Hermiteschen Sternprodukten. Zusammengefaßt bedeutet das:

Korollar 2.4.25 *Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) gibt es bezüglich Äquivalenz genau eine Äquivalenzklasse von *-Strukturen mit korrektem klassischen Limes für Sternprodukte, nämlich diejenige, die durch die *-Involution* C *repräsentiert wird.*

Diese Beobachtung ist natürlich der Grund dafür, daß wir uns in weiteren konkreten Beispielen (vgl. Proposition 3.5.19) insbesondere für die Konstruktion von Hermiteschen Sternprodukten interessieren werden.

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch isomorphe Sternprodukte mit formaler *-Struktur betrachten und zeigen, daß auch hier die Isomorphie als $\mathbb{C}[[\nu]]$-Algebra die Isomorphie als formale *-Sternprodukt-Algebra impliziert.

Lemma 2.4.26 *i.) Sei $\star$ ein Sternprodukt für (M,ω) mit formaler *-Struktur* CL *und sei $\star''$ ein Hermitesches Sternprodukt für (M,ω), so daß ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Isomorphismus I von $\star$ nach $\star''$ existiert, dann sind $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star,\mathrm{CL})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star'',\mathrm{C})$ isomorphe formale *-Sternprodukt-Algebren.*

ii.) Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei Sternprodukte mit formaler *-Struktur für (M,ω), so daß ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Isomorphismus I von $\star_1$ nach $\star_2$ existiert, dann sind $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star_1,\mathrm{CL}_1)$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star_2,\mathrm{CL}_2)$ isomorph im Sinne der Definition 2.4.3 iii.).

Beweis: Sei $I=\phi^*T$ ein $\mathbb{C}[[\nu]]$-linearer Isomorphismus von $\star$ nach $\star''$, dann betrachten wir das Sternprodukt $(\phi^{-1})^*\star''$, welches Hermitesch ist und wegen $c(\star)=c((\phi^{-1})^*\star'')$ äquivalent zu $\star$ ist. Nach Folgerung 2.4.24 i.) sind $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star,\mathrm{CL})$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],(\phi^{-1})^*\star'',\mathrm{C})$ äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.), also existiert eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ von $\star$ nach $(\phi^{-1})^*\star''$, die $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T}=\mathrm{CL}$ erfüllt. Hiermit ist dann aber $\mathcal{I}:=\phi^*\mathcal{T}$ ein Isomorphismus von $\star$ nach $\star''$, der $\mathcal{I}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{I}=\mathrm{CL}$ erfüllt und i.) ist bewiesen. Wegen $\mathrm{C}c(\star_1)=-c(\star_1)$ und $\mathrm{C}c(\star_2)=-c(\star_2)$ existieren zu $\star_1$ und $\star_2$ nach Folgerung 2.4.24 i.) äquivalente Hermitesche Sternprodukte $\star_1''$ und $\star_2''$, derart daß die Äquivalenztransformationen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ von $\star_1$ nach $\star_1''$ und $\star_2$ nach $\star_2''$ die Gleichungen $\mathcal{T}_1^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T}_1=\mathrm{CL}_1$ und $\mathcal{T}_2^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T}_2=\mathrm{CL}_2$ erfüllen. Demzufolge sind $\star_1''$ und $\star_2''$ isomorphe Sternprodukte, da nach Voraussetzung $\star_1$ und $\star_2$ isomorph sind. Wegen Lemma 2.4.12 existiert dann aber ein Isomorphismus $\mathcal{I}''$ von $\star_1''$ nach $\star_2''$ mit $\mathcal{I}''^{-1}\mathrm{C}\mathcal{I}''=\mathrm{C}$, mit dem wir einen Isomorphismus $\mathcal{I}$ von $\star_1$ nach $\star_2$ durch die Definition $\mathcal{I}:=\mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{I}''\mathcal{T}_1$ erhalten. Für diesen weist man aber unter Verwendung der Eigenschaften von $\mathcal{I}''$, $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ direkt nach, daß $\mathcal{I}^{-1}\mathrm{CL}_2\mathcal{I}=\mathrm{CL}_1$ gilt, womit Aussage ii.) bewiesen ist. □

Es zeigt sich also, daß auch der Isomorphiebegriff für formale *-Sternprodukt-Algebren mit formaler *-Struktur nicht feiner ist als der Begriff der Isomorphie als $\mathbb{C}[[\nu]]$-Algebra. Also gibt es auch modulo Isomorphie genau eine *-Struktur mit korrektem klassischen Limes nämlich die komplexe Konjugation. Zusammengefaßt bedeutet das:

Korollar 2.4.27 *Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M,ω) gibt es bezüglich Isomorphie genau eine Äquivalenzklasse von *-Strukturen mit korrektem klassischen Limes für Sternprodukte, nämlich diejenige, die durch die *-Involution* C *repräsentiert wird.*

2.4.2.4 Sternprodukte mit allgemeiner *-Struktur

Nach den Untersuchungen der vorangehenden Abschnitte ist es nun ein leichtes die bisherigen Ergebnisse einzusetzen, um Sternprodukte mit allgemeiner *-Struktur zu studieren.

Lemma 2.4.28 *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Sternproduktes $\star$ für (M,ω) mit allgemeiner *-Struktur und *-Involution $\mathrm{S}=\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ erfüllt*

$$\mathrm{C}\Phi^*c(\star)=-c(\star). \tag{2.102}$$

Beweis: Wegen $\mathrm{S}(g\star f)=(\mathrm{S}f)\star(\mathrm{S}g)$ gilt $f\star_{\mathrm{opp}}g=\mathrm{S}^{-1}((\mathrm{S}f)\star(\mathrm{S}g))=f\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}}g$, also $c(\star_{\mathrm{opp}})=c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}})$. Nach Proposition 2.4.2 folgt hieraus aber mit $c(\star_{\mathrm{opp}})=-c(\star)$ und $c(\star_{\mathrm{C},\Phi^*,\mathrm{L}})=(\Phi^{-1})^*\mathrm{C}c(\star)$ die Behauptung, wenn wir noch $\Phi^{-1}=\Phi$ verwenden. □

Die in (2.102) gefundene Bedingung an die charakteristische Klasse eines Sternproduktes mit allgemeiner *-Struktur und *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ stimmt mit der Bedingung an die charakteristische Klasse eines Sternproduktes mit geometrischer *-Struktur und Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ überein. Da wir aber in Proposition 2.4.15 nachgewiesen haben, daß für alle Symplektomorphismen Φ von (M,ω) mit $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$ und jede Klasse $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, die dieser Bedingung genügt, auch ein Sternprodukt mit dieser geometrischen *-Struktur $\mathrm{C}\Phi^*$ mit ebendieser Klasse als charakteristische Klasse existiert, gibt es zu jedem Sternprodukt mit allgemeiner *-Struktur (sofern ein solches zu vorgegebenem $\mathrm{L} \neq \mathrm{id}$ existiert) ein äquivalentes Sternprodukt mit geometrischer *-Struktur. Um also für alle (potentiellen) *-Involutionen der Gestalt $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ die Existenz eines Sternproduktes nachzuweisen, für welches $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ als *-Involution realisiert ist, gehen wir von einem Sternprodukt mit geometrischer *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ aus und geben mit einer von L abhängigen Äquivalenztransformation ein Sternprodukt an, das die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Proposition 2.4.29 *Für alle formalen Reihen mit Werten in den Differentialoperatoren* L, *die mit* id *beginnen und* $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathrm{C}\Phi^* = \mathrm{L}^{-1}$ *erfüllen und alle Symplektomorphismen* Φ *von* (M,ω) *mit* $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$ *und alle* $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ *mit* $\mathrm{C}\Phi^*c = -c$ *gibt es ein Sternprodukt* $\star$ *für* (M,ω) *mit*

$$c(\star) = c \quad \textit{und} \quad \mathrm{S}(f\star g) = (\mathrm{S}g)\star(\mathrm{S}f) \qquad \forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],$$

wobei $\mathrm{S} = \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$. *Darüberhinaus ist* $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star,\mathrm{S})$ *äquivalent zu* $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star',\mathrm{C}\Phi^*)$ *im Sinne der Definition 2.4.3 ii.), wobei* $\star'$ *ein Sternprodukt mit geometrischer* **-Struktur mit* $c(\star') = c$ *ist. Die Äquivalenztransformation* $\mathcal{T}$ *mit* $\mathcal{T}(f\star' g) = (\mathcal{T}f)\star(\mathcal{T}g)$ *und* $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{S}\mathcal{T} = \mathrm{C}\Phi^*$ *ist hierbei durch* $\mathcal{T} = \mathrm{L}^{-1/2} := \exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ *definiert.*

BEWEIS: Nach Proposition 2.4.15 existiert für alle Symplektomorphismen Φ von (M,ω) mit $\Phi\circ\Phi = \mathrm{id}_M$ und für alle $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\mathrm{C}\Phi^*c = -c$ ein Sternprodukt $\star'$ mit *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ und mit $c(\star') = c$. Von einem solchen Sternprodukt ausgehend, suchen wir nun nach einer formalen Reihe von Differentialoperatoren $\mathcal{T}$, die mit id beginnt und $\mathrm{L} = \mathrm{C}\Phi^*\mathcal{T}\mathrm{C}\Phi^*\mathcal{T}^{-1}$ erfüllt. Also suchen wir nach einem $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}^{-1} = \mathrm{C}\Phi^*\mathcal{T}\mathrm{C}\Phi^*$ und ${\mathcal{T}^{-1}}^2 = \mathrm{L}$. Wir definieren nun $\mathcal{T} := \exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ und weisen hierfür die gewünschten Eigenschaften nach. Wie im Beweis von 2.4.23 folgt die Wohldefiniertheit von $\mathcal{T}$ und ${\mathcal{T}^{-1}}^2 = \mathrm{L}$. Weiter gilt wegen $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathrm{C}\Phi^* = \mathrm{L}^{-1}$

$$\mathrm{C}\Phi^*\mathcal{T}\mathrm{C}\Phi^* = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{C}\Phi^*\ln(\mathrm{L})\mathrm{C}\Phi^*\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathrm{C}\Phi^*)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}^{-1})\right) = \mathcal{T}^{-1},$$

da $\ln(\mathrm{L}^{-1}) = -\ln(\mathrm{L})$. Wir definieren nun $f\star g := \mathcal{T}((\mathcal{T}^{-1}f)\star'(\mathcal{T}^{-1}g))$, so daß offensichtlich $c(\star) = c(\star') = c$ gilt. Wie wir bereits gezeigt haben gilt für $\mathcal{T}$ die Gleichung $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathcal{T} = \mathrm{C}\Phi^*$. Da aber $\star'$ ein Sternprodukt mit geometrischer *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ ist, erhält man hiermit und mit der Definition von $\star$ unmittelbar $\mathrm{S}(f\star g) = (\mathrm{S}g)\star(\mathrm{S}f)\forall f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, womit die Proposition bewiesen ist. □

Indem wir beachten, daß wir die Argumentation aus dem Beweis der vorangehenden Proposition umkehren können, um aus einem Sternprodukt mit allgemeiner *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ ein Sternprodukt mit geometrischer *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ zu erhalten und die Aussage von Proposition 2.4.17 verwenden, erhalten wir die folgende Folgerung.

Folgerung 2.4.30 *i.) Sei* $\star$ *ein Sternprodukt für* (M,ω) *mit allgemeiner* **-Involution* $\mathrm{S} = \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ *und sei* $\star''$ *ein Sternprodukt mit* **-Involution* $\mathrm{C}\Phi^*$ *für* (M,ω), *so daß* $c(\star) = c(\star'')$, *dann sind* $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star,\mathrm{S})$ *und* $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star'',\mathrm{C}\Phi^*)$ *äquivalente formale* **-Sternprodukt-Algebren.*

ii.) Seien $\star_1$ *und* $\star_2$ *zwei Sternprodukte mit formaler* **-Struktur und* **-Involutionen* S_1, S_2 *für* (M,ω) *mit* $c(\star_1) = c(\star_2)$, *dann sind* $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star_1,\mathrm{S}_1 = \mathrm{C}\Phi_1^*\mathrm{L}_1)$ *und* $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]],\star_2,\mathrm{S}_2 = \mathrm{C}\Phi_2^*\mathrm{L}_2)$ *äquivalent im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) genau dann, wenn die Symplektomorphismen* Φ_1 *und* Φ_2 *übereinstimmen.*

Beweis: Zum Beweis von i.) definieren wir mit $\mathcal{T} = \exp(-\frac{1}{2}\ln(\mathrm{L}))$ ein Sternprodukt $\star'$ mit *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ durch $f\star' g := \mathcal{T}^{-1}((\mathcal{T}f))\star(\mathcal{T}g)$, welches wegen der Eigenschaften von $\mathcal{T}$ äquivalent zu $\star$ im Sinne von 2.4.3 ii.) ist. Weiter ist sicher $c(\star') = c(\star'')$ und nach Proposition 2.4.15 existiert eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}'$ von $\star''$ nach $\star'$ mit $\mathcal{T}'^{-1}\mathrm{C}\Phi^*\mathcal{T}' = \mathrm{C}\Phi^*$, so daß $\mathcal{T}'' := \mathcal{T}\mathcal{T}'$ eine Äquivalenztransformation von $\star''$ nach $\star$ liefert, die $\mathcal{T}''^{-1}\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}\mathcal{T}'' = \mathrm{C}\Phi^*$ erfüllt, womit der erste Teil der Folgerung bewiesen ist. Zum Beweis von ii.) seien zunächst $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_1, \mathrm{S}_1 = \mathrm{C}\Phi_1^*\mathrm{L}_1)$ und $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], \star_2, \mathrm{S}_2 = \mathrm{C}\Phi_2^*\mathrm{L}_2)$ äquivalent im Sinne von 2.4.3 ii.). Aus der Existenz einer Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ von $\star_1$ nach $\star_2$ mit $\mathcal{T}^{-1}\mathrm{S}_2\mathcal{T} = \mathrm{S}_1$ folgt durch Betrachtung der nullten Ordnung in ν sofort $\Phi_1 = \Phi_2$. Für die andere Richtung der Aussage von ii.) beachten wir zunächst, daß wegen Proposition 2.4.15 und Gleichung (2.102) zu jedem Sternprodukt $\star$ mit *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ ein Sternprodukt $\star''$ mit *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$ und $c(\star) = c(\star'')$ existiert, so daß also die Voraussetzungen von i.) erfüllt sind. Also findet man nach i.) zu $\star_1$ ein im Sinne der Definition 2.4.3 ii.) äquivalentes Sternprodukt $\star''$ mit *-Involution $\mathrm{C}\Phi^*$. Wiederum wegen i.) und $c(\star_1) = c(\star_2)$ ist auch $\star_2$ in diesem Sinn äquivalent zu $\star''$, da nach Voraussetzung $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ und es folgt die Behauptung. □

Die Aussage i.) der vorangehenden Folgerung bedeutet, daß es für das Studium von Sternprodukten mit allgemeiner *-Struktur genügt, Sternprodukte mit den verschiedenen, also von verschiedenen Symplektomorphismen Φ herrührenden, geometrischen *-Strukturen zu untersuchen. Also ist der Äquivalenzbegriff, den wir für formale *-Sternprodukt-Algebren eingeführt haben nur geringfügig feiner als der übliche Äquivalenzbegriff von Sternprodukten. Auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) gibt es genausoviele inäquivalente *-Strukturen, wie es Symplektomorphismen $\Phi : M \to M$ mit $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$ gibt.

Diese Tatsache fassen wir zusammen als:

Korollar 2.4.31 *Die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich Äquivalenz von allgemeinen *-Strukturen für Sternprodukte auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) ist in Bijektion zur Menge der Symplektomorphismen $\Phi : M \to M$ mit $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}_M$.*

Hinsichtlich der Isomorphie formaler *-Sternprodukt-Algebren sind für beliebige *-Strukturen $\mathrm{S} = \mathrm{C}\Phi^*\mathrm{L}$ mit $\Phi \neq \mathrm{id}_M$ die Verhältnisse ähnlich wie im Fall der geometrischen *-Strukturen $\mathrm{C}\Phi^*$ mit $\Phi \neq \mathrm{id}_M$, so daß ohne weitere Voraussetzungen an die Gestalt der vermittelnden Isomorphismen die Frage nach der Existenz von Isomorphismen, die mit den *-Involutionen verträglich sind, im allgemeinen nicht positiv beantwortet werden kann, selbst wenn die Symplektomorphismen in den zu vergleichenden *-Involutionen übereinstimmen. Da die hier betrachteten *-Involutionen natürlich für $\Phi \neq \mathrm{id}_M$ keine Involutionen mit korrektem klassischen Limes sind, wollen wir auch hier unsere Untersuchungen nicht weiter vertiefen, da dieser Fall für physikalische Fragestellungen von untergeordnetem Interesse ist.

2.4.3 Sternprodukte mit ν-Parität

In diesem Abschnitt studieren wir Sternprodukte mit ν-Parität, was unter anderem deshalb von Interesse ist, da diese Eigenschaft eines Sternproduktes, in der frühen Literatur zur Deformationsquantisierung, Bestandteil der Definition eines Sternproduktes ist.

Definition 2.4.32 ([87, Def. 5.1 ii.]) *Ein Sternprodukt $\star$ für (M, ω) heißt Sternprodukt mit ν-Parität, falls der ν-Paritäts-Operator* P *ein Antiautomorphismus von $\star$ ist, d.h. es gilt*

$$f\star_{\mathrm{P}} g = f\star_{\mathrm{opp}} g \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{2.103}$$

Schreibt man $f\star_{\mathrm{opp}} g = g\star f = \sum_{i=0}^\infty \nu^i C_i(g, f)$ so sieht man wegen $f\star_{\mathrm{P}} g = \sum_{i=0}^\infty (-\nu)^i C_i(f, g)$, daß die Bedingung an $\star$, ein Sternprodukt mit ν-Parität zu sein, äquivalent dazu ist, daß die

Bidifferentialoperatoren C_i die Gleichung $C_i(f,g) = (-1)^i C_i(g,f)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erfüllen. Diese Bedingung ist in den frühen Arbeiten von S. Gutt, M. Cahen [26, 53], D. Arnal et. al. [4], M. DeWilde, P. B. A. Lecomte [32, 33] zur Deformationsquantisierung fester Bestandteil der Definition eines Sternproduktes. Tatsächlich stellt sie aber eine Einschränkung an die charakteristische Klasse des Sternproduktes dar.

Lemma 2.4.33 ([87, Lemma 5.2 ii.)]) *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Sternproduktes $\star$ für (M,ω) mit ν-Parität erfüllt*

$$\mathrm{P}c(\star) = -c(\star). \tag{2.104}$$

Beweis: Nach Gleichung (2.103) gilt für ein Sternprodukt $\star$ mit ν-Parität offensichtlich $c(\star_{\mathrm{opp}}) = c(\star_{\mathrm{P}})$. Da aber nach Proposition 2.4.2 $c(\star_{\mathrm{opp}}) = -c(\star)$ und $c(\star_{\mathrm{P}}) = \mathrm{P}c(\star)$ gilt, folgt hieraus die Behauptung. □

Anders ausgedrückt bedeutet (2.104), daß $c(\star)$ von der Form $c(\star) = \frac{[\omega]}{\nu} + \sum_{r=0}^\infty \nu^{2r+1} c(\star)^{2r+1}$ ist, also nur ungerade Potenzen von ν beinhaltet. In diesem Lichte betrachtet ist die Tatsache, daß im von M. DeWilde und P. B. A. Lecomte in [33, Sec. 4] gegebenen Existenzbeweis für Sternprodukte bei der rekursiven Konstruktion nur in den ungeraden Ordnungen in ν die Möglichkeit, eine geschlossene Zweiform auf M, die die Äquivalenzklasse des Sternproduktes festlegt, zu wählen, besteht, natürlich verständlich. Zudem ist somit aber auch das ursprüngliche Klassifikationsresultat in diesem Artikel, das in [34] seine Verfeinerung und Vervollständigung findet, nur die „Hälfte“ der tatsächlichen Klassifikation von Sternprodukten.

Auch hier ist die Konsequenz von Gleichung (2.104), daß es Äquivalenzklassen, nämlich diejenigen deren entsprechende charakteristische Klasse diese Gleichung nicht erfüllt, von Sternprodukten gibt, die keinen Repräsentanten besitzen, der ein Sternprodukt mit ν-Parität ist. Für alle Klassen $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$, die die Gleichung $\mathrm{P}c = -c$ erfüllen, können wir aber Sternprodukte mit ν-Parität konstruieren, deren charakteristische Klasse durch c gegeben ist.

Proposition 2.4.34 ([87, Prop. 5.3 i.)]) *Für alle $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ mit $\mathrm{P}c = -c$ gibt es Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ für (M,ω) mit*

$$c(*_{\mathrm{F}}) = c \qquad \text{und} \qquad \mathrm{P}(f *_{\mathrm{F}} g) = (\mathrm{P}g) *_{\mathrm{F}} (\mathrm{P}f) \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]].$$

Beweis: Für das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ gilt wegen $\mathrm{P}\nu = -\nu$ und der Antisymmetrie des Poisson-Tensors für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_a a = |a|a$, $\deg_a b = |b|b$ die Gleichung $\mathrm{P}(a \circ_{\mathrm{F}} b) = (-1)^{|a||b|}(\mathrm{P}b)\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{P}a)$. Weiter schreiben wir $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ als $c = \frac{[\omega]}{\nu} + c_{\geq 0}$, wobei wegen $\mathrm{P}c = -c$ offensichtlich $\mathrm{P}c_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ gilt. Sei nun $R(c_{\geq 0})$ ein Repräsentant der Klasse $c_{\geq 0}$, dann definieren wir $\Omega := \frac{\nu}{2}(R(c_{\geq 0}) - \mathrm{P}R(c_{\geq 0}))$. Wegen $\mathrm{P}^2 = \mathrm{id}$ und $\mathrm{P}\nu = -\nu$ gilt dann offensichtlich $\mathrm{P}\Omega = \Omega$. Zudem erhält man $\frac{1}{\nu}[\Omega] = \frac{1}{2}([R(c_{\geq 0})] - \mathrm{P}[R(c_{\geq 0})]) = \frac{1}{2}(c_{\geq 0} - \mathrm{P}c_{\geq 0}) = c_{\geq 0}$. Darüberhinaus sei $u \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(u) = 0$ und wir definieren $s := \frac{1}{2}(u + \mathrm{P}u)$, so daß $\mathrm{P}s = s$ erfüllt ist. Mit den so definierten Daten Ω, s und einem beliebigen symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang ∇ betrachten wir nun das resultierende Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ und erhalten für $\mathrm{P}r_{\mathrm{F}}$ wegen der oben genannten Eigenschaft des faserweisen Produktes und der Definitionen von s und Ω die Gleichungen $\delta^{-1} r_{\mathrm{F}} = s$ und $\delta \mathrm{P}r_{\mathrm{F}} = \nabla \mathrm{P}r_{\mathrm{F}} - \frac{1}{\nu}(\mathrm{P}r_{\mathrm{F}})\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{P}r_{\mathrm{F}}) + R + 1 \otimes \Omega$. Da diese Gleichungen mit den Gleichungen für r_{F} übereinstimmen und r_{F} deren eindeutige Lösung ist, folgt $\mathrm{P}r_{\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}}$. Mit diesem r_{F} kommutiert die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ offensichtlich mit P und wir erhalten $\mathrm{P}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{P}f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, da P auch mit σ kommutiert. Mit einer zum Beweis von Proposition 2.4.8 analogen Rechnung findet man dann $\mathrm{P}(f *_{\mathrm{F}} g) = (\mathrm{P}g) *_{\mathrm{F}} (\mathrm{P}f)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Wegen Satz 2.3.18 und der obigen Gleichung für $\frac{1}{\nu}[\Omega]$ gilt $c(*_{\mathrm{F}}) = \frac{[\omega]}{\nu} + c_{\geq 0} = c$ und die Proposition ist bewiesen. □

Auch für den ν-Paritäts-Operator P kann man zeigen, daß es zu zwei äquivalenten Sternprodukten mit ν-Parität immer eine Äquivalenztransformation gibt, die mit dem ν-Paritäts-Operator verträglich ist.

Proposition 2.4.35 ([87, Prop. 5.6 ii.)]) *Seien $\star_1$ und $\star_2$ zwei Sternprodukte für (M,ω) mit ν-Parität und $c(\star_1) = c(\star_2)$, dann existiert eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}(f \star_1 g) = (\mathcal{T}f) \star_2 (\mathcal{T}g)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, die*

$$\mathcal{T}^{-1}\mathrm{P}\mathcal{T} = \mathrm{P} \tag{2.105}$$

erfüllt, also hängt $\mathcal{T}$ nur von geraden Potenzen von ν ab.

Beweis: Da nach Voraussetzung $c(\star_1) = c(\star_2)$ gilt, existiert eine Äquivalenztransformation T von $\star_1$ nach $\star_2$. Dann ist aber $\mathrm{P}T\mathrm{P}$ ebenfalls eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$, da P sowohl ein Antiautomorphismus von $\star_1$ als auch von $\star_2$ ist. Folglich gibt es einen Automorphismus $\mathcal{A}$ von $\star_1$, so daß $\mathrm{P}T\mathrm{P} = T\mathcal{A}$ und die nullte Ordnung in ν von $\mathcal{A}$ die Identität ist. Konjugiert man $\mathrm{P}T\mathrm{P} = T\mathcal{A}$ mit P und verwendet $\mathrm{P}^2 = \mathrm{id}$, so erhält man $T = \mathrm{P}T\mathrm{P}\mathrm{P}\mathcal{A}\mathrm{P} = T\mathcal{A}\mathrm{P}\mathcal{A}\mathrm{P}$, also findet man $\mathcal{A}\mathrm{P}\mathcal{A}\mathrm{P} = \mathrm{id}$. Da nun jeder Automorphismus von $\star_1$, der mit id beginnt, von der Form $\mathcal{A} = \exp(\nu\mathsf{D})$ ist, wobei D eine Derivation von $\star_1$ ist, schließen wir $\mathrm{id} = \exp(\nu\mathsf{D})\exp(-\nu\mathrm{P}\mathsf{D}\mathrm{P})$, also $\mathrm{P}\mathsf{D}\mathrm{P} = \mathsf{D}$. Für $t \in \mathbb{R}$ betrachten wir dann den Automorphismus $\mathcal{A}^t := \exp(t\nu\mathsf{D})$ von $\star_1$, für den $\mathrm{P}\mathcal{A}^t\mathrm{P} = \mathcal{A}^{-t}$ gilt. Nun ist $\mathcal{T}_t := T\mathcal{A}^t$ offensichtlich eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$ und für alle $e \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{P}\mathcal{T}_t\mathrm{P} = \mathrm{P}T\mathrm{P}\mathrm{P}\mathcal{A}^t\mathrm{P} = T\mathcal{A}\mathcal{A}^{-t} = T_{1-t}$. Darum erfüllt die Äquivalenztransformation $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{1/2}$ von $\star_1$ nach $\star_2$ die Gleichung (2.105) und die Proposition ist bewiesen. □

Bemerkung 2.4.36 *Für den Beweis dieser Proposition sind wir völlig analog zum Beweis von Proposition 2.4.9 vorgegangen, indem an die Stelle von* C *der ν-Pariäts-Operator* P *getreten ist. Da wir aber im folgenden Abschnitt nochmals von der expliziten Vorgehensweise in diesen beiden Beweisen Gebrauch machen werden, wobei beide Abbildungen* C *und* P *gleichzeitig eine wichtige Rolle spielen werden, erschien es uns sinnvoll ihn der Deutlichkeit halber anzugeben.*

2.4.4 Sternprodukte vom Weyl-Typ

In diesem Abschnitt betrachten wir Sternprodukte vom Weyl-Typ. Das Interesse an Sternprodukten dieses Typs liegt vorallem darin begründet, daß das Weyl-Moyal-Produkt auf $T^*\mathbb{R}^n$, welches eine korrekte Beschreibung der Quantisierung von in den Koordinaten polynomialen Funktionen liefert, ein solches Sternprodukt ist. Weitere Beispiele von Sternprodukten vom Weyl-Typ findet man auch in [18, 19, 17]. Unsere Resultate dieses Abschnittes stellen insbesondere die Verallgemeinerung einer Beobachtung dar, die wir in [17, Thm. 4.1 iii.) und Thm. 4.6] gemacht haben, und die eine Beziehung zwischen der charakteristischen Klasse und der Eigenschaft eines Sternproduktes vom Weyl-Typ zu sein herstellt.

Definition 2.4.37 ([87, Def. 5.1 iv.)]) *Ein Sternprodukt $\star$ für (M,ω) heißt Sternprodukt vom Weyl-Typ, falls $\star$ ein Hermitesches Sternprodukt mit ν-Parität ist, d.h. es gilt*

$$f \star_{\mathrm{C}} g = f \star_{\mathrm{opp}} g \qquad \text{und} \qquad f \star_{\mathrm{P}} g = f \star_{\mathrm{opp}} g \qquad \forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]. \tag{2.106}$$

Die unmittelbare Konsequenz dieser Definition ist das folgende Lemma.

Lemma 2.4.38 *Die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Sternproduktes $\star$ für (M,ω) vom Weyl-Typ erfüllt*

$$\mathrm{C}c(\star) = -c(\star) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{P}c(\star) = -c(\star). \tag{2.107}$$

Beweis: Die Aussage des Lemmas folgt direkt aus den Lemmas 2.4.7 und 2.4.33. □

Also unterliegt die charakteristische Klasse eines Sternproduktes vom Weyl-Typ zwei einschränkenden Bedingungen, die wiederum bedeuten, daß es im allgemeinen Äquivalenzklassen von Sternprodukten gibt, die keinen Repräsentanten besitzen, der ein Sternprodukt vom Weyl-Typ ist. Indem wir die Beweise der Propositionen 2.4.8 und 2.4.34 geeignet modifizieren erhalten wir auch hier für jede Klasse, die den Bedingungen in (2.107) genügt, die Existenz eines Sternproduktes vom Weyl-Typ mit dieser vorgegebenen charakteristischen Klasse.

Proposition 2.4.39 ([87, Prop. 5.3 iii.)]) *Für alle* $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ *mit* $\mathrm{P}c = -c = \mathrm{C}c$ *gibt es Fedosov-Sternprodukte* $*_{\mathrm{F}}$ *für* (M,ω) *mit*

$$c(*_{\mathrm{F}}) = c \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{P}((\mathrm{P}f) *_{\mathrm{F}} (\mathrm{P}g)) = g *_{\mathrm{F}} f = \mathrm{C}((\mathrm{C}f) *_{\mathrm{F}} (\mathrm{C}g)) \qquad \forall f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]].$$

Beweis: Auch hier gehen wieder wesentlich die Gleichungen $\mathrm{C}((\mathrm{C}a)\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}b)) = \mathrm{P}((\mathrm{P}a)\circ_{\mathrm{F}}(\mathrm{P}b)) = (-1)^{|a||b|}$ für $a,b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_a a = |a|a$ und $\deg_a b = |b|b$ für das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ in den Beweis ein. Weiter schreiben wir $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ als $c = \frac{[\omega]}{\nu} + c_{\geq 0}$, wobei aufgrund der Voraussetzungen $\mathrm{P}c_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ und $\mathrm{C}c_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ gilt. Sei nun $R(c_{\geq 0})$ ein Repräsentant der Klasse $c_{\geq 0}$, dann definieren wir $\Omega := \frac{\nu}{4}(\mathrm{id}-\mathrm{P})(\mathrm{id}-\mathrm{C})R(c_{\geq 0})$. Wegen $\mathrm{P}^2 = \mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$, $\mathrm{P}\nu = \mathrm{C}\nu = -\nu$ und $\mathrm{PC} = \mathrm{CP}$ gilt dann offensichtlich $\mathrm{P}\Omega = \mathrm{C}\Omega = \Omega$. Zudem erhält man $\frac{1}{\nu}[\Omega] = \frac{1}{4}(c_{\geq 0} - \mathrm{P}c_{\geq 0} - \mathrm{C}c_{\geq 0} + \mathrm{PC}c_{\geq 0}) = c_{\geq 0}$, indem man die Gleichungen $\mathrm{P}c_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ und $\mathrm{C}c_{\geq 0} = -c_{\geq 0}$ verwendet. Darüberhinaus sei $u \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(u) = 0$ und wir definieren $s := \frac{1}{4}(\mathrm{id}+\mathrm{P})(\mathrm{id}+\mathrm{C})$, so daß $\mathrm{P}s = \mathrm{C}s = s$ erfüllt ist. Aus einem beliebigen symplektischen, torsionsfreien Zusammenhang und den so vorgegebenen Daten s, Ω erhalten wir dann ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$. Wie in den Beweisen zu den Propositionen 2.4.8 und 2.4.34 zeigt man dann, daß $\mathrm{C}r_{\mathrm{F}} = \mathrm{P}r_{\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}}$, so daß die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ sowohl mit C als auch mit P kommutiert. Also erhalten wir wieder für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Gleichungen $\mathrm{C}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{C}f)$ und $\mathrm{P}\tau_{\mathrm{F}}(f) = \tau_{\mathrm{F}}(\mathrm{P}f)$, mit denen man aber die Gültigkeit der behaupteten Gleichungen für $*_{\mathrm{F}}$ genauso wie in den Beweisen zu den Propositionen 2.4.8 und 2.4.34 nachweist. Weiter gilt mit dem oben definierten Ω nach Satz 2.3.18 $c(*_{\mathrm{F}}) = c$ und die Proposition ist bewiesen. □

Schließlich beweisen wir noch, daß es für äquivalente Sternprodukte vom Weyl-Typ immer Äquivalenztransformationen gibt, die sowohl mit C als auch mit P verträglich sind.

Proposition 2.4.40 ([87, Prop. 5.6 iii.)]) *Seien* $\star_1$ *und* $\star_2$ *zwei Sternprodukte vom Weyl-Typ für* (M,ω) *mit* $c(\star_1) = c(\star_2)$, *dann existiert eine Äquivalenztransformation* $\mathcal{T}$ *mit* $\mathcal{T}(f \star_1 g) = (\mathcal{T}f) \star_2 (\mathcal{T}g)$ *für alle* $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, *die*

$$\mathcal{T}^{-1}\mathrm{C}\mathcal{T} = \mathrm{C} \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{T}^{-1}\mathrm{P}\mathcal{T} = \mathrm{P} \tag{2.108}$$

erfüllt, also ist $\mathcal{T}$ *eine reelle nur von geraden Potenzen von* ν *abhängige Äquivalenztransformation.*

Beweis: Wegen $c(\star_1) = c(\star_2)$ existiert eine Äquivalenztransformation T von $\star_1$ nach $\star_2$. Unter Benutzung dieser Äquivalenztransformation erhält man nach Proposition 2.4.9 und Proposition 2.4.35 zwei weitere Äquivalenztransformationen $\mathcal{S}_1 = T\mathcal{A}_1^{1/2}$ und $\mathcal{S}_2 = T\mathcal{A}_2^{1/2}$, die $\mathrm{C}\mathcal{S}_1\mathrm{C} = \mathcal{S}_1$ und $\mathrm{P}\mathcal{S}_2\mathrm{P} = \mathcal{S}_2$ erfüllen, wobei $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ Automorphismen von $\star_1$ sind, die durch $\mathrm{C}T\mathrm{C} = T\mathcal{A}_1$ und $\mathrm{P}T\mathrm{P} = T\mathcal{A}_2$ gegeben sind und $\mathrm{C}\mathcal{A}_1^t\mathrm{C} = \mathcal{A}_1^{-t}$ bzw. $\mathrm{P}\mathcal{A}_2^t\mathrm{P} = \mathcal{A}_2^{-t}$ erfüllen. Im allgemeinen erfüllt weder $\mathcal{S}_1$ die Gleichung $\mathrm{P}\mathcal{S}_1\mathrm{P} = \mathcal{S}_1$ noch $\mathcal{S}_2$ die Gleichung $\mathrm{C}\mathcal{S}_2\mathrm{C} = \mathcal{S}_2$. Aber durch eine analoge Vorgehensweise zu den Beweisen der Propositionen 2.4.9 und 2.4.35 können $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ so modifiziert werden, daß die resultierenden Äquivalenztransformationen die gewünschten Eigenschaften besitzen. Da P mit C kommutiert gilt $\mathrm{CP}T\mathrm{PC} = \mathrm{PC}T\mathrm{CP}$, woraus wir mit den Definitionen von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$

$$\mathrm{C}T\mathcal{A}_2\mathrm{C} = \mathrm{P}T\mathcal{A}_1\mathrm{P} \quad \text{bzw.} \quad T\mathcal{A}_1\mathrm{C}\mathcal{A}_2\mathrm{C} = T\mathcal{A}_2\mathrm{P}\mathcal{A}_1\mathrm{P}$$

also $\mathcal{A}_1 \mathrm{C} \mathcal{A}_2 \mathrm{C} = \mathcal{A}_2 \mathrm{P} \mathcal{A}_1 \mathrm{P}$ erhalten, was sich als für den Beweis essentielle Gleichung erweisen wird. Nun berechnen wir $\mathrm{C}\mathcal{S}_2\mathrm{C} = \mathrm{C}T\mathrm{C}\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C} = T\mathcal{A}_1\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C} = \mathcal{S}_2\mathcal{A}_2^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C} = \mathcal{S}_2\mathcal{F}_2$, wobei wieder $\mathcal{F}_2 := \mathcal{A}_2^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C}$ ein Automorphismus von $\star_1$ ist, der mit id beginnt, also gilt $\mathcal{F}_2 = \exp(\nu \mathsf{D}_2)$ wobei D_2 eine Derivation von $\star_1$ ist. Wie im Beweis von Proposition 2.4.9 erhält man $\mathcal{F}_2\mathrm{C}\mathcal{F}_2\mathrm{C} = \mathrm{id}$ und $\mathcal{T}_2 := \mathcal{S}_2\mathcal{F}_2^{1/2}$, wobei $\mathcal{F}_2^t := \exp(t\nu\mathsf{D}_2)$, ist eine Äquivalenztransformation von $\star_1$ nach $\star_2$, die $\mathrm{C}\mathcal{T}_2\mathrm{C} = \mathcal{T}_2$ erfüllt. Es bleibt also zu zeigen, daß $\mathcal{T}_2$ auch $\mathrm{P}\mathcal{T}_2\mathrm{P} = \mathcal{T}_2$ erfüllt. Hierzu berechnen wir $\mathrm{P}\mathcal{F}_2\mathrm{P}$ unter Verwendung von $\mathcal{A}_1\mathrm{C} = \mathcal{A}_2\mathrm{P}\mathcal{A}_1\mathrm{P}\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\mathcal{F}_2\mathrm{P} &= \mathrm{P}\mathcal{A}_2^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C}\mathrm{P} = \mathrm{P}\mathcal{A}_2^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathrm{P}\mathcal{A}_1\mathrm{P}\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C}\mathrm{P} = \mathrm{P}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{P}\mathcal{A}_1\mathrm{P}\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{-1/2}\mathrm{C}\mathrm{P} \\
&= \mathcal{A}_2^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathrm{C}\mathcal{A}_2^{1/2}\mathrm{C} = \mathcal{F}_2.
\end{aligned}
$$

Also erhalten wir mit $\mathcal{F}_2 = \exp(\nu\mathsf{D}_2)$ die Gleichung $\mathrm{P}\mathsf{D}_2\mathrm{P} = -\mathsf{D}_2$ und folglich $\mathrm{P}\mathcal{F}_2^t\mathrm{P} = \mathcal{F}_2^t$. Somit finden wir $\mathrm{P}\mathcal{T}_2\mathrm{P} = \mathrm{P}\mathcal{S}_2\mathrm{P}\mathrm{P}\mathcal{F}_2^{1/2}\mathrm{P} = \mathcal{S}_2\mathcal{F}_2^{1/2} = \mathcal{T}_2$, womit wir eine Äquivalenztransformation $\mathcal{T}_2$ gefunden haben, die die behaupteten Eigenschaften besitzt. In analoger Vorgehensweise kann man auch die Äquivalenztransformation $\mathcal{S}_1$ modifizieren, um eine Aquivalenztransformation $\mathcal{T}_1 := \mathcal{S}_1\mathcal{F}_1^{1/2}$ zu erhalten, die ebenfalls die behaupteten Eigenschaften besitzt. Hierbei ist $\mathcal{F}_1 := \mathcal{A}_1^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathrm{P}\mathcal{A}_1^{1/2}\mathrm{P} = \exp(\nu\mathsf{D}_1)$ wiederum ein Automorphismus von $\star_1$, der $\mathrm{C}\mathcal{F}_1\mathrm{C} = \mathcal{F}_1$ erfüllt und $\mathcal{F}_1^t := \exp(t\nu\mathsf{D}_1)$. □

Kapitel 3

Sternprodukte vom Wick-Typ auf Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten und deren Klassifikation

3.1 Geometrie von Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine kurze Einführung in die Differentialgeometrie von Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten zu geben, die die Aspekte Semi-Riemannscher, komplexer und symplektischer Geometrie miteinander vereinen. Insbesondere führen wir alle für das gesamte Kapitel wichtigen geometrischen Größen und Notationen ein. Wir beschränken uns hierbei auf eine Darstellung der für uns wichtigen Tatsachen und Aussagen und verweisen für Beweise und eine ausführliche Einführung in diesen Bereich der Differentialgeometrie auf [73, II Chap. 9].

