

**Tests erweiterter Kerr- und Schwarzschild-Metriken  
im Rahmen der Beschreibung von  
Teilchenorbits, Akkretionsscheiben und Gravitationswellen**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik (13)  
der Johann Wolfgang Goethe-Universität  
in Frankfurt am Main

von

Thomas Schönenbach  
aus Frankfurt am Main

Frankfurt (2015)

(D 30)

Dekan: Prof. Dr. René Reifarth

Gutachter: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner  
Prof. Dr. Peter O. Heß  
Prof. Dr. Marcus Bleicher

Datum der Disputation: 22.01.2015

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Konventionen und benutzte Notation . . . . .	3
1.2	Pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .	4
1.3	Modifizierte Kerr-Metrik . . . . .	5
1.4	Tests der ART . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Orbits von Testteilchen</b>	<b>11</b>
2.1	Geodätengleichung und Orbits von Testteilchen in der Kerr-Metrik . . . . .	11
2.1.1	Stabilität von Orbits . . . . .	14
2.2	Geodätengleichung und Orbits von Testteilchen in der modifizierten Kerr-Metrik . . . . .	16
2.2.1	Stabilität von Orbits in der modifizierten Kerr-Metrik . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Raytracing</b>	<b>23</b>
3.1	Raytracing – Formalismen und Modelle . . . . .	23
3.1.1	Geodätengleichungen und Entwicklungsgrößen . . . . .	23
3.1.2	Strahlungsgrößen . . . . .	27
3.1.3	Emissionslinienprofile . . . . .	28
3.1.4	Scheibenmodell nach Page und Thorne . . . . .	29
3.2	Raytracing in der modifizierten Kerr-Metrik . . . . .	35
3.2.1	Profile für die Eisen- $K\alpha$ -Emissionslinie . . . . .	36
3.2.2	Modifiziertes Scheibenmodell nach Page und Thorne . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Gravitationswellen</b>	<b>53</b>
4.1	Gravitationswellen in der linearisierten Allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	53
4.2	Modellsystem in der pseudokomplexen ART . . . . .	73

---

<b>5 Ausblick</b>	<b>77</b>
5.1 Modellsystem 3+1-Formalismus . . . . .	77
<b>6 Fazit</b>	<b>83</b>
<b>Anhang</b>	<b>85</b>
<b>A Herleitung der modifizierten Kerr-Metrik</b>	<b>85</b>
A.1 Die Kerr-Metrik - Ansatz von Carter . . . . .	85
A.2 Die Einsteingleichungen für die Kerr-Metrik über Differentialformen . . .	90
<b>B Interaktion von Gravitationswellen mit Materie in linearisierter Theorie</b>	<b>97</b>
<b>C 3+1 Formalismus</b>	<b>99</b>
C.1 Hyperflächen . . . . .	99
C.2 Orthogonale Projektion . . . . .	102
C.3 Aufblätterung . . . . .	104
C.4 Eulersche Beobachter . . . . .	108
C.5 3+1 Form des Energie-Impuls-Tensors . . . . .	108
C.6 3+1 Form der Einsteingleichungen . . . . .	109
C.7 An die Aufblätterung angepasste Koordinaten . . . . .	110
C.8 BSSN Form der 3+1 Gleichungen . . . . .	113
C.9 Anfangswerte . . . . .	118
C.10 Einfaches Beispiel für Startwerte . . . . .	122
<b>D Lie-Ableitung</b>	<b>125</b>
<b>E Projektionen des Riemann-Tensors</b>	<b>127</b>
<b>Danksagung</b>	<b>131</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>133</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>142</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>146</b>

**Einführung**

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) [Ein16a] bildet neben der Quantenmechanik einen der Grundpfeiler der Theoretischen Physik. Bislang gibt es eine Vielzahl von Tests [Wil06], die die ART alle bestanden hat (Perihelverschiebung [Cle47], Lichtablenkung [DED20], gravitative Rotverschiebung [PR59], Frame-Dragging durch Lense-Thirring-Effekt [LT18; CP04; Eve+11], indirekter Nachweis von Gravitationswellen [HT75; WT02; WT05]). Allen diesen Phänomenen ist aber gemein, dass sie aus Entwicklungen oder Näherungen der Theorie für schwache Gravitationsfelder folgen. Effekte eines starken Gravitationsfeldes, wie zum Beispiel die Existenz oder Entstehung Schwarzer Löcher lassen sich damit nicht überprüfen.

Diese Objekte, die einen Raumbereich aufweisen, der einem äußeren Beobachter in einer festgesetzten Entfernung nicht zugänglich ist, weisen in ihrem Inneren eine Singularität auf. Hier wird erwartet, dass Quanteneffekte eine Rolle spielen und eine vollständige Theorie der Quantengravitation benötigt wird, um die Theorie frei von Singularitäten formulieren zu können. Einen Ansatz, eine Theorie ohne Schwarze Löcher aufzustellen, verfolgen Hess und Greiner [HG09] mit der Formulierung einer *pseudokomplexen ART*. Kapitel 1.2 befasst sich näher mit diesem Ansatz. Dieser führt schließlich auf einen Satz von modifizierten Einsteingleichungen, die sich auch in der klassischen ART durch Einführen eines zusätzlichen Energie-Impuls-Tensors erhalten lassen. In der vorliegenden Arbeit wird dieser zusätzliche Energie-Impuls-Tensor so modelliert, dass er einen repulsiven Effekt zusätzlich zur attraktiven Komponente der Gravitation beschreibt. Durch entsprechende Wahl eines Modellierungsparameters lassen sich damit Metriken aufstellen, die keinen Ereignishorizont mehr aufweisen. Der zugehörige Energie-Impuls-Tensor lässt sich dabei als anisotrope Flüssigkeit beschreiben. Visser [Vis96a; Vis96b] studiert ebenfalls repulsive Effekte, die durch den Einfluss der Gravitation auf Vakuumfluktuationen entstehen. Hierzu geht er von einer gegebenen Hintergrundmetrik aus, auf deren Grundlage eine Quantenfeldtheorie formuliert wird. Der Vakuum-Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors verschwindet in diesem Szenario nicht immer (abhängig vom angenommenen Vakuumzustand) [Vis96a; Vis96b]. Um die Gleichungen beherrschbar zu machen, werden Rückreaktionen auf die Metrik vernachlässigt [Vis96a; Vis96b]

---

---

Im Gegensatz zu Visser [Vis96a; Vis96b] wird im hier vorgestellten Ansatz keine semi-klassische Beschreibung mit einer starren Hintergrundmetrik betrachtet, sondern ein makroskopischer Ansatz, der eine geänderte Metrik beschreibt. Dadurch entspricht die Herangehensweise in dieser Arbeit dem „bottom-up approach“, wie ihn Psaltis [Psa09] beschreibt. Hierbei geht man, wie beschrieben, von einer geänderten Metrik aus und vergleicht die experimentellen Konsequenzen mit denen von Metriken der klassischen ART.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, experimentelle Vorhersagen dieser veränderten Metriken zu beschreiben und abzuschätzen, inwieweit bereits bestehende und zukünftige Messungen Einschränkungen an die Modifikation der Metriken liefern. Weiterhin wird ein Modell betrachtet, das ähnliche Änderungen für ein Binärsystem einführt. Hierbei wird der Energieverlust durch Abstrahlung von Gravitationswellen modelliert.

Die Arbeit ist so strukturiert, dass im weiteren Verlauf dieses Kapitels die Grundlagen der pseudokomplexen ART und der dadurch resultierenden Modelle erläutert werden. Zusätzlich werden die verwendeten Konventionen beschrieben und abschließend noch eine genauere Betrachtung der eingangs erwähnten Tests der ART und ihre bisherige Anwendung auf erweiterte Modelle der pseudokomplexen ART durchgeführt.

Das zweite Kapitel widmet sich der Beschreibung von Testteilchenorbits um einen zentralen, gravitativ dominierenden Körper. Die Beschreibung dieser Orbits ist für sich genommen bereits interessant, da Beobachtungen solcher Testteilchen eine Testmöglichkeit für die ART, beziehungsweise die modifizierten Gleichungen liefern. Zum anderen bildet sie die Basis für die anschließende Anwendung bei der Beschreibung von Akkretionsscheiben (Kapitel 3). Hierfür wird die Technik des *Raytracings* verwendet, deren Einführung in Kapitel 3.1 zu finden ist. Akkretionsscheiben werden um viele Schwarze-Loch-Kandidaten in den Zentren von Galaxien vermutet und bieten die Möglichkeit die Physik nahe dieser Körper zu studieren [AF13].

Kapitel 4 enthält die Beschreibung von Gravitationswellen, wie sie etwa von einem Doppelsternsystem ausgesendet werden. Da diese Beschreibung nicht auf den klassischen Einsteingleichungen beruht, sondern auf einer Linearisierung dieser Gleichungen, ist in Kapitel 4.1 eine ausführliche Einführung zu finden.

Wie oben erwähnt gehen allerdings durch eine Linearisierung der Gleichungen wichtige Informationen verloren. Eine Beschreibung von Gravitationswellen, ohne auf diese Näherungen zurückgreifen zu müssen, ist bislang nur numerisch möglich [Mag07]. Aus diesem Grund wird in Kapitel 5.1 und Anhang C eine Einführung in den 3+1 Formalismus der numerischen Relativitätstheorie gegeben.

In Kapitel 6 sind die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und es wird ein Ausblick auf mögliche fortführende Arbeiten gegeben.

## 1.1 Konventionen und benutzte Notation

Wie in vielen Bereichen der Physik sind auch auf dem Gebiet der Allgemeinen Relativitätstheorie verschiedene Konventionen und Notationen gebräuchlich. In dieser Arbeit werden Vektoren und Tensoren durch ihre Komponenten, zum Beispiel  $x^\mu$  und  $T_{\mu\nu}$  beschrieben. Zum Teil werden sie auch fett und aufrecht geschrieben,  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{T}$ . Griechische Indizes wie  $\mu$  und  $\nu$  laufen in diesem Fall von 0 bis 3, wobei 0 die zeitliche Komponente repräsentiert. Lateinische Indizes wie  $i$  oder  $j$  stehen in der Regel für die räumlichen Komponenten und laufen von 1 bis 3. Räumliche Dreivektoren werden auch mit  $\vec{x}$  bezeichnet.

Der Riemann-Tensor ist über

$$\mathcal{R}^\mu{}_{\nu\sigma\tau} v^\nu := \nabla_\tau \nabla_\sigma v^\mu - \nabla_\sigma \nabla_\tau v^\mu \quad (1.1.1)$$

definiert, wobei die kovariante Ableitung über

$$\nabla_\mu v^\nu := \partial_\mu v^\nu + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} v^\sigma \quad (1.1.2)$$

mit den Christoffelsymbolen

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} g^{\nu\tau} (\partial_\sigma g_{\mu\tau} + \partial_\mu g_{\sigma\tau} - \partial_\tau g_{\mu\sigma}) \quad (1.1.3)$$

definiert ist. Die Einsteingleichungen haben die Form analog zu [MTW73]

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.1.4)$$

Dadurch ist das Vorzeichen des Energie-Impuls-Tensors  $T_{\mu\nu}$  festgelegt. In Gleichung (1.1.4) beschreibt  $c$  die *Lichtgeschwindigkeit* und  $G$  die *Newtonsche Gravitationskonstante*. Im Folgenden wird allerdings, falls nicht anders angegeben, die Lichtgeschwindigkeit  $c = 1$  gesetzt. Die Angabe von Längen geschieht in der Regel in Einheiten des *Gravitationsradius*  $m = \frac{GM}{c^2}$ , wobei  $M$  die Masse des lokal gravitativ dominanten Objekts ist.

Weiterhin wird die Metriksignatur  $(-, +, +, +)$  verwendet. Dadurch hat beispielsweise die Minkowski-Metrik die Form

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.1.5)$$

Für partielle Ableitungen werden die Symbole  $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $\partial_\mu$  und  $|_\mu$  synonym verwendet. Die kovariante Ableitung wird durch  $\nabla$  oder komponentenweise als  $\nabla_\mu$ , beziehungsweise  $\|_\mu$  gekennzeichnet.

## 1.2 Pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie

Hess und Greiner [HG09] haben eine Erweiterung der ART auf pseudokomplexe Zahlen vorgeschlagen. Diese Zahlen lassen sich als

$$X = X_R + IX_I \quad (1.2.1)$$

schreiben [Ant93; HG07; HG09], wobei analog zu den komplexen Zahlen  $X_R$  als Pseudo-realteil und  $X_I$  als Pseudoimaginärteil bezeichnet wird. Der Unterschied zu komplexen Zahlen besteht darin, dass

$$I^2 = +1 \quad (1.2.2)$$

gilt [Ant93; HG09]. Dadurch enthalten pseudokomplexe Zahlen so genannte Nullteiler. Hierbei handelt es sich um Zahlen, die selbst nicht gleich Null sind, aber multipliziert mit anderen Zahlen Null ergeben. Für die pseudokomplexen Zahlen sind das [HG09]

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm I) \quad (1.2.3)$$

und beliebige reelle Vielfache davon. Jede pseudokomplexe Zahl kann damit als

$$X = X_+\sigma_+ + X_-\sigma_- \quad (1.2.4)$$

geschrieben werden, wobei die Nullteilerkomponenten durch

$$X_{\pm} = X_R \pm X_I \quad (1.2.5)$$

definiert sind [HG09]. Man kann sehr leicht nachprüfen, dass

$$\sigma_{\pm}^2 = \sigma_{\pm} \quad \text{und} \quad \sigma_-\sigma_+ = 0 \quad (1.2.6)$$

gilt, es sich bei  $\sigma_{\pm}$  also wirklich um Nullteiler und Projektoren handelt [HG09]. Genauso wie man die pseudokomplexen Zahlen in ihre Nullteilerkomponenten aufteilen kann, kann man auch in Potenzreihen entwickelbare Funktionen dieser Zahlen aufteilen [HG09; Sch11]. Durch die Eigenschaften der Nullteiler ergibt sich

$$X^n = (X_+\sigma_+ + X_-\sigma_-)^n = (X_+\sigma_+)^n + (X_-\sigma_-)^n = X_+^n\sigma_+ + X_-^n\sigma_- \quad , \quad (1.2.7)$$

womit man zum Beispiel

$$F(X)G(X) = F(X_+)G(x_+)\sigma_+ + F(X_-)G(X_-)\sigma_- \quad (1.2.8)$$

erhält [HG09; Sch11]. Eine reine Erweiterung der Einsteingleichungen auf pseudokomplexe Zahlen bringt aber zunächst keine neuen Ergebnisse. Aufgrund der Produktstruktur dieser Zahlen zerfallen die so modifizierten Gleichungen wieder in zwei unabhängige, aber identische Formulierungen der ART [HG07; HG09]. Hess und Greiner [HG09] adaptieren deshalb eine Idee von Schuller, Wohlfarth und Grimm [SWG03] und Schuller [Sch03] das Variationsprinzip zu modifizieren, um so veränderte Einsteingleichungen zu erhalten.



Dazu fordern sie, dass die Variation der Einstein-Hilbert-Wirkung nicht verschwindet, sondern im Nullteiler liegt, also

$$\delta S = \delta \int \mathcal{R} \sqrt{|g|} d^4 x \in \mathcal{P}^0 \quad (1.2.9)$$

gilt, wobei  $\mathcal{P}^0$  den Nullteiler beschreibt [HG09]; [Sch11]. Entsprechend sind die Einsteingleichungen (1.1.4) für den freien Raum modifiziert [HG09]; [Sch11]

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \in \mathcal{P}^0 \quad . \quad (1.2.10)$$

Als Konvention wird die Variation proportional zu  $\sigma_-$  gewählt [HG09]. Führt man die Metrik als pseudokomplexe Funktion

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^+ \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- \sigma_- \quad (1.2.11)$$

ein, so lässt sich die linke Seite in (1.2.10) als Funktion der Metrik auch in Nullteilerkomponenten aufteilen. Wählt man wie oben beschrieben die Variation der Wirkung proportional zu  $\sigma_-$ , so erhält man für den  $\sigma_+$ -Anteil der Gleichungen die bekannten Einsteingleichungen im Vakuum. Für diese lassen sich analog zur klassischen ART Lösungen finden. Für den  $\sigma_-$ -Anteil der Gleichungen hat man durch diesen Ansatz die Freiheit einen Energie-Impuls-Tensor als zusätzlichen Quellterm anzunehmen.

Die Projektion der pseudokomplexen auf reelle Funktionen geschieht in der Art, dass jede Variable in einer Funktion einzeln auf ihren Realteil projiziert wird [Cas+12].

### 1.3 Modifizierte Kerr-Metrik

In [Sch11] wird auf Basis der modifizierten Einsteingleichungen (1.2.10) eine Erweiterung der Kerr-Metrik [Ker63; Car72; KK09; PK06] in Boyer-Lindquist-Koordinaten [BL67] aufgestellt. Eine Verallgemeinerung davon ist in [Cas+12] zu finden. Zur Vollständigkeit sind die entsprechenden Auszüge aus diesen Arbeiten in Anhang A dargestellt. Im Folgenden wird die Form der Metrik aus [Sch+14] verwendet. Sie ist durch

$$\begin{aligned} g_{00} &= - \left( 1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) \quad , \\ g_{11} &= \frac{\Sigma}{\Delta} \quad , \\ g_{22} &= \Sigma \quad , \\ g_{33} &= \left( (r^2 + a^2) + \frac{a^2 \psi}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta \quad , \\ g_{03} &= -a \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

gegeben<sup>1</sup>. In Gleichung (1.3.1) wird neben den üblichen Hilfsfunktionen  $\Sigma$  und  $\Delta$  zusätzlich noch die Hilfsfunktion  $\psi$  verwendet

$$\begin{aligned}\Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad , \\ \Delta &= r^2 + a^2 - \psi \quad , \\ \psi &= 2mr - \frac{B}{2r} \quad .\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

Bei Vergleichen mit der Literatur sei noch angemerkt, dass es neben den üblichen Unterschieden in den Konvention bei der Kerr-Metrik in Boyer-Lindquist-Koordinaten noch zusätzliche Konventionen gibt. Die Verwendung und Bezeichnung der Hilfsfunktion  $\Sigma$  ist nicht eindeutig. So verzichteten Boyer und Lindquist [BL67]; Adler, Bazin und Schiffer [ABS75] ganz auf die Einführung von Hilfsfunktionen. Bardeen, Press und Teukolsky [BPT72]; Wald [Wal84] verwenden die gleichen Definitionen für  $\Sigma$  und  $\Delta$  wie hier. In [Car68; MTW73; Cha83; Car04] hingegen gilt  $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ . Chandrasekhar [Cha83] verwendet zum Beispiel noch  $\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 + a^2 \Delta \sin^2 \theta$ . Die Funktion  $\Delta$  unterscheidet sich in der Literatur nur dadurch, dass manchmal die Kerr-Newman-Metrik beschrieben wird und  $\Delta$  dadurch einen zusätzlichen Ladungsterm enthält.

Die kontravariante Form der Metrik (1.3.1) ist durch

$$\begin{aligned}g^{00} &= -\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} \quad , \\ g^{11} &= \frac{\Delta}{\Sigma} \quad , \\ g^{22} &= \frac{1}{\Sigma} \quad , \\ g^{33} &= \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} \quad , \\ g^{03} &= -\frac{a\psi}{\Sigma \Delta} \quad .\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

gegeben.

Es ist nicht a priori klar, dass der Parameter  $a$  in der modifizierten Kerr-Metrik (1.3.1) weiterhin die Drehung des Zentralobjekts beschreibt. Um diese Annahme zu überprüfen, kann man den Ableitungen von Adler, Bazin und Schiffer [ABS75] folgen. Dazu entwickelt man zunächst das zu Gleichung (1.3.1) gehörende Linienelement linear in  $a$  [Cas+12]

$$\begin{aligned}ds^2 &= \left(-1 + \frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}\right) dt^2 - \frac{1}{-1 + \frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \\ &\quad - 2a \sin^2 \theta \left(\frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3}\right) d\phi dt \quad .\end{aligned}\tag{1.3.4}$$

Nach Adler, Bazin und Schiffer [ABS75]; Visser [Vis07] entspricht diese Entwicklung dem Grenzfall für langsam rotierende Körper. Der nächste Schritt besteht in der Entwicklung

---

<sup>1</sup>Im Gegensatz zu den früheren Veröffentlichungen und den Auszügen daraus in Anhang A sind die Signatur und die Konvention für den Spinparameter  $a$  geändert.

hin zu großen Abständen, was durch eine Entwicklung linear in  $\frac{1}{r}$  geschieht [ABS75; Cas+12]

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(-1 - \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{2m}{r} d\phi dt \quad . \quad (1.3.5)$$

An dieser Stelle ist schon erkennbar, dass alle Korrekturterme der modifizierten Kerr-Metrik im Vergleich zur klassischen Kerr-Metrik aus den Gleichungen herausgefallen sind. Das Linienelement (1.3.5) vergleicht man mit demjenigen von Lense und Thirring [LT18],

$$ds^2 = \left(-1 + \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 - \left(-1 - \frac{2m}{\rho}\right) [d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] - \frac{4GJ}{\rho} \sin^2 \theta d\phi dt \quad , \quad (1.3.6)$$

das in isotropen Koordinaten dargestellt ist. Das Linienelement von Lense und Thirring [LT18] beschreibt für große Abstände den Außenraum eines langsam rotierenden Körpers mit Drehimpuls  $J$ . Für große Abstände gehen aber auch die Variablen  $r$  und  $\rho$  ineinander über, sodass die Terme proportional zu  $dt d\phi$  miteinander identifiziert werden können und damit  $a = \frac{GJ}{m}$  folgt [LT18; ABS75; Cas+12].

Die modifizierte Kerr-Metrik (1.3.1) lässt sich auch in der klassischen ART erhalten, indem man einen Energie-Impuls-Tensor der Form  $T_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \frac{B}{2r^3} \bar{T}_{\mu\nu}$  mit

$$\begin{aligned} \bar{T}_{00} &= \frac{1}{\Sigma^3} \left[ a^4 (-\cos^4 \theta + \cos^2 \theta) + 2r^2 \Delta + 3a^2 r^2 \sin^2 \theta \right] \quad , \\ \bar{T}_{11} &= -\frac{2r^2}{\Delta \Sigma} \quad , \\ \bar{T}_{22} &= 1 + \frac{2r^2}{\Sigma} \quad , \\ \bar{T}_{33} &= \sin^2 \theta \frac{1}{\Sigma^3} \left[ (3r^2 + a^2)(r^2 + a^2)^2 - a^2(a^4 - r^4 + 2r^2 \psi) \sin^2 \theta \right] \quad , \\ \bar{T}_{03} &= -a \sin^2 \theta \frac{1}{\Sigma^3} \left[ 2r^2 \Delta + (a^2 + r^2)(3 + a^2 \cos^2 \theta) \right] \quad , \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

zusätzlich zur normalen Masseverteilung annimmt (das Ergebnis ist mit Hilfe von MATHEMATICA [Wol12] und dem Paket GREAT [Hub03] berechnet). Im Schwarzschildlimit ( $a = 0$ ) reduziert sich (1.3.7) auf

$$\begin{aligned} \bar{T}_{00}^S &= \frac{2\Delta}{r^4} \quad , \\ \bar{T}_{11}^S &= -\frac{2}{\Delta} \quad , \\ \bar{T}_{22}^S &= 3 \quad , \\ \bar{T}_{33}^S &= 3 \sin^2 \theta \quad . \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Die zugehörige Metrik lässt sich auch aus Gleichung (1.3.1) durch Setzen von  $a = 0$  gewinnen [Sch+13]

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{\psi}{r^2}\right) \quad , \\ g_{11} &= \frac{1}{1 - \frac{\psi}{r^2}} \quad , \\ g_{22} &= r^2 \quad , \\ g_{33} &= r^2 \sin^2 \theta \quad . \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Der Energie-Impuls-Tensor der modifizierten Schwarzschild-Metrik in gemischter Form ist durch

$$T^\mu{}_\nu{}^S = \frac{B}{16\pi G r^5} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1.3.10}$$

gegeben. Dies entspricht einem Energie-Impuls-Tensor einer anisotropen Flüssigkeit [DRH12]

$$T_{\mu\nu}^{\text{anisotrop}} = (\rho + p_\perp)u_\mu u_\nu + p_\perp g_{\mu\nu} + (p_r - p_\perp)v_\mu v_\nu \quad , \tag{1.3.11}$$

in einem angepassten Koordinatensystem, in dem die Teilchenvierergeschwindigkeit  $u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, 0, 0, 0\right)$  und der radiale Einheitsvektor  $v^\mu = \left(0, \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0\right)$  sind. Die Energiedichte  $\rho$ , der radiale Druck  $p_r$  und der orthogonale Druck  $p_\perp$  sind durch

$$\begin{aligned} \rho &= 2f(r) \quad , \\ p_r &= -2f(r) = -\rho \quad , \\ p_\perp &= 3f(r) \quad , \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

mit der Hilfsfunktion  $f(r) := \frac{1}{8\pi G} \frac{B}{2r^5}$  gegeben. Hier sei noch angemerkt, dass die drei Bedingungen

$$T^0{}_0 = T^1{}_1 \Leftrightarrow g_{00} = -\frac{1}{g_{11}} \Leftrightarrow \rho = -p_r \tag{1.3.13}$$

äquivalent sind. Häufig wird  $g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}$  gefordert, um die Symmetrie der Schwarzschild-Metrik zu erhalten, siehe z.B. [NSS06]. Die in [Cas+12] vorgestellte erweiterte Schwarzschild-Metrik wird mit Hilfe eines idealen Flüssigkeitsansatzes beschrieben und enthält dadurch einen zusätzlichen Faktor  $e^f$  in der  $g_{00}$  Komponente der Metrik. Die dort beschriebene modifizierte Kerr-Metrik enthält diesen zusätzlichen Faktor nicht. In den Arbeiten [Sch+13; Sch+14] wird ebenfalls die Kerr-Metrik wie in Gleichung (1.3.1) verwendet, da durch Verwendung des anisotropen Flüssigkeitsansatzes die Symmetrie  $g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}$  im Schwarzschildlimit erhalten bleibt. In dieser Arbeit wird ebenfalls durchgehend die erweiterte Kerr-Metrik (1.3.1) beziehungsweise die für den Fall  $a = 0$  daraus folgende Schwarzschild-Metrik betrachtet.

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit die modifizierte Kerr- beziehungsweise Schwarzschild-Metrik zu erhalten, die in Kapitel 4.2 kurz vorgestellt wird. Dabei wird von dem Ansatz ausgegangen, dass die Newtonsche Gravitationskonstante  $G$  keine Konstante, sondern eine Funktion des radialen Abstands  $r$  ist. Ansätze die Gravitationskonstante zu modifizieren, finden sich zum Beispiel auch in [WYL12; Liu+14].

## 1.4 Tests der ART

Es gibt eine Reihe von Messungen, die die Vorhersagen der ART sehr genau bestätigt haben. Eine Vielzahl dieser Tests wurde an Objekten in unserem Sonnensystem durchgeführt. Eine der ersten dieser Vorhersagen war die Perihelverschiebung des Merkurs [Ein16a]. Sie unterliegt einer Reihe von Effekten, wie zum Beispiel der Tatsache, dass die Sonne leicht abgeflacht und keine perfekte Kugel ist. Ein kleiner Effekt lässt sich aber nur mit Hilfe der ART erklären. Dieser Effekt ist durch

$$\delta\varphi = 2\pi\varepsilon = 2\pi \frac{3G^2 M^2}{c^2 H^2} \quad (1.4.1)$$

gegeben [ABS75], wobei  $G$  die Newtonsche Gravitationskonstante,  $M$  die Masse des Zentralkörpers,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $H$  die zweifache konstante Flächengeschwindigkeit des umkreisenden Körpers beschreibt. Der Parameter  $\varepsilon$  ist von der Größenordnung  $10^{-7}$  für die Bahnbewegung des Merkurs [ABS75]. Die zusätzlichen Effekte aufgrund der Modifikation der Schwarzschild-Metrik, wie sie in [HG09] vorgestellt werden, sind durch aktuelle Messungen ausgeschlossen [Wil06]. In [HMG10; Cas+12] wird eine andere Erweiterung der Schwarzschild-Metrik diskutiert, deren zusätzliche Korrekturterme von einer höheren Ordnung in  $\frac{1}{r}$  sind. Der Einfluss dieser Änderungen auf die Perihelverschiebung des Merkurs lässt sich mit heutigen Messungen nicht überprüfen [Wil06], denn die Korrektur ist proportional zu  $\varepsilon^2$  [HMG10].

Ein anderer Test versucht den von Lense und Thirring [LT18] vorhergesagten Effekt im Sonnensystem nachzuweisen [CP04; Eve+11]. Die Messung des Effekts geschieht dabei durch die Bestimmung der Präzession von Gyroskopen in Satelliten, wie zum Beispiel *Gravity-Probe-B* [Eve+11]. Dieser Effekt wird in der Regel als *frame-dragging* bezeichnet. Hier muss allerdings zwischen diesem Effekt, der auch schon bei schwachen Gravitationsfeldern auftritt, und dem Effekt starker Felder nahe dem Ereignishorizont von Schwarzen Löchern unterschieden werden. Letzterer wird ausführlicher in Kapitel 2.2 diskutiert. In [Sch11; Cas+12; Sch+13] ist gezeigt, dass dieser Effekt für die modifizierte Kerr-Metrik mit dem der klassischen Kerr-Metrik übereinstimmt. Dies liegt daran, dass Lense und Thirring [LT18] einen Effekt schwacher Felder beschreiben, den man durch Entwicklung der Metrik für große Abstände zum gravitierenden Objekt erhält. Diese Entwicklungen sind aber für die modifizierte, wie für die klassische Kerr-Metrik identisch, sodass man keinen messbaren Unterschied erwarten kann [LT18], siehe dazu auch die Diskussion ab Gleichung (1.3.4).

Die Messungen in unserem Sonnensystem können bislang nur zur Überprüfung der ART in der Näherung schwacher Gravitationsfelder verwendet werden. Es gibt auch eine Reihe

von Messungen von Phänomenen außerhalb unseres Sonnensystems, die zum Testen der ART verwendet werden können. Dazu zählen unter anderem auch die Beobachtungen am Hulse-Taylor Pulsar PSR B1913+16 [HT75; WT02; WT05; Mag07]. Diese Beobachtungen haben den bisher einzigen – allerdings indirekten – Nachweis von Gravitationswellen in einem Binärsystem geliefert. In Kapitel 4.1 werden die theoretischen Grundlagen für diese Messung genauer diskutiert. In Kapitel 4.2 findet sich die Diskussion eines Modells, das Effekte eines zusätzlichen Energie-Impuls-Tensors berücksichtigt. Allerdings werden auch mit dieser Messung nur Schwachfeldeffekte der ART überprüft.

Psaltis [Psa09] beschreibt den aktuellen Stand zu Tests der Gravitation im Regime starker Felder. Eine dieser Möglichkeiten starke Gravitationsfelder zu untersuchen, stellt die Beobachtung von Kandidaten Schwarzer Löcher im Zentrum von Galaxien dar. Diese können von einer Akkretionsscheibe umgeben sein, die man beobachten kann. Man geht davon aus, dass sich diese Scheiben bis dicht (einige wenige Schwarzschildradien) an das zentrale Objekt ausdehnen [PT74]. Sie reichen damit in Regime starker Gravitationsfelder. In Kapitel 3 werden zwei verschiedene Modelle für diese Akkretionsscheiben vorgestellt und Vergleiche zwischen der Beschreibung mit der klassischen Kerr-Metrik und der modifizierten Kerr-Metrik aus Gleichung (1.3.1) angestellt. Grundlage dafür bildet die Beschreibung der Bewegung von Teilchen auf Orbits, die in Kapitel 2 ausgeführt wird.

Ein anderes Gebiet von großem Interesse für die Untersuchung der ART bei starken Feldern ist die Beschreibung von Neutronensternen. Diese wird allerdings nicht im Rahmen dieser Arbeit vorgenommen. Eine ausführliche Diskussion findet sich in [Rod+14].

## Orbits von Testteilchen

Die Beschreibung von Testteilchenorbits bildet die Grundlage für verschiedene Modelle für Beobachtungen in der ART. Ausführliche Betrachtungen zu diesem Thema haben u.a. Carter [Car68]; Bardeen, Press und Teukolsky [BPT72] angestellt. Als wichtigste Anwendung im Rahmen dieser Arbeit werden in Kapitel 3 Modelle für Akkretionsscheiben um kompakte Objekte betrachtet. Für alle diese Modelle ist es von entscheidender Bedeutung Orbits von einzelnen Testteilchen im Rahmen der ART beschreiben zu können.

### 2.1 Geodätengleichung und Orbits von Testteilchen in der Kerr-Metrik

Als Ausgangspunkt zur Beschreibung von Testteilchenorbits dient die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad . \quad (2.1.1)$$

In der verwendeten Signatur gilt  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\zeta$ , wobei  $\zeta = 1$  für zeitartige Trajektorien,  $\zeta = -1$  für raumartige und  $\zeta = 0$  für Nullgeodäten gilt. Die zugehörige Hamilton-Funktion ist durch

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = -\frac{1}{2} \zeta \quad (2.1.2)$$

gegeben [Car68] – mit den Impulsen  $p_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ .

Mit Gleichung (1.3.1) können die Impulse  $p_\mu$  als

$$p_t = g_{00} \dot{t} + g_{03} \dot{\phi} = - \left( 1 - \frac{\psi}{\Sigma} \right) \dot{t} - a \frac{\psi}{\Sigma} \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

$$p_r = g_{11} \dot{r} = \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}$$

$$p_\theta = g_{22} \dot{\theta} = \Sigma \dot{\theta}$$

$$p_\phi = g_{30}\dot{t} + g_{33}\dot{\phi} = -a\frac{\psi}{\Delta}\sin^2\theta\dot{t} + \left[(r^2 + a^2) + a^2\frac{\psi}{\Sigma}\sin^2\theta\right]\sin^2\theta\dot{\phi} \quad (2.1.3)$$

festgelegt werden. Die Symmetrie der Raumzeit, die mit der vorliegenden Metrik beschrieben wird, gibt bestimmte Einschränkungen vor. So sind die Impulse  $p_t = -E := -\tilde{E}/\mu$  und  $p_\phi = L_z := \tilde{L}_z/\mu$  durch die Energie  $\tilde{E}$  beziehungsweise den Drehimpuls eines Testteilchens  $\tilde{L}_z$  im Unendlichen (normiert auf die Ruhemasse  $\mu$  des Teilchens) festgelegt [Car68; ABS75]

$$\begin{aligned} g_{00}\dot{t} + g_{03}\dot{\phi} &= -E \quad , \\ g_{33}\dot{\phi} + g_{03}\dot{t} &= L_z \quad . \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Ausgehend von der radialen Geodätengleichung

$$\frac{d}{ds}(2g_{11}\dot{r}) = g'_{00}\dot{t}^2 + g'_{11}\dot{r}^2 + g'_{22}\dot{\theta}^2 + g'_{33}\dot{\phi}^2 + 2g'_{03}\dot{t}\dot{\phi} \quad , \quad (2.1.5)$$

wobei hier die partielle Ableitung  $\frac{\partial}{\partial r}$  durch den Strich ' abgekürzt wurde, kann man einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit von Testteilchen auf kreisförmigen, geodätischen Orbits bestimmen. Zunächst wird vereinfachend angenommen, dass sich die Teilchen auf einer Kreisbahn in der Äquatorebene mit einem festen Abstand zum Zentralobjekt bewegen, also dass  $r = r_0 = \text{const}$ ,  $\dot{r} = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  und  $\dot{\theta} = 0$  gilt. Mit diesen vereinfachten Annahmen ergibt sich [Sch+13]

$$0 = g'_{00}(r_0)\dot{t}^2 + g'_{33}(r_0)\omega^2\dot{t}^2 + 2g'_{03}(r_0)\omega\dot{t}^2 \quad , \quad (2.1.6)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega := \frac{d\phi}{dt} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \quad . \quad (2.1.7)$$

Gleichung (2.1.6) hat zwei Lösungen für  $\omega$

$$\omega_{\pm} = -\frac{g'_{03}}{g'_{33}} \pm \sqrt{\frac{(g'_{03})^2 - g'_{00}g'_{33}}{g'^2_{33}}} \quad . \quad (2.1.8)$$

Der Ausdruck in Gleichung (2.1.8) ist allgemeingültig für Metriken, die eine axialsymmetrische, statische Raumzeit wie die Kerr-Metrik beschreiben<sup>1</sup>.

Die so gefundene Winkelgeschwindigkeit für Teilchen auf Kreisgeodäten liegt allerdings noch innerhalb von allgemeineren Einschränkungen. Testteilchen, auch wenn sie für die meisten Berechnungen als masselos angenommen werden, unterliegen trotzdem der Bedingung, dass sie sich auf zeitartigen Bahnen bewegen müssen. Diese sind begrenzt durch die Bewegungen von Photonen. Einen Ausdruck für die maximal erlaubten Winkelgeschwindigkeiten, die ein Testteilchen annehmen kann, erhält man also durch die Betrachtung von Photonenorbits [MTW73]. Das Linienelement von Photonen  $ds^2 = 0$  ist

$$g_{00}dt^2 + g_{33}\omega^2dt^2 + 2g_{03}\omega dt^2 = 0 \quad , \quad (2.1.9)$$

<sup>1</sup>Die Benennung der beiden Lösungen von Gleichung (2.1.8) ist nicht identisch mit der Benennung in [Sch+13; Sch+14].



wobei erneut Gleichung (2.1.7) verwendet wurde. Diese Gleichung entspricht wieder einer quadratischen Gleichung in  $\omega$  mit den Lösungen

$$\bar{\omega}_{\pm} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{\frac{(g_{03})^2 - g_{00}g_{33}}{g_{33}^2}} . \quad (2.1.10)$$

Formal sind diese Lösungen mit Gleichung (2.1.8) identisch, bis auf den Unterschied, dass hier die Metrikkoeffizienten anstatt ihrer Ableitungen auftauchen.

Jetzt können Ausdrücke für die Energie und den Drehimpuls der Teilchen auf Geodäten in Abhängigkeit der Metrik formuliert werden. Mit Hilfe der Geodätengleichungen für  $t$  und  $\phi$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \frac{d}{ds} (2g_{00}\dot{t} + 2g_{03}c\dot{\phi}) , \\ 0 &= \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{ds} (2g_{33}\dot{\phi} + 2g_{03}\dot{t}) , \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

und der Identifikation der Impulse mit der Energie und dem Drehimpuls der Teilchen im Unendlichen (2.1.4) erhält man Ausdrücke für  $\dot{t}$  und  $\dot{\phi}$ , siehe Gleichung (2.1.3) [ABS75]

$$\begin{aligned} D\dot{t} &= g_{03}L_z + g_{33}E , \\ D\dot{\phi} &= -g_{03}E - g_{00}L_z . \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

In Gleichung (2.1.12) ist noch  $D = (-g_{00}g_{33} + g_{03}^2)$  eingeführt worden. Eingesetzt in die Lagrangefunktion ergibt sich nach einigen Umformungen eine Gleichung für  $\dot{r}^2$  [Sch+13]

$$\dot{r}^2 = \frac{1}{g_{11}D} \left[ E^2 g_{33} + L_z^2 g_{00} + 2EL_z g_{03} - D \right] . \quad (2.1.13)$$

Diese Gleichung lässt sich so umschreiben, dass sie einer klassischen Bewegung eines Teilchens in einem komplizierten, energieabhängigen, effektivem Potential entspricht

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r, E, L_z) . \quad (2.1.14)$$

Das effektive Potential ist in diesem Fall gegeben durch [Sch+13]

$$V_{\text{eff}}(r, E, L_z) = -\frac{1}{2g_{11}D} \left[ E^2(g_{33} - g_{11}D) + L_z^2 g_{00} + 2EL_z g_{03} - D \right] . \quad (2.1.15)$$

Setzt man die einzelnen Metrikkomponenten in Gleichung (2.1.15) ein, ergibt das

$$V_{\text{eff}}(r, E, L_z) = -\frac{1}{r^2} \left[ E^2 \left( a^2 + \frac{a^2\psi}{r^2} \right) - L_z^2 \left( 1 - \frac{\psi}{r^2} \right) - 2EL_z \frac{a\psi}{r^2} - \left( r^2 + a^2 - \psi \right) \right] . \quad (2.1.16)$$

Für den Schwarzschildfall ( $a = 0$ ) reduziert sich (2.1.16) auf einen recht kompakten Ausdruck, der sogar unabhängig von der Energie des Testteilchens ist [Sch+13]

$$V_{\text{eff}}^S(r, L_z) = \frac{1}{2} - \frac{m}{r} + \frac{L_z^2}{2r^2} - \frac{mL_z^2}{r^3} + \frac{B}{4r^3} \left( \frac{L_z^2}{r^2} + 1 \right) . \quad (2.1.17)$$

Von besonderem Interesse sind kreisförmige Orbits. Auf diesen Orbits gilt  $\dot{r} = 0$  und die Winkelgeschwindigkeit der Teilchen ist durch Gleichung (2.1.7) gegeben. Zusammen mit Gleichungen (2.1.3), beziehungsweise (2.1.12) erhält man also

$$E = -\frac{g_{00} + g_{30}\omega}{g_{30} + g_{33}\omega} L_z . \quad (2.1.18)$$

Jetzt lässt sich Gleichung (2.1.13) verwenden und man erhält nach längerer Umformung [Sch+13]

$$\begin{aligned} L_z^2 &= \frac{(g_{03} + \omega g_{33})^2}{-g_{00} - 2\omega g_{03} - \omega^2 g_{33}} , \\ E^2 &= \frac{(g_{00} + \omega g_{03})^2}{-g_{00} - 2\omega g_{03} - \omega^2 g_{33}} . \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Die so gewonnenen Ausdrücke für Energie und Drehimpuls gelten für Teilchen auf geodätischen Kreisbahnen um ein Zentralobjekt. Insbesondere gelten sie auch für Teilchen auf stabilen Kreisbahnen. Da die Energie und der Drehimpuls von Teilchen reell sein müssen, erhält man durch Gleichung (2.1.19) bereits eine Einschränkung an die Winkelgeschwindigkeit. Der Zähler der Terme ist jeweils immer positiv und muss somit nicht weiter betrachtet werden. Der Nenner hingegen besitzt Nullstellen, die durch die Gleichung

$$g_{33}\omega^2 + 2g_{03}\omega + g_{00} = 0 \quad (2.1.20)$$

gegeben sind. Diese Gleichung entspricht Gleichung (2.1.9). Also sind die Einschränkungen an die Energie und den Drehimpuls für Testteilchen auf zeitartigen Geodäten erfüllt.

### 2.1.1 Stabilität von Orbits

Bislang wurde noch nicht die Stabilität der kreisförmigen Orbits betrachtet. Gleichung (2.1.19) gilt auch für instabile Kreisgeodäten. Ein Kriterium für die Stabilität der Orbits liefert uns die zweite Ableitung des effektiven Potentials. Kritische stabile Orbits erhält man durch Nullsetzen dieser Ableitung, also  $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} |_{r_{\text{cs}}} = 0$ . Hier steht  $r_{\text{cs}}$  für kritisch stabile Orbits, also jene Orbits an der Grenze zur Instabilität. Zusätzlich gilt auch  $V|_{r_{\text{cs}}} = 0$  und  $\frac{\partial V}{\partial r} |_{r_{\text{cs}}} = 0$ . Zusammen mit Gleichungen (2.1.15) und (2.1.19) ergibt das

$$\begin{aligned} &g_{33}''(g_{00} + \omega g_{03})^2 + g_{00}''(g_{03} + \omega g_{33})^2 \\ &- 2g_{03}''(g_{00} + \omega g_{03})(g_{03} + \omega g_{33}) \\ &+ D''(\omega^2 g_{33} + 2\omega g_{03} + g_{00}) = 0 . \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Diese Gleichung legt mit ihren Nullstellen die Radien fest, an denen ein Orbit gerade noch stabil ist. In der klassischen ART treten hier so genannte *letzte stabile Orbits* oder auch ***Innermost Stable Circular Orbits*** auf. Setzt man in Gleichung (2.1.21) die klassische Kerr-Metrik ein, erhält man die Gleichung [BPT72]

$$r^2 - 6mr \pm 8a\sqrt{mr} - 3a^2 = 0 \quad , \quad (2.1.22)$$

wobei hier das obere Vorzeichen für Teilchen steht, die sich in dieselbe Richtung bewegen, in die sich das Zentralobjekt dreht. Gleichung (2.1.22) lässt sich analytisch lösen und liefert [BPT72]

$$\begin{aligned} r_{\text{ISCO}} &= m \left[ 3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right] \quad , \\ Z_1 &= 1 + \left( 1 - \frac{a^2}{m^2} \right)^{1/3} \left[ \left( 1 + \frac{a}{m} \right)^{1/3} + \left( 1 - \frac{a}{m} \right)^{1/3} \right] \quad , \\ Z_2 &= \sqrt{3 \frac{a^2}{m^2} + Z_1^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Auch hier steht das obere Vorzeichen wieder für prograde Bewegungen. Für  $a = 0$  gibt es nur eine Lösung und der letzte stabile Orbit ist  $r_{\text{ISCO}} = 6m$ ; für  $a = 1$  gilt  $r_{\text{ISCO}} = m$  für prograde und  $r_{\text{ISCO}} = 9m$  für retrograde Bewegung [BPT72].

## 2.2 Geodätengleichung und Orbits von Testteilchen in der modifizierten Kerr-Metrik

Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, ist die Winkelgeschwindigkeit von Testteilchen in kreisförmigen, geodätischen Orbits in der Äquatorebene um ein massives Objekt durch Gleichung (2.1.8) gegeben. Setzt man die modifizierte Kerr-Metrik (1.3.1) ein, ergibt sich

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{a \pm \sqrt{\frac{2r}{h(r)}}} \quad , \quad (2.2.1)$$

mit der Hilfsfunktion [Cas+12]; [Sch+13]; [Sch+14]

$$h(r) = \frac{2m}{r^2} - \frac{3B}{2r^4} \quad . \quad (2.2.2)$$

$\omega_+$  beschreibt hierbei prograde Bewegungen. Für die klassische, sowie für die modifizierte Kerr-Metrik gilt auch  $g'_{00} = -h(r)$ . Im Falle  $B = 0$  reduziert sich Gleichung (2.2.1) auf den bekannten Ausdruck der klassischen ART [BPT72]

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{a \pm \sqrt{\frac{r^3}{m}}} \quad . \quad (2.2.3)$$

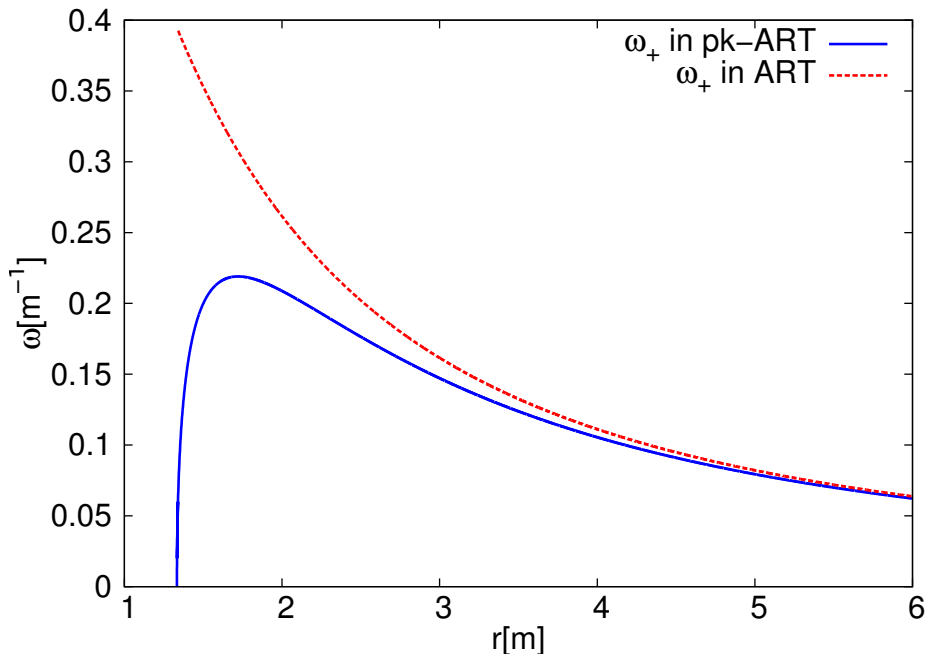
Ein Vergleich der Winkelgeschwindigkeit zwischen den beiden Metriken für mitdrehende Testteilchen findet sich in Abbildung 2.1a und analog für retrograde Bewegungen in Abbildung 2.1b. Prograde Bewegungen sind von größerem Interesse, da hier die Testteilchen näher an das zentrale Objekt gelangen können und so die Unterschiede in den beiden betrachteten Metriken größer sind. Wie in Abbildung 2.1a ersichtlich, haben die Teilchen in der modifizierten Metrik an einem bestimmten Radius  $r_{\omega_{\max}}$  ein Maximum in ihrer Winkelgeschwindigkeit. Die Position dieses Maximums ist unabhängig vom Spinparameter  $a$  des Zentralobjekts, wie man an Gleichung (2.2.1) erkennen kann. Das Extremum von Gleichung (2.2.1) ist identisch mit dem Extremum des Wurzelterms, welches wiederum identisch mit dem Extremum des Terms unter der Wurzel ist, welches durch

$$3r^4 \left( mr^2 - \frac{5}{4}B \right) = 0 \quad (2.2.4)$$

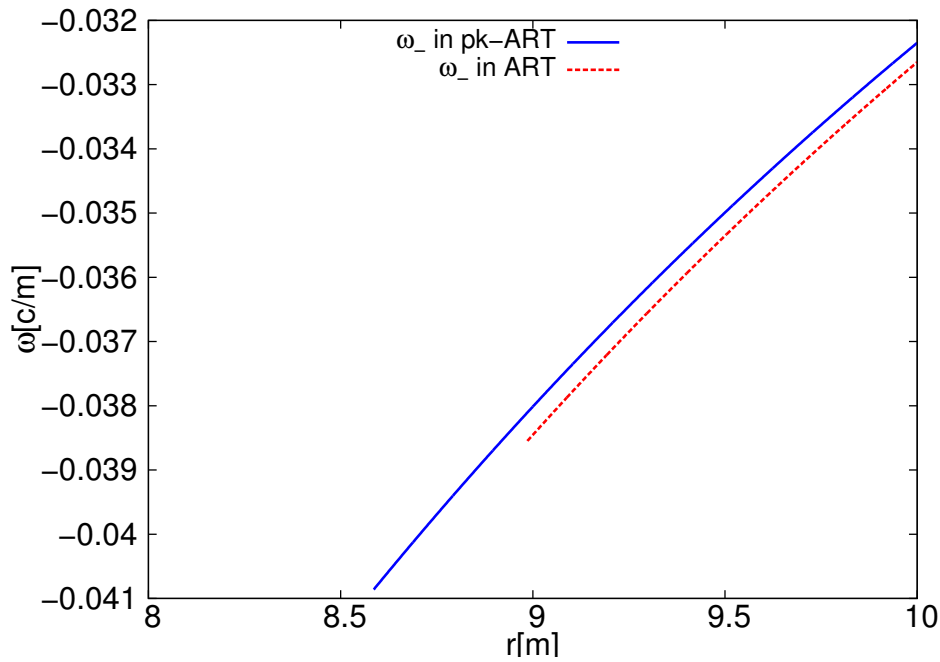
beschrieben wird [Sch+14]. Die Lösung von Gleichung (2.2.4) lautet [Sch+14]

$$r_{\omega_{\max}} = \sqrt{\frac{5B}{4m}} \quad . \quad (2.2.5)$$

Dieses Phänomen, dass die Winkelgeschwindigkeit der Testteilchen ein Maximum besitzt, existiert in der klassischen Kerr-Metrik nicht und wird in Kapitel 3.2 bei der Betrachtung des Scheibenmodells von Page und Thorne [PT74] noch eine Rolle spielen.



(a) Retrograde Bewegung



(b) Retrograde Bewegung

Abbildung 2.1: Winkelgeschwindigkeit als Funktion des radialen Abstands  $r$  für pro- und retrograde geodätische Kreisbahnen. Als Parameter wurden  $a = 0,995m$  und für die modifizierte Kerr-Metrik  $B = \frac{64}{27}m^3$  gewählt. Die Kurven beginnen am jeweiligen letzten stabilen Orbit. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13].

Durch Gleichung (2.1.10) sind allgemeine Einschränkungen an Teilchen auf zeitartigen Geodäten gegeben. Setzt man hier die modifizierte Kerr-Metrik (1.3.1) ein, ergibt das [Sch+13]

$$\bar{\omega}_{\pm} = \frac{\frac{a\psi}{r^2} \pm \sqrt{r^2 + a^2 - \psi}}{r^2 + a^2 + \frac{a^2\psi}{r^2}} . \quad (2.2.6)$$

In Abbildung 2.2 sieht man die durch Gleichung (2.2.6) festgelegten Einschränkungen an die Winkelgeschwindigkeit von Testteilchen. Der Spinparameter wurde auf  $a = 0,995m$  festgelegt. Anhand der beiden Plots für die klassische ART kann man bereits das Phänomen des *frame-draggings* erkennen. Häufig werden einige unterschiedliche Phänomene unter diesem Begriff zusammengefasst. In Abbildung 2.2 ist erkennbar, dass sich Teilchen, die eigentlich auf retrograden Bahnen um das zentrale massive Objekt kreisen, ab einem gewissen Radius mit dem Objekt mitdrehen müssen [MTW73; ABS75; Sch+13]. Dies führt sogar so weit, dass sich alle Teilchen am Ereignishorizont mit der selben Winkelgeschwindigkeit in die selbe Richtung wie das Schwarze Loch bewegen. Für die modifizierte Kerr-Metrik ist dieses Verhalten geändert. Obwohl man das Verhalten noch erkennen kann, dass Teilchen auf retrograden Bahnen auch hier in Drehrichtung des Zentralobjekts „gezogen“ werden, ist es hier deutlich schwächer ausgeprägt.

