

**Semiklassische Beschreibung gebundener Zustände und der
Vakuumfluktuationen in sphärisch symmetrischen Metriken**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik (13)
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main von

Gunther Caspar
aus Frankfurt am Main

Frankfurt (2015)

(D 30)

vom Fachbereich Physik der

Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. René Reifarth

Gutachter: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner

Prof. Dr. Peter O. Hess

Prof. Dr. Marcus Bleicher

Datum der Disputation: 28.05.2015

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 1.1. Notationen und Konventionen | 4 |
| 2. Gravitationstheorien | 6 |
| 2.1. Allgemeine Relativitätstheorie | 6 |
| 2.2. Pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie | 14 |
| 2.3. Zeitunabhängige sphärisch symmetrische Metriken | 18 |
| 3. Quantenmechanik in flachen Räumen | 25 |
| 3.1. Grundlagen | 26 |
| 3.2. Translation und Zeitentwicklung | 28 |
| 3.3. Sphärisch symmetrische Schrödingergleichung und Drehimpuls | 31 |
| 3.4. Relativistische Wellengleichungen | 37 |
| 4. Quantenmechanik in gekrümmten Räumen | 52 |
| 4.1. Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung in gekrümmten Räumen | 54 |
| 4.2. Auswertung der Klein-Gordon-Gleichung | 59 |
| 4.2.1. Sphärische Symmetrie | 59 |
| 4.2.2. Umformung der Gleichungen zur numerischen Implementierung | 60 |
| 4.2.3. Wahl der Parameter | 70 |
| 4.2.4. Ergebnisse | 75 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 4.3. | Auswertung der Dirac-Gleichung | 91 |
| 4.3.1. | Sphärische Symmetrie | 91 |
| 4.3.2. | Numerisches Lösungsverfahren und Startwerte | 96 |
| 4.3.3. | Wahl der Parameter | 100 |
| 4.3.4. | Ergebnisse | 101 |
| 5. | Quantenfeldtheorie und Vakuumfluktuationen | 111 |
| 5.1. | Quantenfeldtheorie in flachen Räumen | 111 |
| 5.2. | Quantenfeldtheorie in gekrümmten Räumen | 117 |
| 5.3. | Umformungen | 123 |
| 5.4. | Modellentwicklung | 125 |
| 5.4.1. | Materiefreier Raum | 125 |
| 5.4.2. | Metriken konstanter Materiedichte | 128 |
| 5.4.3. | Variable Materiedichte | 131 |
| 6. | Zusammenfassung und Ausblick | 134 |
| | Danksagung | 138 |
| | Anhang | 140 |
| A. | Berechnung der Metriken | 140 |
| A.1. | Konstante Massendichte bei isotropem Druck | 140 |
| A.2. | Exponentielles Modell | 143 |
| B. | Kovariante Ableitung eines Spinors | 145 |
| C. | Programme | 151 |
| C.1. | Verwendete Verfahren | 151 |
| C.2. | Matrixdiagonalisierungsprogramm | 156 |
| C.3. | Programme zur Lösung des Anfangswertproblems | 159 |
| D. | Skalierung der Metriken | 164 |
| E. | Lösung der Dirac-Gleichung nahe des Ursprungs | 166 |

| | | |
|------|---|-----|
| F. | Energievariation in der Dirac-Gleichung | 172 |
| G. | Vakuen inertialer Beobachter | 175 |
| H. | Rückwirkung der Vakuumfluktuationen auf die Metrik | 178 |
| H.1. | Rückwirkung erster Ordnung auf die Schwarzschildmetrik | 181 |
| H.2. | Rückwirkung erster Ordnung für eine konstante Materiedichte | 182 |

| | |
|-----------------------------|------------|
| Literaturverzeichnis | 184 |
|-----------------------------|------------|

1. Einleitung

Die Gravitation ist aus Sicht des aktuellen theoretischen Verständnisses der Physik eine Kuriosität. Während die anderen drei bekannten grundlegenden Wechselwirkungen durch denselben Formalismus, die Quantenfeldtheorie (QFT), mikroskopisch beschrieben werden können [1, 2], existiert keine mikroskopische Beschreibung der Gravitation, da er für sie versagt und gleichzeitig bisher keine andere Beschreibung gefunden werden konnte [3]. Der Grund hierfür ist, dass die quantenfeldtheoretische Beschreibung der Gravitation unendlich viele Divergenzen beinhaltet. Diese treten zwar für die anderen Wechselwirkungen ebenfalls in endlicher Anzahl auf, können dort aber jeweils durch Einführen endlich vieler neuer Parameter renormalisiert werden. Folglich ergibt die Anwendung der QFT, gemeinsam mit diesen Renormalisierungsverfahren eine Theorie der Gravitation mit unendlich vielen experimentell zu bestimmenden Parametern und kann deshalb zur Vorhersage von physikalischen Prozessen nicht herangezogen werden.

Zudem weist die aktuelle klassische Feldtheorie der Gravitation, die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) [4], ebenfalls Singularitäten auf. Zwar treten diese nur punktweise auf und es wird debattiert, ob sie stets durch einen Ereignishorizont für den äußeren Beobachter verdeckt sind [5, 6], aber dennoch deutet dies auf einen Zusammenbruch der Theorie auf der mikroskopischen Skala hin. Diese Ereignishorizonte sind zumindest aus philosophischer Sicht ebenfalls bedenklich, denn sie sind nur von außen nach innen passierbar, sodass der Außenraum das Innere beeinflussen kann, aber das Innere nicht

den Außenraum. Von daher liegt es nahe, dass die Theorie zumindest im mikroskopischen Bereich, aber eventuell auch im Makroskopischen modifiziert werden muss, um eine Quantengravitationstheorie aufzustellen.

Andererseits hat die ART bisher alle experimentellen Tests bestanden [7] und auch die Vorhersagen der Quantenfeldtheorien der anderen drei Wechselwirkungen stimmen mit dem Experiment mit sehr guter Genauigkeit überein. So wurden beispielsweise die vorhergesagten Elementarteilchen, wie zuletzt das Higgs-Boson [8], alle gefunden [9]. Jedoch beruhen alle bisherigen Tests der ART auf der Näherung für schwache Felder und gleichzeitig ist die ART aus theoretischer Sicht weniger fortgeschritten (nicht quantisiert), sodass der Versuch naheliegt diese zu modifizieren.

Eine solche modifizierte Theorie ist die von Hess und Greiner formulierte pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie (pk-ART) [10], die die reellen Raumzeitkoordinaten der ART pseudokomplex erweitert. Zusammen mit einer Veränderung des Variationsprinzips führt dies in führender Ordnung auf die Einstein-Gleichung der ART mit einem zusätzlichen Quellterm (kann als Energie-Impuls-Tensor verstanden werden) und somit auch zu einer Modifikation des makroskopischen Gravitationsfeldes. Jedoch ist diese Quelle bisher nicht verstanden, wobei eine Verbindung mit den in der Quantenfeldtheorie auftauchenden Vakuumfluktuationen und der dunklen Energie vermutet wird, und die bisher vorhergesagten experimentellen Konsequenzen [11, 12, 13] beruhen auf einer effektiven Modellannahme.

In dieser Arbeit identifizieren wir einerseits die grundlegenden Unterschiede der pk-ART und der ART gebundener quantenmechanischer Teilchen in einem Gravitationsfeld und andererseits untersuchen wir die Vakuumfluktuationen in Materie, um das in [13] zur Berechnung von Neutronensternen genutzte Modell für den pk-ART Quellterm zu verbessern. Die dabei erhaltenen Ergebnisse und ausgearbeiteten Verfahren sind jedoch nicht auf die pk-ART beschränkt, solange eine andere Gravitationstheorie ebenfalls Korrektu-

ren vorhersagt, die als zusätzliche Quelle in der Einstein-Gleichung beschrieben werden können.

Eine exakte Behandlung dieser Probleme würde jedoch die nicht-existente Theorie der Quantengravitation erfordern, sodass wir uns darauf beschränken die Problemstellungen semiklassisch zu behandeln. Das heißt wir behandeln Quantenteilchen und -felder in einem gravitativen Hintergrund (eine experimentelle Überprüfung dieses Ansatzes steht noch aus, aber aus theoretischer Sicht hat er sich bewährt; siehe beispielsweise [14, 15, 16, 17]). Bedauerlicherweise ist aufgrund der Nichtlinearität der Gravitation nicht sichergestellt, dass es sich dabei um eine gute Näherung handelt. Da wir jedoch die klassischen Feldgleichung für eine Störung der Hintergrundmetrik linearisieren können [5, Kapitel 9], ist die Näherung für ein entsprechend schwaches quantisiertes Gravitationsfeld (Gravitonfeld) gerechtfertigt. Zudem übernimmt das Quadrat der Planck-Länge $l_{Pl} = 1,616 \cdot 10^{-35}m$ für die nichtrenormalisierbare Quantenfeldtheorie der Gravitation die Rolle der Kopplungskonstante [18, Kapitel 1], sodass wir hoffen können, dass die erhaltenen Ergebnisse für Systeme, deren typische Längenskalen deutlich größer als die Planck-Länge sind, näherungsweise gültig sind.

Im Weiteren werden zuerst die in der Arbeit verwendeten Notationen und Konventionen festgelegt und im Anschluss in Kapitel 2 erst die Grundlagen der ART und dann die der pk-ART wiederholt. Am Ende des Kapitels werden die vereinfachten Einstein-Gleichungen für schwarzschildartige Metriken behandelt. In Kapitel 3 werden die Grundlagen der Quantenmechanik in flachen Räumen rekapituliert. Dafür werden zuerst die Grundlagen der nichtrelativistischen Quantenmechanik einschließlich der Definition des Impuls-, des Hamilton- und des Drehimpulsoperators besprochen und danach werden die Klein-Gordon- und die Dirac-Gleichung hergeleitet. Im 4. Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit für gebundene Zustände und die dafür nötige Vorarbeit diskutiert. Es beginnt mit der Vorstellung der in der Arbeit genutzten Metrikmodelle. Danach werden die beiden relativistischen Wellengleichungen auf gekrümmte Räume verallgemeinert und im

Anschluss nacheinander ausgewertet. Das 5. Kapitel dient der Besprechung der Vakuumfluktuationen. Dafür werden zuerst die Grundlagen der Quantenfeldtheorie für freie, spinlose Felder in flachen Räumen wiederholt und danach die Verallgemeinerung auf gekrümmte Räume besprochen. Im Anschluss werden die Gleichungen für die Bedürfnisse dieser Arbeit umgeformt und ein qualitatives Modell für die Vakuumfluktuationen beziehungsweise den pk-ART Quellterm innerhalb von Sternen entwickelt. Die Arbeit wird mit Kapitel 6 abgeschlossen. Dieses fasst die Arbeit nochmals zusammen und gibt einen Ausblick auf die weiterführenden Forschungsmöglichkeiten.

1.1. Notationen und Konventionen

In dieser Arbeit nutzen wir die gravitationellen Konventionen analog zu [5, 18]. Die Metriksignatur ist $(+,-,-,-)$, der Krümmungstensor ist über die Relation $\xi_{||\alpha||\beta}^\mu - \xi_{||\beta||\alpha}^\mu = R_{\nu\alpha\beta}^\mu \xi^\nu$ definiert und der verjüngte Riemann Tensor ist $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$. Ausgenommen der Quantenfeldtheoretischen Einführung in Kapitel 5, für die wir $\hbar = c = 1$ setzen, nutzen wir SI-Einheiten.

Zudem verwenden wir häufig die folgenden Symbole und Abkürzungen:

| | |
|--|-----------------------------|
| G | Gravitationskonstante |
| \hbar | Plancksches Wirkungsquantum |
| c | Lichtgeschwindigkeit |
| l_{Pl} | Planck-Länge |
| m_{Pl} | Planck-Masse |
| $\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \partial_\mu$ | partielle Ableitung |
| D_μ, \parallel_μ | kovariante Ableitung |
| $\eta_{\mu\nu}$ | Minkowskimetrik |
| Γ_μ | affine Verbindung |
| $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ | Christoffelsymbol |
| $ \Psi\rangle$ | Zustandsvektor |
| Ψ | Wellenfunktion |
| $\hat{}$ | Operator |
| $*$ | komplex konjugiert |
| T | transponiert |
| \dagger | adjungiert |
| $[A, B]$ | AB-BA |
| tr | Spur |

2. Gravitationstheorien

Da wir semiklassische Quantengravitationseffekte beschreiben wollen, ist die für diese Arbeit maßgebliche fundamentale Wechselwirkung die Gravitation, deren aktuell anerkannte Beschreibung die ART ist. Zudem wollen wir für einen Teil der Ergebnisse einen Vergleich mit der pk-ART ziehen.