3.1.1 Die komplexe Struktur

Die Grundlage der komplexen Differentialgeometrie bildet der Begriff der komplexen Struktur. Sei M eine reelle $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann heißt ein Schnitt $I \in \Gamma^\infty(TM \otimes T^*M) \cong \Gamma^\infty(\mathsf{End}(TM))$ eine fast-komplexe Struktur, wenn $I^2 = -\mathrm{id}$ gilt. Mit dieser fast-komplexen Struktur I definiert man für Vektorfelder $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ durch $N_I(X,Y) := [IX, IY] - [X,Y] - I[IX,Y] - I[X,IY]$ die Nijenhuis-Torsion $N_I \in \Gamma^\infty(TM \otimes T^*M \otimes T^*M)$ von I. Verschwindet die Nijenhuis-Torsion, so heißt I komplexe Struktur und nach dem Satz von Newlander-Nirenberg existiert eine eindeutige komplexe Struktur auf M, d.h. M ist eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}}(M) = n$, so daß die fast-komplexe Struktur I mit der induzierten kanonischen komplexen Struktur der komplexen Mannigfaltigkeit übereinstimmt (vgl. [73, II Appendix 8]). Eine komplexe Mannigfaltigkeit ist hierbei eine Mannigfaltigkeit, die einen Atlas aus holomorphen Karten besitzt, d.h. alle Kartenwechsel, die Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}^n$ sind, sind holomorph. Eine solche komplexe Mannigfaltigkeit besitzt dann eine induzierte kanonische komplexe Struktur I. Sei dazu eine holomorphe Karte gegeben, die man mit $z^k = x^k + \mathrm{i}y^k$ in ihren Real- und Imaginärteil zerlegt, dann definiert man eine komplexe Struktur von M durch $I(\partial_{x^k}) := \partial_{y^k}$ und $I(\partial_{y^k}) := -\partial_{x^k}$ und man kann zeigen, daß hiermit eine von der Koordinatenwahl unabhängig erklärte komplexe Struktur definiert ist (vgl. [112, Prop. 3.4]).

Mit Hilfe einer fast-komplexen Struktur I auf einer reellen $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit können einige weitere für das folgende Kapitel wichtige Begriffe definiert werden. Offensichtlich besitzt der Bündel-Isomorphismus I des komplexifizierten Tangentialbündels TM die (faserweisen) Eigenwerte $\pm\mathrm{i}$ und man bezeichnet mit $TM^{1,0}$ das Bündel der $+\mathrm{i}$-Eigenräume und mit $TM^{0,1}$

das Bündel der $-\mathrm{i}$-Eigenräume. Offensichtlich ist dann $TM = TM^{1,0} \oplus TM^{0,1}$ und alle Schnitte $X \in \Gamma^\infty(TM)$ lassen sich eindeutig in je einen Schnitt $X^{1,0} \in \Gamma^\infty(TM^{1,0})$ vom Typ $(1,0)$ und einen Schnitt $X^{0,1} \in \Gamma^\infty(TM^{0,1})$ vom Typ $(0,1)$ zerlegen. Ferner betrachten wir die jeweiligen dualen Bündel $T^*M^{1,0}$ und $T^*M^{0,1}$, für die dann $T^*M = T^*M^{1,0} \oplus T^*M^{0,1}$ gilt und somit jeder Schnitt $\alpha \in \Gamma^\infty(T^*M)$ eindeutig in je einen Schnitt vom Typ $(1,0)$ und vom Typ $(0,1)$ zerlegt werden kann. Diese Zerlegungen übertragen sich nun natürlich auch auf die Schnitte $T \in \Gamma^\infty(\bigvee^s T^*M)$ und $\beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{a'} T^*M)$, so daß wir

$$\Gamma^\infty(\textstyle\bigwedge T^*M) = \displaystyle\bigoplus_{a'=0}^{2n} \bigoplus_{p'+q'=a'} \Gamma^\infty(\textstyle\bigwedge^{p',q'} T^*M) \tag{3.1}$$

erhalten, wobei wir mit $\bigwedge^{p',q'} T^*M$ das Bündel mit der charakteristischen Faser $\bigwedge^{p',q'} T_x^*M$, $x \in M$ bezeichnen, und $\bigwedge^{p',q'} T_x^*M$ der Unterraum von $\bigwedge^{a'} T_x^*M$ mit $a' = p' + q'$ sei, der durch Elemente der Gestalt $v \wedge w$ mit $v \in \bigwedge^{p'} T_x^*M^{1,0}$ und $w \in \bigwedge^{q'} T_x^*M^{0,1}$ erzeugt wird. Mit $\pi^{p',q'}$ bezeichnen wir die natürlichen Projektionen

$$\pi^{p',q'} : \Gamma^\infty(\textstyle\bigwedge^{a'} T^*M) \to \Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'} T^*M), \text{ wobei } a' = p' + q',$$

die wir durch die direkte Summenzerlegung (3.1) erhalten. Ferner setzen wir diese Projektionen zu Abbildungen auf $\Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)$ durch $\pi^{p',q'}(\beta) := 0$ für $\beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{a'} T^*M)$ mit $a' \neq p' + q'$ fort. Schnitte $\beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'} T^*M)$ nennen wir vom Typ (p',q').

Analog erhalten wir

$$\mathsf{X}_{s=0}^\infty \Gamma^\infty(\textstyle\bigvee^s T^*M) = \mathsf{X}_{s=0}^\infty \displaystyle\bigoplus_{p+q=s} \Gamma^\infty(\textstyle\bigvee^{p,q} T^*M), \tag{3.2}$$

wobei wir mit $\bigvee^{p,q} T^*M$ das Bündel mit der charakteristischen Faser $\bigvee^{p,q} T_x^*M$, $x \in M$ bezeichnen, und $\bigvee^{p,q} T_x^*M$ der Unterraum von $\bigvee^s T_x^*M$ mit $s = p + q$ sei, der durch Elemente der Gestalt $v \vee w$ mit $v \in \bigvee^p T_x^*M^{1,0}$ und $w \in \bigvee^q T_x^*M^{0,1}$ erzeugt wird. Ferner induziert auch hier die Zerlegung (3.2) natürliche Projektionen $\pi^{p,q}$ durch

$$\pi^{p,q} : \Gamma^\infty(\textstyle\bigvee^s T^*M) \to \Gamma^\infty(\bigvee^{p,q} T^*M), \text{ wobei } s = p + q.$$

Diese Projektionen setzen wir zu Abbildungen auf $\mathsf{X}_{s=0}^\infty \Gamma^\infty(\bigvee^s T^*M)$ fort, indem wir $\pi^{p,q}(T) := 0$ für $T \in \Gamma^\infty(\bigvee^s T^*M)$ mit $s \neq p + q$ definieren. Schnitte $T \in \Gamma^\infty(\bigvee^{p,q} T^*M)$ nennen wir vom Typ (p,q).

Auf einer komplexen Mannigfaltigkeit mit der induzierten kanonischen komplexen Struktur I kann man in einer holomorphen Karte die lokalen Basis-Vektorfelder

$$Z_k := \partial_{z^k} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x^k} - \mathrm{i}\partial_{y^k}\right) \in \Gamma^\infty(TM^{1,0}) \qquad \text{und} \qquad \overline{Z}_k := \partial_{\overline{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\partial_{x^k} + \mathrm{i}\partial_{y^k}\right) \in \Gamma^\infty(TM^{0,1})$$

und die zugehörigen lokalen dualen Basis-Einsformen

$$dz^k := dx^k + \mathrm{i}dy^k \in \Gamma^\infty(T^*M^{1,0}) \qquad \text{und} \qquad d\overline{z}^k := dx^k - \mathrm{i}dy^k \in \Gamma^\infty(T^*M^{0,1})$$

definieren.

Weiter kann auf einer komplexen Mannigfaltigkeit mit der induzierten kanonischen komplexen Struktur I zusätzlich zu den obigen Zerlegungen, die nur eine fast-komplexe Struktur voraussetzen, die äußere Ableitung d auf den Differentialformen als $d = \partial + \overline{\partial}$ geschrieben werden. Hierbei sind $\partial : \Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'} T^*M) \to \Gamma^\infty(\bigwedge^{p'+1,q'} T^*M)$ und $\overline{\partial} : \Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'} T^*M) \to \Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'+1} T^*M)$ auf den Schnitten vom Typ (p',q') $\Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'} T^*M)$ durch $\partial = \pi^{p'+1,q'} d$ und $\overline{\partial} = \pi^{p',q'+1} d$ und durch $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung auf $\Gamma^\infty(\bigwedge T^*M)$ erklärt. Es gilt dann

$$\partial^2 = \overline{\partial}^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial\overline{\partial} = -\overline{\partial}\partial.$$

3.1.2 Der Semi-Kähler-Zusammenhang und dessen Krümmungsgrößen

Wir wollen nun zunächst definieren, was man unter einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit versteht und aufzeigen inwiefern diese Elemente der Semi-Riemannschen, der komplexen und der symplektischen Geometrie vereint. Zunächst sei (M, I) wieder eine $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit.

Eine Semi-Riemannsche Metrik g auf (M, I) heißt Hermitesch, falls die fast-komplexe Struktur eine Isometrie von g ist, d.h. für alle $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ gilt

$$g(IX, IY) = g(X, Y).$$

Die Semi-Riemannsche Metrik heißt Semi-Kählersch, wenn die fast-komplexe Struktur zusätzlich bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs von g kovariant konstant ist, d.h. $\nabla I = 0$ gilt. Ist g eine Hermitesche Semi-Riemannsche Metrik auf (M, I), so definiert

$$\omega(X, Y) := g(IX, Y)$$

für $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ eine nicht ausgeartete Zweiform $\omega \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 T^*M)$ und es gelten dann folgende Äquivalenzen [73, Chap. 9 Thm. 4.3]:

$$\nabla\omega = 0 \iff \nabla I = 0 \iff d\omega = 0 \text{ und } N_I = 0.$$

Somit ist nach dem Satz von Newlander-Nirenberg jede Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit eine komplexe Mannigfaltigkeit, deren kanonische komplexe Struktur mit I übereinstimmt und eine symplektische Mannigfaltigkeit, da die oben definierte Zweiform ω nicht ausgeartet und geschlossen ist. Ferner ist der Levi-Civita-Zusammenhang (dieser ist torsionsfrei) der Semi-Riemannschen Metrik g ein symplektischer, torsionsfreier Zusammenhang auf (M, ω), diesen bezeichnet man als Semi-Kähler-Zusammenhang. Im weiteren bezeichnen wir eine Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit mit (M, ω, I).

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch die für uns wichtigen geometrischen Objekte in lokalen Koordinaten angeben; insbesondere benötigen wir im weiteren einige Aussagen über die Gestalt der Christoffelsymbole und des Krümmungstensors des Semi-Kähler-Zusammenhangs.

Da die Semi-Riemannsche Metrik Hermitesch ist, folgt unmittelbar, daß sowohl g als auch ω vom Typ $(1, 1)$ sind, so daß in einer holomorphen Karte von M

$$\omega = \frac{\mathrm{i}}{2} g_{k\overline{l}} dz^k \wedge d\overline{z}^l$$

mit der Hermiteschen ($\overline{g_{k\overline{l}}} = g_{\overline{k}l} = g_{l\overline{k}}$) nicht ausgearteten Matrix $g_{k\overline{l}} = 2g(Z_k, \overline{Z}_l)$ gilt. Da die komplexe Struktur kovariant konstant bezüglich dem Semi-Kähler-Zusammenhang ist, erhalten wir wegen $IZ_k = \mathrm{i}Z_k$ und $I\overline{Z}_k = -\mathrm{i}\overline{Z}_k$ weiter:

$$\nabla_{Z_k} Z_m = \Gamma^r_{km} Z_r, \qquad \nabla_{\overline{Z}_k} \overline{Z}_m = \Gamma^{\overline{r}}_{\overline{k}\overline{m}} \overline{Z}_r, \qquad \nabla_{Z_m} \overline{Z}_l = \nabla_{\overline{Z}_l} Z_m = 0,$$

so daß die einzig nichtverschwindenden Christoffelsymbole durch Γ^r_{km} und $\Gamma^{\overline{r}}_{\overline{k}\overline{m}}$ gegeben sind, die wegen der Torsionsfreiheit von ∇ in den unteren Indizes symmetrisch sind. Explizit sind diese Christoffelsymbole durch die Gleichungen

$$Z_k(g_{m\overline{n}}) = g_{l\overline{n}} \Gamma^l_{km} \qquad \text{und} \qquad \overline{Z}_l(g_{m\overline{n}}) = g_{m\overline{t}} \Gamma^{\overline{t}}_{\overline{l}\overline{n}}$$

bestimmt, die man erhält, indem man $\nabla g = 0$ verwendet. Ferner erhält man, daß die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Krümmungstensors von ∇ durch

$$R(Z_k, \overline{Z}_l) Z_m = R^n_{\;mk\overline{l}} Z_n \qquad \text{und} \qquad R(Z_k, \overline{Z}_l) \overline{Z}_n = R^{\overline{t}}_{\;\overline{n}k\overline{l}} \overline{Z}_t$$

gegeben sind. Mit den Komponenten $R_{i\overline{j}} = R^t_{ti\overline{j}}$ des Ricci-Tensors definiert die Ricci-Form

$$\rho := -\frac{\mathrm{i}}{2} R_{i\overline{j}} dz^i \wedge d\overline{z}^j \tag{3.3}$$

eine geschlossene Zweiform vom Typ $(1,1)$ auf M.

3.2 Die Fedosov-Konstruktion mit faserweisem Wick-Produkt

In diesem Abschnitt betrachten wir die Fedosov-Konstruktion für eine Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M,ω,I) mit dem faserweisen Wick-Produkt. Unser Ziel hierbei ist es, die von M. Bordemann und S. Waldmann in [20] angegebene Konstruktion so weit zu verallgemeinern, daß es möglich ist, mit der von uns angegebenen Konstruktion alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit zu erhalten. Im folgenden Abschnitt geben wir im wesentlichen an, welche Strukturen wir zur Anwendung der allgemeinen Fedosov-Konstruktion gemäß Abschnitt 1.3 in dieser spezielleren geometrischen Situation benutzen. Im anschließenden Abschnitt ziehen wir einige erste Konsequenzen aus der Präsenz der komplexen Struktur, die einige spezielle Eigenschaften der Fedosov-Derivation und der entsprechenden Taylor-Reihe zur Folge haben. Die dort dargestellten Ergebnisse werden für die eindeutige Charakterisierung der Sternprodukte vom Wick-Typ in Abschnitt 3.4 noch von Bedeutung sein.

3.2.1 Die Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und die Taylor-Reihe τ_{Wick}

In diesem Abschnitt betrachten wir die Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M,ω,I), die bis auf die verallgemeinerte Normierungsbedingung und auf die zusätzliche Abhängigkeit von einer formalen Reihe geschlossener Zweiformen auf M mit der in [20] angegebenen übereinstimmt. Die letztgenannte Verallgemeinerung erweist sich hierbei als essentiell dafür, zeigen zu können, daß diese Konstruktion in dem Sinn universell ist, daß man mit ihr alle Sternprodukte vom Wick-Typ (vgl. Definition 3.4.1) erhält.

Wir gehen aus von der Algebra $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ_{\mathrm{Wick}})$, wobei $\circ_{\mathrm{Wick}}$ für $a,b\in\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ durch

$$a \circ_{\mathrm{Wick}} b := \mu \circ \exp\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{k\overline{l}} i_s(Z_k) \otimes i_s(\overline{Z}_l)\right)(a\otimes b) \tag{3.4}$$

gegeben sei und $\frac{2}{\mathrm{i}} g^{k\overline{l}}$ die Komponenten des zu ω gehörenden Poisson-Tensors $\Lambda = \frac{2}{\mathrm{i}} g^{k\overline{l}} Z_k \wedge \overline{Z}_l$ mit $g^{k\overline{l}} g_{n\overline{l}} = \delta^k_n$ in einer holomorphen Karte bezeichne. Dieses faserweise Produkt ist gemäß [20, Lemma 2.1] mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ durch die faserweise Äquivalenztransformation

$$\mathcal{S} := \exp\left(\frac{\nu}{\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}}\right) \qquad \text{mit} \qquad \Delta'_{\mathrm{fib}} := g^{k\overline{l}} i_s(Z_k) i_s(\overline{Z}_l) \tag{3.5}$$

verknüpft, d.h. für alle $a,b\in\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt

$$\mathcal{S}(a\circ_{\mathrm{F}} b) = (\mathcal{S}a)\circ_{\mathrm{Wick}}(\mathcal{S}b). \tag{3.6}$$

Weiter sei ∇ der in Abschnitt 3.1.2 betrachtete Semi-Kähler-Zusammenhang, der wie wir gesehen haben torsionsfrei, symplektisch und Semi-Riemannsch ist. Für diesen Zusammenhang betrachten wir die Abbildung $\nabla = (1\otimes dx^i)\nabla_{\partial_i}$, die wir wieder mit demselben Symbol bezeichnen. Offensichtlich ist ∇ wegen der Symplektizität eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1, so daß $\mathcal{S}\nabla\mathcal{S}^{-1}$ wegen (3.6) eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 ist. Wegen $[\nabla,\Delta'_{\mathrm{fib}}] = 0$, was man direkt mit den Eigenschaften des Semi-Kähler-Zusammenhangs nachweisen kann, gilt aber $\mathcal{S}\nabla\mathcal{S}^{-1} = \nabla$, so daß ∇ selbst eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 ist. Weiter ist wegen der Torsionsfreiheit des Zusammenhangs $[\delta, \nabla] = 0$ und mit $R = \frac{1}{4}\omega_{it}R^t_{jkl}dx^i \vee dx^j \otimes dx^k \wedge dx^l$ erhalten wir $\nabla^2 = \mathcal{S}\nabla^2\mathcal{S}^{-1} = -\frac{1}{\nu}\mathcal{S}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(R)\mathcal{S}^{-1} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}R) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(R)$. Hierbei haben wir verwendet, daß $\mathcal{S}R = R + \frac{\nu}{\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}}R$ und daß $\Delta'_{\mathrm{fib}}R$ wegen $\deg_s(\Delta'_{\mathrm{fib}}R) = 0$ zentral ist. Also stimmt das Element $R \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^2(M)$ für diese Situation mit dem bei der Konstruktion mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ verwendeten überein und wir wissen $\delta R = \nabla R = 0$, da ∇ torsionsfrei ist. In einer holomorphen Karte erhält man für R folgenden Ausdruck $R = \frac{\mathrm{i}}{2}g_{k\bar{t}}R^{\bar{t}}_{\bar{l}i\bar{j}}dz^k \vee d\bar{z}^l \otimes dz^i \wedge d\bar{z}^j$. Somit erfüllt die mit dem Semi-Kähler-Zusammenhang definierte Abbildung ∇ alle Voraussetzungen, um mit Satz 1.3.3 eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivation vom antisymmetrischen Grad 1 mit Quadrat Null zu konstruieren. Für alle formalen Reihen geschlossener Zweiformen $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty}\nu^i\Omega_i$ und alle $s \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(s) = 0$ existiert dann nach Satz 1.3.3 ein eindeutig bestimmtes Element $r_{\mathrm{Wick}} \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ derart, daß

$$\delta r_{\mathrm{Wick}} = \nabla r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}r_{\mathrm{Wick}}\circ_{\mathrm{Wick}}r_{\mathrm{Wick}} + R + 1\otimes\Omega \qquad \text{und} \qquad \delta^{-1}r_{\mathrm{Wick}} = s \tag{3.7}$$

und r_{Wick} läßt sich aus der Gleichung

$$r_{\mathrm{Wick}} = \delta s + \delta^{-1}\left(\nabla r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}r_{\mathrm{Wick}}\circ_{\mathrm{Wick}}r_{\mathrm{Wick}} + R + 1\otimes\Omega\right) \tag{3.8}$$

rekursiv bestimmen. In diesem Fall ist die Fedosov-Derivation

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} = -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}) \tag{3.9}$$

eine Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 bezüglich $\circ_{\mathrm{Wick}}$ und es gilt ${\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}}^2 = 0$. Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ existiert dann nach Satz 1.3.5 die zugehörige Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}}(f)$, die wir kurz mit $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ bezeichnen wollen, und die mit

$$\begin{aligned} \tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(0)} &= f \\ \tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(k+1)} &= \delta^{-1}\left(\nabla\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(k)} - \frac{1}{\nu}\sum_{l=0}^{k-1}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}({r_{\mathrm{Wick}}}^{(l+2)})\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(k-l)}\right) \end{aligned} \tag{3.10}$$

rekursiv bestimmt werden kann. Ebenfalls nach Satz 1.3.5 existiert das induzierte assoziative Produkt $*_{\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}}$ auf $\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, das wir kurz mit $*_{\mathrm{Wick}}$ bezeichnen wollen, welches nach Satz 1.3.15 ein Sternprodukt ist. Ferner erfüllt die Abbildung ∇ die Voraussetzungen von Satz 1.3.13, so daß $*_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Vey-Typ ist. Auch hier handelt es sich genau genommen um eine ganze Schar von Sternprodukten, die zunächst von den Wahlen von Ω und s abhängen. Wir wollen nun ausdrücklich betonen, daß die Bezeichnung $*_{\mathrm{Wick}}$ zunächst einmal nur bedeuten soll, daß das Sternprodukt aus dem faserweisen Wick-Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ konstruiert wurde. Es ist nämlich keinesfalls richtig, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ für beliebige Wahlen von Ω und s immer ein Sternprodukt vom Wick-Typ (vgl. Definition 3.4.1) ist. Ob und unter welchen Voraussetzungen dies tatsächlich der Fall ist, werden wir in Abschnitt 3.4 noch genau analysieren.

3.2.2 Konsequenzen der komplexen Struktur

Die in Abschnitt 3.1.1 dargestellten Fakten, die sich aus der Präsenz der komplexen Struktur I ergeben, ermöglichen es uns nun auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ weitere Abbildungen und Gradierungen einzuführen, die für eine detaillierte Analyse der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ notwendig sein werden. Dieser eher technische Abschnitt stellt hierbei die wesentlichen Grundlagen für die folgenden Abschnitte des Kapitels zusammen.

Für alle $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$ definieren wir die Abbildungen $\pi_s^{p,q}, \pi_a^{p',q'} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ auf faktorisierten Schitten $T \otimes \beta \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ durch

$$\pi_s^{p,q}(T \otimes \beta) := (\pi^{p,q}T) \otimes \beta \qquad \text{und} \qquad \pi_a^{p',q'}(T \otimes \beta) := T \otimes (\pi^{p',q'}\beta) \tag{3.11}$$

und erweitern diese linear zu Abbildungen auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$.

Mit Hilfe dieser Abbildungen definieren wir weiter die Projektionen auf den jeweils holomorphen bzw. antiholomorphen Anteil im symmetrischen und antisymmetrischen Anteil von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ durch

$$\pi_{s,z} := \sum_{p=0}^{\infty} \pi_s^{p,0} \qquad \text{bzw.} \qquad \pi_{s,\overline{z}} := \sum_{q=0}^{\infty} \pi_s^{0,q} \tag{3.12}$$

und

$$\pi_{a,z} := \sum_{p'=0}^{\dim_{\mathbb{R}}(M)} \pi_a^{p',0} \qquad \text{bzw.} \qquad \pi_{a,\overline{z}} := \sum_{q'=0}^{\dim_{\mathbb{R}}(M)} \pi_a^{0,q'}. \tag{3.13}$$

Aus diesen Projektionen wiederum erhält man weiter die Projektionen auf den sowohl im antisymmetrischen als auch im symmetrischen Anteil von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ rein holomorphen bzw. antiholomorphen Anteil durch

$$\pi_z := \pi_{s,z}\pi_{a,z} = \pi_{a,z}\pi_{s,z} \qquad \text{bzw.} \qquad \pi_{\overline{z}} := \pi_{s,\overline{z}}\pi_{a,\overline{z}} = \pi_{a,\overline{z}}\pi_{s,\overline{z}}. \tag{3.14}$$

Wir fassen nun einige Eigenschaften der definierten Projektionen zusammen:

Lemma 3.2.1 *Die in den Gleichungen (3.12), (3.13) und (3.14) definierten Abbildungen sind Projektionen d.h. es gilt $\pi_{s,z}\pi_{s,z} = \pi_{s,z}$, $\pi_{a,z}\pi_{a,z} = \pi_{a,z}$, $\pi_{s,\overline{z}}\pi_{s,\overline{z}} = \pi_{s,\overline{z}}$, $\pi_{a,\overline{z}}\pi_{a,\overline{z}} = \pi_{a,\overline{z}}$ und somit auch $\pi_z\pi_z = \pi_z$ und $\pi_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}} = \pi_{\overline{z}}$. Ferner sind diese Projektionen Homomorphismen des undeformierten Produktes auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$. Zusätzlich sind $\pi_{a,z}$ und $\pi_{a,\overline{z}}$ Homomorphismen des faserweisen Wick-Produktes $\circ_{\mathrm{Wick}}$. Für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gelten weiter die Gleichungen*

$$\pi_{s,z}(a\circ_{\mathrm{Wick}}b) = \pi_{s,z}((\pi_{s,z}a)\circ_{\mathrm{Wick}}b) \qquad \textit{und} \qquad \pi_{s,\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}b) = \pi_{s,\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{s,\overline{z}}b)) \tag{3.15}$$

und

$$\pi_z(a\circ_{\mathrm{Wick}}b) = \pi_z((\pi_z a)\circ_{\mathrm{Wick}}b) \qquad \textit{und} \qquad \pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}b) = \pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}b)). \tag{3.16}$$

Beweis: Der Nachweis dafür, daß die betrachteten Abbildungen Projektionen sind, ist trivial und folgt direkt aus deren Definitionen. Ferner ist direkt aus den Definitionen offensichtlich, daß diese Abbildungen Homomorphismen des undeformierten Produktes sind. Da das faserweise Wick-Produkt den antisymmetrischen Tensorfaktor unberührt läßt, ist aber auch klar, daß $\pi_{a,z}$ und $\pi_{a,\overline{z}}$ Homomorphismen des Produktes $\circ_{\mathrm{Wick}}$ sind. Da die Projektion $\pi_{s,z}$ mit symmetrischen Einsetzabbildungen $i_s(Z_l)$ vertauscht und die Projektion $\pi_{s,\overline{z}}$ mit symmetrischen Einsetzabbildungen $i_s(\overline{Z}_k)$ vertauscht, folgen die Gleichungen (3.15) direkt aus der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{Wick}}$ unter Verwendung der Tatsachen, daß beide Abbildungen Projektionen und Homomorphismen des undeformierten Produktes sind. Schließlich folgt hieraus aber auch (3.16), da $\pi_{a,z}$ und $\pi_{a,\overline{z}}$ Homomorphismen des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{Wick}}$ sind. $\square$

Auf einem faktorisierten Schnitt $F = T \otimes \beta$ mit $T \in \Gamma^\infty(\bigvee^{p,q}T^*M)$ und $\beta \in \Gamma^\infty(\bigwedge^{p',q'}T^*M)$ definieren wir die folgenden Grad-Abbildungen $\deg_{s,z}, \deg_{s,\overline{z}}, \deg_{a,z}, \deg_{a,\overline{z}}$ durch

$$\deg_{s,z} F := pF, \quad \deg_{s,\overline{z}} F := qF, \quad \deg_{a,z} F := p'F, \quad \deg_{a,\overline{z}} F := q'F$$

und erweitern linear zu Abbildungen

$$\deg_{s,z}, \deg_{s,\overline{z}}, \deg_{a,z}, \deg_{a,\overline{z}} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M).$$

Offensichtlich sind diese Grad-Abbildungen Derivationen bezüglich des undeformierten Produktes auf $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ und es gilt $\deg_s = \deg_{s,z} + \deg_{s,\overline{z}}, \deg_a = \deg_{a,z} + \deg_{a,\overline{z}}$. Auf die entsprechenden Grade beziehen wir uns als symmetrischen holomorphen bzw. antiholomorphen, antisymmetrischen holomorphen bzw. antiholomorphen Grad. Einen Endomorphismus E nennen wir (homogen) vom symmetrischen holomorphen Grad s_z bzw. symmetrischen antiholomorphen Grad $s_{\overline{z}}$ und vom antisymmetrischen holomorphen Grad a_z bzw. antisymmetrischen antiholomorphen Grad $a_{\overline{z}}$, falls für F wie oben definiert gilt, daß

$$
\begin{aligned}
\deg_{s,z}(EF) &= (s_z + p)EF, &\qquad \deg_{s,\overline{z}}(EF) &= (s_{\overline{z}} + q)EF,\\
\deg_{a,z}(EF) &= (a_z + p')EF, &\qquad \deg_{a,\overline{z}}(EF) &= (a_{\overline{z}} + q').
\end{aligned}
$$

Ferner sind die Grad-Abbildungen $\mathrm{Deg}_z := \deg_{s,z} + \deg_\nu$ und $\mathrm{Deg}_{\overline{z}} := \deg_{s,\overline{z}} + \deg_\nu$ Derivationen bezüglich $\circ_{\mathrm{Wick}}$ und es gilt $\mathrm{Deg} = \mathrm{Deg}_z + \mathrm{Deg}_{\overline{z}}$, was man sich anhand der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{Wick}}$ leicht klar macht.

Die komplexe Struktur I der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) erlaubt es uns nun, alle in der Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ erscheinenden Abbildungen in einen „holomorphen“ Teil und einen „antiholomorphen“ Teil zu zerlegen. Schreibt man hierzu die Abbildungen δ, δ^* und ∇ in einer holomorphen Karte von M, so findet man

$$
\begin{aligned}
\delta &= (1\otimes dz^k)i_s(Z_k) + (1\otimes d\overline{z}^l)i_s(\overline{Z}_l) = \delta_z + \delta_{\overline{z}} &\quad (3.17)\\
\delta^* &= (dz^k\otimes 1)i_a(Z_k) + (d\overline{z}^l\otimes 1)i_a(\overline{Z}_l) = \delta^*_z + \delta^*_{\overline{z}} &\quad (3.18)\\
\nabla &= (1\otimes dz^k)\nabla_{Z_k} + (1\otimes d\overline{z}^l)\nabla_{\overline{Z}_l} = \nabla_z + \nabla_{\overline{z}} &\quad (3.19)
\end{aligned}
$$

und offensichtlich sind die Abbildungen $\delta_z, \delta_{\overline{z}}, \delta^*_z, \delta^*_{\overline{z}}, \nabla_z, \nabla_{\overline{z}} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ durch

$$
\begin{array}{lllllllll}
\delta_z &:=& (1\otimes dz^k)i_s(Z_k), & \delta^*_z &:=& (dz^k\otimes 1)i_a(Z_k), & \nabla_z &:=& (1\otimes dz^k)\nabla_{Z_k},\\
\delta_{\overline{z}} &:=& (1\otimes d\overline{z}^l)i_s(\overline{Z}_l), & \delta^*_{\overline{z}} &:=& (d\overline{z}^l\otimes 1)i_a(\overline{Z}_l), & \nabla_{\overline{z}} &:=& (1\otimes d\overline{z}^l)\nabla_{\overline{Z}_l}
\end{array}
\qquad (3.20)
$$

koordinatenunabhängig erklärt. Ferner sind δ_z, $\delta_{\overline{z}}$, ∇_z und $\nabla_{\overline{z}}$ offensichtlich $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivationen vom antisymmetrischen Grad 1.

Analog zur Definition von δ^{-1} definieren wir für $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_{s,z} a = ka$ und $\deg_{a,z} a = la$ die Abbildung δ_z^{-1} durch

$$
\delta_z^{-1}a := \begin{cases} \frac{1}{k+l}\delta^*_z a & \text{falls } k+l \neq 0\\ 0 & \text{falls } k+l = 0 \end{cases} \qquad (3.21)
$$

und erweitern linear zu einer Abbildung $\delta_z^{-1} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$. Für $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_{s,\overline{z}} a = ka$ und $\deg_{a,\overline{z}} a = la$ definieren wir weiter

$$
\delta_{\overline{z}}^{-1}a := \begin{cases} \frac{1}{k+l}\delta^*_{\overline{z}} a & \text{falls } k+l \neq 0\\ 0 & \text{falls } k+l = 0 \end{cases} \qquad (3.22)
$$

und erweitern auch hier linear zu einer Abbildung $\delta_{\overline{z}}^{-1} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$. Das folgende Lemma stellt nun einen Zusammenhang zwischen den mit der komplexen Struktur definierten Abbildungen und den ursprünglich in der Fedosov-Konstruktion verwendeten Abbildungen her.

Lemma 3.2.2 *Für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gelten die Zerlegungen*

$$
\delta_z^{-1}\delta_z a + \delta_z\delta_z^{-1}a + \pi_{\overline{z}}a = a \qquad \textit{und} \qquad \delta_{\overline{z}}^{-1}\delta_{\overline{z}}a + \delta_{\overline{z}}\delta_{\overline{z}}^{-1}a + \pi_z a = a. \qquad (3.23)
$$

Ferner gelten folgende Beziehungen:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\pi_z\delta &=& \delta_z\pi_z, & \pi_z\nabla &=& \nabla_z\pi_z, & \pi_z\delta^{-1} &=& \delta_z^{-1}\pi_z,\\
\pi_{\overline{z}}\delta &=& \delta_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}, & \pi_{\overline{z}}\nabla &=& \nabla_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}, & \pi_{\overline{z}}\delta^{-1} &=& \delta_{\overline{z}}^{-1}\pi_{\overline{z}}.
\end{array}
\qquad (3.24)
$$

Beweis: Zum Beweis von (3.23) beachten wir, daß aus den Definitionen die Gleichungen $\delta_z\delta_z^* + \delta_z^*\delta_z = \deg_{s,z} + \deg_{a,z}$ und $\delta_{\overline{z}}\delta_{\overline{z}}^* + \delta_{\overline{z}}^*\delta_{\overline{z}} = \deg_{s,\overline{z}} + \deg_{a,\overline{z}}$ folgen. Hiermit folgt dann aber für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die Gleichung

$$a - \pi_{\overline{z}}a = (\delta_z^{-1}\delta_z + \delta_z\delta_z^{-1})(a - \pi_{\overline{z}}a) = \delta_z^{-1}\delta_z a + \delta_z\delta_z^{-1}a,$$

da $\delta_z\pi_{\overline{z}}a = 0 = \delta_z^{-1}\pi_{\overline{z}}a$. Mit einer analogen Argumentation folgt die zweite behauptete Zerlegung. Von den Beziehungen in (3.24) beweisen wir jeweils diejenige für die holomorphen Anteile, die Beweise für die antiholomorphen Anteile sind völlig analog. Mit der Gleichung $\delta = \delta_z + \delta_{\overline{z}}$ erhalten wir wegen $\pi_z\delta_{\overline{z}}a = 0$ direkt $\pi_z\delta a = \pi_z\delta_z a = (1\otimes dz^k)\pi_z i_a(Z_k)a = \delta_z\pi_z a$, da π_z ein Homomorphismus des undeformierten Produktes ist, $\pi_z(1\otimes dz^k) = (1\otimes dz^k)$ gilt und π_z offensichtlich mit antisymmetrischen Einsetzabbildungen $i_a(Z_k)$ vertauscht. Aufgrund der Eigenschaften des Semi-Kähler-Zusammenhangs gilt, daß für alle Vektorfelder $X \in \Gamma^\infty(TM)$ mit $a \in \Gamma^\infty(\bigvee^{p,q}T^*M \otimes \bigvee^{p',q'}T^*M)$ auch $\nabla_X a \in \Gamma^\infty(\bigvee^{p,q}T^*M \otimes \bigvee^{p',q'}T^*M)$ gilt. Somit vertauscht aber auch π_z mit ∇_{Z_k} und mit einer analogen Argumentation wie für δ folgt $\pi_z\nabla = \nabla_z\pi_z$. Zum Beweis der Identität für δ^{-1} sei $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ mit $\deg_s a = ka$ und $\deg_a a = la$. Falls $k+l = 0$, so ist $a \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ und offensichtlich verschwinden dann $\pi_z\delta^{-1}$ und $\delta_z^{-1}\pi_z$ auf a. Falls $k+l \neq 0$ erhalten wir wie beim Beweis der Identität für δ die Gleichung $\pi_z\delta^{-1}a = \frac{1}{k+l}\delta_z^*\pi_z a$. Falls nun $\deg_{s,z} a = ma$ mit $m < k$ oder $\deg_{a,z} a = na$ mit $n < l$, so gilt $\pi_z\delta^{-1}a = 0 = \delta_z^{-1}\pi_z a$, da dann $\pi_z a = 0$. Nur für $\deg_{s,z} a = ka$ und $\deg_{a,z} a = la$ liefern also beide Seiten der zu beweisenden Gleichung ein von Null verschiedenes Ergebnis. Mit der Definition von δ_z^{-1} folgt dann aber $\pi_z\delta^{-1}a = \delta_z^{-1}\pi_z a$, womit die Behauptung bewiesen ist. □

Ferner läßt sich r_{Wick} schreiben als

$$r_{\mathrm{Wick}} = (1\otimes dz^k)i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} + (1\otimes d\overline{z}^l)i_a(\overline{Z}_l)r_{\mathrm{Wick}} = r_{\mathrm{Wick},z} + r_{\mathrm{Wick},\overline{z}}, \tag{3.25}$$

so daß wir insgesamt

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z} + \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rcl} \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z} &=& -\delta_z + \nabla_z - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick},z}) \\ \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}} &=& -\delta_{\overline{z}} + \nabla_{\overline{z}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick},\overline{z}}) \end{array} \tag{3.26}$$

erhalten. Wegen ${\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}}^2 = 0$ erhalten wir also

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}^2 + \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}} + \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z} + \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}^2 = 0.$$

Da aber $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}$ homogen vom antisymmetrischen holomorphen Grad 1 und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}$ homogen vom antisymmetrischen antiholomorphen Grad 1 ist, erhalten wir hieraus

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}^2 = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}^2 = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}} + \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z} = 0, \tag{3.27}$$

also besitzt $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ eine Zerlegung, die an die Zerlegung der äußeren Ableitung $d = \partial + \overline{\partial}$ erinnert. Ferner hat diese Zerlegung zur Folge, daß die Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ sowohl im Kern von $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}$ als auch im Kern von $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}$ liegt, d.h. für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = 0.$$

Insbesondere sind natürlich sowohl $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}$ als auch $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}$ $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivationen vom $\deg_a$-Grad 1. Eine weitere Konsequenz der Präsenz der komplexen Struktur besteht nun darin, daß der explizite Ausdruck von $f *_{\mathrm{Wick}} g$ nicht von den gesamten Taylor-Reihen von f und g abhängt, sondern nur vom holomorphen Anteil von $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und vom antiholomorphen Anteil von $\tau_{\mathrm{Wick}}(g)$. Um dies einzusehen beachten wir zunächst, daß $\sigma(a) = \pi_{s,z}\pi_{s,\overline{z}}a = \pi_{s,\overline{z}}\pi_{s,z}a$ für $a \in \mathcal{W}(M)$ gilt, so daß wir aus den Aussagen von Lemma 3.2.1

$$f *_{\mathrm{Wick}} g = \pi_{s,z}\pi_{s,\overline{z}}(\tau_{\mathrm{Wick}}(f)\circ_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)) = \sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f))\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)))$$

erhalten, da $\pi_{s,z}a = \pi_z a$ und $\pi_{s,\overline{z}}a = \pi_{\overline{z}}a$ für alle $a \in \mathcal{W}(M)$. Diese Beobachtung legt es nun nahe zu fragen, ob es nicht möglich ist, für $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)$ einfachere Rekursionsformeln als die der gesamten Fedosov-Taylor-Reihe zu finden, da diese für die explizite Bestimmung des Sternproduktes $f *_{\mathrm{Wick}} g$ völlig ausreichend wären. Im allgemeinen ist dies jedoch, wie wir in Abschnitt 3.4 sehen werden, nicht so, aber für die Sternprodukte vom Wick-Typ werden wir zeigen können, daß man mit Hilfe der Abbildungen $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},z}$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick},\overline{z}}$ und der Zerlegungen (3.23) einfachere Rekursionsformeln für $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)$ finden kann. Hierzu werden wir später einige Eigenschaften der Abbildungen δ_z, ∇_z, π_z, die in völliger Analogie auch für $\delta_{\overline{z}}$, $\nabla_{\overline{z}}$, $\pi_{\overline{z}}$ gelten, benötigen und die wir in folgendem Lemma zusammenfassen wollen.