## 2.2.1 Stabilität von Orbits in der modifizierten Kerr-Metrik

Von besonderem Interesse für viele Betrachtungen sind stabile Orbits, da sie sich dazu eignen um stationäre Situationen, wie etwa eine Akkretionsscheibe, zu beschreiben. In Kapitel 2.1 wird mit Gleichung (2.1.21) eine Bestimmungsgleichung für den letzten stabilen Orbit von Teilchen auf Kreisbahnen aufgestellt

$$\begin{aligned} & g''_{33}(g_{00} + \omega g_{03})^2 + g''_{00}(g_{03} + \omega g_{33})^2 \\ & - 2g''_{03}(g_{00} + \omega g_{03})(g_{03} + \omega g_{33}) \\ & + D''(\omega^2 g_{33} + 2\omega g_{03} + g_{00}) = 0 . \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Setzt man hier die modifizierte Kerr-Metrik ein, ergibt sich [Sch+13] [mit Hilfe von MATHEMATICA [Wol12]]

$$\begin{aligned} & r^7 \left( 25B^2 + 2Br^2(11r - 32m) + 8r^4(6m^2 - 7mr + 2r^2) \right) \\ & \pm 8a^4 r^3 \left( 2mr^2 - 3B \right) \left( 4mr^2 - 3B \right) \\ & + 16a^3 \sqrt{\frac{r^5}{4mr^2 - 3B}} \left( 3B - 2mr^2 \right) \left( 3B - 4mr^2 \right) \left( B + r^2(r - 4m) \right) \\ & \pm a^2 \left( -24B^3 r^2 + 8B^2 r^4 (26m + 3r) - 2Br^6 (256m^2 - 40mr + 15r^2) \right) \\ & + 8mr^8 \left( 32m^2 - 8mr + 3r^2 \right) \\ & + 8ar^2 \sqrt{\frac{r^5}{4mr^2 - 3B}} \left( 3B - 4mr^2 \right) \left( 3B^2 + 2Br^2(r - 7m) + 8m^2 r^4 - 2r^6 \right) = 0 , \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

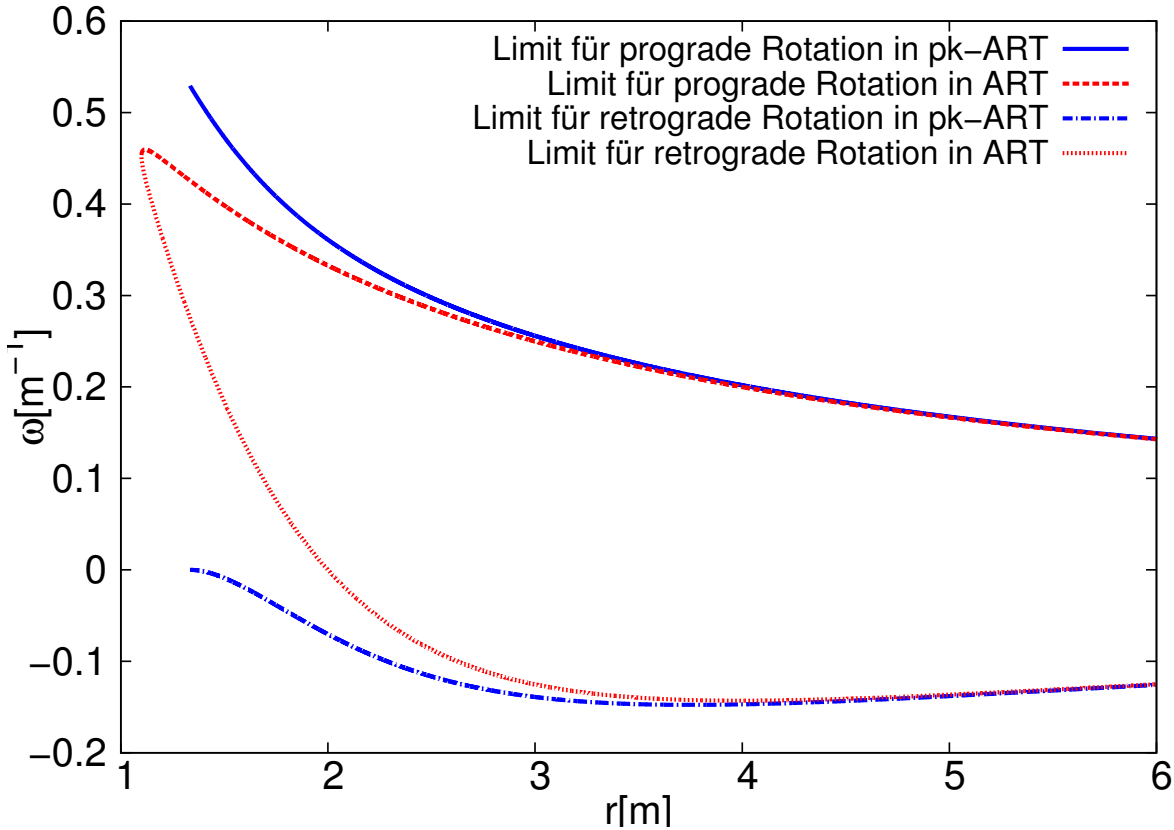


Abbildung 2.2: Durch Photonenorbits gegebene Limits an die Winkelgeschwindigkeit für pro- und retrograde geodätische Kreisbahnen als Funktion des radialen Abstands  $r$ . Als Parameter wurden  $a = 0,995m$  und für die modifizierte Kerr-Metrik  $B = \frac{64}{27}m^3$  gewählt. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13].

wobei hier das obere Vorzeichen wieder für prograde und das untere entsprechend für retrograde Bewegungen steht. Analytische Lösungen zu Gleichung (2.2.8) wurden bisher nicht gefunden. Numerisch lassen sich aber für den Fall  $B = (64/27)m^3$  jeweils zwei Lösungen für pro- und retrograde Orbits finden [Sch+13]. In Abbildung 2.3 ist der ISCO in Abhängigkeit des Spinparameters  $a$  für retrograde Orbits dargestellt. Obwohl es für den retrograden Fall in der modifizierten Kerr-Metrik zwei Lösungen für Gleichung (2.2.8) gibt, ist nur die äußere der beiden relevant. Die innere liegt außerhalb des durch Gleichung (2.1.10) eingeschränkten Bereichs und ist somit nicht für Teilchen zugänglich. Für prograde Bewegungen ist das anders. In Abbildung 2.4 ist die Existenz von stabilen Kreisbahnen für prograde Orbits in Abhängigkeit des Abstands zum Zentralobjekt und dessen Spinparameter  $a$  gezeigt. Der dargestellte Parameterraum lässt sich in vier Regionen einteilen [Sch+13]:

I Diese Region wird durch die blaue durchgezogene Kurve begrenzt. Sie beschreibt

den letzten stabilen Orbit in der klassischen Kerr-Metrik. Für alle Kombinationen aus  $r$  und  $a$  oberhalb dieser Linie ist  $\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2}$  negativ. Es existieren also stabile Orbits in der klassischen, sowie in der modifizierten Kerr-Metrik.

- II Hier ist  $\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2}$  in der modifizierten Kerr-Metrik negativ, in der klassischen Kerr-Metrik allerdings positiv. Also gibt es stabile Orbits in der erweiterten Kerr-Metrik, nicht aber in der klassischen Kerr-Metrik.
- III In diesem Gebiet ist  $\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2}$  in beiden betrachteten Metriken positiv und es gibt somit keine stabilen Orbits.
- IV Grundsätzlich wären Orbits in der modifizierten Kerr-Metrik hier stabil, da  $\frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial r^2}$  negativ ist. Allerdings ist diese Region durch die Einschränkungen an Orbits durch Gleichung (2.1.10) ausgeschlossen, da hier  $ds^2$  negativ ist.

Es gibt also einen qualitativen Unterschied zwischen der klassischen und der modifizierten Kerr-Metrik. Der letzte stabile Orbit ist in der modifizierten Metrik nicht nur hin zu kleineren Radien verschoben, sondern es gibt einen Bereich, in dem Orbits instabil sind. Bei entsprechend kleineren Radien gibt es aber wieder stabile Orbits. Schließlich gibt es für Werte des Spinparameters  $a > 0.416m$  keine Regionen instabiler Orbits mehr [Sch+13].



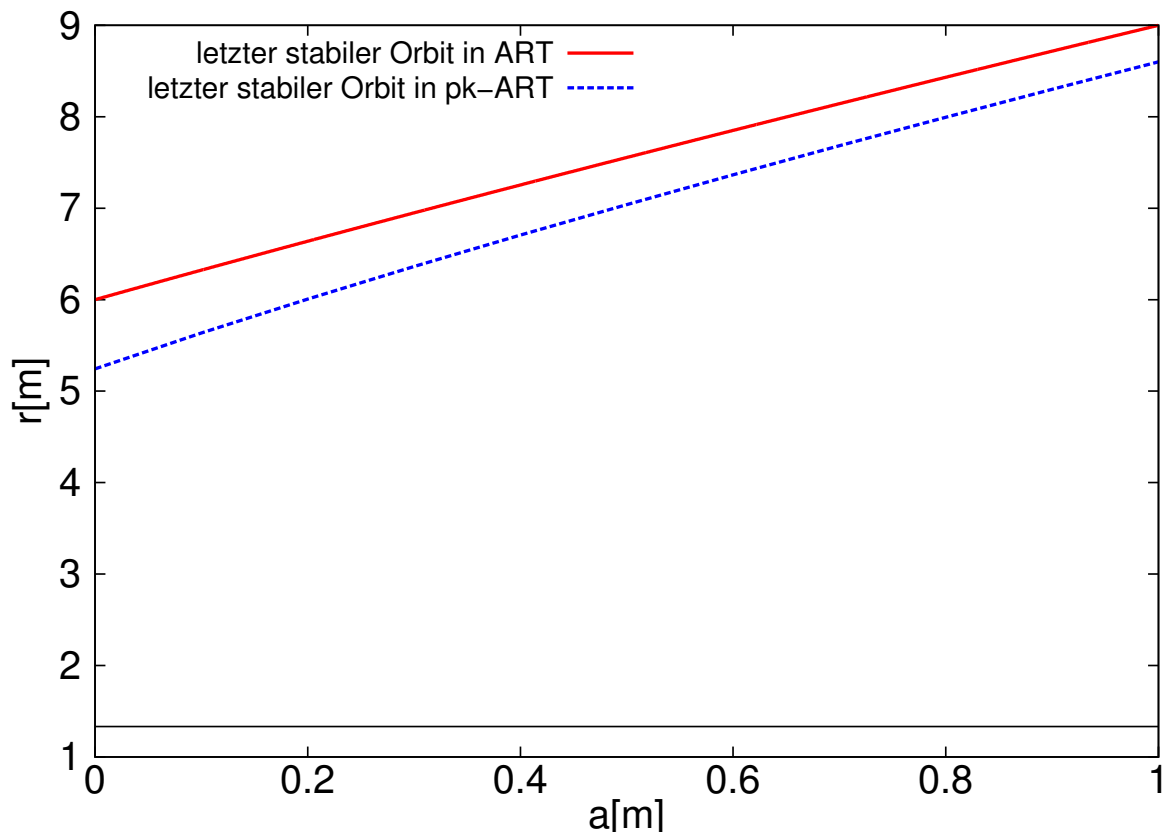


Abbildung 2.3: Letzter stabiler Orbit für Teilchen auf retrograden Bahnen. Für die modifizierte Kerr-Metrik wurde  $B = (64/27)m^3$  gewählt. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13].

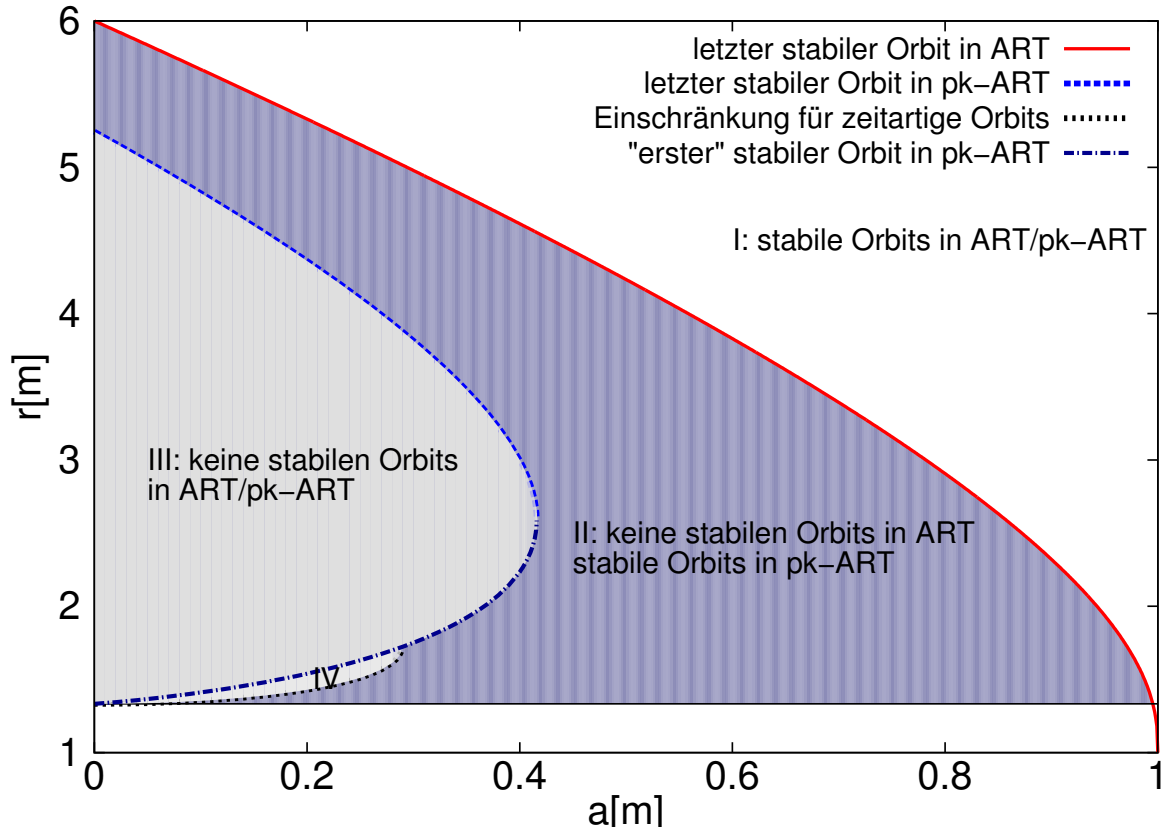


Abbildung 2.4: Stabile Orbits für Teilchen auf prograden Bahnen dargestellt im Parameterraum aufgespannt durch radialen Abstand  $r$  und Spinparameter  $a$ . Es gibt vier Regionen, zwischen denen unterschieden werden muss. In der nicht schattierten Region (I) gibt es stabile Kreisbahnen in der klassischen ART, sowie im modifizierten pk-ART Modell. Region II (dunkel schattiert) enthält hingegen nur im pk-ART Modell stabile Orbits, nicht aber in der klassischen ART. Regionen III und IV (hell schattiert) enthalten keine stabilen Orbits mehr. Für die modifizierte Kerr-Metrik wurde  $B = (64/27)m^3$  gewählt. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13].

## Raytracing

Direkte Beobachtungen von Schwarzen Löchern sind nicht möglich. Allerdings kann man Lichtquellen in ihrer Nähe beobachten und dadurch Schlüsse über die Eigenschaften von Schwarzen Löchern ziehen. Eine leistungsfähige Technik dafür ist das so genannte *Raytracing*. Hierbei werden Lichtstrahlen von ihrem Ursprungsort in der Nähe eines kompakten massiven Objekts – z.B. in einer Akkretionsscheibe – entlang von Nullgeodäten in einer gekrümmten Raumzeit verfolgt<sup>1</sup>. Mit dieser Technik ist es so möglich Bilder von der direkten Umgebung Schwarzer Löcher zu erzeugen. Zusätzlich kann man durch Berechnen eines Integrals in einem zweiten Schritt den spektralen Fluss berechnen. Das ist insofern von großem Interesse, da z.B. die Eisen- $K\alpha$ -Emissionslinie zu den wenigen guten Observablen für Regionen mit starken Gravitationsfeldern gehört. Eine Reihe von Gruppen hat sich mit dieser Technik beschäftigt, dazu zählen unter anderem Fanton u. a. [Fan+97]; Müller und Camenzind [MC04]; Vincent u. a. [Vin+11].

### 3.1 Raytracing – Formalismen und Modelle

Im folgenden Abschnitt werden zunächst einige wichtige Größen für das Raytracing und anschließend zwei Modelle vorgestellt. Die Diskussion ist dabei wie in Kapitel 2.1 zunächst allgemein gehalten, ohne auf eine bestimmte Metrik einzugehen.

#### 3.1.1 Geodätengleichungen und Entwicklungsgrößen

Grundlegend für die Technik des Raytracings sind die Geodätengleichungen für Orbits. Ich folge hier den Ableitungen von Carter [Car68], sowie Levin und Perez-Giz [LP08]. Ausgangspunkt bilden die Lagrange- und Hamiltonfunktionen (2.1.1) und (2.1.2), sowie die Impulse  $p_\mu$  aus Gleichung (2.1.3). Zusätzlich zu den in Kapitel 2.1 eingeführten Konstanten der Bewegungen auf Geodäten,  $E$  und  $L_z$  entspricht die Konstanz der Hamilton-Funktion in Gleichung (2.1.2) der Erhaltung der Ruhemasse des Testteilchens

---

<sup>1</sup>Technisch gesehen geht man den umgekehrten (effizienteren) Weg und verfolgt Lichtstrahlen auf dem Weg vom Beobachtungsschirm zurück zum Emissionsort.

[Car68]. Eine vierte Erhaltungsgröße lässt sich durch die Forderung der Separierbarkeit der Hamilton-Jacobi-Gleichung finden [Car68]. Die Hamilton-Jacobi-Gleichung hat die Form [Car68; Cha83]

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left( \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \right) . \quad (3.1.1)$$

Carter [Car68] macht unter der Forderung der Separierbarkeit den folgenden Ansatz für die erzeugende Funktion

$$S = -\frac{1}{2}\zeta\lambda - Et + L_z\phi + S_\theta + S_r , \quad (3.1.2)$$

wobei hier  $\lambda$  ein affiner Parameter ist und die beiden Funktionen  $S_\theta$  und  $S_r$  jeweils nur von  $\theta$  beziehungsweise  $r$  abhängen. Eingesetzt in die Hamilton-Jacobi-Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= g^{00} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + g^{11} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + g^{33} \left( \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 + 2g^{03} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \phi} \\ \Leftrightarrow -\zeta &= g^{00} E^2 + g^{33} L_z^2 - 2g^{03} EL_z + g^{11} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 . \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Hier setzt man die kontravariante Metrik (1.3.3) ein und formt um

$$\begin{aligned} -\zeta &= -\frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta} E^2 + \frac{\Delta}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{\Sigma} \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} L_z^2 + 2\frac{a\psi}{\Sigma \Delta} EL_z \\ \Leftrightarrow -\zeta \Sigma &= \Delta \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad - \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} E^2 + a^2 \sin^2 \theta E^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} L_z^2 - \frac{a^2}{\Delta} L_z^2 + \frac{2a\psi}{\Delta} EL_z \\ \Leftrightarrow -\zeta \Sigma &= \Delta \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\Delta} \left( (r^2 + a^2)E - aL_z \right)^2 - \frac{2}{\Delta} (r^2 + a^2)aEL_z \\ &\quad + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( -L_z + a \sin^2 \theta E \right)^2 + 2aEL_z + \frac{2a\psi}{\Delta} EL_z . \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Alle Mischterme in  $EL_z$  heben sich auf

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\Delta} (r^2 + a^2)aEL_z + 2aEL_z + \frac{2a\psi}{\Delta} EL_z &= 2EL_z \left( -\frac{1}{\Delta} \left( (r^2 + a^2)a - a\psi \right) + a \right) \\ &= 2EL_z (a - a) = 0 , \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

sodass sich

$$\begin{aligned}
 -\zeta\Sigma &= \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{1}{\Delta} \left( (r^2 + a^2)E - aL_z \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( -L_z + a \sin^2 \theta E \right)^2 \quad (3.1.6)
 \end{aligned}$$

ergibt. Eine weitere Umformung ist zu der Separierung der Gleichung noch notwendig. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( -L_z + a \sin^2 \theta E \right)^2 &= \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2 \sin^2 \theta E^2 - 2aL_z E \\
 &= \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} + a^2 E^2 - a^2 \cos^2 \theta E^2 - 2aL_z E + L_z^2 - L_z^2 \\
 &= \frac{L_z^2 - L_z^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} - a^2 \cos^2 \theta E^2 + (aE - L_z)^2 \\
 &= \left( \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \cos^2 \theta + (aE - L_z)^2 \quad ,
 \end{aligned}$$

was man in (3.1.6) einsetzen kann und schließlich die Gleichung in  $\theta$  und  $r$  separierbar macht

$$\begin{aligned}
 &-\zeta r^2 - \Delta \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{\Delta} \left( (r^2 + a^2)E - aL_z \right)^2 - (aE - L_z)^2 \\
 &= \left( \zeta a^2 + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} - a^2 E^2 \right) \cos^2 \theta + \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 \quad . \quad (3.1.7)
 \end{aligned}$$

Beide Seiten sind hier jeweils nur abhängig von  $r$ , beziehungsweise  $\theta$  und können somit gleich einer Konstanten  $\mathcal{C}$  gesetzt werden. Man kann also

$$\left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 = \frac{R}{\Delta^2} \quad \text{und} \quad \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = \Theta \quad , \quad (3.1.8)$$

unter Einführungen zweier Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned}
 R &:= \left[ (r^2 + a^2)E - aL_z \right]^2 - \Delta \left[ \mathcal{C} + (aE - L_z)^2 + \zeta r^2 \right] \quad , \\
 \Theta &:= \mathcal{C} - \left( a^2(\zeta - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right) \cos^2 \theta \quad (3.1.9)
 \end{aligned}$$

schreiben. Hiermit können Bewegungsgleichungen aufgestellt werden. Dazu benutzt man

$$\dot{x}^\mu = g^{\mu\alpha} p_\alpha = g^{\mu\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \quad (3.1.10)$$

und erhält

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^0 = \dot{t} &= \frac{1}{\Sigma\Delta} \left\{ \left[ (r^2 + a^2)^2 + a^2\Delta \sin^2\theta \right] E - a\psi L_z \right\} \quad , \\
 \dot{x}^1 = \dot{r} &= \pm \frac{\sqrt{R}}{\Sigma} \quad , \\
 \dot{x}^2 = \dot{\theta} &= \pm \frac{\sqrt{\Theta}}{\Sigma} \quad , \\
 \dot{x}^3 = \dot{\phi} &= \frac{1}{\Sigma\Delta} \left[ \left( \frac{\Delta}{\sin^2\theta} - a^2 \right) L_z + a\psi E \right] \quad .
 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

Ich gehe hier allerdings einen anderen Weg, als in der gängigen Literatur [Car68; Fan+97; MC04] und folge Levin und Perez-Giz [LP08] in ihrem Ansatz die Hamilton-Gleichungen als Bewegungsgleichungen für Raytracing zu verwenden. Zunächst schreibt man dazu Gleichung (2.1.2) teilweise aus, indem die kontravariante Metrik zum Teil eingesetzt wird [LP08]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \frac{\Delta}{\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\Sigma} p_\theta^2 + f(r, \theta, p_t, p_\phi) \quad . \tag{3.1.12}$$

Hier ist der verbleibende Teil in der Hilfsfunktion  $f(r, \theta, p_t, p_\phi)$  zusammengefasst. Die Abhängigkeit der Funktion  $f$  von  $r$  und  $\theta$  ist durch  $g^{\mu\nu}$  bedingt [LP08]. Nun ersetzt man in (3.1.12)  $p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{dS_r}{dr}$  und  $p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \frac{dS_\theta}{d\theta}$  mit Hilfe von (3.1.8) und (3.1.9) [LP08]

$$\mathcal{H} = \frac{R}{2\Delta\Sigma} + \frac{\Theta}{2\Sigma} + f(r, \theta, p_t, p_\phi) \quad . \tag{3.1.13}$$

An dieser Stelle kann man erneut auf Gleichung (2.1.2) zurückgreifen und damit die Funktion  $f$  festlegen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \frac{R}{2\Delta\Sigma} + \frac{\Theta}{2\Sigma} + f(r, \theta, p_t, p_\phi) = -\frac{1}{2}\zeta \\
 \Rightarrow f(r, \theta, p_t, p_\phi) &= -\frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} - \frac{1}{2}\zeta \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

womit man die Hamilton-Funktion schließlich als

$$\mathcal{H} = \frac{\Delta}{2\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{2\Sigma} p_\theta^2 - \frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} - \frac{1}{2}\zeta \tag{3.1.15}$$

schreiben kann [LP08]. Die Abhängigkeit von  $p_t$  und  $p_\phi$  ist nur indirekt sichtbar, da diese in den Funktionen  $R$  und  $\Theta$  als  $-E$  und  $L_z$  auftreten. Die Entwicklungsgleichungen ergeben sich durch Verwendung der Hamiltongleichungen

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \quad , \quad \dot{x}_\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \tag{3.1.16}$$

und der Hamiltonfunktion in Form (3.1.15) [LP08]

$$\begin{aligned}
 \dot{t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial E} = \frac{1}{2\Delta\Sigma} \frac{\partial}{\partial E} (R + \Delta\Theta) \quad , \\
 \dot{r} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r} = \frac{\Delta}{\Sigma} p_r \quad , \\
 \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{1}{\Sigma} p_\theta \quad , \\
 \dot{\phi} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L_z} = -\frac{1}{2\Delta\Sigma} \frac{\partial}{\partial L_z} (R + \Delta\Theta) \quad , \\
 \dot{p}_t &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \quad , \\
 \dot{p}_r &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r} - \left( \frac{\Delta}{2\Sigma} \right)_{|r} = p_r^2 - \left( \frac{1}{2\Sigma} \right)_{|r} p_\theta^2 + \left( \frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} \right)_{|r} \quad , \\
 \dot{p}_\theta &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = - \left( \frac{\Delta}{2\Sigma} \right)_{|\theta} p_r^2 - \left( \frac{1}{2\Sigma} \right)_{|\theta} p_\theta^2 + \left( \frac{R + \Delta\Theta}{2\Delta\Sigma} \right)_{|\theta} \quad , \\
 \dot{p}_\phi &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} = 0 \quad .
 \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Hier stehen  $_{|r}$  und  $_{|\theta}$  für die partiellen Ableitungen nach  $r$  beziehungsweise  $\theta$ . Die Gleichungen (3.1.17) bieten Vorteile gegenüber den klassischen Gleichungen (3.1.11), wie sie in [Car68; Cha83; Fan+97; MC04] verwendet werden. Levin und Perez-Giz [LP08] weisen darauf hin, dass die Gleichungen (3.1.11) in der radialen und polaren Komponente eine Uneindeutigkeit im Vorzeichen aufweisen, sodass eine Fallunterscheidung notwendig wird. Zusätzlich führt die Ausnutzung von Hamiltons Prinzip, um die Geodätengleichungen zu erhalten, auf die Integralgleichung [Car68]

$$\int_{r_{\text{em}}}^{r_{\text{obs}}} \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int_{\theta_{\text{em}}}^{\theta_{\text{obs}}} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} \quad . \tag{3.1.18}$$

Um diese Gleichung zu lösen, verwenden Fanton u. a. [Fan+97]; Müller und Camenzind [MC04] die Tatsache, dass  $R$  ein Polynom vierten Grades in  $r$  ist. Das ist allerdings unter Verwendung der modifizierten Kerr-Metrik (1.3.1) nicht mehr der Fall, da die Ordnung von  $r$  in  $R$  erhöht ist. Die bestehenden Lösungen können hier nicht mehr verwendet werden.

Die Gleichungen (3.1.17) enthalten keine Wurzeln mehr und sind dadurch ohne Fallunterscheidungen direkt lösbar [LP08; Vin+11]. Sie lassen sich auch direkt auf die modifizierte Kerr-Metrik anwenden.

### 3.1.2 Strahlungsgrößen

Nachdem im letzten Kapitel die Bestimmung der Geodätengleichungen geschehen ist, werden hier verschiedene Strahlungsgrößen diskutiert, die bei der Simulation von astrophysikalischen Prozessen von Bedeutung sind.

Die erste bedeutende Größe ist hier die *Intensität*  $I_\nu$  der Strahlung. Sie gibt die Menge an Energie pro Zeit  $t$ , Fläche  $A$ , Raumwinkel  $\Omega$  und Frequenz  $\nu$  eines abstrahlenden Objekts an. So lässt sich die Energie von Strahlung, die durch ein Flächenelement  $dA$  mit Hilfe der Intensität als

$$dE = I_\nu dA d\Omega d\nu dt \quad (3.1.19)$$

angeben [RL04]. Die Intensität der Strahlung ist einerseits durch Emission (z.B. von heißem Gas) und andererseits durch Absorption (z.B. durch Staub) bestimmt. Die beiden Effekte lassen sich in der Strahlungstransportgleichung

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (3.1.20)$$

zusammenfassen [RL04], wobei  $\alpha_\nu$  der *Absorptionskoeffizient* und  $j_\nu$  der *Emissionskoeffizient* ist. Häufig besteht die Herausforderung darin, diese beiden Koeffizienten für bestimmte physikalische Prozesse zu bestimmen. Ich werde im Folgenden zwei Modelle betrachten, für die ich die Absorption vernachlässige und die Emission auf unterschiedliche Weise ableiten werde (siehe Kapitel 3.1.3 und 3.1.4).

Die zweite wichtige Größe ist der *Strahlungsfluss* (oder auch nur Fluss)  $F$ , der in differentieller Form über

$$dF_{\nu_{\text{obs}}} = I_{\nu_{\text{obs}}} \cos \theta d\Omega \quad (3.1.21)$$

gegeben ist [RL04].  $\theta$  beschreibt hier den Winkel zwischen der Beobachtungsrichtung und der Normalen des Flächenelements, durch das die Strahlung fließt;  $\Omega$  beschreibt den Raumwinkel, aus dem die Strahlung beobachtet wird. Aufintegriert ergibt sich entsprechend [RL04]

$$F_{\nu_{\text{obs}}} = \int I_{\nu_{\text{obs}}} \cos \theta d\Omega \quad . \quad (3.1.22)$$

Durch verschiedene Effekte, wie die Gravitationsrotverschiebung oder den relativistischen Dopplereffekt, kommt es zu Frequenzverschiebungen zwischen emittierter und beobachteter Strahlung. Zur Beschreibung dieser verschiedenen Effekte wird in der Regel der (Rotverschiebungs-)Faktor

$$g := \frac{\nu_{\text{obs}}}{\nu_{\text{em}}} \quad (3.1.23)$$

verwendet. Die Kombination aus Intensität und Frequenz  $I_\nu/\nu^3$  bildet eine relativistische Invariante [MTW73, S. 588], sodass man einen Zusammenhang zwischen beobachteter und emittierter Intensität herstellen kann

$$\frac{I_{\text{obs}}}{\nu_{\text{obs}}^3} = \frac{I_{\text{em}}}{\nu_{\text{em}}^3} \quad \Rightarrow \quad I_{\text{obs}} = g^3 I_{\text{em}} \quad . \quad (3.1.24)$$

### 3.1.3 Emissionslinienprofile

Das erste betrachtete Modell von Akkretionsscheiben dient der Berechnung von Emissionslinienprofilen und beschreibt eine geometrisch dünne und optisch dicke (undurchlässig



für Strahlung) Akkretionsscheibe [Fan+97; Vin+11]. Die Strahlung der Scheibe wird als isotrop und monochromatisch im Emitter-System angenommen, mit der Intensität

$$I_{\text{em}} = \epsilon(r)\delta(E_{\text{em}} - E_0) \quad , \quad (3.1.25)$$

wobei  $E_0$  die Ruheenergie der Strahlung im Emitter-System und

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} r^{-p} \quad (3.1.26)$$

die Emissivität der Scheibe beschreibt. Der Emissivitätsindex  $p$  wird im Folgenden, falls nicht anders beschrieben, als  $p = 3$  angenommen [Mul04].

Um von der abgestrahlten Intensität (3.1.25) zu einer beobachtbaren Größe zu kommen, verwenden Vincent u. a. [Vin+11] Gleichung (3.1.21), allerdings mit einer anderen Interpretation. Hier beschreibt  $\theta$  den Winkel zwischen der Normalen des Beobachtungsschirms und der Richtung der einfallenden Strahlung.  $\Omega$  gibt weiterhin den Raumwinkel an, aus dem die Strahlung beobachtet wird. Der Beobachtungsschirm ist als Punkt im Raum angenommen, dessen einzelne Pixel einem bestimmten Teil des Himmels abdecken. Der Gesamtfluss ergibt sich als Summe [Vin+11]

$$F_{\nu_{\text{obs}}} = \sum_{\text{pixels}} I_{\nu_{\text{obs,pixel}}} \cos(\theta_{\text{pixel}}) \delta\Omega_{\text{pixel}} \quad . \quad (3.1.27)$$

### 3.1.4 Scheibenmodell nach Page und Thorne

Ein häufig verwendetes Modell für Akkretionsscheiben von Schwarzen Löchern geht auf Page und Thorne [PT74] zurück. Im Folgenden wird das Modell kurz nachvollzogen und dann mit der Metrik (1.3.1) angepasst. Hierbei ist zu beachten, dass Page und Thorne [PT74] die Koordinaten  $t, r, \phi, z$  verwenden, da diese die Symmetrie des Problems am besten berücksichtigen. Hier werden zunächst ebenfalls diese Koordinaten verwendet. Die relevanten Größen sind am Ende nicht mehr von der Koordinate  $z$  abhängig.

Die meisten Annahmen, die Page und Thorne [PT74] treffen, werden weiterhin gelten. Allerdings werde ich eine zusätzliche Annahme treffen müssen.

Zunächst wird hier eine der zentralen Gleichungen hergeleitet. Dazu betrachtet man kreisförmige geodätische Orbits im Äquator um das zentrale Objekt. Entlang dieser Geodäten gilt für den Viererimpuls  $p^\mu$  (Orthogonalität des Gradienten)

$$p^\alpha (p^\mu)_{|\alpha} = 0 \quad . \quad (3.1.28)$$

Die Radialkomponente davon ist

$$\begin{aligned} g_{\mu r} p^\alpha (p^\mu)_{|\alpha} &= 0 \quad , \\ \Rightarrow p^\alpha (p_r)_{|\alpha} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Als nächstes verwendet man die Normierung aus (2.1.2) mit  $\zeta = 1$ , also

$$p^\alpha p_\alpha = -1 \quad , \quad (3.1.30)$$

und bildet davon die kovariante Ableitung

$$(p^\alpha p_\alpha)_{||r} = 0 \quad . \quad (3.1.31)$$

Dieser Ausdruck ist gleichbedeutend mit

$$p^\alpha (p_\alpha)_{||r} = 0 \quad , \quad (3.1.32)$$

denn es gilt

$$(p^\alpha p_\alpha)_{||r} = \mathbf{p}^2_{||r} = 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_{||r} \quad , \quad (3.1.33)$$

oder komponentenweise

$$\begin{aligned} (p^\alpha p_\alpha)_{||r} &= (g^{\mu\alpha} p_\mu p_\alpha)_{||r} = g^{\mu\alpha} (p_\mu p_\alpha)_{||r} \\ &= g^{\mu\alpha} (p_{\mu||r} p_\alpha + p_\mu p_{\alpha||r}) \\ &= 2p^\alpha (p_\alpha)_{||r} \quad . \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Nun lassen sich Gleichungen (3.1.29) und (3.1.32) voneinander abziehen und es ergibt sich nach Ausnutzung der Symmetrie der kovarianten Ableitung schließlich [PT74]

$$\begin{aligned} 0 &= p^\alpha (p_r)_{||\alpha} - p^\alpha (p_\alpha)_{||r} \quad , \\ &= p^\alpha (p_{r||\alpha} - p_{\alpha||r}) \quad , \\ &= p^\alpha (p_{r|\alpha} - p_{\alpha|r}) \quad . \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Aus den Annahmen einer kreisförmigen, geodätischen Bewegung folgt, dass die Radial- und Polarkomponenten des Impulses verschwinden. Der verbleibende Ausdruck ergibt ausgeschrieben dann

$$p^\alpha (p_{\alpha|r}) = p^t p_{t|r} + p^\phi p_{\phi|r} = 0 \quad . \quad (3.1.36)$$

An dieser Stelle kann man schließlich noch die Definition für die Orbitalfrequenz (2.1.7)  $\omega = \frac{d\phi/ds}{dt/ds} = \frac{p^\phi}{p^t}$  und die Energie  $E$  beziehungsweise den Drehimpuls  $L_z$  einsetzen [PT74] und erhält schließlich

$$E_{|r} = \omega L_{z|r} \quad . \quad (3.1.37)$$

## Erhaltungssätze

Page und Thorne [PT74] stützen ihr Modell auf die Ausnutzung von Erhaltungssätzen für die Energie, die Ruhemasse und den Drehimpuls. Durch Ausnutzen dieser Erhaltungssätze ist es möglich freiwerdende Energie und Drehimpuls der Teilchen auf Kreisgeodäten, die sich hin zu kleineren Radien bewegen, mit der Energie und dem Drehimpuls der ausgehenden Strahlung in Zusammenhang zu bringen. Page und Thorne [PT74] verwenden dafür einen Energie-Impuls-Tensor der Form

$$\mathbf{T} = \rho_0(1 + \Pi)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{t} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{q} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{u} \quad , \quad (3.1.38)$$

wobei hier  $\rho_0$  die Ruhemassendichte,  $\Pi$  die spezifische innere Energie,  $\mathbf{t}$  der Stress-Tensor in einem gemittelten Ruhesystem ( $\mathbf{t} \cdot \mathbf{u} = 0$ ) und  $\mathbf{q}$  der Energieflussvektor ( $\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = 0$ ) sind. Im Folgenden werde ich wie Page und Thorne [PT74] annehmen, dass die spezifische innere Energie vernachlässigbar gegenüber der potentiellen Energie im Gravitationsfeld ist.

### Erhaltung der Ruhemasse

Die Ruhemassenerhaltung in ihrer differentiellen Form ist

$$\nabla(\rho_0 \mathbf{u}^{\text{inst}}) = 0 \quad , \quad (3.1.39)$$

wobei  $\mathbf{u}^{\text{inst}}$  die Vierergeschwindigkeit des lokalen Ruhesystems von Testteilchen beschreibt [PT74]. Im Folgenden wird die Integralversion dieses Erhaltungssatzes zusammen mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{V}} dt dr dz d\phi \nabla(\rho_0 \mathbf{u}^{\text{inst}}) \sqrt{-g} \\ &= \int_{\partial\mathcal{V}} \rho_0 \sqrt{-g} \mathbf{u}^{\text{inst}} \cdot d^3\mathbf{A} \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

verwendet. Hierbei beschreibt  $d^3\mathbf{A}$  das Flächenelement auf dem Rand  $\partial\mathcal{V}$ . Durch die Symmetrie des zugrunde liegenden Systems erhält man [PT74]

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \int_{-H}^H \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{2\pi} \rho_0 u_{\text{inst}}^r \sqrt{-g} d\phi dt dz \right]_r^{r+\Delta r} + [\text{Gesamtruhemasse im 3-Volumen}]_t^{t+\Delta t} \\ &\approx \Delta t \Delta r (2\pi \sqrt{-g} \Sigma u^r)|_r + 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Die zweite Klammer kann man hier vernachlässigen, da angenommen wird, dass die Gesamtruhemasse in einem Ring der Dicke  $\Delta r$  zwischen  $r$  und  $r + \Delta r$  vernachlässigbar im Vergleich zu der Masse ist, die in der Zeit  $\Delta t$  durch den Ring mit Radius  $r$  fließt [PT74]. Der erste Term ergibt sich zum einen durch Ausnutzen des Fundamentalsatzes der Algebra und zum anderen durch die Definition der über  $\phi$  und  $\Delta t$  massengemittelten Geschwindigkeit

$$\mathbf{u}(r) := \frac{1}{\Sigma} \int_{-H}^H \langle \rho_0 \mathbf{u}^{\text{inst}} \rangle dz \quad (3.1.42)$$

und der zeitgemittelten Oberflächendichte

$$\Sigma(r) := \int_{-H}^H \langle \rho_0 \rangle dz \quad . \quad (3.1.43)$$

Aus Gleichung (3.1.41) lässt sich ablesen, dass die Größe

$$\dot{M}_0 := -2\pi \sqrt{-g} \Sigma u^r \quad (3.1.44)$$

radiusunabhängig ist. Physikalisch beschreibt (3.1.44) die zeitgemittelte Massen-Akkretionsrate [PT74].

### Drehimpulserhaltung

Die zweite Erhaltungsgröße, die zur Konstruktion des Scheibenmodells gebraucht wird, ist der Drehimpuls

$$\nabla \mathbf{J} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} := \mathbf{T} \cdot \partial_\phi \quad (3.1.45)$$

Wie für die Ruhemassenerhaltung wird dieser Erhaltungssatz integriert. Anschließend wird wieder der Satz von Gauß zusammen mit dem Fundamentalsatz der Algebra ausgenutzt. Allerdings ist zu beachten, dass im Gegensatz zur Ruhemasse Drehimpuls am oberen ( $z = H$ ) und unteren ( $z = -H$ ) Rand der Scheibe entweichen kann. Aus diesem Grund hat das Integral eine zusätzliche Komponente

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{V}} dt dr dz d\phi \nabla \mathbf{J} \sqrt{-g} \\ &= \int_{\partial \mathcal{V}} \sqrt{-g} \mathbf{J} \cdot d^3 \mathbf{A} \\ &= \left[ \int_{-H}^H \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{2\pi} (\rho_0(1+\Pi)u_\phi u^r + t_\phi^r + u_\phi q^r + q_\phi u^r) \sqrt{-g} d\phi dt dz \right]_r^{r+\Delta r} \\ &\quad + \left[ \int_r^{r+\Delta r} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{2\pi} (\rho_0(1+\Pi)u_\phi u^z + t_\phi^z + u_\phi q^z + q_\phi u^z) \sqrt{-g} d\phi dt dr \right]_{-H}^H \\ &\quad + [\text{Gesamtdrehimpuls im 3-Volumen}]_t^{t+\Delta t} . \end{aligned} \quad (3.1.46)$$

Wie vorher kann man den letzten Term vernachlässigen. Zusätzlich wird die spezifische Wärme  $\Pi$  vernachlässigt. Aus der Annahme, dass der Wärmetransport innerhalb der Scheibe klein gegenüber dem Wärmetransport senkrecht zur Scheibe ist, ergibt sich, dass man die Terme  $u_\phi q^r$  und  $q_\phi u^r$  in der ersten Klammer vernachlässigen kann. Die Terme proportional zu  $u^z$  in der zweiten Klammer fallen weg, da keine Bewegung senkrecht zur Scheibenebene angenommen wird. Damit reduziert sich (3.1.46) auf [PT74]

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \int_{-H}^H \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{2\pi} (\rho_0 u_\phi u^r + t_\phi^r) \sqrt{-g} d\phi dt dz \right]_r^{r+\Delta r} \\ &\quad + \left[ \int_r^{r+\Delta r} \int_t^{t+\Delta t} \int_0^{2\pi} (t_\phi^z + u_\phi q^z) \sqrt{-g} d\phi dt dr \right]_{-H}^H \\ &= \left[ \int_{-H}^H 2\pi \Delta t (\langle \rho_0 \rangle u_\phi u^r + \langle t_\phi^r \rangle) \sqrt{-g} dz \right]_r^{r+\Delta r} \\ &\quad + \left[ \int_r^{r+\Delta r} 2\pi \Delta t (\langle t_\phi^z \rangle + u_\phi \langle q^z \rangle) \sqrt{-g} dr \right]_{-H}^H . \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

Die erste Klammer lässt sich mit der Definition

$$W_{\alpha}^{\beta} := \int_{-H}^H \langle t_{\alpha}^{\beta} \rangle dz \quad (3.1.48)$$

zu

$$\left[ 2\pi\Delta t (\Sigma L_z u^r + W_{\phi}^r) \sqrt{-g} \right]_r^{r+\Delta r} = \Delta t \Delta r \left[ -\dot{M}_0 L_z + 2\pi\sqrt{-g} W_{\phi}^r \right]_{|r} \quad (3.1.49)$$

umformen. Dabei wurde noch ausgenutzt, dass  $u_{\phi} = L_z$  ist und (3.1.44) eingesetzt. In der zweiten Klammer in (3.1.47) verschwindet der erste Term mit der Annahme, dass nur Photonen zeitgemittelte Energie und Impuls aus der Scheibe tragen. Der verbleibende Teil lässt sich mit der Definition von  $F$

$$F := \langle q^z(r, z = H) \rangle = \langle -q^z(r, z = -H) \rangle \quad (3.1.50)$$

schließlich umformen in

$$\left[ \int_r^{r+\Delta r} 2\pi\Delta t (u_{\phi} \langle q^z \rangle) \sqrt{-g} dr \right]_{-H}^H = 4\pi\Delta t \Delta r \left[ \sqrt{-g} L_z F \right] \quad (3.1.51)$$

Zusammen ergibt sich damit der Ausdruck [PT74]

$$\left[ -\dot{M}_0 L_z + 2\pi\sqrt{-g} W_{\phi}^r \right]_{|r} = -4\pi\sqrt{-g} L_z F \quad (3.1.52)$$

### Energieerhaltung

Komplett analog zur Drehimpulserhaltung kann man auch die Energieerhaltung

$$\nabla \mathbf{E} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} := -\mathbf{T} \cdot \partial_t \quad (3.1.53)$$

benutzen und erhält schließlich [PT74]

$$\left[ \dot{M}_0 E + 2\pi\sqrt{-g} W_t^r \right]_{|r} = 4\pi\sqrt{-g} F E \quad (3.1.54)$$

Gleichungen (3.1.52) und (3.1.54) lassen sich kombinieren, wenn man die Orthogonalitätsrelation  $u^{\alpha} t_{\alpha}^{\beta} = 0$ , die dazu führt, dass auch  $u^{\alpha} W_{\alpha}^{\beta} = 0$  gilt, ausnutzt. Damit ergibt sich [PT74]

$$W_t^r = -\frac{u^{\phi}}{u^t} W_{\phi}^r = -\omega W_{\phi}^r \quad (3.1.55)$$

und folglich

$$\left[ \dot{M}_0 L_z - 2\pi\sqrt{-g} W_{\phi}^r \right]_{|r} = 4\pi\sqrt{-g} L_z F \quad (3.1.56a)$$

$$\left[ \dot{M}_0 E - 2\pi\sqrt{-g}\omega W_{\phi}^r \right]_{|r} = 4\pi\sqrt{-g} F E \quad (3.1.56b)$$

Page und Thorne [PT74] führen noch zwei Hilfsfunktionen

$$f := 4\pi\sqrt{-g}\frac{F}{M_0} \quad \text{und} \quad w := 2\pi\sqrt{-g}\frac{W_\phi^r}{M_0} \quad (3.1.57)$$

ein, womit (3.1.56) kompakter wird

$$[L_z - w]_{|r} = fL_z \quad , \quad (3.1.58a)$$

$$[E - \omega w]_{|r} = fE \quad . \quad (3.1.58b)$$

Nun kann man (3.1.58a) mit  $\omega$  multiplizieren, die beiden Gleichungen voneinander abziehen und Gleichung (3.1.37) einsetzen [PT74]

$$w\omega_{|r} = f(L_z\omega - E) \quad . \quad (3.1.59)$$

Dieser Ausdruck lässt sich nach  $w$  auflösen und in (3.1.58a) einsetzen. Damit ergibt sich eine Differentialgleichung für  $f$  [PT74]

$$\left[ L_z - \frac{f(L_z\omega - E)}{\omega_{|r}} \right]_{|r} = fL_z \quad . \quad (3.1.60)$$

Diese Differentialgleichung wird durch

$$f = \frac{\omega_{|r}}{(\omega L_z - E)^2} \left[ \int (\omega L_z - E) L_{z|r} dr + \text{const} \right] \quad (3.1.61)$$

gelöst [PT74]. Die zusätzliche Annahme, dass innerhalb des letzten stabilen Orbits Materie direkt in das Schwarze Loch fällt, führt nach Page und Thorne [PT74] dazu, dass kein Drehmoment  $W_\phi^r$  von dieser Region auf die Scheibe ausgeübt wird. Das heißt aber auch, dass  $w$  in dieser Region verschwindet. Diese Annahme lässt sich erfüllen, wenn die Konstante in (3.1.61) entsprechend gewählt wird

$$f = \frac{\omega_{|r}}{(\omega L_z - E)^2} \int_{r_{\text{ms}}}^r (\omega L_z - E) L_{z|r} dr \quad . \quad (3.1.62)$$

Zusammen mit Gleichung (3.1.57) hat man also die Möglichkeit den Fluss  $F$  zu berechnen, der in Kapitel 3.2 verwendet wird, um Akkretionsscheiben darzustellen.

## 3.2 Raytracing in der modifizierten Kerr-Metrik

Zum Vergleich von ART und dem pk-ART Modell für die Kerr-Metrik dienen zwei verschiedene Szenarien. Zum einen das Emissionslinienprofil der Eisen-K $\alpha$ -Linie (siehe Kapitel 3.1.3) und zum anderen Akkretionsscheiben nach dem (modifizierten) Modell von Page und Thorne [PT74].

Für den Fall der klassischen ART ist der innere Rand der jeweils betrachteten Scheibe durch den letzten stabilen Orbit, Gleichung (2.1.23), gegeben. Für den Fall der modifizierten Kerr-Metrik für  $B = (64/27)m^3$  wurde, solange der Spinparameter  $a < 0.416m$  ist, ebenfalls der letzte stabile Orbit verwendet. Für größere Werte des Spinparameters gibt es keinen letzten stabilen Orbit mehr, siehe Kapitel 2.2 und der innere Rand der Scheibe wurde knapp über  $r = (4/3)m$  festgesetzt. An diesem Radius werden die Bestimmungsgleichungen für die Winkelgeschwindigkeit von Teilchen auf Kreisgeodäten (2.2.1) imaginär. Das Gleiche gilt auch für die Zeitkomponente der Vierergeschwindigkeit  $u^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00} - 2\omega g_{03} - \omega^2 g_{33}}}$  von Teilchen auf (nicht notwendigerweise geodätischen) Kreisbahnen. In Tabelle 3.1 ist der Scheibeninnenrand für verschiedene Werte des Spinparameters  $a$  tabelliert.

Zusätzlich wird angenommen, dass sich das kompakte Zentralobjekt bis zu diesem Radius ausdehnt. Strahlung von diesem Objekt hingegen wird vollständig vernachlässigt. Das ist eine Näherung, die in zukünftigen Arbeiten behoben werden sollte. Die Simulationen

Tabelle 3.1: Werte für den Scheibeninnenrand  $r_{\text{in}}$  von Akkretionsscheiben in der veränderten Kerr-Metrik für den Parameter  $B = (64/27)m^3$ .

Spinparameter $a$ [m]	$r_{\text{in}}$ [m]
0.0	5.24392
0.1	4.82365
0.2	4.35976
0.3	3.81529
0.4	2.99911
0.5 und größer	1.334

wurden mit Hilfe des Programms GYOTO<sup>2</sup> [Vin+11] durchgeführt. Dazu wurden die oben beschriebenen Änderungen an der Metrik (1.3.1) im Vergleich zur Kerr-Metrik implementiert. Zusätzlich wurden die Änderungen am Scheibenmodell von Page und Thorne [PT74] eingebaut. Bilder von Akkretionsscheiben wurden mit Hilfe von DS9<sup>3</sup> erzeugt.

<sup>2</sup>Das Programm ist im Original auf <http://gyoto.obspm.fr/> frei verfügbar. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Version findet sich unter <https://github.com/schoenenbach/Gyoto>.

<sup>3</sup>DS9 ist ein Programm zur Darstellung von \*.fits-Dateien und unter <http://hea-www.harvard.edu/RD/ds9/site/Home.html> erhältlich.

### 3.2.1 Profile für die Eisen-K $\alpha$ -Emissionslinie

Wie in Kapitel 3.1.3 beschrieben, dient das Emissionslinienprofil der Eisen-K $\alpha$ -Linie als Observable von Regionen starker Gravitation. Für die folgenden Simulationen wurde der Parameter in Gleichung (3.1.26) auf  $p = 3$  gesetzt. Dieser Wert wurde durch Scheibenmodelle von Shakura und Sunyaev [SS73] nahegelegt und wird üblicherweise in der Literatur verwendet. Falls nicht anders angegeben beträgt der Inklinationswinkel  $40^\circ$ . Die Ruheenergie der Strahlung im Emitter-System  $E_0$  wird im Folgenden auf die Ruheenergie der Eisen-K $\alpha$ -Linie (6,4 keV) festgesetzt. Der äußere Rand der Scheibe liegt bei  $r_{\text{out}} = 100m$ , der innere Rand der Scheibe ist in der klassischen ART durch den letzten stabilen Orbit (2.1.23) und in der modifizierten Kerr-Metrik durch die Werte in Tabelle 3.1 gegeben. Der Fluss ist in beliebigen Einheiten angegeben. Vorrangig geht es um einen Vergleich der Form der Linien in der klassischen ART und der modifizierten Kerr-Metrik.

In Abbildung 3.1 wird der Einfluss des Spinparameters  $a$  in der klassischen ART und der modifizierten Kerr-Metrik separat verglichen. In beiden Szenarien lässt sich die charakteristische Verbreiterung der Emissionslinie erkennen. Dazu zählt neben dem scharfen Peak bei hohen Frequenzen auch der lange, ausgedehnte und rotverschobene Flügel des Spektrums. Der Gesamtfluss steigt mit wachsendem Spinparameter  $a$ . Gleiches gilt für den rotverschobenen Flügel. Dieser ist allerdings in der modifizierten Metrik stärker ausgeprägt, als in der klassischen Kerr-Metrik. Insgesamt ist das Verhalten in beiden gezeigten Metriken aber recht ähnlich.

Ein näherer Vergleich zwischen den beiden verwendeten Metriken findet sich in Abbildung 3.2. Für kleine Werte des Spinparameters  $a$ , also im Schwarzschildlimit, sind die Unterschiede zwischen den beiden betrachteten Metriken sehr gering. Für zunehmende Rotation des Zentralobjekts, also wachsende Werte von  $a$ , nimmt der Unterschied zwischen den beiden Szenarien zu. Der rotverschobene Flügel des Spektrums ist für das pk-ART Modell stärker ausgeprägt. Der blauverschobene Gipfel bleibt jedoch weitestgehend gleich.

Vergleicht man beide Modelle für unterschiedliche Werte von  $a$ , so wie in Abbildung 3.3 geschehen, lässt sich für bestimmte Parameterwerte fast kein Unterschied zwischen den beiden Metriken feststellen. Eine Unterscheidung zwischen den verwendeten Modellen kann nur gelingen, wenn mehrere unabhängige Messungen für die verschiedenen Parameter, wie zum Beispiel  $a$ , zur Verfügung stehen.

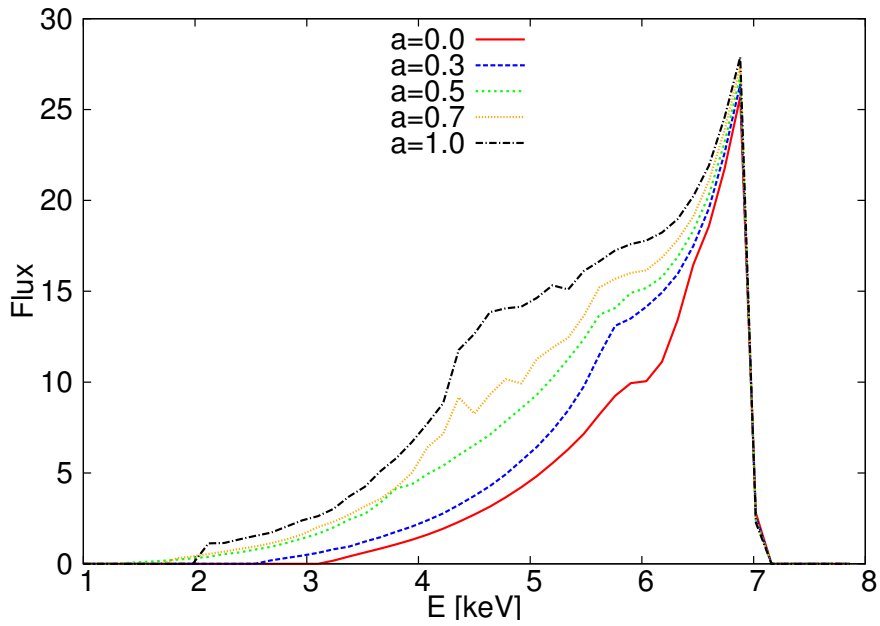
Um das Verhalten der Linienspektren in den Abbildungen 3.1, 3.2 und 3.3 besser verstehen zu können, wird der Frequenzverschiebungsparameter<sup>4</sup>  $g$  genauer betrachtet. Er lässt sich als

$$g = \frac{1}{u_{\text{em}}^0 (1 - \omega\lambda)} \quad (3.2.1)$$

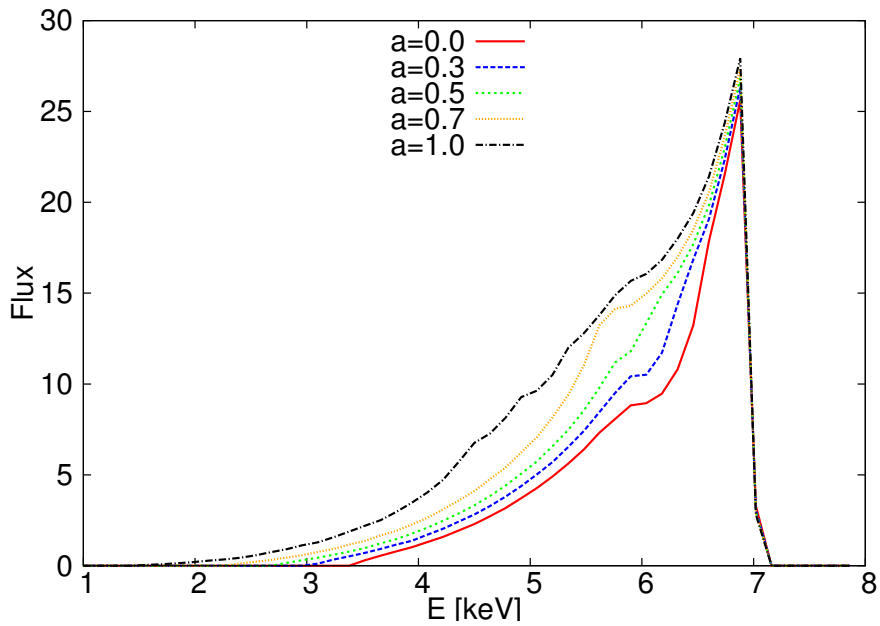
schreiben [Fan+97], wobei  $u_{\text{em}}^0 = \frac{1}{\sqrt{-g_{00} - 2\omega g_{03} - \omega^2 g_{33}}}$  die Zeitkomponente der Emitter-Vierergeschwindigkeit,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Emitters und  $\lambda$  das Verhältnis

<sup>4</sup>In der Literatur wird  $g$  meistens als Rotverschiebungsparameter (“redshift”) bezeichnet, obwohl  $g$  auch Blauverschiebungseffekte beinhaltet. Hier werden die Begriffe synonym verwendet.