Von daher beginnen wir das Kapitel mit einer kurzen Einführung in die ART, wobei wir die Notation des Buches von Adler, Bazin und Schiffer [5] nutzen (alternative Quellen sind beispielsweise [19, 20, 21]). Danach widmen wir uns der pk-ART auf Grundlage der bisher erschienen Publikationen [10, 11, 12, 13, 22, 23] und beenden das Kapitel mit der Diskussion sphärisch symmetrischen Lösungen beider Theorien.

2.1. Allgemeine Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie postuliert, dass der physikalische Raum eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, auf deren Geodäten sich freie Teilchen bewegen. Weiterhin krümmt die Gravitation den Raum (verändert den Abstand zweier Punkte) und ist lokal nicht von einer Beschleunigung des Beobachters (bzw. des Koordinatensystems) zu unterscheiden (Äquivalenzprinzip). Da jedoch die Trajektorie eines Körpers in einem gravitativen Feld von seiner Geschwindigkeit abhängt, muss die Zeit ebenfalls eine

Dimension des Raumes sein und die Theorie wird auf einer vierdimensionalen Raumzeit aufgebaut. Daraus folgt, dass das Quadrat des infinitesimalen Abstands ds^2 zweier Punkte durch die sogenannte Metrik

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1.1)$$

gegeben ist, die für alle klassischen Fälle als symmetrisch angenommen wird. Weiterhin verlangen wir, dass die Naturgesetze in allen Koordinatensystemen die gleiche Form besitzen. Insbesondere ist ds^2 koordinatenunabhängig, das heißt skalar [5, Introduction].

Diese Forminvarianz unter Koordinatentransformationen erfordert, dass wir unsere Gleichungen aus Objekten aufbauen, deren Zusammenhang für beliebige Transformationen klar definiert sind. Diese Größen werden Tensoren genannt und über die Gleichung

$$\bar{T}_{l_1 \dots l_b}^{k_1 \dots k_a} = \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{l_b}} T_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} \quad (2.1.2)$$

für ihre Komponenten definiert, sofern die Einsteinsche Summenkonvention beachtet und eine Koordinatentransformation vom System x^μ ins System \bar{x}^μ durchgeführt wird. Die oberen Indizes nennen wir kontravariant und die unteren Indizes kovariant. Die Summe $a + b$ ist der Rang des Tensors. Insbesondere bezeichnen wir einen Tensor vom Rang 0 als Skalar und einen vom Rang 1 als kontra- bzw. kovarianten Vektor. Beispielsweise handelt es sich bei den in (2.1.1) auftretenden Koordinatendifferentialen dx^μ in der Tat um kontravariante Vektoren [5, Kapitel 1.1]. Weiterhin können wir die Summe zweier Tensoren vom gleichen Rang mit der gleichen Anzahl ko- und kontravarianten Indizes über die Summe der Komponenten festlegen und erhalten wieder einen Tensor

$$\begin{aligned} \bar{C}_{l_1 \dots l_b}^{k_1 \dots k_a} &= \bar{A}_{l_1 \dots l_b}^{k_1 \dots k_a} + \bar{B}_{l_1 \dots l_b}^{k_1 \dots k_a} = \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{l_b}} \left(A_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} + B_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{l_b}} C_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a} \quad . \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Analog lässt sich zeigen, dass das Produkt

$$C_{l_1 \dots l_{b_1} n_1 \dots n_{b_2}}^{k_1 \dots k_{a_1} m_1 \dots m_{a_2}} = A_{l_1 \dots l_{b_1}}^{k_1 \dots k_{a_1}} B_{n_1 \dots n_{b_2}}^{m_1 \dots m_{a_2}} \quad (2.1.4)$$

und die als Verjüngung bezeichnete Operation, bei der über jeweils einen ko- und einen kontravarianten Index des Tensors summiert wird

$$R_{l_1 \dots l_{b-1}}^{k_1 \dots k_{a-1}} = T_{l_1 \dots l_{b-1} \mu}^{k_1 \dots k_{a-1} \mu} \quad , \quad (2.1.5)$$

ebenfalls einen Tensor erzeugen [5, Kapitel 1].

Zudem können wir noch Tensoren einander zuordnen. Benutzen wir einen beliebigen aber festen Tensor $g_{\mu\nu}$ und definieren

$$\begin{aligned} T_{\mu}^{\alpha} &= g_{\mu\nu} T^{\alpha\nu} \\ T_{\gamma\mu} &= g_{\alpha\gamma} g_{\mu\nu} T^{\alpha\nu} \quad . \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Solange $g_{\mu\nu}$ invertierbar ist, existiert eine eindeutige Zuordnung der Tensoren zueinander, da wir mittels des inversen Tensors $g^{\mu\nu}$ unseren ursprünglichen Tensor wieder errechnen können

$$T^{\alpha\nu} = g^{\nu\mu} T_{\mu}^{\alpha} = g^{\nu\mu} g^{\gamma\alpha} T_{\gamma\mu} \quad . \quad (2.1.7)$$

Ist dies der Fall bezeichnen wir $T^{\alpha\nu}, T_{\mu}^{\alpha}, T_{\gamma\mu}$ als verschiedene Repräsentationen desselben Tensors. Dies lässt sich auf Tensoren höherer Ordnung verallgemeinern, indem wir mehrfach mit der Metrik multiplizieren und jeweils zwei Indizes verjüngen. Folglich können wir jede Gleichung zur Beschreibung unseres Gravitationsfeldes rein kovariant schreiben. Im Weiteren nutzen wir, wie schon von der Benennung angedeutet, die Metrik, um Tensoren einander zuzuordnen.

Jedes Tensorfeld mit konstanten Komponenten $T_{\beta_1 \dots \beta_b}^{\alpha_1 \dots \alpha_a}$ kann durch Koordinatentransformationen in ein Feld mit variierenden Komponenten überführt werden. Folglich können wir ein konstantes Vektorfeld nicht nicht dadurch definieren, dass die Komponenten konstant sind. Somit müssen zwei Tensoren mit gleichen Komponenten an unterschiedlichen Punkten des Raumes nicht den gleichen Tensor darstellen. Es stellt sich von daher die Frage, wie ein Tensor an zwei unterschiedlichen Orten aussehen muss. Betrachten wir

hierfür die Änderung eines kontravarianten Vektorfeldes ξ^μ für eine Verschiebung entlang einer Kurve $\gamma(\lambda)$ und nehmen dabei an, dass die Änderung der Komponenten linear von der Verschiebung und linear von den Komponenten selbst abhängt (Motivation in [5, Kapitel 2.1], Herleitung in [19, 20, jeweils Kapitel 3])

$$\frac{d\xi^\mu}{d\lambda} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\beta \quad , \quad (2.1.8)$$

wobei die $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ als affine Verbindungen bezeichnet werden und keine Tensoren sein dürfen, da der Vektor am neuen Ort die Summe aus dem alten Vektor und der Verschiebung sein muss. Damit folgt für eine infinitesimale Translation $\epsilon^\nu > 0$

$$\xi^\mu(x + \epsilon) - \xi^\mu(x) \approx \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu = \Gamma_{\nu\beta}^\mu \xi^\beta(x) \epsilon^\nu \quad . \quad (2.1.9)$$

Analog gilt für das Feld in einem anderen Koordinatensystem

$$\bar{\xi}^\mu(\bar{x} + \bar{\epsilon}) = \bar{\xi}^\mu(\bar{x}) + \bar{\Gamma}_{\nu\beta}^\mu \bar{\xi}^\beta(\bar{x}) \bar{\epsilon}^\nu \quad . \quad (2.1.10)$$

Verknüpfen wir dies mittels der Tensortransformation

$$\bar{\xi}^\mu(\bar{x}) + \bar{\Gamma}_{\nu\beta}^\mu \bar{\xi}^\beta(\bar{x}) \bar{\epsilon}^\nu = \left(\xi^\alpha(x) + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \xi^\beta(x) \epsilon^\nu \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} + \epsilon^\beta \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \quad , \quad (2.1.11)$$

dann ergibt sich das Verhalten der affinen Verbindungen in linearer Ordnung in ϵ als

$$\bar{\Gamma}_{\kappa\lambda}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\kappa} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\lambda} \Gamma_{\nu\beta}^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\kappa} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\lambda} \quad , \quad (2.1.12)$$

wenn wir die Zusammenhänge $\xi^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\lambda} \bar{\xi}^\lambda$ und $\epsilon^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\kappa} \bar{\epsilon}^\kappa$ einsetzen. Aufgrund des Äquivalenzprinzips muss es lokal möglich sein, Gravitationseffekte wegzutransformieren. Somit existiert ein Koordinatensystem, für das die affinen Verbindungen gerade 0 sind und es gilt $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \Gamma_{\beta\alpha}^\mu$, falls die Metrik symmetrisch ist.

Weiterhin sollte das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\xi^\mu \eta_\mu = g_{\mu\nu} \xi^\mu \eta^\nu \quad (2.1.13)$$

auf der gesamten Kurve erhalten bleiben

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\lambda} g_{\mu\nu} \xi^\mu \eta^\nu = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\mu \eta^\nu + g_{\mu\nu} \frac{d\xi^\mu}{d\lambda} \eta^\nu + g_{\mu\nu} \xi^\mu \frac{d\eta^\nu}{d\lambda} \\
&= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\mu \eta^\nu + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\beta \eta^\nu + g_{\mu\nu} \xi^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \eta^\beta \\
&= \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \right) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi^\mu \eta^\nu \quad . \quad (2.1.14)
\end{aligned}$$

Da sowohl die Kurve als auch die beiden Vektoren beliebig sind, schlussfolgern wir daraus

$$0 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + g_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \quad . \quad (2.1.15)$$

Diese Gleichung gilt für jede beliebige Kombination der Indizes μ, ν und α , sodass wir die affinen Verbindungen isolieren können

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} &= g_{\beta\nu} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta + g_{\mu\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - g_{\beta\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^\beta - g_{\nu\beta} \Gamma_{\mu\alpha}^\beta - g_{\beta\mu} \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - g_{\alpha\beta} \Gamma_{\nu\mu}^\beta \\
&= -2g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta \\
\Rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) := -\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \quad . \quad (2.1.16)
\end{aligned}$$

Zudem folgt aus der Erhaltung des Skalarprodukts entlang einer Kurve ebenfalls die Änderung der Komponenten eines kovarianten Vektors

$$\frac{d\xi_\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \xi_\beta \quad , \quad (2.1.17)$$

sodass wir durch Bilden von Vektorprodukten die Änderung eines beliebigen Tensors berechnen können. Wir nennen diesen Vorgang allgemein Parallelverschiebung und bezeichnen die Kurven, deren Tangentialvektoren durch Parallelverschiebung ineinander übergehen, als Geodäten.

In der Physik sind häufig partielle Differentialgleichungen anzutreffen, sodass es erforderlich ist, diese in Tensorform darstellen zu können. Betrachten wir hierfür erneut den verschobenen Vektor in (2.1.9). Sei der Vektor im Punkt x nun Teil des Vektorfeldes

$\xi^\mu(x)$ und der verschobene Vektor $\xi^{\mu*}(x + \epsilon)$. Führen wir nun eine Taylorentwicklung des Vektorfeldes am Punkt $x + \epsilon$ aus und bilden die Differenz mit dem verschobenen Vektor, dann erhalten wir in erster Ordnung in ϵ

$$\begin{aligned}\xi^\mu(x + \epsilon) - \xi^{\mu*}(x + \epsilon) &= \xi^\mu(x) + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu - \xi^\mu(x) - \Gamma_{\nu\beta}^\mu \xi^\beta(x) \epsilon^\nu \\ &= \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\beta \end{matrix} \right\} \xi^\beta(x) \right) \epsilon^\nu \quad .\end{aligned}\tag{2.1.18}$$

Da die linke Seite der Gleichung ein Tensor ist, muss dies auch für die rechte Seite gelten. Die affine Verbindung und somit auch das Christoffelsymbol $\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\beta \end{matrix} \right\}$ sind jedoch keine Tensoren, sodass die partielle Ableitung eines Tensors ebenfalls kein Tensor ist. Von daher bietet es sich an, die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes

$$D_\nu \xi^\mu = \xi_{||\nu}^\mu = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\beta \end{matrix} \right\} \xi^\beta(x)\tag{2.1.19}$$

zu definieren. Es lässt sich nun zeigen, dass es sich bei $\xi_{||\nu}^\mu$ in der Tat, um einen Tensor handelt, und wir können komplett analog die kovariante Ableitung eines beliebigen Tensors herleiten [5, Kapitel 3].