Lemma 3.2.3 *Für die vermöge der Zerlegungen (3.17), (3.18), (3.19) definierten Abbildungen gelten folgende Identitäten:*

$$\begin{array}{ll} \delta_z^2 = \delta_{\overline{z}}^2 = [\delta_z, \delta_{\overline{z}}] = 0, & [\delta_z, \nabla_z] = [\delta_{\overline{z}}, \nabla_{\overline{z}}] = 0 \\ \nabla_z^2 = \nabla_{\overline{z}}^2 = 0, \quad [\nabla_z, \nabla_{\overline{z}}] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(R) & [\delta_z, \nabla_{\overline{z}}] = [\delta_{\overline{z}}, \nabla_z] = 0. \end{array} \tag{3.28}$$

Für alle $b \in \pi_z(\mathcal{W}\otimes\Lambda^k(M))$, $c \in \pi_{\overline{z}}(\mathcal{W}\otimes\Lambda^l(M))$, $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^m(M)$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \delta_z\pi_z(b\circ_{\mathrm{Wick}}a) &= \pi_z(\delta_z b\circ_{\mathrm{Wick}}a) + (-1)^k\pi_z(b\circ_{\mathrm{Wick}}\delta a) \\ \nabla_z\pi_z(b\circ_{\mathrm{Wick}}a) &= \pi_z(\nabla_z b\circ_{\mathrm{Wick}}a) + (-1)^k\pi_z(b\circ_{\mathrm{Wick}}\nabla a) \end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}c) &= (-1)^m\pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}\delta_{\overline{z}}c) + \pi_{\overline{z}}(\delta a\circ_{\mathrm{Wick}}c) \\ \nabla_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}c) &= (-1)^m\pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}\nabla_{\overline{z}}c) + \pi_{\overline{z}}(\nabla a\circ_{\mathrm{Wick}}c). \end{aligned} \tag{3.30}$$

BEWEIS: Wegen $\delta^2 = 0$ erhält man mit $\delta = \delta_z + \delta_{\overline{z}}$ die Gleichung $\delta_z^2 + [\delta_z, \delta_{\overline{z}}] + \delta_{\overline{z}}^2 = 0$. Da aber δ_z homogen vom antisymmetrischen holomorphen Grad 1 und $\delta_{\overline{z}}$ homogen vom antisymmetrischen antiholomorphen Grad 1 ist, gilt $\delta_z^2 = [\delta_z, \delta_{\overline{z}}] = \delta_{\overline{z}}^2 = 0$. Mit $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(R)$ und $\nabla = \nabla_z + \nabla_{\overline{z}}$ erhält man $\nabla_z^2 + [\nabla_z, \nabla_{\overline{z}}] + \nabla_{\overline{z}}^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(R)$. Da aber R homogen vom antisymmetrischen holomorphen Grad 1 und vom antisymmetrischen antiholomorphen Grad 1 ist, folgt $\nabla_z^2 = \nabla_{\overline{z}}^2 = 0$ und $[\nabla_z, \nabla_{\overline{z}}] = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(R)$. Aus $[\delta, \nabla] = 0$ erhält man mit den bereits verwendeten Zerlegungen, indem man diese Gleichung nach den jeweiligen symmetrischen und antisymmetrischen holomorphen und antiholomorphen Homogenitätsgraden aufteilt, die Vertauschungsrelationen für $\delta_z, \delta_{\overline{z}}, \nabla_z, \nabla_{\overline{z}}$. Zum Beweis von (3.29) verwenden wir die in Lemma 3.2.2 und Lemma 3.2.1 gezeigten Identitäten und erhalten $\delta_z\pi_z(b\circ_{\mathrm{Wick}}a) = \pi_z\delta(b\circ_{\mathrm{Wick}}a) = \pi_z(\delta b\circ_{\mathrm{Wick}}a + (-1)^k b\circ_{\mathrm{Wick}}\delta a)$. Weiter gilt $\pi_z(\delta b\circ_{\mathrm{Wick}}a) = \pi_z(\pi_z\delta b\circ_{\mathrm{Wick}}a) = \pi_z(\delta_z\pi_z b\circ_{\mathrm{Wick}}a) = \pi_z(\delta_z b\circ_{\mathrm{Wick}}a)$, da $\pi_z b = b$. Der Beweis der analogen Formel für ∇_z erfolgt völlig analog. Ähnlich erhalten wir $\delta_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}c) = \pi_{\overline{z}}(\delta a\circ_{\mathrm{Wick}}c + (-1)^m a\circ_{\mathrm{Wick}}\delta c)$ und weiter folgt $\pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}\delta c) = \pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}\pi_{\overline{z}}\delta c) = \pi_{\overline{z}}(a\circ_{\mathrm{Wick}}\delta_{\overline{z}}c)$, da $\pi_{\overline{z}}c = c$. Auch hier erfolgt der Beweis der analogen Formel für $\nabla_{\overline{z}}$ analog. □

3.3 Die charakteristische Klasse des Sternproduktes $*_{\mathrm{Wick}}$

Bevor wir uns der Frage zuwenden wollen, ob man mit der angegebenen Fedosov-Konstruktion mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ alle Sternprodukte vom Wick-Typ erhält, wollen wir zunächst die charakteristische Klasse der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ bestimmen, um sicherzustellen, daß wir mit unserer Konstruktion zu jeder beliebigen vorgegebenen Klasse $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ ein Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ erhalten können, so daß $c = c(*_{\mathrm{Wick}})$ gilt. Unsere Vorgehensweise zur Berechnung der charakteristischen Klasse $c(*_{\mathrm{Wick}})$ ist hier analog zu unseren Betrachtungen in Abschnitt 2.3. Zudem können wir alle dort bewiesenen Formeln mit der faserweisen Äquivalenztransformation $\mathcal{S}$ von $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ_{\mathrm{F}})$ nach $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ_{\mathrm{Wick}})$ übertragen.

3.3.1 Die Derivations-verwandte Klasse von $*_{\mathrm{Wick}}$

Wie in Abschnitt 2.3.2 bildet die explizite Angabe lokaler ν-Euler Derivationen für $*_{\mathrm{Wick}}$ die Grundlage für die Bestimmung der Derivations-verwandten Klasse $d(*_{\mathrm{Wick}})$.

3.3.1.1 Faserweise ν-Euler Derivationen für $\circ_{\mathrm{Wick}}$ und ν-Euler Derivationen für $*_{\mathrm{Wick}}$

Der erste Schritt zur Angabe von ν-Euler Derivationen von $*_{\mathrm{Wick}}$ besteht wieder darin, zunächst faserweise derartige Derivationen zu konstruieren. Da wir viele Ergebnisse des Abschnittes 2.3.2 auf die veränderte Situation mit dem anderen faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ übertragen können, wollen wir insbesondere die Notation aus diesem Abschnitt weiter verwenden. Insbesondere bezeichnen im weiteren $\xi_\alpha \in \Gamma^\infty(T\mathcal{U}_\alpha)$ lokale, konform symplektische Vektorfelder bezüglich der symplektischen Form ω auf der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I), die analog zu Abschnitt 2.3.2 definiert seien. Mit diesen Vektorfeldern findet man:

Lemma 3.3.1 *Die durch $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha := \mathcal{S}\mathcal{H}_\alpha\mathcal{S}^{-1} : \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$ definierte Abbildung ist eine lokale (Super-)Derivation bezüglich des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{Wick}}$ vom antisymmetrischen Grad* 0 *und vom totalen Grad* 0*, d.h.*

$$\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha(a \circ_{\mathrm{Wick}} b) = (\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha a) \circ_{\mathrm{Wick}} b + a \circ_{\mathrm{Wick}} (\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha b) \tag{3.31}$$

für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$. Hierbei ist wie in Lemma 2.3.3 $\mathcal{H}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha}$. Darüberhinaus gilt $[\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha, \delta] = 0$.

BEWEIS: Die Aussage über den antisymmetrischen Grad von $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ ist offensichtlich. Aufgrund der expliziten Gestalt von $\mathcal{S}$ ist weiter klar, daß $\mathcal{S}$ den totalen Grad unverändert läßt, so daß die Aussage über den totalen Grad von $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ aus der entsprechenden Aussage über $\mathcal{H}_\alpha$ aus Lemma 2.3.3 folgt. Ferner ist $\mathcal{H}_\alpha$ nach Lemma 2.3.3 eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Derivation, so daß wegen $\mathcal{S}(a \circ_{\mathrm{F}} b) = (\mathcal{S}a) \circ_{\mathrm{Wick}} (\mathcal{S}b) \forall a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die Gleichung $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha(a \circ_{\mathrm{Wick}} b) = (\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha a) \circ_{\mathrm{Wick}} b + a \circ_{\mathrm{Wick}} (\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha b)$ für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$ folgt. Wegen $[\mathcal{S}, \delta] = 0$ folgt die Vertauschungsrelation von $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ aus der entsprechenden Aussage für $\mathcal{H}_\alpha$ aus Lemma 2.3.3. □

Wegen $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha = \exp(\mathrm{ad}(\frac{\nu}{\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}}))\mathcal{H}_\alpha$ ist klar, daß $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ von der Gestalt $\nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathcal{D}_i$ mit faserweisen Abbildungen $\mathcal{D}_i$ ist. Also erfüllt $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ die Anforderungen, um durch geeignete Modifikation zur Konstruktion faserweiser lokaler ν-Euler Derivationen verwendet zu werden. Wir versuchen also $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ zu einer $\circ_{\mathrm{Wick}}$-(Super-)Derivation vom antisymmetrischen Grad 0 zu erweitern, die mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ vertauscht. Hierzu machen wir wie in (2.33) den Ansatz

$$\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha) \tag{3.32}$$

mit $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$, so daß $\sigma(h_\alpha) = 0$ und berechnen $[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathcal{E}_\alpha]$.

Lemma 3.3.2 *Sei $\mathcal{E}_\alpha$ wie in Gleichung (3.32) gegeben, dann ist $\mathcal{E}_\alpha$ eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-(Super-)Derivation vom antisymmetrischen Grad* 0 *und es gilt*

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathcal{E}_\alpha] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h_\alpha + \mathcal{S}T_\alpha + \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} - r_{\mathrm{Wick}}), \tag{3.33}$$

wobei $T_\alpha \in \Gamma^\infty(\bigvee^2 T^*\mathcal{U}_\alpha \otimes T^*\mathcal{U}_\alpha) \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$ wie in Abschnitt 2.3.2 Gleichung (2.38) gegeben sei.

BEWEIS: Nach Lemma 3.3.1 ist $\mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}$ eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0. Da aber offensichtlich auch $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha)$ für alle $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ eine solche ist, ist $\mathcal{E}_\alpha$ ebenfalls eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0. Zum Beweis von (3.33) erweist es sich als sinnvoll $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ als $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} = -\delta + \mathcal{S}(\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}))\mathcal{S}^{-1}$ zu schreiben, was wegen $[\nabla, \mathcal{S}] = 0$ und $\mathcal{S}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(a)\mathcal{S}^{-1} = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}a)$ für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt. Da $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivation vom $\deg_a$-Grad 1 ist, erhalten wir mit der Definition von $\mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}$ und mit $[\delta, \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}] = 0$

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathcal{E}_\alpha] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}h_\alpha) + \mathcal{S}\left[\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}), \mathcal{H}_\alpha\right]\mathcal{S}^{-1}.$$

Nach Lemma 2.3.6 i.) erhalten wir mit $[\nabla, \nu\partial_\nu] = 0$ weiter

$$\mathcal{S}[\nabla, \mathcal{H}_\alpha]\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(T_\alpha)\mathcal{S}^{-1} = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}T_\alpha).$$

Ferner gilt

$$-\mathcal{S}\left[\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}), \mathcal{H}_\alpha\right]\mathcal{S}^{-1} = -\mathcal{S}\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}} - \mathcal{H}_\alpha\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}})\mathcal{S}^{-1} = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}} - \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}}),$$

da $\mathcal{H}_\alpha$ eine $\circ_{\mathrm{F}}$-Derivation ist, so daß wir insgesamt die behauptete Gleichung (3.33) finden. □

Unser nächstes Ziel ist es nun zu zeigen, daß $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ mit $\sigma(h_\alpha) = 0$ so gewählt werden kann, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}h_\alpha + \mathcal{S}T_\alpha + \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}} - r_{\mathrm{Wick}} = 1 \otimes A_\alpha$ gilt, wobei A_α eine formale Reihe lokal definierter Einsformen, die geeignet zu wählen sind, ist, da dann $[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathcal{E}_\alpha] = 0$ gilt. Wegen $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}^2 = 0$ ist die notwendige Bedingung für die Lösbarkeit dieser Gleichung $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1\otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}) = 0$. Mit den in Lemma 2.3.6 nachgewiesenen Eigenschaften von T_α gelingt es uns zu zeigen, daß diese Bedingung bei geeigneter Wahl von A_α erfüllbar ist.

Proposition 3.3.3 *i.) Sei $A_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ eine formale Reihe lokal definierter Einsformen auf $\mathcal{U}_\alpha$, dann gilt*

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1 \otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}) = 0 \tag{3.34}$$

genau dann, wenn

$$dA_\alpha = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\left(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right), \tag{3.35}$$

wobei ρ die in (3.3) definierte Ricci-Form und $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i\Omega_i$ die formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M, die in die Gleichung (3.7) für r_{Wick} eingeht, bezeichnet.

ii.) Wählt man lokale Potentiale $\Theta_{i\alpha}$ der geschlossenen Zweiformen Ω_i auf $\mathcal{U}_\alpha$, d.h. $d\Theta_{i\alpha} = \Omega_i$ für $i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und lokale Potentiale ε_α der Ricci-Form, d.h. $d\varepsilon_\alpha = \rho$ und definiert $\Theta_\alpha := \sum_{i=1}^\infty \nu^i\Theta_{i\alpha}$, so ist für

$$A_\alpha := (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\left(\Theta_\alpha - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\varepsilon_\alpha\right) \tag{3.36}$$

die Gleichung (3.35) erfüllt und es gilt $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1 \otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}) = 0$.

BEWEIS: Zum Beweis von i.) berechnen wir $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1\otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}})$ für eine beliebige formale Reihe lokaler Einsformen auf $\mathcal{U}_\alpha$, wobei wir wieder $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} = -\delta + \mathcal{S}(\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}))\mathcal{S}^{-1}$ verwenden:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1 \otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha) \\
&\quad = 1 \otimes dA_\alpha + \delta\mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{S}(\nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}))T_\alpha = 1 \otimes dA_\alpha - \mathcal{S}(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}R - R) + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})\mathcal{S}T_\alpha,
\end{aligned}$$

da $[\delta, \mathcal{S}] = 0$ und da nach Lemma 2.3.6 iii.) $\delta T_\alpha = 0$ und $\nabla T_\alpha = \mathcal{L}_{\xi_\alpha}R - R$ gilt. Ferner haben wir wieder die Beziehung zwischen $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}$ und $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}$ benutzt. Weiter gilt wegen $[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}] = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}T_\alpha + \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}r_{\mathrm{Wick}} -$

r_{Wick}) unter Verwendung von Gleichung (3.7)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} - r_{\mathrm{Wick}}) &= \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}T_\alpha + \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} - r_{\mathrm{Wick}})r_{\mathrm{Wick}} + \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} - \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} \\
&= \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}T_\alpha + \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} - r_{\mathrm{Wick}})r_{\mathrm{Wick}} - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha (R + 1\otimes\Omega + \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) \\
&\quad + R + 1\otimes\Omega + \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha$ eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-(Super-)Derivation vom $\deg_a$-Grad 0 ist erhalten wir weiter

$$\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha\left(\frac{1}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}\right) = -\frac{1}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}}) r_{\mathrm{Wick}},$$

so daß wegen $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})r_{\mathrm{Wick}} = \frac{2}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}$ schließlich

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} - r_{\mathrm{Wick}}) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})\mathcal{S}T_\alpha + R - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha R + (\mathrm{id} - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha)(1\otimes\Omega)$$

also insgesamt

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1\otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}) = 1\otimes dA_\alpha - \mathcal{S}(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}R - R) - R + \mathcal{S}\mathcal{H}_\alpha\mathcal{S}^{-1}R - (\mathrm{id} - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha)(1\otimes\Omega)$$

folgt. Da Δ'_{fib} den symmetrischen Grad um zwei verringert und $\mathcal{H}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ ihn unverändert läßt, gilt offensichtlich $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha(1\otimes\Omega) = \mathcal{H}_\alpha(1\otimes\Omega) = 1\otimes\mathcal{H}_\alpha\Omega$. Da zudem R vom symmetrischen Grad 2 ist, erhalten wir mit der expliziten Gestalt von $\mathcal{S}$ und wegen $\nu\partial_\nu R = 0$

$$-\mathcal{S}(\mathcal{L}_{\xi_\alpha}R - R) - R + \mathcal{S}\mathcal{H}_\alpha\mathcal{S}^{-1}R = -\frac{\nu}{\mathrm{i}}\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\Delta'_{\mathrm{fib}}R = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\frac{\nu}{\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}}R,$$

wobei wieder eingeht, daß Δ'_{fib} den symmetrischen Grad um zwei verringert. Mit der expliziten Gestalt von R und Δ'_{fib} ist es ein leichtes einzusehen, daß $\Delta'_{\mathrm{fib}}R = 1\otimes\rho$ mit der Ricci-Form ρ gemäß Gleichung (3.3) gilt. Hiermit folgt aber

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1\otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}) = 1\otimes\left(dA_\alpha - (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\left(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right)\right)$$

und dieser Ausdruck verschwindet genau dann, wenn (3.35) erfüllt ist und i.) ist bewiesen. Zum Beweis von ii.) berechnet man einfach $dA_\alpha = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)(d\Theta_\alpha - \frac{\nu}{\mathrm{i}}d\varepsilon_\alpha) = (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho)$, da die äußere Ableitung d mit $\nu\partial_\nu$ vertauscht und $d\mathcal{L}_{\xi_\alpha} = \mathcal{L}_{\xi_\alpha}d$ gilt. □

Bemerkung 3.3.4 *Aus der Gleichung $\Delta'_{\mathrm{fib}}R = 1\otimes\rho$ erhält man einen sehr einfachen Beweis für die Geschlossenheit der Ricci-Form ρ, da man hiermit durch Anwenden von ∇ wegen $\nabla R = 0$ und $[\nabla, \Delta'_{\mathrm{fib}}] = 0$ direkt $1\otimes d\rho = 0$ findet.*

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir die folgende wichtige Proposition:

Proposition 3.3.5 *Seien formale Reihen A_α lokal definierter Einsformen wie in Proposition 3.3.3 gewählt. Dann existieren eindeutig definierte Elemente $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$, so daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}h_\alpha = 1\otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}$ und $\sigma(h_\alpha) = 0$ erfüllt ist. Darüberhinaus ist h_α explizit durch*

$$h_\alpha = {\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}}^{-1}(1\otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}}) \tag{3.37}$$

gegeben, wobei ${\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}}^{-1}a = -\delta^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{id} - [\delta^{-1}, \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})]}a\right)$. Weiter gilt $h_\alpha \in \mathcal{W}_3(\mathcal{U}_\alpha)$. Mit den so bestimmten Elementen h_α kommutieren die faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{H}^{\mathcal{S}}_\alpha + \frac{1}{\nu}ad_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha)$ mit der Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$.

Beweis: Der in Abschnitt 2.3.2 geführte Beweis von Proposition 2.3.8 läßt sich mit der Aussage ii.) der vorangehenden Proposition und Lemma 3.3.2 direkt auf die hier vorliegende Situation übertragen. Um die Aussage über den minimalen in h_α vorkommenden totalen Grad zu erhalten genügt es zu beachten, daß $1 \otimes A_\alpha - \mathcal{S}T_\alpha - \mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}} r_{\mathrm{Wick}} + r_{\mathrm{Wick}} \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(\mathcal{U}_\alpha)$ gilt, da $\mathcal{S}$ den totalen Grad nicht verändert. Die weitere Argumentation verläuft wieder analog zum Beweis von Proposition 2.3.8. □

Im nächsten Schritt verwenden wir die konstruierten faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen zur Definition lokaler ν-Euler Derivationen für $*_{\mathrm{Wick}}$.

Definition 3.3.6 *Seien die Elemente $h_\alpha \in \mathcal{W}(\mathcal{U}_\alpha)$ wie in Gleichung (3.37) gegeben. Weiter bezeichne $\mathcal{E}_\alpha : \mathcal{W} \otimes \Lambda(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{W} \otimes \Lambda(\mathcal{U}_\alpha)$ die faserweisen lokalen ν-Euler Derivationen $\mathcal{E}_\alpha = \mathcal{S}(\nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha})\mathcal{S}^{-1} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha)$. Dann definieren wir Abbildungen $\mathsf{E}_\alpha : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]] \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ durch*

$$\mathsf{E}_\alpha f := \sigma(\mathcal{E}_\alpha \tau_{\mathrm{Wick}}(f)). \tag{3.38}$$

Mit dieser Definition erhalten wir das Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 3.3.7 *Die in Gleichung (3.38) definierten Abbildungen E_α sind lokale Derivationen des Sternproduktes $*_{\mathrm{Wick}}$. Darüberhinaus gilt $\mathsf{E}_\alpha = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \mathsf{D}_\alpha$, wobei $\mathsf{D}_\alpha = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{\alpha,i}$ eine formale Reihe von Differentialoperatoren auf $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$ ist. Die Abbildungen E_α sind also lokale ν-Euler Derivationen für das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$.*

Beweis: Der Nachweis dafür, daß die in Gleichung (3.38) definierten Abbildungen E_α lokale Derivationen von $*_{\mathrm{Wick}}$ sind, erfolgt in völliger Analogie zum Beweis von Satz 2.3.10 in Abschnitt 2.3.2. Es bleibt also nachzuweisen, daß E_α die behauptete explizite Gestalt besitzt. Hierzu benötigen wir zunächst einen etwas expliziteren Ausdruck für $\mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}}$. Mit einer einfachen Rechnung in lokalen Koordinaten, kann man unter Verwendung von $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\omega = \omega$ zeigen, daß

$$\left[\frac{\nu}{\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}}, \mathcal{H}_\alpha\right] = -\frac{\nu}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} \left(d\overline{z}^m (\mathcal{L}_{\xi_\alpha} Z_k) i_s(\overline{Z}_m) i_s(\overline{Z}_l) + dz^m (\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\overline{Z}_l) i_s(Z_m) i_s(Z_k)\right)$$

gilt. Diese faserweise Abbildung, die wir mit $\nu\mathcal{D}_1$ bezeichnen wollen, kommutiert aber offensichtlich mit Δ'_{fib}, so daß wir schließlich

$$\mathcal{H}_\alpha^{\mathcal{S}} = \nu\partial_\nu + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} + \nu\mathcal{D}_1$$

erhalten. Da nun σ sowohl mit $\nu\partial_\nu$ als auch mit $\mathcal{L}_{\xi_\alpha}$ kommutiert, erhalten wir wegen $\sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = f$ folgenden Ausdruck für E_α

$$\mathsf{E}_\alpha f = \nu\partial_\nu f + \mathcal{L}_{\xi_\alpha} f + \nu\sigma(\mathcal{D}_1\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) + \frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)).$$

Wegen Lemma 1.3.6 und Korollar 1.3.9 ist die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha) \ni f \mapsto \frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) + \nu\sigma(\mathcal{D}_1\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = \mathsf{D}_\alpha f$ eine formale Reihe von Differentialoperatoren. Es bleibt zu zeigen, daß diese formale Reihe erst in der Ordnung 1 im formalen Parameter ν beginnt. Für die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha) \ni f \mapsto \nu\sigma(\mathcal{D}_1\tau_{\mathrm{Wick}}(f))$ ist dies offensichtlich der Fall, da $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ nur nichtnegative Potenzen des formalen Parameters beinhaltet. Um diese Eigenschaft für den zweiten Anteil von D_α einzusehen, berechnen wir unter Berücksichtigung der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{Wick}}$

$$\frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = \frac{2}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} \left(\sigma(i_s(Z_k)h_\alpha)\sigma(i_s(\overline{Z}_l)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) - \sigma(i_s(Z_k)\tau_{\mathrm{Wick}}(f))\sigma(i_s(\overline{Z}_l)h_\alpha)\right) + O(\nu).$$

Da nach Proposition 3.3.5 $h_\alpha \in \mathcal{W}_3(\mathcal{U}_\alpha)$ gilt, sind $i_s(Z_k)h_\alpha$ und $i_s(\overline{Z}_l)h_\alpha$ vom totalen Grad größer oder gleich zwei, so daß $\sigma(i_s(Z_k)h_\alpha)$ und $\sigma(i_s(\overline{Z}_l)h_\alpha)$ nur Terme der Ordnung größer oder gleich eins in ν beinhalten, womit $\mathsf{D}_\alpha = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \mathsf{D}_{\alpha,i}$ folgt und der Satz bewiesen ist. □

Dieser eben bewiesene Satz stellt wiederum die Grundlage für die Bestimmung der Derivations-verwandten Klasse $d(*_{\mathrm{Wick}})$ dar.

3.3.1.2 Die deformierte Cartan-Formel für $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und die Bestimmung von $d(*_{\mathrm{Wick}})$

Bevor wir mit den lokalen ν-Euler Derivationen für $*_{\mathrm{Wick}}$ aus Satz 3.3.7 die Derivations-verwandte Klasse von $*_{\mathrm{Wick}}$ bestimmen können, müssen wir die Ergebnisse aus Proposition 2.3.11, die eine hierfür sehr nützliche Formel für die Lie-Ableitung beinhaltet, auf die vorliegende Situation mit dem anderen faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ übertragen.

Lemma 3.3.8 *Für alle Vektorfelder $X \in \Gamma^\infty(TM)$ gilt für die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_X : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ folgende Formel:*

$$\mathcal{S}\mathcal{L}_X\mathcal{S}^{-1} = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} i_a(X) + i_a(X)\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} + \mathcal{S}(i_s(X) + (dx^i \otimes 1) i_s(\nabla_{\partial_i} X))\mathcal{S}^{-1} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(i_a(X) r_{\mathrm{Wick}}). \tag{3.39}$$

Für den Fall, daß $X = X_f$ das Hamiltonsche Vektorfeld einer Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ist, nimmt diese Formel die folgende Form an:

$$\mathcal{S}\mathcal{L}_{X_f}\mathcal{S}^{-1} = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} i_a(X_f) + i_a(X_f)\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}\left(\mathcal{S}\left(f + df + \frac{1}{2}Ddf \otimes 1\right) - i_a(X_f) r_{\mathrm{Wick}}\right), \tag{3.40}$$

wobei $D = dx^i \vee \nabla_{\partial_i}$ den Operator der symmetrischen kovarianten Ableitung in einer Karte x von M als reelle Mannigfaltigkeit bezeichnet.

Beweis: Analog zum Beweis von Proposition 2.3.11 erhält man für alle $X \in \Gamma^\infty(TM)$

$$\mathcal{L}_X = (-\delta + \nabla) i_a(X) + i_a(X)(-\delta + \nabla) + i_s(X) + (dx^i \otimes 1) i_s(\nabla_{\partial_i} X).$$

Konjugiert man diese Gleichung mit $\mathcal{S}$, so erhält man wegen $[\delta, \mathcal{S}] = [\nabla, \mathcal{S}] = [i_a(X), \mathcal{S}] = 0$ und wegen $i_a(X)\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}) + \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}) i_a(X) = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(i_a(X) r_{\mathrm{Wick}})$ die erste behauptete Gleichung (3.39). Für den Fall, daß $X = X_f$ ein Hamiltonsches Vektorfeld ist, nimmt diese Formel wegen $i_s(X_f) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(df \otimes 1)$, $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(f) = 0$ und $(dx^i \otimes 1) i_s(\nabla_{\partial_i} X_f) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\frac{1}{2}Ddf \otimes 1)$ (vgl. Beweis von Proposition 2.3.11) die behauptete Gestalt (3.40) an, wobei wir wieder die Beziehung $\mathcal{S}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(a)\mathcal{S}^{-1} = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathcal{S}a)$, die für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ gilt, verwendet haben. □

Nach dieser eher technischen Vorbereitung wenden wir uns der Berechnung der Derivations-verwandten Klasse von $*_{\mathrm{Wick}}$ zu. Aus der Definition der lokalen ν-Euler Derivationen E_α und mit der obigen Formel für die Lie-Ableitung erhalten wir:

Lemma 3.3.9 *Für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ gilt*

$$\begin{aligned}(\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta)(g) \\ = \frac{1}{\nu}\sigma\left(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}\left(h_\alpha - h_\beta + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta} \otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta} \otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}}) r_{\mathrm{Wick}}\right)\tau_{\mathrm{Wick}}(g)\right),\end{aligned} \tag{3.41}$$

wobei $f_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$ die Gleichung $df_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta$ erfüllt, die lokalen Einsformen θ_α die Gleichnung $d\theta_\alpha = -\omega$ erfüllen und $X_{f_{\alpha\beta}}$ das Hamiltonsche Vektorfeld zu $f_{\alpha\beta}$ bezeichnet.

Beweis: Gemäß der Definition der lokalen ν-Euler Derivationen gilt

$$(\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta)(g) = \sigma((\mathcal{S}\mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta}\mathcal{S}^{-1} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h_\alpha - h_\beta))\tau_{\mathrm{Wick}}(g)).$$

Analog zum Beweis von Lemma 2.3.12 erhalten wir $\xi_\alpha - \xi_\beta = X_{-f_{\alpha\beta}}$, so daß $\mathcal{S}\mathcal{L}_{\xi_\alpha - \xi_\beta}\mathcal{S}^{-1}$ im obigen Ausdruck für $\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta$ mit der Formel (3.40) für $f = -f_{\alpha\beta}$ ersetzt werden kann. Ferner verwenden wir $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g) = 0$ und $i_a(X_{-f_{\alpha\beta}})\tau_{\mathrm{Wick}}(g) = 0$ und erhalten somit die behauptete Gleichung (3.41). □

Wir müssen jetzt wieder zeigen, daß der Term im Argument von $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}$ in Gleichung (3.41) durch eine lokal definierte formale Funktion $a_{\alpha\beta}$ so ergänzt werden kann, daß das gesamte Argument die Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathrm{Wick}}(f_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{2\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}} Ddf_{\alpha\beta} - \sigma(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}) + a_{\alpha\beta})$ der lokalen formalen Funktion $d_{\alpha\beta} := f_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{2\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}} Ddf_{\alpha\beta} - \sigma(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}) + a_{\alpha\beta}$ ist. Wenn es uns gelingt, solche lokalen formalen Funktionen zu finden, so liefert (3.41) $\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{Wick}}}(d_{\alpha\beta})$ und wir sind in der Lage einen Ausdruck für die Derivations-verwandte Klasse $d(*_{\mathrm{Wick}})$ zu finden. Wir müssen also zeigen, daß $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ so gewählt werden kann, daß

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}\right) = 0 \tag{3.42}$$

gilt.

Lemma 3.3.10 *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 3.3.9 gilt*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(h_\alpha - h_\beta + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}\right) \\
&= 1\otimes\left(\left(i_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}i_{\xi_\alpha}\rho + A_\alpha\right) - \left(i_{\xi_\beta}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}i_{\xi_\beta}\rho + A_\beta\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.43}$$

wobei $A_\alpha \in \Gamma^\infty(T^*\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ wie in Proposition 3.3.3 ii.) gegeben ist.

Beweis: Aus der Konstruktion der Elemente h_α, die wir in Abschnitt 3.3.1.1 angegeben haben (vgl. Proposition 3.3.5), erhalten wir

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(h_\alpha - h_\beta) = 1\otimes(A_\alpha - A_\beta) - \mathcal{S}(T_\alpha - T_\beta) - \mathcal{S}\mathcal{L}_{\xi_\alpha-\xi_\beta}\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}.$$

Weiter findet man durch direkte Rechnung

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) \\
&= \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}\left(\mathcal{S}\left(df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right)\right)r_{\mathrm{Wick}} + \mathcal{S}\nabla\left(\frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right),
\end{aligned}$$

wobei es sich als sinnvoll erweist $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\mathcal{S} = \mathcal{S}(-\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{F}}}(\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}}))$ zu verwenden, womit sich die entsprechende Berechnung im Beweis von Lemma 2.3.13 auf die obige Situation übertragen läßt. Wir verwenden nun nochmals Gleichung (3.40), die Definition von $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und Gleichung (3.7), um

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(-i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}) &= -(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}} + i_a(X_{f_{\alpha\beta}})\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}r_{\mathrm{Wick}}) \\
&\quad + i_a(X_{f_{\alpha\beta}})\left(-\delta r_{\mathrm{Wick}} + \nabla r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})r_{\mathrm{Wick}}\right) \\
&= \mathcal{S}\mathcal{L}_{\xi_\alpha-\xi_\beta}\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}\left(\mathcal{S}\left(df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}\right)r_{\mathrm{Wick}} \\
&\quad - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})\left(R + 1\otimes\Omega + \frac{1}{\nu}r_{\mathrm{Wick}}\circ_{\mathrm{Wick}}r_{\mathrm{Wick}}\right) \\
&= \mathcal{S}\mathcal{L}_{\xi_\alpha-\xi_\beta}\mathcal{S}^{-1}r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}\left(\mathcal{S}\left(df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right)\right)r_{\mathrm{Wick}} + i_a(\xi_\alpha - \xi_\beta)R + 1\otimes i_{\xi_\alpha-\xi_\beta}\Omega
\end{aligned}$$

zu erhalten, da $-X_{f_{\alpha\beta}} = \xi_\alpha - \xi_\beta$ und $i_a(X_{f_{\alpha\beta}})(r_{\mathrm{Wick}}\circ_{\mathrm{Wick}}r_{\mathrm{Wick}}) = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}})r_{\mathrm{Wick}}$. Insgesamt findet man also

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(h_\alpha - h_\beta + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}\right) \\
&= 1\otimes((A_\alpha + i_{\xi_\alpha}\Omega) - (A_\beta - i_{\xi_\beta}\Omega)) - \mathcal{S}(T_\alpha - T_\beta) + \mathcal{S}\nabla\left(\frac{1}{2}D(\theta_\alpha - \theta_\beta)\right) + i_a(\xi_\alpha - \xi_\beta)R.
\end{aligned}$$

Da aber nach Lemma 2.3.6 ii.) die Gleichung $T_\alpha = i_a(\xi_\alpha)R + \nabla(\frac{1}{2}D\theta_\alpha)$ gilt, folgt hieraus wegen $\mathcal{S} i_a(\xi_\alpha)R = i_a(\xi_\alpha)R + i_a(\xi_\alpha)\frac{\nu}{\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}} R = i_a(\xi_\alpha)R + \frac{\nu}{\mathrm{i}} 1 \otimes i_{\xi_\alpha}\rho$ die Behauptung. □

Mit Hilfe des soeben bewiesenen Lemmas finden wir nun:

Proposition 3.3.11 *i.) Mit den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}\right) = 0 \tag{3.44}$$

genau dann, wenn die lokal definierten formalen Funktionen $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ die Gleichung

$$da_{\alpha\beta} = -\left(\left(i_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}} i_{\xi_\alpha}\rho + A_\alpha\right) - \left(i_{\xi_\beta}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}} i_{\xi_\beta}\rho + A_\beta\right)\right) \tag{3.45}$$

erfüllen.

ii.) Es existieren lokal definierte formale Funktionen $a_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ derart, daß (3.45) und somit auch (3.44) erfüllt ist. In diesem Fall gilt

$$h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}} = \tau_{\mathrm{Wick}}(d_{\alpha\beta}), \tag{3.46}$$

wobei die lokalen formalen Funktionen $d_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ durch

$$d_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} + \frac{\nu}{2\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}} Ddf_{\alpha\beta} - \sigma(i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}) \tag{3.47}$$

gegeben sind.

Beweis: Die Aussage i.) folgt direkt aus Lemma 3.3.10 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} a_{\alpha\beta} = 1 \otimes da_{\alpha\beta}$ gilt. Um die Existenz der $a_{\alpha\beta}$ wie in (3.45) nachzuweisen, berechnen wir mit der Cartan-Formel für die Lie-Ableitung und mit (3.35)

$$d\left(i_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}} i_{\xi_\alpha}\rho + A_\alpha\right) = \mathcal{L}_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\mathcal{L}_{\xi_\alpha}\rho + (\mathrm{id} - \mathcal{H}_\alpha)\left(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right) = (\mathrm{id} - \nu\partial_\nu)\left(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right),$$

da $d\Omega = 0$ und $d\rho = 0$. Also ist die rechte Seite von Gleichung (3.45) geschlossen und die Existenz lokal definierter formaler Funktionen $a_{\alpha\beta}$, die diese erfüllen, durch das Poincaré-Lemma gesichert. Nach Satz 1.3.5 gilt für diese $a_{\alpha\beta}$ die Gleichung (3.46) und $d_{\alpha\beta}$ ist durch

$$d_{\alpha\beta} = \sigma\left(h_\alpha - h_\beta + a_{\alpha\beta} + \mathcal{S}\left(f_{\alpha\beta} + df_{\alpha\beta}\otimes 1 + \frac{1}{2}Ddf_{\alpha\beta}\otimes 1\right) - i_a(X_{f_{\alpha\beta}})r_{\mathrm{Wick}}\right)$$

gegeben. Hieraus erhält man mit der expliziten Gestalt von $\mathcal{S}$ den Ausdruck (3.47), da wir zudem die h_α so konstruiert haben, daß $\sigma(h_\alpha) = 0$ gilt. □

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun folgenden Satz formulieren:

Satz 3.3.12 *Mit den lokalen formalen Funktionen $d_{\alpha\beta} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$ aus Proposition 3.3.11 ii.) gilt*

$$\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{Wick}}}(d_{\alpha\beta}). \tag{3.48}$$

Darüberhinaus erfüllen diese formalen Funktionen

$$\begin{aligned} dd_{\alpha\beta} &= \theta_\alpha - \theta_\beta + d\left(\sigma(i_a(\xi_\alpha)r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{\nu}{2\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}} D\theta_\alpha\right) - d\left(\sigma(i_a(\xi_\beta)r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{\nu}{2\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}} D\theta_\beta\right) \\ &\quad - \left(\left(i_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}} i_{\xi_\alpha}\rho + A_\alpha\right) - \left(i_{\xi_\beta}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}} i_{\xi_\beta}\rho + A_\beta\right)\right). \end{aligned}$$

Also definieren die $d_{\alpha\beta}$ einen 2-Kozyklus und das Bild der entsprechenden Čech-Kohomologie-Klasse unter dem de Rham-Isomorphismus, also die Derivations-verwandte Klasse des Sternproduktes $*_{\mathrm{Wick}}$, ist durch

$$d(*_{\mathrm{Wick}}) = -[\omega] - \left[\left(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right) - \nu\partial_\nu\left(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right)\right] \tag{3.49}$$

gegeben.