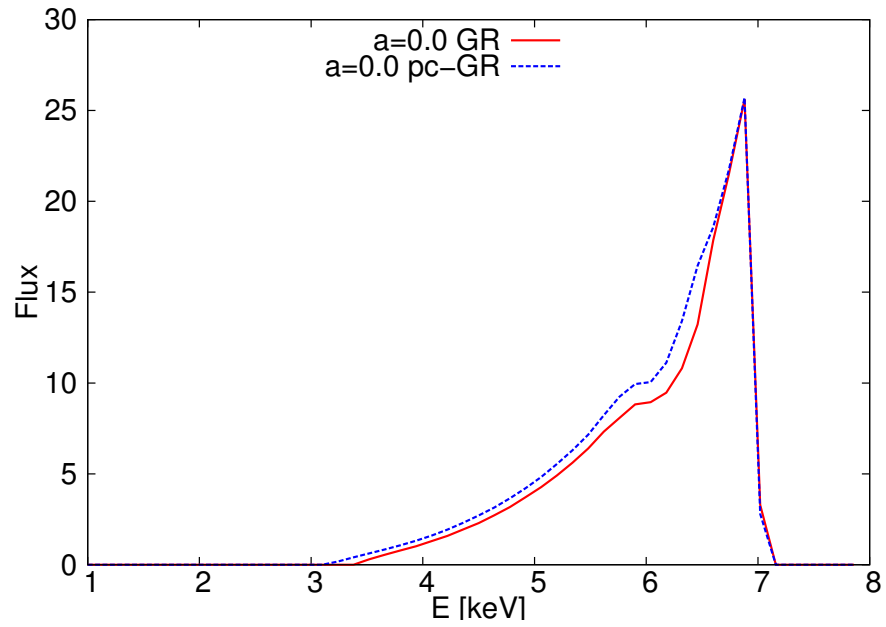


(a) modifizierte Kerr-Metrik

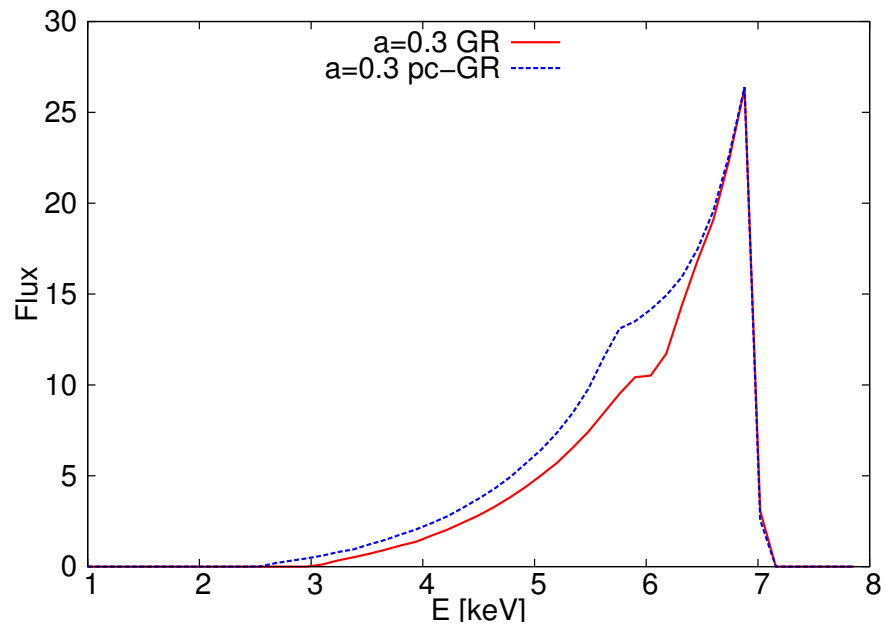


(b) klassische Kerr-Metrik

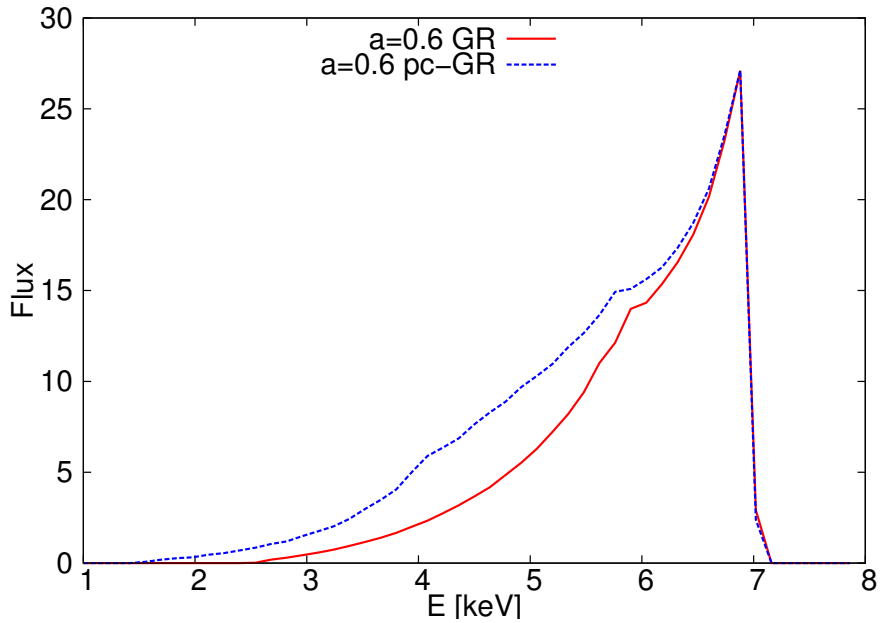
Abbildung 3.1: Verschiedene Linienspektren für unterschiedliche Werte des Spinparameters  $a$ . Die Parameter für die Plots sind  $r_{\text{out}} = 100m$  für den äußeren Rand der Scheibe,  $\theta = 40^\circ$  für den Inklinationwinkel und  $p = 3$  für den Emissivitätsindex. Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].



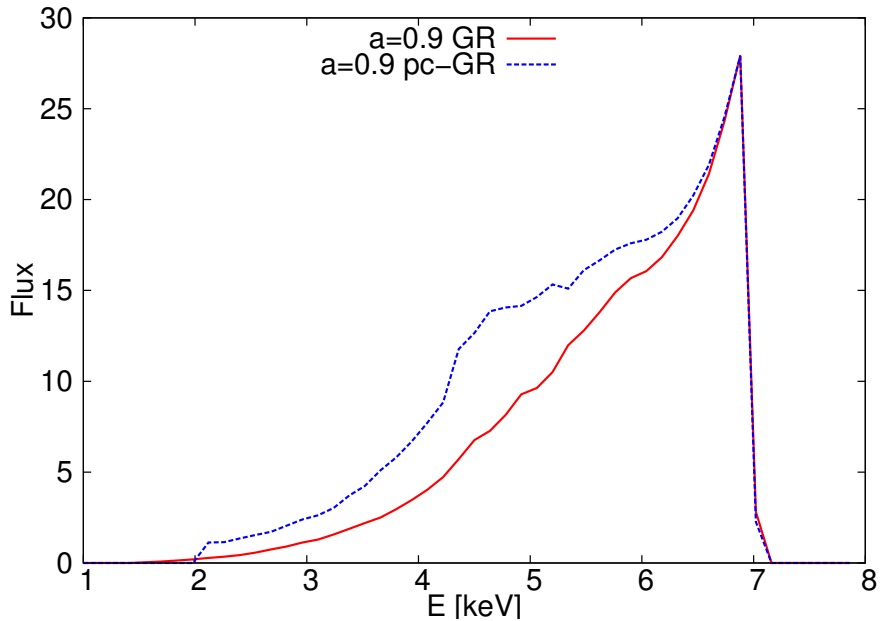
(a)  $a = 0.0m$



(b)  $a = 0.3m$



(c)  $a = 0.6m$



(d)  $a = 0.9m$

Abbildung 3.2: Vergleich zwischen klassischer und modifizierter Kerr-Metrik. Die Parameter für die Plots sind  $r_{\text{out}} = 100m$  für den äußeren Rand der Scheibe,  $\theta = 40^\circ$  für den Inklinationwinkel und  $p = 3$  für den Emissivitätsindex. Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].

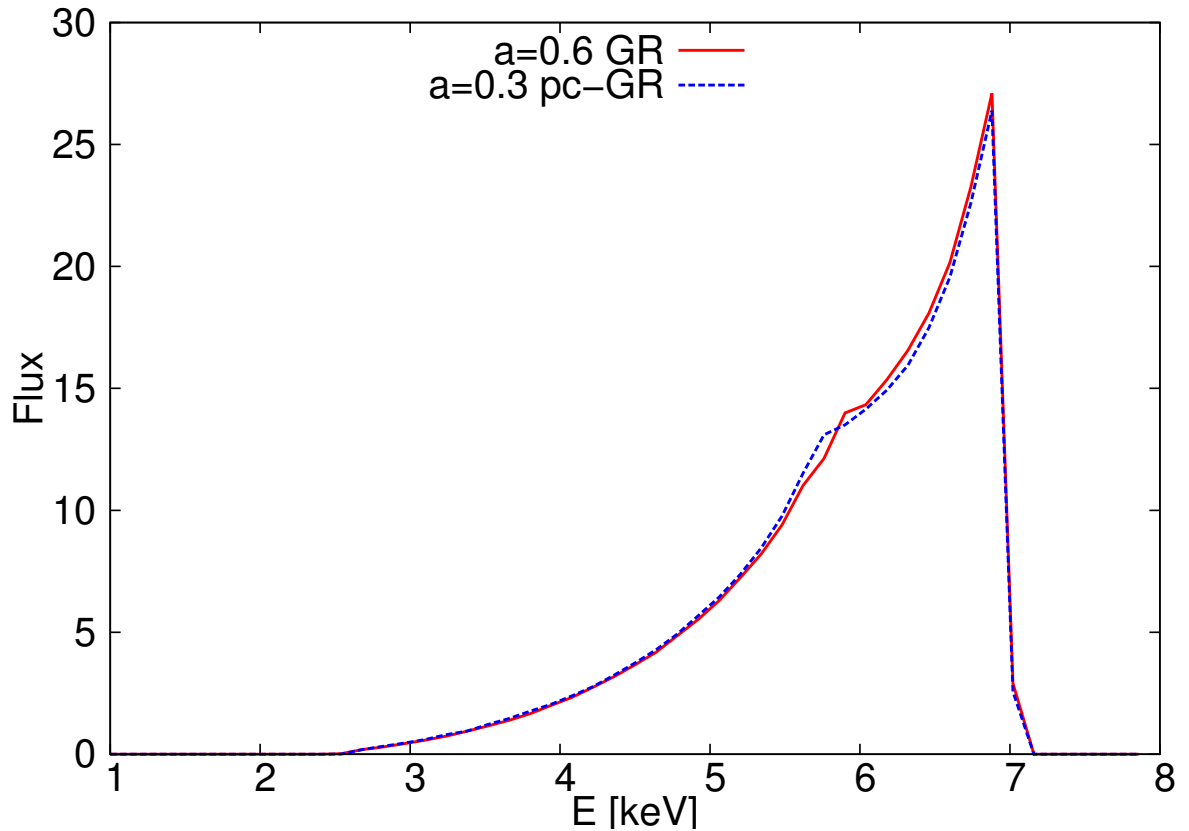


Abbildung 3.3: Vergleich der beiden Metriken für unterschiedliche Werte des Spinparameters  $a$ . Die Parameter für die Plots sind  $r_{\text{out}} = 100m$  für den äußeren Rand der Scheibe,  $\theta = 40^\circ$  für den Inklinationwinkel und  $p = 3$  für den Emissivitätsindex. Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].

aus Photonendrehimpuls und -energie ist. Cisneros u. a. [Cis+12] haben einen Ausdruck für die Rotverschiebung von Photonen abgeleitet, die direkt in Richtung (oder direkt entgegen) der Bewegung des Emitters abgestrahlt werden. Für das Verhältnis von Photonendrehimpuls und -energie ergibt sich

$$\lambda_{\text{Cis}} = \frac{-g_{03}}{g_{00}} - \sqrt{\frac{g_{03}^2 - g_{00}g_{33}}{g_{00}^2}} . \quad (3.2.2)$$

Mit diesem Ausdruck kann man die Rotverschiebung, gesehen von einem Inklinationwinkel  $\theta_{\text{obs}}$ , annähern

$$g \approx \frac{1}{u_{\text{em}}^0 (1 - \omega \lambda_{\text{Cis}} \sin \theta_{\text{obs}})} . \quad (3.2.3)$$

Damit ergibt sich eine Abschätzung für die maximale Blauverschiebung von Photonen, die von den Teilchen in einer Akkretionsscheibe emittiert werden, die sich auf den Beobachter zubewegen. Abbildung 3.4 zeigt den Verlauf von Gleichung (3.2.3) für unterschiedliche Werte des Spinparameters  $a$ .

Um die Frequenzverschiebung komplett zu erfassen, muss man im Allgemeinen den Emissionswinkel der Photonen, beziehungsweise gleichbedeutend das Verhältnis aus Photonendrehimpuls und -energie an jedem Punkt der Scheibe kennen. Mittels Raytracing ist es möglich genau diese Information zu erhalten, da hier numerisch die gesamte von einem Photon zurückgelegte Nullgeodäte bestimmt wird. Abbildung 3.5 zeigt die mit GYOTO berechnete Rotverschiebung.

Verschiedene Phänomene lassen sich in den Abbildungen 3.4 und 3.5 erkennen. Zunächst sieht man in Abbildung 3.4, dass die maximale Blauverschiebung in den beiden betrachteten Metriken für die verwendeten Parameter fast identisch ist. Dieses Verhalten kann erklären, dass in Abbildungen 3.2 und 3.3 der Peak bei hohen Frequenzen für beide Metriken identisch ist. In Abbildung 3.5 ist der blauverschobene Teil der Scheibe ebenfalls sehr ähnlich zwischen den verschiedenen Metriken. Zusätzlich sieht man die Ähnlichkeit der beiden verwendeten Metriken in Abbildungen 3.5b und 3.5c für unterschiedliche Werte des Spinparameters  $a$ , wie man sie auch in Abbildung 3.2 sehen kann. Da sich die Scheiben in der modifizierten Kerr-Metrik zu kleineren Radien erstrecken, ist erkennbar, dass es hier einen Bereich gibt, in dem Photonen rotverschoben werden, obwohl sich die Emitter auf den Beobachter zubewegen, siehe Abbildung 3.5d. Dies kann eine Erklärung für den erhöhten Fluss im rotverschobenen Flügel in der modifizierten Kerr-Metrik im Vergleich zur klassischen Kerr-Metrik sein.

### 3.2.2 Modifiziertes Scheibenmodell nach Page und Thorne

In dem modifizierten Modell lässt sich Gleichung (3.1.62), die den Energiefluss aus einer Scheibe nach dem Modell von Page und Thorne [PT74] beschreibt, nicht immer anwenden. In [Sch+13] wurde gezeigt, dass es für bestimmte Werte des Spinparameters  $a$  keinen letzten stabilen Orbit mehr gibt. Gleichzeitig hat die Winkelgeschwindigkeit von Teilchen auf Kreisgeodäten ein Maximum (bei  $r_{\omega_{\text{max}}} \approx 1.72m$ , unabhängig von  $a$ ), siehe Gleichung

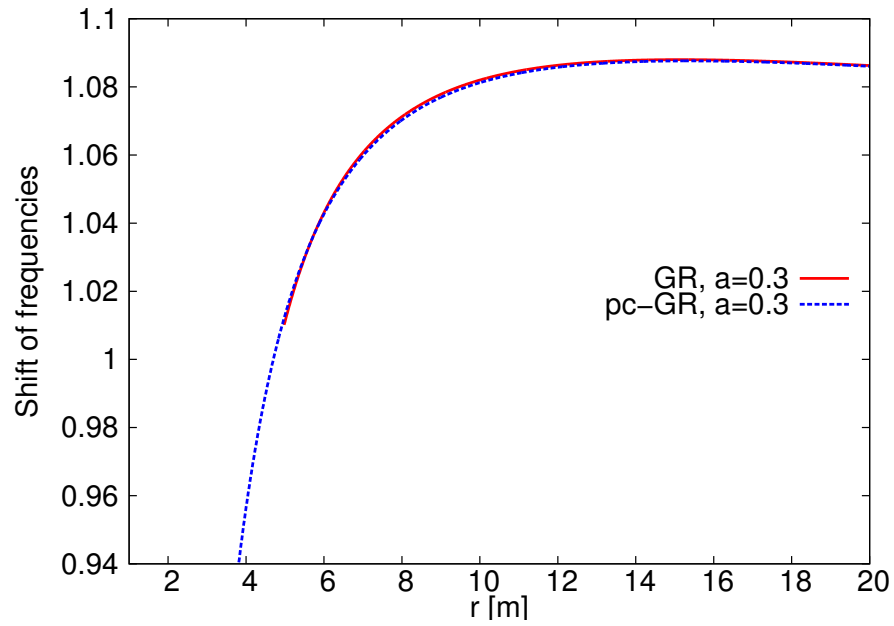
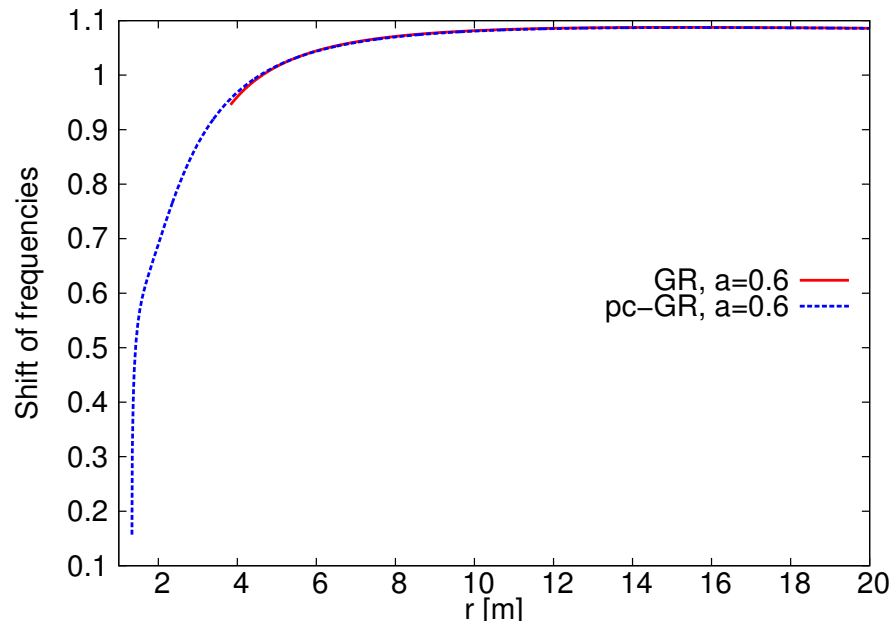
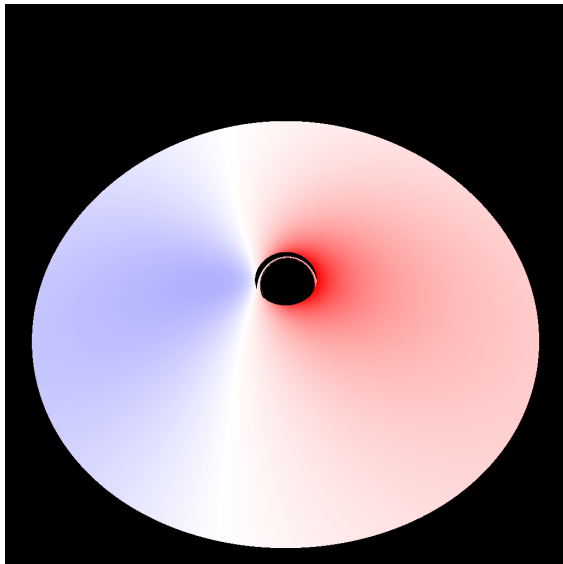
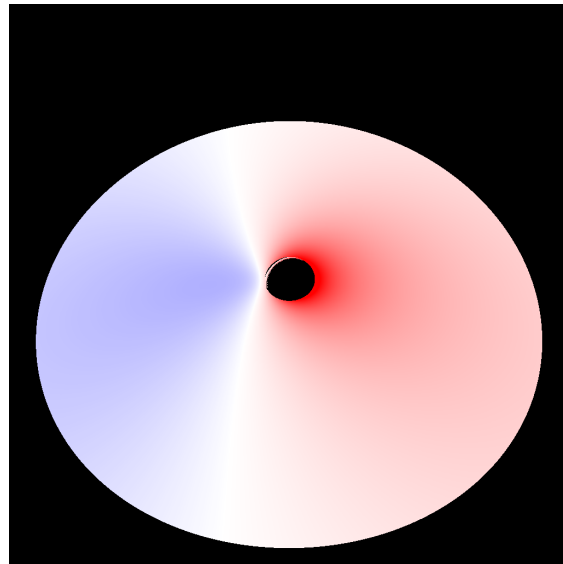
(a)  $a = 0.3m$ (b)  $a = 0.6m$ 

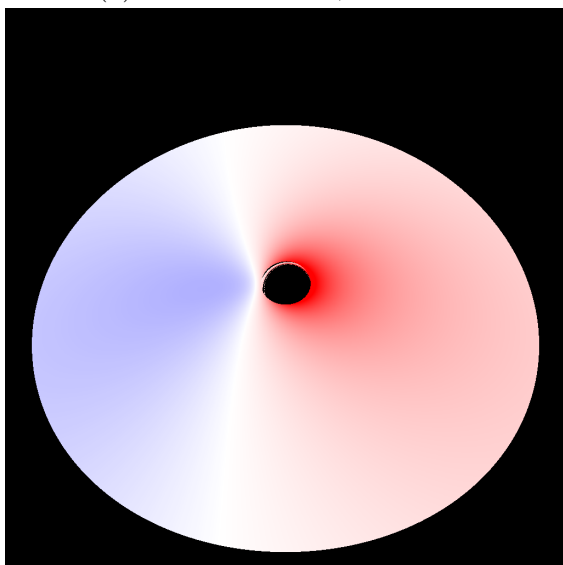
Abbildung 3.4: Frequenzverschiebung als Funktion des Radius. Gezeigt ist die in Gleichung (3.2.3) angegebene Näherung für sich auf den Beobachter zubewegende Emitter. Der Inklinationwinkel beträgt  $\theta = 40^\circ$ . Werte größer als 1 entsprechen einer Blauverschiebung. Die Kurven beschreiben die Frequenzverschiebung von Photonen, die parallel zur Bewegungsrichtung der Emitter abgestrahlt werden. Hier tritt die höchste Blauverschiebung auf. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].



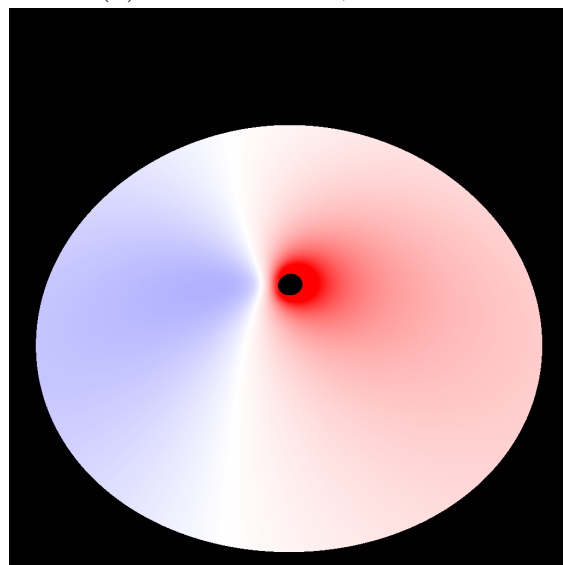
(a) klassische ART,  $a = 0.3m$



(b) klassische ART,  $a = 0.6m$



(c) pk-ART,  $a = 0.3m$



(d) pk-ART  $a = 0.6m$

Abbildung 3.5: Rotverschiebung einer dünnen Akkretionsscheibe. Die Inklination beträgt  $40^\circ$ . Der äußere Rand der Scheibe ist bei  $r_{\text{out}} = 50m$ . Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Die Ähnlichkeit zwischen der klassischen und der modifizierten Kerr-Metrik in den Abbildungen 3.5b und 3.5c kann man auch in Abbildung 3.3 sehen. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].

(2.2.5). Das heißt allerdings auch, dass  $\omega|_r$  in Gleichung (3.1.62) einem Vorzeichenwechsel unterliegt. Entsprechendes gilt für den Fluss der Strahlung, was physikalisch nicht sinnvoll ist.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu beheben, ist es eine zusätzliche Annahme über den Energie- und Drehimpulstransport innerhalb der Scheibe zu treffen. Geht man davon aus, dass Energie und Drehimpuls von schneller rotierenden zu langsamer rotierenden Teilen der Scheibe transportiert werden, muss man die Integrationsgrenzen in Gleichung (3.1.62) anpassen

$$f = \frac{\omega|_r}{(\omega L_z - E)^2} \int_{r_{\omega_{\max}}}^r (\omega L_z - E) L_z|_r dr \quad . \quad (3.2.4)$$

Energie und Drehimpuls werden hier ausgehend von dem Ort, an dem sich die Teilchen am schnellsten bewegen –  $r_{\omega_{\max}}$  –, zum jeweiligen Ort transportiert, an dem man den Fluss berechnen will. Im Raumbereich, in dem  $\omega|_r$  im Vergleich zur klassischen ART sein Vorzeichen wechselt, wechselt das Integral ebenfalls das Vorzeichen, da  $r < r_{\omega_{\max}}$  ist. Insgesamt bleibt das Vorzeichen des Flusses weiterhin positiv. Durch diese Wahl der Integrationsgrenzen wird die Integrationskonstante in (3.1.61) so festgelegt, dass bei  $r = r_{\omega_{\max}}$  keinerlei Drehmoment in der Scheibe wirkt und an diesem Ort auch der Fluss verschwindet, so wie es klassisch am letzten stabilen Orbit geschieht [PT74].

Gleichung (3.1.62) ist unter Verwendung der klassischen Kerr-Metrik noch analytisch lösbar [PT74]. Allerdings ist dies für Gleichung (3.2.4) bisher nicht gelungen, wenn man die modifizierte Metrik (1.3.1) verwendet. Numerisch lässt sich der Fluss aber weiterhin berechnen.

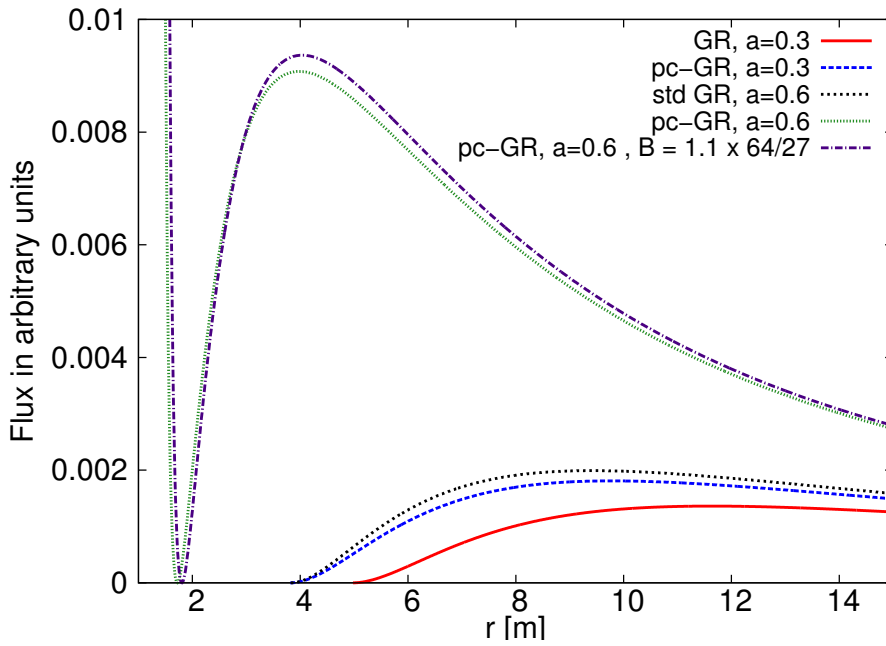
In Abbildung 3.6 ist die Flussfunktion  $f$  aus Gleichungen (3.1.62) und (3.2.4) für verschiedene Parameter dargestellt.

### Teilchen auf Geodäten – Energie und Drehimpuls

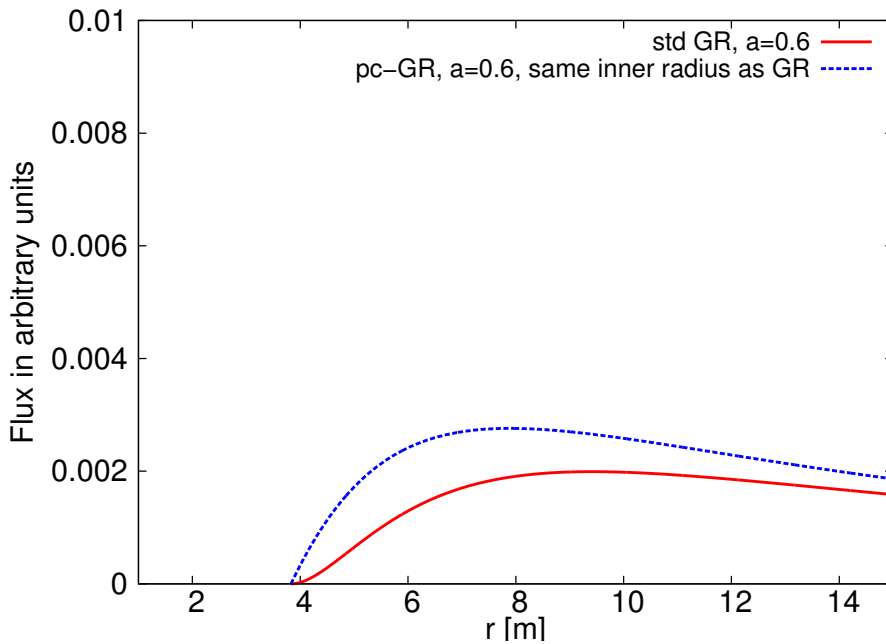
An dieser Stelle lohnt sich ein Blick auf die Energie und den Drehimpuls von Teilchen auf äquatorialen Kreisgeodäten. In Gleichung (2.1.19) sind Energie und Drehimpuls für Teilchen auf äquatorialen Kreisgeodäten in Abhängigkeit der Metrikfunktion für eine Metrik mit den Symmetrien der Kerr-Metrik gegeben. In Abbildung 3.7 ist die radiale Abhängigkeit dieser Energie gezeigt.

Zwei Phänomene lassen sich hier beobachten. Zum Ersten erreichen Teilchen in der modifizierten Metrik deutlich niedrigere Energien, als in der klassischen Kerr-Metrik. Zum Zweiten hören die Plots am letzten stabilen Orbit, sofern denn einer existiert, auf. An dieser Stelle haben Energie und Drehimpuls jeweils ein Extremum [PT74; LPT75]. In Abbildung 3.8 ist der Drehimpuls von Teilchen auf Kreisgeodäten in der Äquatorebene dargestellt. Für den Fall, dass es auch in der modifizierten Metrik einen letzten stabilen Orbit gibt, ist das Verhalten analog zur Energie in Abbildung 3.7. Für den Fall, dass kein letzter stabiler Orbit vorliegt, hat der Drehimpuls in der modifizierten Kerr-Metrik allerdings einen Nulldurchgang. An dieser Stelle haben die Teilchen auch gerade die Winkelgeschwindigkeit des „Zero Angular Momentum Observers“, der dadurch definiert ist, keinen Drehimpuls zu tragen. Das ist insofern verwunderlich, da hier Teilchen eine





(a) Flussfunktion  $f$  für verschiedene Werte des Spinparameters  $a$ . Der innere Radius entspricht in der klassischen ART dem ISCO, für den pk-ART Fall siehe Tabelle 3.1.



(b) Flussfunktion  $f$  für  $a = 0$ . Der innere Radius entspricht hier dem ISCO der klassischen Kerr-Metrik, auch für den pk-ART Fall.

Abbildung 3.6: Flussfunktion  $f$  aus Gleichungen (3.1.62) und (3.2.4). Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].

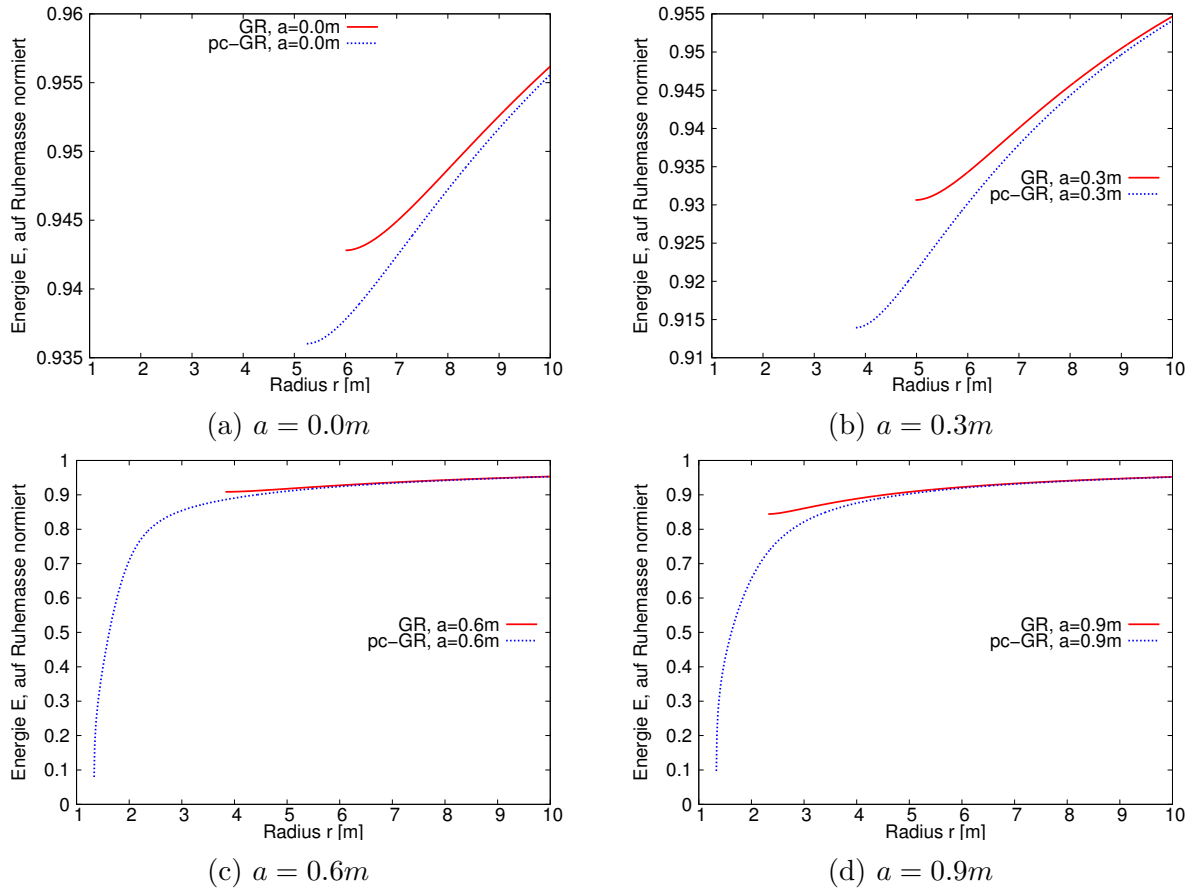


Abbildung 3.7: Energie von Teilchen auf Kreisgeodäten in der Äquatorebene. Die durchgezogene rote Kurve beschreibt jeweils die klassische Kerr-Metrik, die gepunktete blaue Kurve die modifizierte Kerr-Metrik für  $B = (64/27)m^3$ . Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].

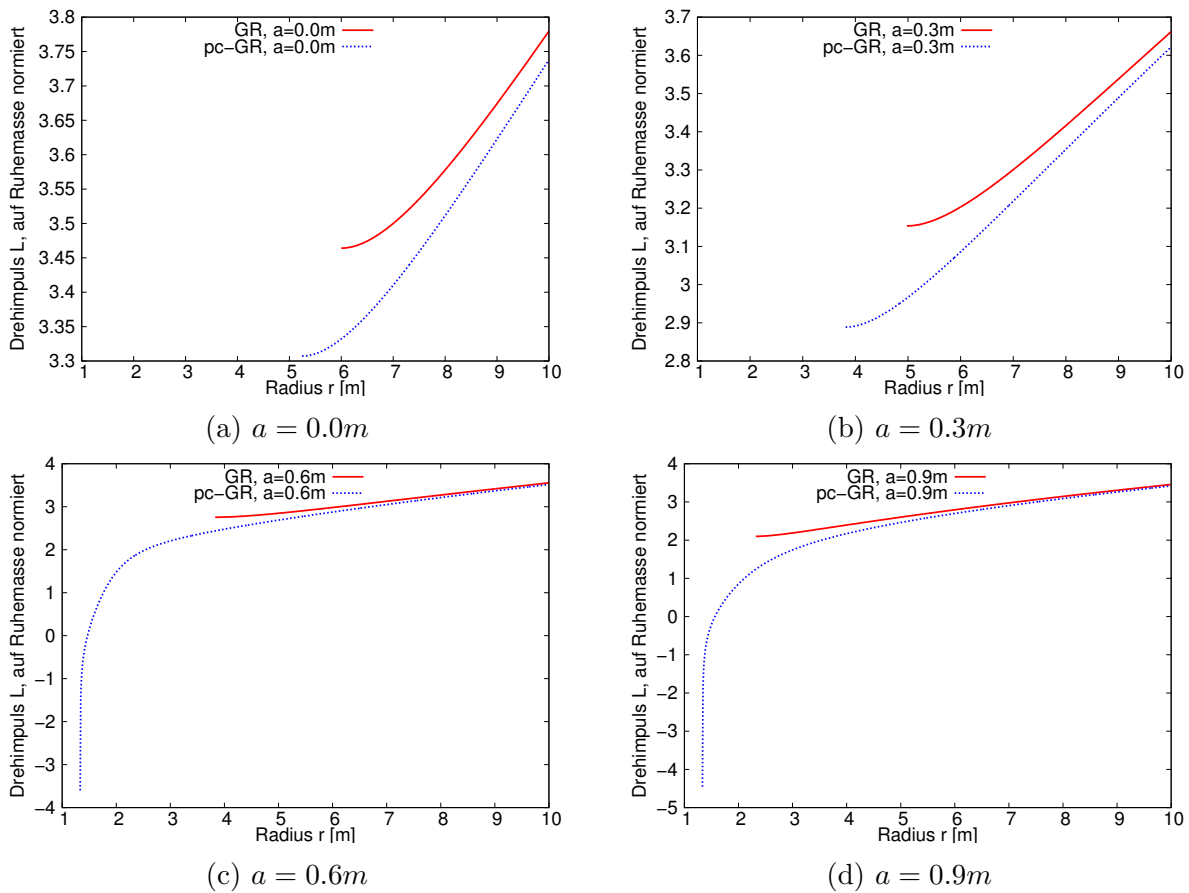


Abbildung 3.8: Drehimpuls von Teilchen auf Kreisgeodäten in der Äquatorebene. Die durchgezogene rote Kurve beschreibt jeweils die klassische Kerr-Metrik, die gepunktete blaue Kurve die modifizierte Kerr-Metrik für  $B = (64/27)m^3$ .

prograde Bewegung um das Zentralobjekt durchführen, aber einen negativen Drehimpuls tragen. Das kann ein Hinweis darauf sein, dass das untere Limit für die Größe des Zentralobjekts,  $r = (4/3)m$ , zu klein ist, und sich das Objekt auf größere Radien erstreckt.

Bewegen sich Teilchen durch Stöße auf Kreisbahnen mit kleinerem Radius, werden entsprechend potentielle Energie und Drehimpuls frei. Diese werden nach dem Modell von Page und Thorne [PT74] durch Scherkräfte innerhalb der Scheibe weiter transportiert und über Strahlung schließlich aus der Scheibe abgegeben.

### Scheibenbilder

Abbildung 3.9 zeigt Simulationen von geometrisch dünnen, optisch dicken und unendlich ausgedehnten Akkretionsscheiben nach dem Modell von Page und Thorne [PT74]. Den Abbildungen 3.9a, 3.9c, 3.9e und 3.9g liegt die Kerr-Metrik zugrunde, wohingegen für die Abbildungen 3.9b, 3.9d, 3.9f und 3.9h die modifizierte Metrik (1.3.1) mit dem Wert  $B = (64/27)m^3$  verwendet wurde. Dargestellt ist jeweils die bolometrische Intensität  $I$  [erg cm<sup>-2</sup>s<sup>-1</sup>ster<sup>-1</sup>]. Sie ergibt sich aus dem Fluss  $F$  über  $I = \frac{1}{\pi}F$  [Vin+11]. Der Fluss wiederum ergibt sich aus den Gleichungen (3.1.57) und (3.1.62) zusammen mit der Wahl  $\dot{M}_0 = 1$  [Vin+11].

Um Unterschiede zwischen den beiden Metriken besser vergleichen zu können, wurde die Skala in beiden Abbildungen für jeden Wert des Spinparameters  $a$  verschieden gewählt. Die Abbildungen 3.9a - 3.9d verwenden eine lineare Skalierung, die restlichen jeweils eine logarithmische. Auch sind die Skalenbereiche jeweils unterschiedlich für verschiedene Werte des Spinparameters  $a$ , sodass ein direkter Vergleich nur zwischen Simulationen für einen jeweils gleichen Wert des Spinparameters  $a$  gemacht werden können.

Das Verhalten ist in dem ART und pk-ART Modell weitestgehend gleich. Der auffälligste Unterschied ist die erhöhte Helligkeit der Scheiben in der modifizierten Kerr-Metrik. Dieses Phänomen lässt sich dadurch erklären, dass Teilchen in der modifizierten Metrik deutlich niedrigere Energien im Gravitationspotential erreichen, als in der klassischen Kerr-Metrik, siehe Kapitel 3.2.2.

Zunächst verwunderlich mag es allerdings erscheinen, dass die Scheiben nicht nur im Innenbereich – für Radien kleiner als  $5m$  –, sondern auch weiter außen in der modifizierten Metrik deutlich heller sind, als in der klassischen Kerr-Metrik. Das gleiche Phänomen lässt sich in Abbildung 3.6 erkennen; der Fluss ist hier auch für Radien größer als  $10m$  signifikant erhöht im Gegensatz zur klassischen ART, obwohl die Unterschiede in der Metrik hier bereits sehr gering werden. Erklärbar ist dieses Verhalten dadurch, dass der Fluss in Gleichung (3.2.4) – an einem beliebigen Ort  $r$  betrachtet – über das Integral von allen Radien zwischen  $r_{\omega_{\max}}$  und  $r$  abhängt. Das heißt, dass der Fluss auch bei größeren Radien vom Verhalten der Energie und des Drehimpulses bei relativ geringen Abständen abhängt. Dadurch hängt der Fluss aber auch stark von der Wahl der inneren Grenze der Scheibe ab, da sich Energie und Drehimpuls der Teilchen auf Kreisbahnen in den Gleichungen (2.1.19) für kleine Radien stark ändern, siehe Abbildungen 3.7 und 3.8.

Um den Einfluss der Wahl des inneren Scheibenrandes abschätzen zu können, wurde in

Abbildung 3.6b ein Vergleich der Flussfunktion  $f$  zwischen den beiden Metriken erstellt. Der innere Rand der Scheibe ist hier auf den letzten stabilen Orbit in der klassischen Kerr-Metrik gesetzt. Der Unterschied zwischen den beiden Kurven ist nicht mehr so deutlich ausgeprägt wie in Abbildung 3.6a, wo die Kurve in der modifizierten Kerr-Metrik bei  $r = 1.334m$  anfängt. Allerdings ist der Unterschied zwischen beiden Modellen noch signifikant, auch für Radien größer als  $10m$ . Dies lässt sich dadurch erklären, dass der Unterschied in den Energien der Teilchen auch schon am klassischen ISCO signifikant ist. Betrachtet man Abbildung 3.7c, so ist der Unterschied in der Energie zwischen der klassischen ART und dem pk-ART Modell beim klassischen ISCO, dort, wo die Kurve in der ART beginnt, bereits relativ groß. Man muss hier beachten, dass die Differenzenergie zur Ruheenergie frei wird. Dadurch, dass der Fluss an einem beliebigen Radius auch von dem Verhalten der Energie bei kleineren Radien abhängt, ist auch hier ein Unterschied bei Radien größer als  $10m$  erkennbar, obwohl die Metriken in diesem Bereich nahezu identisch sind.

Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal bilden die Bilder höherer Ordnung im Inneren der Scheiben. GYOTO ist dazu in der Lage Nullgeodäten zu verfolgen, die einmal oder sogar mehrmals um das zentrale Objekt herum kreisen, bevor sie den Beobachter erreichen [Vin+11]. Diese so genannten Bilder höherer Ordnungen lassen sich im Inneren der Scheiben als Ringe erkennen. Abbildungen 3.9a-3.9e und 3.9g zeigen diese Bilder höherer Ordnung im Inneren. Die inneren Ringe in den Abbildungen 3.9f und 3.9h hingegen sind keine Bilder höherer Ordnung. Hier erstreckt sich die Scheibe komplett bis zum Rand des zentralen Objekts, sodass es keine Möglichkeit für Photonen gibt das zentrale Objekt zu umrunden (die Scheiben sind als unendlich ausgedehnt angenommen.) Der dunkle Ring in diesen Abbildungen kommt dadurch zu Stande, dass die Winkelgeschwindigkeit der Teilchen auf Kreisgeodäten ein Maximum bei  $r_{\omega_{\max}}$  aufweist und die Integration des Flusses nach Page und Thorne [PT74] angepasst wurde, siehe Gleichung 3.2.4, die anschließende Diskussion und Abbildung 3.6a. Dieses Verhalten spielt hier eine Rolle, da für die verwendeten Parameter in der modifizierten Metrik für  $a > 0.416m$  kein letzter stabiler Orbit mehr auftritt und sich die Scheiben so bis zum Rand des zentralen Objekts erstrecken können.

Physikalisch lässt sich dieses Verhalten dadurch verstehen, dass Drehimpuls und Energie durch Scherkräfte innerhalb der Scheibe transportiert werden. Betrachtet man die Erhaltungsgleichungen (3.1.58) und setzt die Lösung für die Flussfunktion  $f$  (3.1.62) ein, erhält man auch einen Ausdruck für  $w$ . Insgesamt kann man die Lösungen als

$$\begin{aligned} f &= \frac{-\omega|_r}{(E - \omega L_z)^2} \mathcal{I} \quad , \\ w &= \frac{E - \omega L_z}{-\omega|_r} f = \frac{1}{E - \omega L_z} \mathcal{I} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

schreiben, wobei  $\mathcal{I}$  gegeben ist durch

$$\mathcal{I} := \int_{r_{\omega_{\max}}}^r (E - \omega L_z) L_z|_r dr \quad . \quad (3.2.6)$$

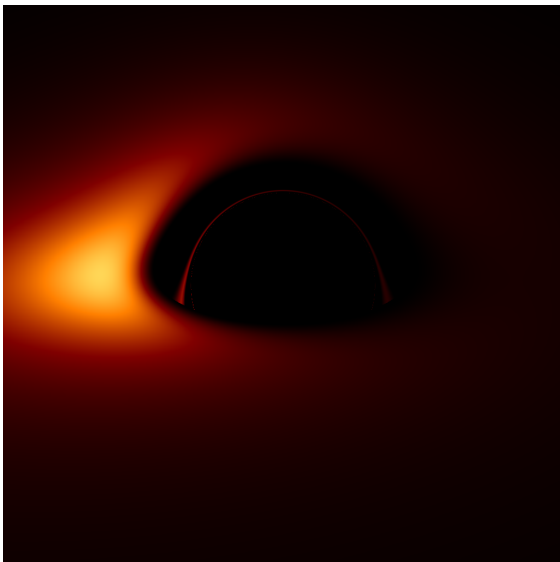
Nimmt man die Lösungen aus Gleichung (3.2.5) und setzt sie in die Drehimpulserhaltungsgleichung (3.1.58a) ein, ergibt sich

$$L_{z|r} - \left( \frac{\omega|_r L_z}{(E - \omega L_z)^2} \mathcal{I} + \underbrace{\frac{1}{E - \omega L_z} \mathcal{I}|_r}_{=L_{z|r}} \right) = f L_z \quad . \quad (3.2.7)$$

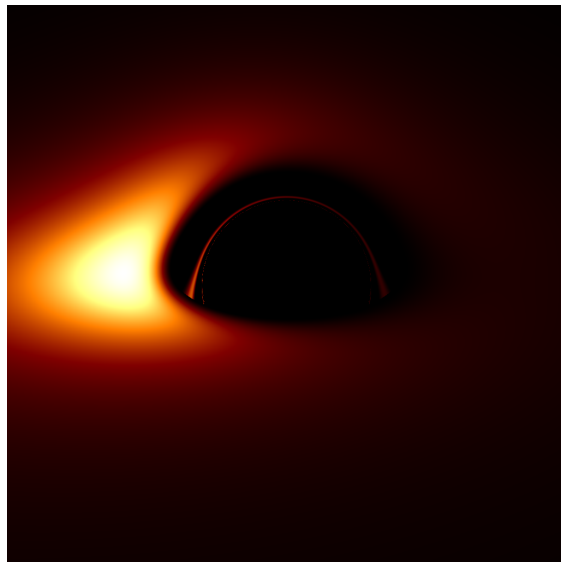
Diese Gleichung ist allein schon aus Konsistenzgründen erfüllt. Allerdings lässt sich mit ihrer Hilfe eine Anschauung für den Drehimpulstransport durch Scherkräfte gewinnen. Page und Thorne [PT74] beschreiben den ersten Teil als die Menge an Drehimpuls, die durch die Ruhemasse in der Scheibe getragen wird (die Gleichung hier ist auf  $\dot{M}_0$  normiert im Vergleich zu Gleichung (27) bei Page und Thorne [PT74]). Den zweiten Term – in Klammern – beschreiben sie als den Teil, der mechanisch über Drehmomente durch die Scherkräfte in der Scheibe transportiert wird. Der letzte Teil, auf der rechten Seite der Gleichung, wird als Drehimpuls angegeben, den die Strahlung aus der Scheibe trägt. Man kann auch eine Anschauung für die beiden Einzelterme in Klammern auf der linken Seite gewinnen. Der rechte Term entspricht gerade  $L_{z|r}$ . Durch das negative Vorzeichen kann man diesen Term so deuten, dass durch Scherkräfte der *gesamte* an dem Ort  $r$  durch  $L_{z|r}$  frei werdende Drehimpuls *weg transportiert* wird. Gleichzeitig sorgt aber der andere Term in der Klammer dafür, dass – auch wieder durch Scherkräfte – Drehimpuls *hin transportiert* wird. Dieser Drehimpuls wird durch die Strahlung abtransportiert. Für den Energietransport kann man mit Gleichung (3.1.58b) eine analoge Betrachtung durchführen. Mit der gerade getroffenen Interpretation für Gleichung (3.2.7) ist es möglich die Schlüsse zu ziehen, dass

1. der Fluss für Radien nahe am ISCO relativ klein sein muss. Hier wird zwar viel Energie (Drehimpuls) frei, diese wird aber auf alle größeren Radien umverteilt,
2. der Fluss vom ISCO ausgehend ansteigt und
3. der Fluss ein Maximum besitzt, weil die Menge an freiwerdender Energie (Drehimpuls) zu größeren Radien hin abnimmt und die Energie (der Drehimpuls) aus den Regionen weiter innen schon (teilweise) abgestrahlt und weiter außen weniger Energie (Drehimpuls) frei wird.

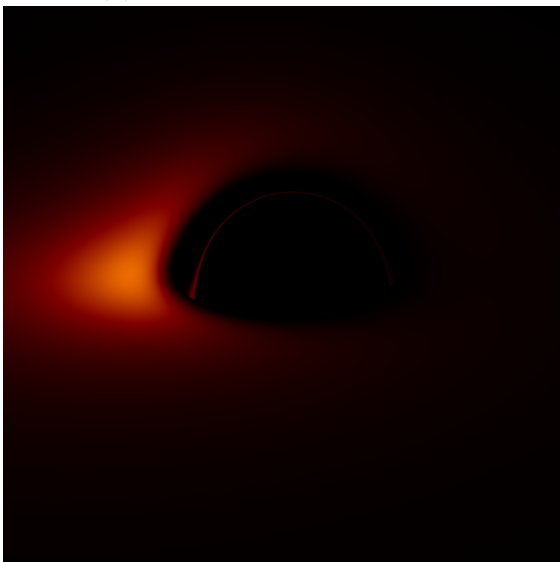
Das ist aber auch gerade das Verhalten, dass man in Abbildung 3.6 für die Flussfunktion  $f$  und auch in Abbildung 3.9 für die Verteilung des Flusses in einer Akkretionsscheibe sehen kann.



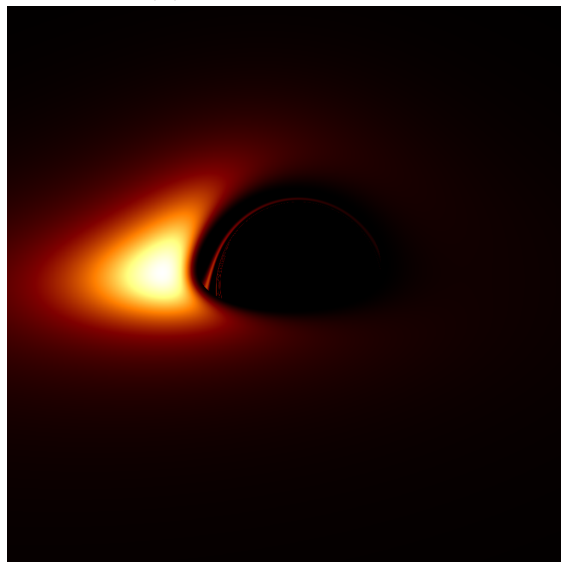
(a) klassische ART  $a = 0.0m$



(b) pk-ART  $a = 0.0m$



(c) klassische ART  $a = 0.3m$



(d) pk-ART  $a = 0.3m$

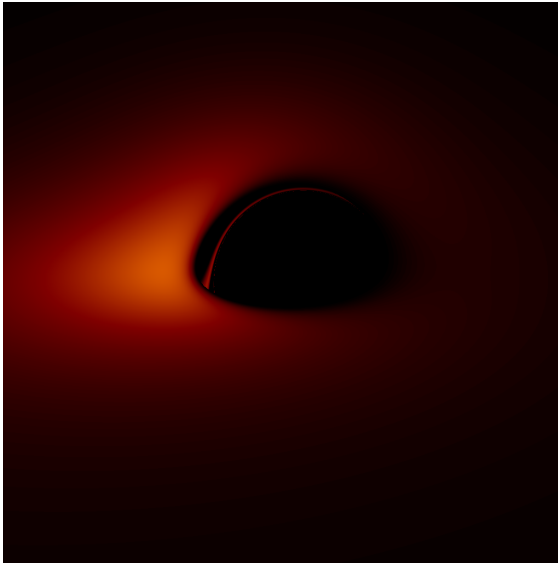
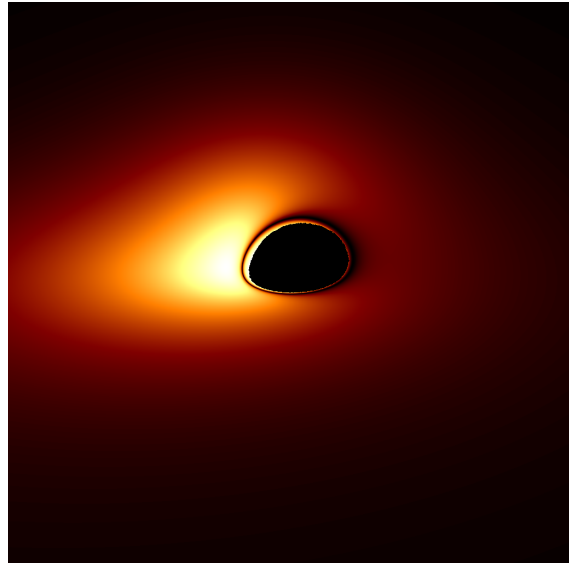
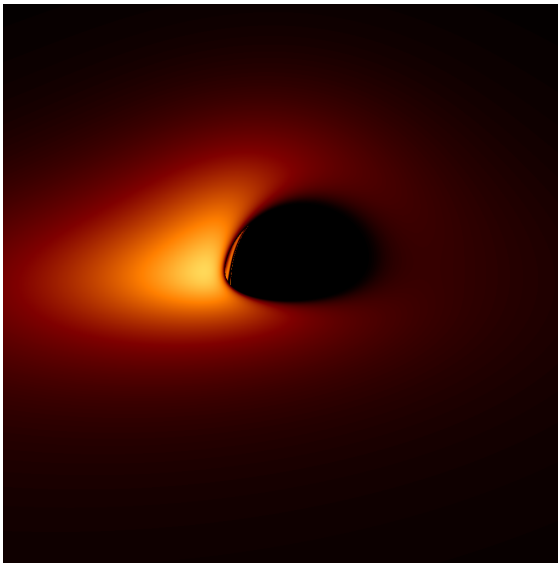
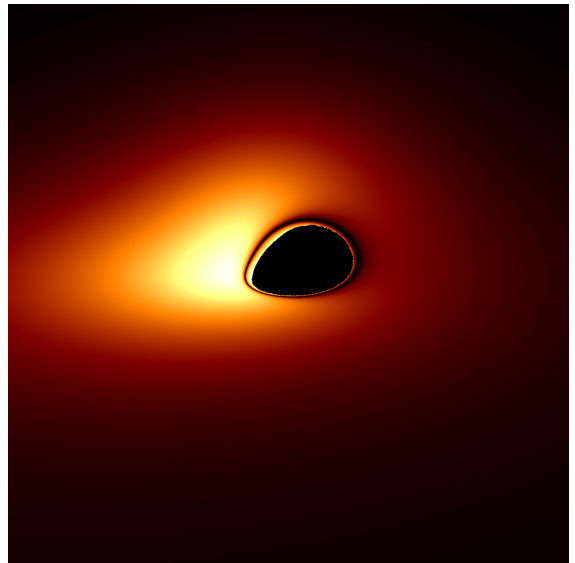
(e) klassische ART  $a = 0.6m$ (f) pk-ART  $a = 0.6m$ (g) klassische ART  $a = 0.9m$ (h) pk-ART  $a = 0.9m$ 

Abbildung 3.9: Unendlich ausgedehnte, gegen den Uhrzeigersinn drehende und geometrisch dünne Akkretionsscheibe um ein stationäres, rotierendes, kompaktes Objekt. Die Scheibe wird aus einem Inklinationswinkel von  $70^\circ$  betrachtet. Die linke Spalte (3.9a, 3.9c, 3.9e und 3.9g) zeigt das originale Scheibenmodell nach Page und Thorne [PT74]. Die rechte Spalte (3.9b, 3.9d, 3.9f und 3.9h) zeigt das, wie in Kapitel 3.1.4 beschrieben, angepasste Modell, um das pseudokomplexe Äquivalent der Kerr-Metrik – Gleichung (1.3.1) – darstellen zu können. Die Skala variiert zwischen den einzelnen Bildern. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].