Aufgrund der obigen Überlegungen suchen wir nach einer kovarianten Tensorgleichung zur Beschreibung des Gravitationsfeldes. In [5, Kapitel 4] wird gezeigt, dass die klassische Elektrodynamik die sogenannte Minkowski-Metrik für den gravitationslosen Fall impliziert

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{2.1.20}$$

($-\eta_{\mu\nu}$ wäre auch möglich) und dass wir das Newtonsche Gravitationsgesetz für zeitunabhängige Felder näherungsweise durch die Änderung

$$g_{00} = 1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\tag{2.1.21}$$

mit dem Gravitationspotential Φ erhalten. Dieses erfüllt im materiefreien Raum eine Laplace-Gleichung und somit liegt es nahe anzunehmen, dass die korrekten gravitativen Feldgleichungen die Ordnung 2 haben.

Für die Minkowski-Metrik verschwinden alle Christoffelsymbole und folglich ist die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes gerade die entsprechende partielle Ableitung. Die Reihenfolge partieller Ableitungen ist irrelevant, sodass wir für den flachen Raum allgemein

$$\xi_{||\alpha||\beta}^{\mu} - \xi_{||\beta||\alpha}^{\mu} = 0 \quad (2.1.22)$$

folgern können. In [5, Kapitel 5] wird gezeigt, dass dies normalerweise nicht der Fall ist und dass im Allgemeinen

$$\xi_{||\alpha||\beta}^{\mu} - \xi_{||\beta||\alpha}^{\mu} = R_{\nu\alpha\beta}^{\mu}\xi^{\nu} \quad (2.1.23)$$

gilt. Der sogenannte Riemannsche Krümmungstensor ist

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = \partial_{\beta} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} - \partial_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\beta \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \gamma\beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \alpha\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \gamma\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \gamma \\ \beta\nu \end{matrix} \right\} \quad , \quad (2.1.24)$$

wobei die Wahl des Vorzeichens Konvention ist, da auch $\xi_{||\beta||\alpha}^{\mu} - \xi_{||\alpha||\beta}^{\mu} = R_{\nu\alpha\beta}^{\mu}\xi^{\nu}$ eine mögliche Definition wäre. Das betrachtete Vektorfeld ist beliebig und folglich ist

$$R_{\nu\alpha\beta}^{\mu} = 0 \quad (2.1.25)$$

eine korrekte Gleichung, um den flachen Raum zu beschreiben. Es lässt sich zeigen, dass von den daraus resultierenden 256 Gleichungen aufgrund der Symmetrien des Tensors nur 20 voneinander unabhängig sein können [5, Kapitel 5]. Da jedoch die Metrik den Tensor komplett festlegt und diese 2 symmetrische Indizes besitzt, dürfen allgemein nur 10 Gleichungen unabhängig sein. Jede weitere Gleichung setzt die Metrikterme zwangsläufig miteinander in Beziehung und von daher liegt es nahe (2.1.25) so abzuschwächen, dass nur noch 10 unabhängige Gleichungen auftreten. Da in der Laplace-Gleichung über

die Ableitungen (d.h. 2 Indizes) summiert wird, versuchen wir es mit einer Verjüngung des Tensors. Der verjüngte Riemann Tensor

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad (2.1.26)$$

ist symmetrisch und besitzt von daher gerade 10 unabhängige Komponenten. Deshalb postulieren wir

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.27)$$

als Feldgleichung des materiefreien Raums (die Definition des Riemann Tensors ist erneut bis auf ein Vorzeichen eindeutig [5, Kapitel 5]).

Jetzt fehlt noch die Verallgemeinerung für Raumbereiche, in denen sich Materie befindet. Wir wollen die dafür nötigen Schritte hier im Detail nicht nachvollziehen und verweisen auf [5, Kapitel 10] und uns nur auf die grobe Idee beschränken. Da wir annehmen, dass Materie (oder allgemeiner Energie) die Metrik verändert, müssen wir (2.1.27) so abändern, dass der Riemann Tensor nicht mehr 0 ist, sondern gleich einem anderen Tensor, der den Energieinhalt des Raumes beschreibt. Wir bezeichnen diesen Tensor als den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$, wobei aus dimensionellen Gründen noch eine Konstante eingefügt wird. Es zeigt sich, dass die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors für nicht-wechselwirkende Materie und elektromagnetische Felder verschwindet, sofern die naheliegensten Definitionen verwendet werden

$$T_{||\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (2.1.28)$$

Da dies für den Riemann Tensor jedoch nicht der Fall ist, wird ein divergenzloser Tensor gesucht, der nur vom Riemann Tensor und der Metrik abhängt. Dadurch folgt die allgemeinste Form Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^{\alpha}_{\alpha} + \Lambda g_{\mu\nu} = CT_{\mu\nu} \quad , \quad (2.1.29)$$

wobei $G_{\mu\nu}$ als Einsteintensor und die meist als verschwindend angenommene Konstante Λ als kosmologische Konstante bezeichnet werden. Die Konstante C lässt sich mit Hilfe des nichtrelativistischen Grenzfalles bestimmen und wir erhalten die endgültige Fassung der Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad . \quad (2.1.30)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $g^{\nu\mu}$ und summieren über beide Indizes, können wir den Krümmungsskalar $R = R^\alpha_\alpha$ berechnen

$$R = -\frac{8\pi G}{c^2} T^\alpha_\alpha + 4\Lambda \quad . \quad (2.1.31)$$

Durch Einsetzen erhalten wir dann eine zweite Form der Einstein-Gleichung

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\alpha_\alpha \right) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad , \quad (2.1.32)$$

die für gewisse Rechnungen vorteilhafter sein kann.

2.2. Pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie

Die pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie übernimmt die Grundpostulate der ART, nur dass das Zahlensystem, auf dem die Riemannsche Mannigfaltigkeit basiert, nicht mehr das reelle, sondern das pseudokomplexe ist. Dabei handelt es sich um einen Ring, den wir D nennen und dessen Zahlen sich mit Hilfe eines Paares reeller Zahlen (x_1, x_2) schreiben lassen. Dabei sind die Addition und die Multiplikation wie folgt definiert

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad . \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Dies führt dazu, dass eine pseudokomplexe Zahl auch als

$$X = x_1 + Ix_2 \quad (2.2.2)$$

mit $I^2 = 1$ geschrieben werden kann. Das Zahlensystem ist kein Körper, da es nicht nullteilerfrei ist, denn das Produkt

$$(1 + I)(1 - I) = 0 \quad (2.2.3)$$

verschwindet, obwohl kein Faktor 0 ist. Dies mag auf den ersten Blick befremdlich erscheinen, aber es ermöglicht uns die beiden Projektoren $\sigma_{\pm} = \frac{1 \pm I}{2}$ als normierte Basis des Zahlensystems zu nutzen und eine pseudokomplexe Zahl entsprechend aufzuteilen

$$X = X_+ \sigma_+ + X_- \sigma_- = (x_1 + x_2) \sigma_+ + (x_1 - x_2) \sigma_- \quad . \quad (2.2.4)$$

Die Zahlen in den Nullteilern (proportional zu σ_{\pm}) bilden somit jeweils eine reelle Untergruppe des Zahlensystems. Dies hat zur Folge, dass sich alle pseudokomplex differenzierbaren Funktionen, die auf D basieren, komplett in die zwei Unterräume zerlegen lassen. Eindimensional heißt das, dass für eine Funktion $f : D \rightarrow D$

$$f(X) = f(X_+ \sigma_+ + X_- \sigma_-) = f_+(X_+) \sigma_+ + f_-(X_-) \sigma_- \quad (2.2.5)$$

gilt [23, 24, 25].

Da wir annehmen, dass alle physikalisch relevanten Tensoren differenzierbar sind, folgt daraus, dass wir die komplette Theorie separat in den beiden Nullteilern formulieren können. Folglich können wir alle Überlegungen des vorherigen Unterkapitels wie die Definition von Tensoren und ihrer Operationen, den Paralleltransport und die kovariante Ableitung übernehmen, nur dass wir die Größen jeweils einmal für die Unterräume benötigen. Somit folgt für die Metrik

$$g_{\mu\nu}(X) = g_{\mu\nu}^+(X_+) \sigma_+ + g_{\mu\nu}^-(X_-) \sigma_- \quad , \quad (2.2.6)$$

das Linienelement

$$d\omega^2 = g_{\mu\nu}^+ dX_+^\mu dX_+^\nu \sigma_+ + g_{\mu\nu}^- dX_-^\mu dX_-^\nu \sigma_- \quad (2.2.7)$$

und die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} \xi_{\parallel\nu}^\mu(X) &= \xi_{+\parallel\nu}^\mu(X_+) \sigma_+ + \xi_{-\parallel\nu}^\mu(X_-) \sigma_- \\ &= \left(\partial_{\nu+} \xi_+^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\beta \end{matrix} \right\}_+ \xi_+^\beta \right) \sigma_+ + \left(\partial_{\nu-} \xi_-^\mu + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\beta \end{matrix} \right\}_- \xi_-^\beta \right) \sigma_- \quad . \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Übernehmen wir zusätzlich die Feldgleichungen, haben wir eine doppelte Formulierung der ART und somit keine neuen Vorhersagen. Folglich müssen wir hier etwas abändern.

Jede pseudokomplexe Zahl außerhalb des Nullteilers besitzt ein Inverses, das durch

$$X^{-1} = \frac{X^*}{|X|^2} = \frac{X_- \sigma_+ + X_+ \sigma_-}{X X^*} = \frac{X_- \sigma_+ + X_+ \sigma_-}{2X_+ X_-} \quad (2.2.9)$$

gegeben ist [25]. Der auftretende Nenner kann zwar nicht als Norm verstanden werden, übernimmt jedoch die Rolle des Betragsquadrats der Zahl. Dieses ist für ein Element des Normalteilers gerade 0, sodass wir die Normalteiler als verallgemeinerte 0 des Zahlensystems verstehen können. Wir verlangen somit für den materiefreien Raum

$$G_{\mu\nu} = \Xi_{\mu\nu} \sigma_- \quad , \quad (2.2.10)$$

wobei die Wahl der Proportionalität zu σ_- Konvention ist. Falls Masse auftritt verallgemeinern wir dementsprechend

$$G_{\mu\nu} = \Xi_{\mu\nu} \sigma_- - \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.2.11)$$

wobei wir annehmen, dass der Energie-Impuls-Tensor reell ist und die direkt beobachtbaren Energiebeiträge enthält. Dabei wird eine Wechselwirkung beider Komponenten insoweit gefordert, dass der Tensor $\Xi_{\mu\nu}$ die gleiche Symmetrie wie $T_{\mu\nu}$ besitzt. Zudem entspricht die Metrik im +-Raum immer dem zugehörigen ART Ergebnis.

Die ART ist jedoch in der Beschreibung einer Vielzahl von Phänomenen erfolgreich ([7]), sodass wir annehmen müssen, dass der Einfluss der pseudokomplexen Raumdimensionen in den meisten Fällen sehr gering und das Linienelement durch

$$d\omega^2 \approx ds^2 = g_{\mu\nu}^{eff} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2.12)$$

gegeben ist. Weiterhin kann für den flachen Raum angenommen werden, dass die pseudokomplexe Komponente gerade die Geschwindigkeit $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ multipliziert mit einer minimalen Zeitskala $\frac{l}{c}$ (somit liegt auch eine minimale Länge vor) ist [26]. Dies sollte für schwache Gravitationsfelder weiterhin näherungsweise gültig sein, sodass wir

$$d\omega^2 = g_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \approx g_{\mu\nu}^{eff} \left(dx^\mu dx^\nu + \frac{l^2}{c^2} u^\mu u^\nu + 2I \frac{l}{c} dx^\mu du^\nu \right) \quad (2.2.13)$$

schreiben können. Das Linienelement muss reell sein, also folgt die Dispersionsrelation

$$g_{\mu\nu}^{eff} dx^\mu du^\nu = 0 \quad (2.2.14)$$

und es bleibt eine Korrektur proportional zu $\frac{l^2}{c^2}$ übrig. Nehmen wir an, dass die minimale Zeitskala im Bereich der Planck-Zeit und dementsprechend die minimale Länge l im Bereich der Planck-Länge liegen, können wir den Term außer für Beschleunigungen im Bereich der Planck-Beschleunigung oder mikroskopische Situationen auf der Skala der Planck-Länge immer vernachlässigen. Da das Äquivalenzprinzip Beschleunigungen und gravitative Felder zumindest lokal miteinander identifiziert, liegt es nahe, dass wir auch erst für extrem starke gravitative Felder die Änderungen der Form des Linienelements durch die pk-ART beachten müssen. In Abhängigkeit davon wie die Quellterme $\Xi_{\mu\nu}$ aussehen, kann jedoch die effektive Metrik auch für schwächere Felder von den Vorhersagen der ART abweichen.