Beweis: Wegen $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(a_{\alpha\beta}) = 0$ gilt nach Lemma 3.3.9 und Proposition 3.3.11 ii.)

$$(\mathsf{E}_\alpha - \mathsf{E}_\beta)(g) = \frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\tau_{\mathrm{Wick}}(d_{\alpha\beta}))\tau_{\mathrm{Wick}}(g)) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{*_{\mathrm{Wick}}}(d_{\alpha\beta})g$$

für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)[[\nu]]$, womit die erste Aussage des Satzes bewiesen ist. Aus Gleichung (3.47) erhalten wir wegen $df_{\alpha\beta} = \theta_\alpha - \theta_\beta$, $\xi_\alpha - \xi_\beta = -X_{f_{\alpha\beta}}$ und Gleichung (3.45) den behaupteten Ausdruck für die äußere Ableitung von $d_{\alpha\beta}$. Aus diesem ist offensichtlich, daß durch diese formalen Funktionen ein 2-Kozyklus definiert ist. Um die entsprechende de Rham-Klasse zu bestimmen, berechnet man $d(\theta_\alpha + d(\sigma(i_a(\xi_\alpha)r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{\nu}{2\mathrm{i}}\Delta'_{\mathrm{fib}}D\theta_\alpha) - (i_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}i_{\xi_\alpha}\rho + A_\alpha)) = -\omega - (\mathrm{id} - \nu\partial_\nu)(\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho)$, wobei wir das Ergebnis für $d(i_{\xi_\alpha}\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}i_{\xi_\alpha}\rho + A_\alpha)$ aus dem Beweis von Proposition 3.3.11 ii.) verwendet haben. Also folgt das behauptete Ergebnis für die Derivations-verwandte Klasse $d(*_{\mathrm{Wick}})$ und der Satz ist bewiesen. □

Bemerkung 3.3.13 *Erstaunlicherweise stimmt die Derivations-verwandte Klasse $d(*_{\mathrm{Wick}})$ mit der Klasse $-[\omega] - [\Omega - \nu\partial_\nu\Omega]$ überein, da der zusätzliche Term, der von der Ricci-Form ρ abhängt, von erster Ordnung in ν ist. Dennoch war zur Konstruktion der ν-Euler Derivationen explizit eine Berücksichtigung der Ricci-Form und eine Wahl lokaler Potentiale dieser Form notwendig. Diese Beobachtung legt die Vermutung nahe, daß die Ricci-Form bei der Bestimmung des Terms $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$ der charakteristischen Klasse, der nicht durch die Derivations-verwandte Klasse festgelegt ist, eine Rolle spielen wird.*

Da die charakteristische Klasse $c(\star)$ eines Sternproduktes mit der Derivations-verwandten Klasse $d(\star)$ durch die Gleichung $\partial_\nu c(\star) = \frac{1}{\nu^2}d(\star)$ verknüpft ist, können wir für das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ alle Terme der charakteristischen Klasse bis auf den Term $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$ in der nullten Ordnung in ν angeben.

Proposition 3.3.14 *Für die charakteristische Klasse $c(*_{\mathrm{Wick}}) \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ gilt*

$$c(*_{\mathrm{Wick}}) - c(*_{\mathrm{Wick}})^0 = \frac{1}{\nu}[\omega] + \frac{1}{\nu}\sum_{i=2}^{\infty}\nu^i[\Omega_i]. \tag{3.50}$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich völlig analog zum Beweis von Proposition 2.3.16 unter Verwendung der Aussage von Satz 3.3.12 und unter Berücksichtigung von Bemerkung 3.3.13. □

Den noch unbekannten Term $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$ bestimmen wir im nächsten Abschnitt.

3.3.2 Der Bidifferentialoperator C_2^- und die Bestimmung von $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$

Um den noch fehlenden Term $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$ der charakteristischen Klasse zu bestimmen, benötigen wir nach Abschnitt 2.2.3 einen expliziten Ausdruck für den antisymmetrischen Anteil C_2^- des Bidifferentialoperators C_2, der in der Beschreibung des Sternproduktes $*_{\mathrm{Wick}}$ durch $f *_{\mathrm{Wick}} g = fg + \nu C_1(f,g) + \nu^2 C_2(f,g) + \ldots$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ erscheint. Mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ erweist sich die Berechnung dieses Bidifferentialoperators als deutlich aufwendiger als die entsprechende Berechnung für das Sternprodukt $*_{\mathrm{F}}$ in Proposition 2.3.17. Zudem zeigt es sich, daß es in diesem Fall im Gegensatz zur Situation bei $*_{\mathrm{F}}$ aufwendiger ist, eine Zerlegung des Bidifferentialoperators C_2^- wie in Bemerkung 2.2.16 zu finden, um $C_2^{-\sharp}$ bestimmen zu können, was ursächlich daran liegt, daß für $*_{\mathrm{Wick}}$ im Gegensatz zu $*_{\mathrm{F}}$ der Bidifferentialoperator C_1 nicht durch $\frac{1}{2}\{\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$ gegeben ist.

Für $f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)$ bestimmen wir nun $f*_{\mathrm{Wick}}g-g*_{\mathrm{Wick}}f$ bis auf Terme der Ordnung größer oder gleich drei in ν. Mit der expliziten Gestalt des faserweisen Produktes $\circ_{\mathrm{Wick}}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
f*_{\mathrm{Wick}}g-g*_{\mathrm{Wick}}f &= \frac{2\nu}{\mathrm{i}}g^{k_1\overline{l_1}}\sigma(i_s(Z_{k_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(f)i_s(\overline{Z}_{l_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(g)-i_s(Z_{k_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(g)i_s(\overline{Z}_{l_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(f))\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}}\right)^2 g^{k_1\overline{l_1}}g^{k_2\overline{l_2}}\sigma(i_s(Z_{k_1})i_s(Z_{k_2})\tau_{\mathrm{Wick}}(f)i_s(\overline{Z}_{l_1})i_s(\overline{Z}_{l_2})\tau_{\mathrm{Wick}}(g))\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}}\right)^2 g^{k_1\overline{l_1}}g^{k_2\overline{l_2}}\sigma(i_s(Z_{k_1})i_s(Z_{k_2})\tau_{\mathrm{Wick}}(g)i_s(\overline{Z}_{l_1})i_s(\overline{Z}_{l_2})\tau_{\mathrm{Wick}}(f))+O(\nu^3).
\end{aligned}$$

Um also $f*_{\mathrm{Wick}}g-g*_{\mathrm{Wick}}f$ bis auf Terme der Ordnung größer oder gleich drei in ν zu berechnen, benötigen wir für den Anteil $\frac{2\nu}{\mathrm{i}}g^{k_1\overline{l_1}}\sigma(i_s(Z_{k_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(f)i_s(\overline{Z}_{l_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(g)-i_s(Z_{k_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(g)i_s(\overline{Z}_{l_1})\tau_{\mathrm{Wick}}(f))$ nur $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(0)},\ldots,\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(3)}$, da für $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(k)}$ mit $k\geq 4$ entweder der symmetrische Grad oder der ν-Grad der vorkommenden Terme größer als eins ist. Für die Bestimmung des zweiten Anteils bis auf Terme der Ordnung größer oder gleich drei in ν ist nur derjenige Anteil von $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ vom ν-Grad 0 und vom $\deg_s$-Grad 2 relevant, so daß hierfür nur $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(2)}$ benötigt wird.

Lemma 3.3.15 *Für die Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ einer Funktion $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ gilt:*

$$\begin{aligned}
\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(0)} &= f\\
\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(1)} &= df\otimes 1\\
\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(2)} &= \frac{1}{2}Ddf\otimes 1-i_s(X_f)s_3^{(3)}\otimes 1\\
\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(3)} &= -\nu\left(i_s(X_f)s_2^{(4)}+\frac{1}{2}i_{X_f}(\Omega_1+ds_1^{(3)})\right)\otimes 1\\
&\quad+\nu\left(g^{k_1\overline{l_1}}g^{k_2\overline{l_2}}\Big(i_s(Z_{k_1})i_s(Z_{k_2})s_3^{(3)}i_s(\overline{Z}_{l_1})i_s(\overline{Z}_{l_2})D^2f\right.\\
&\quad-i_s(\overline{Z}_{l_1})i_s(\overline{Z}_{l_2})s_3^{(3)}i_s(Z_{k_1})i_s(Z_{k_2})D^2f\Big)\\
&\quad+g^{k_1\overline{l_1}}g^{k_2\overline{l_2}}\Big(i_s(Z_{k_1})i_s(Z_{k_2})i_s(X_f)s_3^{(3)}i_s(\overline{Z}_{l_1})i_s(\overline{Z}_{l_2})s_3^{(3)}\\
&\quad\left.-\,i_s(Z_{k_1})i_s(Z_{k_2})s_3^{(3)}i_s(\overline{Z}_{l_1})i_s(\overline{Z}_{l_2})i_s(X_f)s_3^{(3)}\Big)\right)\otimes 1+O(\nu^2,\deg_s^2),
\end{aligned}$$

wobei $O(\nu^2,\deg_s^2)$ Terme bezeichnet, deren ν-Grad oder symmetrischer Grad größer als eins ist. Ferner haben wir die Anteile vom totalen Grad 3 und 4 des Elementes s, das die Normierungsbedingung an r_{Wick} festlegt, als $s^{(3)}=(s_3^{(3)}+\nu s_1^{(3)})\otimes 1$ und $s^{(4)}=(s_4^{(4)}+\nu s_2^{(4)})\otimes 1$ geschrieben, wobei der untere Index den jeweiligen symmetrischen Grad bezeichnet.

Beweis: An den Rekursionsformeln für die Fedosov-Taylor-Reihe erkennt man, daß nur die Terme ${r_{\mathrm{Wick}}}^{(2)}=\delta s^{(3)}$ und ${r_{\mathrm{Wick}}}^{(3)}=\delta s^{(4)}+\delta^{-1}\left(\nabla {r_{\mathrm{Wick}}}^{(2)}-\frac{1}{\nu}{r_{\mathrm{Wick}}}^{(2)}\circ_{\mathrm{Wick}}{r_{\mathrm{Wick}}}^{(2)}+R+1\otimes\nu\Omega_1\right)$ des Elementes r_{Wick} für die Berechnung von $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(0)},\ldots,\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(3)}$ benötigt werden. Die Formeln für $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(0)},\ldots,\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(3)}$ erhält man hieraus mit einer langen Rechnung, auf deren Darstellung wir hier verzichten wollen, da man aus dieser keine besondere Einsicht gewinnt. □

Mit diesen Resultaten und mit der eingangs angegebenen Gleichung für $f*_{\mathrm{Wick}}g-g*_{\mathrm{Wick}}f$ findet man folgendes Lemma:

Lemma 3.3.16 *Der antisymmetrische Anteil* C_2^- *des Bidifferentialoperators* C_2*, der in der Beschreibung von* $*_{\mathrm{Wick}}$ *als* $f *_{\mathrm{Wick}} g = fg + \nu C_1(f,g) + \nu^2 C_2(f,g) + \ldots$ *erscheint, ist durch*

$$
\begin{aligned}
C_2^-(f,g) &= \frac{1}{2}\left(C_2(f,g) - C_2(g,f)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\Omega_1 + ds_1^{(3)}\right)(X_f, X_g) \qquad (3.51)\\
&\quad -\frac{1}{4} g^{k_1\overline{l_1}} g^{k_2\overline{l_2}} \left(i_s(Z_{k_1}) i_s(Z_{k_2}) D^2 f\, i_s(\overline{Z}_{l_1}) i_s(\overline{Z}_{l_2}) D^2 g - i_s(Z_{k_1}) i_s(Z_{k_2}) D^2 g\, i_s(\overline{Z}_{l_1}) i_s(\overline{Z}_{l_2}) D^2 f\right)
\end{aligned}
$$

gegeben, wobei $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *und* X_f, X_g *die entsprechenden Hamiltonschen Vektorfelder bezeichnen.*

Beweis: Mit den in Lemma 3.3.15 angegebenen Ergebnissen für $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(0)}, \ldots, \tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(3)}$ ergibt sich die obige Formel für $C_2^-(f,g)$ wiederum durch eine längere Rechnung unter Benutzung der eingangs angegebenen Gestalt von $f *_{\mathrm{Wick}} g - g *_{\mathrm{Wick}} f$. □

Bemerkung 3.3.17 *Erstaunlicherweise hängt das Ergebnis für* C_2^- *nicht von dem Tensorfeld* $s_3^{(3)}$ *ab, obwohl dieses in die relevanten Terme der Fedosov-Taylor-Reihe eingeht.*

Als nächsten Schritt in der Berechnung von $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$ müssen wir für diesen Bidifferentialoperator eine Zerlegung der Gestalt

$$C_2^-(f,g) = aS_\Gamma^3(f,g) + A(X_f, X_g) + (\{f, E(g)\} + \{E(f), g\} - E(\{f,g\})),$$

wobei $E : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M)$ einen Differentialoperator bezeichnet, bestimmen. Da $S_\Gamma^3(f,g)$ ein Bidifferentialoperator ist, dessen Symbol in jedem Argument von der Ordnung 3 ist (vgl. Bemerkung 2.2.16) und da C_2^- wegen (3.51) offensichtlich von der Ordnung 2 in jedem Argument ist, gilt in dem vorliegenden Fall sogar

$$C_2^-(f,g) = A(X_f, X_g) + (\{f, E(g)\} + \{E(f), g\} - E(\{f,g\})),$$

wobei die geschlossene Zweiform A auf M, bzw. deren Kohomologie-Klasse den fehlenden Term $c(*_{\mathrm{Wick}})^0$ der charakteristischen Klasse durch $c(*_{\mathrm{Wick}})^0 = -2C_2^{-\sharp} = -2[A]$ bestimmt. Betrachtet man das führende Symbol von C_2^-, so ist die Vermutung naheliegend, daß der Differentialoperator E in enger Beziehung zu dem Laplace-Operator $\triangle$ der Semi-Riemannschen Metrik g ist. Der Laplace Operator $\triangle \in \mathit{Diff}^2(\mathcal{C}^\infty(M))$ ist hierbei für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch

$$\triangle f = \frac{1}{2} g^{k\bar{l}} i_s(Z_k) i_s(\overline{Z}_l) D^2 f \qquad (3.52)$$

definiert und durch leichte Rechnung in lokalen Koordinaten findet man $\triangle f = g^{k\bar{l}} Z_k \overline{Z}_l f$. Im folgenden Lemma bestimmen wir $(\delta_{\mathrm{Chev}}\triangle)(f,g) = \{f, \triangle g\} + \{\triangle f, g\} - \triangle\{f,g\}$ um unsere Vermutung hinsichtlich der Gestalt des Differentialoperators E in der obigen Zerlegung zu bestätigen. Hierbei bezeichnet δ_{Chev} den Chevalley-Kohomologie-Operator der Chevalley-Kohomologie von $(\mathcal{C}^\infty(M), \{\,\cdot\,,\,\cdot\,\})$ mit Werten in $\mathcal{C}^\infty(M)$ bezüglich der adjungierten Darstellung.

Lemma 3.3.18 *Für alle* $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *gilt*

$$(\delta_{\mathrm{Chev}}\triangle)(f,g) = \{f, \triangle g\} + \{\triangle f, g\} - \triangle\{f,g\} = -\frac{2}{\mathrm{i}}\left(S(f,g) - S(g,f)\right) + \rho(X_f, X_g), \qquad (3.53)$$

wobei wir zur Abkürzung den Bidifferentialoperator S *durch*

$$S(f,g) := \frac{1}{4} g^{k_1\bar{l}_1} g^{k_2\bar{l}_2} i_s(Z_{k_1}) i_s(Z_{k_2}) D^2 f\, i_s(\overline{Z}_{l_1}) i_s(\overline{Z}_{l_2}) D^2 g$$

definiert haben und ρ *die Ricci-Form gemäß Gleichung (3.3) bezeichnet.*

Beweis: Der direkte aber auch aufwändigste Weg zum Beweis der obigen Formel ist eine längere Rechnung in lokalen Koordinaten, in die wesentlich die Eigenschaften des Semi-Kähler-Zusammenhangs und die explizite Gestalt der Hamiltonschen Vektorfelder eingehen. Da auch diese keine besondere Einsicht vermittelt, wollen wir auch hier auf eine detaillierte Darstellung verzichten. □

Mit der obigen Gestalt von $\delta_{\mathrm{Chev}}\triangle$ und dem Ausdruck für C_2^- aus Lemma 3.3.16 finden wir schließlich:

Proposition 3.3.19 *Der antisymmetrische Anteil C_2^- des Bidifferentialoperators C_2 ist für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch*

$$C_2^-(f,g) = -\frac{1}{2}\left(\Omega_1 + ds_1^{(3)} + \mathrm{i}\rho\right)(X_f, X_g) + \frac{\mathrm{i}}{2}(\delta_{\mathrm{Chev}}\triangle)(f,g) \tag{3.54}$$

gegeben. Also gilt

$$c(*_{\mathrm{Wick}})^0 = -2C_2^{-\sharp} = \left[\Omega_1 - \frac{1}{\mathrm{i}}\rho\right]. \tag{3.55}$$

Beweis: Die explizite Formel für C_2^- folgt direkt aus den Gleichungen (3.53) und (3.51) unter Berücksichtigung der Definition des Bidifferentialoperators S. Aus dieser Identität ist aber die Gleichung (3.55) offensichtlich. □

Wir erhalten also als Hauptresultat dieses Abschnittes den Satz:

Satz 3.3.20 *Deligne's charakteristische Klasse $c(*_{\mathrm{Wick}})$ eines mit der Fedosov-Konstruktion aus dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ erhaltenen Sternproduktes $*_{\mathrm{Wick}}$ ist durch*

$$c(*_{\mathrm{Wick}}) = \frac{1}{\nu}[\omega] + \frac{1}{\nu}\left[\Omega - \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho\right] \tag{3.56}$$

gegeben.

Beweis: Die Aussage ist eine direkte Konsequenz der Aussagen von Proposition 3.3.14 und Proposition 3.3.19. □

Vergleicht man dieses Resultat mit dem entsprechenden Resultat für $*_{\mathrm{F}}$, so fällt auf, daß hier tatsächlich eine vom Semi-Kähler-Zusammenhang herrührende Größe nämlich die Ricci-Form die Äquivalenzklasse des Sternproduktes beeinflußt. Im Gegensatz dazu war dort $c(*_{\mathrm{F}})$ unabhängig von der Wahl des symplektischen Zusammenhangs. In Bezug auf die anderen Abhängigkeiten der charakteristischen Klasse von den Eingangsdaten der Fedosov-Konstruktion deckt sich das hier gefundene Ergebnis mit dem für $*_{\mathrm{F}}$, da auch hier die Normierungsbedingung die Äquivalenzklasse unberührt läßt und wieder die formale Reihe geschlossener Zweiformen Ω in diese eingeht.

Als eine unmittelbare Konsequenz dieses Satzes finden wir:

Folgerung 3.3.21 *Zwei Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ für (M, ω, I), die aus den Eingangsdaten (Ω, s) und (Ω', s') konstruiert sind, sind äquivalent genau dann, wenn $[\Omega] = [\Omega']$.*

Beweis: Nach Satz 2.2.19 ii.) sind zwei Sternprodukte äquivalent genau dann, wenn ihre charakteristischen Klassen übereinstimmen. Wegen Satz 3.3.20 ist dies für die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ genau dann der Fall, wenn $[\Omega] = [\Omega']$ gilt. □

Weiter erhalten wir ebenfalls als Folgerung, daß mit der von uns angegebenen Konstruktion mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ Sternprodukte jeder Äquivalenzklasse von Sternprodukten konstruiert werden können. Diese Tatsache ist insbesondere deshalb von Belang, da wir zeigen wollen, daß wir mit dieser Konstruktion tatsächlich alle Sternprodukte vom Wick-Typ erhalten können.

Folgerung 3.3.22 *Für alle Klassen* $c \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ *auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit* (M,ω,I) *existiert ein mit der Fedosov-Konstruktion für* $\circ_{\mathrm{Wick}}$ *erhaltenes Sternprodukt* $*_{\mathrm{Wick}}$ *mit*

$$c(*_{\mathrm{Wick}}) = c. \tag{3.57}$$

Insbesondere ist also jedes Sternprodukt $\star$ *auf* (M,ω,I) *äquivalent zu einem der Sternprodukte* $*_{\mathrm{Wick}}$*.*

Beweis: Wir schreiben $c = \frac{1}{\nu}[\omega] + c_{\geq 0}$ mit $c_{\geq 0} \in H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ und sei $\mathrm{R}(c_{\geq 0})$ ein Repräsentant von $c_{\geq 0}$, d.h. $\mathrm{R}(c_{\geq 0})$ ist eine formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M und es gilt $[\mathrm{R}(c_{\geq 0})] = c_{\geq 0}$. Definiert man $\Omega := \nu\mathrm{R}(c_{\geq 0}) + \frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho$, so erfüllt Ω also alle Voraussetzungen, um in der Fedosov-Konstruktion mit $\circ_{\mathrm{Wick}}$ verwendet zu werden. Das mit diesem Ω konstruierte Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ erfüllt dann aber nach Satz 3.3.20

$$c(*_{\mathrm{Wick}}) = \frac{1}{\nu}[\omega] + [\mathrm{R}(c_{\geq 0})] = \frac{1}{\nu}[\omega] + c_{\geq 0} = c.$$

Sei $\star$ ein beliebiges Sternprodukt auf (M,ω) und sei $c(\star) \in \frac{[\omega]}{\nu} + H^2_{\mathrm{dR}}(M;\mathbb{C})[[\nu]]$ seine charakteristische Klasse. Nach der eben bewiesenen Aussage existiert dann ein Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ mit $c(*_{\mathrm{Wick}}) = c(\star)$. Nach Satz 2.2.19 ii.) folgt hieraus aber, daß $\star$ äquivalent zu $*_{\mathrm{Wick}}$ ist. □

3.4 Charakterisierung der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Eingangsdaten der Fedosov-Konstruktion mit $\circ_{\mathrm{Wick}}$ die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ Sternprodukte vom Wick-Typ auf der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M,ω,I) sind. Hierbei sind Sternprodukte vom Wick-Typ die natürliche Verallgemeinerung des Sternproduktes $\star_{\mathrm{Wick}}$ auf $(\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, welches wir in Abschnitt 1.1.2 betrachtet haben.

3.4.1 Sternprodukte vom Wick-Typ und mit Separation der Variablen

Zunächst wollen wir definieren, was man unter einem Sternprodukt vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M,ω,I) versteht, wobei diese Definition durch Eigenschaften von $\star_{\mathrm{Wick}}$ motiviert wird. Ferner wollen wir über einige bekannte Ergebnisse berichten, die im Zusammenhang mit solchen Sternprodukten stehen, insbesondere betrachten wir hierbei Sternprodukte mit Separation der Variablen, die in enger Beziehung zu den Sternprodukten vom Wick-Typ stehen.

Betrachtet man die explizite Gestalt des Sternproduktes $\star_{\mathrm{Wick}}$ auf $(\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, so stellt man fest, daß für alle holomorphen Funktionen $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ und alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ das Sternprodukt $f \star_{\mathrm{Wick}} h$ mit dem punktweisen Produkt von f und h übereinstimmt. Ferner gilt für alle antiholomorphen Funktionen $h' \in \overline{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n)$ und alle Funktionen $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$, daß $h' \star_{\mathrm{Wick}} g$ ebenfalls mit dem punktweisen Produkt von g und h' übereinstimmt, d.h. es gilt

$$f \star_{\mathrm{Wick}} h = fh \qquad \text{und} \qquad h' \star_{\mathrm{Wick}} g = h'g \tag{3.58}$$

für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n), h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), h' \in \overline{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n)$.

Möchte man eine analoge Eigenschaft eines Sternproduktes $\star$ auf eine beliebigen Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M,ω,I) formulieren, so ist der erste naive Ansatz hierzu zu fordern, daß für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M), h \in \mathcal{O}(M), h' \in \overline{\mathcal{O}}(M)$ die hierzu analogen Gleichungen erfüllt sein sollen. Für eine kompakte Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit sind jedoch sowohl die holomorphen als auch die antiholomorphen Funktionen gerade durch die konstanten Funktionen auf M gegeben. Da nun aber gemäß der Definition eines Sternproduktes die Bidifferentialoperatoren C_k für $k \geq 1$ auf den Konstanten verschwinden, gelten die zu (3.58) analogen Gleichungen auf einer kompakten Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit für jedes Sternprodukt, so daß diese Möglichkeit der Verallgemeinerung nicht sinnvoll erscheint. Stattdessen ist also eine Verallgemeinerung nötig, die von lokaler Natur ist, so daß topologische Eigenschaften diese Verallgemeinerung nicht wie für kompakte Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten zunichte machen. Betrachtet man also nochmals die Bidifferentialoperatoren, die $\star_{\mathrm{Wick}}$ beschreiben, so findet man, daß diese im ersten Argument nur in holomorphe Richtungen und im zweiten Argument nur in antiholomorphe Richtungen differenzieren, also bietet sich folgende Definition an: Ein Sternprodukt auf (M, ω, I) heißt Sternprodukt vom Wick-Typ, wenn die beschreibenden Bidifferentialoperatoren für $r \geq 1$ in einer holomorphen Karte von der Form

$$C_r(f, g) = \sum_{K, \overline{L}} C_r^{K; \overline{L}} \frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L}$$

mit gewissen Koeffizientenfunktionen $C_r^{K;\overline{L}}$ sind. Offenbar stellt dies auf Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten eine globale Charakterisierung dar. Offensichtlich ist diese Charakterisierung zu folgender Definition äquivalent.

Definition 3.4.1 ([20, Thm. 4.7]) *Ein Sternprodukt $\star$ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) heißt Sternprodukt vom Wick-Typ, falls für alle offenen Teilmengen $U \subseteq M$, alle $f, g, h, h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U), h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ die Gleichungen*

$$f \star h|_U = fh|_U \qquad \textit{und} \qquad h' \star g|_U = h'g|_U \tag{3.59}$$

gelten.

Diese Definition stellt offensichtlich eine für beliebige Semi-Kähler-Mannigfaltigkeiten vernünftige Verallgemeinerung von (3.58) dar.

Analog geht man vor, um die Verallgemeinerung des Sternproduktes $\star_{\mathrm{SdV}}$ auf $(\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit Separation der Variablen zu definieren. Hierbei sind im Vergleich zum Sternprodukt vom Wick-Typ lediglich die Rollen von holomorphen und antiholomorphen Richtungen vertauscht.

Definition 3.4.2 ([67, Sec. 2 Def.]) *Ein Sternprodukt $\star$ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) heißt Sternprodukt mit Separation der Variablen, falls für alle offenen Teilmengen $U \subseteq M$, alle $f, g, h, h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U), h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ die Gleichungen*

$$h \star f|_U = hf|_U \qquad \textit{und} \qquad g \star h'|_U = gh'|_U \tag{3.60}$$

gelten.

Aufschluß über die Beziehung zwischen Sternprodukten mit Separation der Variablen und Sternprodukten vom Wick-Typ gibt das folgende Lemma.

Lemma 3.4.3 *Ein Sternprodukt $\star$ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) ist ein Sternprodukt vom Wick-Typ genau dann, wenn das Sternprodukt $\star_{\mathrm{opp}}$ (vgl. Definition 2.4.1 (2.71)) ein Sternprodukt mit Separation der Variablen auf $(M, -\omega, I)$ ist.*

BEWEIS: Zunächst wollen wir bemerken, daß die Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit $(M, -\omega, I)$ aufgrund der Beziehung von symplektischer Form, Semi-Riemannscher Metrik und komplexer Struktur mit dem Negativen der Semi-Riemannschen Merik von (M, ω, I) versehen ist. Sei also $\star$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I), dann ist per Definition $f \star_{\mathrm{opp}} g = g \star f$ und offensichlich ist dies ein Sternprodukt mit Separation der Variablen auf $(M, -\omega, I)$. Wegen $\star_{\mathrm{opp}_{\mathrm{opp}}} = \star$ ist auch die andere Richung der Äquivalenz offensichtlich. □

In [20] haben M. Bordemann und S. Waldmann mit einem Spezialfall der Fedosov-Konstruktion für $*_{\text{Wick}}$ die Existenz von Sternprodukten vom Wick-Typ auf beliebigen Kähler-Mannigfaltigkeiten zeigen können. Im gleichen Zeitraum hat A. Karabegov in [67] eine Konstruktion von Sternprodukten mit Separation der Variablen gegeben, die auf einer lokalen Charakterisierung dieser Sternprodukte basiert und diese vermöge lokaler Ausdrücke definiert. Die erhaltenen Sternprodukte hängen hierbei von einer formalen Deformation der Kähler-Form ab, die konkret durch eine formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M vom Typ $(1,1)$ gegeben ist. Ferner formuliert Karabegov in dem zitierten Artikel einen Satz, nach dessen Aussage die Sternprodukte mit Separation der Variablen in Bijektion zu solchen formalen Deformationen der Kähler-Form sind. Auch zur kohomologischen Klassifikation der Sternprodukte mit Separation der Variablen hat Karabegov in [68] eine charakteristische Klasse definieren und bestimmen können. Ferner ist es in [69] gelungen zu zeigen, daß das von Bordemann und Waldmann konstruierte Sternprodukt das entgegengesetzte Sternprodukt zu dem Sternprodukt mit Separation der Variablen ist, das der trivialen Deformation der Kähler-Form entspricht. Eine naheliegende Frage, die wir mit A. Karabegov diskutiert haben, ist es nun, ob durch Modifikation der Konstruktion in [20] auch die anderen zu Sternprodukten mit Separation der Variablen entgegengesetzten Sternprodukte konstruiert werden können, die nicht der trivialen Deformation der Kähler-Form entsprechen. Wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden, ist dies in der Tat möglich, wobei die Konstruktion von $*_{\text{Wick}}$ die Grundlage für diese Verallgemeinerung ist. Es zeigt sich jedoch, daß der Nachweis aus [20] dafür, daß diese Sternprodukte vom Wick-Typ sind, nicht einfach auf die vorliegende allgemeinere Situation übertragen werden kann und zudem sind die Produkte $*_{\text{Wick}}$ nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Daten Ω und s tatsächlich vom Wick-Typ. Hierzu bedarf es einer detaillierten Analyse der Elemente r_{Wick} und der Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\text{Wick}}(f)$, der wir uns anschließend widmen werden. Ferner werden wir in Abschnitt 3.5 zeigen, daß unsere Konstruktion universell für alle Sternprodukte vom Wick-Typ ist.

3.4.2 Spezielle Eigenschaften von r_{Wick}

Wir betrachten wieder die Fedosov-Konstruktion mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\text{Wick}}$ aus Abschnitt 3.2.1. Für die genaue Analyse der Eigenschaften der hiermit erhaltenen Sternprodukte $\star_{\text{Wick}}$ erweist es sich als sinnvoll eine Redundanz, die bei der Beschreibung dieser Sternprodukte vermöge der Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\text{Wick}}$ auftaucht zu eliminieren. Diese besteht darin, daß die mit unserer Konstruktion gefundenen Produkte $*_{\text{Wick}}$ und ${*_{\text{Wick}}}'$ unter gewissen Bedingungen an die unterschiedlichen Daten (Ω, s) und (Ω', s'), aus denen man die Derivationen $\mathfrak{D}_{\text{Wick}}$ und ${\mathfrak{D}_{\text{Wick}}}'$ erhält, übereinstimmen können.

Lemma 3.4.4 *Die aus den Daten (Ω, s) und (Ω', s') konstruierten Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_{\text{Wick}}$ und ${\mathfrak{D}_{\text{Wick}}}'$ stimmen genau dann überein, wenn $s' = s + B \otimes 1$ und $\Omega = \Omega' + dB$ für eine formale Reihe $B = \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i B_i \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ gilt. Insbesondere sind in diesem Fall die Produkte $*_{\text{Wick}}$ und ${*_{\text{Wick}}}'$ identisch.*

Beweis: Die Aussage des Lemmas ist nur eine Reformulierung der Aussage von Proposition 1.3.27 für unsere konkrete Situation, in der die Abbildungen D_1 und D_2 übereinstimmen und durch ∇ mit dem Semi-Kähler-Zusammenhang gegeben sind. $\square$

Diese Aussage bedeutet nun wieder folgendes: Geht man von einer formalen Reihe Ω geschlossener Zweiformen und einem Element $s_{\text{tr}} \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(s_{\text{tr}}) = 0$ aus, das zusätzlich keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzt, und geht über zur Normierungsbedingung $s = s_{\text{tr}} + B \otimes 1$, so ist das gleichbedeutend zum Übergang zu $\Omega + dB$ unter Beibehaltung der Normierungsbedingung s_{tr}. Also stellt es keinerlei Einschränkung dar, wenn wir uns auf Normierungsbedingungen der Gestalt s_{tr} beschränken, sofern wir die formale Reihe geschlossener Zweiformen Ω noch beliebig variieren.

Sei also im folgenden $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ die mit einer Normierungsbedingung $\delta^{-1}r_{\mathrm{Wick}} = s_{\mathrm{tr}} \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(s_{\mathrm{tr}}) = 0$, die keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzt, und einer beliebigen formalen Reihe $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i \Omega_i$ geschlossener Zweiformen auf M konstruierte Fedosov-Derivation und $*_{\mathrm{Wick}}$ das hieraus resultierende Sternprodukt.

In dem von M. Bordemann und S. Waldmann angegebenen Nachweis, daß das von ihnen angegebene Produkt vom Wick-Typ ist, ist eine spezielle Eigenschaft des Elementes $r \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$, das die Fedosov-Derivation festlegt, essentiell. So gilt in dem dort betrachteten Fall für dieses Element nach [20, Lemma 4.5] für alle $q,p \geq 0$ die Gleichung

$$\pi_s^{p,0} r = \pi_s^{0,q} r = 0. \tag{3.61}$$

Diese Gleichungen für $p = 1$ und $q = 1$ bedeuten aber insbesondere, daß r keinen Anteil besitzt, der vom symmetrischen Grad 1 ist. Betrachtet man nun aber die Gleichung (3.8), aus der r_{Wick} rekursiv bestimmt werden kann, so taucht im Ausdruck für ${r_{\mathrm{Wick}}}^{(2k+1)}$ für alle $k \geq 1$ ein Summand der Gestalt $\nu^k \delta^{-1}(1 \otimes \Omega_k)$ auf. Dieser Term ist aber offensichtlich vom symmetrischen Grad 1, so daß durch die Hinzunahme der formalen Reihe Ω die obige Gleichung für r_{Wick} nicht gelten kann. Andererseits kann, um Sternprodukte mit beliebiger charakteristischer Klasse konstruieren zu können, wegen Satz 3.3.20 nicht auf die Hinzunahme von Ω verzichtet werden, so daß der einzige Ausweg, um dennoch zeigen zu können, daß man so Sternprodukte vom Wick-Typ erhalten kann, darin bestehen kann, daß die obige Gleichung in etwas abgewandelter Form gilt.

Mit den in Abschnitt 3.2.2 dargestellten Ergebnissen und Formeln gelingt es uns unter gewissen Voraussetzungen an die Eingangsdaten Ω, s_{tr} zu zeigen, daß r_{Wick} eine etwas abgeschwächte Form der Gleichung (3.61) erfüllt, die sich später als notwendig und hinreichend dafür erweisen wird, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ ist. Das Klassifikationsergebnis von A. Karabegov legt dabei nahe, daß der Fall, in dem Ω vom Typ $(1,1)$ ist, hierbei von besonderem Interesse sein sollte.

Proposition 3.4.5 *Sei $r_{\mathrm{Wick}} \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ die eindeutige Lösung der Gleichungen (3.7), wobei $s = s_{\mathrm{tr}}$ keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitze. Dann gilt:*

$$\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \pi_z(1\otimes\Omega) = 0 \quad \textit{und} \quad \pi_z s_{\mathrm{tr}} = 0 \tag{3.62}$$

$$\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \pi_{\overline{z}}(1\otimes\Omega) = 0 \quad \textit{und} \quad \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0. \tag{3.63}$$

Also gilt $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ genau dann, wenn Ω vom Typ $(1,1)$ ist und $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Äquivalenz (3.62). Es gelte hierzu zunächst $\pi_z(1\otimes\Omega) = 0$ und $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = 0$. Wendet man auf die Gleichung $\delta^{-1}r_{\mathrm{Wick}} = s_{\mathrm{tr}}$ die Projektion π_z an, so erhält man wegen $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = 0$ mit $\pi_z\delta^{-1} = \delta_z^{-1}\pi_z$ (vgl. Lemma 3.2.2 (3.24)) $\delta_z^{-1}\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$. Ferner erhält man durch Anwendung von π_z auf $\delta r_{\mathrm{Wick}} = \nabla r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} + R + 1\otimes\Omega$ wegen $\pi_z\delta = \delta_z\pi_z$, $\pi_z\nabla = \nabla_z\pi_z$ und $\pi_z R = 0 = \pi_z(1\otimes\Omega)$ die Gleichung

$$\delta_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \nabla_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}})\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}),$$

wobei wir außerdem Gleichung (3.16) verwendet haben. Man beachte, daß $\frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}})\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})$ wegen $\pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}})r_{\mathrm{Wick}}) = 0$ wohldefiniert ist. Auf diese Gleichung wenden wir nun δ_z^{-1} an und erhalten mit der Zerlegung $\delta_z\delta_z^{-1} + \delta_z^{-1}\delta_z + \pi_{\overline{z}} = \mathrm{id}$

$$\delta_z^{-1}\left(\nabla_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}})\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})\right) = \delta_z^{-1}\delta_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_z r_{\mathrm{Wick}} - \delta_z\delta_z^{-1}\pi_z r_{\mathrm{Wick}} - \pi_{\overline{z}}\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_z r_{\mathrm{Wick}},$$

da $\pi_{\overline{z}}\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \sigma(r_{\mathrm{Wick}}) = 0$ und $\delta_z^{-1}\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$. Mit den offensichtlichen Gleichungen $r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_z r_{\mathrm{Wick}}) = r_{\mathrm{Wick}}(\pi_z r_{\mathrm{Wick}})$ und $\pi_z(r_{\mathrm{Wick}}(\pi_z r_{\mathrm{Wick}})) = 0$ läßt sich diese Gleichung als

$$\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \delta_z^{-1}\left(\nabla_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\pi_z(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})(\pi_z r_{\mathrm{Wick}}))\right)$$

schreiben. Nun gilt, daß die Abbildung $L : \pi_z(\mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)) \ni a \mapsto \delta_z^{-1}(\nabla_z a - \frac{1}{\nu}\pi_z(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})a)) \in \pi_z(\mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M))$ den totalen Grad mindestens um eins erhöht, so daß es nach dem Fixpunkt-Satz (vgl. Anhang A.2 oder [109, Kor. A.1.6 ii.)]) einen eindeutigen Fixpunkt $b \in \pi_z(\mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M))$ mit $Lb = b$ gibt. Da aber $b = 0$ trivialerweise diese Gleichung löst, folgt aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes wegen $L\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_z r_{\mathrm{Wick}}$ schließlich $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = b = 0$. Für den Beweis der Umkehrung sei nun $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$, dann folgt aus $\delta^{-1} r_{\mathrm{Wick}} = s_{\mathrm{tr}}$ wieder durch Anwenden von π_z die Gleichung $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \delta_z^{-1}\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$. Ferner folgt mit $\pi_z R = 0$ aus der anderen Gleichung, die r_{Wick} bestimmt $\delta_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \nabla_z\pi_z r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}})\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) + \pi_z(1\otimes\Omega)$. Wegen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ impliziert diese Gleichung jedoch $\pi_z(1\otimes\Omega) = 0$. Der Beweis der Äquivalenz (3.63) erfolgt völlig analog unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaften von $\pi_{\overline{z}}$. □

An der Aussage der vorangehenden Proposition erkennt man leicht, daß unsere Vorgehensweise auf Normierungsbedingungen s_{tr}, die keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzen, zu reduzieren (was jedoch nach Lemma 3.4.4 keinerlei Einschränkung bedeutet), insofern sinnvoll war, als da die Bedingungen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ mit dem obigen Beweis, in dem wir diese Voraussetzung überhaupt nicht benötigt haben, implizieren, daß s_{tr} keinen solchen Anteil besitzen darf.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen können, daß die Gleichungen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ und $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ weitreichende Konsequenzen für die Gestalt von $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ haben. Da aber der explizite Ausdruck von $f *_{\mathrm{Wick}} g$ durch diese Anteile der Fedosov-Taylor-Reihen vollständig festgelegt ist, können wir unter diesen Bedingungen auch Aussagen über die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ gewinnen.

3.4.3 Spezielle Eigenschaften von τ_{Wick}

Unter den Voraussetzungen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ und $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ gelingte es uns nun, einfachere Rekursionsformeln für $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ abzuleiten.

Proposition 3.4.6 *Sei $r_{\mathrm{Wick}} \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ die eindeutige Lösung der Gleichungen (3.7), wobei $s = s_{\mathrm{tr}}$ keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitze. Und bezeichne τ_{Wick} die aus der entsprechenden Fedosov-Derivation bestimmte Fedosov-Taylor-Reihe.*

i.) Falls $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ gilt, dann erfüllt $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Gleichung

$$\delta_z\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = \nabla_z\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f) + \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f))\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}). \tag{3.64}$$

In diesem Fall ist $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ hierdurch wegen $\sigma(\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = f$ eindeutig festgelegt und kann für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ rekursiv aus

$$\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = f + \delta_z^{-1}\left(\nabla_z\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f) + \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(f))\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})\right) \tag{3.65}$$

bestimmt werden.

ii.) Falls $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ gilt, dann erfüllt $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Gleichung

$$\delta_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = \nabla_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) - \frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}}\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f))). \tag{3.66}$$

In diesem Fall ist $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ hierdurch wegen $\sigma(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = f$ eindeutig festgelegt und kann für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ rekursiv aus

$$\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = f + \delta_{\overline{z}}^{-1}\left(\nabla_{\overline{z}}\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) - \frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}}\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)))\right) \tag{3.67}$$

bestimmt werden.