## Gravitationswellen

Erste Spekulationen über die Existenz von Gravitationswellen gehen auf Maxwell und Poincaré zurück, siehe [Ken97]. Die ersten wirklichen Rechnungen wurden von [Ein16b; Ein18] durchgeführt. Diese (und viele weitere) Rechnungen beschränken sich auf die so genannte *linearisierte Form* der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Grundlage für diese Linearisierung bildet die Annahme, dass die Metrik durch

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (4.0.1)$$

beschrieben wird, wobei  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$  eine kleine Störung einer ansonst flachen Hintergrundmetrik  $\eta_{\mu\nu}$  ist. Es ist möglich analytische Lösungen für die linearisierten Feldgleichungen zu finden. Im folgenden Kapitel wird eine Übersicht über Gravitationswellen in der linearisierten Allgemeinen Relativitätstheorie gegeben.

Diese Einführung ist ausführlicher, als in den vorherigen Kapiteln, da die zugrunde liegenden Gleichungen andere sind, als die klassischen Einsteingleichungen.

### 4.1 Gravitationswellen in der linearisierten Allgemeinen Relativitätstheorie

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Gravitationswellen zu beschreiben. Für die folgenden Betrachtungen bildet die Näherungsannahme (4.0.1) die Grundlage. Als primäre Referenz dient das Buch von [Mag07]. Man berechnet den Riemann-Tensor

$$\mathcal{R}^{\mu}_{\sigma\nu\eta} := -\partial_{\eta} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} + \partial_{\nu} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\eta \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \tau\eta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \nu\sigma \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \tau\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \eta\sigma \end{matrix} \right\} \quad (4.1.2)$$

in linearer Ordnung in  $h_{\mu\nu}$ . Dazu betrachtet man die Christoffelsymbole

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\sigma\gamma} (\partial_{\nu} g_{\mu\gamma} + \partial_{\mu} g_{\gamma\nu} - \partial_{\gamma} g_{\mu\nu}) \quad , \quad (4.1.3)$$

die in linearer Ordnung in  $h_{\mu\nu}$  die Form

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \mu\nu \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial^\sigma h_{\mu\nu}) \quad (4.1.4)$$

annehmen. In Gleichung (4.1.2) fallen die quadratischen Terme der Christoffelsymbole weg, wenn nur die lineare Ordnung in  $h_{\mu\nu}$  betrachtet wird. Dadurch bleibt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^\mu{}_{\sigma\nu\eta} &= -\frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\eta h_\nu^\mu + \partial_\nu \partial_\eta h_\sigma^\mu - \partial^\mu \partial_\eta h_{\nu\sigma}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_\eta \partial_\nu h_\sigma^\mu + \partial_\sigma \partial_\nu h_\eta^\mu - \partial^\mu \partial_\nu h_{\sigma\eta}) \quad , \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

was angepasst auf die Indizes von Maggiore [Mag07]

$$\mathcal{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho}) \quad (4.1.6)$$

ergibt. Für die weiteren Rechnungen ist es von Vorteil eine Transformation der Art [ABS75]; [Mag07]

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &:= h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad \text{mit} \quad h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \\ \Rightarrow h_{\mu\nu} &= \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \bar{h} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

durchzuführen. Dadurch ergibt sich für den Ricci-Tensor

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2} \left[ -\square \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square \bar{h} + \partial^\alpha \partial_\nu \bar{h}_{\alpha\mu} + \partial_\mu \partial_\alpha \bar{h}^\alpha{}_\nu \right] \quad (4.1.8)$$

und entsprechend für den Ricci-Skalar

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^\mu{}_\mu = \frac{1}{2} \square \bar{h} + \partial^\alpha \partial^\mu \bar{h}_{\alpha\mu} \quad , \quad (4.1.9)$$

wobei  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  für den D'Alembert-Operator im flachen Raum steht. Das wird in die Einsteingleichung (1.1.4) eingesetzt und ergibt damit die linearisierte Feldgleichung

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\sigma \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho \partial_\mu \bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad . \quad (4.1.10)$$

Gleichung (4.1.10) ähnelt durch den D'Alembert-Operator schon einer Wellengleichung, allerdings noch mit störenden Zusatztermen. Diese Zusatzterme lassen sich durch eine Eichung<sup>1</sup> entfernen. Konkret betrachtet man eine Koordinatentransformation mit  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ , wobei  $O(|\partial_\mu \xi_\nu|) = O(|h_{\mu\nu}|)$  ist. Durch die Wahl dieser Koordinaten transformiert sich  $h_{\mu\nu}$ , beziehungsweise  $\bar{h}_{\mu\nu}$  wie folgt

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &\rightarrow h'_{\mu\nu}(x') = h_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu) \quad , \\ \bar{h}_{\mu\nu}(x) &\rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu}(x') = \bar{h}_{\mu\nu}(x) - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho) \quad . \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

<sup>1</sup>In der ART entspricht dies der Wahl eines speziellen Koordinatensystems, siehe Seite 41 in [Mag07].

Diese Transformationsvorschriften in Gleichung (4.1.11) lassen sich ableiten, indem man von der Tensortransformationsvorschrift für den metrischen Tensor

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (4.1.12)$$

ausgeht und hier  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$  einsetzt. Die Ableitungsterme bestimmt man mit Hilfe der Umkehrung der Koordinatentransformation  $x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu(x') + O(\xi\partial\xi)$ . Um die Transformationsvorschrift für  $\bar{h}_{\mu\nu}$  zu erhalten, muss man die Spur  $h$  als Funktion von  $h_{\mu\nu}$  ausschreiben und die eben erhaltene Transformationsvorschrift anwenden [Mag07]. Das Ziel ist es Gleichung (4.1.10) in eine Wellengleichung zu überführen. Dazu nutzt man, dass die Bedingung

$$\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.13)$$

die Gleichung in eine Wellengleichung überführt. Die Eichbedingung (4.1.13) heißt in Analogie zur Elektrodynamik Lorenz-Eichung (sie wird allerdings auch als harmonische, Hilbert oder De Donder Eichung bezeichnet) [Mag07]. Der Zusammenhang dieser Eichung zur oben beschriebenen Koordinatentransformation wird klar, wenn man die Transformation von  $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}$  betrachtet:

$$(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial^\nu \partial_\mu \xi_\nu + \partial^\nu \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \partial^\rho \xi_\rho) = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\mu \quad . \quad (4.1.14)$$

Werden die  $\xi_\mu$  gerade so gewählt, dass  $\square \xi_\mu = \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu}$  gilt (und damit Gleichung (4.1.13) impliziert), verschwinden in Gleichung (4.1.10) die störenden Divergenzterme und man erhält [Mag07]

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad . \quad (4.1.15)$$

Zur Vollständigkeit sei noch erwähnt, dass Gleichungen (4.1.13) und (4.1.15) zusammen die Energie-Impuls-Erhaltung

$$\partial^\nu T_{\mu\nu} = 0 \quad (4.1.16)$$

in linearisierter Form ergeben [Mag07].

Die ursprünglich zehn Freiheitsgrade von  $\bar{h}_{\mu\nu}$  (symmetrischer 4x4 Tensor) werden durch die harmonische Eichbedingung (4.1.13) (hierbei handelt es sich ja um vier Gleichungen) auf sechs reduziert. Eine weitere Eichung kann verwendet werden, um die Zahl der Freiheitsgrade weiter auf zwei zu reduzieren. Diese Eichung wird transversale spurfreie Eichung („transverse-traceless gauge“ oder auch „TT gauge“) genannt. Sie lässt sich allerdings nur im materiefreien Raum anwenden. Dazu wird eine weitere Koordinatentransformation durchgeführt, die die Bedingungen der ersten, (4.1.13) und (4.1.14), erhält. Eine Koordinatentransformation mit

$$\square \xi_\mu = 0 \quad (4.1.17)$$

erfüllt diese Voraussetzung, siehe dazu Gleichung (4.1.14). Aus Gleichung (4.1.17) folgt

$$\square \xi_{\mu\nu} := \square (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho) = 0 \quad . \quad (4.1.18)$$

Im materiefreien Raum reduziert sich die Wellengleichung (4.1.15) auf

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (4.1.19)$$

Also erfüllen  $\xi_{\mu\nu}$  und  $\bar{h}_{\mu\nu}$  dieselben Gleichungen. Da  $\xi_{\mu\nu}$  (beziehungsweise  $\xi_\mu$ ) frei wählbar sind, lassen sich damit Bedingungen an  $\bar{h}_{\mu\nu}$  stellen. Hier wählt man  $\xi^0$  so, dass die Spur  $\bar{h}$  verschwindet (damit ist  $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ ). Die  $\xi^i$  werden so gewählt, dass  $h^{0i} = 0$  ist. Aus der ersten Eichbedingung (4.1.13) folgt noch, dass  $h^{00}$  zeitlich konstant sein muss. Ein zeitlich konstanter Wert von  $h_{00}$  entspricht aber einem statischen Hintergrund und keiner Gravitationswelle, deshalb lässt sich  $h^{00} = 0$  annehmen. Zusammen definieren

$$h^{0\mu} = 0 \quad , \quad h^i{}_i = 0 \quad , \quad \partial^j h_{ij} = 0 \quad (4.1.20)$$

die transversale spurfreie Eichung [Mag07].

[Mag07] merkt noch an, dass man im nicht materiefreien Raum zwar auch die Eichbedingung  $\square \xi_\mu = 0$  und  $\square \xi_{\mu\nu} = 0$  aufstellen kann, damit aber keine weiteren Bedingungen für  $\bar{h}_{\mu\nu}$  erhält, denn  $\bar{h}_{\mu\nu}$  erfüllt hier eine Gleichung der Form  $\square \bar{h}_{\mu\nu} \neq 0$ , im Gegensatz zu  $\xi_{\mu\nu}$ . In dieser Eichung ist die Wellengleichung schließlich

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad . \quad (4.1.21)$$

Sie ist formal identisch mit (4.1.19), allerdings hat  $h_{\mu\nu}^{TT}$  nur noch zwei Freiheitsgrade im Gegensatz zu den sechs unabhängigen Komponenten von  $\bar{h}_{\mu\nu}$ .

Die Lösungen von (4.1.19) und (4.1.21) sind ebene Wellen in der Ebene transversal zu ihrer Ausbreitungsrichtung  $\hat{n}$ . Es gibt eine Möglichkeit, eine ebene Welle in der Lorenz-Eichung in die TT-Eichung zu überführen. Dafür definiert man zunächst den Projektor

$$P_{ij}(\hat{n}) := \delta_{ij} - n_i n_j \quad (4.1.22)$$

und mit diesem den so genannten *Lambda-Tensor*

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) := P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad (4.1.23)$$

mit den folgenden Eigenschaften [Mag07]

$$\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn} \quad , \quad (4.1.24a)$$

$$n^i \Lambda_{ij,kl} = n^j \Lambda_{ij,kl} = n^k \Lambda_{ij,kl} = n^l \Lambda_{ij,kl} = 0 \quad , \quad (4.1.24b)$$

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0 \quad , \quad (4.1.24c)$$

$$\Lambda_{ij,kl} = \Lambda_{kl,ij} \quad . \quad (4.1.24d)$$

Gleichung (4.1.24a) klassifiziert  $\Lambda_{ij,kl}$  als Projektor. Die zweite Eigenschaft, Gleichung (4.1.24b), lässt sich so interpretieren, dass  $\Lambda_{ij,kl}$  den Teil eines Tensors herausprojiziert, der transversal zu  $\hat{n}$  ist. Gleichung (4.1.24c) beschreibt die Spurfreiheit des Lambda-Tensors. Aus diesen Eigenschaften folgt also, dass man aus einer ebenen Welle in der Lorenz-Eichung  $h_{kl}$  über

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} \quad (4.1.25)$$

die Welle in der TT-Eichung erhält<sup>2</sup>.

Explizit als Funktion der Komponenten von  $\hat{n}$  ist der Lambda-Tensor [Mag07]

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = & \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \\ & + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l \quad . \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

### Erzeugung von Gravitationswellen in der linearisierten ART

Als erstes einfaches Beispiel dient ein gravitativ gebundenes Zweikörpersystem. Die Gesamtmasse des Systems sei  $M = m_1 + m_2$ , die reduzierte Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ . Als Gleichgewichtsbedingung lässt sich der Virialsatz verwenden und damit

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{G\mu M}{R} \quad (4.1.27)$$

beziehungsweise

$$v^2 = \frac{r_s}{2R} \quad (4.1.28)$$

annehmen [LL90]; [Mag07].  $R$  beschreibt hier den relativen Abstand der beiden Massen. Es wurde ebenfalls angenommen, dass sich das Zweiteilchensystem als ein Teilchen der Masse  $\mu$ , das sich unter Einfluss der Gravitation einer Masse  $M$  befindet äquivalent darstellen lässt. Für eine Linearisierung der Theorie muss man von schwachen Gravitationsfeldern ausgehen. In diesem Fall bedeutet das, dass  $\frac{r_s}{r} \ll 1$  beziehungsweise  $v \ll c$  sein muss. Für ein System, dessen Dynamik nicht primär durch die Gravitation festgelegt ist, sind die beiden Bedingungen allerdings unabhängig [Mag07]. Zunächst werden schwache Gravitationsfelder und beliebige Geschwindigkeiten betrachtet. Der zweite Schritt besteht in einer Entwicklung in Ordnungen von  $v/c$ . In dieser Entwicklung lassen sich die Gravitationswellen durch eine Multipol-Entwicklung beschreiben.

Zunächst geht man von der linearisierten Feldgleichung

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (4.1.29)$$

aus. Hier wird schon die Lorenz-Eichung (4.1.13) verwendet und damit gilt für den Energie-Impuls-Tensor auch (4.1.16). Zur Lösung der linearisierten Feldgleichung kann man, wie im Fall der Elektrodynamik (hier liegt auch ein Strahlungsproblem vor), auf die Methode der Greensfunktionen zurückgreifen. Wenn  $G(x - x')$  die Gleichung

$$\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x') \quad (4.1.30)$$

löst, lässt sich damit eine Lösung für die linearisierte Feldgleichung finden

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4 x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x') \quad . \quad (4.1.31)$$

---

<sup>2</sup>Hier und im Folgenden wird die Summenkonvention für doppelt auftretende Indizes verwendet, auch wenn sie nicht gemischt ko- und kontravariant sind. Dies ist möglich, da die betrachtete Hintergrundmetrik die Minkowski-Metrik ist.

Die Form der Greensfunktion hängt noch von den Randbedingungen ab. Auch hier kann man wieder analog zur Elektro-Dynamik vorgehen und die *retardierte Greensfunktion* [Gre91]

$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0) \quad (4.1.32)$$

zusammen mit der retardierten Zeit  $t_{\text{ret}} := t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$  einführen ( $x^0 = ct$ ). Außerhalb der die Gravitationswellen verursachenden Materieverteilung lässt sich daraus mit Hilfe des Lambda-Tensors (4.1.23) die TT-Komponente herausprojizieren ( $h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}$ ) [Mag07]

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{kl} \left( t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right) \quad (4.1.33)$$

Ab hier wird  $\hat{x} = \hat{n}$  angenommen und auch  $|\vec{x}| = r$  gesetzt. Die betrachtete Strahlungsquelle hat den Radius  $d$ , und wird im Abstand  $r \gg d$  beobachtet. Damit lässt sich  $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r - \vec{x}' \cdot \hat{n}$  annähern. Nun kann man (4.1.33) für große Abstände betrachten. Den führenden Term erhält man, wenn man  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r}$  setzt und im Energie-Impuls-Tensor die Näherung  $|\vec{x} - \vec{x}'| \approx r - \vec{x}' \cdot \hat{n}$  verwendet (man betrachtet hier den Energie-Impuls-Tensor mit einer höheren Genauigkeit, weil er nur im Raumbereich zwischen  $r = 0$  und  $r = d$  nicht verschwindet.) [Mag07]

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' T_{kl} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right) \quad (4.1.34)$$

Jetzt ist von Interesse, was passiert wenn man annimmt, dass die typischen Geschwindigkeiten in der Strahlungsquelle klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind. Die Strahlungsquelle soll immer noch die Ausdehnung  $d$  haben und die typische Frequenz der Bewegung wird als  $\omega_s$  bezeichnet. Damit sind typische Geschwindigkeiten im Inneren  $v \sim \omega_s d$ . Die Frequenz der abgegebenen Strahlung ist ebenfalls in derselben Größenordnung  $\omega \sim \omega_s$  und damit die reduzierte Wellenlänge der Strahlung  $\bar{\lambda} \sim \frac{c}{v} d$ . Also gilt für Systeme mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten  $\bar{\lambda} \gg d$ . Damit hängt die abgegebene Strahlung (unter den bisher getroffenen Annahmen) nicht im Detail von der inneren Dynamik des betrachteten Systems ab und man kann sich bei einer Multipolentwicklung auf die ersten Terme konzentrieren [Mag07].

Wie bereits erwähnt ist  $\frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{c}$  klein im Vergleich zu  $t - \frac{r}{c}$  und der Energie-Impuls-Tensor in (4.1.34) lässt sich danach entwickeln

$$T_{kl} \left( t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x} \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right) = T_{kl} \left( t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) + \frac{x'^i n^i}{c} \partial_t T_{kl} + \frac{x'^i x'^j n^i n^j}{2c^2} \partial_t^2 T_{kl} + \dots \quad (4.1.35)$$

Die Ableitungen müssen hier jeweils an der Stelle  $(t - \frac{r}{c}, \vec{x})$  ausgewertet werden. Nun

kann man die Momente des Energie-Impuls-Tensors

$$\begin{aligned}
 S^{ij}(t) &:= \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) \quad , \\
 S^{ij,k}(t) &:= \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) x^k \quad , \\
 S^{ij,kl}(t) &:= \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) x^k x^l \quad (4.1.36)
 \end{aligned}$$

eingeführen und damit (4.1.34) zu

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \left( S^{kl} + \frac{n_m}{c} \dot{S}^{kl,m} + \frac{n_m n_n}{2c^2} \ddot{S}^{kl,mn} + \dots \right)_{\text{ret}} \quad (4.1.37)$$

umschreiben [Mag07]. Der Index „ret“ weist darauf hin, dass man hier die retardierte Zeit in die Momente einsetzen muss. Die hier vorgestellte Art der Entwicklung entspricht einer Entwicklung in Ordnungen von  $\frac{v}{c}$ . Als nächstes lassen sich die  $S^{ij}$  als Funktion der Momente der Energiedichte  $T^{00}$  (hier als Massendichte mit Faktor  $1/c^2$  geschrieben)

$$\begin{aligned}
 M &:= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) \quad , \\
 M^i &:= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) x^i \quad , \\
 M^{ij} &:= \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) x^i x^j \quad , \quad \dots \quad (4.1.38)
 \end{aligned}$$

und der linearen Impulse  $T^{0i}/c$

$$P^i := \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}) \quad , \quad P^{i,j} := \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}) x^j \quad , \quad \dots \quad (4.1.39)$$

schreiben [Mag07]. Um einen Zusammenhang zu den  $S^{ij}$  herstellen zu können, benutzt man einerseits  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  (Energie-Impuls-Erhaltung in linearer Theorie) und andererseits betrachtet man ein Raumgebiet  $V$ , dass größer als die Strahlungsquelle ist, sodass  $T_{\mu\nu}$  auf seinem Rand  $\partial V$  verschwindet. Dadurch ergibt sich mit  $\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}$

$$c\dot{M} = \int_V d^3x \partial_0 T^{00} = - \int_V d^3x \partial_i T^{0i} = - \int_{\partial V} dF^i T^{0i} = 0 \quad (4.1.40)$$

und analog dazu

$$c\dot{M}^i = \int_V d^3x x^i \partial_0 T^{00} = - \int_V d^3x x^i \partial_j T^{0j} = \int_V d^3x \partial_j (x^i) T^{0j} = cP^i \quad (4.1.41)$$

und [Mag07]

$$\dot{M}^{ij} = P^{i,j} + P^{j,i} \quad . \quad (4.1.42)$$

Für die Momente von  $T^{0i}$  verwendet man  $\partial_0 T^{0i} = -\partial_k T^{ki}$  und verbleibt nach ähnlicher Rechnung mit [Mag07]

$$\dot{P}^i = 0 \quad , \quad \dot{P}^{i,j} = S^{ij} \quad . \quad (4.1.43)$$

Aus (4.1.42) und (4.1.43) folgt [Mag07]

$$S^{ij} = \frac{1}{2} \ddot{M}^{ij} \quad . \quad (4.1.44)$$

Dieser Zusammenhang liefert mit (4.1.37) die führende Ordnung der Gravitationsstrahlung in der linearisierten Theorie [Mag07]

$$\left[ h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) \right]_{\text{quad}} = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad . \quad (4.1.45)$$

Nun benutzt man wieder eine kartesische Beschreibung und nimmt an, dass die Ausbreitungsrichtung der Gravitationswellen  $\hat{n} = \hat{z}$  ist. Der Projektionsoperator  $P_{ij}$  in (4.1.23) ist gerade der Projektionsoperator auf die  $x$ - $y$ -Ebene. Damit lässt sich sehr schnell

$$\Lambda_{ij,kl} \ddot{M}_{kl} = \begin{pmatrix} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & \ddot{M}_{12} & 0 \\ \ddot{M}_{21} & -(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \quad (4.1.46)$$

berechnen [Mag07]. Aus den Tatsachen, dass es sich bei  $h_{ij}^{TT}$  um einen spurfreien symmetrischen Tensor handelt und dass Gravitationswellen transversale Wellen sind, folgt [Mag07]

$$h_{ij}^{TT} \sim \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \quad . \quad (4.1.47)$$

Mit (4.1.45) und (4.1.46) lassen sich so die beiden Amplituden

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{G}{rc^4} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \quad , \\ h_\times &= \frac{2G}{rc^4} \ddot{M}_{12} \end{aligned} \quad (4.1.48)$$

bestimmen [Mag07]. Bisher wurde angenommen, dass sich die Gravitationswellen in die  $\hat{n} = \hat{z}$ -Richtung ausbreiten. Geht man davon aus, dass sie sich in eine beliebige Richtung ausbreiten, kann man ein neues Koordinatensystem finden, in dem  $\hat{n}'$  gerade wieder die Komponenten  $(0, 0, 1)$  hat. Die Komponenten von  $\hat{n}$  im ursprünglichen System sind gerade durch  $(\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta)$  gegeben, wobei  $\phi$  den Winkel zwischen  $y$ - und  $y'$ -Achse und  $\theta$  den Winkel zwischen  $z$ - und  $z'$ -Achse (und damit auch zwischen  $\hat{n}$  und  $\hat{n}'$ ) angibt (siehe dazu auch Fig 3.2 in [Mag07]).

Der Wechsel vom gestrichenen in das ungestrichene System lässt sich mit Hilfe der Drehmatrix

$$\begin{aligned} R &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (4.1.49)$$



vollziehen. Mit dieser Matrix erhält man zum Beispiel  $\hat{n} = R\hat{n}'$  oder in der Umkehrung  $R^T\hat{n} = \hat{n}'$  (Drehmatrizen sind orthogonal und für sie gilt daher  $R^{-1} = R^T$ ). Ein zweikomponentiger Tensor, wie zum Beispiel das Massenmoment  $M$ , transformiert sich in der Form

$$M'_{ij} = (R^T M R)_{ij} \quad . \quad (4.1.50)$$

Für die Amplituden der Gravitationswellen gelten im gestrichenen System Ausdrücke aus (4.1.48), denn hier ist  $\hat{n}' = z'$  [Mag07]

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{G}{rc^4} (\ddot{M}'_{11} - \ddot{M}'_{22}) \quad , \\ h_\times &= \frac{2G}{rc^4} \ddot{M}'_{12} \quad . \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

Will man (4.1.51) mit den Komponenten des ungestrichenen Systems ausdrücken, ergibt das [Mag07]

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{G}{rc^4} \left[ \ddot{M}_{11}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + \ddot{M}_{22}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \right. \\ &\quad - \ddot{M}_{33} \sin^2 \theta - 2\ddot{M}_{12} \sin \phi \cos \phi (1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad \left. + 2\ddot{M}_{13} \sin \phi \sin \theta \cos \theta + 2\ddot{M}_{23} \cos \phi \sin \theta \cos \theta \right] \quad , \\ h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{G}{rc^4} \left[ 2(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \sin \phi \cos \phi \cos \theta + 2\ddot{M}_{12}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - 2\ddot{M}_{13} \cos \phi \sin \theta + 2\ddot{M}_{23} \sin \phi \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (4.1.52)$$

und damit nach Anwendung einiger Additionstheoreme [Mag07]

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{G}{rc^4} \left[ \ddot{M}_{11}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + \ddot{M}_{22}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \right. \\ &\quad - \ddot{M}_{33} \sin^2 \theta - \ddot{M}_{12} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad \left. + \ddot{M}_{13} \sin \phi \sin 2\theta + \ddot{M}_{23} \cos \phi \sin 2\theta \right] \quad , \\ h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{G}{rc^4} \left[ (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \sin 2\phi \cos \theta + 2\ddot{M}_{12} \cos 2\phi \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - 2\ddot{M}_{13} \cos \phi \sin \theta + 2\ddot{M}_{23} \sin \phi \sin \theta \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.1.53)$$

Der nächste Schritt besteht in der Berechnung des Massenmoments (eigentlich ist es das Moment von  $T^{00}$ ) zweier Punktmassen, die sich mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten umeinander bewegen. Für den Fall von Punktmassen reduziert sich (4.1.38) auf eine Summe. Daher ist  $M^{ij}$  für zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  an den Orten  $\vec{x}_1$  und  $\vec{x}_2$  durch

$$M^{ij} = m_1 x_1^i x_1^j + m_2 x_2^i x_2^j \quad (4.1.54)$$

gegeben [Mag07]. Dieser Zusammenhang lässt sich mit Hilfe des Schwerpunktes  $x_S^i = \frac{m_1 x_1^i + m_2 x_2^i}{m_1 + m_2}$  und des Relativabstandes  $x_0^i = x_1^i - x_2^i$  zusammen mit der Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  und der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$  als

$$M^{ij} = M x_S^i x_S^j + \mu x_0^i x_0^j \quad (4.1.55)$$

schreiben<sup>3</sup>. Wenn man von einem geschlossenen System der beiden Punktmassen ausgeht, ist der Schwerpunkt erhalten und der erste Term in (4.1.55) trägt nicht zur Erzeugung von Gravitationswellen bei. Das relevante Massenmoment ist [Mag07]

$$M^{ij}(t) = \mu x_0^i(t) x_0^j(t) \quad . \quad (4.1.56)$$

Nun lässt sich die Gravitationsstrahlung zweier (isolierter, punktförmiger) Massen, die umeinander kreisen, berechnen. Dazu setzt man die Bewegung der relativen Abstandskoordinate  $x_0^i(t)$  wie folgt an [Mag07]

$$x_0(t) = R \cos(\omega_s t + \frac{\pi}{2}), \quad y_0(t) = R \sin(\omega_s t + \frac{\pi}{2}), \quad z_0(t) = 0 \quad , \quad (4.1.57)$$

wobei  $R$  ihr relativer Abstand und  $\omega_s$  die Winkelgeschwindigkeit ist, mit der die beiden Massen umeinander kreisen. Der Phasenfaktor  $\frac{\pi}{2}$  wurde eingefügt, um die späteren Gleichungen zu vereinfachen. Zunächst wird auch keinerlei Energieverlust des Systems durch die abgestrahlten Gravitationswellen berücksichtigt. Setzt man (4.1.57) in (4.1.56) ein, ergibt sich [Mag07]

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu R^2 \frac{1 - \cos 2\omega_s t}{2} \quad , \\ M_{22} &= \mu R^2 \frac{1 + \cos 2\omega_s t}{2} \quad , \\ M_{12} &= -\mu R^2 \frac{\sin 2\omega_s t}{2} \quad . \end{aligned} \quad (4.1.58)$$

Zur Berechnung der Amplituden der Gravitationswellen muss man davon noch die zweite Ableitung bilden

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{11} &= 2\mu R^2 \omega_s^2 \cos 2\omega_s t = -\ddot{M}_{22} \quad , \\ \ddot{M}_{12} &= 2\mu R^2 \omega_s^2 \sin 2\omega_s t \quad , \end{aligned} \quad (4.1.59)$$

und in Gleichung (4.1.53) einsetzen<sup>4</sup> [Mag07]

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{rc^4} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi) \quad , \\ h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{rc^4} \cos \theta \sin(2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi) \quad . \end{aligned} \quad (4.1.60)$$

Mit Hilfe des Virialsatzes  $v^2 = \frac{GM}{R}$  aus Gleichung (4.1.27) und  $v = \omega_s R$  kann man auch eine Beziehung zwischen  $\omega_s$  und  $R$  aufstellen [Mag07]

$$\omega_s^2 = \frac{GM}{R^3} \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = \left( \frac{GM}{\omega_s^2} \right)^{2/3} \quad . \quad (4.1.61)$$

<sup>3</sup>Hier liegt ein kleiner Fehler im Buch von Maggiore [Mag07] vor. Dort taucht fälschlicherweise ein Zusatzterm auf. Der Autor hat das direkt bestätigt und in die Errata [Mag12] aufgenommen.

<sup>4</sup>Auf der rechten Seite muss die retardierte Zeit eingesetzt werden. Siehe dazu auch Gleichung (4.1.37).

und in Gleichung (4.1.60) einsetzen [Mag07]

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{4G^{5/3} \mu M^{2/3} \omega_s^{2/3}}{c^4 r} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi) \quad , \\ h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{4G^{5/3} \mu M^{2/3} \omega_s^{2/3}}{c^4 r} \cos \theta \sin(2\omega_s t_{\text{ret}} + 2\phi) \quad . \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

### Gravitationswellen in linearisierter ART unter Berücksichtigung des Energieverlustes durch Abstrahlung

Im Folgenden werden die bisherigen Betrachtungen dahingehend erweitert, dass der Energieverlust durch die abgestrahlten Gravitationswellen mit berücksichtigt wird. Die für Gravitationswellen zur Verfügung stehende Energie ist durch

$$E_{\text{orbit}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \stackrel{\text{Virialsatz}}{=} -\frac{Gm_1 m_2}{2R} \quad (4.1.63)$$

gegeben [Mag07]. Solange  $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$  ist, bewegen sich die beiden Massen weiterhin kreisförmig umeinander [Mag07]. Gleichung (4.1.63) formt man mit Hilfe von (4.1.61) um

$$E_{\text{orbit}} = -\left( \frac{G^2 \omega_{\text{gw}}^2 M_c^5}{32} \right)^{1/3} \quad . \quad (4.1.64)$$

Hier wurde noch die „Chirp“-Masse<sup>5</sup>

$$M_c := \mu^{3/5} M^{2/5} \quad (4.1.65)$$

und  $\omega_{\text{gw}} = 2\omega_s$  eingesetzt [Mag07].

Für die weiteren Betrachtungen ist es noch wichtig einen Ausdruck für die Energie der abgestrahlten Gravitationswellen zu finden. Dazu beschreibt man die Gravitationswellen als kleine (schnelle) Fluktuationen  $h_{\mu\nu}$  auf einer Hintergrundmetrik  $\bar{g}_{\mu\nu}$ .  $\bar{g}_{\mu\nu}$  muss hier nicht notwendigerweise die Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  sein, sondern nur eine Metrik, die auf deutlich größeren Skalen als  $h_{\mu\nu}$  variiert. Ausführliche Ableitungen der folgenden Rechnungen lassen sich neben [Mag07] in §35.7 - §35.15 in [MTW73] und in [Isa68] finden.

Als ersten Schritt wird der Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  quadratisch in  $h_{\mu\nu}$  entwickelt (Gleichung 1.110 bei [Mag07])

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \mathcal{O}(h^3) \quad . \quad (4.1.66)$$

Nun lässt sich den Gravitationswellen ein Energie-Impuls-Tensor

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \rangle \quad (4.1.67)$$

---

<sup>5</sup>Der Begriff „Chirp“-Masse leitet sich vom englischen „chirp“ (zwitschern) ab. Der Begriff spielt darauf an, dass die abgestrahlten Gravitationswellen eines Binärsystems mit zunehmendem Einfall eine höhere Frequenz haben. Die „Chirp“-Masse dient dazu, Gleichungen ein wenig kompakter zu schreiben.

zuweisen<sup>6</sup>. Die Mittelung lässt sich hier als zeitliche Mittelung auffassen, wenn die Hintergrundmetrik  $\bar{g}_{\mu\nu}$  mit deutlich kleineren Frequenzen variiert, als die Frequenzen der abgegebenen Gravitationswellen. Im Allgemeinen hat  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  eine recht komplizierte Form (siehe Gleichung 1.114 in [Mag07]). Diese Form vereinfacht sich in der linearisierten Theorie, wenn man von einem Beobachter in weiter Entfernung ausgeht, da hierbei  $\bar{g}_{\mu\nu}$  zur Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  wird (siehe Gleichung 1.131 in [Mag07]). Unter Ausnutzung der Lorenz-Eichung (4.1.13) und (4.1.17) kann man mit Hilfe von partiellen Integrationen den Ausdruck für  $R_{\mu\nu}^{(2)}$  schließlich auf folgende Form bringen [Mag07]

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{4} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad . \quad (4.1.68)$$

Damit ist schließlich

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad . \quad (4.1.69)$$

Von Interesse ist die Energiedichte

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (4.1.70)$$

der Gravitationswellen (die Abhängigkeit von  $\xi_\mu$  verschwindet in  $\langle \dots \rangle$  – siehe 1.134 in [Mag07] – dadurch kann man  $h_{\mu\nu}$  durch  $h_{\mu\nu}^{TT}$  ersetzen). Als Funktion der beiden Polarisationsmoden  $h_+$  und  $h_\times$  ergibt das schließlich für den gesamten Energie-Impuls-Tensor der Gravitationswellen [Mag07]

$$t^{\mu\nu} = \frac{c^4}{16\pi G} \langle (\partial^\mu h_+ \partial^\nu h_+ + \partial^\mu h_\times \partial^\nu h_\times) \rangle \quad . \quad (4.1.71)$$

Für die 00-Komponente vereinfacht sich dieser Ausdruck nochmals zu [Mag07]

$$t^{00} = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad . \quad (4.1.72)$$

Der nächste Schritt besteht aus der Ausnutzung der Energie-Impuls-Erhaltung  $\partial_\mu t^{\mu\nu} = 0$  in der Form [Mag07]

$$\int_V d^3x (\partial_0 t^{00} + \partial_i t^{i0}) = 0 \quad , \quad (4.1.73)$$

wobei  $V$  ein räumliches Volumen weit entfernt von der Strahlungsquelle darstellt. Die Energie  $E_V$  innerhalb des Volumens hat die Form [Mag07]

$$E_V = \int_V d^3x t^{00} \quad , \quad (4.1.74)$$

was man in (4.1.73) einsetzt und damit

$$\frac{1}{c} \frac{dE_V}{dt} = - \int_V d^3x \partial_i t^{i0} = - \int_{\partial V} dA n_i t^{0i} \quad (4.1.75)$$

<sup>6</sup>Gleichung (4.1.67) hat ein anderes Vorzeichen als in [Mag07]; [MTW73], was auf die unterschiedlichen Definitionen des Riemann-Tensors zurückgeht.

erhält [Mag07].  $n_i$  ist hier der Normalenvektor auf der Oberfläche des Volumens, welcher für die weiteren Betrachtungen als  $\hat{r}$  angenommen wird. Die Funktionen  $h_+$  und  $h_\times$  sind für ebene Wellen, die sich radial ausbreiten, Funktionen der retardierten Zeit  $t - \frac{r}{c}$  (siehe Gleichung (4.1.60)). Dadurch ist  $-\partial^r h_+ = \partial_r h_+ = -\partial_0 h_+ = -\partial^0 h_+$  und zusammen mit Gleichung (4.1.71) hat man

$$t^{00} = \frac{c^4}{16\pi G} \left( (\partial^0 h_+)^2 + (\partial^0 h_\times)^2 \right) \quad , \quad t^{0r} = \frac{c^4}{16\pi G} \left( -\partial^0 h_+ \partial^r h_+ - \partial^0 h_\times \partial^r h_\times \right) \quad , \quad (4.1.76)$$

womit  $t^{0r} = t^{00}$  gilt [Mag07]. Also wird aus Gleichung (4.1.75)

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int_{\partial V} dA n_i t^{0i} = -c \int_{\partial V} dA t^{0r} = -c \int dA t^{00} \quad , \quad (4.1.77)$$

wobei das negative Vorzeichen daher rührt, dass die Gravitationswellen Energie aus dem Volumen hinaustragen [Mag07]. Zusammen mit  $dA = r^2 d\Omega$  und (4.1.72) ergibt sich schließlich für die abgestrahlte Energie  $E$  der Gravitationswellen pro Raumwinkelelement und Zeit [Mag07]

$$\frac{dE}{d\Omega dt} = \frac{c^3 r^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad . \quad (4.1.78)$$

Zusammen mit den Gleichungen (4.1.62) und (4.1.65) und unter Ausnutzung von  $\langle \sin^2(t) \rangle = \langle \cos^2(t) \rangle = \frac{1}{2}$  ergibt das

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{2c^5}{\pi G} \left( \frac{GM_c \omega_{\text{gw}}}{2c^3} \right)^{10/3} \left( \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right)^2 + \cos^2 \theta \right) \quad . \quad (4.1.79)$$

Schließlich kann noch das Integral über das Raumwinkelelement  $d\Omega = d \cos \theta d\phi$  ausgeführt werden, und somit ist die gesamte durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung (in linearer ART) [Mag07]

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32 c^5}{5 G} \left( \frac{GM_c \omega_{\text{gw}}}{2c^3} \right)^{10/3} \quad . \quad (4.1.80)$$

Nun kann (4.1.80) gleich  $-\frac{dE_{\text{orbit}}}{dt}$  aus (4.1.64) gesetzt werden und es ergibt sich dadurch eine Differentialgleichung für  $\omega_{\text{gw}}$  [Mag07]

$$\frac{d\omega_{\text{gw}}}{dt} = \frac{12}{5} 2^{1/3} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \omega_{\text{gw}}^{11/3} \quad , \quad (4.1.81)$$

beziehungsweise für  $f_{\text{gw}} = \omega_{\text{gw}} / (2\pi)$

$$\frac{df_{\text{gw}}}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{\text{gw}}^{11/3} \quad . \quad (4.1.82)$$

Diese Differentialgleichung ist per Trennung der Variablen integrierbar und ergibt [Mag07]

$$f_{\text{gw}} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{5}{256} \right)^{3/8} \left( \frac{c^3}{GM_c} \right)^{5/8} \left( \frac{1}{-t + t_{\text{ver}}} \right)^{3/8} \quad . \quad (4.1.83)$$

Für Werte von  $t$ , die größer als  $t_{\text{ver}}$  sind, divergiert die Frequenz. Der Zeitpunkt  $t_{\text{ver}}$  lässt sich als Zeitpunkt der Verschmelzung der beiden Objekte sehen. Allerdings muss man hier vorsichtig sein, da das hier zugrunde liegende Modell der linearisierten ART nicht mehr zutreffend ist, wenn sich die beiden Objekte stark genähert haben. Das heißt, dass Gleichung (4.1.83) für Zeiten nahe  $t_{\text{ver}}$  ihre Gültigkeit verliert [Mag07].

Im nächsten Schritt muss man berücksichtigen, dass die Koordinaten der beiden umeinander kreisenden Massen nicht mehr mit Hilfe von (4.1.57) beschrieben werden können, da  $\omega_s$  nicht mehr zeitlich konstant ist. Vielmehr hat man

$$x(t) = R(t) \cos(\phi(t)/2) \quad , \quad y(t) = R(t) \sin(\phi(t)/2) \quad , \quad (4.1.84)$$

wobei

$$\phi(t) := 2 \int dt \omega_s(t) = \int dt \omega_{\text{gw}}(t) \quad (4.1.85)$$

ist [Mag07]. Die zeitliche Abhängigkeit des Abstands der beiden Objekte  $R$  lässt sich vernachlässigen – bevor die Änderungen in  $R$  relevant werden, bricht die lineare Beschreibung zusammen [Mag07].

Mit den Gleichungen (4.1.85) und (4.1.65) wird schließlich Gleichung (4.1.62) zu

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left( \frac{\pi f_{\text{gw}}(t_{\text{ret}})}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(\phi(t_{\text{ret}})) \quad , \\ h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{4}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{\frac{5}{3}} \left( \frac{\pi f_{\text{gw}}(t_{\text{ret}})}{c} \right)^{\frac{2}{3}} \cos \theta \sin(\phi(t_{\text{ret}})) \quad , \end{aligned} \quad (4.1.86)$$

worin noch (4.1.83) eingesetzt wird

$$\begin{aligned} h_+(t, \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left( \frac{5}{c(-t + t_{\text{ver}})} \right)^{1/4} \left( \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right) \cos(\phi(t_{\text{ret}})) \quad , \\ h_\times(t, \theta, \phi) &= \frac{1}{r} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left( \frac{5}{c(-t + t_{\text{ver}})} \right)^{1/4} \cos \theta \sin(\phi(t_{\text{ret}})) \quad . \end{aligned} \quad (4.1.87)$$

Auffällig an (4.1.87) ist, dass Amplitude und Frequenz der Gravitationswellen im Laufe der Zeit ansteigen. Dies ist der Grund für die Verwendung des Begriffs "chirping", welcher in der englischen Literatur häufig für dieses Verhalten verwendet wird.

### Abgestrahlte Leistung als Funktion des Quadrupolmoments

Eine andere Möglichkeit Gleichung (4.1.80) abzuleiten geht auf die so genannte Quadrupolformel von Einstein [Ein18] zurück. Dazu geht man zunächst von Gleichung (4.1.70)

$$t^{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad (4.1.88)$$

aus [Mag07]. Zusammen mit Gleichung (4.1.77)

$$\frac{dE_V}{dt} = -c \int dA t^{00} \quad , \quad (4.1.89)$$

ergibt das mit  $dA = r^2 d\Omega$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c^3 r^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle \quad . \quad (4.1.90)$$

$P$  beschreibt die Leistung der abgestrahlten Gravitationswellen, deshalb findet hier ein Vorzeichenwechsel statt [Mag07]. Nun benötigt man noch Gleichung (4.1.45) und schreibt diese als Funktion des Quadrupolmoments  $Q_{ij} := M_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}M_{kk}$  [Mag07]

$$\begin{aligned} [h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{\text{quad}} &= \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl} \left( t - \frac{r}{c} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{Q}^{kl} \left( t - \frac{r}{c} \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.1.91)$$

Dabei wurde noch ausgenutzt, dass  $\Lambda_{ij,kk} = 0$  ist, siehe Gleichung (4.1.24d). Damit wird aus Gleichung (4.1.90)

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{ij,kl} \langle \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad . \quad (4.1.92)$$

Nun ist die gesamte durch (Quadrupol-)Gravitationswellen abgestrahlte Leistung eines Systems<sup>7</sup> von Interesse. Dazu muss das Integral des Lambda-Tensors über alle möglichen Raumwinkel ausgeführt werden. Hier treten Terme der Form

$$\int n_i n_j d\Omega \quad , \quad \int n_i n_j n_k n_l d\Omega \quad (4.1.93)$$

auf. In einem beliebigen System in Kugelkoordinaten gilt  $\hat{n} = \hat{r}$ . Dadurch, dass über den Raumwinkel integriert wird und die Ausdrücke in Gleichung (4.1.93) symmetrisch sind, ist das Ergebnis ein isotroper Tensor. Die Anzahl an isotropen Tensoren ist festgelegt. So gibt es nur einen isotropen Tensor vom Rang zwei, das Kronecker-Delta (beziehungsweise vielfache davon). Die isotropen Tensoren vom Rang vier sind durch

$$\delta_{ij}\delta_{kl} \quad , \quad \delta_{ik}\delta_{jl} \quad , \quad \delta_{il}\delta_{kj} \quad (4.1.94)$$

beziehungsweise Linearkombinationen dieser gegeben [JJ62]. Damit lassen sich die Integrale in Gleichung (4.1.93) berechnen. Die Normierungsfaktoren erhält man durch Spurbildung auf beiden Seiten (und die Tatsache, dass es sich bei  $\hat{n}$  um einen Einheitsvektor handelt) [Mag07]

$$\begin{aligned} \int n_i n_j d\Omega &= \frac{4\pi}{3} \delta_{ij} \quad , \\ \int n_i n_j n_k n_l d\Omega &= \frac{4\pi}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad . \end{aligned} \quad (4.1.95)$$

Mit Gleichung (4.1.95) und dem Lambda-Tensor als Funktion von  $\hat{n}$  Gleichung (4.1.26) [Mag07]

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15} (11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad . \quad (4.1.96)$$

<sup>7</sup>Höhere Ordnungen, wie Massenoktupol oder Massenstromquadrupol oder noch höhere Terme wurden in den gesamten bisherigen Betrachtungen nicht berücksichtigt. Deshalb ist es nur bedingt richtig, von der gesamten abgestrahlten Leistung zu sprechen.

Somit ergibt sich

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{M}_{ij} \ddot{M}_{ij} - \frac{1}{3} (\ddot{M}_{kk})^2 \rangle \quad . \quad (4.1.97)$$

### Energieverlust durch Gravitationswellen für elliptische Bahnen - erste Beobachtungen

Der nächste Schritt hin zu realistischeren Systemen ist die Annahme von elliptischen statt kreisförmigen Bahnen für die Bewegung von zwei massiven Objekten umeinander. Eine ausführlichere Betrachtung findet man beispielsweise in [Gre03].

Im Folgenden wird wieder von zwei Objekten der Massen  $m_1$  und  $m_2$  (verbunden mit der Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  und der reduzierten Masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ ) ausgegangen. Als Koordinaten sind  $r$  und  $\psi$  (siehe Abbildung (4.1)) festgelegt.

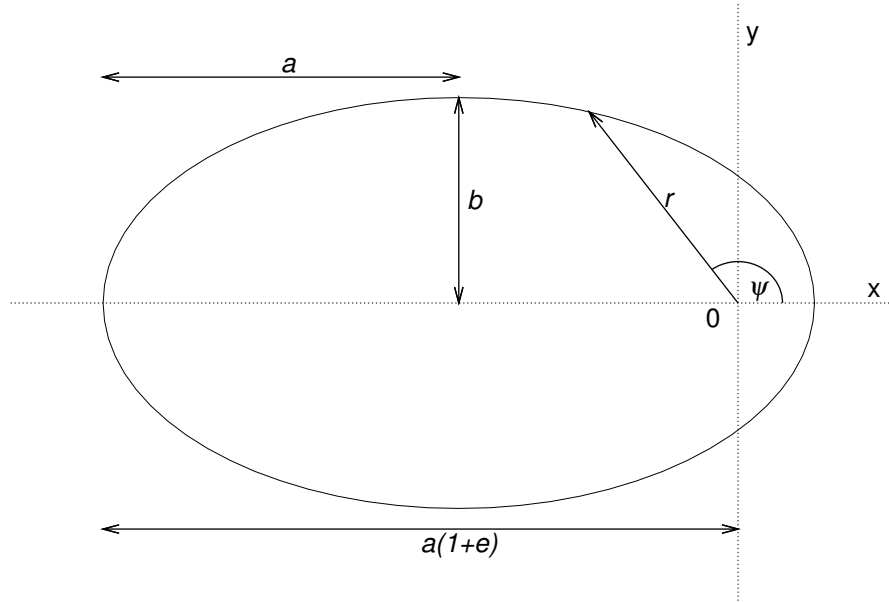


Abbildung 4.1: Ellipse mit den verwendeten Koordinaten  $r$  und  $\psi$ . Die Skizze ist an Fig. 4.3 in [Mag07] angelehnt. Die verwendeten Proportionen für die Halbachsen entsprechen denen des Hulse-Taylor Pulsar PSR B1913+16 [HT75]; [WT02]; [WT05]; [Mag07].

Wie bisher teilt sich das Problem in eine Bewegung des Schwerpunktes und die eines Relativabstandes ein. Als Erhaltungsgrößen setzt man klassisch den Drehimpuls  $L$  und die Energie  $E$  des Systems an. Sie sind durch

$$L = \mu r^2 \dot{\psi} \quad , \quad E = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\psi}^2) - \frac{GM\mu}{r} \quad (4.1.98)$$



gegeben (wobei  $E$  negativ für gebundene Systeme ist)[Gre03]; [Mag07]. Kombiniert ergibt sich daraus eine Differentialgleichung für  $r$  in Abhängigkeit von  $\psi$

$$\frac{L}{\mu r^2} \sqrt{\frac{2E}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \frac{2GM}{r}} dr = d\psi \quad . \quad (4.1.99)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist [Gre03]; [Mag07]

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}(1 + e \cos \psi) \quad , \quad (4.1.100)$$

mit den Parametern [Mag07]

$$R = \frac{L^2}{GM\mu^2} \quad , \quad e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2 M^2 \mu^3} \quad . \quad (4.1.101)$$

Die beiden Halbachsen der Ellipse hängen mit diesen beiden Parametern wie folgt zusammen

$$a = \frac{R}{1 - e^2} \quad , \quad (4.1.102)$$

$$b = \frac{R}{\sqrt{1 - e^2}} \quad . \quad (4.1.103)$$

Damit lässt sich die Radial-Variable  $r$  als Funktion vom Winkel  $\psi$  und den beiden geometrischen Variablen  $e$  und  $a$  ausdrücken

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi} \quad . \quad (4.1.104)$$

Es ist geläufig eine Ellipse durch die große Halbachse  $a$  und ihre Exzentrizität  $e$  anstelle der kleinen Halbachse  $b$  zu beschreiben. Die kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  sind durch die beiden Variablen  $r$  und  $\psi$  als

$$x = r \cos \psi \quad , \quad y = r \sin \psi \quad (4.1.105)$$

gegeben [Mag07]. Der nächste Schritt besteht darin, die Zeitableitung des Winkels  $\dot{\psi}$  als Funktion von  $\psi$  und geometrischen Größen zu schreiben. Dazu benötigt man die Gleichungen (4.1.98), (4.1.101), (4.1.102) und (4.1.104) und erhält so

$$\dot{\psi} = \frac{L}{\mu r^2} = \frac{\sqrt{GMR}}{r^2} = \frac{\sqrt{a(1 - e^2)}}{a^2(1 - e^2)^2} \sqrt{GM}(1 + e \cos \psi)^2 = \sqrt{\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3}}(1 + e \cos \psi)^2 \quad . \quad (4.1.106)$$

Nun kann man das Quadrupolmoment für ein Teilchen der effektiven Masse  $\mu$  betrachten, dass sich auf einer solchen Ellipsenbahn bewegt. Wie bei den Berechnungen zu zwei Massen, die sich auf Kreisbahnen umeinander bewegen, wird hier ein System gewählt, in dem die Bewegung in der x-y-Ebene stattfindet. Dadurch ergibt sich für das, für die

Abstrahlung von Gravitationswellen, relevante Massenmoment (vergleiche mit Gleichung (4.1.56) und folgenden)

$$M_{ij} = \mu r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}_{ij} . \quad (4.1.107)$$

Um die abgestrahlte Leistung der Gravitationswellen berechnen zu können, benötigt man die dritte Zeitableitung des Massenmoments  $M_{ij}$  (siehe dazu Gleichung (4.1.97)). Dazu ist es hilfreich,  $r$  als Funktion von  $\psi$  mit Hilfe von Gleichung (4.1.104) zu ersetzen. Dadurch nimmt Gleichung (4.1.107) folgende Form an:

$$M_{ij} = \mu a^2 (1 - e^2)^2 \frac{1}{(1 + e \cos \psi)^2} \begin{pmatrix} \cos^2 \psi & \sin \psi \cos \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{pmatrix}_{ij} . \quad (4.1.108)$$

Mit (4.1.106) ergeben sich die Zeitableitungen des Massenmoments, so ist zum Beispiel

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\cos^2 \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} \right) = - \frac{2 \sin \psi \cos \psi}{1 + e \cos \psi} \sqrt{\frac{GM}{a^3 (1 - e^2)^3}} . \quad (4.1.109)$$

Nach einigen Umformungen ergibt sich [Mag07]

$$\begin{aligned} \ddot{M}_{11} &= \sqrt{\frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5}} (1 + e \cos \psi)^2 [2 \sin(2\psi) + 3e \sin \psi \cos^2 \psi] , \\ \ddot{M}_{22} &= \sqrt{\frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5}} (1 + e \cos \psi)^2 [-2 \sin(2\psi) - e \sin \psi (1 + 3 \cos^2 \psi)] , \\ \ddot{M}_{12} &= \sqrt{\frac{4G^3 \mu^2 m^3}{a^5 (1 - e^2)^5}} (1 + e \cos \psi)^2 [-2 \cos(2\psi) + e \cos \psi (1 - 3 \cos^2 \psi)] . \end{aligned} \quad (4.1.110)$$

Wie bereits beschrieben, müssen diese Ausdrücke noch in die Quadrupolformel (4.1.97) eingesetzt werden, um die gesamte durch (Quadrupol-)Gravitationswellen abgestrahlte Leistung des Binärsystems zu bestimmen. Nach längeren Umformungen ergibt das [Mag07]

$$P(\psi) = \frac{8G^4 \mu^2 m^3}{15c^5 a^5 (1 - e^2)^5} (1 + e \cos \psi)^4 [12 (1 + e \cos \psi)^2 + e^2 \sin^2 \psi] . \quad (4.1.111)$$

Als nächstes betrachtet man eine zeitliche Mittelung dieses Ausdrucks über eine Umlaufdauer  $T = \frac{2\pi}{\omega_s}$  des Gravitationswellen abstrahlenden Systems [Mag07]

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T dt P(\psi) = \frac{\omega_s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\dot{\psi}} P(\psi) . \quad (4.1.112)$$

An dieser Stelle benutzt man noch das dritte Kepler-Gesetz [Gre03]

$$\omega_s^2 = \frac{GM}{a^3} \quad (4.1.113)$$

und (4.1.106) und erhält

$$P = \frac{\sqrt{(1-e^2)^3}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{(1+e\cos\psi)^2} P(\psi) \quad . \quad (4.1.114)$$

Setzt man  $P(\psi)$  aus Gleichung (4.1.111) ein und führt das Integral aus, ergibt sich die abgestrahlte Leistung als Funktion der elliptischen Exzentrizität  $e$

$$P(e) = \frac{32G^4\mu^2M^3}{5c^5a^5} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \quad . \quad (4.1.115)$$

Gleichung (4.1.115) geht in dieser Form auf Peters und Mathews [PM63] zurück. Interessant ist, schon im Hinblick auf die Anwendung auf Experimente, die Änderung der Periodendauer  $\dot{T}$  normiert auf eine Periodendauer  $T$ . Dazu beobachtet man, dass  $T \sim (-E)^{-3/2}$  ist, was aus Gleichungen (4.1.101), (4.1.102) folgt und die Tatsache, dass die Energie negativ ist, was  $a = \frac{GM\mu}{-2E}$  liefert. Zusammen mit dem dritten Kepler-Gesetz (4.1.113) erhält man einen Zusammenhang zwischen  $T$  und  $E$ . Die Zeitableitung von  $T \sim (-E)^{-3/2}$  liefert  $\dot{T} \sim -\frac{3}{2}(-E)^{-5/2}\dot{E}$  und damit

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} \quad . \quad (4.1.116)$$

Hier setzt man  $a = \frac{GM\mu}{-2E}$  und Gleichung (4.1.115), unter der Berücksichtigung, dass die abgestrahlte Leistung der Gravitationswellen gerade minus die Energieänderung pro Zeit des Systems ist, ein. Zusätzlich verwendet man noch das dritte Kepler-Gesetz (4.1.113) mit  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  und erhält schließlich [Mag07]

$$\begin{aligned} \frac{\dot{T}}{T} &= -\frac{96}{5} \frac{G^3\mu M^2}{c^5a^4} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \\ \Leftrightarrow \dot{T} &= -\frac{96(2\pi)^{8/3}}{5} \frac{G^{5/3}\mu M^{2/3}}{c^5} T^{-5/3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left( 1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4 \right) \quad . \quad (4.1.117) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck stellt einen Zugang zur Verifikation der Existenz von Gravitationswellen dar. Die ersten Beobachtungen, bei denen diese Formel Anwendung fand, waren die von Hulse und Taylor [HT75]; [WT02]; [WT05]. Lässt man die Details der Messungen außer Acht und bedient sich nur ihrer Ergebnisse, erhält man nach [WT02]; [WT05] einen theoretisch berechneten Wert für  $\dot{T}^{\text{GR}}$

$$\dot{T}^{\text{GR}} = -2,40242(2) \times 10^{-12} \frac{\text{s}}{\text{s}} \quad . \quad (4.1.118)$$

Die Zahl in Klammern (2) gibt dabei den Fehler der letzten Stelle des Messwertes, der Zahl vor der Klammer, an. Theoretisch berechnet heißt hier, dass die aus Messungen gewonnenen Werte für Größen wie die Exzentrizität  $e$  und die Massen der beiden Objekte in Gleichung (4.1.117), die aus der Theorie abgeleitet wurde, eingesetzt werden. Diesen Wert kann man mit dem experimentell beobachtbaren Wert  $\dot{T}^{\text{obs}}$  vergleichen, der

$$\dot{T}^{\text{obs}} = -2,4184(9) \times 10^{-12} \frac{\text{s}}{\text{s}} \quad (4.1.119)$$

beträgt [WT05]. Hier muss man allerdings noch eine Korrektur vornehmen. Hintergrund dafür ist, dass sich unser Sonnensystem in einem anderen Abstand zum galaktischen Zentrum befindet, als das Pulsarsystem. Damour und Taylor [DT91] leiten daraus einen Korrekturwert von

$$\dot{T}^{\text{gal}} = -0.0128(50) \times 10^{-12} \frac{\text{s}}{\text{s}} \quad (4.1.120)$$

ab, womit man die intrinsische Zeitänderung des Systems

$$\dot{T}^{\text{intr}} = \dot{T}^{\text{obs}} - \dot{T}^{\text{gal}} = -2.4056(51) \times 10^{-12} \frac{\text{s}}{\text{s}} \quad (4.1.121)$$

erhält. Der Unterschied zwischen (4.1.118) und (4.1.121) ist also innerhalb der Fehlergrenzen, die maßgeblich durch den Wert für  $\dot{T}^{\text{gal}}$  bestimmt sind.