Die Konstruktion von $g_{\mu\nu}^{eff}$ erfolgt nach [23] analog zur komplexen Elektrodynamik, indem $g_{\mu\nu}^+$ und $g_{\mu\nu}^-$ in die gleiche Form geschrieben und den jede einzelne pseudokomplexe Größe auf ihren Realteil projiziert wird. Äquivalent lässt sich sagen, dass die effektive

Metrik die auf den Realteil projizierte Einstein-Gleichung erfüllt

$$G_{\mu\nu}^{eff}(x) = \frac{1}{2}\Xi_{\mu\nu}(x) - \frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu}(x) \quad (2.2.15)$$

und somit ein weiterer Quellterm auftritt. Folglich sind die Aussagen der pk-ART in den meisten Fällen äquivalent zu denen, die die ART mit einem zusätzlichen Energie-Impuls-Tensor liefern würde. Der Unterschied ist, dass keine reale Quelle des Tensors gefunden werden muss, sondern dieser aus der Struktur des Raumes folgt.

2.3. Zeitunabhängige sphärisch symmetrische Metriken

Nehmen wir an, die Massenverteilung sei sphärisch symmetrisch. Da wir annehmen, dass der zusätzliche Quellterm der pk-ART die gleiche Symmetrie wie der Energie-Impuls-Tensor besitzt, muss die Weglänge unabhängig davon sein, in welche Richtung sich ein Teilchen auf einer Kugeloberfläche bewegt. Folglich sollte die Metrik und somit die Einstein-Gleichungen durch die Wahl von Kugelkoordinaten besonders einfach werden, da für die Winkelkoordinaten nur die Diagonalterme nicht verschwinden können. Durch Reskalierung der Radialkoordinate ist es zudem immer möglich, dass wir für den Winkelanteil die für die Kugelkoordinaten übliche Länge $r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2)$ erhalten. Somit existiert für jede sphärisch symmetrische Metrik mindestens ein Koordinatensystem, für das das Linienelement die Form

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{01} dx^0 dr + g_{11} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) \quad (2.3.1)$$

hat. Verlangen wir zusätzlich, dass die Massenverteilung zeitlich unverändert bleibt, kann das Linienelement auch nicht mehr von der Zeitrichtung abhängen, sodass der Mischterm aus Radius und Zeitkoordinate x^0 ebenfalls wegfällt. Wir erhalten somit

$$ds^2 = g_{00} (dx^0)^2 + g_{11} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) \quad . \quad (2.3.2)$$

Benutzen wir den Ansatz von Karl Schwarzschild

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad (2.3.3)$$

und berechnen die nicht-verschwindenden Komponenten des Riemann Tensors [5, Kapitel 6], dann erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) \\ R_{11} &= \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= e^{-\lambda} \left(1 + \frac{\nu'r}{2} - \frac{\lambda'r}{2} \right) - 1 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2(\vartheta) \quad .$$

Wie von der Symmetrie gefordert, sind die beiden Komponenten R_{22} und R_{33} nicht linear unabhängig und somit gilt dies für die komplette linke Seite der Einstein-Gleichung (2.1.30) beziehungsweise (2.2.15). Da wir zudem für den pk-ART Quellterm die gleiche Symmetrie wie für den Energie-Impuls-Tensor verlangen, folgt daraus $T_{33} = T_{22}$ und $\Xi_{33} = \Xi_{22}$ und wir können die beiden Tensoren ohne Beschränkung der Allgemeinheit wie den Energie-Impuls-Tensor einer anisotropen Flüssigkeit ansetzen. Das heißt der Energie-Impuls-Tensor der Materie ist durch

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_m e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_{r,m}}{c^2} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_{\vartheta,m}}{c^2} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_{\vartheta,m}}{c^2} \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

gegeben und der pk-ART Quelltensor ist

$$-\frac{c^2}{16\pi G}\Xi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_\Lambda e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_{r,\Lambda}}{c^2} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_{\vartheta,\Lambda}}{c^2} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p_{\vartheta,\Lambda}}{c^2} \sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}, \quad (2.3.6)$$

wobei wir den Index Λ gewählt haben, da wir einen Zusammenhang mit der dunklen Energie vermuten. Dies können wir zur Vereinfachung der Gleichung zusammenfassen, indem wir

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_m + \rho_\Lambda \\ p_r &= p_{r,m} + p_{r,\Lambda} \\ p_\vartheta &= p_{\vartheta,m} + p_{\vartheta,\Lambda} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

definieren. Dabei müssen wir im Hinterkopf behalten, dass ρ , p_r und p_ϑ nicht über eine Zustandsgleichung verbunden sein müssen. Dies ist für die pk-ART sogar dann der Fall, wenn sich die vorliegende Materie wie eine anisotrope Flüssigkeit verhält, da der Quelltensor $\Xi_{\mu\nu}$ bisher nicht genauer festgelegt wurde.

Setzen wir dies nun in die Form der Einstein-Gleichung (2.1.32) mit $\Lambda = 0$ ein, dann erhalten wir ein allgemeines Gleichungssystem für die Lösung zeitunabhängiger sphärisch symmetrischer Metriken, die für große Abstände von der Quelle gegen die Minkowski-Metrik konvergieren

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r} \right) = \frac{A}{2} \left(\rho + \frac{p_r}{c^2} + \frac{2p_\vartheta}{c^2} \right) \quad (2.3.8)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \right) = \frac{A}{2} \left(\rho + \frac{p_r}{c^2} - \frac{2p_\vartheta}{c^2} \right) \quad (2.3.9)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{A}{2} \left(\rho - \frac{p_r}{c^2} \right), \quad (2.3.10)$$

sofern wir die Definition $A := -\frac{8\pi G}{c^2}$ verwenden. Das System ist unterbestimmt, denn wir wollen die fünf unbekanntenen Funktionen ν , λ , ρ , p_r und p_ϑ bestimmen, aber wir haben

dafür nur drei Gleichungen. Abhängig davon, welche Bedingungen wir zusätzlich stellen, ist eine andere Umformung der Gleichungen sinnvoll.

Beginnen wir mit der Addition der ersten beiden Gleichungen. Wir erhalten

$$-\frac{\nu' + \lambda'}{r}e^{-\lambda} = A\left(\rho + \frac{p_r}{c^2}\right) \quad . \quad (2.3.11)$$

Multiplizieren wir diese Gleichung nun mit $\frac{1}{2}$ und addieren (2.3.10), dann ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\nu' + \lambda'}{2r}e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r}\right) - \frac{1}{r^2} &= \frac{A}{2}\left(\rho + \frac{p_r}{c^2}\right) + \frac{A}{2}\left(\rho - \frac{p_r}{c^2}\right) = A\rho \\ \Rightarrow A\rho &= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

und äquivalent durch Subtrahieren von (2.3.10)

$$\begin{aligned} -\frac{\nu' + \lambda'}{2r}e^{-\lambda} - e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{2r} - \frac{\lambda'}{2r}\right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{A}{2}\left(\rho + \frac{p_r}{c^2}\right) - \frac{A}{2}\left(\rho - \frac{p_r}{c^2}\right) = A\frac{p_r}{c^2} \\ \Rightarrow A\frac{p_r}{c^2} &= -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Zusätzlich können wir durch Einsetzen dieser Ergebnisse in (2.3.9) noch eine Gleichung für p_ϑ bestimmen

$$\begin{aligned} e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right) &= \frac{1}{2}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right] + \frac{1}{2}\left[-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\right] - A\frac{p_\vartheta}{c^2} \\ A\frac{p_\vartheta}{c^2} &= e^{-\lambda}\left(-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right) \quad , \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

sodass wir mit (2.3.12), (2.3.13) und (2.3.14) die Quellterme für eine gegebene Metrik bestimmen und die physikalische Sinnhaftigkeit bewerten können.

Wollen wir hingegen zusätzlich Zustandsgleichungen oder eine bestimmte „Materiedichte“ oder Druckverteilung annehmen, lohnt es sich die Gleichungen weiter umzuformen. Wir wählen hierfür den Ansatz

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \quad (2.3.15)$$

und setzen ihn in (2.3.12) ein:

$$\begin{aligned}
A\rho &= \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{\lambda' e^{-\lambda}}{r} - \frac{1}{r^2} \\
&= \frac{1}{r^2} - \frac{2m}{r^3} + \frac{2m}{r^3} - \frac{2m'}{r^2} - \frac{1}{r^2} = -\frac{2m'}{r^2} \\
\Rightarrow m' &= -\frac{A}{2}\rho r^2 \quad .
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Zudem stellen wir (2.3.13) nach ν' um

$$\nu' = -A \frac{p_r}{c^2} r e^\lambda + \frac{e^\lambda - 1}{r} = 2 \frac{m - \frac{A p_r}{2c^2} r^3}{r(r - 2m)} \tag{2.3.17}$$

und leiten die Gleichung ab:

$$\nu'' = 2 \frac{m' - \frac{A p_r'}{2c^2} r^3 - \frac{3A p_r}{2c^2} r^2}{r(r - 2m)} - 2 \frac{\left(m - \frac{A p_r}{2c^2} r^3\right) (2r - 2m - 2m' r)}{r^2 (r - 2m)^2} \quad . \tag{2.3.18}$$

Setzen wir dies und (2.3.15) in (2.3.14) ein, so ergibt sich

$$A \frac{p_\vartheta}{c^2} = \frac{A p_r'}{2c^2} r + \frac{A p_r}{c^2} + \frac{A}{2} \left(m - \frac{A p_r}{2c^2} r^3\right) \frac{\rho + \frac{p_r}{c^2}}{r - 2m} \quad . \tag{2.3.19}$$

Umgestellt folgt daraus

$$\frac{m - \frac{A p_r}{2c^2} r^3}{r(r - 2m)} = -\frac{p_r' r + 2p_r - 2p_\vartheta}{r(\rho c^2 + p_r)} \quad , \tag{2.3.20}$$

sodass wir auch ν' als Funktion der Dichte und der Drücke schreiben können

$$\nu' = -\frac{2p_r' r + 4p_r - 4p_\vartheta}{r(\rho c^2 + p_r)} \quad , \tag{2.3.21}$$

solange $p_r \neq -\rho c^2$ ist. Insgesamt erhalten wir somit das Gleichungssystem

$$p_r = p_r(\rho)$$

$$p_\vartheta = p_\vartheta(\rho)$$

$$m' = \frac{4\pi G \rho r^2}{c^2}$$

(2.3.22)

$$\frac{p_r'}{c^2} = -\frac{m + \frac{4\pi G p_r r^3}{c^4}}{r(r - 2m)} \left(\rho + \frac{p_r}{c^2} \right) - \frac{2p_r}{rc^2} + \frac{2p_\vartheta}{rc^2}$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$\nu' = -\frac{2p_r' r + 4p_r - 4p_\vartheta}{r(\rho c^2 + p_r)} .$$

Für den Sonderfall $\frac{p_r}{c^2} = -\rho$, streichen wir die letzte Gleichung und verlangen aufgrund von (2.3.11) $e^\nu = e^{-\lambda}$.

Daraus folgt für den ART-Außenraum (keine Materie und keine dunkle Energie) mit $\rho = \frac{p_r}{c^2} = \frac{p_\vartheta}{c^2} = 0$ die Schwarzschild-Metrik [5, Kapitel 6]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad (2.3.23)$$

mit $r_s = 2m(r_0)$, wenn r_0 die Oberfläche des Zentralgestirns ist. Im Gegensatz dazu wird für die pk-Schwarzschild-Metrik $\frac{p_r}{c^2} = -\rho$ und $\frac{p_\vartheta}{c^2} = \frac{3}{2}\rho$ angesetzt und wir erhalten

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad , \quad (2.3.24)$$

wobei B unbestimmt ist. Üblicherweise wird $B > \frac{8}{27}r_s^3$ gesetzt, damit die Metrik an ihrem Minimum $r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$ größer als 0 ist und von daher keine Ereignishorizonte besitzt.

Der Innenraum eines Sterns ist deutlich schwerer zu beschreiben. Das einfachste Modell nimmt an, dass der Druck isotrop $\frac{p_\vartheta}{c^2} = \frac{p_r}{c^2}$ und die Dichte konstant ist. Die zugehörige Metrik wird innere Schwarzschild-Metrik genannt und hat die Form [5, Kapitel 14.2]

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\vartheta^2 - \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad (2.3.25)$$

mit der Definition $R^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho}$ und der Bedingung $\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) > \frac{1}{3}$. Die Herleitung kann im Anhang A nachgelesen werden.