BEWEIS: Es gelte $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$, dann folgt aus $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f) = 0$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ indem man π_z auf diese Gleichung anwendet mit den Identitäten aus Lemma 3.2.1 und Lemma 3.2.2 die Gleichung

$$\begin{aligned}
\delta_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) &= \nabla_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) - \frac{1}{\nu}\pi_z(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f) - \tau_{\mathrm{Wick}}(f) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) \\
&= \nabla_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) + \frac{1}{\nu}\pi_z(\tau_{\mathrm{Wick}}(f) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) = \nabla_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) + \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}),
\end{aligned}$$

da $\pi_z(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = \pi_z(\pi_z(r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = 0$. Man beachte, daß $\frac{1}{\nu}\pi_z(\pi_z(\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})$ wegen $\pi_z((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) r_{\mathrm{Wick}}) = 0$ wohldefiniert ist. Um zu zeigen, daß $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ hierdurch eindeutig festgelegt ist und aus der Gleichung (3.65) rekursiv bestimmt werden kann, wenden wir auf diese Gleichung δ_z^{-1} an und erhalten mit $\delta_z \delta_z^{-1} + \delta_z^{-1} \delta_z + \pi_{\overline{z}} = \mathrm{id}$ wegen $\delta_z^{-1} \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) = 0$ und $\pi_{\overline{z}} \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) = \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = f$

$$\delta_z^{-1}\left(\nabla_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) + \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})\right) = \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f) - f.$$

Die durch $T_f a := f + \delta_z^{-1}\left(\nabla_z a + \frac{1}{\nu}\pi_z(a \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})\right)$ definierte Abbildung $T_f : \pi_z(\mathcal{W}(M)) \to \pi_z(\mathcal{W}(M))$ ist nun wieder kontrahierend bezüglich der in Anhang A.2 definierten Metrik, so daß diese wieder einen eindeutigen Fixpunkt $b_f \in \pi_z(\mathcal{W}(M))$ besitzt. Offensichtlich gilt $\sigma(b_f) = \sigma(T_f b_f) = f$, da δ_z^{-1} den symmetrischen Grad um eins erhöht. Es bleibt zu zeigen, daß b_f tatsächlich die Gleichung $\delta_z b_f = \nabla_z b_f + \frac{1}{\nu}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})$ erfüllt. Hierzu definieren wir $A := -\delta_z b_f + \nabla_z b_f + \frac{1}{\nu}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})$ und leiten eine Fixpunkt-Gleichung für A ab, deren eindeutige Lösung durch 0 gegeben ist, womit dann b_f wie behauptet die Gleichung für $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ erfüllt. Da $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ wie wir oben gesehen haben aber ein Fixpunkt von T_f ist, gilt dann $b_f = \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$, da dieser eindeutig ist. Unter Benutzung der in Lemma 3.2.3 bewiesenen Identitäten findet man

$$\begin{aligned}
\delta_z A &= -\nabla_z \delta_z b_f + \frac{1}{\nu}\pi_z(\delta_z b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} + b_f \circ_{\mathrm{Wick}} \delta r_{\mathrm{Wick}}) \\
&= \nabla_z(A - \nabla_z b_f - \frac{1}{\nu}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})) - \frac{1}{\nu}\pi_z((A - \nabla_z b_f - \frac{1}{\nu}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) \\
&\quad + \frac{1}{\nu}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} (\nabla r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} + R + 1 \otimes \Omega)) \\
&= \nabla_z A - \frac{1}{\nu}\pi_z(A \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) - \frac{1}{\nu}\pi_z(\nabla_z b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} + b_f \circ_{\mathrm{Wick}} \nabla r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{1}{\nu}\pi_z(\nabla_z b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) \\
&\quad + \frac{1}{\nu^2}(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{1}{\nu}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} \nabla r_{\mathrm{Wick}}) - \frac{1}{\nu^2}\pi_z(b_f \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) \\
&= \nabla_z A - \frac{1}{\nu}\pi_z(A \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}),
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt $\pi_{a,z} R = 0$ und die Aussage von Proposition 3.4.5, nach der wegen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ $\pi_z(1 \otimes \Omega) = 0$ gilt, verwendet haben. Wendet man nun auf diese Gleichung wieder δ_z^{-1} an und verwendet nochmals die Zerlegung $\delta_z \delta_z^{-1} + \delta_z^{-1} \delta_z + \pi_{\overline{z}} = \mathrm{id}$, so findet man wegen $\delta_z^{-1} A = -\delta_z^{-1} \delta_z b_f + T_f b_f - f = -b_f + \sigma(b_f) + T_f b_f - f = 0$, wobei wir berücksichtigt haben, daß aus $b_f \in \pi_z(\mathcal{W}(M))$ insbesondere $\pi_{\overline{z}} b_f = \sigma(b_f)$ folgt, die Gleichung

$$\delta_z^{-1}\left(\nabla_z A - \frac{1}{\nu}\pi_z(A \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})\right) = A,$$

da offensichtlich $\pi_{\overline{z}} A = 0$ gilt. Wiederum besitzt die Abbildung $L : \pi_z(\mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M)) \ni a \mapsto \delta_z^{-1}(\nabla_z a - \frac{1}{\nu}\pi_z(a \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})) \in \pi_z(\mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M))$, da diese den totalen Grad mindestens um eins erhöht einen eindeutigen Fixpunkt. Da aber 0 trivialerweise diese Fixpunkt-Gleichung löst, folgt aus der Eindeutigkeit $A = 0$ und somit erfüllt b_f die Gleichung für $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$. Der Beweis der analogen Aussagen unter ii.) für $\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ unter der Voraussetzung $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ erfolgt völlig analog zum Beweis von i.). $\square$

Insbesondere erhalten wir also, daß unter den Voraussetzungen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ und $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ deutlich einfachere Rekursionsformeln als diejenigen für τ_{Wick} im Prinzip eine explizite Bestimmung von $f *_{\mathrm{Wick}} g$ ermöglichen. Als eine einfache Folgerung aus Proposition 3.4.6 erhalten wir ferner:

Lemma 3.4.7 *Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge von M.*

i.) Falls $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$, so gilt für alle $h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$

$$\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U. \tag{3.68}$$

ii.) Falls $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$, so gilt für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U)$

$$\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)|_U = h|_U. \tag{3.69}$$

Beweis: Nach Proposition 3.4.6 wissen wir, daß $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')$ unter der Voraussetzung $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h') = h' + \delta_z^{-1}\left(\nabla_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h') + \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h'))\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})\right)$$

ist. Um also für $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ zu zeigen, daß $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U$ gilt, genügt es zu zeigen, daß $h'|_U$ diese erfüllt. Also berechnen wir $h'|_U + \delta_z^{-1}\nabla_z h'|_U + \frac{1}{\nu}\pi_z(h' \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})|_U = h'|_U$, da $\nabla_z h'|_U = 0$ wegen $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ und da $\pi_z(h' \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) = h'\pi_z(r_{\mathrm{Wick}}) = 0$. Somit gilt aber (3.68). Der Beweis der entsprechenden Aussage ii.) für $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(h)$, wobei $h|_U \in \mathcal{O}(U)$, ergibt sich völlig analog zum Beweis von i.). □

Mit den in diesem Abschnitt dargestellten speziellen Eigenschaften von $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ haben wir bereits alle Ergebnisse bereitgestellt, um im folgenden Abschnitt ein hinreichendes Kriterium dafür angeben zu können, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ ist.

3.4.4 Die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ

Proposition 3.4.8 *Sei $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ die aus den Daten $(\Omega, s_{\mathrm{tr}})$ konstruierte Fedosov-Derivation und $*_{\mathrm{Wick}}$ das resultierende Sternprodukt auf der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I). Ferner sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge von M.*

i.) Falls $\pi_z(1 \otimes \Omega) = \pi_z(s_{\mathrm{tr}}) = 0$ gilt, so gilt für alle $g, h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$

$$h' *_{\mathrm{Wick}} g|_U = h'g|_U. \tag{3.70}$$

ii.) Falls $\pi_{\overline{z}}(1 \otimes \Omega) = \pi_{\overline{z}}(s_{\mathrm{tr}}) = 0$ gilt, so gilt für alle $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U)$

$$f *_{\mathrm{Wick}} h|_U = fh|_U. \tag{3.71}$$

Falls also $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0$ gilt und Ω vom Typ $(1,1)$ ist, so ist das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I).

Beweis: Wir zeigen wieder nur die Behauptung i.) der Beweis von ii.) ergibt sich analog. Nach Proposition 3.4.5 folgt aus den Voraussetzungen an Ω und s_{tr}, daß $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$. Wegen Lemma 3.4.7 i.) impliziert dies jedoch, daß $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U$ und folglich gilt für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$

$$h' *_{\mathrm{Wick}} g|_U = \sigma((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h'))\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)))|_U = \sigma(h' \circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)))|_U = h'\sigma(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g))|_U = h'g|_U.$$

□

Bemerkenswerterweise zeigt die Aussage der vorangehenden Proposition, daß die beiden charakterisierenden Eigenschaften, durch die der Begriff Sternprodukt vom Wick-Typ definiert ist, auch einzeln für Sternprodukte realisiert werden können. Wir wollen ein Sternprodukt $\star$, daß für alle $g, h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ die Gleichung $h' \star g|_U = h'g|_U$ erfüllt vom links-Semi-Wick-Typ nennen. In einer lokalen holomorphen Karte sind die beschreibenden Bidifferentialoperatoren C_r eines solchen Sternproduktes für $r \geq 1$ von der Gestalt

$$C_r(f, g) = \sum_{K, \overline{L}, M} C_r^{K;\overline{L},M} \frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|+|M|} g}{\partial \overline{z}^L \partial z^M}.$$

Analog nennen wir ein Sternprodukt $\star$ vom rechts-Semi-Wick-Typ, falls für alle $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U)$ die Gleichung $f \star h|_U = fh|_U$ erfüllt ist. In einer lokalen holomorphen Karte besitzen hier die C_r die Gestalt

$$C_r(f, g) = \sum_{K, \overline{M}, \overline{L}} C_r^{K,\overline{M};\overline{L}} \frac{\partial^{|K|+|\overline{M}|} f}{\partial z^K \partial \overline{z}^M} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L}.$$

Wir wollen nun beginnen zu zeigen, daß die Voraussetzungen aus Proposition 3.4.8 nicht nur hinreichend dafür sind, daß das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ vom (links-)rechts-Semi-Wick-Typ ist, sondern daß diese auch notwendig sind.

Als ersten Schritt zeigen wir:

Lemma 3.4.9 *Sei τ_{Wick} die aus der obigen Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ konstruierte Fedosov-Taylor-Reihe. Ferner sei $U \subseteq M$ eine offene Menge.*

i.) Falls für alle $h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ gilt, daß die Fedosov-Taylor-Reihe $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U$ erfüllt, so gilt $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$.

ii.) Falls für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U)$ gilt, daß die Fedosov-Taylor-Reihe $\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)|_U = h|_U$ erfüllt, so gilt $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$.

BEWEIS: Aus $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h') = 0$ erhalten wir durch Anwenden der Projektion π_z, daß $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')$ die Gleichung $0 = -\delta_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h') + \nabla_z \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h') - \frac{1}{\nu} \pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h') - (\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})$ erfüllt. Schränkt man diese Gleichung auf U ein und verwendet, daß $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U$ und die Tatsache, daß h' auf U antiholomorph ist, so erhält man wegen $\delta_z h' = 0$ und $\nabla_z h'|_U = 0$ die Gleichung $0 = \frac{1}{\nu} h' \pi_z r_{\mathrm{Wick}}|_U - \frac{1}{\nu} \pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h'))|_U$, da $\pi_z(\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h') \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})|_U = \pi_z(h' \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})|_U = h' \pi_z r_{\mathrm{Wick}}|_U$. Also gilt für alle $h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$

$$0 = \frac{1}{\nu} \pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} (\tau_{\mathrm{Wick}}(h') - h'))|_U.$$

Man beachte, daß dieser Ausdruck wegen $\pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}})(\tau_{\mathrm{Wick}}(h') - h'))|_U = 0$ wohldefiniert ist. Betrachtet man nun die Terme dieser Gleichung, die vom totalen Grad $l \geq 1$ sind, so liefert dies:

$$0 = \frac{1}{\nu} \sum_{r=1}^{l} \pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}}{}^{(l+2-r)}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)})|_U.$$

Wir zeigen nun durch Induktion über den totalen Grad, daß hieraus $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ folgt. Sei nun (z, V) eine lokale holomorphe Karte von M und $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Funktion mit $\mathrm{supp}(\chi) \subseteq V$, derart, daß $\chi|_U = 1$, wobei $U \subseteq V$, dann ist für alle $1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}}(M)$ die Funktion $\chi \overline{z}^k \in \mathcal{C}^\infty(M)$ und es gilt $\chi \overline{z}^k|_U = \overline{z}^k|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$. Verwenden wir nun die obige Gleichung für $h' = \chi \overline{z}^k$ und $l = 1$, so finden wir wegen $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi \overline{z}^k)^{(1)}|_U = d\overline{z}^k|_U$, daß für $1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}}(M)$ $0 = \frac{2}{\mathrm{i}} g^{n\overline{k}} i_s(Z_n) \pi_z r_{\mathrm{Wick}}{}^{(2)}|_U$ gilt. Folglich können, da g nicht ausgeartet ist, in $\pi_z r_{\mathrm{Wick}}{}^{(2)}|_U$ nur nichtverschwindende Terme vorkommen, wenn deren symmetrischer Grad 0 ist. Da aber s_{tr} keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzt und δ^{-1} den symmetrischem Grad um eins erhöht, ist aus der Rekursionsformel (3.8) für r_{Wick} klar, daß r_{Wick} keinen Anteil vom symmetrischen Grad 0 besitzt, somit besitzt aber auch $\pi_z r_{\mathrm{Wick}}$ keinen Anteil vom symmetrischen Grad 0 und es folgt $\pi_z r_{\mathrm{Wick}}{}^{(2)}|_U = 0$. Da man diese Argumentation mit allen holomorphen Karten von M wiederholen kann, folgt also schließlich

$\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(2)} = 0$. Wir nehmen also nun an, daß für $2 \leq s \leq n$ bereits $\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(s)} = 0$ gezeigt sei, und wollen mit der Gleichung $0 = \frac{1}{\nu}\sum_{r=1}^{l} \pi_z((\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(l+2-r)}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)})|_U$, die für alle $l \geq 1$ gilt zeigen, daß dann auch $\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(n+1)} = 0$, und somit induktiv $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ folgt. Für $l = n$ liefert diese Gleichung aber wegen der Induktionsannahme $0 = \frac{1}{\nu}\pi_z((\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(n+1)}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(1)})|_U$. Indem wir die obige Argumentation, die zum Beweis der Tatsache $\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(2)} = 0$ führte wiederholen, folgt aus dieser Gleichung aber $\pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}^{(n+1)} = 0$, womit die Aussage i.) des Lemmas bewiesen wäre. In völlig analoger Weise kann natürlich auch die Aussage ii.) bewiesen werden, wobei hier anstelle der lokal antiholomorphen Funktionen $\chi\overline{z}^k$ die lokal holomorphen Funktionen χz^k in einer lokalen holomorphen Karte von M verwendet werden, um aus der Gleichung $0 = \frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}((\tau_{\mathrm{Wick}}(h) - h) \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}}))|_U$ wieder per Induktion über den totalen Grad $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ zu zeigen. □

Mit diesem Lemma, der Aussage von Lemma 3.4.7 und Proposition 3.4.5 folgen also folgende Äquivalenzen:

$$\begin{array}{l} \pi_z s_{\mathrm{tr}} = 0 \\ \pi_z(1 \otimes \Omega) = 0 \end{array} \iff \pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0 \iff \begin{array}{l} \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U \quad \forall h' \in \mathcal{C}^\infty(M) \\ \text{mit } h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U), \end{array} \tag{3.72}$$

$$\begin{array}{l} \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0 \\ \pi_{\overline{z}}(1 \otimes \Omega) = 0 \end{array} \iff \pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0 \iff \begin{array}{l} \pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)|_U = h|_U \quad \forall h \in \mathcal{C}^\infty(M) \\ \text{mit } h|_U \in \mathcal{O}(U). \end{array} \tag{3.73}$$

Um diese Kette von Äquivalenzen zu vervollständigen, wollen wir nun noch zeigen, daß die Tatsache, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ vom (links-)rechts-Semi-Wick-Typ ist, die Gleichung $\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)|_U = h|_U$ für $h|_U \in \mathcal{O}(U)$ ($\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U$ für $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$) impliziert.

Lemma 3.4.10 *Sei $U \subseteq M$ eine offene Teilmenge von M.*

i.) Für das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ gelte $h' *_{\mathrm{Wick}} g|_U = h'g|_U$ für alle $g, h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$, dann gilt $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U$ für alle $h' \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$.

ii.) Für das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ gelte $f *_{\mathrm{Wick}} h|_U = fh|_U$ für alle $f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U)$, dann gilt $\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)|_U = h|_U$ für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $h|_U \in \mathcal{O}(U)$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Aussage i.) und schreiben $\tau_{\mathrm{Wick}}(g) = g + \sum_{r=1}^\infty \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(r)}$ und $\tau_{\mathrm{Wick}}(h') = h' + \sum_{l=1}^\infty \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(l)}$, womit man $h' *_{\mathrm{Wick}} g = h'g + \sum_{k=2}^\infty \sum_{r=1}^{k-1} \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(k-r)})$ findet. Nun ist $\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(k-r)}$ vom totalen Grad k also kann $\sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(k-r)})$ nur dann nichtverschwindend sein, wenn k gerade ist, und folglich ist

$$h' *_{\mathrm{Wick}} g = h'g + \sum_{s=1}^\infty \sum_{r=1}^{2s-1} \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)}).$$

Da dieser Ausdruck nach Voraussetzung auf U mit $h'g$ übereinstimmt, gilt also

$$\sum_{s=1}^\infty \sum_{r=1}^{2s-1} \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)})|_U = 0.$$

Da ferner die einzig nichtverschwindenden Terme in $\sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)})$ vom ν-Grad s sind, folgt, daß somit für alle $s \geq 1$ die Summanden einzeln verschwinden, d.h.

$$\sum_{r=1}^{2s-1} \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)} \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)})|_U = \sum_{r=1}^{2s-1} \sigma((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)}) \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)}))|_U = 0.$$

Wir betrachten diese Gleichung zunächst für $s = 1$, d.h. $0 = \sigma((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(1)}) \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(1)}))|_U$. Sei nun (z, V) eine holomorphe Karte von M und $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Funktion mit $\mathrm{supp}(\chi) \subseteq V$ und $\chi|_{U'} = 1$ für eine offene Menge $U' \subseteq V$. Ferner gelte $U \cap U' \neq \emptyset$. Dann betrachten wir die Funktionen $\chi\overline{z}^k \in$

$\mathcal{C}^\infty(M)$ mit $\chi\overline{z}^k|_{U'} = \overline{z}^k|_{U'}$. Wegen $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^k)^{(1)}|_{U\cap U'} = d\overline{z}^k|_{U\cap U'}$ erhalten wir aus obiger Gleichung $0 = \frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{n\overline{k}} i_s(Z_n)\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(1)}|_{U\cap U'}$ für alle $1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}}(M)$. Da nun aber g nicht ausgeartet ist, folgt hieraus $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(1)}|_{U\cap U'} = 0$. Da man diese Argumentation mit allen lokalen holomorphen Karten, für die $U\cap U' \neq \emptyset$ gilt, wiederholen kann, erhalten wir schließlich, $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(1)}|_U = 0$. Wir wollen nun per Induktion über den totalen Grad zeigen, daß aus $\sum_{r=1}^{2s-1}\sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)})\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)}))|_U = 0$ für alle $s \geq 1$ insgesamt $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)}|_U = 0$ für $r \geq 1$ folgt. Hierzu benötigen wir folgendes Sublemma:

Sublemma 3.4.11 *Sei (z,V) eine holomorphe Karte von M um $p \in M$ mit $z(p) = 0$. Ferner sei $\chi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ eine Funktion mit $\mathrm{supp}(\chi) \subseteq V$ und $\chi|_{U'} = 1$ auf einer offenen Menge $U' \subseteq V$ und es gelte $p \in U'$. Weiter sei $*_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom links-Semi-Wick-Typ, dann gilt für alle $r \geq 1$ $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r})^{(s)}|_p = 0$ für $0 \leq s < r$ und $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r})^{(r)}|_p = d\overline{z}^{k_1}\vee\ldots\vee d\overline{z}^{k_r}|_p$.*

Beweis: Da die glatten Funktionen $\chi\overline{z}^k$ lokal antiholomorph auf U' sind, gilt wegen $\chi^r|_{U'} = 1$ für $r \in \mathbb{N}$ offensichtlich $\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r}|_{U'} = (\chi\overline{z}^{k_1})\ldots(\chi\overline{z}^{k_r})|_{U'} = (\chi\overline{z}^{k_1})*_{\mathrm{Wick}}\ldots*_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_r})|_{U'}$ aufgrund der Voraussetzung, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ vom links-Semi-Wick-Typ ist. Wendet man auf diese Gleichung τ_{Wick} an, so erhält man $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r})|_{U'} = \tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1})\circ_{\mathrm{Wick}}\ldots\circ_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_r})|_{U'}$, bzw. indem man die Terme vom totalen Grad s einzeln betrachtet

$$\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r})^{(s)}|_{U'} = \sum_{l_1+\ldots+l_r=s}\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1})^{(l_1)}\circ_{\mathrm{Wick}}\ldots\circ_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_r})^{(l_r)}|_{U'}.$$

Für $s < r$ ist mindestens eines der $l_i = 0$, so daß wir aus $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_i})^{(0)}|_{U'} = \overline{z}^{k_i}$ wegen $z(p) = 0$ für $s < r$ die Gleichung $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r})^{(s)})|_p = 0$ erhalten. Für $s = r$ ist der einzige im Punkt p nichtverschwindende Summand derjenige, bei dem $l_1 = \ldots = l_r = 1$ gilt. Wegen $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^k)^{(1)}|_{U'} = d\overline{z}^k|_{U'}$ erhalten wir also unter Berücksichtigung der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{Wick}}$

$$\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_r})^{(r)}|_p = d\overline{z}^{k_1}\circ_{\mathrm{Wick}}\ldots\circ_{\mathrm{Wick}}d\overline{z}^{k_r}|_p = d\overline{z}^{k_1}\vee\ldots\vee d\overline{z}^{k_r}|_p,$$

womit das Sublemma bewiesen ist. $\bigtriangledown$

Wir nehmen nun an, daß bereits $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)}|_U = 0$ für $1 \leq r \leq n-1$ gezeigt sei, wobei $n \geq 2$ sei. Mit dieser Indukionsannahme folgt aus $\sum_{r=1}^{2s-1}\sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)})\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)}))|_U = 0$ für alle s mit $2s \geq n+1$ die Gleichung

$$0 = \sum_{r=n}^{2s-1}\sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(r)})\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(g)^{(2s-r)}))|_U.$$

Sei nun $p \in U$ und (z,V) eine Karte wie im obigen Sublemma, dann setzen wir, da diese Gleichung für beliebige $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt $g = \chi\overline{z}^{k_1}\ldots\overline{z}^{k_{2s-n}}$ in diese Gleichung ein und werten am Punkt $p \in U$ aus und erhalten wegen der Aussagen des Sublemmas

$$0 = \left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}}\right)^{2s-n} g^{l_1\overline{k}_1}\ldots g^{l_{2s-n}\overline{k}_{2s-n}}\sigma(i_s(Z_{l_1})\ldots i_s(Z_{l_{2s-n}})\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(n)})|_p$$

für alle s mit $2s \geq n+1$. Wir müssen nun eine Fallunterscheidung durchführen, ob n gerade oder ungerade ist. Falls $n = 2t$ mit $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ ist, so enthält $\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t)}$ nur Terme mit geradem (positivem, da $\sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t)}) = 0$) symmetrischen Grad und die obige Gleichung liefert, da g nicht ausgeartet ist: $\sigma(i_s(Z_{l_1})\ldots i_s(Z_{l_{2(s-t)}})\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t)})|_p = 0$ für alle $2t \geq s \geq t+1$ (für $s > 2t$ ist dies nämlich natürlich trivialerweise erfüllt, da der höchste symmetrische Grad in $\tau_{\mathrm{Wick}}^{(2t)}$ durch $2t$ gegeben ist). Also folgt, da $\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t)}$ nur Terme mit geradem symmetrischen Grad enthält, daß $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t)}|_p = 0$. Falls $n = 2t+1$ mit $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, so enthält $\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t+1)}$ nur Terme mit ungeradem symmetrischen Grad und die obige Gleichung liefert wieder $\sigma(i_s(Z_{l_1})\ldots i_s(Z_{l_{2(s-t)-1}})\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t+1)})|_p = 0$ für $2t+1 \geq s \geq t+1$. Also folgt, da $\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t+1)}$ nur Terme mit ungeradem symmetrischen Grad enthält, daß $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(2t+1)}|_p = 0$. Folglich gilt für n unabhängig davon ob n gerade oder ungerade ist $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(n)}|_p = 0$. Da aber der

Punkt $p \in U$ beliebig war, schließen wir hieraus $\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')^{(n)}|_U = 0$ und die erste Aussage des Lemmas ist bewiesen. Der Beweis der Aussage ii.) verläuft vollständig analog zum Beweis von i.). Hierzu beweist man analog zu obigem Sublemma, daß falls $*_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom rechts-Semi-Wick-Typ ist, in einer wie dort gewählten Karte, die Gleichungen $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi z^{k_1} \ldots z^{k_r})^{(r)}|_p = dz^{k_1} \vee \ldots \vee dz^{k_r}|_p$ und $\tau_{\mathrm{Wick}}(\chi z^{k_1} \ldots z^{k_r})^{(s)}|_p = 0$ für $s < r$ gelten. Indem man dann die aus der Voraussetzung für $s \geq 1$ folgende Gleichung $0 = \sum_{r=1}^{2s-1} \sigma((\pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(f)^{(2s-r)}) \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)^{(r)}))|_U$ auf den Funktionen $f = \chi z^{k_1} \ldots z^{k_{2s-n}}$ am Punkt $p \in U$ auswertet und die Induktionsannahme $\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)^{(l)}|_U = 0$ für $1 \leq l \leq n-1$ verwendet, schließt man analog zur obigen Argumentation $\pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)^{(n)}|_U = 0$. Der Beweis des Induktionsanfangs ergibt sich hierbei natürlich auch analog zur Vorgehensweise in i.), wobei hier die Funktionen χz^k für f einzusetzen sind. □

Mit dem eben bewiesenen Lemma können wir die Kette von Äquivalenzen vervollständigen und wir haben insgesamt den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4.12 *Sei $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ die aus den Daten $(\Omega, s_{\mathrm{tr}})$ für das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ konstruierte Fedosov-Derivation auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) und $*_{\mathrm{Wick}}$ das durch $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ induzierte Sternprodukt, dann gelten folgende Äquivalenzen:*

i.)

$$\begin{array}{c} \pi_z s_{\mathrm{tr}} = 0 \\ \pi_z(1 \otimes \Omega) = 0 \end{array} \iff \pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0 \iff \begin{array}{l} \pi_z \tau_{\mathrm{Wick}}(h')|_U = h'|_U \quad \forall h' \in \mathcal{C}^\infty(M) \\ \mathit{mit}\ h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U) \end{array} \tag{3.74}$$

$$\iff h' *_{\mathrm{Wick}} g|_U = h' g|_U \quad \forall g, h' \in \mathcal{C}^\infty(M)\ \mathit{mit}\ h'|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U), \tag{3.75}$$

ii.)

$$\begin{array}{c} \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0 \\ \pi_{\overline{z}}(1 \otimes \Omega) = 0 \end{array} \iff \pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0 \iff \begin{array}{l} \pi_{\overline{z}} \tau_{\mathrm{Wick}}(h)|_U = h|_U \quad \forall h \in \mathcal{C}^\infty(M) \\ \mathit{mit}\ h|_U \in \mathcal{O}(U) \end{array} \tag{3.76}$$

$$\iff f *_{\mathrm{Wick}} h|_U = f h|_U \quad \forall f, h \in \mathcal{C}^\infty(M)\ \mathit{mit}\ h|_U \in \mathcal{O}(U). \tag{3.77}$$

iii.) Also ist das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ auf (M, ω, I) vom Wick-Typ genau dann, wenn Ω vom Typ $(1,1)$ ist und $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0$ gilt.

Beweis: Die Äquivalenzen in (3.74) und (3.76) haben wir bereits bewiesen vgl. (3.72) und (3.73). Die jeweils letzte Aquivalenz in i.) (3.75) und ii.) (3.77) folgt dann aber schließlich aus Lemma 3.4.10 und Proposition 3.4.8. Die Aussage iii.) ist eine unmittelbare Konsequenz der Definition eines Sternproduktes vom Wick-Typ und der Aussagen i.) und ii.). □

Nachdem wir nun diejenigen Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$, die vom Wick-Typ sind, eindeutig charakterisiert haben, wollen wir diese im nächsten Abschnitt mit den von A. Karabegov konstruierten Sternprodukten mit Separation der Variablen in Verbindung bringen.

3.5 Die Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß mit der von uns angegebenen Konstruktion von $*_{\mathrm{Wick}}$ alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) erhalten werden können. Hierzu geben wir einen neuen elementaren Beweis, der auf einfachen Argumenten unter Benutzung der Hochschild-Kohomologie basiert, dafür, daß Sternprodukte vom Wick-Typ in Bijektion zu formalen Reihen geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ auf M sind. Ferner werden wir für jedes Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ herausfinden können, mit welchem der von A. Karabegov mit lokalen Argumenten konstruierten Sternprodukte, dieses übereinstimmt. Hierzu werden wir einen gegenüber dem Beweis in [69] für $\Omega = 0$ deutlich einfacheren Beweis für beliebige Ω angeben. Schließlich geben wir der Vollständigkeit halber durch leichte Modifikation unserer ursprünglichen Konstruktion eine Fedosov-Konstruktion für die von A. Karabegov definierten Sternprodukte mit Separation der Variablen an.

3.5.1 Eine Redundanz der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ

Als einen ersten Schritt zum Ziel der Identifikation der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ, die wir bereits eindeutig durch Bedingungen an die Anfangsdaten Ω und s_{tr} charakterisiert haben, wollen wir zeigen, daß diese Sternprodukte tatsächlich nicht von der Normierungsbedingung s_{tr} abhängen, so daß die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ nur durch eine formale Reihe geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ bestimmt werden.

3.5.1.1 Äquivalenztransformationen zwischen $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$

In diesem Abschnitt wollen wir explizit Äquivalenztransformationen zwischen äquivalenten Sternprodukten $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ konstruieren. Zunächst wollen wir hierbei, um so allgemein wie möglich zu bleiben, keine weiteren Voraussetzungen machen. Insbesondere machen wir weder die Einschränkung, daß die verwendeten Normierungsbedingungen keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzen, noch wollen wir uns auf die Sternprodukte vom Wick-Typ einschränken.

Wir betrachten also allgemein zwei Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$, die aus den Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}'$ zu den Eingangsdaten (Ω, s) und (Ω', s') konstruiert seien. Aufgrund der Folgerung 3.3.21 aus Satz 3.3.20 sind diese beiden Sternprodukte genau dann äquivalent , wenn $[\Omega] = [\Omega']$, bzw. $\Omega = \Omega' + dC$, wobei $C = \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i C_i \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$. Wir wollen unter diesen Bedingungen zeigen, daß es einen faserweisen Automorphismus $\mathcal{A}_h := \exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h))$ von $\circ_{\mathrm{Wick}}$ mit $h \in \mathcal{W}_3(M)$ und $\sigma(h) = 0$ gibt, so daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}' = \mathcal{A}_h \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} \mathcal{A}_{-h}$ gilt. Aus der Aussage des Korollars 1.3.21 erhält man dann nämlich direkt eine Äquivalenztransformation von $*_{\mathrm{Wick}}$ nach $*_{\mathrm{Wick}}'$ durch $A_h f := \sigma(\mathcal{A}_h \tau_{\mathrm{Wick}}(f))$ mit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Eine ähnliche Konstruktion hat Fedosov in [45, Thm. 4.3] angegeben, um Äquivalenztransformationen für die Sternprodukte $*_{\mathrm{F}}$ zu konstruieren. Mit der Aussage des Lemmas 1.3.20 erhalten wir für alle $h \in \mathcal{W}_3(M)$

$$\mathcal{A}_h \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} \mathcal{A}_{-h} = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}} \left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)} (\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h) \right).$$

Dieser Ausdruck soll aber für das von uns gesuchte $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}'$ übereinstimmen. Aufgrund der expliziten Gestalt von $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}'$ bedeutet das aber, daß es ein $h \in \mathcal{W}_3(M)$ geben muß derart, daß $r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}} - \frac{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)} (\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h)$ zentral ist, d.h. wir müssen zeigen, daß es eine formale Reihe $C \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ von Einsformen auf M und $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ gibt derart, daß

$$r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}} - \frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)} (\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h) = 1 \otimes C. \tag{3.78}$$

Zunächst leiten wir eine notwendige Bedingung dafür ab, daß diese Gleichung erfüllt werden kann, indem wir $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ auf sie anwenden.

Lemma 3.5.1 *Wenn die Gleichung (3.78) erfüllt ist, gilt*

$$\Omega - \Omega' = dC. \tag{3.79}$$

Beweis: Die Gleichungen für r_{Wick} und $r_{\mathrm{Wick}}{}'$ liefern direkt

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) = 1 \otimes (\Omega - \Omega') + \frac{1}{\nu}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} (r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}).$$

Ferner erhält man mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}^2 = 0$ unter Benutzung der Formel $\frac{\exp(x)-\mathrm{id}}{x} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} x^{r-1}$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h)\right) &= \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{r-1} [\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^{r-1}](\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h) \\ &= \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{r-1} \sum_{t=0}^{r-2} \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^t \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h) \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^{r-2-t}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt

$$[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^{r-1}] = \sum_{t=0}^{r-2} \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^t [\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)] \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^{r-2-t}$$

und $[\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}, \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)] = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h)$ verwendet haben, da $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ eine $\circ_{\mathrm{Wick}}$-Superderivation ist. In dem obigen Ergebnis ersetzen wir nun wieder $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h$ durch $\frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) - 1 \otimes C$, was aus (3.78) wegen der Zentralität von $1 \otimes C$ folgt und erhalten wieder wegen $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(1 \otimes C) = 0$

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h)\right) = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{r-1} \sum_{t=0}^{r-2} \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^t \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(b) \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^{r-2-t} b,$$

wobei wir zur Abkürzung $b = \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}})$ geschrieben haben. Hieraus erhalten wir dann mit dem im Anschluß bewiesenen Sublemma 3.5.2

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}(\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} h)\right) = \frac{1}{\nu}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} (r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}).$$

Da auf der anderen Seite $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(1 \otimes C) = 1 \otimes dC$ gilt, erhalten wir also schließlich Gleichung (3.79).

Sublemma 3.5.2 *Für alle $b \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$, alle $h \in \mathcal{W}_3(M)$ und ein faserweises, assoziatives Produkt $\circ$ auf $\mathcal{W} \otimes \Lambda(M)$ gilt*

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{r-1} \sum_{t=0}^{r-2} \frac{1}{r!} \mathrm{ad}_\circ(h)^t \mathrm{ad}_\circ(b) \mathrm{ad}_\circ(h)^{r-2-t} b = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)} b\right) \circ \left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right) - \mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)} b\right). \tag{3.80}$$

Beweis: Offensichtlich gilt $\mathrm{ad}_\circ(h)^t \mathrm{ad}_\circ(b) \mathrm{ad}_\circ(h)^{r-2-t} b = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \mathrm{ad}_\circ(\mathrm{ad}_\circ(h)^k b) \mathrm{ad}_\circ(h)^{r-2-k} b$, so daß die linke Seite $l(h, b)$ der zu beweisenden Gleichung durch

$$l(h,b) = \frac{1}{\nu}\sum_{r=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{r-2} \sum_{k=0}^{r-2}\left(\sum_{t=k}^{r-2}\binom{t}{k}\right) \mathrm{ad}_\circ(\mathrm{ad}_\circ(h)^k b) \mathrm{ad}_\circ(h)^{r-2-k} b$$

gegeben ist. Nun gilt aber, wie man leicht durch Induktion nachweist, $\sum_{t=k}^{r-2}\binom{t}{k} = \binom{r-1}{k+1}$ und nach Umbenennung der Summationsindizes $s = k+1$, $t = r - s$ liefert das

$$l(h,b) = \frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(s+t)!}\binom{t+s-1}{s} \mathrm{ad}_\circ\left(\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{s-1} b\right)\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{t-1} b.$$

Wegen $\mathrm{ad}_\circ\left(\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{s-1}b\right)\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{t-1}b = \mathrm{ad}_\circ\left(\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{t-1}b\right)\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{s-1}b$, was aus der Tatsache, daß $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$, folgt, erhalten wir weiter

$$l(h,b) = \frac{1}{2}\frac{1}{\nu}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(s+t)!}\binom{t+s}{s}\mathrm{ad}_\circ\left(\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{s-1}b\right)\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)^{t-1}b,$$

wobei wir die bekannten Identitäten $\binom{t+s-1}{s}+\binom{t+s-1}{t} = \binom{t+s-1}{s}+\binom{t+s-1}{s-1} = \binom{t+s}{s}$ für die Binomialkoeffizienten verwendet haben. Schließlich folgt hiermit aber wegen der Potenzreihenentwicklung von $\frac{\exp(x)-\mathrm{id}}{x}$ die Behauptung, wobei wir wieder $b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ benutzen, um $\frac{1}{2}\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ\left(\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)-\mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)}b\right)\frac{\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)\right)-\mathrm{id}}{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_\circ(h)}b$ durch die rechte Seite der Gleichung (3.80) auszudrücken. $\triangledown$

$\square$

Die notwendige Bedingung dafür, daß der faserweise Automorphismus $\mathcal{A}_h$ eine Äquivalenztransformation zwischen $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ induziert, ist also nach der eingangs gemachten Bemerkung gerade äquivalent dazu, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ äquivalente Sternprodukte sind. Wir wollen nun zeigen, daß die Bedingung (3.79) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Lösbarkeit der Gleichung (3.78) ist. Gelingt es uns dies zu beweisen, so haben wir insbesondere einen alternativen eher konstruktiven Beweis für die Aussage $[\Omega] = [\Omega'] \Rightarrow c(*_{\mathrm{Wick}}) = c(*_{\mathrm{Wick}}')$, die natürlich aus Folgerung 3.3.21 bekannt ist, gefunden.

Proposition 3.5.3 *Seien $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}'$ zwei Fedosov-Derivationen, die aus (Ω,s) und (Ω',s') mit $\Omega = \Omega' + dC$ konstruiert seien, wobei $C = \sum_{i=1}^{\infty}\nu^i C_i \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ eine formale Reihe von Einsformen auf M ist. Dann existiert ein faserweiser Automorphismus $\mathcal{A}_h = \exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h))$ mit $h \in \mathcal{W}_3(M)$ und $\sigma(h) = 0$ derart, daß $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}' = \mathcal{A}_h\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\mathcal{A}_{-h}$. Darüberhinaus kann das durch die Bedingungen $h \in \mathcal{W}_3(M)$, $\sigma(h) = 0$ und (3.78) eindeutig festgelegte Element h rekursiv aus der Gleichung*

$$h = C\otimes 1 + \delta^{-1}\left(\nabla h - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})h - \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)) - \mathrm{id}}(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})\right) \tag{3.81}$$

bestimmt werden.