Es gibt eine ganze Reihe weiterer Systeme, in denen die hier vorgestellten Beobachtungen ebenso gemacht wurden. Dazu zählt zum Beispiel das System PSR B1534+12. Die hier gemessenen Werte für  $\dot{T}^{\text{intr}}$  und  $\dot{T}^{\text{GR}}$  stimmen nicht vollständig überein. [Sta+02] führen diese Diskrepanz allerdings auf Ungenauigkeiten in der Abstandsbestimmung des Systems zurück. Ein weiteres System, das mit großem Interesse studiert wird ist das Doppel-Pulsar-System PSR J0737-3039A/B. Es zeichnet sich dadurch aus, dass beide Sterne des Binärsystems als Pulsare beobachtet werden können. Kramer u. a. [Kra+06] geben die hier gemessenen Werte für die Änderungen der Periodendauer als

$$\dot{T}^{\text{intr}} = 1.252(17) \times 10^{-12} \quad , \quad \dot{T}^{\text{GR}} = 1.24787(13) \times 10^{-12} \quad (4.1.122)$$

an. Bemerkenswert an diesen Daten ist, neben der guten Übereinstimmung, dass sie aus nur zweieinhalb Jahren Beobachtungsdauer gewonnen wurden. Dies liegt daran, dass die beiden Pulsare sich in einem relativ geringen Abstand umkreisen (weniger als die Hälfte im Vergleich zum Hulse-Taylor-System) und relativistische Effekte hier stärker sind. Die Umlaufdauer der beiden Pulsare beträgt nur etwa 2,4 Stunden im Vergleich zu etwa 10 Stunden im Hulse-Taylor-System [Bur+03]; [Bur+06]; [Kra+06]; [Mag07].

Die hier beschriebenen Beobachtungen sind die bisher einzigen experimentellen Hinweise auf Gravitationswellen. Obwohl sie keine direkte Beobachtung von Gravitationswellen darstellen, untermauern sie doch die Vorhersage ihrer Existenz. Im folgenden Kapitel werde ich betrachten, ob sich diese indirekten Beobachtungen als Testumgebung für die pseudokomplexe ART eignen.

## 4.2 Modellsystem für Gravitationswellen in der pseudokomplexen ART in linearisierter Theorie

Die in Kapitel 4.1 gemachten Beobachtungen in Binärsystemen stellen den ersten und bisher einzigen Nachweis von Gravitationswellen dar. Zwar publizierte [Web69] die direkte Detektion von Gravitationswellen, eine Verifikation dieser Ergebnisse durch andere Gruppen gelang allerdings nicht. Es wurden sogar Fehler in den Arbeiten von Weber gefunden, sodass seine Ergebnisse heute als falsch gelten [Lev04]. Aus diesem Grund ist die Betrachtung des Energieverlustes durch Gravitationswellen in Binärsystemen als Test der pseudokomplexen ART essenziell. Ich werde dazu im Folgenden ein Modell betrachten, in dem die Vorhersagen der pk-ART äquivalent zur Modifikation der Gravitationskonstante behandelt werden.

In der Geschichte der Physik lassen sich immer wieder Ansätze zur Modifikation der Gravitationskonstante finden. Das älteste Beispiel ist hier wohl die Idee einer zeitlich veränderlichen Gravitationskonstante nach [Dir37]. In [For+93] und den Referenzen darin wird eine Reihe an experimentellen Limits für die zeitliche Änderung der Gravitationskonstante gegeben. Hier ist allerdings eine räumlich veränderliche Gravitationskonstante von Interesse. Ein aktuelles Beispiel für ein solches Modell lässt sich in [WYL12] finden. Dort dient die Modifikation der Gravitationskonstante dazu einen Neutronenstern mit etwa 2 Sonnenmassen noch mit der gängigen Annahme einer „soft equation of state“ vereinbaren zu können, siehe [Oze06]. Auch Liu u. a. [Liu+14] verwenden eine modifizierte Gravitationskonstante, um Quanteneffekte beim gravitativen Kollaps von Materie beschreiben zu können.

Die pseudokomplexen Analoga der Schwarzschild- und Kerr-Metrik lassen sich (unter der Voraussetzung, dass  $g_{00} = -\frac{1}{g_{11}}$  gilt) durch eine Modifikation der Gravitationskonstante beschreiben. Dazu betrachte ich zunächst die  $g_{00}$ -Komponente der pk-Schwarzschild-Metrik (1.3.9). Sie lässt sich wie folgt umformen (im Falle  $B = \frac{64}{27}m^3$ ):

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= -1 + \frac{2m}{r} - \frac{B}{2r^3} \\
 &= -1 + \frac{2m}{r} - \frac{32 m^3}{27 r^3} \\
 &= -1 + \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{32}{27} \left( \frac{GM}{c^2 r} \right)^3 \\
 &= -1 + \frac{2M}{c^2 r} G \left( 1 - \frac{16}{27} \left( \frac{GM}{c^2 r} \right)^2 \right) \\
 &=: -1 + \frac{2M}{c^2 r} \tilde{G}(r) \quad .
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Die so eingeführte modifizierte Gravitationskonstante<sup>8</sup>  $\tilde{G}(r)$  geht im Grenzfall  $r \rightarrow \infty$  in die bekannte Newtonsche Gravitationskonstante über.

---

<sup>8</sup>Obwohl es sich hierbei um keine Konstante handelt, werde ich diese Größe im Folgenden noch als modifizierte Gravitationskonstante bezeichnen.

Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, lassen sich Gravitationswellen in der linearisierten Theorie mit Hilfe des zweiten Massenmoments  $M_{ij}$  (4.1.38) beschreiben. Im Folgenden wird dies dahingehend verändert, dass stattdessen

$$\tilde{M}_{ij} := \frac{1}{c^2} \int d^3r \tilde{G}(r) T_{00}(t, \vec{x}) x_i x_j \quad (4.2.2)$$

betrachtet wird. Es ist möglich, die modifizierte Gravitationskonstante hier mit in das Integral aufzunehmen, bisher gemachte Näherungen und Entwicklungen bleiben davon unberührt. So gilt auch weiterhin die Entwicklung des Energie-Impuls-Tensors nach Gleichung (4.1.34). Gleichung (4.1.35) bleibt ebenfalls erhalten, da es sich hierbei um eine Entwicklung der Zeitabhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors handelt. So gilt noch die Energie-Impuls-Erhaltung (4.1.16) und der Zusammenhang zwischen dem Energie-Impuls-Tensor und dem zweiten Massenmoment, Gleichung (4.1.44), bleibt weiterhin bestehen (mit der Änderung, dass man im Vergleich zu den vorherigen Gleichungen die Gravitationskonstante mit in die Integrale aufnehmen muss).

Für zwei Punktmassen kann man das Integral (4.2.2) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ij} &= \frac{1}{c^2} \int \tilde{G}(r) (m_1 \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) + m_2 \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)) x_i x_j d^3r \\ &= \frac{G}{c^2} \left[ m_1 x_i^1 x_j^1 + m_2 x_i^2 x_j^2 - \frac{16}{27} \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 \left( \frac{1}{r_1^2} m_1 x_i^1 x_j^1 + \frac{1}{r_2^2} m_2 x_i^2 x_j^2 \right) \right] . \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

In der zweiten Zeile wurden einige zusätzliche Annahmen getroffen. Die Zusatzterme erhält man unter der Annahme, dass sich die beiden Teilchen in einem Feld mit Gesamtmasse  $M = m_1 + m_2$  befinden. Sie haben jeweils den Abstand  $r_1$  beziehungsweise  $r_2$  zu dieser Masse. Ich behandle das System also so, als ob sich die beiden Teilchen in einem Hintergrundfeld bewegen, dass durch ihre Gesamtmasse gegeben ist.

Die ersten beiden Terme in (4.2.3) entsprechen genau den klassischen Termen, Gleichung (4.1.55), und lassen sich entsprechend umformen

$$m_1 x_i^1 x_j^1 + m_2 x_i^2 x_j^2 = M x_i^S x_j^S + \mu x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}} . \quad (4.2.4)$$

Hier ist  $M = m_1 + m_2$  wieder die Gesamtmasse und  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$  die reduzierte Masse des Systems.  $x^S$  beschreibt die Schwerpunktskoordinate und  $x^{\text{rel}} = x^1 - x^2$  den Relativabstand der beiden Massen. Die Zusatzterme lassen sich auf ähnliche Weise umformen

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1^2} m_1 x_i^1 x_j^1 + \frac{1}{r_2^2} m_2 x_i^2 x_j^2 &= \frac{1}{r_1^2} m_1 \left( x_i^S + \frac{m_2}{M} x_i^{\text{rel}} \right) \left( x_j^S + \frac{m_2}{M} x_j^{\text{rel}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r_2^2} m_2 \left( x_i^S - \frac{m_1}{M} x_i^{\text{rel}} \right) \left( x_j^S - \frac{m_1}{M} x_j^{\text{rel}} \right) \\ &= \frac{m_1}{r_1^2} \left( x_i^S x_j^S + \frac{m_2}{M} x_i^S x_j^{\text{rel}} + \frac{m_2}{M} x_j^S x_i^{\text{rel}} + \frac{m_2^2}{M^2} x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}} \right) \\ &\quad + \frac{m_2}{r_2^2} \left( x_i^S x_j^S - \frac{m_1}{M} x_i^S x_j^{\text{rel}} - \frac{m_1}{M} x_j^S x_i^{\text{rel}} + \frac{m_1^2}{M^2} x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2}{r_2^2} \right) x_i^S x_j^S + \mu \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) (x_i^S x_j^{\text{rel}} + x_j^S x_i^{\text{rel}}) \\
 &\quad + \mu \left( \frac{m_2}{Mr_1^2} + \frac{m_1}{Mr_2^2} \right) x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}} \quad . \quad (4.2.5)
 \end{aligned}$$

Setzt man in Gleichung (4.2.5)  $r_1 = r_2 = 1$ , so ergibt sich Gleichung (4.2.4). Gleichung (4.2.5) enthält auch einen gemischten Term aus Schwerpunkts- und Relativkoordinate. Zunächst wird der Term  $\mu \left( \frac{m_2}{Mr_1^2} + \frac{m_1}{Mr_2^2} \right) x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}}$  weiter umgeformt. Dazu benutzt man die Tatsache, dass im Schwerpunktsystem

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad (4.2.6)$$

gilt. Hier fällt auch der gemischte Term weg. Benutzt man noch den Relativabstand  $R = r_1 + r_2$  ergibt das

$$r_1 = \frac{m_2}{M} R \quad , \quad r_2 = \frac{m_1}{M} R \quad . \quad (4.2.7)$$

Eine schnelle Umformung liefert dann

$$\frac{m_2}{Mr_1^2} + \frac{m_1}{Mr_2^2} = \frac{M^2}{R^2} \left( \frac{m_2}{Mm_2^2} + \frac{m_1}{Mm_1^2} \right) = \frac{M}{\mu R^2} \quad (4.2.8)$$

und damit

$$\mu \left( \frac{m_2}{Mr_1^2} + \frac{m_1}{Mr_2^2} \right) x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}} = \frac{M}{R^2} x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}} \quad . \quad (4.2.9)$$

Jetzt kann man diesen Zusatzterm mit dem klassischen Term  $\mu x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}}$  vergleichen. Dazu betrachtet man die beiden Vorfaktoren vor den Termen proportional zu  $x_i^{\text{rel}} x_j^{\text{rel}}$  in Gleichung (4.2.3). Der klassische Term hat den Vorfaktor  $\mu$  also die reduzierte Masse, wohingegen der Zusatzterm den Faktor

$$-\frac{16}{27} \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 \frac{M}{R^2} \quad (4.2.10)$$

trägt. Das Verhältnis von  $\mu$  und Gleichung (4.2.10) ist dann

$$-\frac{16}{27} \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 \frac{M}{\mu R^2} = -\frac{16}{27} \left( \frac{r_s/2}{R} \right)^2 \frac{M}{\mu} \quad , \quad (4.2.11)$$

wobei  $r_s$  hier den zur Gesamtmasse  $M$  assoziierten Schwarzschildradius beschreibt. Eine sehr grobe Abschätzung für das Hulse-Taylor-System (PSR B1913+16) liefert für Gleichung (4.2.11) einen Wert der Ordnung  $-10^{-12}$  (die Werte für diese Abschätzung lassen sich aus [TW82]; [WT05] entnehmen). Das heißt, dass

$$\tilde{M}_{ij} \approx (1 - \varepsilon) GM_{ij} \quad (4.2.12)$$

mit  $\mathcal{O}(\varepsilon) = 10^{-12}$  ist, wobei  $M_{ij}$  hier das klassische zweite Massenmoment, Gleichung (4.1.38), ist. Um abschätzen zu können, ob diese sehr kleine Abweichung noch messbar

ist, muss betrachtet werden, wie das Massenmoment (4.2.3) in die Messungen einfließt. Dazu benutze ich die in Kapitel 4.1 beschriebenen Beobachtungen des Systems PSR B1913+16 von Hulse und Taylor. Betrachtet man Gleichung (4.1.97) für die abgestrahlte Leistung der Gravitationswellen, so stellt man fest, dass das zweite Massenmoment (beziehungsweise seine Zeitableitungen) quadratisch in diese Gleichungen eingehen. Wenn also das Massenmoment mit einem Faktor  $1 - \varepsilon$  modifiziert wird, ändert sich die Leistung mit  $1 - 2\varepsilon$ . Die Änderung der Periodendauer des Systems aufgrund des Energieverlustes ( $\dot{E} = -P$ ) ist durch Gleichung (4.1.116)

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{3}{2} \frac{\dot{E}}{E} \quad (4.2.13)$$

gegeben. Die Änderung von  $\dot{T}$  unter Benutzung des Modells einer modifizierten Gravitationskonstante ist allerdings auch von der Ordnung  $10^{-12}$ . Die gemessene relative Änderung der Periodendauer von PSR B1913+16, Gleichung (4.1.119) ist mit

$$\dot{T}^{\text{obs}} = -2,4184(9) \times 10^{-12} \frac{\text{s}}{\text{s}} \quad (4.2.14)$$

allerdings so klein, dass sie Zusatzterme durch die pk-ART hier eine absolute Genauigkeit von  $10^{-28}$  bei der Messung erfordern würden. Die linearisierte Theorie ermöglicht hier keinen nachweisbaren Unterschied zwischen der klassischen ART und dem pk-ART Modell.



## 5.1 Modellsystem 3+1-Formalismus

Die so genannte 3+1 Aufteilung der Einsteingleichungen dient als Grundlage für eine Vielzahl an numerischen Betrachtungen der Allgemeinen Relativitätstheorie [Gou07; Alc08]. Hierbei wird die vierdimensionale Raumzeit in dreidimensionale Hyperflächen  $\Sigma_t$  aufgeteilt, die sich entlang eines Parameters  $t$  ordnen lassen. Zu jeder dieser Hyperflächen lässt sich ein Normalenvektor  $n^\mu$  definieren. In Anhang C wird eine Einführung in den 3+1-Formalismus gegeben.

Insbesondere Simulationen der Verschmelzung von zwei kompakten astronomischen Objekten wie Neutronensternen oder potentiellen Schwarzen Löchern, gründen sich auf Gleichungen des 3+1 Formalismus' [Gou07; Alc08]. Damit verbunden ist auch die numerische Beschreibung von Gravitationswellensignalen, die mit solchen Ereignissen wahrscheinlich einhergehen. Zusätzlich können mit Hilfe dieses Formalismus' realistischere Modelle für die relativistische Hydrodynamik von astrophysikalischen System beschrieben werden [RZ13].

Um Modifikationen der ART, wie die in den vorherigen Kapiteln betrachteten Erweiterungen der pk-ART, untersuchen zu können, bietet der 3+1-Formalismus eine Möglichkeit Phänomene zu beschreiben, ohne auf Näherungen zurückgreifen zu müssen. Dies ist insbesondere relevant, wenn die Modifikationen der Theorie im Grenzfall schwacher Felder keine Auswirkungen haben und Näherungen nicht verwendet werden können, wie es im Rahmen dieser Arbeit der Fall ist.

Mit Hilfe des 3+1 Formalismus' werden die Einsteingleichungen in einen Satz von dynamischen Entwicklungsgleichungen und einen Satz von Randbedingungen aufgespalten. Eine der am häufigsten verwendeten Formen dieser Gleichungen sind die so genannten BSSN-Gleichungen, die auf Shibata und Nakamura [SN95], Nakamura, Kojima und Oohara [NKO84];[NOK87], sowie Baumgarte und Shapiro [BS98] zurückgehen. Die Entwicklungsgleichungen sind dabei als

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi = -\frac{1}{6}\alpha K \quad , \quad (5.1.1a)$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha\tilde{A}_{ij} \quad , \quad (5.1.1b)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K &= -e^{-4\phi} \left( 2\tilde{D}_i\phi\tilde{D}^i\alpha + \tilde{D}_i\tilde{D}^i\alpha \right) + \alpha \left( \tilde{A}_{ik}\tilde{A}^{ki} + \frac{K^2}{3} \right) \\ &\quad + 4\pi G\alpha(S + E) \quad , \end{aligned} \quad (5.1.1c)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left[ -\tilde{D}_i\tilde{D}_j\alpha + 2 \left( \tilde{D}_i\phi\tilde{D}_j\alpha + \tilde{D}_j\phi\tilde{D}_i\alpha - \tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}^k\phi\tilde{D}_k\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^3\mathcal{R}_{ij} + 4\pi G\alpha \left[ (S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij} \right]^{\text{TF}} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left( K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k{}_j \right) \quad , \right. \end{aligned} \quad (5.1.1d)$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk}\partial_l\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{il}\partial_l\partial_k\beta^k - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha \\ &\quad + 2\alpha \left( \left\{ \begin{matrix} \tilde{i} \\ jk \end{matrix} \right\} \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi Ge^{4\phi}p^i \right) \end{aligned} \quad (5.1.1e)$$

gegeben (siehe dafür Gleichung (C.102) und die vorangehenden Ableitungen). Die einzelnen Komponenten dieser Gleichungen sind

$\alpha$  : Lapsefunktion

$\beta^i$  : Shiftfunktion

$\gamma_{ij}$  : räumliche, dreidimensionale Metrik

$\phi$  : konformer Reskalierungsfaktor, alternativ:  $\Psi = e^\phi$

$K$  : Spur der äußeren Krümmung  $K_{ij}$

$\tilde{A}_{ij}$  : konform reskalierte, spurfreie, äußere Krümmung  $\tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi}(K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K)$

$\tilde{\gamma}_{ij}$  : konform reskalierte, räumliche Metrik:  $\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi}\gamma_{ij}$

$\tilde{D}_i$  : durch  $\tilde{\gamma}_{ij}$  induzierte kovariante Ableitung

${}^3\mathcal{R}_{ij}$  : räumlicher Ricci-Tensor

$S_{ij}$  : Materie-Spannungstensor:  $S_{\mu\nu} = \gamma^\alpha{}_\mu\gamma^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta}$

$S$  : Spur des Materie-Spannungstensors

$E$  : Energiedichte:  $E = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}$

$p^i$  : Impulsdichte:  $p^\mu = -\gamma^{\mu\alpha}n^\beta T_{\alpha\beta}$

$n^\mu$  : Normalenvektor an die dreidimensionalen Hyperflächen

$\tilde{\Gamma}^i$  : zusätzliche Entwicklungsgröße der BSSN-Gleichungen:  $\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{jk} \left\{ \begin{matrix} \tilde{i} \\ jk \end{matrix} \right\}$

$\partial_t$  : Zeitableitung

$\mathcal{L}_\beta$  : Lie-Ableitung in Richtung des Shift-Vektors

Für eine ausführlichere Erklärung dieser Größen siehe Anhang C.

Die Gleichungen (5.1.1) enthalten aber noch nicht die gesamten Informationen der

Einsteingleichungen. Wie oben beschrieben fehlen zusätzlich zu diesen Entwicklungsgleichungen noch Gleichungen, die Randwerte festlegen. Hierbei gibt es eine Reihe von verschiedenen Ansätzen, von denen an dieser Stelle die so genannten XCTS-Gleichungen<sup>1</sup> verwendet werden (siehe Gleichungen (C.122) und (C.124))

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi - \frac{1}{8} \tilde{\mathcal{R}} \Psi + \frac{1}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-7} + 2\pi G \tilde{E} \Psi^{-3} - \frac{1}{12} K^2 \Psi^5 = 0 \quad , \quad (5.1.2a)$$

$$\tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} \partial_t \tilde{\gamma}^{ij} \right) + \tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right) - \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{D}^i K - 8\pi G \tilde{p}^i = 0 \quad , \quad (5.1.2b)$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha} \Psi^7) + (\partial_t K - \beta^i \tilde{D}_i K) \Psi^5$$

$$- (\tilde{\alpha} \Psi^7) \left[ \frac{1}{8} \tilde{\mathcal{R}} + \frac{5}{12} K^2 \Psi^4 + \frac{7}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-8} + 2\pi G (\tilde{E} + 2\tilde{S}) \Psi^{-4} \right] = 0 \quad . \quad (5.1.2c)$$

Zusätzlich zu den weiter oben beschriebenen Größen werden

$\hat{A}^{ij}$  : weitere konform reskalierte, spurfreie, äußere Krümmung:  $\hat{A}^{ij} = \Psi^{10} A^{ij}$

$\tilde{\alpha}$  : konform reskalierte Lapse:  $\tilde{\alpha} = \Psi^6 \alpha$

$\tilde{E}$  : konform reskalierte Energiedichte:  $\tilde{E} = \Psi^8 E$

$\tilde{p}^i$  : konform reskalierte Impulsdichte:  $\tilde{p}^i = \Psi^{10} p^i$

$\tilde{S}$  : konform reskalierte Spur des Materie-Spannungstensors:  $\tilde{S} = \Psi^8 S$

$\tilde{\mathcal{R}}$  : konform reskalierter Ricci-Skalar, induziert durch  $\tilde{\gamma}_{ij}$

eingeführt. Auch hier ist eine ausführlichere Behandlung im Anhang C zu finden. Unter Verwendung der Gleichungen (5.1.2c) sind die Größen  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $\partial_t \tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $K$ ,  $\tilde{E}$ ,  $\tilde{p}^i$ ,  $\tilde{S}$  und  $\partial_t K$  frei wählbar. Die Gleichungen legen die drei Größen  $\Psi$ ,  $\beta^i$  und  $\tilde{\alpha}$  fest [Gou07].

Das einfachste Beispiel um mit Hilfe des 3+1 Formalismus' ein System zu beschreiben, ist ein Schwarzschild Schwarzes Loch [Gou07]. Deshalb liegt es nahe, mit einer Beschreibung eines solchen Objektes mit einem zusätzlichen Energie-Impuls-Tensor wie in Gleichung (1.3.11) zu beginnen, um die Vorhersagen von [HG09; Cas+11; Cas+12; Sch+13; Sch+14] zu überprüfen. Bis auf die Materiefreiheit des Raumes können dieselben Annahmen wie in Kapitel C.10 getroffen werden [Gou07].

Zunächst folgt aus der Annahme eines stationären System  $\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = 0$ ,  $\partial_t K = 0$  und  $K = 0$  [Alc08]. Ebenso soll die konforme Metrik den flachen Raum beschreiben, also  $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij}$  gelten. Dadurch reduzieren sich die XCTS-Gleichungen wie in Kapitel C.10 auf

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi + \frac{1}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-7} + 2\pi G \tilde{E} \Psi^{-3} = 0 \quad , \quad (5.1.3a)$$

$$\tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right) - 8\pi G \tilde{p}^i = 0 \quad , \quad (5.1.3b)$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha} \Psi^7) - (\tilde{\alpha} \Psi^7) \left[ \frac{7}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-8} + 2\pi G (\tilde{E} + 2\tilde{S}) \Psi^{-4} \right] = 0 \quad . \quad (5.1.3c)$$

Der spurfreie Teil der äußeren Krümmung ist weiterhin durch Gleichung (C.120) gegeben

$$\hat{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} \left[ \partial_t \tilde{\gamma}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right] \quad . \quad (5.1.4)$$

<sup>1</sup>XCTS steht für eXtended Conformal Thin Sandwich, siehe Anhang C.10

Im Gegensatz zur klassischen ART liegt im hier betrachteten Fall allerdings kein materiefreier Raum mehr vor, wodurch sich die Gleichungen (5.1.3) nicht mehr auf (C.127) reduzieren. Setzt man für die Materieverteilung eine anisotrope Flüssigkeit (1.3.11) an und verwendet, dass die Teilchengeschwindigkeit  $u^\mu$  im stationären Fall gleich dem Normalenvektor  $n^\mu$  ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} n^\nu T_{\mu\nu} &= (\rho + p_\perp) n^\nu u_\mu u_\nu + p_\perp n^\nu g_{\mu\nu} + (p_r - p_\perp) n^\nu v_\mu v_\nu \\ &= -(\rho + p_\perp) u_\mu + p_\perp n_\mu \\ &= -\rho u_\mu \quad . \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

Hier wurde noch ausgenutzt, dass  $v_\mu$  der radiale Einheitsvektor ist, also in  $\Sigma_0$  liegt und somit  $n^\mu v_\mu = 0$  gilt. Gleichung (5.1.5) kann verwendet werden, um die verschiedenen Projektionen des Energie-Impuls-Tensors (C.41, C.43) beziehungsweise deren Spuren (C.46) zu berechnen

$$\begin{aligned} E &= n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} &= \rho \\ T &= T^\mu_\mu = -\rho + p_r + 2p_\perp \stackrel{(1.3.13)}{=} 2(p_\perp - \rho) \\ S &= T + E &= 2p_\perp - \rho \\ p^\mu &= -\gamma^{\mu\alpha} n^\beta T_{\alpha\beta} &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

Die zugehörigen, konform reskalierten Größen sind gerade

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \Psi^8 E = \Psi^8 \rho \quad , \\ \tilde{S} &= \Psi^8 S = \Psi^8 (2p_\perp - \rho) \quad , \\ \tilde{p}^i &= \Psi^{10} p^i = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (5.1.3) vereinfachen. Zunächst ist Gleichung (5.1.3b) durch  $\beta^i = 0$  lösbar. Diese Wahl für  $\beta^i$  führt aber auch dazu, dass die spurlose, konforme, äußere Krümmung, Gleichung (5.1.4), verschwindet. Insgesamt reduzieren sich die Gleichungen (5.1.3) damit also auf

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi + 2\pi G \rho \Psi^5 = 0 \quad , \quad (5.1.8a)$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha} \Psi^7) - 2\pi G (\tilde{\alpha} \Psi^{11}) (4p_\perp - \rho) = 0 \quad . \quad (5.1.8b)$$

Hier entkoppelt sich die Gleichung für den konformen Skalierungsfaktor  $\Psi$ . Für die Annahme einer flachen räumlichen Metrik  $f_{ij}$  gilt noch  $\tilde{D}_i \tilde{D}^i = \Delta$ , wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator ist. Damit und durch Subtraktion der mit  $\alpha$  multiplizierten Gleichung (5.1.8a) von (5.1.8b) zusammen mit  $\tilde{\alpha} \Psi^7 = \alpha \Psi$  ergibt sich

$$\Delta \Psi = -2\pi G \rho \Psi^5 \quad , \quad (5.1.9)$$

$$\Delta \alpha = 8\pi G \alpha p_\perp \Psi^4 \quad . \quad (5.1.10)$$

Bisher ist es nicht gelungen diese Gleichungen analytisch zu lösen.

Ohne den zusätzlichen Energie-Impuls-Tensor erhält man aus diesen Gleichungen die

klassische Schwarzschild-Metrik in isotropen Koordinaten, siehe Kapitel C.10 Gleichung (C.132) [Gou07; Alc08]. Als Ansatz kann man versuchen analog zur klassischen Lösung vorzugehen und eine isotrope Formulierung der erweiterten Schwarzschild-Metrik aufstellen.

Dazu führt man die neue Radialvariable  $\rho$  und eine Funktion  $\lambda(\rho)$  ein. Durch Vergleich der Linienelemente erhält man

$$\lambda^2 \rho^2 = r^2 \quad \text{und} \quad \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{B}{2r^3}} = \lambda^2 d\rho^2 \quad , \quad (5.1.11)$$

oder umgeformt (positive Vorzeichen, weil  $r$  und  $\rho$  für große Werte ineinander übergehen)

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2mr + \frac{B}{2r}}} = \frac{d\rho}{\rho} \quad . \quad (5.1.12)$$

Für den Fall  $B = 0$  lässt sich dieser Ausdruck noch relativ einfach integrieren zu

$$\text{const} \rho = 2(r - m) + 2\sqrt{r^2 - 2mr} \quad (5.1.13)$$

und auch invertieren ( $\text{const} = 4$ ) [ABS75]

$$r = \rho \left( 1 + \frac{m}{2\rho} \right)^2 \quad . \quad (5.1.14)$$

Für den Fall  $B \neq 0$  ist es leider nicht mehr so einfach möglich ein Integral zu finden. Es müssen Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Für den Fall  $B = \frac{64}{27}m^3$  findet sich (mit Mathematica [Wol12]) zwar eine eindeutige Lösung

$$\ln \rho = -2\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arccoth} \left[ 3\sqrt{\frac{r}{4m+6r}} \right] + 2 \ln \left[ 3\sqrt{r} + \sqrt{6m+9r} \right] \quad . \quad (5.1.15)$$

Unter der Berücksichtigung, dass man den Areakotangenshyperbolicus auch als Logarithmus  $\operatorname{arccoth}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right)$  ( $|x| > 1$ ) schreiben kann, hat man hier die Summe zweier Logarithmen. Allerdings verhindert der Vorfaktor  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  eine direkte Invertierung der Gleichung. Man kann noch nach  $\rho$  auflösen

$$\rho = \frac{3 \left( 6r + 3m + \sqrt{9r^2 + 6mr} \right)}{\left( \frac{3\sqrt{\frac{r}{4m+6r}} + 1}{3\sqrt{\frac{r}{4m+6r}} - 1} \right)^{\sqrt{\frac{2}{3}}}} \quad . \quad (5.1.16)$$

Bisher ist es noch nicht gelungen diesen Ausdruck zu invertieren. Damit findet man aber auf diesem Weg auch keinen Ausdruck für eine isotrope Form der modifizierten Schwarzschild-Metrik als Funktion der alten Schwarzschildkoordinaten. Die Idee hierüber einen Ansatz zu finden, um die Gleichungen 5.1.10 zu lösen, scheint also nicht vielversprechend zu sein.

Das vorgestellte Beispiel verdeutlicht, wie schnell man auch bei relativ einfachen Modellen an Grenzen stößt, Probleme analytisch zu lösen. Ein möglicher nächster Schritt ist die Verwendung von Programmen wie LORENE<sup>2</sup> um numerisch Anfangsbedingungen für physikalisch interessante Szenarien, wie die Verschmelzung von zwei umkreisenden Neutronensternen, zu finden. Diese Anfangswerte können zusammen mit den Entwicklungsgleichungen (5.1.1) in Programmen wie dem EINSTEIN TOOLKIT [Lof+12] verwendet werden, um die Dynamik solcher Systeme zu beschreiben.

---

<sup>2</sup>Erhältlich als freie Software unter <http://www.lorene.obspm.fr/>.

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Modellsysteme untersucht, welche Metriken der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie mit Erweiterungen vergleichen, in denen Ereignishorizonte nicht existieren müssen. Die untersuchten Korrekturterme sind durch Schwachfeldmessungen, wie sie zum Beispiel in unserem Sonnensystem durchgeführt werden, nicht überprüfbar. Es ist deshalb nötig solche Systeme zu betrachten, in denen die vollständigen Gleichungen berücksichtigt werden müssen und keine Entwicklungen für schwache Felder gemacht werden können.

Es gibt eine Reihe von astrophysikalischen Systemen, die diese Bedingungen erfüllen, wie das Galaktische Zentrum oder Doppelsternsysteme.

In Kapitel 2 werden Testteilchenorbits in einem Zentralpotential beschrieben und Unterschiede zwischen der klassischen und einer modifizierten Kerr-Metrik herausgearbeitet. Drei neue Phänomene der modifizierten Metrik gegenüber der klassischen treten hier in Erscheinung. Zum einen haben Teilchen, die sich auf prograden Bahnen um den Zentralkörper drehen, ein Maximum in ihrer Winkelgeschwindigkeit (siehe Abbildung 2.1a). Zum anderen ist das Phänomen des *frame-draggings* deutlich schwächer ausgeprägt (siehe Abbildung 2.2). Schließlich tritt ein letzter stabiler Orbit für entsprechend schnell rotierende Zentralkörper nicht mehr auf (siehe Abbildung 2.4). Gleichzeitig sind die Unterschiede in den beiden Metriken für große Abstände ( $r > 10m$ ) nahezu vernachlässigbar.

In Kapitel 3 werden diese Ergebnisse auf zwei unterschiedliche Modelle zur Beschreibung von Akkretionsscheiben angewendet. Untersucht wird zum einen das Verhalten der Eisen-K $\alpha$ -Emissionslinie und zum anderen der Energiefluss aus einer Akkretionsscheibe. In der Form der Eisen-K $\alpha$ -Emissionslinie gibt es eine deutliche Zunahme des rotverschobenen Anteils der Strahlung in der modifizierten Kerr-Metrik gegenüber der klassischen Kerr-Metrik. Die Akkretionsscheibe nach Page und Thorne zeigt unter Verwendung der modifizierten Kerr-Metrik eine signifikante Erhöhung der abgestrahlten Energie, wenn der Zentralkörper so schnell rotiert, dass kein letzter stabiler Orbit mehr auftritt. Zusätzlich gibt es hier in der Scheibe einen dunklen Ring im Vergleich zu den Bildern höherer Ordnung, die in der klassischen Kerr-Metrik auftreten. Erklärbar sind diese Phänomene dadurch, dass sich Teilchen auf stabilen Bahnen in der modifizierten Kerr-Metrik näher an den Zentralkörper heran bewegen können, als es in der klassischen Kerr-Metrik der

---

---

Fall ist. Die Rotverschiebung ist für beide Fälle annähernd gleich.

Kapitel 4 gibt eine kurze Einführung in die Beschreibung von Gravitationswellen im Rahmen der linearisierten Allgemeinen Relativitätstheorie. Hier wird als Modell ein Binärsystem, wie etwa der Hulse-Taylor-Pulsar, betrachtet. Die Unterschiede zwischen der klassischen Theorie und einer Beschreibung unter Hinzunahme von Zusatztermen sind hier erwartungsgemäß sehr gering, da die Linearisierung der Gleichungen dazu führt, dass Starkfeldeffekte vernachlässigt werden. Für große Abstände, was in diesem Fall auch schwache Felder impliziert, sind die Erweiterungen der Gleichungen vernachlässigbar. Hier werden zum Teil auch Effekte in der klassischen ART vernachlässigt, siehe dazu die Diskussion ab Gleichung (1.3.4).

In Kapitel 5.1 befindet sich ein kurzer Ausblick in die 3+1-Formulierung der Einsteingleichungen für die numerische Beschreibung von Gravitationsphänomenen. Diese Beschreibung ermöglicht es auch komplexe Systeme ohne viele nähernde Annahmen genau beschreiben zu können. Diese Systeme können zum einen Akkretionsscheiben um kompakte Objekte sein, aber auch die Verschmelzung von zwei massiven Objekten und die damit verbundenen Gravitationswellensignale. Dadurch lassen sich die Vorhersagen der ART oder etwaiger Erweiterungen präziser modellieren.

In zukünftigen Arbeiten kann die in den Kapiteln 2 und 3 verwendete Annahme, dass sich Testteilchen, beziehungsweise Gasscheiben, ausschließlich im Äquator um ein kompaktes Objekt bewegen, in Zukunft fallen gelassen werden. Dadurch kann man die angestellten Rechnungen auf Teilchenbahnen erweitern, die auch außerhalb des Äquators liegen können. Rechnungen in der klassischen ART dazu finden sich bereits bei Bardeen, Press und Teukolsky [BPT72]. Die in Kapitel 3 vorgestellten Scheibenmodelle gehören zu den einfachsten, die man konstruieren kann. Eine mögliche Erweiterung der vorgestellten Ergebnisse ist die Betrachtung komplexerer Scheibenmodelle, die beispielsweise die Temperatur des Scheibengases berücksichtigen [AF13]. Auch wurde bislang die komplette innere Dynamik und die Existenz von Magnetfeldern nicht berücksichtigt. Perspektivisch ist hier ein mögliches Ziel eine vollständige relativistische Hydrodynamik [RZ13] für den zusätzlichen Energie-Impuls-Tensor (1.3.7), wie er in dieser Arbeit verwendet wird, aufzustellen [RZ13].

Die vorgestellten Ergebnisse liegen innerhalb der Einschränkungen durch aktuelle Messungen. Zukünftige Messungen wie genauere Beobachtungen des Galaktischen Zentrums durch das Event Horizon Telescope [Doe+09; Fal+12] sind aber voraussichtlich dazu in der Lage zwischen den untersuchten Metriken zu unterscheiden.





## Herleitung der modifizierten Kerr-Metrik

Dieser Abschnitt ist ein Auszug aus [Sch11]. Zu beachten ist, dass dort andere Konventionen für die Signatur der Metrik, die Definition des Riemann-Tensors und für den Spinparameter  $a$  verwendet wurden.

### A.1 Die Kerr-Metrik - Ansatz von Carter

Der Ansatz von Carter [Car72]; [PK06] besteht darin, die Separierbarkeit der Klein-Gordon-Gleichung

$$\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta} \right) - m_0^2 \sqrt{-g} = 0 \quad (\text{A.1})$$

zu fordern<sup>1</sup>. Zunächst betrachtet er dafür die „metric co-form“  $\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)$ , da man hier die einzelnen Terme der Klein-Gordon-Gleichung gut ablesen kann. Durch Einführung der Variablen  $\mu := \cos \vartheta$  wird daraus für den Schwarzschildfall

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = & -\frac{1}{r^2} \left[ (1 - \mu^2) \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 \right. \\ & \left. + \Delta_r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{Z_r^2}{\Delta_r} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Dabei sind bei Plebanski et al. [PK06] noch die beiden Funktionen  $\Delta_r := r^2 - r_s r$  und  $Z_r := r^2$  festgelegt worden. Carter geht zunächst nicht näher auf die Form von  $\Delta_r$  und  $Z_r$  ein. Die einzige Einschränkung an die beiden Funktionen besteht darin, dass sie nur von  $r$  abhängen dürfen. Die „metric

---

<sup>1</sup>Carter verwendet die Signatur  $(-,+,+,+)$ , Plebanski et al. und wir verwenden  $(+,-,-,-)$ .

co-form“ kann somit auch folgendermaßen aussehen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= -\frac{1}{r^2} \left[ (1 - \mu^2) \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda} r^2 \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - e^\nu r^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Also muss man hier für den Fall  $\nu \neq -\lambda$  keine Einschränkung machen. Unter Verwendung von (A.2) resultiert die Klein-Gordon-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{Z_r} \left[ -\frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial \mu} \left( (1 - \mu^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) - \frac{1}{\Psi(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} - m_0^2 r^2 \right] \\ - \frac{1}{\Psi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2 \Delta_r}{Z_r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Psi} \frac{r^2 Z_r}{\Delta_r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Durch eine geeignete Substitution  $\Psi = \prod_i \psi_i(x^i)$  ist diese Gleichung separierbar und zerfällt in vier partielle Differentialgleichungen für die jeweiligen Variablen. Hiervon ausgehend soll die „metric co-form“ erweitert werden, sodass auch die Kerr-Metrik als Spezialfall enthalten ist. Gleichzeitig soll aber auch die Separierbarkeit der Klein-Gordon-Gleichung erhalten bleiben. Carter setzt nun für die „metric co-form“ im Kerr-Fall folgendermaßen an

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 &= -\frac{1}{Z} \left[ \Delta_\mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{\Delta_\mu} \left( Z_\mu \frac{\partial}{\partial t} + Q_\mu \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{Z} \left[ \Delta_r \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\Delta_r} \left( Z_r \frac{\partial}{\partial t} + Q_r \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 \right] . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Dieser Ansatz entspricht insofern der Kerr-Metrik, da nur gemischte Terme in  $t$  und  $\varphi$  auftauchen (siehe hierzu die Boyer-Lindquist-Form der Kerr-Metrik [BL67]). Die Funktionen  $\Delta_\mu$ ,  $Q_\mu$ ,  $Z_\mu$  und  $\Delta_r$ ,  $Q_r$ ,  $Z_r$  hängen jeweils nur von der indizierten Variablen ab und die Funktion  $Z$  ist hier noch nicht näher eingeschränkt. (A.2) geht also als Spezialfall für  $\Delta_\mu = 1 - \mu^2$ ,  $Z = r^2$ ,  $Q_r = 0$ ,  $Z_\mu = 0$  und  $Q_\mu = 1$  aus (A.5) hervor. Als Determinante erhält Carter dann

$$\sqrt{-g} = \frac{Z^2}{|Z_r Q_\mu - Z_\mu Q_r|} . \quad (\text{A.6})$$

Die Klein-Gordon-Gleichung hat für diesen Ansatz die Form [PK06]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Psi} \left[ -\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\sqrt{-g}}{Z} \Delta_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\sqrt{-g}}{Z} \Delta_r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{\sqrt{-g}}{Z} m_0^2 Z \Psi \right] \\ - \frac{1}{\Psi} \left( Z_\mu \frac{\partial}{\partial t} + Q_\mu \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[ \frac{1}{\Delta_\mu} \frac{\sqrt{-g}}{Z} \left( Z_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial t} + Q_\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \right] \\ + \frac{1}{\Psi} \left( Z_r \frac{\partial}{\partial t} + Q_r \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left[ \frac{1}{\Delta_r} \frac{\sqrt{-g}}{Z} \left( Z_r \frac{\partial \Psi}{\partial t} + Q_r \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Um die Separierbarkeit der Gleichung zu garantieren, muss der Faktor  $\frac{\sqrt{-g}}{Z}$  ein Produkt einer von  $r$  abhängenden Funktion mit einer nur von  $\mu$  abhängenden Funktion sein. Plebanski et al. [PK06] beschreiben die Möglichkeit durch eine Transformation der Variablen  $r$  und  $\mu$  und Umdefinition der Funktionen  $\Delta_\mu$ ,  $\Delta_r$ ,  $Z_\mu$ ,  $Z_r$ ,  $Q_\mu$  und  $Q_r$  den Faktor  $\sqrt{-g}/Z = 1$  zu wählen. Mit (A.6) entspricht das der Wahl

$$Z = Z_r Q_\mu - Z_\mu Q_r \quad . \quad (\text{A.8})$$

Weiterhin muss  $Z$  als Summe von Funktionen, die von  $r$  respektive  $\mu$  abhängen, darstellbar sein, sonst bereitet der Term proportional zu  $m_0 Z \Psi$  Probleme bei der Separierbarkeit. Das ergibt die Bedingung

$$\frac{dZ_r}{dr} \frac{dQ_\mu}{d\mu} - \frac{dZ_\mu}{d\mu} \frac{dQ_r}{dr} = 0 \quad . \quad (\text{A.9})$$

Es gibt nun verschiedene Möglichkeiten diese Bedingung zu erfüllen. Wir wählen an dieser Stelle wie [Car72]; [PK06] die Konstanz der Funktionen  $Q_r$  und  $Q_\mu$  und nennen sie  $C_r$  und  $C_\mu$ <sup>2</sup>. Um die Separierbarkeit der Gleichung zu garantieren wählt Carter an dieser Stelle den Faktor  $\frac{\sqrt{-g}}{Z} = 1$  und legt damit  $Z = Z_r Q_\mu - Z_\mu Q_r$  fest. Wir sind zunächst davon ausgegangen, dass man hier zusätzlich einen Faktor  $e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}$  - also  $Z = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} (Z_r Q_\mu - Z_\mu Q_r)$  - bekommt, weil für den verallgemeinerten Schwarzschildfall  $\sqrt{-g} = r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}$  gilt. Daraus resultieren aber einige Probleme bei den weiteren Rechnungen. Weiterhin muss  $Z$  als Summe von Funktionen, die von  $r$  respektive  $\mu$  abhängen darstellbar sein, sonst bereitet der Term proportional zu  $m_0 Z \Psi$  Probleme bei der Separierbarkeit. Hier kann man nun  $Q_\mu$  und  $Q_r$  konstant wählen. Wenn man aber von  $Z = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} (Z_r Q_\mu - Z_\mu Q_r)$  ausgeht, muss man diese Forderung ein wenig verändern, sodass  $Q_r$  nicht mehr konstant ist. Daraus ergeben sich in den späteren Rechnungen enorm aufwendige Terme (wir hatten die Christoffelsymbole mit diesem Ansatz berechnet). Aktuell gehen wir aber davon aus, dass die Freiheiten in den verschiedenen Funktionen ausreichen um  $\frac{\sqrt{-g}}{Z} = 1$  zu gewährleisten. Damit kann man wahrscheinlich die Rechnungen von Carter übernehmen und muss nur später in den Einsteingleichungen Quellterme hinzufügen. Nach diesen Überlegungen nimmt die Metrik die folgende Form an

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} \Delta_r C_\mu^2 - \Delta_\mu C_r^2 & 0 & 0 & \Delta_\mu C_r Z_r - \Delta_r C_\mu Z_\mu \\ 0 & -\frac{Z^2}{\Delta_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{Z^2}{\Delta_\mu} & 0 \\ \Delta_\mu C_r Z_r - \Delta_r C_\mu Z_\mu & 0 & 0 & \Delta_r Z_\mu^2 - \Delta_\mu Z_r^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.10})$$

---

<sup>2</sup>Für weitere Diskussionen dieser Wahl siehe [KK09].

Jetzt, da der Ansatz für die Metrik aufgestellt ist, ist es an der Zeit die Einsteingleichungen zu finden und wenn möglich zu lösen. Carter geht nun anders als Adler et al. [ABS75] vor, um die Einsteingleichungen aufzustellen. Er berechnet nicht die Christoffelsymbole, sondern benutzt ein anderes Verfahren, welches im nächsten Kapitel kurz vorgestellt wird.

### Bestimmung der Einsteingleichungen mit Hilfe von Differentialformen

Die hier vorgestellte Methode zur Bestimmung der Einsteingleichungen geht auf Cartan [Car83] zurück. Misner et al. [MTW73] erläutern diese Methode recht ausführlich in ihrem Buch. Eine beispielhafte Rechnung, auf die sich auch Carter [Car72] bezieht, lässt sich im Anhang von [Mis63] finden. Eine mathematisch formale Ausführung findet man in [ONe95]. Wir werden hier die Methode kurz vorstellen und die Einsteingleichungen für die Schwarzschild-Metrik ausführlich ableiten. Die Methode lässt sich grob in drei Schritte gliedern:

1. Man wechselt in ein neues Koordinatensystem, das (mitbewegte) Vierbein oder auch Tetrade (englisch „tetrad“) genannt wird. Dieses System bringt den Vorteil mit sich, dass die Metrik hier Minkowski-Form annimmt und dadurch einige Rechnungen wesentlich vereinfacht werden können. Das Längenelement ist also

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu \quad . \quad (\text{A.11})$$

Wobei die  $\omega^\mu$  Differential- oder auch 1-Formen sind.

2. Nun bestimmt man die so genannten Verbindungs-Formen  $\omega^\mu{}_\nu$ , welche eindeutig<sup>3</sup> durch

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu \\ dg_{\mu\nu} &= \omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

festgelegt sind. Das Symbol  $\wedge$  bezeichnet das „Dach-“, oder „äußere“ Produkt mit der wichtigen Eigenschaft  $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ . Wie häufig in der Physik kann man aufgrund der Eindeutigkeit Lösungen durch Ansätze finden oder „raten“. Sobald sie (A.12) erfüllen, sind sie richtig. Wenn man sich aber mit der Methode vertraut macht, ist es empfehlenswert die Verbindungsformen zunächst direkt zu berechnen. Dies geschieht über

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= -c_{|\mu\nu|}{}^\alpha \omega^\mu \wedge \omega^\nu \\ \omega_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (c_{\mu\nu\alpha} + c_{\mu\alpha\nu} - c_{\nu\alpha\mu}) \omega^\alpha \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

---

<sup>3</sup>für den Eindeutigkeitsbeweis siehe z.B. [ONe95].

wobei die hier verwendete Schreibweise eine Summation über  $\mu$  und  $\nu$  mit  $\mu < \nu$  bedeutet [MTW73]. Bei den  $c_{\mu\nu}^\alpha$  handelt es sich um so genannte „Kommutations-Koeffizienten“. Sie sind über  $[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] =: c_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha$  definiert [MTW73], wobei die  $\vec{e}_\mu$  Basisvektoren sind. Für normale Koordinatenbasisvektoren verschwinden sie, nicht aber für die Tetradenbasis.

3. Hat man die (in 4 Dimensionen) sechs Verbindungsformen  $\omega^\mu{}_\nu$  gefunden, muss man noch die Krümmungsformen

$$\Theta^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu \quad (\text{A.14})$$

bestimmen. Über den Zusammenhang [MTW73]

$$\Theta^\mu{}_\nu = -\mathcal{R}^\mu{}_{\nu|\alpha\beta} \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \quad (\text{A.15})$$

kann man den Riemann-Tensor ablesen. Durch Kontraktion erhält man den Ricci-Tensor  $\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}$ . An dieser Stelle muss noch angemerkt werden, dass die so enthaltenen Tensoren noch in Tetrad-Komponenten aufgeschrieben sind. Um die Koordinaten-Komponenten zu bekommen muss man sie noch zurücktransformieren. Für die Rücktransformation stellt man die  $\omega^\mu$  in Abhängigkeit der Koordinatendifferentialformen  $dx^a$  als  $\omega^\mu = \lambda^\mu{}_a dx^a$  dar. Die Koordinatenkomponenten des Ricci-Tensors erhält man über [Car72]; [DFC90]

$$\mathcal{R}_{ab} = \mathcal{R}_{\mu\nu} \lambda^\mu{}_a \lambda^\nu{}_b \quad . \quad (\text{A.16})$$

Neben dieser Vorgehensweise um die verschiedenen Krümmungsformen zu bestimmen brauchen wir noch Rechenregeln für die äußere Ableitung. So gelten für eine 0-Form  $u$  und eine 1-Form  $\sigma$  die folgenden Regeln [MTW73]; [ONe95]

$$\begin{aligned} d^2 u &= 0 \\ d(u\sigma) &= du \wedge \sigma + u d\sigma \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Die erste Zeile in (A.17) ist eine andere Darstellung der in der Physik bekannten Regeln, dass die Divergenz einer Rotation und die Rotation eines Gradienten verschwindet. Dies kann man zum Beispiel durch die Korrespondenz zwischen der äußeren Ableitung und dem Gradienten, bzw. der Divergenz sehen. Für eine Funktion  $f$  und einen Vektor  $\vec{A}$  im dreidimensionalen euklidischen Raum gilt [Arn00]; [MTW73]

$$df = \omega_{\text{grad } f}^1 \quad , \quad d\omega_{\vec{A}}^1 = \omega_{\text{rot } \vec{A}}^2 \quad , \quad d\omega_{\vec{A}}^2 = (\text{div } \vec{A})\omega^3 \quad , \quad (\text{A.18})$$

wobei  $\omega_{\vec{A}}^1$  und  $\omega_{\vec{A}}^2$  die zu  $\vec{A}$  korrespondierenden 1- beziehungsweise 2-Formen sind und  $\omega_{\text{grad } f}^1$  die zum Gradienten von  $f$  korrespondierende 1-Form ist [Arn00].  $\omega^3$  ist das Volumenelement. Unter Berücksichtigung von  $d^2 = dd = 0$  folgen  $\text{rot}(\text{grad})=0$  und  $\text{div}(\text{rot})=0$ .

## A.2 Die Einsteingleichungen für die Kerr-Metrik über Differentialformen

Mit der im Abschnitt A.1 beschriebenen Vorgehensweise lassen sich aus dem Ansatz von Carter (A.10) die Einsteingleichungen ableiten. [...] Der hier aufgeführte Einstein-Tensor, auf den man schließlich kommt, geht auf Carter [Car72] zurück und wurde in dieser Form von Plebanski et al. [PK06] aufgestellt

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= \frac{1}{2Z} \Delta_{\mu|\mu\mu} + \frac{1}{Z^2} \Delta_r Z_{r|rr} + \frac{a^2}{4Z^3} \Delta_\mu (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) \\
&\quad - \frac{3}{4Z^3} \Delta_r (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) + \frac{a}{2Z^2} \Delta_{\mu|\mu} Z_{\mu|\mu} + \frac{1}{2Z^2} \Delta_{r|r} Z_{r|r} \\
G^0_3 &= -\frac{1}{2Z^2} \sqrt{\Delta_r \Delta_\mu} (aZ_{r|rr} + Z_{\mu|\mu\mu}) \\
G^1_1 &= \frac{1}{2Z} \Delta_{\mu|\mu\mu} + \frac{a^2}{4Z^3} \Delta_\mu (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) - \frac{1}{4Z^3} \Delta_r (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) \\
&\quad + \frac{a}{2Z^2} \Delta_{\mu|\mu} Z_{\mu|\mu} + \frac{1}{2Z^2} \Delta_{r|r} Z_{r|r} \\
G^2_2 &= \frac{1}{2Z} \Delta_{r|rr} - \frac{a^2}{4Z^3} \Delta_\mu (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) + \frac{1}{4Z^3} \Delta_r (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) \\
&\quad - \frac{a}{2Z^2} \Delta_{\mu|\mu} Z_{\mu|\mu} - \frac{1}{2Z^2} \Delta_{r|r} Z_{r|r} \\
G^3_3 &= \frac{1}{2Z} \Delta_{r|rr} - \frac{a}{Z^2} \Delta_\mu Z_{\mu|\mu\mu} - \frac{3a^2}{4Z^3} \Delta_\mu (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) \\
&\quad + \frac{1}{4Z^3} \Delta_r (Z_{\mu|\mu}^2 + Z_{r|r}^2) - \frac{a}{2Z^2} \Delta_{\mu|\mu} Z_{\mu|\mu} - \frac{1}{2Z^2} \Delta_{r|r} Z_{r|r} \quad .
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Durch geeignete Variablentransformationen kann man die Konstanten  $C_r = a$  und  $C_\mu = 1$  wählen [KK09].