3. Quantenmechanik in flachen Räumen

Die Quantenmechanik ist neben dem schon besprochenen gravitativen Hintergrund die zweite Säule für die Berechnung semiklassischer Quantengravitationseffekte. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, eine komplette Einführung in dieses Feld zu geben, aber wir werden uns einige grundlegende Eigenschaften in Erinnerung rufen. Eventuell auftretende tiefergehende Fragen können in Lehrbüchern wie [27, 28, 29, 30] nachgeschlagen werden.

Wir werden anfangs analog zum Buch von Shankar [29] den von Dirac eingeführten Bracket-Formalismus nutzen, um die Grundpostulate der Quantenmechanik und deren Implikationen zusammenzufassen, und später bei der Betrachtung der Schrödingergleichung auf den von diesem zuerst formulierten Wellenformalismus übergehen ([31, 32, 33, 34]). Danach werden wir uns mit speziell-relativistischer Quantenmechanik für spinlose (Klein-Gordon-Gleichung) und Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Dirac-Gleichung) beschäftigen, um den Übergang auf gekrümmte Räume vorzubereiten.

3.1. Grundlagen

Wir postulieren, dass für ein beliebiges abgeschlossenes quantenmechanisches System jeder mögliche Zustand des System durch einen Vektor eines komplexen Vektorraums V dargestellt werden kann, dessen Vektoren wir nach Dirac mit dem „Ket“ genannten Symbol $|\alpha\rangle \in V$ beschreiben. Zudem muss für den Vektorraum ein Skalarprodukt

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \otimes V \rightarrow \mathbb{C} \quad (3.1.1)$$

definiert sein. Zwei Vektoren bzw. Zustände werden als orthogonal bezeichnet, sofern ihr Skalarprodukt verschwindet. Zudem wird die Norm eines Vektors $|\alpha\rangle$ über $\sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$ definiert.

Weiterhin definieren wir zu jedem Ket $|\alpha\rangle$ ein Element aus einem dualen Vektorraum $\langle \alpha |$, das wir „Bra“ nennen und dessen Produkt mit einem beliebigen Ket gerade das Skalarprodukt (deshalb Bracket) ist.

Neben dem Skalarprodukt können wir das äußere Produkt von Ket und Bra bilden

$$|\alpha\rangle \langle \beta| = \hat{O} \quad (3.1.2)$$

und erhalten damit eine lineare Abbildung $\hat{O} : V \rightarrow V$. Jede so darstellbare Abbildung und jede Linearkombination solcher Abbildungen wird als Operator bezeichnet und durch „ \hat{O} “ dargestellt.

Jedem Operator können wir zudem einen Operator des durch das Skalarprodukt gegebenen dualen Vektorraums zuordnen. Betrachten wir hierfür den dualen Vektor von $|\gamma\rangle = \hat{O} |\alpha\rangle$

$$\langle \gamma | = \langle \alpha | \hat{O}^\dagger \quad (3.1.3)$$

Der auftretende Operator \hat{O}^\dagger wird adjungierter Operator von \hat{O} genannt. Ein weiteres Postulat der Quantenmechanik besagt, dass physikalische Messgrößen (sogenannte

Observablen) ausschließlich durch hermitesche (bzw. selbstadjungierte) Operatoren dargestellt werden, für die dieser Operator gerade der Operator \hat{O} selbst ist. Weiterhin wird gefordert, dass die möglichen Messergebnisse die Eigenwerte des Operators sind und das System sich nach der Messung im zum gemessenen Eigenwert zugehörigen Eigenzustand befindet. Welches Messergebnis dabei gemessen wird ist zufällig, solange kein Eigenzustand vorliegt, aber die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist festgelegt und beträgt

$$p_a = \frac{|\langle a | \alpha \rangle|^2}{\langle \alpha | \alpha \rangle} \quad , \quad (3.1.4)$$

sofern der Zustand nach der Messung $|a\rangle$ normiert ist. Das heißt die normierten Eigenzustände $\{|\alpha_n\rangle\}$ des Operators müssen eine Orthonormalbasis des Raumes V bilden. Dies ist für hermitesche Operatoren immer erfüllt (siehe [29, Kapitel 1.8]). Aufgrund dieser Eigenschaft gilt zudem, dass der Erwartungswert (Mittelwert vieler Messungen) durch

$$\langle \hat{O} \rangle_\alpha = \langle \alpha | \hat{O} | \alpha \rangle \quad (3.1.5)$$

gegeben ist.

Falls alle Zustände eines Unterraums von V für einen Operator denselben Eigenwert besitzen, werden sie als entartet bezeichnet und der Zustand nach der Messung ist die Projektion des vorherigen Zustands auf den Unterraum. Entsprechend geht auch die Wahrscheinlichkeit in eine Summen- (Dimensionen von V abzählbar) bzw. Integralform über (Dimensionen von V nicht abzählbar). Genauer hierzu lässt sich in diversen Lehrbüchern wie beispielsweise [29, Kapitel 4.2] finden.

Zudem ist der adjungierte Operator mit einer weiteren wichtigen Klasse von Operatoren verbunden. Sofern er das Inverse des Originaloperators ist, wird er als unitär bezeichnet. Diese Klasse von Operatoren erhält das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} |\alpha'\rangle &= \hat{U} |\alpha\rangle & |\beta'\rangle &= \hat{U} |\beta\rangle \\ \Rightarrow \langle \alpha' | \beta' \rangle &= \langle \alpha | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

und kann somit beispielsweise für Basiswechsel verwendet werden (siehe [29, Kapitel 1.8]).

Als letzte Maßnahme dieses Unterkapitels definieren wir noch den Kommutator zweier Observablen (\hat{A} und \hat{B}) als

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad . \quad (3.1.7)$$

Falls der Kommutator 0 ist, sagen wir, dass die beiden Observablen kommutieren oder vertauschen. Dies ist gleichbedeutend damit, dass sie eine gemeinsame Basis aus Eigenzuständen besitzen, wie beispielsweise in [29, Kapitel 1.8] gezeigt wird. Folglich können nicht kommutierende Observablen nicht gleichzeitig genau bestimmt werden, da der Zustand des Systems durch die Messung verändert wird und somit eine erneute Messung nicht das gleiche Ergebnis liefern würde. Als untere Grenze der Unsicherheit gilt hier die Unschärferelation

$$\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|^2 \quad , \quad (3.1.8)$$

wobei wir $\langle \hat{O} \rangle$ als Erwartungswert eines Operators bezeichnen und den Operator $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ definiert haben. Der Beweis wird mittels der Schwarzischen Ungleichung geführt und kann in [29, Kapitel 9] nachgeschlagen werden.

3.2. Translation und Zeitentwicklung

In diesem Unterkapitel werden wir die Darstellung der kontinuierlichen Variablen Ort und Impuls und die Zeitentwicklung eines Zustands diskutieren.

Wir gehen davon aus, dass der Ort und der Impuls eines Teilchens kontinuierliche Werte annehmen können. Somit hat unser zugehöriger Vektorraum V mehr als abzählbar viele

Dimensionen. Es ist nicht entscheidend, welche Basis des Vektorraums wir für die Beschreibung physikalischer Prozesse verwenden. Von daher können wir uns im Weiteren auf die Eigenzustände $|\vec{x}\rangle$ des Ortsoperators \hat{x} festlegen, wobei der zu $|\vec{x}\rangle$ gehörende Eigenwert $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist und die Eigenzustände über

$$\langle \vec{x}' | \vec{x} \rangle = \delta^n(\vec{x}' - \vec{x}) \quad (3.2.1)$$

normiert werden. Entwickeln wir einen Zustand in dieser Basis, erhalten wir

$$|\alpha\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d^n x |\vec{x}\rangle \Psi_\alpha(\vec{x}) \quad . \quad (3.2.2)$$

Dabei ist $\Psi_\alpha(\vec{x}) = \langle \vec{x} | \alpha \rangle$ die Wellenfunktion des Teilchens, bei der es sich um dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeitsamplitude handelt (für eine Einführung in die Eigenschaften der Wellenfunktion siehe [29, Kapitel 4ff]).

Weiterhin erfordert die Lösung physikalischer Probleme neben der Kenntnis des Ortes den Impuls des Teilchens, sodass wir den zugehörigen Operator für die gewählte Ortsbasis bestimmen müssen. Der Leitgedanke dafür ist, dass in der klassischen Mechanik Translationen durch kanonische Transformationen mit dem Impuls als Generator erzeugt werden können (siehe [35, Kapitel 6]). Von daher postulieren wir, dass der Impulsoperator auch in der Quantenmechanik Translationen generiert. Nutzen wir drei Raumdimensionen und kartesische Koordinaten (x,y,z) , dann bedeutet dies für eine Verschiebung in x-Richtung

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\hat{p}_x}{\hbar}\epsilon} \Psi_\alpha(x, y, z) &= \Psi_\alpha(x + \epsilon, y, z) \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i\frac{\hat{p}_x}{\hbar} \right)^n \Psi_\alpha(x, y, z) \epsilon^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi_\alpha(x, y, z)}{\partial x^n} \epsilon^n \\ &\Rightarrow \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad , \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

wobei der Vorfaktor i Konvention ist und das Plancksche Wirkungsquantum \hbar aus dimensionalen Gründen eingefügt werden muss (wird über Experimente identifiziert). Dabei war die Wahl der Verschiebungsrichtung willkürlich, sodass wir dies auf die anderen

Richtungen verallgemeinern können. Somit ist der Impulsoperator für kartesische Koordinaten proportional zum Gradienten

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (3.2.4)$$

und folglich gilt dieser Zusammenhang für alle Koordinatensysteme (beispielsweise für Kugelkoordinaten siehe [29, Kapitel 4.2]). Daher verschwindet der Kommutator (3.1.7) der Ortskomponenten und der zugehörigen Impulse

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk} \quad (3.2.5)$$

nicht, sodass Ort und Impuls eines Teilchens niemals gleichzeitig exakt bestimmt sein können.

Analog wird die Zeitentwicklung der Koordinaten und Impulse eines Teilchens in der klassischen Mechanik durch die Hamiltonfunktion generiert, sodass wir verlangen, dass der quantenmechanische Hamiltonoperator \hat{H} ebenfalls die Zeitverschiebung eines Zustands beziehungsweise der Wellenfunktion erzeugt. Setzen wir dies wie in (3.2.3) ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-i\frac{\hat{H}}{\hbar}\epsilon}\Psi(\vec{x}, t) &= \Psi(\vec{x}, t + \epsilon) \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\right)^n \Psi_{\alpha}(\vec{x}, t)\epsilon^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi_{\alpha}(\vec{x}, t)}{\partial t^n} \epsilon^n \\ \Rightarrow \hat{H} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

wobei wir \hbar wieder aus dimensionalen Gründen einfügen müssen. Dabei ist a priori nicht klar, dass die beiden Konstanten dieselbe sind. Dies kann jedoch ebenfalls durch klassische Analogie gezeigt werden (siehe [29, Kapitel 6]).

Wenden wir diese beiden Formen des Operators auf die Wellenfunktion an, erhalten wir die zentrale Gleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik, die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \quad , \quad (3.2.7)$$

bei deren Auswertung wir zusätzlich annehmen, dass der Hamiltonoperator sich wie im Klassischen als Summe der kinetischen und potentiellen Energie schreiben lässt.

3.3. Sphärisch symmetrische Schrödingergleichung und Drehimpuls

Betrachten wir ein Teilchen in einem externen Potential, dessen Energie nur von seinem Ort und Impuls abhängt. Die klassische zugehörige Hamiltonfunktion ist

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = E_{kin} + E_{pot} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x}) \quad . \quad (3.3.1)$$

Somit ist der zugehörige Hamiltonoperator durch

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}(\hat{x}) \quad (3.3.2)$$

gegeben. Nehmen wir an, dass das Potential sphärisch symmetrisch sei, dann hängt der Wert des Potentials (bzw. die Eigenwerte des Potentialoperators) ausschließlich vom Betrag des Ortsvektors ab und wir können die Gleichung durch Berücksichtigung dieser Symmetrie vereinfachen.