Beweis: Zum Beweis der Existenz und der Rekursionsformel für ein gesuchtes Element h derart, daß (3.78) erfüllt ist, wenden wir δ^{-1} auf diese Gleichung an und erhalten mit der Zerlegung (1.38) wegen $\delta^{-1}h = 0$ und $\sigma(h) = 0$ die Gleichung (3.81), die h erfüllen muß. Definiert man $L : \mathcal{W}_3(M) \to \mathcal{W}_3(M)$ durch $La := C\otimes 1 + \delta^{-1}\left(\nabla a - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})a - \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(a)}{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(a))-\mathrm{id}}(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})\right)$, so ist zunächst zu verifizieren, daß L tatsächlich nach $\mathcal{W}_3(M)$ abbildet. Da C erst in erster Ordnung in ν beginnt gilt $C\otimes 1 \in \mathcal{W}_3(M)$. Ferner erhöht $\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(a)$ für $a \in \mathcal{W}_3(M)$ den totalen Grad mindestens um eins. Da zusätzlich $r_{\mathrm{Wick}}, r_{\mathrm{Wick}}' \in \mathcal{W}_2\otimes\Lambda^1(M)$ gilt, ∇ den totalen Grad nicht verändert und δ^{-1} ihn um eins vergrößert, macht man sich leicht klar, daß $La \in \mathcal{W}_3(M)$ für $a \in \mathcal{W}_3(M)$. Ferner macht man sich mit ebendiesen Eigenschaften der involvierten Abbildungen leicht klar, daß L kontrahierend bezüglich der in Abschnitt A.2 erklärten Metrik ist, so daß es nach dem Fixpunkt-Satz einen eindeutigen Fixpunkt $h \in \mathcal{W}_3(M)$ der Abbildung L gibt, d.h. $Lh = h$, der aus (3.81) rekursiv bestimmt werden kann. Es bleibt nun noch nachzuweisen, daß dieser Fixpunkt tatsächlich auch die Gleichung (3.78) erfüllt. Wir definieren also mit dem Fixpunkt h von L das Element $B \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ durch

$$B := \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)) - \mathrm{id}}(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}}) - \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}h - 1\otimes C$$

und wollen zeigen, daß B eine Fixpunkt-Gleichung erfüllt, deren einzige Lösung durch 0 gegeben ist, womit nachgewiesen wäre, daß der eindeutige Fixpunkt h von L das eindeutige Element $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ ist, das die Gleichung (3.78) erfüllt. Aus $Lh = h$ erhält man mit (1.38) unmittelbar $\delta^{-1}B = 0$. Ferner erhält man mit einer einfachen aber etwas aufwendigen Rechnung, die ähnlich zur Herleitung der notwendigen Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (3.78) verläuft, die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} B &= \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)) - \mathrm{id}} \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^{r-1} \sum_{t=0}^{r-2} \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^t \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(B) \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^{r-2-t} \times \\ &\quad \times \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)) - \mathrm{id}} (r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) =: R_{h, r_{\mathrm{Wick}}{}', r_{\mathrm{Wick}}}(B),\end{aligned}$$

wobei wesentlich die Bedingung (3.79), $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}^2 = 0$, die Definition von B und die Gleichung $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) = 1 \otimes (\Omega - \Omega') + \frac{1}{\nu}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} (r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}})$ eingeht. Mit der Zerlegung (1.38) erhält man hieraus durch Anwenden von δ^{-1} wegen $\delta^{-1}B = 0$ und $\sigma(B) = 0$, daß B die Gleichung

$$B = \delta^{-1}\left(\nabla B - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})B - R_{h, r_{\mathrm{Wick}}{}', r_{\mathrm{Wick}}}(B)\right)$$

erfüllt. Wir betrachten also die Abbildung $\widetilde{L} : \mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M) \to \mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M)$, die durch

$$\widetilde{L}a := \delta^{-1}\left(\nabla a - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})a - R_{h, r_{\mathrm{Wick}}{}', r_{\mathrm{Wick}}}(a)\right)$$

definiert ist. Wegen $h \in \mathcal{W}_3(M)$, $r_{\mathrm{Wick}}, r_{\mathrm{Wick}}{}' \in \mathcal{W}_2 \otimes \Lambda^1(M)$ und der Tatsachen, daß δ^{-1} den totalen Grad um eins erhöht und ∇ ihn gleich läßt, gilt, daß $\widetilde{L}$ den totalen Grad mindestens um eins erhöht. Also besitzt $\widetilde{L}$ einen eindeutigen Fixpunkt $B = \widetilde{L}B \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M)$. Da aber 0 offensichtlich ein Fixpunkt von $\widetilde{L}$ ist, erhalten wir $B = 0$ und somit erfüllt der Fixpunkt $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ der Abbildung L tatsächlich die Gleichung (3.78). Die Eindeutigkeit von h unter den gestellten Bedingungen folgt dann natürlich aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes von L. Aus der Gültigkeit von (3.78) folgt dann natürlich $\mathcal{A}_h \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} \mathcal{A}_{-h} = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}{}' - r_{\mathrm{Wick}}) = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}'$. □

Aus der Existenz des faserweisen Automorphismus $\mathcal{A}_h$ mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}' = \mathcal{A}_h \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} \mathcal{A}_{-h}$ und dem Korollar 1.3.21 erhalten wir also:

Proposition 3.5.4 *Seien $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}'$ zwei Fedosov-Derivationen, die aus (Ω, s) und (Ω', s') mit $\Omega = \Omega' + dC$ konstruiert seien, wobei $C = \sum_{i=1}^{\infty} \nu^i C_i \in \Gamma^\infty(T^*M)[[\nu]]$ eine formale Reihe von Einsformen auf M ist. Dann ist durch*

$$A_h f := \sigma(\mathcal{A}_h \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) \tag{3.82}$$

mit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, wobei $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ die eindeutige Lösung der Fixpunkt-Gleichung (3.81) sei, eine Äquivalenztransformation von $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{Wick}})$ nach $(\mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]], *_{\mathrm{Wick}}{}')$ gegeben.

Beweis: Die Aussage dieser Proposition folgt direkt aus Proposition 3.5.3 und Korollar 1.3.21. □

3.5.1.2 Übereinstimmung der Sternprodukte vom Wick-Typ zu verschiedenen Normierungsbedingungen

Wir wollen nun die Ergebnisse aus dem vorangehenden Abschnitt, in dem wir völlig allgemeine Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und Äquivalenztransformationen betrachtet haben, auf Sternprodukte vom Wick-Typ spezialisieren und hieraus ableiten, daß die Sternprodukte vom Wick-Typ nur von der Wahl von Ω abhängen.

Wir betrachten also zwei Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}{}'$ vom Wick-Typ, die wegen Satz 3.4.12 aus Fedosov-Derivationen $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ und $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}{}'$ konstruiert sind, deren Eingangsdaten $(\Omega, s_{\mathrm{tr}})$ und $(\Omega', s_{\mathrm{tr}}{}')$ die Bedingungen $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_z s_{\mathrm{tr}}{}' = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}}{}' = 0$ erfüllen und sowohl Ω als auch Ω' vom Typ $(1,1)$ sind. Damit diese Sternprodukte äquivalent sein können muß natürlich $[\Omega] = [\Omega']$ gelten. Wir wollen uns hierbei auf den Fall $\Omega = \Omega'$ konzentrieren.

Folgerung 3.5.5 *Seien $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ zwei aus den Daten $(\Omega, s_{\mathrm{tr}})$ und $(\Omega, s_{\mathrm{tr}}')$ konstruierte Sternprodukte vom Wick-Typ auf (M,ω,I). Dann induziert der faserweise Automorphismus $\mathcal{A}_h = \exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h))$ von $\circ_{\mathrm{Wick}}$, wobei $h \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(h) = 0$ aus der Gleichung*

$$h = \delta^{-1}\left(\nabla h - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})h - \frac{\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)}{\exp(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)) - \mathrm{id}}(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})\right) \tag{3.83}$$

rekursiv bestimmt werden kann, gemäß Proposition 3.5.4 eine Äquivalenztransformation von $*_{\mathrm{Wick}}$ nach $*_{\mathrm{Wick}}'$.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Proposition 3.5.4, wobei die Rekursionsformel (3.81) für h wegen $\Omega = \Omega'$ die Gestalt (3.83) annimmt. □

Wir wollen nun aus der Tatsache, daß die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ vom Wick-Typ sind eine Aussage über die spezielle Struktur des gemäß (3.83) konstruierten Elementes h ableiten, die weitreichende Konsequenzen für die Beziehung von $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{Wick}}'$ hat.

Lemma 3.5.6 *Seien $*_{\mathrm{Wick}}$, $*_{\mathrm{Wick}}'$ und h wie in Folgerung (3.5.5) gegeben, dann gilt*

$$\pi_z h = \pi_{\overline{z}} h = 0. \tag{3.84}$$

Beweis: Zum Beweis dieser Aussage schreiben wir zunächst Gleichung (3.83) mit $\frac{x}{\exp(x)-\mathrm{id}} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}B_r x^r$, wobei B_r die r-te Bernoulli Zahl bezeichne (vgl. [61, S. 297 ff.]), als

$$h = \delta^{-1}\left(\nabla h - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})h - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}B_r\left(\frac{1}{\nu}\right)^r \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^r(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})\right).$$

Da wir unsere Behauptung per Induktion über den totalen Grad beweisen wollen, schreiben wir für $k \geq 3$ den Term $h^{(k)}$ vom totalen Grad k explizit als

$$\begin{aligned} h^{(k)} &= \delta^{-1}\left(\nabla h^{(k-1)} - \frac{1}{\nu}\sum_{\substack{k_1+l=k+1, l\geq 2\\ 3\leq k_1\leq k-1}}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}{}^{(l)})h^{(k_1)}\right.\\ &\qquad\left. - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}B_r\left(\frac{1}{\nu}\right)^r\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_r+l=k-1+2r\\ 3\leq k_j\leq k-1, l\geq 2}}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h^{(k_1)})\ldots\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h^{(k_r)})(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(l)}\right). \end{aligned}$$

Für $k = 3$ liefert diese Gleichung mit $B_0 = 1$ explizit $h^{(3)} = -\delta^{-1}((r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(2)}) = -s_{\mathrm{tr}}'^{(3)} + s_{\mathrm{tr}}{}^{(3)}$. Also folgt $\pi_z h^{(3)} = \pi_{\overline{z}} h^{(3)} = 0$ da sowohl $*_{\mathrm{Wick}}$ als auch $*_{\mathrm{Wick}}'$ vom Wick-Typ sind und deshalb nach Satz 3.4.12 $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = \pi_z s_{\mathrm{tr}}' = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}}' = 0$ gilt. Zunächst beweisen wir per Induktion über den totalen Grad, daß $\pi_z h = 0$. Es gelte also $\pi_z h^{(n)} = 0$ für $3 \leq n \leq k-1$, wobei $k \geq 4$ und wir betrachten

$$\begin{aligned} \pi_z h^{(k)} &= \delta_z^{-1}\left(\nabla_z \pi_z h^{(k-1)} - \frac{1}{\nu}\sum_{\substack{k_1+l=k+1, l\geq 2\\ 3\leq k_1\leq k-1}}\pi_z(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}{}^{(l)})h^{(k_1)})\right.\\ &\qquad\left. - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}B_r\left(\frac{1}{\nu}\right)^r\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_r+l=k-1+2r\\ 3\leq k_j\leq k-1, l\geq 2}}\pi_z(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h^{(k_1)})\ldots\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h^{(k_r)})(r_{\mathrm{Wick}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(l)})\right). \end{aligned}$$

Aufgrund der Induktionsannahme verschwindet offensichtlich der Term $\delta_z^{-1}(\nabla_z\pi_z h^{(k-1)})$. Ferner gilt mit (3.16) $\pi_z(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}{}^{(l)})h^{(k_1)}) = \pi_z((\pi_z r_{\mathrm{Wick}}{}^{(l)})\circ_{\mathrm{Wick}} h^{(k_1)} - (\pi_z h^{(k_1)})\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}{}^{(l)})$. Der erste Summand hiervon verschwindet, da nach Satz 3.4.12 $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ gilt, da $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ ist. Der zweite Summand ist dann aber wieder wegen der Induktionsannahme Null, da $3 \leq k_1 \leq k-1$. Also ist nur noch für den dritten Summanden im Ausdruck für $\pi_z h^{(k)}$ nachzuweisen, daß dieser verschwindet. Ist der Summationsindex r in diesem Term 0, so erhalten wir den Beitrag $-\delta_z^{-1}\pi_z(({r_{\mathrm{Wick}}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(k-1)})$ zu $\pi_z h^{(k)}$. Da aber sowohl $*_{\mathrm{Wick}}$ als auch ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ vom Wick-Typ sind gilt $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}' = 0$, also verschwindet auch dieser Beitrag. Ist der Summationsindex r größer als Null, so besteht die gesamte Summe offensichtlich aus Termen der Gestalt

$$\pi_z(h^{(k_j)} \circ_{\mathrm{Wick}} A) = \pi_z((\pi_z h^{(k_j)}) \circ_{\mathrm{Wick}} A) \text{ und } \pi_z(({r_{\mathrm{Wick}}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(l)} \circ_{\mathrm{Wick}} B) = \pi_z((\pi_z({r_{\mathrm{Wick}}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(l)}) \circ_{\mathrm{Wick}} B),$$

mit gewissen Elementen $A \in \mathcal{W} \otimes \Lambda^1(M), B \in \mathcal{W}(M)$, deren explizite Gestalt für den Beweis unwesentlich ist. Vielmehr ist wichtig, daß wegen der Summationsbereiche immer $k_j \leq k-1$ gilt, so daß die Terme der Gestalt $\pi_z((\pi_z h^{(k_j)}) \circ_{\mathrm{Wick}} A)$ wegen der Induktionsannahme verschwinden. Die anderen Terme $\pi_z((\pi_z({r_{\mathrm{Wick}}}' - r_{\mathrm{Wick}})^{(l)}) \circ_{\mathrm{Wick}} B)$ verschwinden wiederum, wegen $\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = \pi_z {r_{\mathrm{Wick}}}' = 0$, so daß insgesamt $\pi_z h^{(k)} = 0$ und somit induktiv $\pi_z h = 0$ folgt. Eine völlig analoge Überlegung mit $\pi_{\overline{z}}$ zeigt aber auch, daß $\pi_{\overline{z}} h = 0$. □

Mit den nachgewiesenen Eigenschaften des Elementes h, welches die Äquivalenztransformation von $*_{\mathrm{Wick}}$ nach ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ festlegt, können wir nun zeigen, daß die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ sogar übereinstimmen.

Satz 3.5.7 *Seien $*_{\mathrm{Wick}}$ und ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ zwei aus den Daten $(\Omega, s_{\mathrm{tr}})$ und $(\Omega, {s_{\mathrm{tr}}}')$ konstruierte Sternprodukte vom Wick-Typ auf (M, ω, I). Dann ist die gemäß Folgerung 3.5.5 durch den faserweisen Automorphismus $\mathcal{A}_h$ induzierte Äquivalenztransformation von $*_{\mathrm{Wick}}$ nach ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ die Identität, d.h. die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ und ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ stimmen überein.*

Beweis: Für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ ist die durch $\mathcal{A}_h$ induzierte Äquivalenztransformation A_h durch

$$A_h = \sigma(\mathcal{A}_h \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = \sigma\left(\exp\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)\right)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)\right) = f + \sigma\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{\nu}\right)^r \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(h)^r \tau_{\mathrm{Wick}}(f)\right)$$

gegeben. Nun besitzen alle in der Summe über r vorkommenden Terme die Gestalt

$$\sigma(h \circ_{\mathrm{Wick}} A) = \pi_{\overline{z}}\pi_z(h \circ_{\mathrm{Wick}} A) = \sigma((\pi_z h) \circ_{\mathrm{Wick}} A) \quad \text{und} \quad \sigma(B \circ_{\mathrm{Wick}} h) = \pi_z \pi_{\overline{z}}(B \circ_{\mathrm{Wick}} h) = \sigma(B \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_{\overline{z}} h))$$

mit gewissen Elementen $A, B \in \mathcal{W}(M)$. Nach Lemma 3.5.6 gilt aber $\pi_z h = \pi_{\overline{z}} h = 0$, so daß die gesamte Summe verschwindet und $A_h f = f$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$, also $A_h = \mathrm{id}$ folgt. Die Aussage, daß dann $*_{\mathrm{Wick}}$ und ${*_{\mathrm{Wick}}}'$ übereinstimmen ist trivial. □

Aufgrund der Aussage dieses Satzes erhalten wir also, daß die Sternprodukte vom Wick-Typ, die wir aus den Daten $(\Omega, s_{\mathrm{tr}})$, aus denen wir r_{Wick} und somit $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$ erhalten, konstruieren, nicht von s_{tr} abhängen. Wir können also immer $s_{\mathrm{tr}} = 0$ wählen, so daß die von uns angegebene Fedosov-Konstruktion bzw. die daraus resultierenden Sternprodukte vom Wick-Typ nur von einer formalen Reihe Ω geschlossener Einsformen vom Typ $(1,1)$ auf M abhängen. Die Fedosov-Konstruktion vermittelt also eine Abbildung

$$W : \Omega \mapsto *_{\mathrm{Wick}} = W(\Omega), \tag{3.85}$$

die einer formalen Reihe $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \Omega_i$ geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ ein Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf (M, ω, I) zuordnet. Wir wollen in den beiden folgenden Abschnitten zeigen, daß diese Abbildung eine Bijektion zwischen $\{\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \Omega_i \in \Gamma^\infty(\bigwedge^2 T^*M)[[\nu]] \mid d\Omega = 0, \pi^{1,1}\Omega = \Omega\}$ und der Menge der Sternprodukte vom Wick-Typ auf (M, ω, I) vermittelt. Hierzu werden wir im nächsten Abschnitt zunächst einige Ergebnisse von A. Karabegov für Sternprodukte mit Separation der Variablen auf die Sternprodukte vom Wick-Typ übertragen.

3.5.2 Die eindeutige Charakterisierung von Wick-Typ-Sternprodukten à la Karabegov

Diesen Abschnitt wollen wir darauf verwenden, einige Ergebnisse aus den Artikeln [67, 68, 69] von A. Karabegov zum Thema Sternprodukte mit Separation der Variablen auf die Sternprodukte vom Wick-Typ zu übertragen. Wir wollen hierbei weitgehend auf Beweise der angeführten Aussagen verzichten und verweisen hierfür auf [67, 68, 69]. Ferner wollen wir später die vorgestellten Ergebnisse auf die mit der Fedosov-Konstruktion erhaltenen Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ anwenden und somit nachweisen, daß mit dieser alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf (M,ω,I) erhalten werden können.

Wir betrachten ein Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M,ω,I). Ferner sei (z,V) eine lokal holomorphe Karte von M, wobei $V\subseteq M$ eine zusammenziehbare offene Menge sei. Dann kann Karabegov in [67, Prop. 1] zeigen, daß es für $1\le k\le \dim_{\mathbb{C}}(M)$ lokal definierte formale Funktionen $u_k\in\mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ derart gibt, daß

$$u_k \star_{\mathrm{Wick}} z^l - z^l \star_{\mathrm{Wick}} u_k = -\nu\delta_k^l \tag{3.86}$$

gilt. Man beachte, daß sich diese Gleichung um ein Vorzeichen, von der von Karabegov angegebenen unterscheidet, da wir Wick-Typ-Sternprodukte betrachten, und eine andere Vorzeichenkonvention für die Poisson-Klammer verwenden. Völlig analog gilt dann, daß weiter lokal definierte formale Funktionen $\overline{v}_l\in\mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ für $1\le l\le\dim_{\mathbb{C}}(M)$ existieren, so daß

$$\overline{v}_l \star_{\mathrm{Wick}} \overline{z}^k - \overline{z}^k \star_{\mathrm{Wick}} \overline{v}_l = \nu\delta_{\overline{l}}^{\overline{k}} \tag{3.87}$$

gilt. Unter Verwendung der Tatsache, daß $\star_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ ist, kann man zeigen (vgl. [67, Lemma 2]), daß für diese lokal definierten formalen Funktionen und alle $f\in\mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die Gleichungen

$$f\star_{\mathrm{Wick}} u_k = fu_k+\nu Z_k(f) \qquad \text{und} \qquad \overline{v}_l\star_{\mathrm{Wick}} f = \overline{v}_l f+\nu\overline{Z}_l(f) \tag{3.88}$$

gelten. Ferner definiert Karabegov unter Benutzung der Funktionen $u_k,\overline{v}_l\in\mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ formale Reihen lokal definierter Einsformen $\alpha,\beta\in\Gamma^\infty(T^*V)[[\nu]]$ durch $\alpha:=-u_k dz^k$ vom Typ $(1,0)$ und $\beta:=\overline{v}_l d\overline{z}^l$ vom Typ $(0,1)$. Da die $\star_{\mathrm{Wick}}$-Rechtsmultiplikation mit u_k mit der $\star_{\mathrm{Wick}}$-Linksmultiplikation mit $\overline{v}_l$ kommutiert erhält man mit (3.88), daß $\overline{Z}_l(u_k)=Z_k(\overline{v}_l)$, so daß also $\overline{\partial}\alpha=\partial\beta$ gilt. Darüberhinaus kann man zeigen, daß man durch diese Definition eine formale Reihe von geschlossenen Zweiformen auf M vom Typ $(1,1)$ erhält, indem man zum einen nachweist, daß diese Form nicht von der Wahl der Lösungen u_k bzw. $\overline{v}_l$ der Gleichungen (3.86) bzw. (3.87) abhängt und tatsächlich auf Durchschnitten der Definitionsbereiche verschiedener holomorpher Karten von M übereinstimmt. Die so definierte, einem Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ zugeordnete formale Reihe geschlossener Zweiformen auf M vom Typ $(1,1)$ wollen wir mit $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ bezeichnen und nennen sie Karabegov's charakterisierende Form. Auch hier sollten wir darauf hinweisen, daß wir die Definition von $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ geeignet um einen Faktor $\frac{1}{\mathrm{i}}$ modifiziert haben, da wir im Unterschied zu A. Karabegov den formalen Parameter nicht als reell betrachten. Betrachtet man die erste Ordnung im formalen Parameter der Gleichungen (3.86) bzw. (3.87), so weist man leicht nach, daß der Term nullter Ordnung in ν gerade durch die symplektische Form ω der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit gegeben ist, d.h. $K(\star_{\mathrm{Wick}})=\omega+K(\star_{\mathrm{Wick}})^+$, wobei $K(\star_{\mathrm{Wick}})^+$ in nullter Ordnung von ν verschwindet. Nach den ∂-$\overline{\partial}$-Poincaré-Lemmas (vgl. [112, Lemma 2.15]) gibt es nun auf einem zusammenziehbaren Definitionsbereich V einer holomorphen Karte lokal definierte Funktionen $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$, derart, daß $K(\star_{\mathrm{Wick}})|_V=\partial\overline{\partial}\varphi$, man nennt φ das formale lokale Kähler-Potential von $K(\star_{\mathrm{Wick}})$. Schreibt man

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_+$ so ist φ_0 ein lokales Kähler-Potential der symplektischen Form ω. Man weist dann leicht nach, daß mit einem derartigen lokalen Potential für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die Gleichungen

$$f \star_{\mathrm{Wick}} Z_k(\varphi) = f Z_k(\varphi) + \nu Z_k(f) \qquad \text{und} \qquad \overline{Z}_l(\varphi) \star_{\mathrm{Wick}} f = \overline{Z}_l(\varphi) f + \nu \overline{Z}_l(f) \tag{3.89}$$

erfüllt sind. Somit gilt also der Satz:

Satz 3.5.8 ([67, Thm. 1]) *Sei $\star_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I), dann definiert $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ eine diesem Sternprodukt zugeordnete formale Reihe geschlossener Einsformen vom Typ $(1,1)$ auf M, die eine formale Deformation der Semi-Kähler-Form ω ist. Falls $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ eine lokales formales Kähler-Potential der Form $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ ist, so gilt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die Gleichung (3.89).*

Im Abschnitt 3.5.3 werden wir für die von uns konstruierten Fedosov-Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ Karabegov's charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ bestimmen, was es uns ermöglichen wird die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ zu identifizieren. Um einzusehen, daß durch die Kenntnis von Karabegov's charakterisierender Form eine Identifikation der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ erfolgt, benötigen wir noch eine weitere Aussage aus [67, Thm. 2].

In [67, Sec. 4] zeigt Karabegov mit Hilfe lokaler Argumente, daß man zu einer gegebenen formalen Deformation der symplektischen Form vom Typ $(1,1)$ ein Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf (M, ω, I) konstruieren kann, so daß die charakterisierende Form $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ durch die vorgegebene Deformation von ω gegeben ist. Hiermit formuliert Karabegov dann den folgenden Satz, den wir auf unsere Situation für Sternprodukte vom Wick-Typ übertragen:

Satz 3.5.9 ([67, Thm. 2]) *Die Sternprodukte vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) sind in Bijektion zu den formalen Reihen geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ (die in nullter Ordnung von ν verschwinden) auf M. Hierbei wird die bijektive Abbildung, die einem Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ eine solche Zweiform zuordnet, durch Karabegov's charakterisierende Form vermittelt, und ist durch*

$$\star_{\mathrm{Wick}} \mapsto K(\star_{\mathrm{Wick}}) - \omega \tag{3.90}$$

gegeben.

Wir werden im folgenden Abschnitt sehen, daß die Abbildung in (3.90) gerade die Umkehrabbildung zu der vermöge der Fedosov-Konstruktion in (3.85) definierten Abbildung W ist, die Ω das entsprechende Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ zuordnet. Um einzusehen, daß ein Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ durch die Form $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ charakterisiert werden kann, wollen wir nun noch einen Beweis dafür angeben, daß ein Sternprodukt vom Wick-Typ auf (M, ω, I) durch eine formale Deformation der symplektischen Form vom Typ $(1,1)$ festgelegt ist.

Satz 3.5.10 *Seien $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ zwei Sternprodukte vom Wick-Typ auf (M, ω, I) und sei $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ eine lokal endliche, gute, offene Überdeckung von M durch Definitions-Bereiche holomorpher Karten von M. Ferner sei $K = \omega + K^+$ eine formale Reihe geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$, wobei K^+ in nullter Ordnung in ν verschwindet. Seien weiter $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$ formale lokale Kähler-Potentiale von K, d.h. $K|_{\mathcal{U}_\alpha} = \partial\overline{\partial}\varphi_\alpha$.*

i.) Falls für alle $\alpha \in J$ und jeweils alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$

$$f \star_{\mathrm{Wick}} Z_k(\varphi_\alpha) = f \star'_{\mathrm{Wick}} Z_k(\varphi_\alpha) \tag{3.91}$$

gilt, so stimmen $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ überein.

ii.) Falls für alle $\alpha \in J$ und jeweils alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)[[\nu]]$

$$\overline{Z}_l(\varphi_\alpha) \star_{\mathrm{Wick}} f = \overline{Z}_l(\varphi_\alpha) \star'_{\mathrm{Wick}} f \tag{3.92}$$

gilt, so stimmen $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ überein.

Beweis: Wir nehmen an, daß die Bidifferentialoperatoren C_i und C'_i, die die Sternprodukte $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ beschreiben für $0 \leq i \leq k-1$, wobei $k \geq 1$, übereinstimmen und wollen unter Benutzung der Gleichung (3.91) und der Voraussetzung, daß beide Sternprodukte vom Wick-Typ sind, nachweisen, daß C_k und C'_k ebenfalls übereinstimmen, da dann induktiv folgt, daß $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ übereinstimmen, da alle Sternprodukte in nullter Ordnung im formalen Parameter übereinstimmen. Aus der Assoziativität beider Sternprodukte in der Ordnung k im formalen Parameter erhält man mit der obigen Induktionsannahme, daß $C_k - C'_k$ ein Hochschild-Kozyklus ist. Nach dem Hochschild-Kostant-Rosenberg-Theorem existiert somit ein Differentialoperator B auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ und eine Zweiform A auf M, so daß $(C_k - C'_k)(f,g) = (\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g) + A(X_f, X_g)$ für alle $f,g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Betrachtet man den total antisymmetrischen Anteil der Assoziativität beider Sternprodukte in der Ordnung $k+1$ im formalen Parameter, so erhält man, daß A geschlossen ist, d.h. $dA = 0$. Indem wir den antisymmetrischen Anteil der gefundenen Gleichung betrachten erhalten wir, da $\delta_{\mathrm{H}} B$ ein symmetrischer Bidifferentialoperator ist, die Gleichung

$$A(X_f, X_g) = \frac{1}{2}\left(C_k(f,g) - C_k(g,f) - C'_k(f,g) + C'_k(g,f)\right).$$

Sei nun z eine lokal holomorphe Karte auf $\mathcal{U}_\alpha$. Da der Bidifferentialoperator $C(f,g) = A(X_f, X_g)$ offensichtlich von der Ordnung 1 in jedem Argument ist, reicht es um A festzulegen, diese Gleichung auf den Koordinaten-Funktionen $z^k, \overline{z}^l$ auszuwerten. Da $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ sind, gilt $C_k(z^l, z^k) = C'_k(z^l, z^k) = C_k(\overline{z}^l, \overline{z}^k) = C'_k(\overline{z}^l, \overline{z}^k) = 0$ und wir erhalten wegen $X_{z^k} = -\frac{2}{\mathrm{i}} g^{k\overline{n}} \overline{Z}_n$ und $X_{\overline{z}^l} = \frac{2}{\mathrm{i}} g^{m\overline{l}} Z_m$ die Gleichungen

$$0 = A(X_{z^k}, X_{z^l}) = -4 g^{k\overline{n}} g^{l\overline{m}} A(\overline{Z}_n, \overline{Z}_m) \quad \text{ und } \quad 0 = A(X_{\overline{z}^k}, X_{\overline{z}^l}) = -4 g^{n\overline{k}} g^{m\overline{l}} A(Z_n, Z_m).$$

Da man diese Argumentation für alle $\alpha \in J$ mit einer entsprechenden lokal holomorphen Karte durchführen kann, folgt hieraus wegen der Nicht-Ausgeartetheit von g aber, daß A vom Typ $(1,1)$ ist. Schreibt man also in lokalen Koordinaten $A = A_{i\overline{j}} dz^i \wedge d\overline{z}^j$, so gilt $A(X_f, X_g) = 4 A_{i\overline{j}} g^{i\overline{l}} g^{n\overline{j}} (\overline{Z}_l(f) Z_n(g) - \overline{Z}_l(g) Z_n(f))$. Wir benötigen nun noch eine Aussage über den symmetrischen Anteil $\delta_{\mathrm{H}} B$ der Differenz der Bidifferentialoperatoren $C_k - C'_k$.

Sublemma 3.5.11 *Sei $\delta_{\mathrm{H}} B$ ein Bidifferentialoperator der in lokalen holomorphen Koordinaten $(z, \mathcal{U}_\alpha)$ die Gestalt*

$$(\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g) = \sum_{K,\overline{L}} C^{K;\overline{L}} \left(\frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L} + \frac{\partial^{|K|} g}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} f}{\partial \overline{z}^L} \right)$$

besitzt und auf Konstanten verschwindet, dann gilt, daß $\delta_{\mathrm{H}} B$ in lokalen holomorphen Koordinaten $(z, \mathcal{U}_\alpha)$ die Gestalt

$$(\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g) = C^{k\overline{l}} (Z_k(f) \overline{Z}_l(g) + Z_k(g) \overline{Z}_l(f))$$

besitzt, wobei $C^{k\overline{l}}$ die Komponenten eines Tensorfeldes $C \in \Gamma^\infty(TM \otimes TM)$ vom Typ $(1,1)$ bezeichnet.

Beweis: Wegen $\delta_{\mathrm{H}}^2 = 0$ gilt für alle $f,g,h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ offensichtlich $0 = f(\delta_{\mathrm{H}} B)(g,h) - (\delta_{\mathrm{H}} B)(fg,h) + (\delta_{\mathrm{H}} B)(f,gh) - (\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g)h$. Wertet man diese Gleichung für $f,g,h \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit $g|_U, h|_U \in \mathcal{O}(U)$, wobei $U \subseteq M$ eine offene Menge mit $U \cap \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$ sei, aus, so erhält man mit der obigen Gestalt von $\delta_{\mathrm{H}} B$, unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $|K|$ und $|\overline{L}|$ mindestens eins sein müssen, da $\delta_{\mathrm{H}} B$ auf Konstanten verschwindet, auf $\mathcal{U}_\alpha \cap U$ die Gleichung

$$0 = \sum_{K,\overline{L}} C^{K;\overline{L}} \left(\frac{\partial^{|K|}(gh)}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} f}{\partial \overline{z}^L} - g \frac{\partial^{|K|} h}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} f}{\partial \overline{z}^L} - h \frac{\partial^{|K|} g}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} f}{\partial \overline{z}^L} \right).$$

Diese Gleichung bedeutet aber, daß auf $\mathcal{U}_\alpha$ $\sum_{K,\overline{L}} C^{K;\overline{L}} \frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L} = \sum_{k,\overline{L}} C^{k;\overline{L}} Z_k(f) \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L}$ gilt. Analog findet man, indem man die obige Gleichung für $f|_U, g|_U \in \overline{\mathcal{O}}(U)$ auswertet

$$0 = \sum_{K,\overline{L}} C^{K;\overline{L}} \left(\frac{\partial^{|K|} h}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|}(fg)}{\partial \overline{z}^L} - g \frac{\partial^{|K|} h}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} f}{\partial \overline{z}^L} - f \frac{\partial^{|K|} h}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L} \right),$$

so daß $\sum_{K,\overline{L}} C^{K;\overline{L}} \frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \frac{\partial^{|\overline{L}|} g}{\partial \overline{z}^L} = \sum_{K,\overline{l}} C^{K;\overline{l}} \frac{\partial^{|K|} f}{\partial z^K} \overline{Z}_l(g)$ folgt. Insgesamt folgt hieraus aber die Behauptung. $\bigtriangledown$

Da nun beide Sternprodukte $\star_{\mathrm{Wick}}$ und $\star'_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ sind, folgt aus $(C_k - C'_k)(f,g) = (\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g) + A(X_f, X_g)$, daß $(\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g) = \frac{1}{2}((C_k - C'_k)(f,g) + (C_k - C'_k)(g,f))$ von der Gestalt wie im eben bewiesenen Sublemma ist. Da ferner C_k und C'_k auf Konstanten verschwinden, erhalten wir also $(\delta_{\mathrm{H}} B)(f,g) = C^{k\overline{l}}(Z_k(f)\overline{Z}_l(g) + Z_k(g)\overline{Z}_l(f))$. Insgesamt haben wir also gezeigt, daß

$$(C_k - C'_k)(f,g) = C^{k\overline{l}}(Z_k(f)\overline{Z}_l(g) + Z_k(g)\overline{Z}_l(f)) + 4A_{i\overline{j}} g^{i\overline{l}} g^{n\overline{j}} (\overline{Z}_l(f) Z_n(g) - \overline{Z}_l(g) Z_n(f))$$

gilt. Da aber sowohl C_k als auch C'_k im ersten Argument nur in holomorphe und im zweiten Argument nur in anitholomorphe Richtungen differenzieren, muß ferner $C^{n\overline{l}} = -4A_{i\overline{j}} g^{i\overline{l}} g^{n\overline{j}}$ gelten und wir erhalten schließlich

$$(C_k - C'_k)(f,g) = -8A_{i\overline{j}} g^{i\overline{l}} g^{n\overline{j}} Z_n(f) \overline{Z}_l(g).$$

Erst jetzt benötigen wir die Voraussetzungen (3.91) bzw. (3.92) um i.) und ii.) zu beweisen. Betrachtet man die Gleichung $f \star_{\mathrm{Wick}} Z_k(\varphi_\alpha) = f \star'_{\mathrm{Wick}} Z_k(\varphi_\alpha)$ in der Ordnung k des formalen Parameters, so folgt wegen der Annahme, daß $C_i = C'_i$ für $0 \leq i \leq k-1$ die Gleichung $C_k(f, Z_n(\varphi_{\alpha 0})) - C'_k(f, Z_n(\varphi_{\alpha 0})) = 0$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$, wobei $\varphi_{\alpha 0}$ ein lokales Kähler-Potential für ω bezeichnet. Setzt man hier nun die oben abgeleitete Gestalt von $(C_k - C'_k)$ ein, so erhält man $0 = -8A_{i\overline{j}} g^{i\overline{l}} g^{m\overline{j}} Z_m(f) \frac{\mathrm{i}}{2} g_{n\overline{l}} = -4\mathrm{i} A_{n\overline{j}} g^{m\overline{j}} Z_m(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}_\alpha)$. Da g nicht ausgeartet ist, impliziert das aber, daß die Komponenten der Einsform A auf $\mathcal{U}_\alpha$ verschwinden. Da aber $\alpha \in J$ beliebig war, folgt hieraus $A = 0$ und somit $C_k = C'_k$, so daß i.) bewiesen ist. Betrachtet man in der Gleichung $\overline{Z}_l(\varphi_\alpha) \star_{\mathrm{Wick}} f = \overline{Z}_l(\varphi_\alpha) \star'_{\mathrm{Wick}} f$ ebenfalls die k-te Ordnung in ν, so folgt analog $C_k(\overline{Z}_l(\varphi_{\alpha 0}), f) - C'_k(\overline{Z}_l(\varphi_{\alpha 0}), f) = 0$ und wie im Beweis von i.) erhält man hiermit $A = 0$, womit auch ii.) bewiesen ist. $\square$

Die Aussage dieses Satzes bedeutet, daß ein Sternprodukt vom Wick-Typ eindeutig durch die Gültigkeit einer der Gleichungen (3.89) in jeder holomorphen Karte (z, V) und somit durch K festgelegt ist. Dieser Satz stellt aber auch die Grundlage für den im nächsten Abschnitt gegebenen Beweis für die Aussage, daß man mit unserer Fedosov-Konstruktion jedes Sternprodukt vom Wick-Typ erhält, dar.

3.5.3 Identifikation der Fedosov-Sternprodukte vom Wick-Typ

Wir wollen in diesem Abschnitt Karabegov's charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ für die von uns konstruierten Sternprodukte vom Wick-Typ bestimmen. Ferner können wir mit diesem Ergebnis nachweisen, daß die durch diese Konstruktion vermittelte Abbildung W gemäß Gleichung (3.85) eine Bijektion ist. Um $K(*_{\mathrm{Wick}})$ bestimmen zu können, benötigen wir also lokale formale Funktionen $u_k \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ mit

$$u_k *_{\mathrm{Wick}} z^l - z^l *_{\mathrm{Wick}} u_k = -\nu \delta_k^l,$$

wobei (z, V) eine lokale holomorphe Karte von M bezeichnet. Bezeichnet man mit φ_0 ein lokales Kähler-Potential von ω, so gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} -\delta_k^l &= \{Z_k(\varphi_0), z^l\} = -X_{Z_k(\varphi_0)}(z^l) = -(\pi^{1,0} X_{Z_k(\varphi_0)})(z^l) = -\sigma(\mathcal{L}_{\pi^{1,0} X_{Z_k(\varphi_0)}} \tau_{\mathrm{Wick}}(z^l)) \\ &= -\sigma(\mathcal{L}_{Z_k} \tau_{\mathrm{Wick}}(z^l)), \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, daß die Lie-Ableitung mit σ vertauscht und letztlich verwendet haben, daß $\pi^{1,0}X_{Z_k(\varphi_0)} = Z_k$. Definiert man also $u_{k0} := Z_k(\varphi_0)$, so müssen wir die Existenz lokaler formaler Funktionen $u_{k+} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ zeigen, so daß

$$-\sigma(\mathcal{L}_{Z_k}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l)) = \frac{1}{\nu}\sigma(\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(\tau_{\mathrm{Wick}}(u_{k0}+u_{k+}))\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))$$

gilt. Wir benutzen nun die analoge Form der deformierten Cartan-Formel aus Proposition 2.3.11 (2.49) für $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}$, deren Beweis direkt vom Fall $\mathfrak{D}_{\mathrm{F}}$ auf die hier vorliegende Situation übertragen werden kann, um die Lie-Ableitung $\mathcal{L}_{Z_k}$ als

$$\mathcal{L}_{Z_k} = \mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} i_a(Z_k) + i_a(Z_k)\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} + \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}}) + i_s(Z_k) + (dz^n \otimes 1)i_s(\nabla_{Z_n}Z_k)$$

zu schreiben, wobei wir $\nabla_{\overline{Z}_m}Z_k = 0$ verwendet haben. Wegen $\sigma((dz^n\otimes 1)i_s(\nabla_{Z_n}Z_k)\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l)) = 0$, $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l) = 0$ und $i_a(Z_k)\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l) = 0$ gilt also

$$-\sigma(\mathcal{L}_{Z_k}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l)) = -\sigma\left(\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}})\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l) + i_s(Z_k)\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l)\right).$$

Definiert man nun $a_k := i_{Z_k}\omega \otimes 1 \in \mathcal{W}(V)$, so findet man mit der expliziten Gestalt von $\circ_{\mathrm{Wick}}$, daß $i_s(Z_k) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(a_k)$ gilt, und wir $-\sigma(\mathcal{L}_{Z_k}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))$ mit $\sigma = \pi_z\pi_{\overline{z}}$ und (3.16) durch

$$\begin{aligned}
&-\sigma(\mathcal{L}_{Z_k}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))\\
&= \; -\frac{1}{\nu}\sigma((\pi_z(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} - a_k))\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))) + \frac{1}{\nu}\sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} - a_k)))
\end{aligned}$$

ausdrücken können. Offensichtlich gilt $\pi_z a_k = \pi_z(i_{Z_k}\omega\otimes 1) = 0$, da ω vom Typ $(1,1)$ ist und $\pi_z i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} = i_a(Z_k)\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ nach Satz 3.4.12, so daß wir mit $-\delta^l_k = -\sigma(\mathcal{L}_{Z_k}\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))$ schließlich die Gleichung

$$-\nu\delta^l_k = \sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} - a_k)))$$

erhalten. Da wir nach einer formalen Reihe lokal definierter Funktionen $u_{k+} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ suchen, derart, daß für $u_k = u_{k0} + u_{k+}$ die Gleichung $-\nu\delta^l_k = u_k *_{\mathrm{Wick}} z^l - z^l *_{\mathrm{Wick}} u_k$ gilt, muß $\pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} - a_k)$ in enger Beziehung zur Fedosov-Taylor-Reihe der noch zu bestimmenden Funktion u_k stehen. Falls nämlich $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k) = u_k - \pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} - a_k) = u_k - \pi_{\overline{z}}i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} + a_k$ gilt, so ist $\sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))\circ_{\mathrm{Wick}}(\pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} - a_k))) = \sigma((\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(z^l))\circ_{\mathrm{Wick}}(u_k - \pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k))) = u_k z^l - z^l *_{\mathrm{Wick}} u_k = u_k *_{\mathrm{Wick}} z^l - z^l *_{\mathrm{Wick}} u_k$. Also haben wir gezeigt:

Lemma 3.5.12 *Sei φ_0 ein lokales Kähler-Potential von ω auf dem offenen zusammenziehbaren Definitionsbereich V einer holomorphen Karte (z,V) von M und sei $u_{k0} \in \mathcal{C}^\infty(V)$ durch $u_{k0} := Z_k(\varphi_0)$ definiert. Falls es lokal definierte formale Funktionen $u_{k+} = \sum_{i=1}^\infty \nu^i u_{ki} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ gibt, so daß für $u_k = u_{k0} + u_{k+}$*

$$\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k) = u_k + i_{Z_k}\omega\otimes 1 - \pi_{\overline{z}}i_a(Z_k)r_{\mathrm{Wick}} \tag{3.93}$$

gilt, dann gilt $u_k *_{\mathrm{Wick}} z^l - z^l *_{\mathrm{Wick}} u_k = -\nu\delta^l_k$.