Die Kerr-Lösung nach Boyer und Lindquist [BL67] erhält man hier aus den freien Einsteingleichungen  $G^\mu{}_\nu = 0$ . Zunächst merken [PK06] an, dass sich die Gleichung für  $G^0_3$  auf

$$aZ_{r|rr} + Z_{\mu|\mu\mu} = 0$$

reduziert, also eine Summe aus zwei Funktionen, die von unterschiedlichen Variablen abhängen. Diese Gleichung lässt sich direkt durch

$$Z_r = Cr^2 + C_1r + C_2 \quad , \quad Z_\mu = -aC\mu^2 + C_3\mu + C_4 \tag{A.20}$$

lösen. Eingesetzt in  $G^2_2 - G^3_3 = 0$  liefert das nach einigen Umformungen

$$C_4 = \frac{C_2}{a} - \frac{C_1^2 + C_3^2}{4aC} \quad . \tag{A.21}$$

Setzt man das in (A.20) ein, so stellt man fest, dass eine Variablentransformationen  $\mu = \mu' + \frac{C_3}{2aC}$  und Umdefinition  $C_2 = aC'_2 + \frac{C_1^2}{4C}$  denselben Effekt haben, wie die Wahl  $C_3 = 0$ . Also bleibt

$$Z_r = C \left( r + \frac{C_1}{2C} \right)^2 + aC'_2 \quad , \quad Z_\mu = -aC\mu^2 + C'_2 \quad . \quad (\text{A.22})$$

Durch eine weitere Variablentransformationen, diesmal von  $r$ , lässt sich die Konstante  $C_1 = 0$  setzen. Der Faktor  $Z = Z_r - aZ_\mu$  hängt nicht von  $C'_2$  ab, deshalb wählen [PK06]  $C'_2 = aC$ . Anschließend lässt sich der Faktor  $C$  durch eine Umdefinition von  $\varphi$ ,  $\Delta_\mu$  und  $\Delta_r$  absorbieren, was gleichbedeutend mit der Wahl  $C = 1$  ist und auf

$$Z_r = r^2 + a^2 \quad , \quad Z_\mu = a(1 - \mu^2) \quad (\text{A.23})$$

führt [PK06]. Als nächstes betrachten wir  $G^1_1 + G^2_2 = 0$

$$\frac{1}{2Z} (\Delta_{\mu|\mu\mu} + \Delta_{r|rr}) = 0 \quad . \quad (\text{A.24})$$

Wieder liegt eine Summe aus zwei Funktionen unterschiedlicher Variablen vor. Die Funktionen müssen somit konstant sein und wir erhalten [PK06]

$$\Delta_r = Er^2 - r_S r + E_2 \quad , \quad \Delta_\mu = -E\mu^2 + E_3\mu + E_4 \quad . \quad (\text{A.25})$$

Um die Konstanten näher zu bestimmen betrachten wir zunächst  $G^2_2 = 0$ . Durch Einsetzen von (A.23) und (A.25) und Umformen bleibt

$$E_4 a^2 - E_2 = 0 \quad . \quad (\text{A.26})$$

Weiterhin fordern [PK06] einige Einschränkungen an die verbleibenden Konstanten. So muss  $E_3 = 0$  sein, denn sonst würde ein Term proportional zu  $\mu = \cos\vartheta$  in der Metrik auftauchen. Dieser Term verletzt aber die Symmetrie in Hinsicht auf eine Spiegelung an der Äquatorebene. Um eine Koordinatensingularität an den Polen zu vermeiden fordern [PK06]  $E = 1$ . Schließlich muss noch  $E_4 = 1$  gesetzt werden, um die Schwarzschildlösung als Grenzfall erhalten zu können. Damit haben wir also

$$\begin{aligned} Z_r &= r^2 + a^2 \quad , \quad Z_\mu = a(1 - \mu^2) \quad , \\ \Delta_r &= r^2 - r_S r + a^2 \quad , \quad \Delta_\mu = 1 - \mu^2 \quad , \\ Z &= Z_r - aZ_\mu = r^2 + a^2\mu^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Eingesetzt in (A.10) ergibt sich nach einigen Umformungen gerade die Boyer-Lindquist-Darstellung der Kerr-Metrik [Car72].

Im Gegensatz zu den gerade gezeigten Rechnungen für die klassische Kerr-Lösung, setzen wir die Einsteingleichungen durch das erweiterte Variationsprinzip (1.2.9) nicht mehr Null, sondern gleich Elementen aus dem Nullteiler [...]. Auf der Suche nach einer Lösung für die Einsteingleichungen  $G^\mu{}_\nu = \Xi^\mu{}_\nu$  mit (A.19) bietet es sich nun an, ähnliche Kombinationen wie in [PK06] zu betrachten

$$\begin{aligned}
G^0{}_3 &: -\frac{1}{2Z^2}\sqrt{\Delta_{R_-}\Delta_{\mu_-}}(aZ_{R_-|R_-R_-} + Z_{\mu_-|\mu_- \mu_-}) &= \Xi^0{}_3 \\
G^1{}_1 + G^2{}_2 &: \frac{1}{2Z}(\Delta_{\mu_-|\mu_- \mu_-} + \Delta_{R_-|R_-R_-}) &= \Xi^1{}_1 + \Xi^2{}_2 \\
G^2{}_2 - G^3{}_3 &: \frac{a}{Z^2}\Delta_{\mu_-}Z_{\mu_-|\mu_- \mu_-} + \frac{a^2}{2Z^3}\Delta_{\mu_-}(Z_{\mu_-|\mu_-}^2 + Z_{R_-|R_-}^2) &= \Xi^2{}_2 - \Xi^3{}_3 \\
G^0{}_0 - G^1{}_1 &: \frac{1}{Z^2}\Delta_{R_-}Z_{R_-|R_-R_-} - \frac{1}{2Z^3}\Delta_{R_-}(Z_{\mu_-|\mu_-}^2 + Z_{R_-|R_-}^2) &= \Xi^0{}_0 - \Xi^1{}_1 \\
G^2{}_2 &: \frac{1}{2Z}\Delta_{R_-|R_-R_-} - \frac{a^2}{4Z^3}\Delta_{\mu_-}(Z_{\mu_-|\mu_-}^2 + Z_{R_-|R_-}^2) \\
&\quad - \frac{a}{2Z^2}\Delta_{\mu_-|\mu_-}Z_{\mu_-|\mu_-} + \frac{1}{4Z^3}\Delta_{R_-}(Z_{\mu_-|\mu_-}^2 + Z_{R_-|R_-}^2) \\
&\quad - \frac{1}{2Z^2}\Delta_{R_-|R_-}Z_{R_-|R_-} &= \Xi^2{}_2 \quad .
\end{aligned} \tag{A.28}$$

[...]

Den zweiten Ansatz, um eine Lösung für (A.28) zu finden, bildet die Annahme, dass die fünf verschiedenen  $\Xi^\mu{}_\nu$  beliebige Funktionen von  $R_-$  und  $\mu_-$  sind und zunächst kein Zusammenhang zu den  $\xi_\mu$  der Schwarzschild-Lösung besteht. Durch geeignete Wahl dieser Funktionen lässt sich (A.28) derart lösen, dass man eine Verallgemeinerung der [Kerr-]Metrik erhält. Die erste Annahme treffen wir durch  $\Xi^0{}_3 = 0$ . Damit sind

$$Z_{R_-} = CR_-^2 + C_1R_- + C_2 \quad , \quad Z_{\mu_-} = -a_-C\mu_-^2 + C_3\mu_- + C_4 \quad , \tag{A.29}$$

wie in (A.20). Mit der Wahl  $\Xi^2{}_2 - \Xi^3{}_3 = 0$  erhält man (A.21) und die daran anschließenden Umformungen können genauso übernommen werden, sodass wie in (A.23)

$$Z_{R_-} = R_-^2 + a_-^2 \quad , \quad Z_{\mu_-} = a_-(1 - \mu_-^2) \tag{A.30}$$

bleibt. Die vierte Gleichung in (A.28) liefert  $\Xi^0{}_0 - \Xi^1{}_1 = 0$ . Bisher sind die Ergebnisse identisch mit denen aus [Car72]; [PK06]. Durch die Annahme  $\Xi^1{}_1 + \Xi^2{}_2 = 0$  erhält man analog zu Gleichung (A.24)

$$\Delta_{R_-|R_-R_-} + \Delta_{\mu_-|\mu_- \mu_-} = 0 \quad , \tag{A.31}$$

was durch

$$\Delta_{R_-} = ER_-^2 - R_-^2 + E_2 \quad , \quad \Delta_{\mu_-} = -E\mu_-^2 + E_3\mu_- + E_4 \tag{A.32}$$



gelöst wird. Eingesetzt in die letzte Gleichung aus (A.28) bleibt

$$E_2 - a_-^2 E_4 = Z^2 \Xi^2_2 \quad . \quad (\text{A.33})$$

Setzt man nun auch  $\Xi^2_2 = 0$ , entspricht das Gleichung (A.26), was auf die klassische Kerr-Lösung führt. Die Wahl  $\Xi^2_2 = \frac{B}{Z^2}$  ergibt eine Änderung dieser Lösung, die im Grenzfall  $a \rightarrow 0$  in [die Schwarzschildlösung] übergeht. Die Bestimmung der restlichen Konstanten erfolgt hier analog zu den Betrachtungen nach Gleichung (A.26). Schließlich haben wir damit

$$\begin{aligned} Z_{R_-} &= R_-^2 + a_-^2 \quad , \quad Z_{\mu_-} = a_-(1 - \mu_-^2) \quad , \\ \Delta_{R_-} &= R_-^2 - R_S^- R_- + a_-^2 + B \quad , \quad \Delta_{\mu_-} = 1 - \mu_-^2 \quad , \\ Z &= Z_{R_-} - a_- Z_{\mu_-} = R_-^2 + a_-^2 \mu_-^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Eingesetzt in (A.10) zusammen mit  $\mu = \cos \theta$  haben wir damit den zu  $\sigma_-$  proportionalen Teil der Metrik

$$\begin{aligned} g_{00}^- &= \frac{R_-^2 - R_S^- R_- + B + a_-^2 \cos^2 \theta_-}{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-} \\ g_{11}^- &= -\frac{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-}{R_-^2 - R_S^- R_- + a_-^2 + B} \\ g_{22}^- &= -R_-^2 - a_-^2 \cos^2 \theta_- \\ g_{33}^- &= -(R_-^2 + a_-^2) \sin^2 \theta_- - \frac{a_-^2 \sin^4 \theta_- (R_S^- R_- - B)}{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-} \\ g_{03}^- &= \frac{-a_- \sin^2 \theta_- R_S^- R_- + a_- B \sin^2 \theta_-}{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Die  $\sigma_+$ -Komponenten entsprechen denen der klassischen Kerr-Lösung. Durch anschließende Projektion auf reelle Größen, wie in Kapitel 3 beschrieben, erhält man die Metrik

$$\begin{aligned} g_{00}^{Re} &= \frac{r^2 - r_S r + \frac{B}{2} + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \\ g_{11}^{Re} &= -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}{r^2 - r_S r + a^2 + \frac{B}{2}} \\ g_{22}^{Re} &= -r^2 - a^2 \cos^2 \vartheta \\ g_{33}^{Re} &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \vartheta - \frac{a^2 \sin^4 \vartheta (r_S r - \frac{B}{2})}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \\ g_{03}^{Re} &= \frac{-a \sin^2 \vartheta r_S r + a \frac{B}{2} \sin^2 \vartheta}{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Im Grenzfall  $a = 0$  geht sie gerade in [die modifizierte Schwarzschild-Metrik [HG09]] und für den Fall  $B = 0$  in die klassische Kerr-Lösung [BL67] über.

Die in Gleichung (A.36) vorgestellte Metrik enthält in dieser Form allerdings auch wieder quadratische Korrekturterme, die experimentell ausgeschlossen sind [Wil06]. Sie wurde deshalb in [Cas+12] noch einmal erweitert, um Korrekturterme beliebiger Ordnungen beschreiben zu können. Davon wurde der kleinste mit dem Experiment vereinbare Term ( $\mathcal{O}(1/r^3)$ ) gewählt, um die Metrik in Gleichung (1.3.1) zu erhalten. Aus diesem Grund ist hier noch ein Auszug aus [Cas+12] mit aufgenommen

Now, we consider the second equation of (A.28) with the assumption  $\Xi_1^1 + \Xi_2^2 = \frac{1}{2Z} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^n}$  (the right hand side simulates the contribution of  $T_{\text{de}}^{\mu\nu}$  of the "dark energy"), which yields<sup>4</sup>

$$\Delta_{R_-|R_-R_-} + \Delta_{\mu_-|\mu_- \mu_-} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^n} = 0 \quad . \quad (\text{A.37})$$

Again we have two functions of different variables to be equal. This leads to

$$\begin{aligned} \Delta_{R_-} &= ER_-^2 - 2\mathcal{M}_-R_- + E_2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}} \quad , \\ \Delta_{\mu_-} &= -E\mu_-^2 + E_3\mu_- + E_4 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Inserting this and (A.23) into the last equation of (A.28) we get after some algebra

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}} \left( \frac{1}{n-2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\tilde{B}_n a_-^2 \mu_-^2}{2R_-^n} \right) + (E_2 - E_4 a_-^2) = Z^2 \Xi_2^2 \quad . \quad (\text{A.39})$$

If we now chose

$$\Xi_2^2 = \frac{1}{Z^2} \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}} \left( \frac{1}{n-2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\tilde{B}_n a_-^2 \mu_-^2}{2R_-^n} \right) \quad , \quad (\text{A.40})$$

the previous equation can be fulfilled while retaining the condition  $(E_2 - E_4 a_-^2) = 0$  as in the classical case.

In order to determine the remaining constants in  $\Delta_{R_-}$  and  $\Delta_{\mu_-}$  we will proceed analogously to Plebánski and Krasiński [PK06]. At first we set  $E_3 = 0$ , otherwise one would have a term proportional to  $\mu_- = \cos \theta_-$ , which violates the symmetry with respect to a reflection on the equatorial plane. To avoid a coordinate singularity at the poles, we set  $E = 1$ . Finally we choose  $E_4 = 1$  to get the correct Schwarzschild metric in the limit  $a_- \rightarrow 0$ . This leaves us then with

$$\begin{aligned} Z_{R_-} &= R_-^2 + a_-^2 \quad , \quad Z_{\mu_-} = a_-(1 - \mu_-^2) \quad , \\ \Delta_{R_-} &= R_-^2 - 2\mathcal{M}_-R_- + a_-^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}} \quad , \\ \Delta_{\mu_-} &= 1 - \mu_-^2 \quad , \quad Z = Z_{R_-} - a_- Z_{\mu_-} = R_-^2 + a_-^2 \mu_-^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

---

<sup>4</sup>Instead of the whole series one could choose only one or several of the terms in the series. Later we will restrict our discussions to the case  $n = 3$  as in the previous sections.

This can be inserted into (A.10) and, together with  $\mu = \cos\theta$ , we get the  $\sigma_-$ -part of the metric

$$\begin{aligned}
 g_{00}^- &= \frac{R_-^2 - 2\mathcal{M}_- R_- + a_-^2 \cos^2 \theta_- + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}}}{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-} \\
 g_{11}^- &= -\frac{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-}{R_-^2 - 2\mathcal{M}_- R_- + a_-^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}}} \\
 g_{22}^- &= -R_-^2 - a_-^2 \cos^2 \theta_- \\
 g_{33}^- &= -(R_-^2 + a_-^2) \sin^2 \theta_- - \frac{a_-^2 \sin^4 \theta_- \left( 2\mathcal{M}_- R_- - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}} \right)}{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-} \\
 g_{03}^- &= \frac{-a_- \sin^2 \theta_- 2\mathcal{M}_- R_- + a_- \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{R_-^{n-2}} \sin^2 \theta_-}{R_-^2 + a_-^2 \cos^2 \theta_-} . \quad (\text{A.42})
 \end{aligned}$$

Note, that in spite of all assumptions made, (A.42) represents a new Kerr solution also in standard GR with a special  $T^{\mu\nu}$  tensor. This is because, as mentioned before, each  $\sigma_{\pm}$  component describes one particular GR with a given symmetric metric.

The  $\sigma_+$ -component matches the classical Kerr solution. Finally, projecting the pc-metric on its real part, as described above, yields the metric

$$\begin{aligned}
 g_{00}^{Re} &= \frac{r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{2r^{n-2}}}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\
 g_{11}^{Re} &= -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{2r^{n-2}}} \\
 g_{22}^{Re} &= -r^2 - a^2 \cos^2 \theta \\
 g_{33}^{Re} &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \theta - \frac{a^2 \sin^4 \theta \left( 2mr - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{2r^{n-2}} \right)}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\
 g_{03}^{Re} &= \frac{-a \sin^2 \theta 2mr + a \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{\tilde{B}_n}{2r^{n-2}} \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} . \quad (\text{A.43})
 \end{aligned}$$

For the further discussions we will only consider the case  $n = 3$ , which results in the metric

$$\begin{aligned}
 g_{00}^{Re} &= \frac{r^2 - 2mr + a^2 \cos^2 \theta + \frac{B}{2r}}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \\
 g_{11}^{Re} &= -\frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r^2 - 2mr + a^2 + \frac{B}{2r}} \\
 g_{22}^{Re} &= -r^2 - a^2 \cos^2 \theta \\
 g_{33}^{Re} &= -(r^2 + a^2) \sin^2 \theta - \frac{a^2 \sin^4 \theta \left( 2mr - \frac{B}{2r} \right)}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}
 \end{aligned}$$

$$g_{03}^{Re} = \frac{-a \sin^2 \theta \, 2mr + a \frac{B}{2r} \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} . \quad (\text{A.44})$$

Gleichung (A.44) entspricht gerade (bis auf die Verwendung unterschiedlicher Konventionen) der in dieser Arbeit verwendeten modifizierten Kerr-Metrik in Gleichung (1.3.1).



## Interaktion von Gravitationswellen mit Materie in linearisierter Theorie

Ein frei fallendes System stellt ein einfaches System für einen Gravitationswellen-Detektor dar (in einem hinreichend kleinen Bereich kann man hier die Metrik als lokal flach ansehen [Mag07]). Mit gewissen Überlegungen kann man auch erdgebundene Systeme durch ein solches frei fallendes System ersetzen - hauptsächlich liegt das daran, dass Gravitationswellen im Vergleich zu den anderen Störeffekten auch sehr hohe Frequenzen tragen können [Mag07]. Im Folgenden wird ein solches System im freien Fall betrachtet. Dabei lässt sich die Auslenkung eines Teilchens über die so genannte *geodätische Abweichung* beschreiben. Um diese Abweichung zu bestimmen, betrachtet man zwei Geodäten, eine beschrieben durch  $x^\mu$ , welche die Geodätengleichung [Mag07]

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} (x) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad (\text{B.1})$$

erfüllt, die andere gegeben durch  $x^\mu + \xi^\mu$  mit der entsprechenden Geodätengleichung [Mag07]

$$\frac{d^2(x^\mu + \xi^\mu)}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} (x + \xi) \frac{d(x^\nu + \xi^\nu)}{d\tau} \frac{d(x^\rho + \xi^\rho)}{d\tau} = 0 \quad . \quad (\text{B.2})$$

Geht man davon aus, dass  $|\xi^\mu|$  viel kleiner als die Größenordnung der Variation des Gravitationsfeldes ist, so lässt sich die Differenz von Gleichungen (B.1) und (B.2) linear in  $\xi^\mu$  entwickeln - es bleibt die Gleichung der *geodätischen Abweichung* [Mag07]

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + 2 \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{d\xi^\rho}{d\tau} + \xi^\sigma \partial_\sigma \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \quad . \quad (\text{B.3})$$

Diese reduziert sich unter Annahme eines nicht-relativistischen ( $\frac{dx^0}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau}$ ), frei fallenden ( $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} = 0$ ) Detektors auf

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \xi^\sigma \partial_\sigma \left\{ \begin{matrix} \mu \\ 00 \end{matrix} \right\} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad . \quad (\text{B.4})$$

---

Die Annahme, dass die Metrik näherungsweise lokal flach ist, führt dazu, dass man sie als  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(x^i x^j)$  schreiben kann [Mag07]. Man kann daher zeitliche Ableitungen der Christoffelsymbole vernachlässigen. Dadurch reduziert sich der Term  $\xi^\sigma \partial_\sigma \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ 00 \end{smallmatrix} \right\}$  auf  $\xi^j \partial_j \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ 00 \end{smallmatrix} \right\}$ . Gleichzeitig lässt sich der Riemann-Tensor aus Gleichung (4.1.2) nähern, indem man berücksichtigt, dass die Christoffelsymbole in dem lokalen System verschwinden

$$\mathcal{R}^\mu{}_{\sigma\nu\eta} \approx -\partial_\eta \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} + \partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \sigma\eta \end{smallmatrix} \right\} . \quad (\text{B.5})$$

Damit ergibt sich

$$\mathcal{R}^\mu{}_{0j0} \approx \partial_j \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ 00 \end{smallmatrix} \right\} . \quad (\text{B.6})$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Riemann-Tensors gilt  $\mathcal{R}^0{}_{0j0} = 0$  und es folgt (hier werden nur die räumlichen Komponenten betrachtet)

$$\frac{d^2 \xi^i}{d\tau^2} + \xi^j \mathcal{R}^i{}_{0j0} \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0 . \quad (\text{B.7})$$

Für nicht-relativistische Beobachter lässt sich noch  $\tau$  durch  $t$  und  $\frac{dx^0}{d\tau}$  durch  $c$  ersetzen [Mag07] und es ergibt sich damit (vergleiche auch [MTW73, S. 860])

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} + \xi^j \mathcal{R}^i{}_{0j0} c^2 = 0 . \quad (\text{B.8})$$

Schließlich kann man noch einen Zusammenhang zwischen dem Riemann-Tensor  $\mathcal{R}_{0i0j}$  und der Wellenamplitude  $h_{ij}^{TT}$  herstellen. Man geht zunächst von Gleichung (4.1.6) aus und betrachtet  $\mathcal{R}_{0i0j}$

$$\mathcal{R}_{0i0j} = \frac{1}{2} (-\partial_0 \partial_0 h_{ij} - \partial_i \partial_j h_{00} + \partial_i \partial_0 h_{0j} + \partial_0 \partial_j h_{i0}) . \quad (\text{B.9})$$

Bislang wurde hier noch nicht die TT-Eichung verwendet. Wenn man  $h^{0\mu} = 0$  aus Gleichung (4.1.20) berücksichtigt, wird aus dem Ausdruck für den Riemann-Tensor in Gleichung (B.9)

$$\mathcal{R}_{0i0j} = -\frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{ij}^{TT} . \quad (\text{B.10})$$

Damit folgt unter Berücksichtigung von  $\mathcal{R}_{0i0j} = \mathcal{R}^i{}_{0j0}$

$$\frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = \frac{1}{2} c^2 \xi^j \partial_0 \partial_0 h_{ij}^{TT} . \quad (\text{B.11})$$

Gleichung (B.11) beschreibt die Auswirkung der Gravitationswellenamplituden  $h_{ij}^{TT}$  auf die Position eines Testteilchens  $\xi^i$  [Mag07].



## 3+1 Formalismus

### C.1 Hyperflächen

Essenziell für die 3+1 Formulierung der ART ist der Begriff der Hyperflächen. Formal ist eine Hyperfläche das Bild einer Einbettung<sup>1</sup>  $\Phi$  von einer (in unserem Fall dreidimensionalen) Mannigfaltigkeit  $\hat{\Sigma}$  [Gou07]

$$\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma}) \quad (\text{C.1})$$

in eine (in unserem Fall vierdimensionale) Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ . Im Folgenden werden wird die Hyperfläche  $\hat{\Sigma}$  mit ihrem Bild  $\Sigma$  in  $\mathcal{M}$  identifiziert. Analog wird mit Vektoren tangential an  $\Sigma$  verfahren, um sie mit ihrer vierdimensionalen Version gleichsetzen zu können.

Die Einbettung induziert eine Abbildung für genau diesen Zweck, den *Pushforward*  $\Phi_*$ . Er bildet Tangentialvektoren an  $\hat{\Sigma}$  punktweise auf Tangentialvektoren an  $\Sigma$  in  $\mathcal{M}$  ab [Gou07]

$$\Phi_* : \mathbf{v} \in \mathcal{T}(\hat{\Sigma}) \mapsto \Phi_*(\mathbf{v}) \in \mathcal{T}(\mathcal{M}) \quad . \quad (\text{C.2})$$

Komplementär dazu ist der *Pullback*  $\Phi^*$  als Abbildung von 1-Formen im Cotangentialraum  $\mathcal{T}^*(\mathcal{M})$  auf 1-Formen im Cotangentialraum  $\mathcal{T}^*(\hat{\Sigma})$

$$\begin{aligned} \Phi^* : \omega &\mapsto \Phi^*(\omega) : \mathcal{T}(\hat{\Sigma}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ &\mathbf{v} \longmapsto \langle \omega, \Phi_*(\mathbf{v}) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Lokal lässt sich eine Hyperfläche  $\Sigma_t$  als die Menge aller Punkte  $p$  der Mannigfaltigkeit definieren, für die ein Skalarfeld  $t$  konstant ist, also zum Beispiel den Wert null annimmt. Ein Beispiel für eine solche Hyperfläche ist die Oberfläche der Kugel im dreidimensionalen Raum. Sie lässt sich durch  $t := r - R = 0$  definieren, wobei  $R$  der Radius der Kugel und  $r$  die Radialvariable ist [Gou07].

Um die abstrakten Definitionen von Einbettung, Pushforward und Pullback greifbar zu

---

<sup>1</sup>Einbettung bedeutet, dass  $\Phi$  die Mannigfaltigkeit  $\hat{\Sigma}$  bijektiv und stetig auf  $\Sigma$  abbildet und dass die Umkehrung  $\Phi^{-1}$  ebenfalls stetig ist.

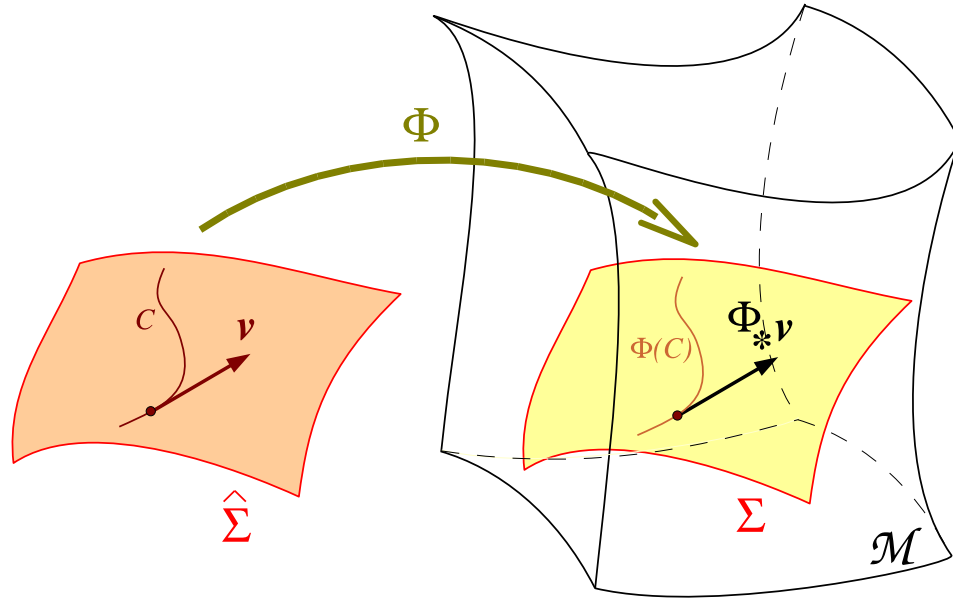


Abbildung C.1: Einbettung  $\Phi$  einer Hyperfläche  $\hat{\Sigma}$  in eine Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$ , entnommen aus [Gou07].  $\Phi$  „transportiert“ auch Kurven in  $\hat{\Sigma}$  nach  $\Sigma$  und liefert eine Abbildung für Vektoren, den Pushforward  $\Phi_*$ .

machen, kann man beispielhaft ein bestimmtes Koordinatensystem betrachten. Für die vierdimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  wählt man die Koordinaten  $x^\alpha = (t, x, y, z)$ . Eine bestimmte Hyperfläche lässt sich durch  $t = 0$  festlegen. Wenn man noch  $x^i = (x, y, z)$  als Koordinatensystem auf  $\hat{\Sigma}$  wählt, erhält man für die Einbettung  $\Sigma_{t=0}$  von  $\hat{\Sigma}$  [Gou07]

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto (0, x, y, z) \quad . \quad (\text{C.4})$$

Der Pushforward nimmt die Form

$$\Phi_* : \mathbf{v} = (v^x, v^y, v^z) \mapsto \Phi_*(\mathbf{v}) = (0, v^x, v^y, v^z) \quad (\text{C.5})$$

an und der Pullback wird zu [Gou07]

$$\Phi^* : \boldsymbol{\omega} = (\omega_t, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \mapsto \Phi^*(\boldsymbol{\omega}) = (0, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \quad . \quad (\text{C.6})$$

Es ist möglich einer solchen Hyperfläche eine Reihe von Eigenschaften und Tensoren zuzuordnen, auch ohne dabei die Einsteingleichungen zu berücksichtigen. Zunächst lässt sich eine Metrik  $\gamma$  auf der Hyperfläche definieren, so dass das Längenelement innerhalb der Hyperfläche durch

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (\text{C.7})$$

gegeben ist [Alc08]. Auch gilt für das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ , die tangential an die Hyperfläche sind, die Relation [Gou07]

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \gamma_{ij} u^i u^j \quad . \quad (\text{C.8})$$



Später wird noch ein bestimmtes Koordinatensystem eingeführt, in dem  $\gamma_{ij} = g_{ij}$  gilt. Ein weitere zentrale Größe ist der Normalenvektor an die Hyperfläche. Er lässt sich über den Gradienten  $\nabla t$ , mit den Komponenten  $\nabla^\mu t = g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha t$ , des Hyperflächenparameters  $t$  definieren. Dieser Gradient legt eine Richtung orthogonal zu  $\Sigma_t$  fest. Er lässt sich noch normieren und damit den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  definieren [Gou07]

$$\mathbf{n} := \frac{1}{\sqrt{\nabla t \cdot \nabla t}} \nabla t \quad , \quad (\text{C.9})$$

was komponentenweise

$$n^\mu := \frac{1}{\sqrt{g^{\alpha\nu} \nabla_\alpha t \nabla_\nu t}} g^{\alpha\mu} \nabla_\alpha t \quad (\text{C.10})$$

ergibt. An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass  $t$  nicht unbedingt eine der Koordinaten sein muss, mit der die Mannigfaltigkeit beschrieben wird. Vielmehr kann es sich hierbei auch um eine skalare Funktion der Koordinaten handeln. Wichtig ist nur, dass  $t$  entlang der Hyperfläche  $\Sigma_t$  konstant ist. Mit  $\mathbf{n}$  kann man auch sehr schnell entscheiden, ob es sich bei  $\Sigma_t$  um eine raum- oder zeitartige Fläche handelt. Dabei gilt folgende Zuordnung [Gou07]

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1 &\Leftrightarrow \mathbf{n} \text{ ist zeitartig} && \Leftrightarrow \Sigma_t \text{ ist raumartig} \quad , \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = +1 &\Leftrightarrow \mathbf{n} \text{ ist raumartig} && \Leftrightarrow \Sigma_t \text{ ist zeitartig} \quad , \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{n} \text{ ist null} && \Leftrightarrow \Sigma_t \text{ ist null} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Eine weitere Größe zur Beschreibung der Hyperflächen ist ihre innere Krümmung. Sie ist gegeben durch den dreidimensionalen Riemann-Tensor, den man über die kovariante Ableitung  $\mathbf{D}$  innerhalb der Hyperfläche berechnet. Zur Unterscheidung zum vollen vierdimensionalen Riemann-Tensor wird die Bezeichnung  ${}^3\mathcal{R}^k{}_{lij}$  verwendet. Er ist gegeben durch [Gou07]

$$(D_i D_j - D_j D_i) v^k = {}^3\mathcal{R}^k{}_{lij} v^l \quad . \quad (\text{C.12})$$

Auch hier kann man einen zugehörigen Ricci-Tensor  ${}^3\mathcal{R}_{ij} = {}^3\mathcal{R}^k{}_{ikj}$  und Ricci-Skalar  ${}^3\mathcal{R} = {}^3\mathcal{R}^i{}_i = \gamma^{ij} {}^3\mathcal{R}_{ij}$  definieren.

Neben der inneren Krümmung kann man auch noch eine zweite Art der Krümmung der Hyperflächen definieren: die äußere Krümmung. Sie beschreibt, salopp gesagt, wie die Hyperfläche in der Mannigfaltigkeit gebogen ist. Etwas formaler kann man sie als die Änderung des Normalenvektors sehen, wenn man ihn entlang der Hyperfläche verschiebt. Sie ist durch

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} \quad (\text{C.13})$$

gegeben, wobei  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  hier Vektoren tangential an  $\Sigma_t$  sind [Gou07].

## C.2 Orthogonale Projektion

Um die nächste wichtige Größe einführen zu können, muss man annehmen, dass die Hyperfläche raumartig ist, also einen zeitartigen Normalenvektor  $\mathbf{n}$  hat<sup>2</sup>. An jedem Punkt der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  lässt sich der Raum der Vektoren  $\mathcal{T}(\mathcal{M})$  aufteilen in

$$\mathcal{T}(\mathcal{M}) = \mathcal{T}(\Sigma) \oplus \text{Vect}(\mathbf{n}) \quad , \quad (\text{C.14})$$

wobei  $\text{Vect}(\mathbf{n})$  den durch  $\mathbf{n}$  aufgespannten Vektorraum beschreibt [Gou07]. Diese Aufspaltung ermöglicht es einen *orthogonalen Projektionsoperator*  $\mathbf{P}$  einzuführen [Gou07]; [Alc08]

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathcal{T}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathcal{T}(\Sigma) \quad , \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Die Definition in (C.15) unterscheidet sich aufgrund der hier verwendeten Signatur von der in [Gou07]; [Alc08]. Eine zentrale Eigenschaft von  $\mathbf{P}$  lässt sich direkt an der Definition ablesen

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} + \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}_{=-1}\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{C.16})$$

was einleuchtend ist, denn  $\mathbf{n}$  ist als orthogonaler Vektor zur Hyperfläche  $\Sigma$ , auf die  $\mathbf{P}$  projiziert, eingeführt worden. Ebenso einleuchtend ist, dass der Projektionsoperator zur Identität für alle Vektoren tangential an  $\Sigma$  wird [Gou07]

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})}_{=0}\mathbf{n} = \mathbf{v} \quad , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}(\Sigma) \quad . \quad (\text{C.17})$$

Analog zur Projektion von Vektoren auf die Hyperfläche ist es auch möglich eine Erweiterung von 1-Formen, die ursprünglich nur im Cotangentialraum zu  $\Sigma$  definiert sind, auf ganz  $\mathcal{M}$  zu finden. Dazu betrachtet man die Abbildung  $\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^* : \mathcal{T}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{M})$  die eine beliebige 1-Form  $\omega$  aus  $\mathcal{T}(\Sigma)$  wie folgt abbildet [Gou07]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\omega) : \mathcal{T}(\mathcal{M}) &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ \mathbf{v} &\longmapsto \langle \omega, P(v) \rangle \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Analog dazu lassen sich auch beliebige kovariante Tensoren aus  $\mathcal{T}(\Sigma)$  auf ganz  $\mathcal{M}$  erweitern [Gou07]

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\mathbf{A}) : \mathcal{T}(\mathcal{M})^n &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) &\longmapsto \mathbf{A}(\mathbf{P}(\mathbf{v}_1), \dots, \mathbf{P}(\mathbf{v}_n)) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

<sup>2</sup>Die folgenden Betrachtungen funktionieren auch mit zeitartigen Hyperflächen [Gou07], allerdings beschränke ich mich im Hinblick auf die Physik auf raumartige

Als Beispiel kann man hier die 3-Metrik  $\gamma$  aus Gleichung (C.8) heranziehen.  $\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\gamma)$  ist ein kovarianter Tensor auf ganz  $\mathcal{M}$ , für den

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})) &= \gamma(\mathbf{P}(\mathbf{u}), \mathbf{P}(\mathbf{v})) \\ &= \gamma_{\mu\nu} P^\mu{}_\tau u^\tau P^\nu{}_\sigma v^\sigma = \begin{cases} 0 & , \quad \mathbf{u} \text{ oder } \mathbf{v} \text{ orthogonal zu } \Sigma \\ \gamma_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = u_\nu v^\nu & , \quad \mathbf{u} \text{ und } \mathbf{v} \text{ tangential an } \Sigma \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

gilt. Die letzte Zeile rechtfertigt, dass  $\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\gamma)$  mit  $\gamma$  identifiziert und mit dem gleichen Symbol beschrieben wird. Im Folgenden werden immer wieder Tensoren und ihre Erweiterung auf ganz  $\mathcal{M}$  mit dem gleichen Symbol bezeichnet.

Betrachtet man die komponentenweise Darstellung des Projektionsoperators (C.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n} \\ \Rightarrow P^\alpha{}_\beta v^\beta &= v^\alpha + n_\beta v^\beta n^\alpha = (\delta_\beta^\alpha + n_\beta n^\alpha) v^\beta \\ \Rightarrow P_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta} + n_\beta n_\alpha \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

so stellt man fest, dass die kovariante Form von  $\mathbf{P}$  zwei Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  gerade auf ihr Skalarprodukt abbildet, wenn sie tangential an  $\Sigma$  sind und auf Null abbildet, wenn einer von ihnen kollinear zu  $\mathbf{n}$  ist. Diese Eigenschaften sind aber identisch mit denen der erweiterten räumlichen Metrik  $\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\gamma)$  in Gleichung (C.20) und so lässt sich diese mit  $\mathbf{P}$  identifizieren [Gou07]. Damit gibt es aber auch eine Möglichkeit die erweiterte räumliche Metrik mit der 4-Metrik in Verbindung zu bringen

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\beta n_\alpha \quad . \quad (\text{C.22})$$

Dadurch lässt sich ein beliebiger Tensor  $\mathbf{T}$  aus  $\mathcal{M}$  tangential an  $\Sigma$  projizieren

$$(\mathbf{P}^*\mathbf{T})^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = P^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \dots P^{\alpha_p}{}_{\mu_p} P^{\nu_1}{}_{\beta_1} \dots P^{\nu_q}{}_{\beta_q} T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} \quad . \quad (\text{C.23})$$

Hier sei angemerkt, dass für einen beliebigen kovarianten Tensor  $\mathbf{T}$  auf  $\Sigma$  der Zusammenhang  $\mathbf{P}^*(\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\mathbf{T})) = \mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\mathbf{T})$  gilt. Für einen Vektor  $\mathbf{v}$  ist  $\mathbf{P}^*(\mathbf{v}) = \mathbf{P}(\mathbf{v})$  [Gou07]. Diese Art der Projektion wird in den Kapiteln C.5 und C.6 verwendet, um die Einsteingleichungen aufzuspalten. Dazu braucht man auch noch den Zusammenhang der zur räumlichen Metrik  $\gamma$  gehörenden kovarianten Ableitung  $\mathbf{D}$  mit der zur 4-Metrik gehörenden Ableitung  $\nabla$ . Er ist durch

$$D_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{\beta_1 \dots \beta_q} = P^{\alpha_1}{}_{\mu_1} \dots P^{\alpha_p}{}_{\mu_p} P^{\nu_1}{}_{\beta_1} \dots P^{\nu_q}{}_{\beta_q} P^\sigma{}_\rho \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} \quad . \quad (\text{C.24})$$

gegeben [Gou07], wobei  $\mathbf{T}$  ein Tensor tangential an  $\Sigma$  ist.

Zunächst benötigt man aber noch den äußeren Krümmungstensor  $\mathbf{K}$  einer Hyperfläche. In Gleichung (C.13) wurde er zunächst nur für Vektoren tangential an  $\Sigma$  definiert. Mit Hilfe des Projektionsoperators lässt sich auch ein Ausdruck für beliebige Vektoren auf

$\mathcal{M}$  finden [Gou07]

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v})) &= \mathbf{K}(\mathbf{P}(\mathbf{u}), \mathbf{P}(\mathbf{v})) = \mathbf{K}(\mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}, \mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}) \\
&= -[\mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}] \cdot \nabla_{\mathbf{v} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\mathbf{n}} \mathbf{n} \\
&= -[\mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\mathbf{n}] \cdot [\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}] \\
&= -\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \underbrace{\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n}}_{=0} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \underbrace{\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}}_{=0} \\
&= -\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \\
\Rightarrow K_{\alpha\beta} &= -\nabla_{\beta} n_{\alpha} - n_{\beta} a_{\alpha} \quad . \tag{C.25}
\end{aligned}$$

Hier wurde noch die Beschleunigung des Normalenvektors  $\mathbf{a} = \nabla_{\mathbf{n}} \mathbf{n}$  eingeführt und verwendet, dass

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} = \underbrace{\nabla_{\mathbf{u}}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})}_{=0} - \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{C.26}$$

für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{u}$  ist [Gou07]. Zusätzlich wurde auch, wie für die 3-Metrik, für  $\mathbf{P}_{\mathcal{M}}^*(\mathbf{K})$  und  $\mathbf{K}$  das gleiche Symbol verwendet.

Wendet man auf Gleichung (C.25) den Projektionsoperator an, ergibt das

$$\begin{aligned}
P^{\beta}_{\mu} K_{\alpha\beta} &= -P^{\beta}_{\mu} \nabla_{\beta} n_{\alpha} - P^{\beta}_{\mu} n_{\beta} a_{\alpha} \\
\Leftrightarrow P^{\beta}_{\mu} K_{\alpha\beta} &= K_{\alpha\mu} = -P^{\beta}_{\mu} \nabla_{\beta} n_{\alpha} \quad . \tag{C.27}
\end{aligned}$$

Das heißt, dass der äußere Krümmungstensor die Projektion des Gradienten des Normalenvektors auf die Hyperfläche ist, was die über Gleichung (C.13) gegebene Bedeutung unterstreicht, dass die äußere Krümmung die Änderung des Normalenvektors entlang der Hyperfläche beschreibt.

## C.3 Aufblätterung

Bislang wurde nur eine einzelne Hyperfläche in einer Mannigfaltigkeit betrachtet. Es ist allerdings auch möglich, und für die Formulierung der Einsteingleichungen auch notwendig, eine Mannigfaltigkeit komplett in eine kontinuierliche Menge von Hyperflächen  $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$  aufzuspalten. Dieser Vorgang wird als *Aufblätterung* bezeichnet. Eine Raumzeit in eine Menge von Hyperflächen aufzublätern funktioniert nur, wenn es eine *Cauchy-Fläche* in der Raumzeit gibt. Diese Cauchy-Fläche zeichnet sich dadurch aus, dass alle Weltlinien (zeitartigen Kurven) sie genau einmal schneiden [HE73]; [Gou07]; [Alc08]. Nach Alcubierre [Alc08] lässt sich von einer Cauchy-Fläche aus die gesamte Vergangenheit und Zukunft der Raumzeit bestimmen. Raumzeiten, die Cauchy-Flächen enthalten werden als *global hyperbolisch* bezeichnet [Gou07]; [Alc08].

Für solche Raumzeiten findet sich eine Menge von Hyperflächen  $\Sigma_t$ , sodass die Mannigfaltigkeit komplett damit abgedeckt ist (siehe Abbildung C.2). Jede dieser Flächen

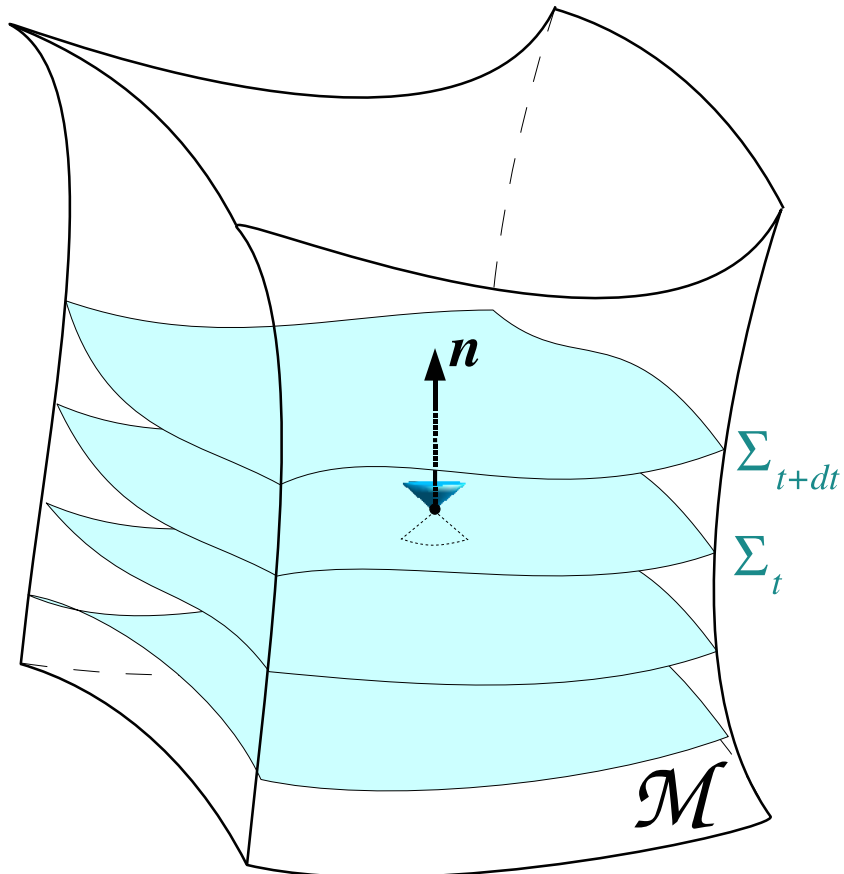


Abbildung C.2: Aufblätterung einer Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  in eine Menge von Hyperflächen  $\Sigma_t$ , entnommen aus [Gou07].

lässt sich so auffassen, dass es ein Skalarfeld  $\hat{t}$  gibt, dass entlang der Hyperfläche den konstanten Wert  $t$  annimmt [Gou07]

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad , \quad \Sigma_t := \{p \in \mathcal{M}, \hat{t}(p) = t\} \quad . \quad (\text{C.28})$$

Im Folgenden wird allerdings  $\hat{t}$  nur noch mit  $t$  bezeichnet.

Wie in (C.9) lässt sich ein zeitartigen Normalenvektor an die Hyperflächen definieren

$$\mathbf{n} := -\alpha \nabla t \quad , \quad (\text{C.29})$$

wobei die Funktion  $\alpha$  durch

$$\alpha := \frac{1}{\sqrt{\nabla t \cdot \nabla t}} \quad (\text{C.30})$$

definiert ist und als *Lapsefunction* oder auch nur *Lapse* (englisch für „zeitlichen Verlauf“) bezeichnet wird<sup>3</sup>. Die Bedeutung von  $\alpha$  wird später ersichtlich, wenn ein an die Aufblätterung angepasstes Koordinatensystem verwendet wird.

Um zu untersuchen, wie sich Größen von einer Hyperfläche  $\Sigma_t$  zur einer anderen Hyperfläche  $\Sigma_{t'}$  entwickeln, benötigt man zum einen den *Normalenentwicklungsvektor*  $\mathbf{m}$  [Gou07]

$$\mathbf{m} := \alpha \mathbf{n} \quad , \quad (\text{C.31})$$

für den

$$\mathbf{m} \cdot \nabla t = \alpha \mathbf{n} \cdot \nabla t = \alpha^2 \nabla t \cdot \nabla t = 1 \quad (\text{C.32})$$

gilt und zum anderen das Konzept der Lie-Ableitung, was im Anhang D vorgestellt wird. Es lässt sich zeigen, dass eine Hyperfläche  $\Sigma_t$  entlang von  $\delta t \mathbf{m}$  in eine neue Hyperfläche  $\Sigma_{t+\delta t}$  überführt wird [Gou07]. Deshalb bestimmt man mit Gleichungen (C.8) und (D.9) die Änderung der räumlichen Metrik, wenn sie entlang von  $\mathbf{m}$  Lie verschoben wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma_{\mu\nu} &= m^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu m^\alpha + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu m^\alpha \\ &= \alpha n^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu (\alpha n^\alpha) + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu (\alpha n^\alpha) \\ &= \alpha \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\mu\nu} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Der letzte Schritt ist möglich, weil  $\gamma_{\mu\beta} n^\mu \nabla_\alpha (\alpha) = 0$  ist. Nun berechnet man noch  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\mu\nu}$  und erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\mu\nu} &= n^\alpha \nabla_\alpha \gamma_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\alpha} \nabla_\nu n^\alpha + \gamma_{\nu\alpha} \nabla_\mu n^\alpha \\ &= -n_\nu n^\alpha \nabla_\alpha n_\mu - n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu + \nabla_\nu n_\mu - n_\mu n_\alpha \nabla_\nu n^\alpha \\ &\quad + \nabla_\mu n_\nu - n_\nu n_\alpha \nabla_\mu n^\alpha \\ &= -n_\nu n^\alpha \nabla_\alpha n_\mu - n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu + \nabla_\mu n_\nu + \nabla_\nu n_\mu \\ &= -K_{\nu\mu} - K_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

<sup>3</sup>Hier gibt es zu weiten Teilen der Literatur auch einen Unterschied im Vorzeichen bei der Definition von  $\mathbf{n}$ . Dieses Vorzeichen geht auch wieder auf die verwendete Signatur zurück.

wobei Gleichung (C.26) und die Tatsache, dass die kovariante Ableitung der Metrik  $g_{\mu\nu}$  verschwindet ausgenutzt wurde. Es lässt sich zeigen, dass der äußere Krümmungstensor symmetrisch ist [Gou07], womit

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}\gamma_{\mu\nu} = -2K_{\mu\nu} \quad (\text{C.35})$$

folgt.

Als nächstes betrachtet man die Entwicklung des orthogonalen Projektors  $P^\alpha_\beta$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}P^\alpha_\beta &= m^\mu\nabla_\mu P^\alpha_\beta - P^\mu_\beta\nabla_\mu m^\alpha + P^\alpha_\mu\nabla_\beta m^\mu \\ &= \alpha n^\mu\nabla_\mu(n_\beta n^\alpha) - (\delta_\beta^\mu + n^\mu n_\beta)\nabla_\mu(\alpha n^\alpha) + (\delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu)\nabla_\beta(\alpha n^\mu) \\ &= \alpha n^\alpha n^\mu\nabla_\mu n_\beta + \alpha n_\beta n^\mu\nabla_\mu n^\alpha - n_\beta n^\mu\nabla_\mu(\alpha n^\alpha) + n^\alpha n_\mu\nabla_\beta(\alpha n^\mu) \\ &= \alpha n^\alpha n^\mu\nabla_\mu n_\beta - n_\beta n^\mu n^\alpha\nabla_\mu\alpha + n^\alpha\nabla_\beta\alpha \\ &= \alpha n^\alpha n^\mu\nabla_\mu(\alpha\nabla_\beta t) - n_\beta n^\mu n^\alpha\nabla_\mu\alpha + n^\alpha\nabla_\beta\alpha \\ &= \alpha^2 n^\alpha n^\mu\nabla_\mu\nabla_\beta t + n^\alpha\nabla_\beta\alpha \\ &= \alpha^2 n^\alpha n^\mu\nabla_\beta\nabla_\mu t + n^\alpha\nabla_\beta\alpha \\ &= \alpha^2 n^\alpha n^\mu\nabla_\beta\left(\frac{1}{\alpha}n_\mu\right) + n^\alpha\nabla_\beta\alpha \\ &= \alpha^2 n^\alpha\nabla_\beta\left(\frac{1}{\alpha}\right) + n^\alpha\nabla_\beta\alpha \\ &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.36})$$

wobei Gleichungen (C.29) und (C.26) mehrfach verwendet wurden und die Vertauschung von zwei kovarianten Ableitungen eines Skalarfeldes benutzt wurde [Gou07]. Gleichung (C.36) bedeutet, dass die Lie-Ableitung eines Tensors, der tangential an  $\Sigma$  ist auch wieder tangential an  $\Sigma$  ist, denn man kann den Projektor einfach an der Ableitung vorbeiziehen. Neben der Lie-Ableitung der 3-Metrik und des Projektionsoperators ist auch noch die des äußeren Krümmungstensors von Interesse. Sie ist durch

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\mu\nu} = m^\alpha\nabla_\alpha K_{\mu\nu} + K_{\mu\alpha}\nabla_\nu m^\alpha + K_{\nu\alpha}\nabla_\mu m^\alpha \quad (\text{C.37})$$

gegeben [Gou07]. Hier lassen sich Gleichungen (C.25), (C.31) und (E.15) einsetzen und man erhält [Gou07]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\mu\nu} &= \alpha n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} - 2\alpha K_{\mu\sigma}K^\sigma_\nu - D^\sigma\alpha(n_\nu K_{\mu\sigma} + n_\mu K_{\nu\sigma}) \\ &\quad + \underbrace{n^\sigma(\nabla_\nu\alpha K_{\mu\sigma}\nabla_\mu\alpha K_{\nu\sigma})}_{=0} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Diesen Ausdruck wird noch auf  $\Sigma$  projiziert. Dabei muss berücksichtigt werden, dass die Lie-Ableitung entlang von  $\mathbf{m}$  tangential an  $\Sigma$  ist [Gou07]

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\mu\nu} = \alpha P^\mu_\rho P^\nu_\tau n^\sigma\nabla_\sigma K_{\mu\nu} - 2\alpha K_{\rho\sigma}K^\sigma_\tau \quad . \quad (\text{C.39})$$

## C.4 Eulersche Beobachter

Dadurch, dass  $\mathbf{n}$  ein zeitartiger Einheitsvektor ist, lässt er sich als Geschwindigkeit von bestimmten Beobachtern sehen. Diese (nicht notwendigerweise physikalischen) Beobachter werden in der Literatur als *eulersche Beobachter* bezeichnet [Gou07]; [Alc08]. Ihre Weltlinien sind orthogonal zu den Hyperflächen  $\Sigma_t$ . Zwei Ereignissen  $p$  und  $p'$  lassen sich die Zeiten  $t$  und  $t' = t + \delta t$ , also die Hyperflächen  $\Sigma_t$  und  $\Sigma_{t+\delta t}$  zuordnen. Hier kann man, wie bereits erwähnt, den Normalenentwicklungsvektor  $\mathbf{m}$  dazu benutzen, um das Ereignis  $p$  in  $p'$  zu überführen [Gou07]. Der Abstand der beiden Ereignisse ist gerade durch

$$\delta\tau = \sqrt{-\mathbf{m}\delta t \cdot \mathbf{m}\delta t} = \sqrt{-g_{\mu\nu}m^\mu m^\nu} \delta t = \alpha \delta t \quad (\text{C.40})$$

gegeben [Gou07]. Dadurch ist eine Verbindung zwischen der Eigenzeit der Eulerschen Beobachter und der Koordinatenzeit  $t$  hergestellt und gleichzeitig auch eine Bedeutung für die Ablaufsfunktion  $\alpha$  gegeben, sie „misst“ den Unterschied zwischen vergangener Koordinaten- und Eigenzeit der Eulerschen Beobachter. Gleichung (C.40) wird in [Alc08] verwendet um  $\alpha$  zu definieren.