In der klassischen Mechanik nutzen wir dafür Kugelkoordinaten und den Drehimpuls bezüglich des Zentrums, der in einem solchen Fall eine Erhaltungsgröße des Teilchens ist. Dieser ist durch

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \quad (3.3.3)$$

beziehungsweise

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \quad (3.3.4)$$

gegeben. Dabei generiert die Funktion

$$L_n = \vec{L} \cdot \vec{n} \quad (3.3.5)$$

in der klassische Mechanik eine Drehung um die Richtung von \vec{n} . Analog zum vorherigen Unterkapitel verlangen wir dies ebenfalls für die Komponente $\hat{J}_n = \hat{\vec{J}} \cdot \vec{n}$ des quantenmechanischen Drehimpulsoperators $\hat{\vec{J}}$.

Jedoch vertauschen Drehungen in der klassischen Mechanik nicht. Betrachten wir dafür die Differenz zweier Drehungen, die jeweils durch die Hintereinanderausführung der zwei gleichen Drehungen um den infinitesimalen Winkel ϵ in unterschiedlicher Reihenfolge erzeugt werden können. Beachten wir dabei die zweite Ordnung in ϵ , dann ist beispielsweise der Unterschied zwischen einer Rotation um x und dann um y und einer Rotation um y und dann um x durch

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = R_z(\epsilon^2) - \mathbb{1} \quad (3.3.6)$$

gegeben. Der Operator einer quantenmechanischen Drehung

$$\hat{D}(\vec{n}, \varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\vec{J}}\vec{n})\varphi} \quad (3.3.7)$$

soll dieses Verhalten ebenfalls aufweisen. Folglich gilt

$$\begin{aligned} & \hat{D}_x(\epsilon)\hat{D}_y(\epsilon) - \hat{D}_y(\epsilon)\hat{D}_x(\epsilon) \\ &= \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}\hat{J}_x - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{J}_x^2\epsilon^2 \right) \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}\hat{J}_y - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{J}_y^2\epsilon^2 \right) \\ & \quad - \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}\hat{J}_y - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{J}_y^2\epsilon^2 \right) \left(\hat{\mathbb{1}} - \frac{i}{\hbar}\hat{J}_x - \frac{1}{2\hbar^2}\hat{J}_x^2\epsilon^2 \right) \\ &= (\hat{\mathbb{1}} - \hat{\mathbb{1}}) - \frac{i}{\hbar}(\hat{J}_x + \hat{J}_y - \hat{J}_y - \hat{J}_x)\epsilon \\ & \quad - \frac{1}{\hbar^2} \left(\hat{J}_x\hat{J}_y + \frac{1}{2}\hat{J}_x^2 + \frac{1}{2}\hat{J}_y^2 - \hat{J}_y\hat{J}_x - \frac{1}{2}\hat{J}_y^2 - \frac{1}{2}\hat{J}_x^2 \right) \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \\ &= \hat{D}_z(\epsilon^2) - \hat{\mathbb{1}} = -\frac{i}{\hbar}\hat{J}_z\epsilon^2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

und damit ist der Kommutator von \hat{J}_x und \hat{J}_y

$$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z \quad (3.3.9)$$

Erneut ist unsere Wahl der Richtungen willkürlich, sodass wir für kartesische Koordinaten allgemein den Kommutator

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{J}_k \quad (3.3.10)$$

erhalten. Somit können die Komponenten des Drehimpulses eines Teilchens nicht gleichzeitig exakt bestimmt werden.

Der Betragsquadratoperator des Drehimpulses

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{J}_i^2 \quad (3.3.11)$$

vertauscht hingegen mit den Komponenten

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_j] = 0 \quad . \quad (3.3.12)$$

Dementsprechend gibt es eine gemeinsame Eigenbasis von \hat{J}^2 und einer Komponente. Wie in der Literatur üblich [28, 29] wählen wir hier \hat{J}_z .

Mit Hilfe der sogenannten Leiteroperatoren

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y \quad (3.3.13)$$

kann gezeigt werden, dass die gemeinsame Eigenbasis von \hat{J}^2 und \hat{J}_z durch die Zustände

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |j, m\rangle &= \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle \\ \hat{J}_z |j, m\rangle &= \hbar m |j, m\rangle \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

gegeben ist [29, Kapitel 12]. Dabei ist j ganz- oder halbzahlig ($j \in \frac{\mathbb{N}}{2}$) und m kann alle durch einen ganzzahligen Schritt getrennte Werte zwischen $-j$ und j annehmen ($m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$).

Definieren wir den Drehimpulsoperator analog zur klassischen Mechanik über

$$\begin{aligned}\hat{L} &= \hat{x} \times \hat{p} \\ \Rightarrow \hat{L}_j &= \epsilon_{jkl} \hat{x}_k \hat{p}_l \quad .\end{aligned}\tag{3.3.15}$$

Nutzen wir die Ortsbasis mit Kugelkoordinaten, dann folgt daraus

$$\begin{aligned}\hat{L} &= \hat{x} \times \hat{p} = \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \\ \hat{L}_z &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad .\end{aligned}\tag{3.3.16}$$

Die orthonormierten Lösungen der Eigenwertgleichungen

$$\begin{aligned}\hat{L}^2 \Omega(\vartheta, \varphi) &= \hbar^2 l(l+1) \Omega(\vartheta, \varphi) \\ \hat{L}_z \Omega(\vartheta, \varphi) &= \hbar m \Omega(\vartheta, \varphi)\end{aligned}\tag{3.3.17}$$

sind die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} , wobei die Quantenzahlen nur ganzzahlig sein dürfen [29, Kapitel 12.5]. Für ein sphärisch symmetrisches Potential lösen die Kugelflächenfunktionen den Winkelanteil der Wellenfunktion komplett, da die Winkelabhängigkeit des Quadrats des Impulsoperators proportional zum Betragsquadratoperator des Drehimpulses ist:

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2\hbar^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hbar^2}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad .\tag{3.3.18}$$

Setzen wir dies in (3.3.2) ein, dann erhalten wir für die Schrödingergleichung (3.2.7)

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(|\vec{x}|) \right) \psi \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi \quad .\end{aligned}\tag{3.3.19}$$

Dabei haben wir den Index α der Wellenfunktion weggelassen, da die Gleichung für jeden beliebigen Zustand gilt. Für einen Eigenzustand des Hamiltonoperators mit dem

Eigenwert E

$$\hat{H}\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi \quad (3.3.20)$$

erhalten wir daraus die stationäre sphärisch symmetrische Schrödingergleichung

$$E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r) \right] \psi \quad (3.3.21)$$

Diese können wir mit dem Separationsansatz

$$\Psi = R(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (3.3.22)$$

zu einer rein radialen Differentialgleichung vereinfachen

$$E\psi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] \psi \quad (3.3.23)$$

deren Lösungen noch von der Beschaffenheit des Potentials abhängen. So lösen beispielsweise die normierten Wellenfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_{nlm} &= N_{nl} r^l e^{-\gamma r^2} L_k^{l+\frac{1}{2}}(2\gamma r^2) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega(2n+l+\frac{3}{2})t} \\ \gamma &= \frac{m\omega}{\hbar} \\ N_{nl} &= \sqrt{\sqrt{\frac{2\gamma^3}{\pi}} \frac{2^{n+2l+3} n! \gamma^l}{(2n+2l+1)!!}} \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

die Schrödingergleichung für ein harmonisches Oszillatorpotential

$$V(r) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \quad (3.3.25)$$

wobei $L_k^{l+\frac{1}{2}}$ die assoziierten Laguerrepolynome bezeichnet (Herleitung [28, 29, jeweils Kapitel 7]).

Experimentell zeigt sich, dass Teilchen zudem einen inneren Drehimpuls, den sogenannten Spin, besitzen können. Dessen Messung beeinflusst den Bahndrehimpuls nicht, sodass wir die beiden Drehimpulse durch kommutierende Operatoren beschreiben können.

Der Betrag des Spins ist dabei von der Elementarteilchensorte des Teilchens abhängig, wobei eine Liste der bekannten Teilchen und ihres Spins in [9] gefunden werden kann. Beispielsweise haben Elektronen einen Spin $\frac{1}{2}$.

In der Gruppentheorie werden Rotationen durch die Drehgruppe $SO(3)$ beschrieben und die Komponenten des Drehimpulsoperators sind eine Basis der zugehörigen Lie-Algebra, das heißt des Tangentialraums im neutralen Element ([36, Kapitel 8.6ff]). Da die Lie-Algebra einfach ist und Rang 1 hat, können wir mit Hilfe des Theorems von Racah (siehe [37, Kapitel 2,3]) aussagen, dass es nur einen linear unabhängigen Casimiroperator gibt, das heißt nur einen Operator der sich aus den Gruppenelementen zusammensetzt und mit allen Operatoren der Gruppe kommutiert. Diesen haben wir schon als Betragsquadratoperator identifiziert. Folglich können wir keinen weiteren Drehimpulsoperator im Ortsraum unterbringen und wir müssen für die Beschreibung eines Teilchens mit Spin davon ausgehen, dass der Gesamtraum ein direktes Produkt aus Ortsraum und einem weiteren Raum mit $SO(3)$ -Symmetrie ist. Tritt ein solcher Unterraum auf und drehen sich die erzeugenden Operatoren bei einer Drehung der Ortsbasis mit, dann können wir sie als innere Drehimpuls- bzw. Spinoperatoren interpretieren. Jedoch wird die Bezeichnung des Spins ebenfalls als Teilbegriff für andere lokale $SO(3)$ -Symmetrien verwendet (beispielsweise der Isobarens핀 [37, Kapitel 5]). Für Spin ungleich 0, können wir einen Zustand des Produktraums nicht mehr durch eine eindimensionale Wellenfunktion beschreiben. Bestimmen wir jedoch die Darstellungen unserer Symmetriegruppe (hier $SO(3)$) können wir die Wellenfunktion als n-dimensionalen Vektor auffassen. Dieses Problem wird ausführlich in [38, Kapitel 4] diskutiert.

Haben wir zwei kommutierende Drehimpulsoperatoren \hat{J}_1 und \hat{J}_2 , dann bilden die Produktzustände

$$|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad (3.3.26)$$

mit

$$\begin{aligned}\hat{J}_i^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= \hbar^2 j_i (j_i + 1) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \\ \hat{J}_{iz} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= \hbar j_i |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle\end{aligned}\quad (3.3.27)$$

eine Orthonormalbasis des Produktraums. Häufig wird der Hamiltonoperator jedoch nur vom Gesamtdrehimpuls $\hat{J} = \hat{J}_1 + \hat{J}_2$ abhängen, sodass wir mehr an dessen Eigenzuständen interessiert sind. Wir suchen also die Eigenzustände zu den vier kommutierenden Operatoren \hat{J}^2 , \hat{J}_z , \hat{J}_1^2 und \hat{J}_2^2 $|j m \tilde{j}_1 \tilde{j}_2\rangle$. Diese können in die Produktbasis entwickelt werden und wir erhalten

$$|j m \tilde{j}_1 \tilde{j}_2\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \tilde{j}_1 \tilde{j}_2\rangle \quad . \quad (3.3.28)$$

Die Skalarprodukte $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \tilde{j}_1 \tilde{j}_2\rangle$ werden Clebsch-Gordan-Koeffizienten genannt und können in der Literatur nachgeschlagen werden (siehe [28, 29, 39]). Insbesondere verschwinden alle Koeffizienten, für die eine der Bedingungen $j_i = \tilde{j}_i$, $m = m_1 + m_2$ und $j \in \{|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2\}$ nicht erfüllt ist.

3.4. Relativistische Wellengleichungen

Bisher haben wir die Quantenmechanik in Analogie zur klassischen Mechanik aufgebaut, aber diese ist nur eine Näherung für niedrige Geschwindigkeiten der betrachteten Teilchen (im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c) und schwache gravitative Felder (auftretende Massendichte ρ eines Systems der Masse M deutlich kleiner als $\frac{3m_{Pl}^3}{32\pi M^2 l_{Pl}^3}$). In dieser Arbeit untersuchen wir jedoch Phänomene, für die diese beiden Näherungen nicht gerechtfertigt sind, und müssen folglich die obige Schrödingergleichung (3.2.7) relativistisch verallgemeinern. Wir beginnen mit der Einbeziehung von Geschwindigkeiten im Bereich der Lichtgeschwindigkeit, d.h. dem Einbau der speziellen Relativitätstheorie (SRT) in die Quantenmechanik.

Die SRT ist ein Sonderfall der ART (siehe 2.1) mit dem globalen Linienelement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4.1)$$

in kartesischen Koordinaten. Da der metrische Tensor ortsunabhängig ist

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

können wir das Linienelement integrieren und erhalten so

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad . \quad (3.4.3)$$

Verallgemeinert ergibt sich daraus das Pseudoskalarprodukt (nicht positiv definit)

$$a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad . \quad (3.4.4)$$

Allgemein sind in der SRT neben Verschiebungen nur solche Koordinatentransformationen erlaubt, die dieses unverändert lassen, die sogenannten Lorentztransformationen (siehe [40, Kapitel 3]).