Es bleibt also zu zeigen, daß es solche Funktionen wie in (3.93) gibt, und um die charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ bestimmen zu können, benötigen wir neben ihrer Existenz auch konkrete Aussagen über deren Gestalt.

Proposition 3.5.13 *Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.5.12 gelten folgende Aussagen:*

i.) Für alle $u_{k+} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ *gilt* $\sigma(u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) = u_k$ *und*

$$-\delta_{\overline{z}} A_k + \nabla_{\overline{z}} A_k - \frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} A_k) = 1 \otimes (\overline{\partial} u_{k+} - i_{Z_k}\Omega), \tag{3.94}$$

wobei $A_k := u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}} \in \mathcal{W}(V)$.

ii.) Es gilt $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k) = u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}$ *genau dann, wenn* $\overline{\partial} u_{k+} - i_{Z_k}\Omega = 0$. *Falls* $u_{k+} = Z_k(\varphi_+)$, *wobei* $\varphi_+ \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ *ein lokales Kähler-Potential für* Ω *ist, d.h.* $\partial\overline{\partial}\varphi_+ = \Omega|_V$, *so gilt* $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k) = u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}$.

iii.) Karabegov's charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ *des Sternproduktes* $*_{\mathrm{Wick}}$ *vom Wick-Typ ist durch*

$$K(*_{\mathrm{Wick}}) = \omega + \Omega \tag{3.95}$$

gegeben.

iv.) Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ *und* u_k *wie in ii.) gilt*

$$f *_{\mathrm{Wick}} u_k = f u_k + \nu Z_k(f). \tag{3.96}$$

Beweis: Offensichtlich gilt für alle $u_{k+} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ $\sigma(u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) = u_k$, da $\sigma = \pi_{\overline{z}}\pi_z$ und $\pi_z(i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) = 0$. Weiter berechnen wir zum Beweis von i.)

$$\delta_{\overline{z}}(u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) = 1 \otimes i_{Z_k}\omega - \pi_{\overline{z}}\delta i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}} = 1 \otimes i_{Z_k}\omega - \pi_{\overline{z}}(i_s(Z_k) r_{\mathrm{Wick}} - i_a(Z_k)\delta r_{\mathrm{Wick}}),$$

wobei wir (2.51) und (3.24) verwendet haben. Mit der Gleichung (3.7) für r_{Wick} erhalten wir hieraus wegen $\pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) R = 0$, mit $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ und

$$\begin{aligned}
&\pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})) \\
&\quad = \pi_{\overline{z}}((i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} (\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}})) - \pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} (i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}})) = -\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} (i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}))
\end{aligned}$$

das Zwischenresultat

$$\begin{aligned}
&\delta_{\overline{z}}(u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) \\
&\quad = 1 \otimes i_{Z_k}\omega - \pi_{\overline{z}} i_s(Z_k) r_{\mathrm{Wick}} + \pi_{\overline{z}}(i_a(Z_k)\nabla r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} (i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}})) + 1 \otimes i_{Z_k}\Omega,
\end{aligned}$$

da Ω vom Typ $(1,1)$ ist. Ferner gilt wegen $\nabla_{\overline{Z}_l} Z_k = 0$ und $\nabla_{\overline{Z}_l}\omega = 0$, daß auch $\nabla_{\overline{Z}_l} i_{Z_k}\omega$ verschwindet, so daß wir mit (2.54) und (3.24)

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\overline{z}}(u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) \\
&\quad = 1 \otimes \overline{\partial} u_k - \pi_{\overline{z}}(\mathcal{L}_{Z_k} r_{\mathrm{Wick}} - (dz^n \otimes 1) i_s(\nabla_{Z_n} Z_k) r_{\mathrm{Wick}} - i_a(Z_k)\nabla r_{\mathrm{Wick}}) = 1 \otimes \overline{\partial} u_k + \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k)\nabla r_{\mathrm{Wick}}
\end{aligned}$$

erhalten, da wegen $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ natürlich auch $\pi_{\overline{z}}\mathcal{L}_{Z_k} r_{\mathrm{Wick}} = 0$ gilt. Schließlich berechnen wir wieder mit $\pi_{\overline{z}} r_{\mathrm{Wick}} = 0$

$$-\frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} (u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}})) = -\pi_{\overline{z}}(i_s(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) + \frac{1}{\nu}\pi_{\overline{z}}(r_{\mathrm{Wick}} \circ_{\mathrm{Wick}} (i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}})),$$

wobei wir neben (3.16) die triviale aber hilfreiche Identität $0 = \pi_{\overline{z}}((i_{Z_k}\omega \otimes 1) \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}})$ und $i_s(Z_k) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}((i_{Z_k}\omega \otimes 1))$ verwendet haben. Kombiniert man nun unsere drei Zwischenresultate, so findet man wegen $u_{k0} = Z_k\varphi_0$ bzw. $\overline{\partial} u_{k0} = i_{Z_k}\omega$ die Gleichung (3.94), womit i.) bewiesen ist. Nach Proposition 3.4.6 ii.) gilt nun wegen $\sigma(A_k) = u_k$, daß $A_k = \pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k)$ genau dann, wenn $\overline{\partial} u_{k+} - i_{Z_k}\Omega = 0$. Diese Gleichung ist aber offensichtlich dann erfüllt, wenn $u_{k+} = Z_k(\varphi_+)$ mit einem lokalen Kähler-Potential φ_+ von Ω gilt.

Nach Lemma 3.5.12 gilt in diesem Fall $u_k *_{\mathrm{Wick}} z^l - z^l *_{\mathrm{Wick}} u_k = -\nu\delta^l_k$, so daß wir gemäß der Definition der charakterisierenden Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ für diese mit $u_k = Z_k(\varphi) = Z_k(\varphi_0 + \varphi_+)$

$$K(*_{\mathrm{Wick}}) = -\overline{\partial}(u_k dz^k) = -\overline{\partial}(u_k) \wedge dz^k = dz^k \wedge i_{Z_k}(\omega + \Omega) = \omega + \Omega$$

erhalten, womit iii.) bewiesen ist. Zum Beweis von iv.) berechnen wir für $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ mit $\pi_{\overline{z}}\tau_{\mathrm{Wick}}(u_k) = u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - \pi_{\overline{z}} i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}$, $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = 0$ und (3.16)

$$\begin{aligned} f *_{\mathrm{Wick}} u_k &= \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(f) \circ_{\mathrm{Wick}} (u_k + i_{Z_k}\omega \otimes 1 - i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}})) \\ &= f u_k + \frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{n\overline{m}} \sigma(i_s(Z_n)\tau_{\mathrm{Wick}}(f))(i_{Z_k}\omega)(\overline{Z}_m) + \sigma(i_a(Z_k)\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}})\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) \\ &\quad -\sigma((i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f)) \\ &= f u_k + \nu\sigma(i_s(Z_k)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) + \nu\sigma(i_a(Z_k)(\nabla - \delta)\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) - \sigma((\pi_z i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} \tau_{\mathrm{Wick}}(f)). \end{aligned}$$

Weiter erhalten wir wegen $\pi_z i_a(Z_k) r_{\mathrm{Wick}} = i_a(Z_k)\pi_z r_{\mathrm{Wick}} = 0$ und $i_a(Z_k)(\nabla - \delta)\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = (\nabla_{Z_k} - i_s(Z_k))\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ das Ergebnis

$$f *_{\mathrm{Wick}} u_k = f u_k + \nu\sigma(\nabla_{Z_k}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = f u_k + \nu Z_k(f),$$

und die Proposition ist bewiesen. □

Indem man die Beweise von Lemma 3.5.12 und Proposition 3.5.13 geringfügig modifiziert, kann man ebenfalls die Existenz lokal definierter formaler Funktionen $\overline{v}_l \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ nachweisen, für die $\overline{v}_l *_{\mathrm{Wick}} \overline{z}^k - \overline{z}^k *_{\mathrm{Wick}} \overline{v}_l = \nu\delta^{\overline{k}}_{\overline{l}}$ gilt. Der Vollständigkeit halber geben wir die entsprechenden Ergebnisse an, wollen aber auf einen Beweis verzichten, da für die Identifikation der Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ nach Satz 3.5.10 der Nachweis der entsprechenden Eigenschaften der Funktionen u_k bzw. $\overline{v}_l$ für einen der beiden Funktionentypen genügt. Zudem lassen sich die entsprechenden Beweise, die wir geführt haben, leicht auf diese Aussagen übertragen.

Lemma 3.5.14 *Sei φ_0 ein lokales Kähler-Potential von ω auf dem offenen zusammenziehbaren Definitionsbereich V einer holomorphen Karte (z,V) von M und sei $\overline{v}_{l0} \in \mathcal{C}^\infty(V)$ durch $\overline{v}_{l0} := \overline{Z}_l(\varphi_0)$ definiert. Falls es lokal definierte formale Funktionen $\overline{v}_{l+} = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \overline{v}_{li} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ gibt, so daß für $\overline{v}_l = \overline{v}_{l0} + \overline{v}_{l+}$*

$$\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(\overline{v}_l) = \overline{v}_l - i_{\overline{Z}_l}\omega \otimes 1 + \pi_z i_a(\overline{Z}_l) r_{\mathrm{Wick}} \tag{3.97}$$

gilt, dann gilt $\overline{v}_l *_{\mathrm{Wick}} \overline{z}^k - \overline{z}^k *_{\mathrm{Wick}} \overline{v}_l = \nu\delta^{\overline{k}}_{\overline{l}}$.

Proposition 3.5.15 *Mit den Bezeichnungen von Lemma 3.5.14 gelten folgende Aussagen:*

i.) Für alle $\overline{v}_{l+} \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ gilt $\sigma(\overline{v}_l - i_{\overline{Z}_l}\omega \otimes 1 + \pi_z i_a(\overline{Z}_l) r_{\mathrm{Wick}}) = \overline{v}_l$ und

$$-\delta_z \overline{B}_l + \nabla_z \overline{B}_l + \frac{1}{\nu}\pi_z(\overline{B}_l \circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{Wick}}) = 1 \otimes (\partial\overline{v}_{l+} + i_{\overline{Z}_l}\Omega), \tag{3.98}$$

wobei $\overline{B}_l := \overline{v}_l - i_{\overline{Z}_l}\omega \otimes 1 + \pi_z i_a(\overline{Z}_l) r_{\mathrm{Wick}} \in \mathcal{W}(V)$.

ii.) Es gilt $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(\overline{v}_l) = \overline{v}_l - i_{\overline{Z}_l}\omega \otimes 1 + \pi_z i_a(\overline{Z}_l) r_{\mathrm{Wick}}$ genau dann, wenn $\partial\overline{v}_{l+} + i_{\overline{Z}_l}\Omega = 0$. Falls $\overline{v}_{l+} = \overline{Z}_l(\varphi_+)$, wobei $\varphi_+ \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ ein lokales Kähler-Potential für Ω ist, d.h. $\partial\overline{\partial}\varphi_+ = \Omega|_V$, so gilt $\pi_z\tau_{\mathrm{Wick}}(\overline{v}_l) = \overline{v}_l - i_{\overline{Z}_l}\omega \otimes 1 + \pi_z i_a(\overline{Z}_l) r_{\mathrm{Wick}}$.

iii.) Auch mit den Funktionen $\overline{v}_l$ ergibt sich für Karabegov's charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ des Sternproduktes $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ

$$K(*_{\mathrm{Wick}}) = \omega + \Omega. \tag{3.99}$$

iv.) Für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ und $\overline{v}_l$ wie in ii.) gilt

$$\overline{v}_l *_{\mathrm{Wick}} f = \overline{v}_l f + \nu \overline{Z}_l(f). \tag{3.100}$$

Die Aussagen iii.) und iv.) von Proposition 3.5.13 und 3.5.15 stellen die Verallgemeinerung des von Karabegov für den Fall $\Omega = 0$ in [69, Sec. 4] bewiesenen Theorems dar.

Unter Verwendung des von A. Karabegov bewiesenen Satzes 3.5.8 können wir mit dem von uns bewiesenen Satz 3.5.10 zeigen, daß alle Sternprodukte vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit mit der von uns angegebenen Fedosov-Konstruktion erhalten werden können.

Satz 3.5.16 (Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ) *Für alle Sternprodukte $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) existiert eine Fedosov-Konstruktion mit $\circ_{\mathrm{Wick}}$, so daß das hiermit konstruierte Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ mit $\star_{\mathrm{Wick}}$ übereinstimmt. Ferner ist die vermöge der Fedosov-Konstruktion definierte Abbildung*

$$W : \Omega \mapsto *_{\mathrm{Wick}} = W(\Omega), \tag{3.101}$$

die einer formalen Reihe $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \Omega_i$ geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ zuordnet, eine Bijektion und die Umkehrabbildung dieser Abbildung ist durch $*_{\mathrm{Wick}} \mapsto K(*_{\mathrm{Wick}}) - \omega$ gegeben, wobei $K(*_{\mathrm{Wick}})$ Karabegov's charakterisierende Form bezeichnet.

Beweis: Die Universalität der Fedosov-Konstruktion bedeutet gerade, daß die Abbildung W surjektiv ist, also zeigen wir, daß es zu einem gegebenen Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ ein Ω gibt, so daß $\star_{\mathrm{Wick}} = W(\Omega) = *_{\mathrm{Wick}}$. Zu einem gegebenen Sternprodukt vom Wick-Typ existiert nach Satz 3.5.8 Karabegov's charakterisierende Form $K(\star_{\mathrm{Wick}})$, die vom Typ $(1,1)$ ist, und für ein formales lokales Kähler-Potential φ auf $V \subseteq M$ dieser Form sind dann für $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die Gleichungen (3.89) erfüllt. Verwendet man aber die Fedosov-Konstruktion für $\Omega = K(\star_{\mathrm{Wick}}) - \omega$, so gelten für dieses lokale Potential φ nach den Propositionen 3.5.13 und 3.5.15 die Gleichungen $f *_{\mathrm{Wick}} Z_k(\varphi) = f Z_k(\varphi) + \nu Z_k(f)$ und $\overline{Z}_l(\varphi) *_{\mathrm{Wick}} f = \overline{Z}_l(\varphi) f + \nu \overline{Z}_l(f)$. Nach Satz 3.5.10 folgt dann aber aus jeder dieser Gleichungen, daß $*_{\mathrm{Wick}} = \star_{\mathrm{Wick}}$, womit gezeigt ist, daß die Abbildung W surjektiv ist. Da ferner nach den Aussagen iii.) der Propositionen 3.5.13 und 3.5.15 $K(*_{\mathrm{Wick}}) = \omega + \Omega$ gilt, folgt $K(W(\Omega)) - \omega = \Omega$, so daß W auch injektiv ist und auch gezeigt ist, daß die Umkehrabbildung zu W durch $*_{\mathrm{Wick}} \mapsto K(*_{\mathrm{Wick}}) - \omega$ gegeben ist. □

Eine relativ erstaunliche Folgerung aus diesem Satz ist:

Folgerung 3.5.17 *Alle Sternprodukte $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) sind vom Vey-Typ.*

Beweis: Nach Satz 3.5.16 erhält man mit der Fedosov-Konstruktion mit $\circ_{\mathrm{Wick}}$ alle Sternprodukte vom Wick-Typ. Da aber nach Satz 1.3.13 wegen der Eigenschaften von ∇ alle Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ (auch diejenigen, die nicht vom Wick-Typ sind) vom Vey-Typ sind, folgt hieraus die Behauptung. □

Eine weitere einfache Folgerung, die Karabegov in [68, Thm. 3] bewiesen hat, aus den Aussagen iii.) der Propositionen 3.5.13 und 3.5.15 und der in Abschnitt 3.3 erfolgten Bestimmung der charakteristischen Klasse $c(*_{\mathrm{Wick}})$ und des Satzes 3.5.16 ist:

Folgerung 3.5.18 ([68, Thm. 3]) *Die charakteristische Klasse $c(\star_{\mathrm{Wick}})$ eines Sternproduktes $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) ist mit Karabegov's charakterisierender Form $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ durch $c(\star_{\mathrm{Wick}}) = \frac{1}{\nu}[K(\star_{\mathrm{Wick}})] - \frac{1}{\mathrm{i}}[\rho]$ gegeben, wobei ρ die in (3.3) definierte Ricci-Form bezeichnet.*

BEWEIS: Mit den Aussagen von Satz 3.3.20 und den Aussagen iii.) der Propositionen 3.5.13 und 3.5.15 findet man für $*_{\mathrm{Wick}}$ die Gleichung $c(*_{\mathrm{Wick}}) = \frac{1}{\nu}[K(*_{\mathrm{Wick}})] - \frac{1}{\mathrm{i}}[\rho]$. Da aber nach Satz 3.5.16 jedes Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ durch eine geeignete Fedosov-Konstruktion erhalten werden kann, gilt diese Aussage für alle Sternprodukte $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ. □

Als eine Anwendung unserer Ergebnisse dieses Abschnittes wollen wir nochmals auf Sternprodukte mit *-Strukturen zu sprechen kommen, wie wir sie in Abschnitt 2.4.2 diskutiert haben. Wie wir dort gesehen haben, sind die vom physikalischen Standpunkt relevanten Sternprodukte mit *-Struktur die Hermiteschen Sternprodukte, die wir in Abschnitt 2.4.2.1 studiert haben und deren *-Involution gerade durch die komplexe Konjugation gegeben ist. Wir wollen also unter den Sternprodukten vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) die Hermiteschen Sternprodukte eindeutig charakterisieren.

Proposition 3.5.19 *Ein Sternprodukt $\star_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) ist Hermitesch genau dann, wenn Karabegov's charakterisierende Form $K(\star_{\mathrm{Wick}})$ reell ist, wenn also $\mathrm{C}K(\star_{\mathrm{Wick}}) = K(\star_{\mathrm{Wick}})$ erfüllt ist.*

BEWEIS: Sei also $\star_{\mathrm{Wick}}$ ein Hermitesches Sternprodukt vom Wick-Typ. Wegen der Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte vom Wick-Typ, gibt es ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ mit $\star_{\mathrm{Wick}} = *_{\mathrm{Wick}}$. Sei nun (z, V) eine lokale holomorphe Karte und seien $u_k, \overline{v}_l \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die in den Propositionen 3.5.13, 3.5.15 angegebenen lokalen formalen Funktionen. Gemäß Proposition 3.5.13 iv.) gilt für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die Gleichung $f *_{\mathrm{Wick}} u_k = f u_k + \nu Z_k(f)$. Hieraus erhalten wir aber durch komplexe Konjugation unter Beachtung von $\mathrm{C}\nu = -\nu$, da $*_{\mathrm{Wick}}$ nach Voraussetzung Hermitesch ist, die Gleichung $\mathrm{C}(f)\mathrm{C}(u_k) - \nu\overline{Z}_k(\mathrm{C}f) = \mathrm{C}(f *_{\mathrm{Wick}} u_k) = (\mathrm{C}u_k) *_{\mathrm{Wick}} (\mathrm{C}f)$, also gilt mit den Funktionen $\overline{v}'_k := -\mathrm{C}u_k$ für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ die Gleichung $\overline{v}'_k *_{\mathrm{Wick}} g = \overline{v}'_k g + \nu\overline{Z}_k(g)$, d.h. $\overline{v}'_k$ erfüllt die zu der Gleichung für $\overline{v}_l$ analoge Gleichung. Mit der Definition der charakterisierenden Form $K(*_{\mathrm{Wick}})$ erhält man also wegen $\mathrm{C}^2 = \mathrm{id}$

$$K(*_{\mathrm{Wick}}) = \partial(\overline{v}'_k d\overline{z}^k) = \mathrm{C}\mathrm{C}\partial C(-u_k dz^k) = \mathrm{C}\overline{\partial}(-u_k dz^k) = \mathrm{C}K(*_{\mathrm{Wick}}).$$

Wegen $*_{\mathrm{Wick}} = \star_{\mathrm{Wick}}$ folgt somit $K(\star_{\mathrm{Wick}}) = \mathrm{C}K(\star_{\mathrm{Wick}})$. Sei nun umgekehrt $\star_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ, so daß $K(\star_{\mathrm{Wick}}) = \mathrm{C}K(\star_{\mathrm{Wick}})$ erfüllt ist. Wir betrachten wieder ein Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}} = \star_{\mathrm{Wick}}$. Nach Proposition 3.5.13 iii.) gilt $K(*_{\mathrm{Wick}}) = \omega + \Omega$, so daß also $\mathrm{C}\Omega = \Omega$ gilt, da ω offensichtlich reell ist. Wir wollen nun zeigen, daß hieraus folgt, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ Hermitesch ist. Hierzu beachten wir zunächst, daß für das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ für alle $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{|a|}(M), b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{|b|}(M)$ die Gleichung $\mathrm{C}(a \circ_{\mathrm{Wick}} b) = (-1)^{|a||b|}(\mathrm{C}b) \circ_{\mathrm{Wick}} (\mathrm{C}a)$ gilt, da die analoge Gleichung für das Produkt $\circ_{\mathrm{F}}$ gilt (vgl. Beweis von Proposition 2.4.8) und die faserweise Äquivalenztransformation $\mathcal{S}$ von $\circ_{\mathrm{F}}$ nach $\circ_{\mathrm{Wick}}$ mit der komplexen Konjugation vertauscht. Hiermit erhält man aber mit $\mathrm{C}\Omega = \Omega$ sofort, daß $\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}}$ die Gleichungen $\delta^{-1}\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}} = 0$ und $\delta\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}} = \nabla\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}} - \frac{1}{\nu}(\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}}) \circ_{\mathrm{Wick}} (\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}}) + R + \Omega$ erfüllt. Das bedeutet aber $\mathrm{C}r_{\mathrm{Wick}} = r_{\mathrm{Wick}}$ und wie im Beweis von Proposition 2.4.8 folgt hieraus, daß $*_{\mathrm{Wick}}$ also auch $\star_{\mathrm{Wick}}$ Hermitesch ist. □

Der von uns geführte Beweis impliziert natürlich auch:

Korollar 3.5.20 *Das aus einer formalen Reihe $\Omega = \sum_{i=1}^\infty \nu^i \Omega_i$ geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ konstruierte Fedosov-Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ vom Wick-Typ auf einer Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) ist Hermitesch genau dann, wenn $\mathrm{C}\Omega = \Omega$ gilt.*

3.5.4 Eine Fedosov-Konstruktion für die Karabegovschen Sternprodukte mit Separation der Variablen

Um einen abschließenden Vergleich unserer Resultate über Sternprodukte vom Wick-Typ mit den Ergebnissen von A. Karabegov zu Sternprodukten mit Separation der Variablen zu ermöglichen, wollen wir mit einer geringfügigen Modifikation der Fedosov-Konstruktion mit $\circ_{\mathrm{Wick}}$ noch eine Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte mit Separation der Variablen auf $(M, -\omega, I)$ angeben.

Natürlich handelt es sich hierbei um eher triviale Konsequenzen aus den ausführlichen Untersuchungen der Sternprodukte vom Wick-Typ, aber der Vollständigkeit halber wollen wir diese zumindest anführen. Hierbei wird das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{SdV}}$ durch das in Beispiel 1.3.2 iii.) (1.33) angegebene definiert sein.

Wir betrachten also $(\mathcal{W}\otimes\Lambda(M), \circ_{\mathrm{SdV}})$ auf der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit $(M, -\omega, I)$, wobei für $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ das faserweise Produkt durch

$$a\circ_{\mathrm{SdV}}b := \mu \circ \exp\left(\frac{2\nu}{\mathrm{i}} g^{k\bar{l}} i_s(\overline{Z}_l) \otimes i_s(Z_k)\right)(a \otimes b) \tag{3.102}$$

definiert ist, hierbei bezeichne g weiterhin die Semi-Riemannsche Metrik, die zur Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit (M, ω, I) gehört. Das faserweise Produkt $\circ_{\mathrm{SdV}}$ steht mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{Wick}}$ für $a \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{|a|}(M), b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^{|b|}(M)$ in der Beziehung $a\circ_{\mathrm{SdV}}b = (-1)^{|a||b|}b\circ_{\mathrm{Wick}}a$. Offensichtlich stimmt dann der Semi-Kähler-Zusammenhang auf $(M, -\omega, I)$ mit dem auf (M, ω, I) überein und die Abbildung ∇ ist eine $\circ_{\mathrm{SdV}}$-Superderivation vom antisymmetrischen Grad 1. Ferner gilt $\nabla^2 = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(R) = \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{SdV}}}(R) = -\frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{SdV}}}(R')$ mit $R' = -R$, so daß man mit Satz 1.3.3 für alle formalen Reihen geschlossener Zweiformen Ω' und alle $s' \in \mathcal{W}_3(M)$ mit $\sigma(s') = 0$ eine Fedosov-Derivation $\mathfrak{D}_{\mathrm{SdV}} = -\delta + \nabla - \frac{1}{\nu}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{SdV}}}(r_{\mathrm{SdV}})$ mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{SdV}}^2 = 0$ erhalten kann, indem man für $r_{\mathrm{SdV}} \in \mathcal{W}\otimes\Lambda^1(M)$ die eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\delta r_{\mathrm{SdV}} = \nabla r_{\mathrm{SdV}} - \frac{1}{\nu} r_{\mathrm{SdV}}\circ_{\mathrm{SdV}} r_{\mathrm{SdV}} + R' + 1 \otimes \Omega' \qquad \text{und} \qquad \delta^{-1} r_{\mathrm{SdV}} = s' \tag{3.103}$$

verwendet. Ferner existiert dann für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die entsprechende Fedosov-Taylor-Reihe, die wir mit $\tau_{\mathrm{SdV}}(f)$ bezeichnen und das induzierte Sternprodukt auf $(M, -\omega, I)$, welches wir mit $*_{\mathrm{SdV}}$ bezeichnen wollen. Auch hier sei erwähnt, daß natürlich nicht alle Sternprodukte $*_{\mathrm{SdV}}$ Sternprodukte mit Separation der Variablen sind. Da wir unsere Ergebnisse für $*_{\mathrm{Wick}}$ auf $*_{\mathrm{SdV}}$ übertragen wollen, sind natürlich die Fälle für uns interessant, wo für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ die Gleichung $f *_{\mathrm{SdV}} g = g *_{\mathrm{Wick}} f$ gilt, also $*_{\mathrm{SdV}}$ das zu $*_{\mathrm{Wick}}$ entgegengesetzte Sternprodukt ist.

Lemma 3.5.21 *Falls die Daten (Ω', s') der Fedosov-Konstruktion für $*_{\mathrm{SdV}}$ mit den Daten (Ω, s) der Fedosov-Konstruktion für $*_{\mathrm{Wick}}$ durch $\Omega' = -\Omega$ und $s' = -s$ verknüpft sind, gilt $r_{\mathrm{SdV}} = -r_{\mathrm{Wick}}$. Ferner gilt dann für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ $\tau_{\mathrm{Wick}}(f) = \tau_{\mathrm{SdV}}(f)$ und $*_{\mathrm{SdV}}$ ist das zu $*_{\mathrm{Wick}}$ entgegengesetzte Sternprodukt, d.h. für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$ gilt $f *_{\mathrm{SdV}} g = g *_{\mathrm{Wick}} f$.*

Beweis: Mit $s' = -s$, $\Omega' = -\Omega$ erhält man wegen $R' = -R$ und $r_{\mathrm{SdV}}\circ_{\mathrm{SdV}} r_{\mathrm{SdV}} = -r_{\mathrm{SdV}}\circ_{\mathrm{Wick}} r_{\mathrm{SdV}}$ für $-r_{\mathrm{SdV}}$ die Gleichungen $\delta^{-1}(-r_{\mathrm{SdV}}) = s$ und $\delta(-r_{\mathrm{SdV}}) = \nabla(-r_{\mathrm{SdV}}) - \frac{1}{\nu}(-r_{\mathrm{SdV}})\circ_{\mathrm{Wick}}(-r_{\mathrm{SdV}}) + R + 1 \otimes \Omega$. Diese Gleichungen für $-r_{\mathrm{SdV}}$ stimmen aber mit denen für r_{Wick} überein, so daß aus der Eindeutigkeit deren Lösung $-r_{\mathrm{SdV}} = r_{\mathrm{Wick}}$ folgt. Somit gilt dann aber wegen der Beziehung zwischen $\circ_{\mathrm{Wick}}$ und $\circ_{\mathrm{SdV}}$ auch die Gleichung $\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{Wick}}}(r_{\mathrm{Wick}}) = \mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{SdV}}}(r_{\mathrm{SdV}})$ also $\mathfrak{D}_{\mathrm{Wick}} = \mathfrak{D}_{\mathrm{SdV}}$. Die triviale Konsequenz hiervon ist die Gleichheit der Fedosov-Taylor-Reihen $\tau_{\mathrm{Wick}}(f)$ und $\tau_{\mathrm{SdV}}(f)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)[[\nu]]$. Somit gilt aber offensichtlich

$$f *_{\mathrm{SdV}} g = \sigma(\tau_{\mathrm{SdV}}(f)\circ_{\mathrm{SdV}}\tau_{\mathrm{SdV}}(g)) = \sigma(\tau_{\mathrm{Wick}}(g)\circ_{\mathrm{Wick}}\tau_{\mathrm{Wick}}(f)) = g *_{\mathrm{Wick}} f.$$

□

Im weiteren betrachten wir immer Paare von Sternprodukten $*_{\mathrm{Wick}}$ und $*_{\mathrm{SdV}}$ die zueinander entgegengesetzt sind und drücken alle relevanten Ergebnisse in Termen der Größen aus, die das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ festlegen.

Korollar 3.5.22 *Die charakteristische Klasse des Sternproduktes $*_{\mathrm{SdV}}$ auf $(M, -\omega, I)$ ist durch*

$$c(*_{\mathrm{SdV}}) = -c(*_{\mathrm{Wick}}) = \frac{-[\omega]}{\nu} + \frac{1}{\nu}\left[\frac{\nu}{\mathrm{i}}\rho - \Omega\right] \tag{3.104}$$

gegeben.

BEWEIS: Da $*_{\mathrm{SdV}} = *_{\mathrm{Wick}^{\mathrm{opp}}}$ folgt aus Proposition 2.4.2 $c(*_{\mathrm{SdV}}) = -c(*_{\mathrm{Wick}})$ und somit die Behauptung aus Satz 3.3.20. □

Da es für die Sternprodukte $*_{\mathrm{Wick}}$ keine Einschränkung darstellt Normierungsbedingungen s_{tr} zu verwenden, die keinen Anteil vom symmetrischen Grad 1 besitzen, wollen wir auch hier diesen Fall betrachten.

Korollar 3.5.23 *Das Sternprodukt $*_{\mathrm{SdV}}$ auf $(M, -\omega, I)$ ist ein Sternprodukt mit Separation der Variablen genau dann, wenn Ω vom Typ $(1,1)$ ist und $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0$ gilt. Insbesondere ist dann $*_{\mathrm{SdV}}$ unabhängig von der Normierungsbedingung und ist nur durch Ω festgelegt. Die Abbildung $S : \Omega \mapsto *_{\mathrm{SdV}} = S(\Omega)$, die Ω ein Sternprodukt mit Separation der Variablen zuordnet, ist eine Bijektion und somit existiert für alle Sternprodukte mit Separation der Variablen eine Fedosov-Konstruktion. Ferner sind alle Sternprodukte mit Separation der Variablen Sternprodukte vom Vey-Typ.*

BEWEIS: Nach Lemma 3.4.3 ist $*_{\mathrm{SdV}}$ ein Sternprodukt mit Separation der Variablen genau dann, wenn $*_{\mathrm{Wick}}$ ein Sternprodukt vom Wick-Typ ist. Nach Satz 3.4.12 ist dies aber genau dann der Fall, wenn Ω vom Typ $(1,1)$ ist und $\pi_z s_{\mathrm{tr}} = \pi_{\overline{z}} s_{\mathrm{tr}} = 0$. Nach Satz 3.5.7 hängt dann aber das Sternprodukt $*_{\mathrm{Wick}}$ also auch das entgegengesetzte Sternprodukt $*_{\mathrm{SdV}}$ nicht von der Normierungsbedingung ab, und wir können im weiteren $s_{\mathrm{tr}} = 0$ betrachten. Trivialerweise ist die Abbildung, die einem Sternprodukt das entgegengesetzte Sternprodukt zuordnet, eine Bijektion und somit folgt die Bijektivität von S aus der Bijektivität der Abbildung $W : \Omega \mapsto *_{\mathrm{Wick}} = W(\Omega)$, somit ist aber auch die Universalität der Fedosov-Konstruktion für Sternprodukte mit Separation der Variablen klar. Die Tatsache, daß alle Sternprodukte mit Separation der Variablen vom Vey-Typ sind, folgt direkt aus Folgerung 3.5.17. □

Natürlich lassen sich auch alle weiteren Ergebnisse insbesondere die Definition von Karabegov's charakterisierender Form auf die Sternprodukte mit Separation der Variablen übertragen. Anstatt diese Diskussion zu vertiefen, wollen wir noch angeben, wie man aus den Sternprodukten $*_{\mathrm{SdV}}$ die Produkte, die Karabegov in [67] konstruiert hat, erhält. Hierzu sind wir gezwungen mit unserer Konvention zu brechen, daß der formale Parameter als rein imaginär betrachtet wird, sondern müssen zum formalen Parameter λ übergehen, der mit ν in der Beziehung $\nu = \mathrm{i}\lambda$ steht. Die Definition 1.2.1 eines Sternproduktes überträgt sich dann sinngemäß auf diese Konvention, indem ν durch $\mathrm{i}\lambda$ ersetzt wird, insofern kann man solche Produkte auch als Sternprodukte zur symplektischen Form, die durch das $\frac{1}{\mathrm{i}}$-fache der ursprünglichen symplektischen Form gegeben ist, ansehen, d.h. die Poisson-Klammer wird durch das i-fache der ursprünglichen Poisson-Klammer ersetzt.