## C.5 3+1 Form des Energie-Impuls-Tensors

Im Anhang E werden die verschiedenen Projektionen des Riemann-Tensors entlang von  $\Sigma$  und orthogonal dazu betrachtet. Hier werden die entsprechenden Größen des Energie-Impuls-Tensors als weiterer Bestandteil der Einsteingleichungen bestimmt. Die Projektion von  $\mathbf{T}$  voll senkrecht zu  $\Sigma$ , gegeben durch

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu =: E \quad , \quad (\text{C.41})$$

ist gerade die Energiedichte im System der Eulerschen Beobachter [Gou07]; [Alc08]. Die Projektion komplett auf  $\Sigma$  gibt den Materie-Spannungstensor, wie er von den Eulerschen Beobachtern gemessen wird [Gou07]; [Alc08]

$$S_{\mu\nu} := P^\alpha{}_\mu P^\beta{}_\nu T_{\alpha\beta} \quad . \quad (\text{C.42})$$

Schließlich bleibt noch die gemischte Projektion

$$p^\mu := -P^{\mu\alpha} n^\beta T_{\alpha\beta} \quad , \quad (\text{C.43})$$

die die Impulsdichte aus dem System der Eulerschen Beobachter beschreibt [Gou07]; [Alc08].

Setzt man in die Definition des Materie-Spannungstensors (C.42) den Projektionsoperator explizit ein, so ergibt das

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= (\delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu)(\delta_\nu^\beta + n^\beta n_\nu)T_{\alpha\beta} \\ &= T_{\mu\nu} + T_{\mu\beta}n^\beta n_\nu + T_{\alpha\nu}n^\alpha n_\mu + T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta n_\mu n_\nu \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$



Diese Gleichung lässt sich nach  $T_{\mu\nu}$  umstellen und unter Benutzung von Gleichungen (C.43) und (C.41) ergibt sich

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= S_{\mu\nu} - T_{\mu\beta}n^\beta n_\nu - T_{\alpha\nu}n^\alpha n_\mu - T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta n_\mu n_\nu \\ &= S_{\mu\nu} + p_\mu n_\nu + T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta n_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu + T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta n_\nu n_\mu - T_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta n_\mu n_\nu \\ &= S_{\mu\nu} + p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu + E n_\nu n_\mu \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Also kann man durch die Größen  $S_{\mu\nu}$ ,  $p_\mu$  und  $E$  den vollen Energie-Impuls-Tensor bestimmen [Gou07]. Seine Spur (in Bezug auf  $g_{\mu\nu}$ ) ist

$$T = S + 0 + 0 - E \quad . \quad (\text{C.46})$$

## C.6 3+1 Form der Einsteingleichungen

Mit den Rechnungen des letzten Abschnitts lassen sich die 3+1 Form der Einsteingleichungen

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (\text{C.47})$$

aufstellen:

1. Projektion komplett orthogonal zu  $\Sigma$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu}n^\mu n^\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \mathcal{R} = 8\pi GT_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \quad (\text{C.48})$$

Hier setzt man die skalare Gaußgleichung (E.9) und Gleichung (C.41) ein, was dann

$${}^3\mathcal{R} - K^{\tau\mu}K_{\mu\tau} + K^2 = 16\pi GE \quad (\text{C.49})$$

liefert [Gou07].

2. Projektion komplett auf  $\Sigma$

Es ist hier einfacher, die Einsteingleichungen in der Form

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad (\text{C.50})$$

zu verwenden. Diese projiziert man komplett auf  $\Sigma$ , was, unter Berücksichtigung von Gleichungen (C.42) und (C.46),

$$P^\mu{}_\alpha P^\nu{}_\beta \mathcal{R}_{\mu\nu} = 8\pi G \left[ S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(S - E) \right] \quad (\text{C.51})$$

entspricht. Hier kann man die Kombination der kontrahierten Gauß-Gleichung und der Ricci-Gleichung (E.18) einsetzen und erhält damit [Gou07]

$$-\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}_{\mathbf{m}}K_{\alpha\beta} + {}^3\mathcal{R}_{\alpha\beta} - 2K_\alpha{}^\mu K_{\mu\beta} + K K_{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha}D_\alpha D_\beta \alpha = 8\pi G \left[ S_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}(S - E) \right] \quad . \quad (\text{C.52})$$

### 3. Gemischte Projektion

$$P^\mu{}_\alpha n^\nu \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} P^\mu{}_\alpha n^\nu g_{\mu\nu} \mathcal{R} = 8\pi G P^\mu{}_\alpha n^\nu T_{\mu\nu} \quad (\text{C.53})$$

Hier setzt man Gleichungen (C.43) und (E.13) zusammen mit der Tatsache, dass  $P^\mu{}_\alpha n_\mu = 0$  ist ein, was

$$D_\mu K_\alpha{}^\mu - D_\alpha K = 8\pi G p_\alpha \quad (\text{C.54})$$

ergibt [Gou07].

Damit ist eine erste Form der Einsteingleichungen im 3+1 Formalismus aufgestellt. Später wird deutlich werden, dass die Gleichungen (C.49) und (C.54) im Gegensatz zu Gleichung (C.52) Randbedingungen und keine dynamischen Entwicklungsgleichungen sind [Gou07]; [Alc08]. Gleichung (C.49) wird als *Impuls-Bedingung* und Gleichung (C.54) als *Hamilton-Bedingung* bezeichnet<sup>4</sup>.

## C.7 An die Aufblätterung angepasste Koordinaten

Die bisherige Ableitung des 3+1 Formalismus war nicht an ein spezifisches Koordinatensystem gebunden und folgt damit der Herangehensweise von [Gou07]. Alcubierre [Alc08] fängt allerdings relativ früh damit an, ein spezielles, an die Aufblätterung angepasstes, Koordinatensystem zu benutzen. Man führt dieses System ein, da die Gleichungen nur in einem bestimmten System numerisch ausgewertet werden können.

Zunächst nimmt man dazu an, dass auf einer Hyperfläche  $\Sigma_t$  ein Koordinatensystem der  $x^i = (x^1, x^2, x^3)$  existiert. Dies sind die *räumlichen Koordinaten*. Wenn sich diese räumlichen Koordinaten glatt von einer Hyperfläche zur nächsten verändern, bildet  $x^\alpha = (t, x^i)$  ein Koordinatensystem für die gesamte Mannigfaltigkeit [Gou07]. Dieses Koordinatensystem induziert auch eine natürliche Basis für den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit [Gou07]

$$\partial_\alpha = (\partial_t, \partial_i) \quad . \quad (\text{C.55})$$

Offensichtlich entspricht eine Verschiebung entlang des Vektors  $\partial_t$  einer Verschiebung, bei der die räumlichen Koordinaten unverändert bleiben. Dadurch ist er parallel zu den Linien konstanter Koordinaten in Abbildung (C.3) [Gou07].

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist

$$\langle dt, \partial_t \rangle = 1 \quad , \quad (\text{C.56})$$

was die selbe Relation wie in Gleichung (C.32) ist [Gou07]. Zwischen den beiden Vektoren  $\mathbf{m}$  und  $\partial_t$  gibt es im Allgemeinen aber einen Unterschied dieser ist durch

$$\partial_t =: \mathbf{m} + \beta \quad (\text{C.57})$$

<sup>4</sup>Die Situation hier ist ähnlich zur Elektrodynamik, wo die Maxwell-Gleichungen auch Randbedingungen neben den dynamischen Entwicklungsgleichungen umfassen [Alc08].

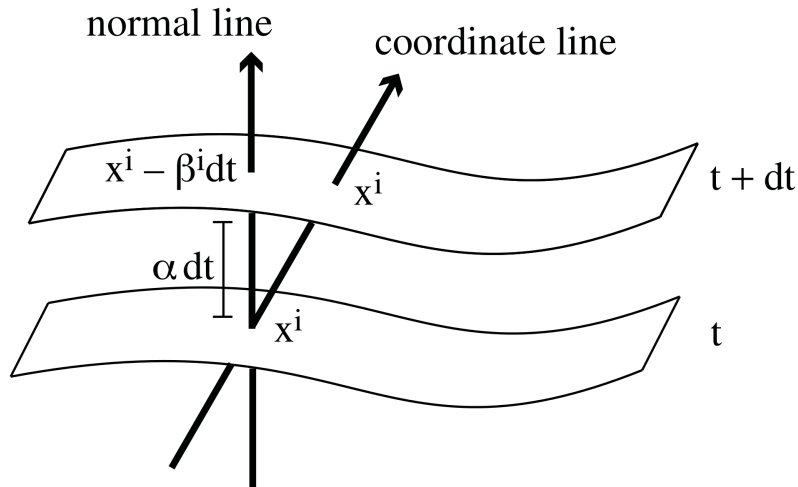


Abbildung C.3: An die Aufblätterung angepasste Koordinaten, entnommen aus [Alc08]. Linien konstanter Koordinaten („coordinate line“) sind nicht immer identisch mit Linien die senkrecht auf die Hyperflächen stehen („normal line“). Der Unterschied zwischen den beiden wird durch den Verschiebungsvektor  $\beta$  beschrieben.

gegeben, wobei  $\beta$  als *Verschiebungsvektor* bezeichnet wird [Gou07]; [Alc08]. Dadurch, dass der Anteil von  $\mathbf{m}$  und  $\partial_t$  entlang von  $d\mathbf{t}$  gleich ist, weiß man direkt, dass

$$\langle d\mathbf{t}, \beta \rangle = 0 \quad (\text{C.58})$$

gilt [Gou07]. Wenn in Gleichung (C.57)  $\mathbf{m}$  durch  $\alpha \mathbf{n}$  ersetzt wird

$$\partial_t = \alpha \mathbf{n} + \beta \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\alpha} \partial_t - \frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{C.59})$$

kann man daran direkt die Komponenten von  $\mathbf{n}$  in den angepassten Koordinaten ablesen [Gou07]; [Alc08]

$$n^\mu = \left( \frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha} \right) \quad . \quad (\text{C.60})$$

Neben dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  spielt die 4-Metrik  $\mathbf{g}$  weiterhin eine zentrale Rolle und man benötigt deshalb auch ihre Koordinatendarstellung. Die Komponenten der Metrik lassen sich über

$$g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\partial_\mu, \partial_\nu) = \partial_\mu \cdot \partial_\nu = \langle dx^\mu, \partial_\nu \rangle \quad (\text{C.61})$$

berechnen [Gou07]; [Cha83]. Damit findet sich

$$g_{00} = \partial_t \cdot \partial_t = (\alpha \mathbf{n} + \beta) \cdot (\alpha \mathbf{n} + \beta) = -\alpha^2 + \beta \cdot \beta \quad (\text{C.62})$$

und [Gou07]

$$g_{0i} = \boldsymbol{\partial}_t \cdot \boldsymbol{\partial}_i = \langle \mathbf{d}t, \boldsymbol{\partial}_i \rangle = \underbrace{\langle \alpha \mathbf{n}, \boldsymbol{\partial}_i \rangle}_{=0} + \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\partial}_i \rangle = \beta_j \langle \mathbf{d}x^j, \boldsymbol{\partial}_i \rangle = \beta_i \quad . \quad (\text{C.63})$$

Die anderen Komponenten sind gerade durch die räumliche Metrik  $\gamma$  gegeben, so dass schließlich

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (\text{C.64})$$

gilt [Gou07]; [Alc08]. Die Inverse  $g^{\mu\nu}$  findet man durch Matrixinversion

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^i}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^j}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{C.65})$$

Die Funktionen  $\alpha$  und  $\beta^i$  hängen direkt mit der Wahl der Aufblätterung und der des Koordinatensystems zusammen. Sie sind nicht eindeutig und werden daher auch als *Eichfunktionen* bezeichnet [Alc08]. Es ist auch möglich durch Festlegen eines Koordinatensystems  $x^i$  auf  $\Sigma$ , zusammen mit einem Skalarfeld  $\alpha$  und einem Vektorfeld  $\boldsymbol{\beta}$  ein Koordinatensystem  $x^\alpha$  zu definieren [Gou07].

Jetzt lässt sich die Lie-Ableitung in Richtung von  $\mathbf{m}$  der räumlichen Metrik und des äußeren Krümmungstensors explizit schreiben. Dazu wird Gleichung (C.57) zu

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{\partial}_t - \boldsymbol{\beta} \quad (\text{C.66})$$

umgeschrieben und diese in die Ableitungen (C.33) und (C.35) eingesetzt, was

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} \gamma_{\mu\nu} = (\mathcal{L}_{\boldsymbol{\partial}_t} - \mathcal{L}_{\boldsymbol{\beta}}) \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu} \quad (\text{C.67})$$

ergibt [Gou07]. Hier kann man noch die Lie-Ableitung explizit ersetzen (unter Berücksichtigung, dass man in der Lie-Ableitung statt der partiellen Ableitungen auch kovariante einsetzen kann) und erhält schließlich [Alc08]

$$\partial_t \gamma_{\mu\nu} = -2\alpha K_{\mu\nu} + D_\mu \beta_\nu + D_\nu \beta_\mu \quad . \quad (\text{C.68})$$

Analog lässt sich für die Lie-Ableitung des äußeren Krümmungstensors  $\mathcal{L}_{\mathbf{m}} K_{\mu\nu}$  vorgehen

$$\mathcal{L}_{\mathbf{m}} K_{\mu\nu} = \partial_t K_{\mu\nu} - \beta^\tau \partial_\tau K_{\mu\nu} - K_{\tau\nu} \partial_\mu \beta^\tau - K_{\mu\tau} \partial_\nu \beta^\tau \quad (\text{C.69})$$

und das in Gleichung (C.52) einsetzen [Alc08]

$$\begin{aligned} \partial_t K_{\mu\nu} &= \beta^\tau \partial_\tau K_{\mu\nu} + K_{\tau\nu} \partial_\mu \beta^\tau + K_{\mu\tau} \partial_\nu \beta^\tau + \alpha \left( {}^3\mathcal{R}_{\mu\nu} - 2K_\mu{}^\tau K_{\tau\nu} + K K_{\mu\nu} \right) \\ &\quad - D_\mu D_\nu \alpha + 8\pi G \alpha \left[ -S_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} (S - E) \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

Alle Größen in den Gleichungen (C.68) und (C.70) [und auch in den Gleichungen (C.49) und (C.54)] sind tangential an  $\Sigma$  und es ist daher möglich sich in diesen Gleichungen

ohne Verlust von Information auf räumliche Indizes zu beschränken [Gou07]; [Alc08]. Zusammen ergeben diese vier Gleichungen das folgende System:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i \quad (\text{C.71a})$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{kj} \partial_i \beta^k + K_{ik} \partial_j \beta^k \\ & + \alpha \left( {}^3\mathcal{R}_{ij} - 2K_i^k K_{kj} + K K_{ij} \right) \\ & - D_i D_j \alpha - 8\pi G \alpha \left[ S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - E) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.71b})$$

$${}^3\mathcal{R} - K^{kl} K_{kl} + K^2 = 16\pi G E \quad (\text{C.71c})$$

$$D_k K_i^k - D_i K = 8\pi G p_i \quad (\text{C.71d})$$

Dieser Satz von Gleichungen wird häufig nach dem Arbeit von Arnowitt, Deser und Misner [ADM62] als *ADM-Gleichungen* bezeichnet. Allerdings wird in [ADM62] nicht der äußere Krümmungstensor, sondern der zur räumlichen Metrik konjugierte Impuls  $\pi^{ij} = \sqrt{\gamma}(K\gamma^{ij} - K^{ij})$  als dynamische Variable verwendet. Auch war das Ziel von Arnowitt et al. [ADM62] eine hamiltonsche Formulierung, nicht wie hier eine 3+1 Aufspaltung, der ART [Gou07].

Das Einsteintoolkit [Lof+12] verwendet allerdings nicht das System von Gleichungen (C.71) sondern eine Abwandlung davon. Hintergrund für die weitere Transformationen sind Stabilitätsprobleme in den numerischen Rechnungen (Übersicht darüber in [Alc+00]).

## C.8 BSSN Form der 3+1 Gleichungen

In vielen numerischen Rechnungen zur ART werden heute die 3+1 Gleichungen in einer Form verwendet, die auf Arbeiten von Shibata und Nakaruma [SN95], Oohara und Kojima [NKO84]; [NOK87], sowie Baumgarte und Shapiro [BS98] zurückgeht und als BSSNOK Formulierung (gebräuchlicher ist BSSN) bezeichnet wird. Wie bereits angedeutet sind diese Gleichungen numerisch deutlich stabiler [Alc+00], als die ADM-Gleichungen.

Ein Kernbestandteil dieser Umformulierung ist eine so genannte *konforme (winkeltreue) Aufspaltung*. Hier wird eine neue Metrik  $\tilde{\gamma}$  eingeführt, die mit der räumlichen Metrik  $\gamma$  wie folgt zusammenhängt

$$\gamma = \Psi^4 \tilde{\gamma} \quad , \quad (\text{C.72})$$

wobei  $\Psi$  als der *konforme Faktor*<sup>5</sup> bezeichnet wird [Gou07]; [Alc08]. Eine gängige Wahl für den konformen Faktor ist  $\Psi^4 = \gamma^{1/3}$ , wobei  $\gamma$  die Determinante der räumlichen Metrik ist [Alc08]. Allerdings führt diese Wahl dazu, dass  $\Psi$  kein Skalar mehr ist, sondern eine skalare Dichte. Gourgoulhon [Gou07] führt deswegen eine weitere Hilfsmetrik  $\mathbf{f}$  ein, mit deren Hilfe sich die Einführung von Tensordichten vermeiden lässt. Ich gehe darauf aber nicht näher ein, da im Großteil der anderen Arbeiten Tensordichten verwendet werden. Anstelle von  $\Psi$  wird auch häufig die Variable  $\phi := \ln \Psi = \frac{1}{12} \ln \gamma$  verwendet. Aus

---

<sup>5</sup>Der konforme Faktor  $\Psi$  sollte nicht mit der Hilfsfunktion  $\Psi$  aus der modifizierten Kerr-Metrik (1.3.1) verwechselt werden.

Gleichung (C.71a) kann eine Entwicklungsgleichung für die Determinante  $\gamma$  und daraus eine Entwicklungsgleichung für den konformen Faktor abgeleitet werden. Dafür benutzt man die Jacobi-Formel für die Ableitung der Determinante  $\det(A)$  einer invertierbaren Matrix  $A$  [MN07, S. 169ff]

$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \det(A(t)) \operatorname{tr}\left(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}A(t)\right) \quad (\text{C.73})$$

und erhalten damit

$$\frac{d}{dt}\gamma = \gamma \operatorname{tr}\left(\gamma^{-1}\frac{d}{dt}\gamma\right) = \gamma\gamma^{ij}\frac{d}{dt}\gamma_{ij} \quad . \quad (\text{C.74})$$

Hier wird  $\frac{d}{dt}$  durch  $\partial_t - \mathcal{L}_\beta$  ersetzt und man erhält mit Gleichung (C.71a)

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma = \gamma(-2\gamma^{ij}\alpha K_{ij}) = -2\gamma\alpha K \quad . \quad (\text{C.75})$$

Für  $\phi = \frac{1}{12}\ln\gamma$  ergibt das [BS98]; [Alc+03]

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi = -\frac{1}{6}\alpha K \quad . \quad (\text{C.76})$$

Man kann den Term  $\mathcal{L}_\beta\phi$  aufspalten. Dazu betrachtet man die Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_\beta\Psi$  heran. Es gilt  $\mathcal{L}_\beta\Psi = \Psi\mathcal{L}_\beta\phi$ . Für  $\mathcal{L}_\beta\Psi$  kann man ausnutzen, dass sich die Lie-Ableitung einer Tensordichte  $\mathbf{T}$  als

$$\mathcal{L}_\beta\mathbf{T} = [\mathcal{L}_\beta T]_{\partial}^{w=0} + w\mathbf{T}\partial_k\beta^k \quad (\text{C.77})$$

schreiben lässt [Alc+03], wobei  $\mathbf{T}$  mit  $\gamma^{w/2}$  mal genommen ein Tensor ist und der erste Term gerade die Lie-Ableitung eines Tensors  $\mathbf{T}$  geschrieben mit partiellen Ableitungen darstellt. Der Faktor  $w$  wird als Gewicht der Tensordichte bezeichnet. Für  $\Psi = e^\phi$  ist das gerade  $w = \frac{1}{6}$  [Alc+03]. Es gilt also

$$\mathcal{L}_\beta\phi = \frac{1}{\Psi}\mathcal{L}_\beta\Psi = \frac{1}{\Psi}(\beta^l\partial_l\Psi + \frac{1}{6}\Psi\partial_l\beta^l) = \beta^l\partial_l\phi + \frac{1}{6}\partial_l\beta^l \quad , \quad (\text{C.78})$$

was eingesetzt in Gleichung (C.76)

$$\partial_t\phi = -\frac{1}{6}(\alpha K - \partial_l\beta^l) + \beta^l\partial_l\phi \quad (\text{C.79})$$

liefert [SN95]; [Alc+03]; [Alc08]; [Lof+12].

Zweiter wichtiger Bestandteil der BSSN-Formulierung ist die Aufteilung der äußeren Krümmung in einen spurfreien Teil und eine Gleichung für die Spur  $K$ . Dazu definiert man [SN95]

$$A_{ij} := K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K \quad . \quad (\text{C.80})$$

Analog zur räumlichen Metrik lässt sich auch hier eine konform reskalierte Größe

$$\tilde{A}_{ij} := \Psi^{-4}A_{ij} \quad (\text{C.81})$$

eingeführen. Diese werden wird gleich bei der Betrachtung der Entwicklungsgleichung von  $\tilde{\gamma}_{ij}$  benötigt. Dazu geht man zunächst von

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma_{ij} &= (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)(\tilde{\gamma}_{ij}\Psi^4) \\ &= 4\Psi^4\tilde{\gamma}_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi + \Psi^4(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}_{ij} \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

aus und stellt das ganze nach  $(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}_{ij}$  um [BS98] (Gourgoulhon [Gou07] hat hier einen weiteren Term, der hier durch Verwendung von Tensordichten nur implizit auftaucht.)

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{\Psi^4}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma_{ij} - 4\tilde{\gamma}_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi \\ &= -\frac{1}{\Psi^4}2\alpha K_{ij} + \frac{2}{3}\alpha K\tilde{\gamma}_{ij} \\ &= -2\alpha\tilde{A}_{ij} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.83})$$

Als nächstes wird die Entwicklungsgleichung der äußeren Krümmung (C.71b) in ihren Spurteil und einen spurfreien Teil aufgeteilt. Für die Spur  $K$  findet sich

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K = (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)(\gamma^{ij}K_{ij}) = \gamma^{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K_{ij} + K_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma^{ij} \quad . \quad (\text{C.84})$$

Hier setzt man Gleichungen (C.71a) und (C.71b) ein

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K = \alpha(^3\mathcal{R} - 2K^{ik}K_{ki} + K^2) - D^i D_i \alpha + 4\pi G\alpha(S - 3E) + 2\alpha K_{ij}K^{ij} \quad (\text{C.85})$$

und benutzt die Hamilton-Bedingung (C.71c) um den ersten Teil zu ersetzen. Gleichzeitig lässt sich auch der äußeren Krümmungstensor durch seinen spurfreien Teil und die Spur ersetzen und man erhält schließlich [Alc08]

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K = -D^i D_i \alpha + \alpha(\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^{ki} + \frac{K^2}{3}) + 4\pi G\alpha(S + E) \quad . \quad (\text{C.86})$$

Um eine Entwicklungsgleichung für den spurfreien Teil  $\tilde{A}_{ij}$  zu erhalten, geht man auch zunächst von Gleichung (C.71b) aus und formt diese um

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K_{ij} &= (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)(A_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}K) \\ &= e^{4\phi}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{A}_{ij} + 4e^{4\phi}\tilde{A}_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi \\ &\quad + \frac{1}{3}K(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma_{ij} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K \\ \Leftrightarrow e^{4\phi}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{A}_{ij} &= (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K_{ij} - 4e^{4\phi}\tilde{A}_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi \\ &\quad - \frac{1}{3}K(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K \end{aligned} \quad (\text{C.87})$$

Die vier Terme auf der rechten Seite sind bereits bekannt, sie müssen nur noch als

Funktionen der neuen Variablen  $\tilde{A}_{ij}$  und  $\gamma_{ij}$  dargestellt werden. Sie ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K_{ij} &= -D_i D_j \alpha + \alpha \left\{ {}^3\mathcal{R}_{ij} + 4\pi G [(S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}] \right\} \\
 &\quad + \alpha e^{4\phi} \left( -\frac{1}{3}K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k{}_j + \frac{1}{9}\tilde{\gamma}_{ij}K^2 \right) , \\
 -4e^{4\phi}\tilde{A}_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi &= \frac{2}{3}e^{4\phi}\alpha K\tilde{A}_{ij} , \\
 -\frac{1}{3}K(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\gamma_{ij} &= \frac{2}{3}\alpha K e^{4\phi}\tilde{A}_{ij} + \frac{2}{9}\alpha K^2 e^{4\phi}\tilde{\gamma}_{ij} , \\
 -\frac{1}{3}\gamma_{ij}(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K &= -\frac{1}{3}e^{4\phi}\tilde{\gamma}_{ij} \left\{ \alpha {}^3\mathcal{R} - D^i D_i \alpha + 4\pi G [3(S - E) - 2S] \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{3}\alpha K^2 e^{4\phi}\tilde{\gamma}_{ij} . \tag{C.88}
 \end{aligned}$$

Das wird in Gleichung (C.87) eingesetzt und ergibt damit schließlich [Alc08]

$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left[ -D_i D_j \alpha + \alpha {}^3\mathcal{R}_{ij} + 4\pi G \alpha [(S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}] \right]^{\text{TF}} \\
 &\quad + \alpha \left( K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k{}_j \right) , \tag{C.89}
 \end{aligned}$$

wobei  $[\dots]^{\text{TF}}$  den spurfreien Teil der entsprechenden Ausdrücke bezeichnet.

In den Gleichungen kommen noch Terme vor, die mit  $\gamma_{ij}$  verknüpft sind. Zum einen die Divergenz der Lapse  $D^i D_i \alpha$  und der Ricci-Tensor  ${}^3\mathcal{R}_{ij}$ . Diese müssen noch in Funktionen von  $\tilde{\gamma}_{ij}$  umgeschrieben werden. Eine ausführliche Rechnung dazu kann man in [Gou07] finden. Hier sind nur einige Zwischenergebnisse dargestellt. Ausgangspunkt bildet der Zusammenhang zwischen den kovarianten Ableitungen  $D_i$  und  $\tilde{D}_i$  der entsprechenden Metriken. Es gilt hierbei für einen Tensor  $\mathbf{T}$

$$D_k T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} = \tilde{D}_k T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{r=1}^p C^{i_r}{}_{kl} T^{i_1 \dots l \dots i_p}{}_{j_1 \dots j_q} - \sum_{r=1}^q C^l{}_{k j_r} T^{i_1 \dots i_p}{}_{j_1 \dots l \dots j_q} , \tag{C.90}$$

wobei

$$C^k{}_{ij} := \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tilde{k} \\ ij \end{matrix} \right\} \tag{C.91}$$

die Differenz der Christoffelsymbole von  $\gamma$  und  $\tilde{\gamma}$  ist [Gou07]. Eine wichtige Anwendung dieses Zusammenhangs ist die Darstellung der Divergenz eines Vektors  $\mathbf{v}$  [Gou07]

$$D_i v^i = e^{-6\phi} \tilde{D}_i (e^{6\phi} v^i) , \tag{C.92}$$

die direkt auch auf  $D_i D^i \alpha$  anwendbar ist und damit

$$D_i D^i \alpha = e^{-6\phi} \tilde{D}_i (e^{6\phi} D^i \alpha) = e^{-4\phi} \left( 2\tilde{D}_i \phi \tilde{D}^i \alpha + \tilde{D}_i \tilde{D}^i \alpha \right) \tag{C.93}$$

liefert [Gou07].

Auch benötigt man noch  $D_i D_j \alpha$  aus Gleichung (C.89). Dieses ergibt sich zu [Gou07]

$$D_i D_j \alpha = \tilde{D}_i \tilde{D}_j \alpha - 2 \left( \tilde{D}_i \phi \tilde{D}_j \alpha + \tilde{D}_j \phi \tilde{D}_i \alpha - \tilde{\gamma}_{ij} \tilde{D}^k \phi \tilde{D}_k \alpha \right) . \tag{C.94}$$



Zur Umformung des Ricci-Tensors greift man auf die Definition des Riemann-Tensors (C.12) zurück und ersetzt hier nach und nach die kovarianten Ableitungen. Es ist damit schließlich möglich den Ricci-Tensor  ${}^3\mathcal{R}_{ij} = \tilde{\mathcal{R}}_{ij} + \mathcal{R}_{ij}^\phi$  in zwei Teile aufzuspalten.  $\tilde{\mathcal{R}}_{ij}$  ist dabei der zu  $\tilde{\gamma}$  gehörende Ricci-Tensor und  $\mathcal{R}_{ij}^\phi$  ist durch

$$\mathcal{R}_{ij}^\phi = -2\tilde{D}_i\tilde{D}_j\phi - 2\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}_k\tilde{D}^k\phi + 4\tilde{D}_i\phi\tilde{D}_j\phi - \tilde{\gamma}_{ij}4\tilde{D}_k\phi\tilde{D}^k\phi \quad (\text{C.95})$$

gegeben [Gou07].

Bislang sind die Gleichungen aber numerisch nicht stabiler als die Standard 3+1 Gleichungen (C.71) [Alc08]. Das wird im BSSN-Formalismus mit der Einführung einer neuen Variablen erreicht [SN95]; [BS98]

$$\tilde{\Gamma}^i := \tilde{\gamma}^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = -\partial_j\tilde{\gamma}^{ij} \quad (\text{C.96})$$

wobei die letzte Gleichung nur für  $\det(\tilde{\gamma}) = 1$  erfüllt ist<sup>6</sup> [Alc08]. Für diese neuen Variablen wird auch wieder eine Entwicklungsgleichung benötigt. Ausgehend von

$$\partial_t\tilde{\Gamma}^i = -\partial_t(\partial_j\tilde{\gamma}^{ij}) = -\partial_j(\partial_t\tilde{\gamma}^{ij}) = -\partial_j(\mathcal{L}_\beta\tilde{\gamma}^{ij}) - \partial_j(2\alpha\tilde{A}^{ij}) \quad (\text{C.97})$$

erhält man nach Ersetzen der Lie-Ableitung und einigen Umformungen [Alc08]

$$\partial_t\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{lj}\partial_l\partial_j\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{il}\partial_l\partial_k\beta^k + \beta^l\partial_l\tilde{\Gamma}^i - \tilde{\Gamma}^l\partial_l\beta^i + \frac{2}{3}\tilde{\Gamma}^i\partial_l\beta^l - 2(\alpha\partial_l\tilde{A}^{il} + \tilde{A}^{il}\partial_l\alpha) \quad (\text{C.98})$$

Drei der Terme lassen sich als Lie-Ableitung einer Vektordichte vom Gewicht  $\frac{2}{3}$  auffassen [Alc08]. Die ersten beiden Terme kommen daher, dass es sich bei den  $\tilde{\Gamma}^i$  nicht um Vektoren, sondern kontrahierte Christoffelsymbole handelt. Vor diesem Hintergrund lässt sich Gleichung (C.98) umschreiben [Alc08]

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{lj}\partial_l\partial_j\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{il}\partial_l\partial_k\beta^k - 2(\alpha\partial_l\tilde{A}^{il} + \tilde{A}^{il}\partial_l\alpha) \quad (\text{C.99})$$

Alcubierre merkt an, dass die Gleichungen in dieser Form immer noch instabil sind. Deshalb wird noch die Impuls-Bedingung in den neuen Variablen [Gou07]; [Alc08]

$$\partial_j\tilde{A}^{ij} = -\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \tilde{A}^{ij} - 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK + 8\pi Ge^{4\phi}p^i \quad (\text{C.100})$$

verwendet und in Gleichung (C.99) eingesetzt, was uns schließlich

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk}\partial_l\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{il}\partial_l\partial_k\beta^k - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha \\ &\quad + 2\alpha \left( \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi Ge^{4\phi}p^i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.101})$$

---

<sup>6</sup>In der Literatur ist das Symbol  $\Gamma$  statt der geschweiften Klammern für die Christoffelsymbole gebräuchlicher, deshalb wurde von BSSN auch  $\Gamma$  als Symbol für die neue Variable verwendet.

liefert [Alc08]. Damit ist der erste Satz der BSSN-Entwicklungsgleichungen

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\phi = -\frac{1}{6}\alpha K \quad , \quad (\text{C.102a})$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha\tilde{A}_{ij} \quad , \quad (\text{C.102b})$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K &= -e^{-4\phi} \left( 2\tilde{D}_i\phi\tilde{D}^i\alpha + \tilde{D}_i\tilde{D}^i\alpha \right) + \alpha \left( \tilde{A}_{ik}\tilde{A}^{ki} + \frac{K^2}{3} \right) \\ &\quad + 4\pi G\alpha(S + E) \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.102c})$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{A}_{ij} &= e^{-4\phi} \left[ -\tilde{D}_i\tilde{D}_j\alpha + 2 \left( \tilde{D}_i\phi\tilde{D}_j\alpha + \tilde{D}_j\phi\tilde{D}_i\alpha - \tilde{\gamma}_{ij}\tilde{D}^k\phi\tilde{D}_k\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^3\mathcal{R}_{ij} + 4\pi G\alpha[(S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]^{\text{TF}} \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left( K\tilde{A}_{ij} - 2\tilde{A}_{ik}\tilde{A}^k{}_j \right) \quad , \right. \end{aligned} \quad (\text{C.102d})$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\Gamma}^i &= \tilde{\gamma}^{jk}\partial_l\partial_k\beta^i + \frac{1}{3}\tilde{\gamma}^{il}\partial_l\partial_k\beta^k - 2\tilde{A}^{ij}\partial_j\alpha \\ &\quad + 2\alpha \left( \left\{ \begin{matrix} \tilde{i} \\ jk \end{matrix} \right\} \tilde{A}^{jk} + 6\tilde{A}^{ij}\partial_j\phi - \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\partial_jK - 8\pi G e^{4\phi} p^i \right) \end{aligned} \quad (\text{C.102e})$$

Alcubierre u. a. [Alc+03] merken noch an, dass es der numerischen Stabilität dient, wenn man die  $\tilde{\Gamma}^i$  nur benutzt, wenn ihre Ableitungen auftreten und sie ansonsten durch  $\tilde{\gamma}^{jk}\left\{ \begin{matrix} \tilde{i} \\ jk \end{matrix} \right\}(\tilde{\gamma})$  ersetzt.

## C.9 Anfangswerte

Das Gleichungssystem (C.102) enthält bisher nur Entwicklungsgleichungen, aber noch keine Anfangswerte. Diese müssen unter Berücksichtigung der Hamilton- und Impuls-Bedingung gefunden werden, sonst ist das System an Gleichungen nicht mehr äquivalent zu den Einsteingleichungen. Die Randbedingungen ergeben sich zu

$$\tilde{D}_i\tilde{D}^i\Psi - \frac{1}{8}\tilde{\mathcal{R}}\Psi + \frac{1}{8}\hat{A}_{ij}\hat{A}^{ij}\Psi^{-7} + 2\pi G\tilde{E}\Psi^{-3} - \frac{1}{12}K^2\Psi^5 = 0 \quad , \quad (\text{C.103a})$$

$$\tilde{D}_j\hat{A}^{ij} - \frac{2}{3}\Psi^6\tilde{D}^iK - 8\pi G\tilde{p}^i = 0 \quad , \quad (\text{C.103b})$$

wobei hier  $\hat{A}^{ij} := \Psi^{10}A^{ij}$ ,  $\tilde{E} = \Psi^8E$  und  $\tilde{p}^i = \Psi^{10}p^i$  eingeführt wurde [Gou07]; [Alc08]. Die Verwendung von  $\hat{A}^{ij}$  anstelle von  $\tilde{A}^{ij} = \Psi^4A^{ij}$  ist durch den Zusammenhang der Divergenzen  $D_jA^{ij} = \Psi^{-10}\tilde{D}_j(\Psi^{10}A^{ij})$  [Gou07] nahegelegt und wurde zuerst von Lichnerowicz [Lic44] vorgeschlagen.

Es gibt mehrere Ansätze mit Hilfe der Bedingungsgleichungen Anfangswerte zu bestimmen. Ein früher viel verwendeter Ansatz stammt von York [Yor73; Yor74; Yor79]. Er wird als *konforme transversale spurfreie Aufspaltung* (conformal transverse traceless - CTT - method) bezeichnet. Kern dieser Methode bildet neben der Einführung einer konformen Transformation die Aufspaltung der (symmetrischen) spurfreien äußeren Krümmung  $A^{ij}$

in einen symmetrischen spurfreien und transversalen Teil  $A_*^{ij}$  und einen longitudinalen Term mit dem so genannten *konformen Killing Operator*  $\mathbf{L}$  [Gou07]; [Alc08]

$$\hat{A}^{ij} = \hat{A}_{\text{TT}}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}\tilde{W})^{ij} \quad , \quad (\text{C.104})$$

wobei  $(\tilde{\mathbf{L}}\tilde{W})^{ij}$  die *konforme Killing Form* des (zunächst nicht weiter spezifizierten) Vektors  $\tilde{W}^i$  ist. Sie ist gegeben durch [Gou07]; [Alc08]

$$(\tilde{\mathbf{L}}\tilde{W})^{ij} := \tilde{D}^i \tilde{W}^j + \tilde{D}^j \tilde{W}^i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_k \tilde{W}^k \quad . \quad (\text{C.105})$$

Zusätzlich dazu führt man noch den *konformen Vektor-Laplace-Operator*

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_{\tilde{\mathbf{L}}}\tilde{W}^i &:= \tilde{D}_j (\tilde{\mathbf{L}}\tilde{W})^{ij} \\ &= \tilde{D}^i \tilde{D}_i \tilde{W}^j + \tilde{D}_j \tilde{D}^i \tilde{W}^j - \frac{2}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_j \tilde{W}^j \\ &= \tilde{D}_j \tilde{D}^j \tilde{W}^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_j \tilde{W}^j + \tilde{\mathcal{R}}^i_j \tilde{W}^j \end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

ein [Gou07]; [Alc08]. Damit ergibt sich die Impuls-Bedingung in der Form [Gou07]; [Alc08]

$$\tilde{\Delta}_{\tilde{\mathbf{L}}}\tilde{W}^i - \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{D}^i K - 8\pi G \tilde{p}^i = 0 \quad . \quad (\text{C.107})$$

In Gleichung (C.103a) ersetzt man auch  $\hat{A}^{ij}$  durch  $\tilde{W}^i$  und  $\hat{A}_{\text{TT}}^{ij}$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi - \frac{1}{8} \tilde{\mathcal{R}} \Psi + \frac{1}{8} [\hat{A}_{ij}^{\text{TT}} + (\tilde{\mathbf{L}}\tilde{W})_{ij}] [\hat{A}_{\text{TT}}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}\tilde{W})^{ij}] \Psi^{-7} + 2\pi G \tilde{E} \Psi^{-3} - \frac{1}{12} K^2 \Psi^5 = 0 \quad , \quad (\text{C.108})$$

und erhält so ein System an Gleichungen für die Variablen  $\Psi$  und  $\tilde{W}^i$ . Diese werden durch freie Anfangswerte der Größen  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $\hat{A}_{\text{TT}}^{ij}$ ,  $K$ ,  $E$  und  $p^i$  festgelegt und man erhält über

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \Psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} \\ K^{ij} &= \Psi^{-10} \hat{A}^{ij} + \frac{1}{3} \gamma^{ij} K \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

die physikalischen Größen der äußeren Krümmung  $\mathbf{K}$  und der räumlichen Metrik  $\gamma$  [Gou07]; [Alc08].

Unter Berücksichtigung einiger nähernder Annahmen können diese Gleichungen erheblich vereinfacht werden. Nimmt man an, dass die äußere Krümmung  $\mathbf{K}$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  verschwindet (zeit-symmetrische Anfangswerte [Gou07]), dass die konforme Metrik die des flachen Raumes ist und dass dieser Raum auch materiefrei ist, werden die Impuls-Bedingungen durch Wahl  $\tilde{W}^i = 0$  gelöst und als Hamilton Bedingung bleibt nur noch

$$\Delta \Psi = 0 \quad , \quad (\text{C.110})$$

wobei  $\Delta$  der Laplace-Operator des flachen Raumes ist. Diese Gleichung ist (entsprechend der stark vereinfachenden Annahmen) vergleichsweise einfach. Sie lässt eine besondere Art von Anfangswerten zu, nämlich die von schwarzen Löchern.

Asymptotische Flachheit bringt uns die Randbedingung, dass  $\Psi$  für  $r \rightarrow \infty$  gegen 1 gehen muss. Eine mögliche Lösung ist  $\Psi = 1$  auf der ganzen Hyperfläche, was schließlich einer Minkowski-Raumzeit entspricht [Gou07].

Interessanter wird es, wenn man um  $r = 0$  eine Kugel aus der Hyperfläche ausschneidet und am Rand der Kugel  $\mathcal{S}$  andere Randbedingungen für  $\Psi$  festlegt. So ist es möglich

$$\Psi = 1 + \frac{m}{2r} \quad (\text{C.111})$$

als Lösung zu konstruieren [Gou07]; [Alc08]. Diese Lösung entspricht dann den Anfangswerten

$$\gamma_{ij} = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 \text{diag}(1, r^2, r^2 \sin^2 \theta) \quad , \quad K_{ij} = 0 \quad . \quad (\text{C.112})$$

Das ist aber gerade die Metrik in isotroper Form der Schwarzschildkoordinaten (beziehungsweise deren räumlicher Teil) [Gou07]; [Alc08]. Gourgoulhon [Gou07] macht noch eine Bemerkung, dass man die so gefundene Mannigfaltigkeit  $\Sigma_0$  erweitern kann, sodass sie für  $r \in (0, \infty)$  definiert ist. Dazu „klebt“ man eine Kopie von  $\Sigma_0$  an den Rand der ausgeschnittenen Kugel. Durch eine anschließende Variablentransformation  $r' = \frac{m^2}{4r}$  kann man erkennen, dass der Grenzfall  $r \rightarrow 0$  nicht einer Singularität, sondern einer zweiten asymptotisch flachen Region entspricht. Der Anschluss der beiden Mannigfaltigkeiten wird als *Einstein-Rosen-Brücke* bezeichnet.

Neben dem Ausschluss einer Kugel am Ursprung, gibt es auch Lösungen, in denen aus der Hyperfläche nur ein Punkt ausgeschlossen wird und somit

$$\Sigma_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \quad (\text{C.113})$$

gilt. Der so entfernte Punkt  $O$  wird als *puncture* (Durchstich) bezeichnet. Für eine solche Raumzeit kann man neben der Reproduktion der obigen Lösung für  $\tilde{W}^i = 0$  auch noch kompliziertere Lösungen finden [Gou07]. Ohne näher darauf eingehen zu wollen sei erwähnt, dass Bowen und York [BY80] Lösungen konstruiert haben, die vom gesamten Impuls und Drehimpuls der Raumzeit abhängen. Allerdings ist es nicht möglich, damit ein Kerr Schwarzes Loch zu beschreiben [Gou07].

Es gibt noch (mindestens) zwei Varianten zur CTT-Methode, wie sie hier vorgestellt ist. Die Aufspaltung mit Hilfe der physikalischen Metrik  $\tilde{\gamma}_{ij}$

$$A^{ij} = A_{\text{TT}}^{ij} + (\mathbf{L}W)^{ij} \quad , \quad (\text{C.114})$$

und die gewichtete transversale Aufspaltung

$$A^{ij} = A_{\text{TT}}^{ij} + \frac{1}{\sigma} (\mathbf{L}W)^{ij} \quad , \quad (\text{C.115})$$

wobei  $\sigma$  ein positiver Skalar und  $\mathbf{L}$  der zu  $\gamma$  gehörende konforme Killing-Operator ist [Alc08]. Ich werde auf diese Varianten hier aber nicht weiter eingehen.

Eine Alternative zur CTT-Methode bildet die von York aufgestellte *conformal thin sandwich method* (CTS) [Yor99]; [Gou07]; [Alc08]. Ausgehend von Gleichung (C.83)

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha\tilde{A}_{ij} \quad (\text{C.116})$$

erhält man direkt auch

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)\tilde{\gamma}^{ij} = 2\alpha\tilde{A}^{ij} \quad , \quad (\text{C.117})$$

unter Berücksichtigung der Definition der Lie-Ableitung und dass  $\partial_t(\tilde{\gamma}_{ij}\tilde{\gamma}^{ij}) = 0$  ist. Weiterhin gilt [Alc+03]

$$\mathcal{L}_\beta\tilde{\gamma}^{ij} = -\tilde{D}^i\beta^j - \tilde{D}^j\beta^i + \frac{2}{3}\tilde{\gamma}^{ij}\tilde{D}_k\beta^k = -(\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \quad , \quad (\text{C.118})$$

womit man dann

$$\tilde{A}^{ij} = \frac{1}{2\alpha} \left[ \partial_t\tilde{\gamma}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right] \quad (\text{C.119})$$

schreiben kann [Gou07] (Alcubierre u. a. [Alc+03] verwendet eine andere Definition für die Zeitableitung). Führt man noch  $\tilde{\alpha} = \Psi^{-6}\alpha$  ein, kann man den Ausdruck kompakt als

$$\hat{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} \left[ \partial_t\tilde{\gamma}^{ij} + (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right] \quad (\text{C.120})$$

schreiben. Somit ist hier die spurfreie äußere Krümmung als Funktion von Lapse, Shift und der Zeitableitung der räumlichen Metrik dargestellt. Diese kann man in die Impulsbedingungen (C.103b) einsetzen und erhält

$$\tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} \partial_t \tilde{\gamma}^{ij} \right) + \tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right) - \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{D}^i K - 8\pi G \tilde{p}^i = 0 \quad . \quad (\text{C.121})$$

Die Hamilton-Bedingung bleibt gleich, sodass mit

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi - \frac{1}{8} \tilde{\mathcal{R}} \Psi + \frac{1}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-7} + 2\pi G \tilde{E} \Psi^{-3} - \frac{1}{12} K^2 \Psi^5 = 0 \quad , \quad (\text{C.122a})$$

$$\tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} \partial_t \tilde{\gamma}^{ij} \right) + \tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right) - \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{D}^i K - 8\pi G \tilde{p}^i = 0 \quad , \quad (\text{C.122b})$$

die Randbedingungen für die CTS-Methode festgelegt ist. Hier sind die frei wählbaren Daten  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $\partial_t\tilde{\gamma}^{ij}$ ,  $K$ ,  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{E}$  und  $\tilde{p}^i$  auf  $\Sigma_0$ . Festgelegt sind durch die beiden Gleichungen (C.122)  $\Psi$  und  $\beta^i$  [Gou07].

Einer der freien Startwerte für die CTS-Methode ist die konforme Lapse  $\tilde{\alpha}$ . Es ist allerdings in astrophysikalischen Systemen häufig nicht klar, wie man diese wählen sollte [Gou07]. Deshalb schlugen Pfeiffer und York [PY05] vor,  $\tilde{\alpha}$  aus der Zeitableitung der Spur der äußeren Krümmung zu berechnen, dazu benutzt man Gleichung (C.102c).

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta)K = -e^{-4\phi} \left( 2\tilde{D}_i\phi\tilde{D}^i\alpha + \tilde{D}_i\tilde{D}^i\alpha \right) + \alpha \left( \tilde{A}_{ik}\tilde{A}^{ki} + \frac{K^2}{3} \right) + 4\pi G\alpha(S + E) \quad (\text{C.123})$$

in Kombination mit Gleichung (C.122a) und einigen Umformungen. Schließlich erhält man daraus eine Gleichung für  $\tilde{\alpha}\Psi^7 = \alpha\Psi$  [Gou07]

$$\begin{aligned} & \tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha}\Psi^7) + (\partial_t K - \beta^i \tilde{D}_i K) \Psi^5 \\ & - (\tilde{\alpha}\Psi^7) \left[ \frac{1}{8} \tilde{\mathcal{R}} + \frac{5}{12} K^2 \Psi^4 + \frac{7}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-8} + 2\pi G (\tilde{E} + 2\tilde{S}) \Psi^{-4} \right] = 0 \quad , \quad (\text{C.124}) \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{S} = S\Psi^8$  eingeführt wurde. In Erweiterung zur CTS-Methode wird neben  $\tilde{S}$  noch  $\partial_t K$  als freier Wert übergeben. Dafür ist durch die zusätzliche Gleichung allerdings auch die konforme Lapse  $\tilde{\alpha}$  bestimmt. Gourgoulhon [Gou07] unterscheidet zwischen CTS und eXtended CTS durch Hinzunahme der Gleichung (C.124).

## C.10 Einfaches Beispiel für Startwerte

Mit Hilfe der XCTS-Gleichungen (C.122) und (C.124) lassen sich konkrete Startwerte für physikalisch interessante Raumzeiten finden. Hier werden Anfangswerte in einer dreidimensionalen Hyperfläche, aus der eine Kugel ausgeschnitten ist, gesucht. Es gilt also  $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{K}$ . Als erste weitere Annahme geht man von einem quasi stationären System aus. Dies ist der erste Schritt zu dem Ziel Anfangswerte für ein Binärsystem aufstellen. Solche Systeme sind nicht streng stationär, da sie Energie durch Abstrahlung von Gravitationswellen verlieren. Für Abstände oberhalb des letzten stabilen Orbits sind diese System aber annähernd stationär [Coo0]).

Die Annahme eines quasi stationären Systems liefert direkt  $\partial_t \tilde{\gamma}_{ij} = 0$ ,  $\partial_t K = 0$  und  $K = 0$  [Alc08]. Zusätzlich nimmt man an, dass die konforme Metrik den flachen Raum beschreibt  $\tilde{\gamma}_{ij} = f_{ij}$ , wobei  $f_{ij}$  die Metrik des flachen Raumes beschreibt und für kartesische Koordinaten gerade einem Kronecker-Delta entspricht. Die XCTS-Gleichungen (C.122) und (C.124) werden damit

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi + \frac{1}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-7} + 2\pi G \tilde{E} \Psi^{-3} = 0 \quad , \quad (\text{C.125a})$$

$$\tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right) - 8\pi G \tilde{p}^i = 0 \quad , \quad (\text{C.125b})$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha}\Psi^7) - (\tilde{\alpha}\Psi^7) \left[ \frac{7}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-8} + 2\pi G (\tilde{E} + 2\tilde{S}) \Psi^{-4} \right] = 0 \quad (\text{C.125c})$$

und der spurfreie Teil der äußeren Krümmung ist durch  $\hat{A}^{ij} = \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij}$  gegeben. Das System (C.125) entspricht so auch demjenigen für Binärsysteme (mit der zusätzlichen Annahme, dass die konforme Metrik flachen Raum beschreibt) [Gou07]. Für Systeme mit zwei Schwarzen Löchern wird allerdings zusätzlich noch angenommen, dass der Raum materiefrei ist und sich so die Gleichungen deutlich vereinfachen. Für System mit zwei Neutronensternen kann man diese Annahme allerdings nicht treffen.

Die Annahme eines materiefreien Raumes wird hier auch getroffen und damit  $\tilde{E} = \tilde{S} = 0$  und  $\tilde{p}^i = 0$  gesetzt. Die Gleichungen vereinfachen sich dadurch noch einmal auf [Gou07]

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi + \frac{1}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-7} = 0 \quad , \quad (\text{C.126a})$$

$$\tilde{D}_j \left( \frac{1}{2\tilde{\alpha}} (\tilde{\mathbf{L}}\beta)^{ij} \right) = 0 \quad , \quad (\text{C.126b})$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha} \Psi^7) - (\tilde{\alpha} \Psi^7) \left[ \frac{7}{8} \hat{A}_{ij} \hat{A}^{ij} \Psi^{-8} \right] = 0 \quad . \quad (\text{C.126c})$$

Nun lässt sich Gleichung (C.126b) durch den Ansatz  $\beta^i = 0$  lösen [Gou07]. Damit ist aber auch  $\hat{A}_{ij} = 0$  und die beiden verbleibenden Gleichungen reduzieren sich schließlich drastisch auf

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i \Psi = 0 \quad , \quad (\text{C.127a})$$

$$\tilde{D}_i \tilde{D}^i (\tilde{\alpha} \Psi^7) = 0 \quad . \quad (\text{C.127b})$$

Für unsere Wahl einer flachen konformen Metrik entspricht Gleichung (C.127a) der Laplace-Gleichung für  $\Psi$ . Als einfachste nicht triviale Lösung für diese Gleichung findet man [Gou07]; [Alc08]

$$\Psi = 1 + \frac{m}{2r} \quad . \quad (\text{C.128})$$

Gleichung (C.127b) wird entsprechend durch

$$\tilde{\alpha} \Psi^7 = \alpha \Psi = 1 + \frac{d}{r} \quad (\text{C.129})$$

gelöst [Gou07]; [Alc08]. Die Konstante  $d$  kann zu  $d = -\frac{m}{2}$  gewählt werden [Gou07]; [Alc08] und damit ergibt sich

$$\alpha = \frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} \quad . \quad (\text{C.130})$$

Dies legt die komplette Metrik  $g_{\mu\nu}$  auf der Hyperfläche  $\Sigma_0$  fest, denn mit Gleichung (C.64) und den gerade bestimmten Größen  $\alpha$ ,  $\Psi$  und  $\beta^i$  findet sich

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} \right)^2 + \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad , \quad (\text{C.131})$$

oder in Kugelkoordinaten

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}} \right)^2 + \left( 1 + \frac{m}{2r} \right)^4 (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad . \quad (\text{C.132})$$

Die Gleichungen (C.131) beziehungsweise (C.132) entsprechen gerade der isotropen Form der Schwarzschild-Metrik [Gou07]; [Alc08]. Das heißt, dass die Anfangswerte für ein statisches Schwarzes Loch gerade der Schwarzschild-Metrik in isotropen Koordinaten entsprechen.