Betrachten wir die Lagrangefunktion zur Bestimmung der Geodätengleichungen eines massiven Teilchens

$$L = A (c^2 \dot{t}^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) = A \quad , \quad (3.4.5)$$

wobei $\dot{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}$ definiert wurde und A ein koordinatenunabhängiger Parameter ungleich 0 ist. Dann erhalten wir durch die Geodätengleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{d}{ds} (2A\dot{t}) = 0 \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{d}{ds} (-2A\dot{x}) = 0 \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{d}{ds} (-2A\dot{y}) = 0 \\ \frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} &= \frac{d}{ds} (-2A\dot{z}) = 0 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

vier Erhaltungsgrößen. Nehmen wir an das Teilchen wechselwirke nicht und bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit durch den Raum. Dann gilt

$$x^i = v_i t + x_0^i \quad (3.4.7)$$

und wir können t bestimmen

$$\begin{aligned} 1 &= c^2 t^2 - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2 = (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) t^2 = (c^2 - v^2) t^2 \\ \Rightarrow t &= \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \quad . \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Eingesetzt in unsere erhaltenen Größen ergibt sich

$$2Act = 2A \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2\gamma A \quad (3.4.9)$$

$$2A\dot{x}^i = 2A \frac{v_i}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2\gamma A v_i \quad . \quad (3.4.10)$$

Wählen wir $A = \frac{1}{2}mc$, dann erhalten wir im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten für die untere Gleichung die klassische Impulskomponente in Richtung x^i . Äquivalent erhalten wir bei der Entwicklung der oberen Gleichung

$$\gamma mc \approx mc + \frac{1}{2}m \frac{v^2}{c} = mc + \frac{E_{kin}}{c} \quad (3.4.11)$$

die klassische kinetische Energie geteilt durch c plus die Konstante mc . Es liegt also nahe diese Größen als relativistische Verallgemeinerung von Energie und Impuls anzusehen und die 0 Komponente des Impulses

$$p_0 = \frac{E}{c} = \gamma mc \quad (3.4.12)$$

zu definieren. Wir erhalten somit die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = \gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2 \quad . \quad (3.4.13)$$

Diese Gleichung benutzen wir im Weiteren als Basis um die relativistischen Wellengleichungen aufzustellen. Für den Beweis, dass die Annahme, dass es sich bei p_0 um die

Gesamtenergie geteilt durch c handelt, in der Tat korrekt ist und p^μ und p_μ das korrekte Transformationsverhalten für Vierervektoren aufweisen, verweisen wir auf die Literatur [40, Kapitel 4].

In der ART müssen alle Naturgesetze forminvariant unter Koordinatentransformationen sein und folglich muss dies ebenfalls für die erlaubten Transformationen der SRT gelten. Dementsprechend sind die Forminvarianz und die Einhaltung der Energie-Impuls-Beziehung (3.4.13) unsere Leitfäden bei der Suche nach den relativistischen Wellengleichungen.

Analog zur nichtrelativistischen Definition der Impulsoperatoren und des Hamiltonoperator identifizieren wir

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= \frac{\hat{H}}{c} = i\hbar \frac{\partial}{\partial ct} \\ \hat{p}_i &= -\hat{p}^i = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}\end{aligned}\tag{3.4.14}$$

als Viererimpulsoperatoren für freie Teilchen.

Die zur Schrödingergleichung analoge Gleichung muss eine skalare Wellenfunktion besitzen. Da $p^\mu p_\mu$ schon ein Lorentzskalar ist, ist die Klein-Gordon-Gleichung

$$\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \Psi = -\hbar^2 \square \Psi = m^2 c^2 \Psi\tag{3.4.15}$$

die einzige Möglichkeit eine skalare Wellenfunktion mit der korrekten Energie-Impuls-Beziehung zu definieren. Da diese Gleichung jedoch quadratisch in \hat{H} (durch $\hat{p}_0 \hat{p}^0$) ist, existiert zwangsläufig für jede Lösung mit positiver Energie E auch eine Lösung mit negativer Energie $-E$. Zudem existiert noch ein weiteres Problem bei der Interpretation dieser Gleichung als korrekte Einteilchengleichung. Die komplex konjugierte Wellenfunktion Ψ^* erfüllt die Gleichung ebenfalls, sodass wir mittels

$$\Psi^* \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \Psi - \Psi \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \Psi^* = 0\tag{3.4.16}$$

eine Kontinuitätsgleichung herleiten können, die besagt, dass die Divergenz der Viererstromdichte $\nabla_\mu j^\mu$

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla^\mu \Psi - \Psi \nabla^\mu \Psi^*) \quad (3.4.17)$$

verschwindet (siehe [30, Kapitel 1.2]). Die daraus resultierende Dichte

$$\rho = j_0 = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) \quad (3.4.18)$$

ist jedoch nicht die schon bekannte skalare Wahrscheinlichkeitsdichte $\Psi^* \Psi$ und lässt sich auch nicht als eine solche interpretieren, da sie durch das Auftreten der ersten Ableitung nicht positiv definit ist. Folglich können wir uns im Allgemeinen nicht sicher sein, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo im Raum zu finden, erhalten ist, es sei denn das Teilchen befindet sich in einem Eigenzustand des \hat{p}_0 bzw. Hamiltonoperators. Denn dann gilt

$$\rho = \frac{1}{2mc^2} (\Psi^* E \Psi - \Psi (-E) \Psi^*) = \frac{E}{mc^2} \Psi^* \Psi \quad (3.4.19)$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte ist erhalten. Interessant ist, dass der nichtrelativistische Grenzfall der Gleichung dennoch die Schrödingergleichung ist, bei der ein solch problematisches Verhalten nicht auftritt [30, Kapitel 1.3].

Versuchen wir eine Gleichung zu finden, für die dieses Problem nicht auftritt, dann benötigen wir eine lineare Gleichung in der Zeitableitung bzw. \hat{p}_0 . Aufgrund der Symmetrie zwischen Raum und Zeit in der SRT liegt es nahe, dass unsere gesuchte Gleichung ebenfalls linear im räumlichen Impuls sein sollte. Dadurch ist eine skalare Lösung des Problems unmöglich, da wir in (3.4.15) die Zeitableitung abtrennen und gleich einer Wurzel eines Operators setzen müssten. Dies führt jedoch zu allen möglichen natürlichen Ordnungen des Impulses.

Unsere Diskussion des inneren Drehimpulses im Kapitel 3.3 hat gezeigt, dass gewisse Symmetrien bzw. Eigenschaften eines Teilchens dazu führen, dass die Wellenfunktion

mehrdimensional wird. Aufgrund dessen nehmen wir im Weiteren an, dass unsere Wellenfunktion ein n -dimensionaler Vektor ist. Zudem wählen wir den Ansatz

$$(\hat{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu - mc) \Psi = 0 \quad , \quad (3.4.20)$$

wobei $\hat{\gamma}^\mu$ lineare vom Impuls unabhängige Abbildungen sein müssen, um unsere obigen Forderungen zu erfüllen. Folglich können wir diese Terme als Matrizen ausdrücken und diese können immer so gewählt werden, dass der mc Term proportional zur Einheitsmatrix ist, wie es in unserem Ansatz gefordert wurde.

Die relativistische Energie-Impuls-Beziehung muss weiterhin erfüllt sein, sodass die Klein-Gordon-Gleichung für die mehrdimensionale Wellenfunktion ebenfalls gilt und wir dadurch die Möglichkeiten der Wahl der γ -Matrizen einschränken können (hier für $m \neq 0$):

$$m^2 c^2 \Psi = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi = \hat{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{p}_\nu \Psi \quad . \quad (3.4.21)$$

Zumindest solange das Teilchen nicht wechselwirkt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die $\hat{\gamma}^\mu$ -Matrizen ortsunabhängig sind und somit mit den Impulsoperatoren vertauschen (von daher lassen wir ab sofort $\hat{\cdot}$ weg). Wir erhalten folglich

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi = \frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \Psi \quad (3.4.22)$$

und dementsprechend die Einschränkung

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbf{1} \quad , \quad (3.4.23)$$

dass der obig definierte Antikommutator zweier γ -Matrizen gerade das Doppelte des entsprechenden Metrikoeffizients der Minkowskimetrik multipliziert mit der Einheitsmatrix ist. Zudem müssen die γ -Matrizen spurfrei sein und es muss

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} &= -\gamma^i \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

gelten (siehe [30, Kapitel 2,3]). Dementsprechend sind die möglichen Eigenwerte der γ^0 -Matrix ± 1 und die der γ^i -Matrizen $\pm i$. Zudem können die Matrizen nur dann spurfrei sein, falls die gleiche Anzahl positiver und negativer Eigenwerte auftritt, sodass die Dimensionsanzahl gerade sein muss. Eine weitere äußerst interessante Schlussfolgerung ist, dass alle Matrizen, die die Voraussetzungen für γ^0 erfüllen, und alle räumlichen γ -Matrizen durch unitäre Transformationen auseinander hervorgehen. Dies lässt sich recht einfach beweisen. Da sowohl hermitesche als auch antihermitesche Matrizen diagonalisierbar sind, können wir jede solche Matrix mittels einer invertierbaren Matrix P diagonalisieren

$$\gamma_{diag}^\mu = P^{-1} \gamma^\mu P \quad . \quad (3.4.25)$$

Es handelt sich dabei um eine unitäre Matrix, da

$$\gamma_{diag}^{\mu\dagger} = P^\dagger \gamma^{\mu\dagger} P^{-1\dagger} = \eta^{\mu\mu} \gamma_{diag}^\mu = \eta^{\mu\mu} P^{-1} \gamma^\mu P \quad (3.4.26)$$

ist und da die Eigenwerte aller möglichen räumlichen γ^i und aller zeitlichen γ^0 dieselben sein müssen, folgt dass die Diagonalform für diese Matrizen bis auf die Reihenfolge der Eigenwerte gleich sein muss. Die Eigenwerte können jedoch durch unitäre Transformationen vertauscht werden, sodass wir nur eine hermitesche und eine antihermitesche Matrix benötigen und daraus alle anderen bestimmen können, wobei wir noch beachten müssen, dass die Antikommutationsrelation (3.4.23) erfüllt ist. Da unsere physikalischen Größen jedoch unter unitären Transformationen unverändert bleiben, können wir den Satz der γ -Matrizen frei wählen und müssen ihn unter Lorentztransformationen nicht mehr ändern.

Es bleibt also zu zeigen, dass es möglich ist, eine Transformationsvorschrift der Wellenfunktion in (3.4.20) zu finden, sodass die Gleichung lorentzkovariant ist. Da dies recht aufwändig ist, begnügen wir uns hier mit dem Beweis für eigentliche Lorentztransformationen (orthochrone Lorentzgruppe) und verweisen für den Rest auf die Literatur ([30, Kapitel 4 und 12]).

Die Lorentzgruppe ist die Gruppe L aller reellen 4x4-Matrizen, die die Bedingung

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (3.4.27)$$

erfüllen. Folglich ist die Determinante der Lorentztransformationen ± 1 , da

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det(\Lambda^T) \det(\eta) \det(\Lambda) = \det(\eta) \det(\Lambda)^2 = \det(\eta) \quad (3.4.28)$$

gilt. Um die zugehörige Lie-Algebra zu bestimmen (für die gruppentheoretischen Grundlagen siehe [36, Kapitel 8.5f]), betrachten wir zuerst die infinitesimalen Transformationen der Lorentzgruppe in der Einheitsmatrix, da jede Matrix A der Lie-Algebra eine solche generiert. Für eine infinitesimale reelle Verschiebung der Einheitsmatrix um $\epsilon > 0$ in Richtung A muss die resultierende Matrix in der Gruppe liegen. Folglich gilt

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + A^T \epsilon) \eta (\mathbb{1} + A \epsilon) &\approx \eta + (A^T \eta + \eta A) \epsilon = \eta \\ \Rightarrow A^T \eta + \eta A &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Gleichzeitig müssen alle Matrizen A, für die e^{At} eine Einparameteruntergruppe der Lorentzgruppe ist, in der Lie-Algebra liegen. Da dies jedoch für alle Matrizen gilt, die (3.4.29) erfüllen

$$\begin{aligned} e^{A^T t} \eta e^{At} &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} (A^T)^n \eta A^m t^{n+m} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} (-1)^n \eta A^{n+m} t^{n+m} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} \frac{1}{(k-n)!} (-1)^n A^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \eta A^k t^k \left[\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-1)^n \right] \\ &= \frac{1}{0!} \eta A^0 t^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \eta A^k t^k [0] = \eta \quad , \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

definiert (3.4.29) die Lie-Algebra.