Seien also C_l diejenigen Bidifferentialoperatoren, die das Sternprodukt $*_{\mathrm{SdV}}$ für Funktionen $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch $f *_{\mathrm{SdV}} g = fg + \sum_{l=1}^\infty \nu^l C_l(f,g)$ beschreiben, dann definieren wir das Sternprodukt $*_{\mathrm{K}}$ auf $(M, -\omega, I)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch

$$f *_{\mathrm{K}} g := fg + \sum_{l=1}^{\infty} (\mathrm{i}\lambda)^l C_l(f,g) \tag{3.105}$$

und erweitern $\mathbb{C}[[\lambda]]$-bilinear zu einem assoziativen Produkt $*_{\mathrm{K}} : \mathcal{C}^\infty(M)[[\lambda]] \times \mathcal{C}^\infty(M)[[\lambda]] \to \mathcal{C}^\infty(M)[[\lambda]]$ (Im Sinne der Definition 1.2.1 ist dieses ein Sternprodukt für $(M, -\frac{\omega}{\mathrm{i}})$.). Da $*_{\mathrm{SdV}}$ mit den oben gemachten Voraussetzungen an Ω ein Sternprodukt mit Separation der Variablen ist, ist dies trivialerweise auch für $*_{\mathrm{K}}$ der Fall. Zunächst wollen wir konkret eine Fedosov-Konstruktion für diese Sternprodukte angeben. Hierzu betrachten wir anstelle von $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ die Fedosov-Algebra $(\mathcal{W}\otimes\Lambda_\lambda(M), \circ_{\mathrm{K}})$, wobei $\mathcal{W}\otimes\Lambda_\lambda(M) := (\mathsf{X}_{s=0}^\infty \mathbb{C}(\Gamma^\infty(\bigvee^s T^*M \otimes \bigwedge T^*M)))[[\lambda]]$, mit dem faserweisen Produkt $\circ_{\mathrm{K}}$, welches für $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda_\lambda(M)$ durch

$$a \circ_{\mathrm{K}} b := \mu \circ \exp\left(2\lambda g^{k\bar{l}} i_s(\overline{Z}_l) \otimes i_s(Z_k)\right)(a \otimes b) \tag{3.106}$$

definiert ist. Für dieses faserweise Produkt erhalten wir dann mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}} := -\delta + \nabla - \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}\mathrm{ad}_{\circ_{\mathrm{K}}}(r_{\mathrm{K}})$ eine Fedosov-Derivation mit $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}^2 = 0$, wobei r_{K} die eindeutige Lösung der Gleichungen

$$\delta r_{\mathrm{K}} = \nabla r_{\mathrm{K}} - \frac{1}{\mathrm{i}\lambda} r_{\mathrm{K}} \circ_{\mathrm{K}} r_{\mathrm{K}} - R - 1 \otimes \Omega(\mathrm{i}\lambda) \qquad \text{und} \qquad \delta^{-1} r_{\mathrm{K}} = 0 \tag{3.107}$$

sei. Hierbei sei $\Omega(\mathrm{i}\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} (\mathrm{i}\lambda)^l \Omega_l$ und Ω bezeichne die formale Reihe geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$, die in die Konstruktion von $*_{\mathrm{Wick}}$ eingeht. Da die Gleichungen für r_{K} aus den Gleichungen für r_{SdV} dadurch hervorgehen, daß ν durch $\mathrm{i}\lambda$ ersetzt wird, ist wegen der Eindeutigkeit von r_{K} klar, daß $r_{\mathrm{K}} = r_{\mathrm{SdV}}(\mathrm{i}\lambda) = -r_{\mathrm{Wick}}(\mathrm{i}\lambda)$ gilt. Hiermit folgt aber sofort, daß für die entsprechende Fedosov-Taylor-Reihe $\tau_{\mathrm{K}}(f)$ aller Funktionen $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ auch $\tau_{\mathrm{K}}(f) = \tau_{\mathrm{SdV}}(f)(\mathrm{i}\lambda) = \tau_{\mathrm{Wick}}(f)(\mathrm{i}\lambda)$ gilt, da die Gleichung $\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}\tau_{\mathrm{K}}(f) = 0$ für $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ aus der Gleichung $\mathfrak{D}_{\mathrm{SdV}}\tau_{\mathrm{SdV}}(f) = 0$ durch die Ersetzung von ν durch $\mathrm{i}\lambda$ hervorgeht. Hiermit erhalten wir dann aber sofort, daß das mit dieser Fedosov-Taylor-Reihe τ_{K} konstruierte Produkt $f *_{\mathrm{K}} g$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ mit dem in Gleichung (3.105) definierten übereinstimmt, welches aus $f *_{\mathrm{SdV}} g$ durch die Ersetzung von ν durch $\mathrm{i}\lambda$ hervorgeht. Da die charakteristische Klasse c von Sternprodukten äquivariant unter Parameterwechseln ist, erhalten wir mit Korollar 3.5.22 sofort, daß die charakteristische Klasse $c(*_{\mathrm{K}})$ durch

$$c(*_{\mathrm{K}}) = c(*_{\mathrm{SdV}})(\mathrm{i}\lambda) = \frac{-[\omega]}{\mathrm{i}\lambda} + \frac{1}{\mathrm{i}\lambda}[\lambda\rho - \Omega(\mathrm{i}\lambda)] \tag{3.108}$$

gegeben ist. Ferner wollen wir unter Verwendung der von Karabegov angegebenen Definition die charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{K}})$ bestimmen. Mit den lokal definierten formalen Funktionen $u_k \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ und $\overline{v}_k \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\nu]]$ gemäß der Propositionen 3.5.13 und 3.5.15 gelten in einer lokalen, holomorphen Karte (z, V) die Gleichungen $u_k *_{\mathrm{SdV}} z^l - z^l *_{\mathrm{SdV}} u_k = \nu\delta_k^l$ und $\overline{v}_l *_{\mathrm{SdV}} \overline{z}^k - \overline{z}^k *_{\mathrm{SdV}} \overline{v}_l = -\nu\delta_{\overline{l}}^{\overline{k}}$, da $*_{\mathrm{SdV}} = *_{\mathrm{Wick\,opp}}$. Also erhalten wir, indem wir in diesen Gleichungen ν durch $\mathrm{i}\lambda$ ersetzen und die Definition von $*_{\mathrm{K}}$ berücksichtigen, für die lokalen formalen Funktionen $u_k' = \frac{1}{\mathrm{i}}u_k(\mathrm{i}\lambda) \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\lambda]]$ und $\overline{v}_l' = \frac{1}{\mathrm{i}}\overline{v}_l(\mathrm{i}\lambda) \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\lambda]]$ die Gleichungen

$$u_k' *_{\mathrm{K}} z^l - z^l *_{\mathrm{K}} u_k' = \lambda\delta_k^l \qquad \text{und} \qquad \overline{v}_l' *_{\mathrm{K}} \overline{z}^k - \overline{z}^k *_{\mathrm{K}} \overline{v}_l' = -\lambda\delta_{\overline{l}}^{\overline{k}}.$$

Ferner gilt nach Proposition 3.5.13 iv.) bzw. 3.5.15 iv.) für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(V)[[\lambda]]$ indem man den Zusammenhang von $*_{\mathrm{Wick}}$, $*_{\mathrm{SdV}}$ und $*_{\mathrm{K}}$ berücksichtigt

$$u_k' *_{\mathrm{K}} f = u_k' f + \lambda Z_k(f) \qquad \text{und} \qquad f *_{\mathrm{K}} \overline{v}_l' = f\overline{v}_l' + \lambda\overline{Z}_l(f). \tag{3.109}$$

Durch je eine dieser Gleichungen ist aber ein Sternprodukt mit Separation der Variablen bereits festgelegt, so daß wir hiermit die Sternprodukte $*_{\mathrm{K}}$ mit den jeweiligen von Karabegov konstruierten Sternprodukten identifizieren können. Hierzu bestimmen wir nun die charakterisierende Form $K(*_{\mathrm{K}})$, welche mit der ursprünglichen Definition von Karabegov (vgl. [67]) durch $K(*_{\mathrm{K}}) = \mathrm{i}\overline{\partial}(-u_k' dz^k) = \mathrm{i}\partial(\overline{v}_l' d\overline{z}^l) = \overline{\partial}(-u_k(\mathrm{i}\lambda)dz^k) = \partial(\overline{v}_l(\mathrm{i}\lambda)d\overline{z}^l)$ gegeben ist. Wegen der expliziten Gestalt der lokalen formalen Funktionen u_k und $\overline{v}_l$ folgt hiermit aber $K(*_{\mathrm{K}}) = \omega + \Omega(\mathrm{i}\lambda)$ und wir erhalten das Ergebnis:

Satz 3.5.24 *Das Sternprodukt $*_{\mathrm{K}}$ auf der Semi-Kähler-Mannigfaltigkeit $(M, -\omega, I)$ stimmt mit dem von Karabegov aus einer formalen Deformation $\boldsymbol{\omega} = \omega + \boldsymbol{\omega}_+$ der symplektischen Form, welche eine formale Reihe geschlossener Zweiformen vom Typ $(1,1)$ ist, konstruierten Sternprodukt genau dann überein, wenn $\boldsymbol{\omega}_+ = \Omega(\mathrm{i}\lambda)$.*

Beweis: Die Aussage von Satz 3.5.10 über die eindeutige lokale Charakterisierung eines Sternproduktes vom Wick-Typ überträgt sich in offensichtlicher Weise auf Sternprodukte mit Separation der Variablen, und unter

Berücksichtigung des vorgenommenen Wechsels des formalen Parameters ist klar, daß je eine der Gleichungen (3.109) das Sternprodukt $*_{\mathrm{K}}$ festlegt. Nun erfüllen aber die von Karabegov konstruierten Sternprodukte diese beiden Gleichungen, genau dann, wenn in der dortigen Konstruktion die formale Deformation $\boldsymbol{\omega}=\omega+\boldsymbol{\omega}_+$ der symplektischen Form mit $K(*_{\mathrm{K}})=\omega+\Omega(\mathrm{i}\lambda)$ übereinstimmt, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Bemerkung 3.5.25 *Die Tatsache, daß $*_{\mathrm{K}}$ unter Benutzung unserer Konventionen ein Sternprodukt zum negativen der symplektischen Form ω ist, beruht darauf, daß sich unsere Vorzeichen-Konvention für die Poisson-Klammer, von der in [67] verwendeten um ein Vorzeichen unterscheidet.*

Der entscheidende Vorteil, den die Fedosov-Konstruktion gegenüber der lokalen Konstruktion von Karabegov besitzt, ist einerseits natürlich die Offensichtlichkeit der globalen Wohldefiniertheit der Produkte $*_{\mathrm{K}}$, da zu deren Definition nur von globalen Objekten Gebrauch gemacht wird. Ferner ist das Auftreten von Krümmungsgrößen (und hieraus abgeleiteten Größen) des Semi-Kähler-Zusammenhangs wie z.B. der Ricci-Form hier insofern zu erwarten, da der Semi-Kähler-Zusammenhang als wesentlicher Bestandteil in die Fedosov-Konstruktion eingeht. Zudem erlaubt es die Fedosov-Konstruktion, in sehr einfacher Weise, algebraische Eigenschaften der erhaltenen Produkte zu untersuchen, ohne zwingend explizite Formeln für diese angeben zu müssen, was gegenüber der lokalen Beschreibung ein erheblicher Vorteil ist. Diese Tatsache haben wir uns auch bei der Charakterisierung der Hermiteschen Sternprodukte vom Wick-Typ (vgl. Proposition 3.5.19) zunutze machen können.

Anhang A

Formale Potenzreihen und der Banachsche Fixpunkt-Satz

In diesem Anhang wollen wir einige elementare Ergebnisse über formale Potenzreihen zusammenstellen und eine Formulierung des Banachschen Fixpunkt-Satzes in diesem Rahmen geben, die im Laufe dieser Arbeit an vielen Stellen Verwendung gefunden hat.

A.1 Formale Potenzreihen

Sei nun V ein Modul über einem Ring R. Dann definiert man die formalen Potenzreihen in ν mit Koeffizienten in V als das kartesische Produkt

$$V[[\nu]] := \mathsf{X}_{k=0}^{\infty} V_k \qquad \text{mit} \qquad V_k := V \tag{A.1}$$

oder äquivalent dazu als den Folgenraum $\{(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid v_k \in V\}$. Diese Menge ist offenbar auf natürliche Weise wieder ein Modul über R. Elemente $v \in V[[\nu]]$ schreiben wir symbolisch als

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k, \tag{A.2}$$

wobei $v_k \in V$, so daß die Modulstruktur gerade die gliedweise Addition und die gliedweise skalare Multiplikation mit Elementen des Moduls R ist. Natürlich beinhaltet die Schreibweise in Gleichung (A.2) zunächst keinerlei Konvergenzaussage, sondern es handelt sich bei den formalen Potenzreihen bisher um ein rein algebraisches Konzept und (A.2) dient nur als kompakte Schreibweise, die sich für algebraische Manipulationen als praktisch erweist. Analog definiert man für eine R-Algebra A die Algebra $A[[\nu]]$ der formalen Potenzreihen mit Werten in A, wobei in $A[[\nu]]$ die R-Algebra-Struktur für $a, b \in A[[\nu]]$ durch folgende Definition erklärt wird:

$$ab := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k a_k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \nu^l b_l\right) := \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \sum_{l=0}^{n} a_l b_{n-l}. \tag{A.3}$$

Diese Multiplikation ist offensichtlich R-bilinear und $A[[\nu]]$ ist genau dann assoziativ (kommutativ), wenn A assoziativ (kommutativ) ist. Insbesondere ist hiermit also auch $\mathsf{R}[[\nu]]$ selbst eine R-Algebra, also kann man $\mathsf{R}[[\nu]]$ mit der gliedweisen Addition und der in (A.3) erklärten Multiplikation als Ring auffassen (Ist R sogar ein Körper, so ist dies ein Ring mit $1 \neq 0$.). Hierbei kann der formale Parameter ν durch die Festsetzung $\nu := \nu 1$ als Element von $\mathsf{R}[[\nu]]$ verstanden werden. Ferner werden dann $V[[\nu]]$ bzw. $A[[\nu]]$ auf natürliche Weise zu einem $\mathsf{R}[[\nu]]$-Modul bzw. einer $\mathsf{R}[[\nu]]$-Algebra, indem man die Multiplikation mit einem Element aus $\mathsf{R}[[\nu]]$ analog zu (A.3) definiert. Allgemein gilt, daß für eine beliebige R-Algebra A und einen beliebigen A-(Links-)Modul M der Modul $M[[\nu]]$ zu einem $A[[\nu]]$-(Links-)Modul wird, indem man die (Links-)Multiplikation analog zu (A.3) definiert. Ist A eine assoziative Algebra mit Eins, so ist ein Elemente $a = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k a_k \in A[[\nu]]$ genau dann invertierbar, wenn a_0 in A invertierbar ist, was man sich leicht mit Hilfe einer geometrischen Reihe klar macht (vgl. [86, Lemma 2.2.2]). Für weitere Rechenregeln mit formalen Potenzreihen verweisen wir auf [86, Abschnitt 2.2] und [107, Abschnitt 2.3].

Als nächstes betrachten wir lineare Abbildungen von $V[[\nu]]$ nach $W[[\nu]]$ für zwei R-Moduln V, W. Dann sind $V[[\nu]]$ und $W[[\nu]]$ $\mathsf{R}[[\nu]]$-Moduln und es ist natürlich, nicht R-lineare sondern sogar $\mathsf{R}[[\nu]]$-lineare Abbildungen zu betrachten. Für R-lineare Abbildungen $\eta_k : V \to W$, $k \in \mathbb{N}$ definiert man $\eta := \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \eta_k : V[[\nu]] \to W[[\nu]]$ für $v = \sum_{l=0}^{\infty} \nu^l v_l \in V[[\nu]]$ durch

$$\eta(v) := \sum_{n=0}^{\infty} \nu^n \sum_{l=0}^{n} \eta_l(v_{n-l}) \tag{A.4}$$

und weist leicht nach, daß η eine $\mathsf{R}[[\nu]]$-lineare Abbildung ist. Ein einfaches Lemma zeigt, daß jede $\mathsf{R}[[\nu]]$-lineare Abbildung von dieser Gestalt ist:

Lemma A.1.1 ([34, Prop. 2.1]) *Seien V und W zwei R-Moduln, dann gibt es zu jeder $\mathsf{R}[[\nu]]$-linearen Abbildung $\eta : V[[\nu]] \to W[[\nu]]$ eindeutig bestimmte R-lineare Abbildungen $\eta_k : V \to W$, für $k \in \mathbb{N}$, so daß $\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \eta_k$ und demnach gilt*

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{R}}(V, W)[[\nu]] \cong \mathsf{Hom}_{\mathsf{R}[[\nu]]}(V[[\nu]], W[[\nu]]). \tag{A.5}$$

Das Resultat dieses Lemmas läßt sich natürlich völlig analog auf $\mathsf{R}[[\nu]]$-multilineare Abbildungen übertragen. Das Verhalten formaler Potenzreihen bei Quotientenbildung ist ebenfalls natürlich:

Lemma A.1.2 *Sei $W \subseteq V$ ein Untermodul eines R-Moduls V, dann gilt*

$$V[[\nu]]/W[[\nu]] \cong (V/W)[[\nu]], \tag{A.6}$$

wobei der kanonische Isomorphismus durch $\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k \bmod \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k w_k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k (v_k \bmod w_k)$ gegeben ist.

Als eine weitere kanonisch gegebene Struktur auf den formalen Potenzreihen betrachten wir die Ordnung $o : V[[\nu]] \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, die für $v = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k \in V[[\nu]]$ durch

$$o(v) := o\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k\right) := \begin{cases} \min\{k \in \mathbb{N} \mid v_k \neq 0\} & \text{falls } v \neq 0 \\ +\infty & \text{falls } v = 0 \end{cases} \tag{A.7}$$

definiert ist. Diese Ordnung besitzt dann offensichtlich die Eigenschaften:

$$o(v) = o(-v) \qquad \text{und} \qquad o(v + v') \geq \min\{o(v), o(v')\}. \tag{A.8}$$

Weiter definiert man hiermit die ν-adische Bewertung $\varphi : V[[\nu]] \to \mathbb{Q}$ durch

$$\varphi(v) := \begin{cases} 2^{-o(v)} & \text{falls } v \neq 0 \\ 0 & \text{falls } v = 0. \end{cases} \tag{A.9}$$

Es zeigt sich nun, daß φ auf $V[[\nu]]$ eine Metrik induziert, die $V[[\nu]]$ zu einem vollständigen metrischen Raum macht.

Lemma A.1.3 *Sei V ein R-Modul, A eine R-Algebra und M ein A-(Links-)Modul. Dann gilt:*

i.) Die Abbildung $d_\varphi : V[[\nu]] \times V[[\nu]] \to \mathsf{Q}$ mit

$$d_\varphi(v, v') := \varphi(v - v') \tag{A.10}$$

definiert eine Ultrametrik auf $V[[\nu]]$, so daß $(V[[\nu]], d_\varphi)$ ein vollständiger, metrischer Raum wird. Die durch d_φ induzierte Topologie wird ν-adische Topologie genannt.

ii.) Bezüglich der ν-adischen Topologie ist $\mathsf{R}[[\nu]]$ ein topologischer Ring, $V[[\nu]]$ ein topologischer $\mathsf{R}[[\nu]]$-Modul, $A[[\nu]]$ eine topologische $\mathsf{R}[[\nu]]$-Algebra und $M[[\nu]]$ ein topologischer $A[[\nu]]$-(Links-)Modul. Die durch die ν-adische Topologie auf $V \subseteq V[[\nu]]$ induzierte Topologie ist diskret.

iii.) Für $v_k \in V$, $k \in \mathbb{N}$ gilt im Sinne der ν-adischen Topologie

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \nu^k v_k = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k v_k. \tag{A.11}$$

iv.) Der R-Modul $V[\nu]$ der Polynome in ν mit Koeffizienten in V liegt bezüglich der ν-adischen Topologie dicht in $V[[\nu]]$.

Die Beweise dieser Aussagen findet man z.B. in [72] oder [109], so daß wir auf eine Darstellung eines Beweises hier verzichten wollen.

Aufgrund dieses Lemmas konvergieren die formalen Reihen im Sinne der ν-adischen Topologie also immer, jedoch besteht im allgemeinen kein Zusammenhang zwischen dieser Topologie und einer auf V eventuell bereits vorhandenen Topologie. Deshalb lassen sich hieraus auch keine weiteren Folgerungen für die Konvergenz in einer eventuell auf V vorhandenen Topologie ableiten, falls ν durch ein Element aus dem Ring R ersetzt werden soll. Trotzdem ist es an vielen Stellen sehr nützlich die ν-adische Topologie zu verwenden, da sich einige Beweise in dieser sehr leicht formulieren lassen, wie es etwa für den Banachschen Fixpunkt-Satz, den wir im anschließenden Abschnitt kurz diskutieren wollen, der Fall ist.

A.2 Der Banachsche Fixpunkt-Satz

Wir stellen in diesem Abschnitt einige Folgerungen aus dem Banachschen Fixpunk-Satz zusammen, derer wir uns an vielen Stellen der Arbeit bedient haben. Zwar lassen sich die betreffenden Beweise, die den Banachschen Fixpunkt-Satz verwenden, auch elementar durch Induktion beweisen, jedoch stellt die Beweistechnik mit dem Fixpunkt-Satz eine deutliche Erleichterung dar und macht die hiermit bewiesenen Aussagen durchsichtiger.

Wir betrachten zunächst einen metrischen Raum (M, d) und eine Abbildung $L : M \to M$ dieses metrischen Raumes in sich, dann heißt L kontrahierend, falls es ein q mit $0 \leq q < 1$ gibt, so daß für alle $x, y, \in M$

$$d(L(x), L(y)) \leq q d(x, y) \tag{A.12}$$

gilt. Anders ausgedrückt bedeutet das, daß L Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante q ist. Ist der metrische Raum (M, d) zusätzlich vollständig, so gilt für eine solche kontrahierende Abbildung L der bekannte Banachsche Fixpunkt-Satz:

Lemma A.2.1 *Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $L : M \to M$ eine konrahierende Abbildung, dann besitzt L genau einen Fixpunkt $x_0 \in M$, der durch Iteration $x_0 = \lim_{n\to\infty} L^n(x)$ bei beliebigem Startwert $x \in M$ gewonnen werden kann.*

Die Idee bei der folgenden Anwendung dieses Satzes, ist es eine geeignete Metrik zu finden, daß zum einen der betreffende Raum ein vollständiger metrischer Raum wird und zum anderen die relevanten Abbildungen kontrahierend bezüglich dieser Metrik sind. Wir betrachten nun ein kartesisches Produkt von R-Moduln V_k für $k \in \mathbb{N}$, wobei R ein Ring sei, und definieren $V := \mathsf{X}_{k=0}^{\infty} V_k$. Dann ist V offensichtlich wieder ein R-Modul und analog zur Definition der Ordnung (A.7) bei den formalen Potenzreihen definieren wir hier die Ordnung eines Elementes $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ durch $o(v) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid v_k \neq 0\}$ für $v \neq 0$ und $o(0) := +\infty$. Hiermit definieren wir dann analog eine Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{Q}$ durch $\varphi(v) := 2^{-o(v)}$ für $v \neq 0$ und $\varphi(0) := 0$. Analog zu Lemma A.1.3 erhält man dann folgende Aussage:

Lemma A.2.2 *Mit den obigen Bezeichnungen wird V durch $d_\varphi(v,w) := \varphi(v-w)$ ein vollständiger ultrametrischer Raum. Eine Abbildung $L : V \to V$ ist genau dann kontrahierend bezüglich der Metrik d_φ, falls es ein $0 < k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ gibt, so daß*

$$o(L(v) - L(w)) \geq k + o(v - w) \tag{A.13}$$

für alle $v, w \in V$ gilt. In diesem Fall ist 2^{-k} eine Lipschitz-Konstante für L, wobei wir $2^{-\infty} := 0$ setzen.

Bemerkenswerterweise ist die direkte Summe $\bigoplus_{k=0}^{\infty} V_k \subseteq \mathsf{X}_{k=0}^{\infty} V_k$ selbst nicht vollständig, sondern liegt vielmehr nur dicht bezüglich der von d_φ induzierten Topologie. Das kartesische Produkt erweist sich also als die metrische Vervollständigung der direkten Summe bezüglich dieser Metrik.

Eine offensichtliche Konsequenz der obigen Aussagen für die formalen Potenzreihen ist:

Korollar A.2.3 *Sei V ein R-Modul und $L : V[[\nu]] \to V[[\nu]]$ eine Abbildung. Dann hat L einen eindeutigen Fixpunkt, wenn es ein $k > 0$ gibt, so daß $o(L(v) - L(w)) \geq k + o(v - w)$.*

In den für uns wichtigen Anwendungen im Rahmen der Fedosov-Konstruktion haben wir die obigen Aussagen für $\mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$, was das kartesische Produkt aller Deg-homogenen Elemente ist, verwendet. Dort besitzt dann natürlich eine Abbildung $L : \mathcal{W}\otimes\Lambda(M) \to \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ einen eindeutigen Fixpunkt, falls es ein $k > 0$ gibt, so daß der Deg-Grad des Terms mit niedrigstem Deg-Grad in $L(a) - L(b)$ einen um mindestens k höheren Deg-Grad als der Term mit niedrigstem Deg-Grad in $a - b$ für alle $a, b \in \mathcal{W}\otimes\Lambda(M)$ hat.

Literaturverzeichnis

[1] Abraham, R., Marsden, J. E.: *Foundations of Mechanics.* Addison-Wesley Publishing Company, Reading Mass. (1985).

[2] Abraham, R., Marsden, J. E., Ratiu, T.: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1988).

[3] Agarwal, G. S., Wolf, E.: *Calculus for Functions of Noncommuting Operators and General Phase-Space Methods in Quantum Mechanics. I. Mapping Theorems and Ordering of Functions of Noncommuting Operators.* Phys. Rev. D **2**.10, 2161–2186 (1970).

[4] Arnal, D., Cortet, J. C., Molin, P., Pinczon, G.: *Covariance and geometrical invariance in $*$ quantization.* J. Math. Phys. **24**, 276–283 (1983).

[5] Arnol'd, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1989).

[6] Bates, S., Weinstein, A.: *Lectures on the Geometry of Quantization.* Berkeley Mathematics Lecture Notes **Vol. 8** (1995).

[7] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics.* Lett. Math. Phys. **1**, 521–530 (1977).

[8] Bayen, F., Flato, M., Frønsdal, C., Lichnerowicz, A., Sternheimer, D.: *Deformation Theory and Quantization.* Ann. Phys. **111**, Teil I: 61–110, Teil II: 111–151 (1978).

[9] Berezin, F. A.: *General Concept of Quantization.* Commun. Math. Phys. **40**, 153–174 (1975).

[10] Bertelson, M., Bieliavsky, P., Gutt, S.: *Parametrizing Equivalence Classes of Invariant Star Products.* Lett. Math. Phys. **46**, 339–345 (1998).

[11] Bertelson, M., Cahen, M., Gutt, S.: *Equivalence of star products.* Class. Quant. Grav. **14**, A93–A107 (1997).

[12] Berline, N., Getzler, E., Vergne, M.: *Heat kernels and Dirac operators.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1992).

[13] Bloore, F. J., Assimakopoulos, M., Ghobrial, I. R.: *Quantization as Deformation Theory.* J. Math. Phys. **17**, 1034–1038 (1976).

[14] Bonneau, P.: *Fedosov Star Products and One-Differentiable Deformations.* Lett. Math. Phys. **45**, 363–376 (1998).

[15] Bordemann, M.: *Strongly invariant star-products and their phase space reduction.* Unpublished notes, 1996.

[16] Bordemann, M.: *The deformation quantization of certain super-Poisson brackets and BRST cohomology.* in: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 45–68 (2000).

[17] Bordemann, M., Neumaier, N., Pflaum, M. J., Waldmann, S.: *On representations of star product algebras over cotangent spaces on Hermitian line bundles.* Preprint Univ. Freiburg FR-THEP-98/24, November 1998, und **math.QA/9811055**.

[18] Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles I: Weyl and Standard Ordering with Differential Operator Representation.* Commun. Math. Phys. **198**, 363–396 (1998).

[19] Bordemann, M., Neumaier, N., Waldmann, S.: *Homogeneous Fedosov Star Products on Cotangent Bundles II: GNS Representations, the WKB Expansion, Traces, and Applications.* J. Geom. Phys. **29**, 199–234 (1999).

[20] Bordemann, M., Waldmann, S.: *A Fedosov Star Product of Wick Type for Kähler Manifolds.* Lett. Math. Phys. **41**, 243–253 (1997).

[21] Bordemann, M., Waldmann, S.: *Formal GNS Construction and WKB Expansion in Deformation Quantization.* Contribution to the Ascona Meeting on Deformation Theory, Symplectic Geometry, and Applications, June 16–22, 1996. in: Gutt, S., Sternheimer, D., Rawnsley, J. (Hrsg.): Deformation Theory and Symplectic Geometry. Mathematical Physics Studies **20**, Kluwer, Dordrecht 315–319 (1997).

[22] Bordemann, M., Waldmann, S.: *Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization.* Commun. Math. Phys. **195**, 549–583 (1998).

[23] Bourbaki, N.: *Lie Groups and Lie Algebras.* Elements of Mathematics, Part 1, Addison Wesley Publishing Company (1975).

[24] Bowes, D., Hannabuss, K. C.: *Weyl Quantization and Star Products.* J. Geom. Phys. **22**, 319–348 (1997).

[25] Braunss, G.: *On the Regular Hilbert Space Representation of a Moyal Quantization.* J. Math. Phys. **35**.5, 2045–2056 (1994).

[26] Cahen, M., Gutt, S.: *Regular $*$Representations of Lie Algebras.* Lett. Math. Phys. **6**, 395–404 (1982).

[27] Cahen, M., Gutt, S., DeWilde, M.: *Local Cohomology of the Algebra of $\mathcal{C}^\infty$ Functions on a Connected Manifold.* Lett. Math. Phys. **4**, 157–167 (1980).

[28] Careñena, J. F., Clemente-Gallardo, J., Follana, E., Gracia-Bondía, J., Rivero, A., Várilly, J. C.: *Connes' tangent groupoid and strict quantization.* J. Geom. Phys. **32**, 79–96 (1999).

[29] Cattaneo, A. S., Felder, G., Tomassini, L.: *From local to global quantization of Poisson manifolds.* Preprint, Januar 2001, **math.QA/0012228 v2**.

[30] Connes, A., Flato, M., Sternheimer, D.: *Closed Star Products and Cyclic Cohomology.* Lett. Math. Phys. **24**, 1–12 (1992).

[31] Deligne, P.: *Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique: Comparaison entre Fedosov et DeWilde, Lecomte.* Sel. Math., New Series **1 (4)**, 667–697 (1995).

[32] DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Star-Products on Cotangent Bundles.* Lett. Math. Phys. **7**, 235–241 (1983).

[33] DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Existence of Star-Products and of Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of Arbitrary Symplectic Manifolds.* Lett. Math. Phys. **7**, 487–496 (1983).

[34] DeWilde, M., Lecomte, P. B. A.: *Formal Deformations of the Poisson Lie Algebra of a Symplectic Manifold and Star-Products. Existence, Equivalence, Derivations.* in: Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (Hrsg.): Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications. Kluwer Academic Press, Dordrecht, 897–960 (1988).

[35] Dirac, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford University Press, Oxford (1958).

[36] Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): *Conférence Moshé Flato 1999.* Kluwer Academic Publ., Dordrecht (2000).

[37] Dixmier, J.: *Universal Enveloping Algebra.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1977).

[38] Emmrich, C.: *Equivalence of Extrinsic and Intrinsic Quantization for Observables not Preserving the Vertical Polarization.* Commun. Math. Phys. **151**, 515–530 (1993).

[39] Emmrich, C.: *Equivalence of Dirac and Intrinsic Quantization for Non-free Group Actions.* Commun. Math. Phys. **151**, 531–542 (1993).

[40] Epp, R. J.: *Curved-space Quantization: Toward a Resolution of the Dirac versus Reduced Quantization Question.* Phys. Rev. D **50**, 6578–6588 (1994).

[41] Farkas, D.: *A Ring-Theorist's Description of Fedosov Quantization.* Lett. Math. Phys. **51**, 161–177 (2000).

[42] Fedosov, B. V.: *Formal Quantization.* Some Topics of Modern Mathematics and their Applications to Problems of Mathematical Physics, 129–136 (1985). Moscow.

[43] Fedosov, B. V.: *Quantization and the Index.* Sov. Phys. Dokl. **31**.11, 877–878 (1986).

[44] Fedosov, B. V.: *Index Theorem in the Algebra of Quantum Observables.* Sov. Phys. Dokl. **34**.4, 319–321 (1989).

[45] Fedosov, B. V.: *A Simple Geometrical Construction of Deformation Quantization.* J. Diff. Geom. **40**, 213–238 (1994).

[46] Fedosov, B. V.: *Deformation Quantization and Index Theory.* Akademie Verlag, Berlin (1996).

[47] Fedosov, B. V.: *Non-Abelian Reduction in Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **43**, 137–154 (1998).

[48] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J.: *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1990).

[49] Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R.: *Connections, Curvature, and Cohomology I.* Academic Press, New York (1972).

[50] Greub, W.: *Multilinear Algebra.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1978).

[51] Guillemin, V., Sternberg, S.: *Symplecic techniques in physics.* Cambridge University Press, Cambridge, U. K. (1984).

[52] Gutt, S.: *Equivalence of Deformations and Associated $*$-Products.* Lett. Math. Phys. **3**, 297–309 (1979).

[53] Gutt, S.: *An Explicit $*$-Product on the Cotangent Bundle of a Lie Group.* Lett. Math. Phys. **7**, 249–258 (1983).

[54] Gutt, S.: *On Some Second Hochschild Cohomology Spaces for Algebras of Functions on a Manifold.* Lett. Math. Phys. **39**, 157–162 (1997).

[55] Gutt, S., Sternheimer, D., Rawnsley, J. (Hrsg.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry.* Mathematical Physics Studies **20**, Kluwer, Dordrecht (1997).

[56] Gutt, S., Rawnsley, J.: *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction to Deligne's Čech cohomology classes.* J. Geom. Phys. **29**, 347–392 (1999).

[57] Gutt, S.: *Variations on deformation quantization.* in: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 217–254 (2000).

[58] Haag, R.: *Local Quantum Physics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1993).

[59] Halbout, G.: *Sur la classification des déformations des variété de Poisson.* Thèse, Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S, 1999.

[60] Halbout, G.: *Calcul d'un Invariant de Star-Produit Fermé sur une Variété Symplectique.* Commun. Math. Phys. **205**, 53–67 (1999).

[61] Hämmerlin, G., Hoffmann, K.-H.: *Numerische Mathematik.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1994).

[62] Hansen. F.: *Quantum Mechanics in Phase Space.* Rep. Math. Phys. **19**, 361–381 (1984).

[63] Hazewinkel, M., Gerstenhaber, M. (Hrsg.): *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications.* Kluwer Academic Press, Dordrecht (1988).

[64] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press, New York (1978).

[65] Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A.: *Differential Forms on regular affine Algebras.* Trans. Am. Math. Soc. **102**, 383–408 (1962).

[66] Hörmander, L.: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I–IV.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1985).

[67] Karabegov, A. V.: *Deformation Quantization with Separation of Variables on a Kähler Manifold.* Commun. Math. Phys. **180**, 745–755 (1996).

[68] Karabegov, A. V.: *Cohomological Classification of Deformation Quantization with Separation of Variables.* Lett. Math. Phys. **43**, 347–357 (1998).

[69] Karabegov, A. V.: *On Fedosov's approach to Deformation Quantization with Separation of Variables.* in: Dito, G., Sternheimer, D. (Hrsg.): Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II. Kluwer Academic Publ., Dordrecht, 167–176 (2000)

[70] Karabegov, A. V., Schlichenmaier, M.: *Identification of Berezin-Toeplitz Deformation Quantization.* Preprint, Januar 2000, **math.QA/0006063**.

[71] Karabegov, A. V., Schlichenmaier, M.: *Almost-Kähler Deformation Quantization.* Lett. Math. Phys. **57**, 135–148 (2001).

[72] Kassel, C.: *Quantum Groups.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1995).

[73] Kobayashi, S., Nomizu, K.: *Foundations of Differential Geometry I, II.* Wiley-Interscience Publishers, New York (1963, 1969).

[74] Kontsevich, M.: *Deformation Quantization of Poisson Manifolds, I.* Preprint, September 1997, **q-alg/9709040**.

[75] Kontsevich, M.: *Formality Conjecture.* in: Gutt, S., Sternheimer, D., Rawnsley, J. (Hrsg.): Deformation Theory and Symplectic Geometry. Mathematical Physics Studies **20**, Kluwer, Dordrecht 139–156 (1997).

[76] Kravchenko, O.: *Deformation Quantization of Symplectic Fibrations.* Preprint, Februar 1998, **math.QA/9802070**.

[77] Landsman, N. P.: *Mathematical Topics between Classical and Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1998).

[78] Landsman, N. P.: *Lie Groupoid C^*-Algebras and Weyl Quantization.* Commun. Math. Phys. **206**, 367–381 (1999).

[79] Lang, S.: *Differential and Riemannian Manifolds.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1995).

[80] Lang, S.: *Fundamentals of Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1999).

[81] Marsden, J. E., Ratiu, T. S.: *Introduction to Mechanics and Symmetry.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1994).

[82] Moyal, J. E.: *Quantum Mechanics as a Statistical Theory.* Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 99–124 (1949).

[83] Neroslavski, O., Vlassov, A. T.: Sur les Déformations de l'Algèbre des Fonctions d'une Variété Symplectique. C. R. Acad. Sc. Paris I **292**, 71–73 (1981).

[84] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem.* Commun. Math. Phys. **172**, 223–262 (1995).

[85] Nest, R., Tsygan, B.: *Algebraic Index Theorem for Families.* Adv. Math. **113**, 151–205 (1995).

[86] Neumaier, N.: *Sternprodukte auf Kotangentenbündeln und Ordnungs-Vorschriften.* Diplomarbeit Univ. Freiburg (1998).

[87] Neumaier, N.: *Local ν-Euler Derivations and Deligne's Characteristic Class of Fedosov Star Products and Star Products of Special Type.* Preprint Univ. Freiburg FR-THEP-99/3, Juni 1999, und **math.QA/9905176 v2**.

[88] Nistor, V., Weinstein, A., Xu, P.: *Pseudodifferential Operators on Differential Groupoids.* Preprint, Februar 1997, **funct-an/9702004**.

[89] Nowak, C.: *Über Sternprodukte auf nichtregulären Poissonmannigfaltigkeiten.* Dissertation Univ. Freiburg (1997).

[90] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Weyl Manifolds and Deformation Quantization.* Adv. Math. **85**, 224–255 (1991).

[91] Omori, H., Maeda, Y., Yoshioka, A.: *Existence of a Closed Star Product.* Lett. Math. Phys. **26**, 285–294 (1992).

[92] Peetre, J.: *Une Caractérisation abstraite des opérateurs différentiels.* Math. Scand. **7**, 211–218 (1959); Rectification: Math. Scand. **8**, 116–120 (1960).

[93] Pflaum, M. J.: *A New Concept of Deformation Quantization I. Normal Order Quantization on Cotangent Bundles.* Preprint, April 1996, **hep-th/9604144**.

[94] Pflaum, M. J.: *The Normal Symbol on Riemannian Manifolds.* New York J. Math. **4**, 97–125 (1998).

[95] Pflaum, M. J.: *A deformation theoretical approach to Weyl quantization on Riemannian manifolds.* Lett. Math. Phys. **45**, 277–294 (1998).

[96] Pittner, L.: *Algebraic Foundations of Non-Commutative Differential Geometry and Quantum Groups.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1996).

[97] Reshetikhin, N., Takhtajan, L. A.: Deformation quantization of Kähler manifolds. Preprint, Juli 1999, **math.QA/9907171**.

[98] Rudin, W.: *Functional Analysis.* McGraw-Hill Book Company, New York (1991).

[99] Safarov, Y.: *Pseudodifferential operators and linear connections.* Proc. London Math. Soc. **74**, 379–416 (1997).

[100] Schottenloher, M.: *Geometrie und Symmetrie in der Physik.* Vieweg-Verlag, Braunschweig (1995).

[101] Sternheimer, D., Rawnsley, J., Gutt, S. (Hrsg.): *Deformation Theory and Symplectic Geometry. Mathematical Physics Studies* Nr. **20**. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (1997).

[102] Sternheimer, D.: *Deformation Quantization: Twenty Years After.* Preprint, September 1998, **math.QA/9809056**.

[103] Underhill, J.: *Quantization on a Manifold with Connection.* J. Math. Phys. **19**, 1932–1935 (1978).

[104] VEY, J.: *Déformation du Crochet de Poisson sur une Variété Symplectique.* Comment. Math. Helvetici **50**, 421–454 (1975).

[105] VORONOV, A.: *Quantizing Poisson Manifolds.* Preprint, Januar 1997, **q-alg/9701017**.

[106] VORONOV, T.: *Quantization of Forms on the Cotangent Bundle.* Commun. Math. Phys. **205**, 315–336 (1999).

[107] WALDMANN, S.: *Ein Sternprodukt für den komplex projektiven Raum und die Fedosov-Konstruktion für Kähler-Mannigfaltigkeiten.* Diplomarbeit Univ. Freiburg (1995).

[108] WALDMANN, S.: *Differential Operators and their Symbols.* Internal Notes (unveröffentlicht) (1996).

[109] WALDMANN, S.: *Zur Deformationsquantisierung in der klassischen Mechanik: Observablen, Zustände und Darstellungen.* Dissertation Univ. Freiburg (1999).

[110] WARNER, F. W.: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1983).

[111] WEINSTEIN, A., XU, P.: *Hochschild cohomology and characteristic classes for star-products.* in: KHOVANSKIJ, A. ET AL. (EDS): Geometry of differential equations. Dedicated to V. I. Arnol'd on the occasion of his 60^{th} birthday. Providence, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, **186 (39)**, 177–194 (1998).

[112] WELLS, R. O.: *Differential Analysis on Complex Manifolds.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1980).

[113] WIDOM, H.: *Families of Pseudodifferential Operators.* in: GOHBERG, I., KAC, M. (HRSG.): *Topics in Functional Analysis.* Academic Press, New York, 345–395 (1978).

[114] WIDOM, H.: *A complete symbolic calculus for pseudodifferential operators.* Bull. Sc. math. **104**, 19–63 (1980).

[115] XU, P.: *Gerstenhaber Algebras and BV-Algebras in Poisson Geometry.* Preprint, März 1997, **dg-ga/9703001**.

[116] XU, P.: *Fedosov $*$-Products and Quantum Momentum Maps.* Commun. Math. Phys. **197**, 167–197 (1998).

[117] YOSIDA, K.: *Functional Analysis.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1971).

Lebenslauf

Name:	Nikolai Alexander Neumaier
geboren am:	21.08.71
in:	Zell am Harmersbach
Anschrift:	Arnold-Fanck-Str. 6
	79115 Freiburg i. Br.
Schule:	
1978–1982	Heinrich-Hansjakob-Schule Haslach (Grundschule)
1982–1991	Robert-Gerwig-Gymnasium Hausach
21.06.1991	Abitur, Gesamtnote: 1,3
Zivildienst:	
1991–1992	Zivildienst an der Carl-Sandhas-Schule in Haslach
Studium:	
1992–1998	Studium der Mathematik und der Physik an der
	Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
24.04.1995	Vordiplom in Mathematik, Note: sehr gut
16.06.1995	Vordiplom in Physik, Note: gut
29.06.1998	Diplom in Physik, Note: sehr gut
Diplomarbeit:	„Sternprodukte auf Kotangentenbündeln
	und Ordnungs-Vorschriften“
1998–2001	Promotion an der Fakultät für Physik der Universität Freiburg
Dissertation:	„Klassifikationsergebnisse in der Deformationsquantisierung“

Danksagung

An dieser Stelle sei denjenigen gedankt, die zum Werden dieser Arbeit wesentlich beigetragen haben:

Zuerst möchte ich Herrn Prof. Dr. Römer danken, in dessen Arbeitsgruppe ich mich während der Abfassung meiner Diplomarbeit und der Zeit meiner Promotion immer sehr wohl gefühlt habe.

Mein besonderer Dank gilt Martin Bordemann und Stefan Waldmann, die durch ihre ständige Diskussionsbereitschaft und Zusammenarbeit mit Ideen und Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Die Zusammenarbeit mit Martin und Stefan war immer deutlich mehr als nur ein fachlicher Gewinn.

Dank sei auch allen weiteren Doktoranden und Diplomanden der Abteilung Römer, bei denen immer eine angenehme Arbeitsatmosphäre herrschte.

Weiter möchte ich Prof. Dr. Karabegov für die anregenden Diskussionen, die den Anstoß für die Untersuchungen und Ergebnisse des Kapitels 3 gaben, meinen Dank aussprechen.

Der größte Dank gebührt ohne Zweifel meiner Mutter, ohne deren in jeder Hinsicht gewährte Unterstützung weder mein Physikstudium, noch meine Promotion möglich gewesen wären.