## Lie-Ableitung

Neben der kovarianten Ableitung existiert noch eine andere Möglichkeit eine Ableitung auf Mannigfaltigkeiten zu definieren. Hierzu benötigt man zunächst den Begriff der Integralkurve eines Vektorfeldes. Eine mögliche Definition findet man im Buch von Schutz [Sch80]: Für ein beliebiges (einmal differenzierbares) Vektorfeld  $\mathbf{v}$  findet man Kurven, deren Tangentenvektoren an jedem beliebigen Punkt  $p$  der Mannigfaltigkeit durch  $\mathbf{v}$  gegeben sind. Die Komponenten des Tangenvektors sind durch  $\frac{dx^\mu}{d\lambda} = v^\mu(x^\nu)$  gegeben, wobei  $\lambda$  der Kurvenparameter ist. Solche Kurven bezeichnet man als Integralkurven. Die Gesamtheit aller Integralkurven zu einem Vektorfeld  $\mathbf{v}$  wird Kongruenz genannt. Sie deckt die gesamte Mannigfaltigkeit ab und stellt eine Abbildung der Mannigfaltigkeit in sich selbst dar. Sie bildet einen Punkt  $p$  auf den Punkt  $q := \phi_\lambda(p)$  in der Distanz  $\lambda$  entlang einer Integralkurve ab [Alc08]. Diese Definitionen lassen sich dazu benutzen um Tensoren (zunächst Skalare und Vektoren) an verschiedenen Punkten im Raum miteinander zu vergleichen. Zunächst betrachtet man also eine skalare Funktion  $f$  am Punkt  $p$ . Die zu  $f$  gehörende verschobene Funktion  $\phi_\lambda(f)(q)$  an der Stelle  $q$  soll vom Wert her gleich der Funktion  $f(p)$  selbst sein. Daraus ergibt sich (unter der Annahme  $q = p + \lambda$ ) [Sch80]

$$\mathcal{L}_\mathbf{v}f = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_p, \quad (\text{D.1})$$

wobei  $\mathcal{L}_\mathbf{v}$  die *Lie-Ableitung* von  $f$  in Richtung  $\mathbf{v}$  ist. Für ein Vektorfeld  $\mathbf{u}$  definiert man die Lie-Ableitung folgendermaßen: Man betrachtet  $\mathbf{u}$  am Ort  $q = \phi_\lambda(p)$  und verschiebt diesen zurück an den Ort  $p$ . Anschließend bildet man die Differenz zum ursprünglichen Vektor  $\mathbf{u}$  am Ort  $p$ . Damit man eine Ableitung erhält, betrachtet man den zugehörigen Differenzenquotienten im Grenzfall  $q \rightarrow p$

$$\mathcal{L}_\mathbf{v}\mathbf{u} := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{\phi_{-\lambda}^{-1}(\mathbf{u}|_q) - \mathbf{u}|_p}{\lambda} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Mit  $\phi_\lambda(x^\alpha) = x^\alpha + \frac{dx^\alpha}{d\lambda}\lambda = x^\alpha + v^\alpha\lambda$  formt man diesen Ausdruck um zu [Alc08]

$$\phi_\lambda(u^\alpha) = \phi_\lambda \left( \frac{dx^\alpha}{d\mu} \right) = u^\alpha + \frac{d}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\mu} \lambda = u^\alpha + \frac{d}{d\mu} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \lambda$$

---



---


$$= u^\alpha + \frac{dv^\alpha}{d\mu} \lambda = u^\alpha + \frac{dx^\beta}{d\mu} \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \lambda = u^\alpha + \lambda u^\beta \partial_\beta v^\alpha \quad . \quad (\text{D.3})$$

$\mu$  bezeichnet hier den zu den Kurven von  $\mathbf{u}$  gehörenden Parameter. Gleichung (D.2) wird damit komponentenweise zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} u^\nu &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{u^\nu|_q - \lambda(u^\beta|_q \partial_\beta v^\nu) - u^\nu|_p}{\lambda} \right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{u^\nu|_q - u^\nu|_p}{\lambda} - (u^\beta|_q \partial_\beta v^\nu) \right] \\ &= \frac{du^\nu}{d\lambda} - u^\beta \partial_\beta v^\nu \\ &= v^\beta \partial_\beta u^\nu - u^\beta \partial_\beta v^\nu \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Die entsprechende Ableitung für kovariante Vektoren erhält man durch Ausnutzen der Produktregel

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega_\alpha u^\alpha) &= \omega_\alpha \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(u^\alpha) + u^\alpha \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega_\alpha) \\ \Leftrightarrow u^\alpha \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega_\alpha) &= \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega_\alpha u^\alpha) - \omega_\alpha \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(u^\alpha) \quad .(u^\alpha) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

In (D.5) ist die Lie-Ableitung eines kovarianten Vektors als Funktion der Lie-Ableitungen einer skalaren Funktion  $\omega_\alpha u^\alpha$  und eines kontravarianten Vektors  $u^\alpha$  dargestellt. Diese Ausdrücke sind aber mit (D.1) und (D.2) schon bekannt und man kann sie in (D.5) einsetzen und erhält durch Umbenennung der Summationsindizes

$$\begin{aligned} u^\alpha \mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega_\alpha) &= \frac{d}{d\lambda}(\omega_\alpha u^\alpha) - \omega_\alpha (v^\beta \partial_\beta u^\alpha - u^\beta \partial_\beta v^\alpha) \\ &= u^\alpha v^\beta \partial_\beta \omega_\alpha + \omega_\alpha v^\beta \partial_\beta u^\alpha - \omega_\alpha v^\beta \partial_\beta u^\alpha + \omega_\alpha u^\beta \partial_\beta v^\alpha \\ &= u^\alpha v^\beta \partial_\beta \omega_\alpha + \omega_\alpha u^\beta \partial_\beta v^\alpha \\ &= (v^\beta \partial_\beta \omega_\gamma) u^\gamma + (\omega_\beta \partial_\gamma v^\beta) u^\gamma \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Schließlich verbleibt der Ausdruck

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}}(\omega_\gamma) = v^\beta \partial_\beta \omega_\gamma + \omega_\beta \partial_\gamma v^\beta \quad (\text{D.7})$$

für die Lie-Ableitung kovarianter Vektoren. Von hier aus kann man direkt die Verallgemeinerung auf die Lie-Ableitung von beliebigen Tensoren durchführen [Gou07]; [Alc08]

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} T_\nu^\rho = v^\beta \partial_\beta T_\nu^\rho - T_\nu^\beta \partial_\beta v^\rho + T_\beta^\rho \partial_\nu v^\beta \quad , \quad (\text{D.8})$$

wobei man an dieser Stelle auch die partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzen kann [Gou07]

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}} T_\nu^\rho = v^\beta \nabla_\beta T_\nu^\rho - T_\nu^\beta \nabla_\beta v^\rho + T_\beta^\rho \nabla_\nu v^\beta \quad . \quad (\text{D.9})$$



## Projektionen des Riemann-Tensors

Ein zentraler Bestandteil der 3+1 Aufspaltung der Einsteingleichungen sind Projektionen des Riemann-Tensors auf die Hyperflächen und orthogonal dazu. Ihre Ableitung ist allerdings länglich, weshalb sie hier in den Anhang ausgelagert wurde.

Ausgehend von der Definition für den räumlichen Riemann-Tensor (C.12) in der vierdimensionalen Form

$$(D_\mu D_\sigma - D_\sigma D_\mu) v^\nu = {}^3\mathcal{R}^\nu{}_{\rho\mu\sigma} v^\rho \quad (\text{E.1})$$

für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{v}$  tangential an  $\Sigma$ , werden die räumlichen kovarianten Ableitung  $\mathbf{D}$  mit Hilfe von Gleichung (C.24) durch die kovariante Ableitung  $\nabla$  ersetzt. Betrachtet man also zunächst

$$\begin{aligned} D_\sigma(D_\mu v^\nu) &= P^\rho{}_\mu P^\nu{}_\lambda P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma (D_\rho v^\lambda) \\ &= P^\rho{}_\mu P^\nu{}_\lambda P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma (P^\lambda{}_\tau P^\alpha{}_\rho \nabla_\alpha v^\tau) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

und benutzt  $\nabla P^\lambda{}_\tau = n^\lambda \nabla_\gamma n_\tau n_\tau \nabla_\gamma n^\lambda$  und  $P^\nu{}_\sigma n_\nu = 0$ , so ergibt das [Gou07]

$$\begin{aligned} D_\sigma(D_\mu v^\nu) &= P^\rho{}_\mu P^\nu{}_\lambda P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \left( \underbrace{n_\tau \nabla_\gamma n^\lambda P^\alpha{}_\rho \nabla_\alpha v^\tau}_{=-\nabla_\gamma n^\lambda P^\alpha{}_\rho v^\tau \nabla_\alpha n_\tau} + n^\alpha \nabla_\gamma n_\rho P^\lambda{}_\tau \nabla_\alpha v^\tau + P^\lambda{}_\tau P^\alpha{}_\rho \nabla_\gamma \nabla_\alpha v^\tau \right) \\ &= P^\rho{}_\mu P^\nu{}_\lambda P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \left( -\nabla_\gamma n^\lambda P^\alpha{}_\rho v^\tau \nabla_\alpha n_\tau + n^\alpha \nabla_\gamma n_\rho P^\lambda{}_\tau \nabla_\alpha v^\tau \right) \\ &\quad + P^\alpha{}_\mu P^\nu{}_\tau P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \nabla_\alpha v^\tau \\ &\stackrel{(\text{C.25})}{=} P^\rho{}_\mu P^\nu{}_\lambda P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \left( \nabla_\gamma n^\lambda P^\alpha{}_\rho v^\tau (K_{\alpha\tau} + n_\alpha a_\tau) - (K_{\gamma\rho} + n_\gamma a_\rho) n^\alpha P^\lambda{}_\tau \nabla_\alpha v^\tau \right) \\ &\quad + P^\alpha{}_\mu P^\nu{}_\tau P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \nabla_\alpha v^\tau \\ &= P^\rho{}_\mu P^\nu{}_\lambda P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \left( (-K_\gamma{}^\lambda - n_\gamma a^\lambda) P^\alpha{}_\rho v^\tau K_{\alpha\tau} - K_{\gamma\rho} n^\alpha P^\lambda{}_\tau \nabla_\alpha v^\tau \right) \\ &\quad + P^\alpha{}_\mu P^\nu{}_\tau P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \nabla_\alpha v^\tau \\ &= -K_\sigma{}^\nu K_{\mu\tau} v^\tau - K_{\sigma\mu} P^\nu{}_\tau n^\alpha \nabla_\alpha v^\tau + P^\alpha{}_\mu P^\nu{}_\tau P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \nabla_\alpha v^\tau \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Durch Vertauschen von  $\mu$  und  $\sigma$  in Gleichung (E.4) und anschließende Differenzenbildung bleibt [Gou07]

$$(D_\mu D_\sigma - D_\sigma D_\mu) v^\nu = (K_\sigma^\nu K_{\mu\tau} - K_\mu^\nu K_{\sigma\tau}) v^\tau + P^\nu{}_\tau P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma (\nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha) v^\tau \quad . \quad (\text{E.5})$$

Jetzt kann man die Ausdrücke für den Riemann-Tensor einsetzen und erhält [Gou07]

$${}^3\mathcal{R}^\nu{}_{\tau\mu\sigma} v^\tau = (K_\sigma^\nu K_{\mu\tau} - K_\mu^\nu K_{\sigma\tau}) v^\tau + P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} v^\rho \quad . \quad (\text{E.6})$$

Mit  $v^\rho = P^\rho{}_\tau v^\tau$  ( $\mathbf{v}$  ist parallel an  $\Sigma$ ) ergibt sich somit die *Gauß-Gleichung* [Gou07]; [Alc08]

$$P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma P^\rho{}_\tau \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} = {}^3\mathcal{R}^\nu{}_{\tau\mu\sigma} - K_\sigma^\nu K_{\mu\tau} + K_\mu^\nu K_{\sigma\tau} \quad . \quad (\text{E.7})$$

Relevant für den 3+1 Formalismus ist noch die 1-3-kontrahierte Form dieser Gleichung, die *kontrahierte Gauß-Gleichung*

$$P^\gamma{}_\sigma P^\rho{}_\tau \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\gamma} + n^\alpha n_\beta P^\gamma{}_\sigma P^\rho{}_\tau \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} = {}^3\mathcal{R}_{\tau\sigma} - K_\sigma^\mu K_{\mu\tau} + K_\mu^\mu K_{\sigma\tau} \quad . \quad (\text{E.8})$$

Schließlich können die Spur dieser Gleichung in Bezug auf  $\gamma$  bilden und erhalten die *skalare Gaußgleichung* [Gou07]

$$\begin{aligned} P^{\gamma\tau} P^\rho{}_\tau \mathcal{R}_{\rho\tau} + n^\alpha n_\beta P^{\gamma\tau} P^\rho{}_\tau \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} &= {}^3\mathcal{R} - K^{\tau\mu} K_{\mu\tau} + K^2 \\ \Rightarrow (g^{\hat{\gamma}\rho} + n^\gamma n^\rho) \mathcal{R}_{\rho\tau} + n^\alpha n_\beta (g^{\hat{\gamma}\rho} + n^\gamma n^\rho) \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} &= {}^3\mathcal{R} - K^{\tau\mu} K_{\mu\tau} + K^2 \\ \Rightarrow \mathcal{R} - n^\gamma n^\rho \mathcal{R}_{\rho\gamma} + n^\alpha n_\beta \mathcal{R}^\beta{}_\alpha &= {}^3\mathcal{R} - K^{\tau\mu} K_{\mu\tau} + K^2 \\ \Rightarrow \mathcal{R} + 2n^\gamma n^\rho \mathcal{R}_{\rho\gamma} &= {}^3\mathcal{R} - K^{\tau\mu} K_{\mu\tau} + K^2 \quad . \quad (\text{E.9}) \end{aligned}$$

Die Gauß-Gleichungen stellen eine Projektion des Riemann-Tensors komplett auf die Hyperfläche  $\Sigma$  dar. Es ist möglich auch eine gemischte Projektion, zum Teil auf  $\Sigma$  und zum Teil orthogonal dazu, zu bestimmen [Gou07]. Dazu betrachten wir

$$P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} n^\rho = P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma (\nabla_\alpha \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\alpha) n^\beta \quad . \quad (\text{E.10})$$

Wie bereits bei den Gauß-Gleichungen beschränkt man sich zunächst auf einen Term in Gleichung (E.10) und formt diesen um [Gou07]

$$\begin{aligned} P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma \nabla_\alpha n^\beta &\stackrel{(\text{C.25})}{=} P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma \nabla_\gamma (-K_\alpha^\beta - n_\alpha a^\beta) \\ &= P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma (-\nabla_\gamma K_\alpha^\beta - n_\alpha \nabla_\gamma a^\beta - a^\beta \nabla_\gamma n_\alpha) \\ &\stackrel{(\text{C.25}, \text{C.16})}{=} P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma (-\nabla_\gamma K_\alpha^\beta + a^\beta K_{\gamma\alpha}) \\ &\stackrel{(\text{C.24})}{=} -D_\sigma K_\mu^\nu + a^\nu K_{\sigma\mu} \quad . \quad (\text{E.11}) \end{aligned}$$

Analog zu den Betrachtungen bei den Gauß-Gleichungen vertauscht man hier die Indizes  $\alpha$  und  $\gamma$  und erhält nach anschließender Subtraktion die *Codazzi-Mainardi-Gleichungen* [Gou07]; [Alc08]

$$P^\nu{}_\beta P^\alpha{}_\mu P^\gamma{}_\sigma \mathcal{R}^\beta{}_{\rho\alpha\gamma} n^\rho = D_\sigma K_\mu^\nu - D_\mu K_\sigma^\nu \quad . \quad (\text{E.12})$$

Eine Kontraktion in den Indizes  $\mu$  und  $\nu$  liefert die *kontrahierten Codazzi-Gleichungen* [Gou07]

$$P^\gamma{}_\sigma \mathcal{R}_{\rho\gamma} n^\rho = D_\sigma K - D_\mu K_\sigma{}^\mu \quad . \quad (\text{E.13})$$

Bisher wurde mit den Gauß-Gleichungen die volle Projektion des Riemann-Tensors auf die Hyperflächen und mit den Codazzi-Gleichungen die erste teilweise Projektion orthogonal dazu betrachtet. Es ist möglich noch eine weitere nicht verschwindende Projektion des Riemann-Tensors zu finden, zweimal auf die Hyperflächen und zweimal orthogonal dazu. Projektionen des Riemann-Tensors die drei- oder viermal orthogonal zu den Hyperflächen sind, verschwinden aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften [Gou07]. Deswegen betrachtet man folgenden Ausdruck [Gou07]

$$\begin{aligned} P_{\alpha\mu} n^\sigma P^\nu{}_\beta \mathcal{R}^\mu{}_{\rho\nu\sigma} n^\rho &= P_{\alpha\mu} n^\sigma P^\nu{}_\beta (\nabla_\nu \nabla_\sigma - \nabla_\sigma \nabla_\nu) n^\mu \\ &= P_{\alpha\mu} n^\sigma P^\nu{}_\beta [\nabla_\nu (-K^\mu{}_\sigma - n_\sigma a^\mu) - \nabla_\sigma (-K^\mu{}_\nu - n_\nu a^\mu)] \\ &= P_{\alpha\mu} P^\nu{}_\beta [-n^\sigma \nabla_\nu (n_\sigma a^\mu) - n^\sigma \nabla_\nu K^\mu{}_\sigma \\ &\quad + n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + a^\mu n^\sigma \nabla_\sigma n_\nu + n_\nu n^\sigma \nabla_\sigma a^\mu] \\ &= P_{\alpha\mu} P^\nu{}_\beta [\nabla_\nu a^\mu + K^\mu{}_\sigma \nabla_\nu n^\sigma + n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu + a^\mu a_\nu] \\ &= P_{\alpha\mu} P^\nu{}_\beta [n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu - K^\mu{}_\sigma K^\sigma{}_\nu + a^\mu a_\nu \nabla_\nu a^\mu] \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Hier wurde benutzt, dass  $K^\mu{}_\sigma n^\sigma = 0$  und  $P^\nu{}_\beta n_\nu = 0$  ist. An dieser Stelle lohnt es sich für die Beschleunigung  $\mathbf{a}$  des Normalenvektors  $\mathbf{n}$  einen anderen Ausdruck zu finden. Bemerkte man, dass

$$\begin{aligned} a_\mu &= n^\sigma \nabla_\sigma n_\mu = n^\sigma \nabla_\sigma (\alpha \nabla_\mu t) = \alpha n^\sigma \nabla_\sigma \nabla_\mu t + \nabla_\mu t n^\sigma \nabla_\sigma \alpha \\ &= \alpha n^\sigma \nabla_\mu \left( \frac{1}{\alpha} n_\sigma \right) + \frac{1}{\alpha} n_\mu n^\sigma \nabla_\sigma \alpha \\ &= n^\sigma \nabla_\mu n_\sigma - \frac{1}{\alpha} n^\sigma n_\sigma \nabla_\mu \alpha + \frac{1}{\alpha} n_\mu n^\sigma \nabla_\sigma \alpha \\ &= \frac{1}{\alpha} [\nabla_\mu \alpha + n_\mu n^\sigma \nabla_\sigma \alpha] = \frac{1}{\alpha} [(\delta_\mu^\rho + n^\rho n_\mu) \nabla_\rho \alpha] \\ &= \frac{1}{\alpha} P^\rho{}_\mu \nabla_\rho \alpha = \frac{1}{\alpha} D_\mu \alpha = D_\mu \ln(\alpha) \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

gilt und diese Gleichung in Gleichung (E.14) einsetzt, erhält man schließlich [Gou07]

$$\begin{aligned} P_{\alpha\mu} n^\sigma P^\nu{}_\beta \mathcal{R}^\mu{}_{\rho\nu\sigma} n^\rho &= P_{\alpha\mu} P^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu - K_{\alpha\sigma} K^\sigma{}_\beta + D_\alpha \ln(\alpha) D_\beta \ln(\alpha) + D_\beta D_\alpha \ln(\alpha) \\ &= P_{\alpha\mu} P^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu - K_{\alpha\sigma} K^\sigma{}_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D_\alpha \alpha \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Hier kann man noch Gleichung (C.39) verwenden, um den Term  $P_{\alpha\mu} P^\nu{}_\beta n^\sigma \nabla_\sigma K^\mu{}_\nu$  zu ersetzen, so dass die so genannte *Ricci-Gleichung*

$$P_{\alpha\mu} n^\sigma P^\nu{}_\beta \mathcal{R}^\mu{}_{\rho\nu\sigma} n^\rho = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}_m K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\sigma} K^\sigma{}_\beta + \frac{1}{\alpha} D_\beta D_\alpha \alpha \quad (\text{E.17})$$

---

bleibt [Gou07]. Die Ricci-Gleichung wird dazu benutzt, um in der kontrahierten Gauß-Gleichung (E.8) den Term mit dem vierdimensionalen Riemann-Tensor zu eliminieren und es ergibt sich [Gou07]

$$P^\gamma_\sigma P^\rho_\tau \mathcal{R}_{\rho\gamma} = -\frac{1}{\alpha} \mathcal{L}_m K_{\tau\sigma} + {}^3\mathcal{R}_{\tau\sigma} - 2K_\sigma{}^\mu K_{\mu\tau} + K K_{\sigma\tau} - \frac{1}{\alpha} D_\sigma D_\tau \alpha \quad . \quad (\text{E.18})$$

## Danksagung

Zunächst möchte ich meinen Dank an meine beiden Betreuer Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner und Prof. Dr. Peter O. Heß richten, ohne die es diese Arbeit nicht geben würde. Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner hat es immer wieder geschafft in uns Studenten die Lust an den verschiedenen Teilen der theoretischen Physik zu wecken. Gleichzeitig hat er es mir auch ermöglicht am Frankfurt Institute for Advanced Studies zu arbeiten, dem ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre danken möchte. Prof. Dr. Peter O. Heß möchte ich für die enge Zusammenarbeit auch über den großen Teich hinweg danken. Auch habe ich mich während meines Aufenthalts in Mexiko stets willkommen und gut aufgehoben gefühlt. Ziel meiner organisatorischen Fragen war fast immer unsere gute Seele Laura Quist, die stets eine verlässliche Ansprechpartnerin ist und dafür meinen herzlichen Dank verdient.

Weiterhin gilt mein Dank der Stiftung Polytechnische Gesellschaft Frankfurt am Main, die mir zum einen in finanzieller Hinsicht die Möglichkeit gegeben hat, diese Arbeit durchzuführen. Darüber hinaus konnte ich aber auch an vielen spannenden Veranstaltungen teilnehmen und eine Vielzahl an Kontakten auch über den fachlichen Tellerrand hinaus gewinnen.

Prof. Dr. Marcus Bleicher gilt mein Dank für die spontane Übernahme der Gutachtertätigkeit. Prof. Dr. Miguel Alcubierre und Prof. Michele Maggiore möchte ich für die Korrespondenz zu ihren Büchern danken. Prof. Dr. Éricourgoulhon gilt mein Dank für die Bereitstellung der Abbildungen im Anhang C. Dr. Frédéric Vincent danke ich für die Veröffentlichung von GYOTO, sowie die vielen Fragen, die er mir dazu beantwortet hat.

Gunther Caspar, Alexander Koloczek, Isaac Rodríguez und Dr. Mirko Schäfer möchte ich für die vielen Diskussion – egal ob fachlich oder nicht – und für die nette Zeit im FIAS und am Campus Riedberg danken.

Schließlich gilt mein Dank noch meiner Familie, die mich in allen Situationen bedingungslos unterstützt hat.





## Literaturverzeichnis

- [ABS75] Ronald Adler, Maurice Bazin und Menahem Schiffer. *Introduction to General Relativity*. 2. Auflage. McGraw Hill, New York, 1975.
- [ADM62] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser und Charles W. Misner. „The Dynamics of general relativity“. In: (1962). arXiv:[gr-qc/0405109](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0405109) [gr-qc].
- [AF13] Marek A. Abramowicz und P. Chris Fragile. „Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory“. In: *Living Reviews in Relativity* 16.1 (2013). zitiert im Juli 2014. DOI: [10.12942/lrr-2013-1](https://doi.org/10.12942/lrr-2013-1). URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2013-1>.
- [Alc+00] Miguel Alcubierre u. a. „Towards a stable numerical evolution of strongly gravitating systems in general relativity: The conformal treatments“. In: *Phys. Rev. D* 62 (4 Juli 2000), S. 044034. DOI: [10.1103/PhysRevD.62.044034](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.62.044034). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.62.044034>.
- [Alc+03] Miguel Alcubierre u. a. „Gauge conditions for long-term numerical black hole evolutions without excision“. In: *Phys. Rev. D* 67 (8 Apr. 2003), S. 084023. DOI: [10.1103/PhysRevD.67.084023](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.084023). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.67.084023>.
- [Alc08] M. Alcubierre. *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*. Oxford Science Publications, 2008. ISBN: 978-0-19-920567-7 (Hbk).
- [Ant93] Francesco Antonuccio. „Semicomplex analysis and mathematical physics“. In: (1993). arXiv:[gr-qc/9311032](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311032) [gr-qc].
- [Arn00] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Translation by: Vogtman, K. and Weinstein, A. Springer Science, 2000. ISBN: 978-0-387-96890-2.
- [BL67] Robert H. Boyer und Richard W. Lindquist. „Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric“. In: *J. Math. Phys.* (8 1967), S. 265.

- [BPT72] J. M. Bardeen, W. H. Press und S. A. Teukolsky. In: *Astrophys. J.* 178 (1972), S. 347.
- [BS98] Thomas W. Baumgarte und Stuart L. Shapiro. „Numerical integration of Einstein’s field equations“. In: *Phys. Rev. D* 59 (2 Dez. 1998), S. 024007. DOI: [10.1103/PhysRevD.59.024007](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.59.024007). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.024007>.
- [Bur+03] M. Burgay u. a. „An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system“. In: *Nature* 426.6966 (4. Dez. 2003), S. 531–533. ISSN: 0028-0836. DOI: [10.1038/nature02124](https://doi.org/10.1038/nature02124). URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature02124>.
- [Bur+06] M. Burgay u. a. „The Parkes High-Latitude pulsar survey“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 368.1 (2006), S. 283–292. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2006.10100.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10100.x). eprint: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/368/1/283.full.pdf+html>. URL: <http://mnras.oxfordjournals.org/content/368/1/283.abstract>.
- [BY80] Jeffrey M. Bowen und James W. York. „Time-asymmetric initial data for black holes and black-hole collisions“. In: *Phys. Rev. D* 21 (8 Apr. 1980), S. 2047–2056. DOI: [10.1103/PhysRevD.21.2047](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.21.2047). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.21.2047>.
- [Car04] Sean Carroll. *SPACETIME AND GEOMETRY - An Introduction to General Relativity*. Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley, 1301 Sansome St., San Francisco, CA 94111, 2004. ISBN: 0805387323.
- [Car68] Brandon Carter. „Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields“. In: *Phys. Rev.* 174 (5 Okt. 1968), S. 1559–1571. DOI: [10.1103/PhysRev.174.1559](https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.1559). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.174.1559>.
- [Car72] Brandon Carter. „Black Hole Equilibrium States, Part 1: Analytic and Geometric properties of the Kerr solution“. In: *Ecole d’Eté de Physique Théorique <23, 1972, Les Houches>* (1972).
- [Car83] Élie Cartan. *Geometry of Riemannian Spaces*. (translation by James Glazebrook of *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2nd ed.) Math Sci Press, Massachusetts, 1983. ISBN: 0-691-08052-6. URL: <http://books.google.com/books?id=-YvvVfQ7xz4C&pg=PP1&hl=de#v=onepage&q&f=false>.
- [Cas+11] Gunther Caspar u. a. „Pseudo-Complex General Relativity“. In: *Int. J. Mod. Phys. E* 20 (2011), S. 1–10. DOI: [10.1142/S0218301311040013](https://doi.org/10.1142/S0218301311040013).
- [Cas+12] Gunther Caspar u. a. „Pseudo-Complex General Relativity: Schwarzschild, Reissner-Nordstrøm and Kerr Solutions“. In: *Int. J. Mod. Phys. E* 21 (2012), S. 1250015. DOI: [10.1142/S0218301312500152](https://doi.org/10.1142/S0218301312500152). arXiv:1202.6561 [gr-qc].

- [Cha83] S. Chandrasekhar. *The mathematical theory of black holes*. Oxford University Press, 1983.
- [Cis+12] S. Cisneros u. a. „On the Doppler effect for light from orbiting sources in Kerr-type metrics“. In: (2012). arXiv:[1203.2502](https://arxiv.org/abs/1203.2502) [gr-qc].
- [Cle47] G. M. Clemence. „The Relativity Effect in Planetary Motions“. In: *Reviews of Modern Physics* 19 (Okt. 1947), S. 361–364. DOI: [10.1103/RevModPhys.19.361](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.19.361).
- [Coo00] Gregory B. Cook. „Initial Data for Numerical Relativity“. In: *Living Rev. Relativity* 3 (5 (2000)). zitiert am 05. Juli 2013. URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2000-5>.
- [CP04] I. Ciufolini und E. C. Pavlis. In: *Nature* 431 (2004), S. 958.
- [DED20] F. W. Dyson, A. S. Eddington und C. Davidson. „A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919“. In: *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* 220 (1920), S. 291–333. DOI: [10.1098/rsta.1920.0009](https://doi.org/10.1098/rsta.1920.0009).
- [DFC90] Fernando De Felice und Christopher J. S. Clarke. *Relativity on curved manifolds*. Cambridge Univ. Press, 1990. ISBN: 0-521-26639-4.
- [Dir37] P. A. M. Dirac. „The Cosmological Constants“. In: *Nature* 139 (1937), S. 323. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/139323a0>.
- [Doe+09] S. Doeleman u. a. „Imaging an Event Horizon: submm-VLBI of a Super Massive Black Hole“. In: *astro2010: The Astronomy and Astrophysics Decadal Survey*. Bd. 2010. ArXiv Astrophysics e-prints. 2009, S. 68. arXiv:[0906.3899](https://arxiv.org/abs/0906.3899) [astro-ph.CO].
- [DRH12] M. Hamani Daouda, Manuel E. Rodrigues und M.J.S. Houndjo. „Anisotropic fluid for a set of non-diagonal tetrads in gravity“. In: *Physics Letters B* 715.1-3 (2012), S. 241–245. ISSN: 0370-2693. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.07.039>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269312007794>.
- [DT91] T. Damour und J. H. Taylor. „On the orbital period change of the binary pulsar PSR 1913 + 16“. In: *The Astrophysical Journal* 366 (Jan. 1991), S. 501–511. DOI: [10.1086/169585](https://doi.org/10.1086/169585).
- [Ein16a] A. Einstein. „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“. In: *Annalen der Physik* 354.7 (1916), S. 769–822. ISSN: 1521-3889. DOI: [10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702). URL: <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19163540702>.
- [Ein16b] A. Einstein. „Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation“. In: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1916), S. 688–696. URL: <http://nausikaa2.mpiwg-berlin.mpg.de/cgi-bin/toc/toc.x.cgi?dir=BGG54UCY&step=thumb>.

- [Ein18] A. Einstein. „Über Gravitationswellen“. In: *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1918), S. 154–167. URL: <http://nausikaa2.mpiwg-berlin.mpg.de/cgi-bin/toc/toc.x.cgi?dir=W7ZU8V1E&step=thumb>.
- [Eve+11] C. W. F. Everitt u. a. „Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity“. In: *Phys. Rev. Lett.* 106 (22 Mai 2011), S. 221101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.106.221101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.221101). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.221101>.
- [Fal+12] H. Falcke u. a. „Report on the ESO Workshop ”mm-wave VLBI with ALMA and Radio Telescopes around the World““. In: *The Messenger* 149 (Sep. 2012), S. 50–53.
- [Fan+97] C. Fanton u. a. „Detecting Accretion Disks in Active Galactic Nuclei“. In: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 49 (Apr. 1997), S. 159–169.
- [For+93] P. Fortini u. a. „A new limit on time dependence of the gravitational constant  $G$ “. English. In: *Il Nuovo Cimento B* 108 (4 1993), S. 459–462. ISSN: 0369-3554. DOI: [10.1007/BF02828726](https://doi.org/10.1007/BF02828726). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02828726>.
- [Gou07] E. Gourgoulhon. „3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity“. In: *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints* (März 2007). eprint: [arXiv:gr-qc/0703035](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035).
- [Gre03] Walter Greiner. *Klassische Mechanik I*. 7. Auflage. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2003.
- [Gre91] Walter Greiner. *Klassische Elektrodynamik*. 5. Auflage. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1991.
- [HE73] S.W. Hawking und G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973. ISBN: 9780521099066.
- [HG07] Peter O. Hess und Walter Greiner. „Pseudo-complex field theory“. In: *Int. J. Mod. Phys. E* 16 (2007), S. 1643–1679. DOI: [10.1142/S0218301307006964](https://doi.org/10.1142/S0218301307006964). arXiv:[0705.1233](https://arxiv.org/abs/0705.1233) [hep-th].
- [HG09] Peter O. Hess und Walter Greiner. „Pseudo-complex General Relativity“. In: *Int. J. Mod. Phys. E* 18 (2009), S. 51–77. DOI: [10.1142/S0218301309012045](https://doi.org/10.1142/S0218301309012045). arXiv:[0812.1738](https://arxiv.org/abs/0812.1738) [gr-qc].
- [HMG10] P. O. Hess, L. Maghlaoui und W. Greiner. „There are no black holes – pseudo-complex General Relativity: review and some predictions“. In: *International Journal of Modern Physics D* 19.08n10 (2010), S. 1217–1232. DOI: [10.1142/S0218271810017780](https://doi.org/10.1142/S0218271810017780).
- [HT75] R. A. Hulse und J. H. Taylor. „Discovery of a pulsar in a binary system“. In: *The Astrophysical Journal* 195 (Jan. 1975), S. L51–L53. DOI: [10.1086/181708](https://doi.org/10.1086/181708).

- [Hub03] Tristan Hubsch. *General Relativity, Einstein & All That*. Mathematica package. 2003. URL: <http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4781/>.
- [Isa68] Richard A. Isaacson. „Gravitational Radiation in the Limit of High Frequency. I. The Linear Approximation and Geometrical Optics“. In: *Phys. Rev.* 166 (5 Feb. 1968), S. 1263–1271. DOI: [10.1103/PhysRev.166.1263](https://doi.org/10.1103/PhysRev.166.1263). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.166.1263>.
- [JJ62] H. Jeffreys und B. Jeffreys. *Methods of mathematical physics*. 3., ed. reprint. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1962.
- [Ken97] Daniel Kennefick. „Controversies in the history of the radiation reaction problem in general relativity“. In: (1997). arXiv:[gr-qc/9704002](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9704002) [gr-qc].
- [Ker63] Roy P. Kerr. „Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics“. In: *Phys. Rev. Lett.* 11.5 (Sep. 1963), S. 237–238. DOI: [10.1103/PhysRevLett.11.237](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.237).
- [KK09] Niky Kamran und Andrzej Krasinski. „Editorial note to: Brandon Carter, Black hole equilibrium states Part I. Analytic and geometric properties of the Kerr solutions“. In: *General Relativity and Gravitation* 41 (12 2009). [10.1007/s10714-009-0887-6](https://doi.org/10.1007/s10714-009-0887-6), S. 2867–2871. ISSN: 0001-7701. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10714-009-0887-6>.
- [Kra+06] M. Kramer u. a. „Tests of General Relativity from Timing the Double Pulsar“. In: *Science* 314.5796 (2006), S. 97–102. DOI: [10.1126/science.1132305](https://doi.org/10.1126/science.1132305). eprint: <http://www.sciencemag.org/content/314/5796/97.full.pdf>. URL: <http://www.sciencemag.org/content/314/5796/97.abstract>.
- [Lev04] James L. Levine. „Early Gravity-Wave Detection Experiments, 1960-1975“. English. In: *Physics in Perspective* 6 (1 2004), S. 42–75. ISSN: 1422-6944. DOI: [10.1007/s00016-003-0179-6](https://doi.org/10.1007/s00016-003-0179-6). URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s00016-003-0179-6>.
- [Lic44] A. Lichnerowicz. „L’intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps“. In: *J. Math. Pures Appl.* 23.37 (1944). reprinted in A. Lichnerowicz : *Choix d’œuvres mathématiques*, Hermann, Paris (1982), p. 4.
- [Liu+14] Yue Liu u. a. „Singularity avoidance in quantum-inspired inhomogeneous dust collapse“. In: (2014). arXiv:[1405.7249](https://arxiv.org/abs/1405.7249) [gr-qc].
- [LL90] Lev D. Landau und Evgenij M. Lifshic. *Mechanik*. 13., unveränd. Auflage. Berlin : Akad.-Verl., 1990. ISBN: 3-05-500064-1.
- [Lof+12] Frank Löffler u. a. „The Einstein Toolkit: A Community Computational Infrastructure for Relativistic Astrophysics“. In: *Class. Quantum Grav.* 29.11 (2012), S. 115001. DOI: [doi:10.1088/0264-9381/29/11/115001](https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/11/115001). eprint: [arXiv:1111.3344](https://arxiv.org/abs/1111.3344) [gr-qc].

- [LP08] Janna Levin und Gabe Perez-Giz. „A periodic table for black hole orbits“. In: *Phys. Rev. D* 77 (10 Mai 2008), S. 103005. DOI: [10.1103/PhysRevD.77.103005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.103005). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.103005>.
- [LPT75] Alan P. Lightman, William H. Press und Saul A. Teukolsky. *Problem Book in Relativity and Gravitation*. Princeton University Press, 1975. ISBN: 0-691-08162-X.
- [LT18] Josef Lense und Hans Thirring. „Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie“. In: *Phys. Z.* 19 (1918), S. 156–163.
- [Mag07] M. Maggiore. *Gravitational Waves Volume 1. Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2007. ISBN: 978-0-19-857074-5.
- [Mag12] M. Maggiore. *Errata zu 'Gravitational Waves Volume 1. Theory and Experiments', (Oxford Univ. Press, 2007)*. <http://theory.physics.unige.ch/maggiore/errata/errataGW1.html>. Mai 2012.
- [MC04] A. Müller und M. Camenzind. „Relativistic emission lines from accreting black holes“. In: *Astronomy and Astrophysics* 413.3 (Jan. 2004), S. 861–878. DOI: [10.1051/0004-6361:20031522](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20031522).
- [Mis63] Charles W. Misner. „The Flatter Regions of Newman, Unti and Tamburino's Generalized Schwarzschild Space“. In: *Journal of Mathematical Physics* 4.7 (Juli 1963), S. 924–937.
- [MN07] Jan R. Magnus und Heinz Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. third. John Wiley & Sons Ltd, 2007. URL: <http://www.janmagnus.nl/misc/mdc2007-3rdedition> (besucht am 19.08.2014).
- [MTW73] Charles W. Misner, Kip S. Thorne und John Archibald Wheeler. *Gravitation*. Freeman & Co., San Francisco, 1973. ISBN: 0716703440.
- [Mul04] Andreas Müller. „Black Hole Astrophysics: Magnetohydrodynamics on the Kerr Geometry“. Diss. Ruperto Carola Universität Heidelberg, 2004.
- [NKO84] Takashi Nakamura, Yasufumi Kojima und Ken-ichi Oohara. „A method of determining apparent horizons in three-dimensional numerical relativity“. In: *Physics Letters A* 106.5-6 (1984), S. 235–238. ISSN: 0375-9601. DOI: [10.1016/0375-9601\(84\)91016-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(84)91016-8). URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960184910168>.
- [NOK87] Takashi Nakamura, Ken-ichi Oohara und Yasufumi Kojima. „General Relativistic Collapse to Black Holes and Gravitational Waves from Black Holes“. In: *Progress of Theoretical Physics Supplement* 90 (1987), S. 1–218. DOI: [10.1143/PTPS.90.1](https://doi.org/10.1143/PTPS.90.1). URL: <http://ptp.ipap.jp/link?PTPS/90/1/>.
- [NSS06] Piero Nicolini, Anais Smailagic und Euro Spallucci. „Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole“. In: *Phys.Lett.* B632 (2006), S. 547–551. DOI: [10.1016/j.physletb.2005.11.004](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.11.004). arXiv:[gr-qc/0510112](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0510112) [gr-qc].

- [ONe95] Barret O'Neill. *The Geometry of Kerr Black Holes*. Wellesley, EUA : AK Peters, 1995.
- [Oze06] F. Özel. „Soft equations of state for neutron-star matter ruled out by EXO 0748 - 676“. In: *Nature* 441 (Juni 2006), S. 1115–1117. DOI: <http://dx.doi.org/10.1038/nature04858>.
- [PK06] Jerzy Plebanski und Andrzej Krasinski. *An introduction to general relativity and cosmology*. Cambridge Univ. Press, 2006.
- [PM63] P. C. Peters und J. Mathews. „Gravitational Radiation from Point Masses in a Keplerian Orbit“. In: *Phys. Rev.* 131 (1 Juli 1963), S. 435–440. DOI: [10.1103/PhysRev.131.435](http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.131.435>.
- [PR59] R. V. Pound und G. A. Rebka. „Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance“. In: *Phys. Rev. Lett.* 3 (9 Nov. 1959), S. 439–441. DOI: [10.1103/PhysRevLett.3.439](http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.439). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.3.439>.
- [Psa09] Dimitrios Psaltis. „Two approaches to testing general relativity in the strong-field regime“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 189.1 (2009), S. 012033. URL: <http://stacks.iop.org/1742-6596/189/i=1/a=012033>.
- [PT74] D. N. Page und K. S. Thorne. „Disk-Accretion onto a Black Hole. Time-Averaged Structure of Accretion Disk“. In: *The Astrophysical Journal* 191 (Juli 1974), S. 499–506. DOI: [10.1086/152990](http://dx.doi.org/10.1086/152990).
- [PY05] Harald P. Pfeiffer und James W. York. „Uniqueness and Nonuniqueness in the Einstein Constraints“. In: *Phys. Rev. Lett.* 95 (9 Aug. 2005), S. 091101. DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.091101](http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.091101). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.091101>.
- [RL04] George B. Rybicki und Alan P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics*. DOI: 10.1002/9783527618170. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2004.
- [Rod+14] Isaac Rodríguez u. a. *Neutron stars within pseudo-complex General Relativity*. sent for publication. 2014.
- [RZ13] Luciano Rezzolla und Olindo Zanotti. *Relativistic Hydrodynamics*. Oxford University Press, 2013. ISBN: 978-0-19-852890-6.
- [Sch03] F. P. Schuller. „Dirac-Born-Infeld Kinematics, Maximal Acceleration and Almost Product Manifolds“. Diss. University of Cambridge, 2003.
- [Sch11] Thomas Schönenbach. „Die Kerr-Metrik in pseudokomplexer Allgemeiner Relativitätstheorie“. Magisterarb. 2011. arXiv:[1106.1316](https://arxiv.org/abs/1106.1316) [gr-qc].
- [Sch+13] Thomas Schönenbach u. a. „Experimental tests of pseudo-complex General Relativity“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 430.4 (2013), S. 2999–3009. DOI: [10.1093/mnras/stt108](http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt108).

- [Sch+14] Thomas Schöenbach u. a. „Ray-tracing in pseudo-complex General Relativity“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 442.1 (2014), S. 121–130. DOI: [10.1093/mnras/stu833](https://doi.org/10.1093/mnras/stu833).
- [Sch80] B. Schutz. *Geometrical methods of mathematical physics*. Cambridge University Press, 1980. ISBN: 0-521-23271-6 , 0-521-29887-3 Pbk.
- [SN95] Masaru Shibata und Takashi Nakamura. „Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case“. In: *Phys. Rev. D* 52 (10 Nov. 1995), S. 5428–5444. DOI: [10.1103/PhysRevD.52.5428](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.5428). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.52.5428>.
- [SS73] N. I. Shakura und R. A. Sunyaev. „Black holes in binary systems. Observational appearance.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 24 (1973), S. 337–355.
- [Sta+02] I. H. Stairs u. a. „Studies of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1534+12. I. Timing Analysis“. In: *The Astrophysical Journal* 581.1 (2002), S. 501. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/581/i=1/a=501>.
- [SWG03] F. P. Schuller, M. N. R. Wohlfarth und T. W. Grimm. „Pauli Villars regularization and Born Infeld kinematics“. In: *Classical and Quantum Gravity* 20 (Okt. 2003), S. 4269–4284. DOI: [10.1088/0264-9381/20/19/309](https://doi.org/10.1088/0264-9381/20/19/309). eprint: [arXiv:hep-th/0211264](https://arxiv.org/abs/hep-th/0211264).
- [TW82] J. H. Taylor und J. M. Weisberg. „A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16“. In: *The Astrophysical Journal* 253 (Feb. 1982), S. 908–920. DOI: [10.1086/159690](https://doi.org/10.1086/159690).
- [Vin+11] F. H. Vincent u. a. „GYOTO: a new general relativistic ray-tracing code“. In: *Classical and Quantum Gravity* 28.22 (2011). <http://arxiv.org/abs/1109.4769>, S. 225011. URL: <http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=22/a=225011>.
- [Vis07] Matt Visser. *The Kerr spacetime: A brief introduction*. 2007. eprint: [arXiv:0706.0622](https://arxiv.org/abs/0706.0622).
- [Vis96a] Matt Visser. „Gravitational vacuum polarization. I. Energy conditions in the Hartle-Hawking vacuum“. In: *Phys. Rev. D* 54 (8 Okt. 1996), S. 5103–5115. DOI: [10.1103/PhysRevD.54.5103](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.5103). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.5103>.
- [Vis96b] Matt Visser. „Gravitational vacuum polarization. II. Energy conditions in the Boulware vacuum“. In: *Phys. Rev. D* 54 (8 Okt. 1996), S. 5116–5122. DOI: [10.1103/PhysRevD.54.5116](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.54.5116). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.54.5116>.
- [Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984. ISBN: 0226870332.
- [Web69] J. Weber. „Evidence for Discovery of Gravitational Radiation“. In: *Phys. Rev. Lett.* 22 (24 Juni 1969), S. 1320–1324. DOI: [10.1103/PhysRevLett.22.1320](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.22.1320). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.22.1320>.



- [Wil06] Clifford M. Will. „The Confrontation between General Relativity and Experiment“. In: *Living Reviews in Relativity* 9.3 (2006). Online Artikel, zitiert am 16.12.2010. URL: <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>.
- [Wol12] Inc. Wolfram Research. *Mathematica*. 2012.
- [WT02] Joel M. Weisberg und Joseph H. Taylor. „The Relativistic binary pulsar B1913+16“. In: *ASP Conf.Ser.* (2002). arXiv:[astro-ph/0211217](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0211217) [[astro-ph](#)].
- [WT05] Joel M. Weisberg und Joseph H. Taylor. „Relativistic binary pulsar B1913+16: Thirty years of observations and analysis“. In: *ASP Conf.Ser.* 328 (2005), S. 25. arXiv:[astro-ph/0407149](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0407149) [[astro-ph](#)].
- [WYL12] De-Hua Wen, Jing Yan und Xue-Mei Liu. „one possible mechanism for massive neutron star supported by soft eos“. In: *International Journal of Modern Physics D* 21.04 (2012), S. 1250036. DOI: [10.1142/S0218271812500368](https://doi.org/10.1142/S0218271812500368).
- [Yor73] J.W. York. „Conformally invariant orthogonal decomposition of symmetric tensors on Riemannian manifolds and the initial-value problem of general relativity“. In: *J. Math. Phys.* 14.456 (1973).
- [Yor74] J.W. York. „Covariant decompositions of symmetric tensors in the theory of gravitation“. In: *Ann. Inst. Henri Poincaré A* 21.319 (1974). URL: [http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1974\\_21\\_4\\_319\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974_21_4_319_0).
- [Yor79] J.W. York. „Kinematics and dynamics of general relativity“. In: *Sources of Gravitational Radiation*. Hrsg. von L.L. Smarr. Cambridge University Press, 1979, S. 83.
- [Yor99] James W. York. „Conformal “Thin-Sandwich” Data for the Initial-Value Problem of General Relativity“. In: *Phys. Rev. Lett.* 82 (7 Feb. 1999), S. 1350–1353. DOI: [10.1103/PhysRevLett.82.1350](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.82.1350). URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.1350>.



## Abbildungsverzeichnis

2.1	Winkelgeschwindigkeit als Funktion des radialen Abstands $r$ für pro- und retrograde geodätische Kreisbahnen. Als Parameter wurden $a = 0,995m$ und für die modifizierte Kerr-Metrik $B = \frac{64}{27}m^3$ gewählt. Die Kurven beginnen am jeweiligen letzten stabilen Orbit. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13]. . . . .	17
2.2	Durch Photonensorbits gegebene Limits an die Winkelgeschwindigkeit für pro- und retrograde geodätische Kreisbahnen als Funktion des radialen Abstands $r$ . Als Parameter wurden $a = 0,995m$ und für die modifizierte Kerr-Metrik $B = \frac{64}{27}m^3$ gewählt. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13].	19
2.3	Letzter stabiler Orbit für Teilchen auf retrograden Bahnen. Für die modifizierte Kerr-Metrik wurde $B = (64/27)m^3$ gewählt. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13]. . . . .	21
2.4	Stabile Orbits für Teilchen auf prograden Bahnen dargestellt im Parameterraum aufgespannt durch radialen Abstand $r$ und Spinparameter $a$ . Es gibt vier Regionen, zwischen denen unterschieden werden muss. In der nicht schattierten Region (I) gibt es stabile Kreisbahnen in der klassischen ART, sowie im modifizierten pk-ART Modell. Region II (dunkel schattiert) enthält hingegen nur im pk-ART Modell stabile Orbits, nicht aber in der klassischen ART. Regionen III und IV (hell schattiert) enthalten keine stabilen Orbits mehr. Für die modifizierte Kerr-Metrik wurde $B = (64/27)m^3$ gewählt. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+13]. . . . .	22
3.1	Verschiedene Linienspektren für unterschiedliche Werte des Spinparameters $a$ . Die Parameter für die Plots sind $r_{\text{out}} = 100m$ für den äußeren Rand der Scheibe, $\theta = 40^\circ$ für den Inklinationwinkel und $p = 3$ für den Emissivitätsindex. Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].	37

3.2	Vergleich zwischen klassischer und modifizierter Kerr-Metrik. Die Parameter für die Plots sind $r_{\text{out}} = 100m$ für den äußeren Rand der Scheibe, $\theta = 40^\circ$ für den Inklinationwinkel und $p = 3$ für den Emissivitätsindex. Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14]. . . . .	39
3.3	Vergleich der beiden Metriken für unterschiedliche Werte des Spinparameters $a$ . Die Parameter für die Plots sind $r_{\text{out}} = 100m$ für den äußeren Rand der Scheibe, $\theta = 40^\circ$ für den Inklinationwinkel und $p = 3$ für den Emissivitätsindex. Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14].	40
3.4	Frequenzverschiebung als Funktion des Radius. Gezeigt ist die in Gleichung (3.2.3) angegebene Näherung für sich auf den Beobachter zubewegende Emitter. Der Inklinationwinkel beträgt $\theta = 40^\circ$ . Werte größer als 1 entsprechen einer Blauverschiebung. Die Kurven beschreiben die Frequenzverschiebung von Photonen, die parallel zur Bewegungsrichtung der Emitter abgestrahlt werden. Hier tritt die höchste Blauverschiebung auf. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14]. . . . .	42
3.5	Rotverschiebung einer dünnen Akkretionsscheibe. Die Inklination beträgt $40^\circ$ . Der äußere Rand der Scheibe ist bei $r_{\text{out}} = 50m$ . Der innere Radius der Scheibe ist durch den ISCO, falls existent, festgelegt. Für die modifizierte Kerr-Metrik sind die Werte aus Tabelle 3.1 verwendet worden. Die Ähnlichkeit zwischen der klassischen und der modifizierten Kerr-Metrik in den Abbildungen 3.5b und 3.5c kann man auch in Abbildung 3.3 sehen. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14]. . . . .	43
3.6	Flussfunktion $f$ aus Gleichungen (3.1.62) und (3.2.4). Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14]. . . . .	45
3.7	Energie von Teilchen auf Kreisgeodäten in der Äquatorebene. Die durchgezogene rote Kurve beschreibt jeweils die klassische Kerr-Metrik, die gepunktete blaue Kurve die modifizierte Kerr-Metrik für $B = (64/27)m^3$ . Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14]. . . . .	46
3.8	Drehimpuls von Teilchen auf Kreisgeodäten in der Äquatorebene. Die durchgezogene rote Kurve beschreibt jeweils die klassische Kerr-Metrik, die gepunktete blaue Kurve die modifizierte Kerr-Metrik für $B = (64/27)m^3$ .	47

3.9	Unendlich ausgedehnte, gegen den Uhrzeigersinn drehende und geometrisch dünne Akkretionsscheibe um ein stationäres, rotierendes, kompaktes Objekt. Die Scheibe wird aus einem Inklinationwinkel von $70^\circ$ betrachtet. Die linke Spalte (3.9a, 3.9c, 3.9e und 3.9g) zeigt das originale Scheibenmodell nach Page und Thorne [PT74]. Die rechte Spalte (3.9b, 3.9d, 3.9f und 3.9h) zeigt das, wie in Kapitel 3.1.4 beschrieben, angepasste Modell, um das pseudokomplexe Äquivalent der Kerr-Metrik – Gleichung (1.3.1) – darstellen zu können. Die Skala variiert zwischen den einzelnen Bildern. Ursprünglich veröffentlicht in [Sch+14]. . . . .	52
4.1	Ellipse mit den verwendeten Koordinaten $r$ und $\psi$ . Die Skizze ist an Fig. 4.3 in [Mag07] angelehnt. Die verwendeten Proportionen für die Halbachsen entsprechen denen des Hulse-Taylor Pulsar PSR B1913+16 [HT75]; [WT02]; [WT05]; [Mag07]. . . . .	68
C.1	Einbettung $\Phi$ einer Hyperfläche $\hat{\Sigma}$ in eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ , entnommen aus [Gou07]. $\Phi$ „transportiert“ auch Kurven in $\hat{\Sigma}$ nach $\Sigma$ und liefert eine Abbildung für Vektoren, den Pushforward $\Phi_*$ . . . . .	100
C.2	Aufblätterung einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ in eine Menge von Hyperflächen $\Sigma_t$ , entnommen aus [Gou07]. . . . .	105
C.3	An die Aufblätterung angepasste Koordinaten, entnommen aus [Alc08]. Linien konstanter Koordinaten („coordinate line“) sind nicht immer identisch mit Linien die senkrecht auf die Hyperflächen stehen („normal line“). Der Unterschied zwischen den beiden wird durch den Verschiebungsvektor $\beta$ beschrieben. . . . .	111

# LEBENS LAUF

**Thomas Schönenbach**

Sandweg 107

60316 Frankfurt am Main

Tel.: 0176 99625320

thomas@schoenenbach.org

geboren am 27. Mai 1987

in Frankfurt am Main

## AKADEMISCHE UND SCHULISCHE AUSBILDUNG

---

seit Mai 2011	Promotionsstudent der Physik am Frankfurt Institute for Advanced Studies, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
März 2011	Master of Science Physik Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main Gesamtnote „sehr gut“ (1,0)
März 2010	Bachelor of Science Physik Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main Gesamtnote „sehr gut“ (1,3)
Juni 2006	Abitur Heinrich-von-Kleist-Schule Eschborn Durchschnittsnote 1,4

## GRADUIERTENSTUDIUM

---

seit Nov. 2011	Teilnahme an der MainCampus-Akademie der Stiftung Polytechnische Gesellschaft Frankfurt am Main
seit Juni 2011	Mitglied der Helmholtz Graduate School for Hadron and Ion Research

## PREISE UND AUSZEICHNUNGEN

---

Nov. 2011	Aufnahme als MainCampus doctus-Stipendiat der Stiftung Polytechnische Gesellschaft Frankfurt am Main
Juni 2009	Michael Loulakis-Preis für sehr guten Studienbeginn
März 2006	3. Preis des Jugend forscht Landeswettbewerb Hessen

## LEHRE UND WISSENSCHAFTSKOMMUNIKATION

---

SoSe 2010	Tutor zur Vorlesung Quantenmechanik I Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
SoSe 2009	Tutor zur Vorlesung Mechanik II Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
WiSe 2008	Tutor zur Vorlesung Mechanik I Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
Aug. 2007	Wissenschaftskommunikation im Rahmen der „Highlights der Physik“

## AUSLANDSAUFENTHALTE

---

März 2014	zweiwöchiger Forschungsaufenthalt an der Universidad Nacional Autónoma de México
-----------	--

## BESONDERE KENNTNISSE UND FÄHIGKEITEN

---

<b>Sprachen</b>	Deutsch: Muttersprache Englisch: fließend Französisch: Grundkenntnisse
<b>EDV</b>	$\LaTeX$ , Python, Mathematica, Pascal, C++

## VERÖFFENTLICHUNGEN & KONFERENZBEITRÄGE

---

2014	<ul style="list-style-type: none"><li>• T. Schöenbach, G. Caspar u. a. „Ray-tracing in pseudo-complex General Relativity“. In: <i>Monthly Notices of the Royal Astronomical Society</i> 442.1 (2014), S. 121–130. DOI: <a href="https://doi.org/10.1093/mnras/stu833">10.1093/mnras/stu833</a></li></ul>
2013	<ul style="list-style-type: none"><li>• T. Schöenbach, G. Caspar u. a. „Experimental tests of pseudo-complex General Relativity“. In: <i>Monthly Notices of the Royal Astronomical Society</i> 430.4 (2013), S. 2999–3009. DOI: <a href="https://doi.org/10.1093/mnras/stt108">10.1093/mnras/stt108</a></li><li>• Vortrag zu „Experimental tests of pseudo-complex General Relativity“ bei dem Karl Schwarzschild Meeting, FIAS – Frankfurt am Main</li></ul>
2012	<ul style="list-style-type: none"><li>• G. Caspar, T. Schöenbach u. a. „Pseudo-Complex General Relativity: Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr Solutions“. In: <i>Int.J.Mod.Phys. E21</i> (2012), S. 1250015. DOI: <a href="https://doi.org/10.1142/S0218301312500152">10.1142/S0218301312500152</a>. arXiv:1202.6561 [gr-qc]</li></ul>
2011	<ul style="list-style-type: none"><li>• G. Caspar, T. Schöenbach u. a. „Pseudo-Complex General Relativity“. In: <i>Int. J. Mod. Phys. E20</i> (2011), S. 1–10. DOI: <a href="https://doi.org/10.1142/S0218301311040013">10.1142/S0218301311040013</a></li></ul>

## AKADEMISCHE LEHRER IN ALPHABETISCHER REIHENFOLGE

---

Prof. Dr. Harald Appelshäuser  
Prof. Dr. Marcus Bleicher  
Prof. Dr. Thomas Boller  
Ioannis Bouras  
Alessandro Brillante  
PD Dr. Bruls  
Dr. Thomas Bürvenich  
Prof. Dr. Reinhard Dörner  
Chritopher Eichler  
Dr. Andrej El  
Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner  
Prof. Dr. Claudius Gros  
Prof. Dr. Lutz Habermann  
Christoph Herold  
Prof. Dr. Peter O. Hess  
Prof. Dr. Walter Hofstetter  
Prof. Dr. Michael Huth  
Prof. Dr. Joachim Jacoby  
PD Dr. Marcus Kasner  
PD Dr. Ines Kath  
Dr. Oliver Meusel  
Prof. Dr. Jens Müller  
Dr. Andreas Neuenkirch  
Prof. Dr. Owe Philipsen  
Prof. Dr. Ulrich Ratzinger  
Dr. Joachim Reinhardt  
Felix Reining  
Prof. Dr. Hartmut G. Roskos  
Dr. Francesca Sauli  
Prof. Dr. Jürgen Schaffner-Bielich  
Prof. Dr. Alwin Schempp  
Rainer Stiele  
Prof. Dr. Joachim Stroth  
Dr. Mark Thomson  
Julian Tödter  
Prof. Dr. Maria Roser Valenti  
Mario Weigand  
Julia Wernsdorfer  
Prof. Dr. Alfred Ziegler