Bilden wir die Determinante der Lorentztransformationen $\Lambda = e^{At_0}$ zeigt sich

$$\det(\Lambda) = e^{tr(A)t_0} = \pm 1 \quad , \quad (3.4.31)$$

dass wir auf diese Art und Weise leider nicht alle Transformationen darstellen können, denn daraus folgt

$$tr(A) = \frac{\pi}{t_0} in \quad (3.4.32)$$

und für $n \neq 0$ sind die Matrizen e^{At_1} für $t_1 \neq m \frac{t_0}{n}$ keine Lorentztransformationen. Dies lässt sich auch daran sehen, dass (3.4.29) die allgemeine Form für A als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.33)$$

festlegt.

Da die Lorentzgruppe jedoch mit Hilfe der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe L_+^\uparrow , der Raumspiegelung P und der Zeitumkehr T in vier zusammenhängende Stücke zerlegt werden kann

$$L = L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow \cup TL_+^\uparrow \cup PTL_+^\uparrow \quad , \quad (3.4.34)$$

und sowohl die Raumspiegelung als auch die Zeitumkehr mit allen Elementen aus L_+^\uparrow kommutieren, reicht es die Transformation der Wellengleichung für alle Elemente aus L_+^\uparrow , P und T zu kennen, um alle Lorentztransformationen durchführen zu können. Da P und T die Determinante -1 haben, können wir diese nicht durch Betrachtung der Lie-Algebra gewinnen. Weiterhin ist das Produkt $PT = -\mathbb{1}$, sodass die Matrizen, die (3.4.29) erfüllen gerade L_+^\uparrow erzeugen.

Es ist aus (3.4.29) ersichtlich, dass die Elemente der Lie-Algebra eine Gruppe bezüglich der Addition bilden, und (3.4.33) zeigt, dass es 6 linear unabhängige Matrizen gibt.

Wählen wir also die Matrizen

$$\begin{aligned}
L_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & L_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & L_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.35)
\end{aligned}$$

als Basis. Bei L_i handelt es sich gerade um die Erzeugenden einer Raumdrehung um zueinander orthogonale Achsen und die K_i -Matrizen generieren Boosts in die jeweilige Richtung.

Betrachten wir die Wellengleichung für zwei unterschiedliche durch Lorentztransformationen ineinander überführbare Beobachter. Da die Gleichung forminvariant sein muss, gilt

$$\begin{aligned}
(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc) \Psi(x) &= 0 \\
(\gamma^\mu \hat{p}'_\mu - mc) \Psi(x') &= 0 \quad , \quad (3.4.36)
\end{aligned}$$

sofern $\Psi(x)$ die Wellenfunktion eines Beobachters und $\Psi(x')$ die Wellenfunktion des anderen ist. Zudem muss ein Paar linearer Operatoren $\hat{S}(\Lambda)$ und $\hat{S}^{-1}(\Lambda)$ existieren, die die beiden Wellenfunktionen ineinander überführen

$$\begin{aligned}
\Psi(x') &= \hat{S}(\Lambda) \Psi(x) \\
\Psi(x) &= \hat{S}^{-1}(\Lambda) \Psi(x') \quad , \quad (3.4.37)
\end{aligned}$$

da die Gruppe der Lorentztransformationen im Raum des Ψ -Vektors isomorph zur Lorentzgruppe der 4x4-Matrizen sein muss. Weiterhin handelt es sich bei den Impulsen p'_μ ,

um kontravariante Komponenten eines Vektors, sodass wir die zweite Gleichung umschreiben können

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma^\mu \hat{p}'_\mu - mc) \Psi(x') = (\gamma^\mu \Lambda_\mu^\alpha \hat{p}_\alpha - mc) \hat{S}(\Lambda) \Psi(x) \\ 0 &= (\hat{S}^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \hat{S}(\Lambda) \Lambda_\mu^\alpha \hat{p}_\alpha - mc) \Psi(x) \quad , \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Transformation und der Impulsoperator vertauschen (siehe Diskussion bei den Drehimpulsen in 3.3) und $\hat{S}^{-1}(\Lambda) \hat{S}(\Lambda) = \mathbb{1}$ gilt. Vergleichen wir (3.4.38) mit der oberen Gleichung von (3.4.37), erhalten wir

$$\hat{S}^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu \hat{S}(\Lambda) \Lambda_\mu^\alpha = \gamma^\alpha \quad (3.4.39)$$

oder alternativ

$$\hat{S}^{-1}(\Lambda) \gamma^\nu \hat{S}(\Lambda) = \Lambda^\nu_\alpha \gamma^\alpha \quad . \quad (3.4.40)$$

Betrachten wir Lorentztransformationen aus der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe, dann können wir die Transformationsmatrix Λ als

$$\Lambda = e^{At_0} \quad (3.4.41)$$

schreiben, wobei A in der zugehörigen Lie-Algebra liegt. Daraus folgt, dass es für die Transformation $\hat{S}(\Lambda)$ eine Matrix σ geben muss, für die

$$\hat{S}(\Lambda) = e^{\sigma t_0} \quad (3.4.42)$$

gilt, wobei σ das Bild von A unter einem Gruppenhomomorphismus sein muss. Folglich reicht es, die Bilder der Basis (3.4.35) zu bestimmen, um $\hat{S}(\Lambda)$ einer beliebigen eigentlichen orthochronen Lorentztransformationen zu berechnen. Dabei können wir uns auf die Betrachtung infinitesimaler Transformationen beschränken, da der Gruppenhomomorphismus die Struktur der Gruppe erhält und wir in (3.4.29) und (3.4.30) im Ortsraum gezeigt haben, dass alle infinitesimal tangentialen Matrizen auch Elemente der Lie-Algebra sind.

Wir wählen also $t_0 = \epsilon$, entwickeln $\hat{S}(\Lambda)$ und Λ in erster Ordnung und setzen das Ergebnis in (3.4.40) ein. Wir erhalten

$$\gamma^\nu - \sigma \gamma^\nu \epsilon + \gamma^\nu \sigma \epsilon = \gamma^\nu + A^\nu{}_\alpha \gamma^\alpha \epsilon \quad (3.4.43)$$

und folglich

$$[\gamma^\nu, \sigma] = A^\nu{}_\alpha \gamma^\alpha \quad . \quad (3.4.44)$$

Der Lorentzgruppe übergeordnet sind alle reellen 4x4-Matrizen, die sich mit Hilfe von 16 Basisfunktionen schreiben lassen. Die γ -Matrizen wirken auf den Raum des Ψ -Vektors und lassen sich zu 16 linear unabhängigen Matrizen kombinieren ($\mathbf{1}$, γ^μ , $\gamma^\mu \gamma^\nu$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha$, $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$, wobei beim Auftreten mehrerer Indizes alle unterschiedlich sein müssen). Folglich bilden diese eine Basis der Abbildung des 4x4-Raumes und von daher muss es möglich sein, die Matrix σ in diese zu entwickeln. Da der Kommutator $[\gamma^\nu, \sigma]$ nur lineare Terme der γ^μ beinhaltet und Erzeugenden A der Lorentztransformationen Λ die Form (3.4.33) besitzen, können wir die Matrizen wie folgt ansetzen

$$\sigma = a_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \quad , \quad (3.4.45)$$

wobei

$$a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha} \quad (3.4.46)$$

erfüllt sein muss. Eingesetzt ergibt sich dann

$$[\gamma^\nu, \sigma] = a_{\alpha\beta} (\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta - \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\nu) = 2a_{\alpha\beta} (\eta^{\nu\alpha} \gamma^\beta - \eta^{\nu\beta} \gamma^\alpha) = A^\nu{}_\mu \gamma^\mu \quad . \quad (3.4.47)$$

Vergleichen wir dies mit der obigen Basis, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma_{L_1} &= \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma^3 & \sigma_{L_2} &= \frac{1}{2} \gamma^1 \gamma^3 & \sigma_{L_3} &= \frac{1}{2} \gamma^1 \gamma^2 \\ \sigma_{K_1} &= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^1 & \sigma_{K_2} &= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^2 & \sigma_{K_3} &= \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^3 \end{aligned} \quad (3.4.48)$$

und somit ist (3.4.20) eine korrekte relativistische Wellenfunktion bezüglich der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe, wenn für eine räumliche Transformation

$$x' = e^{At}x$$

$$A = \sum_{i=1}^3 a_i L_i + b_i K_i \quad (3.4.49)$$

der Zusammenhang der Wellenfunktion durch

$$\Psi'(x') = e^{\sigma t} \Psi(x)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_{L_i} + b_i \sigma_{K_i} \quad (3.4.50)$$

gegeben ist.

Eine allgemeine gruppentheoretische Herleitung der möglichen Wellengleichungen ist in [40, Kapitel 8f],[41, Kapitel 2] und [42, Kapitel 2f] zu finden (diese sollte verwendet werden, wenn uns alle möglichen Gleichungen interessieren, da sie die Gleichungen für masselose Teilchen beinhaltet).

Die kleinstmögliche Dimension für unsere obige Gleichung (3.4.20) ist 4, da aufgrund der 16 linear unabhängigen Möglichkeiten die γ -Matrizen zu kombinieren auch 2 komplexe Dimensionen nicht ausreichen und die Zahl der Dimensionen gerade sein muss

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc) \Psi = 0$$

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T \quad (3.4.51)$$

Diese Gleichung wird Dirac-Gleichung genannt und wir wählen die γ -Matrizen wie

folgt

$$\begin{aligned}
 \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.4.52}$$

oder auch in Blockgestalt

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.4.53}$$

mit den Paulimatrizen

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .
 \end{aligned} \tag{3.4.54}$$

Diese Gleichung hat die erwünschte erhaltene Wahrscheinlichkeitsdichte, aber die Betrachtung der freien Lösungen zeigt, dass weiterhin negative Energien auftreten. Weiterhin folgt im nichtrelativistischen Grenzfall die Pauli-Gleichung [30, Kapitel 2,3.5], sodass das Teilchen einen Spin $\frac{1}{2}$ haben muss und die Gleichung beispielsweise Elektronen beschreibt.

Unsere Schwierigkeiten, die Dirac-Gleichung und die Klein-Gordon-Gleichung als Einpartikelwellengleichung zu interpretieren, lassen sich anschaulich verstehen, wenn man bedenkt, dass Paarerzeugung möglich ist. Befindet sich im System ausreichend Energie

oder schwankt die Energie stark genug ($E > 2mc^2$ oder $\Delta E > 2mc^2$) können wir unmöglich davon ausgehen, dass wir immer nur ein Teilchen betrachten. Verlangen wir, dass das nicht der Fall ist, schränken wir damit jedoch die Ortsmessung ein, da der Zusammenhang von Energie und Impuls dazu führt, dass wir den Impuls und dessen Schwankungen ebenfalls begrenzen müssen und eine obere Grenze der Schwankungen des Impulses über die Heisenbergsche Unschärferelation (der Sonderfall für x und p von (3.1.8)) auf eine minimale Ortsunsicherheit führt. Folglich erhalten wir auch Interpretationsprobleme, sobald wir eine zu genaue Ortsmessung durchführen. Wir wollen diese Überlegungen hier jedoch nicht behandeln und verweisen auf die Literatur. Diverse auftretende Inkonsistenzen der Einteilcheninterpretation werden in [30, 40, 41, 42] besprochen, wobei insbesondere Thaller eine sehr umfangreiche Diskussion durchführt [42, Kapitel 1].

Die Auflösung dieser Interpretationsproblematik ist die Erkenntnis, dass die Wellenfunktion und alle auftretenden Felder quantisiert werden müssen (siehe beispielsweise [1]). Da wir in dieser Arbeit jedoch gravitative Probleme behandeln und die Quantisierung des gravitativen Feldes bislang nicht gelungen ist, werden wir die Klein-Gordon-Gleichung und die Dirac-Gleichung zum Berechnen von Näherungslösungen für gebundene Systeme verwenden (dieser Ansatz wird auch für die anderen Wechselwirkungen verwendet, da die Lösung der quantenfeldtheoretischen Lagrangegleichungen deutlich aufwändiger ist, beispielsweise [43, 44, 45, 46]). Wie wir für die Klein-Gordon-Gleichung gesehen haben, wiegen die Probleme der Einteilcheninterpretation für gebundene Lösungen (Eigenfunktionen des Hamiltonoperators) weniger schwer und wir erlauben uns im Weiteren dennoch von einzelnen Teilchen beziehungsweise einem Teilchen in einem gravitativen Hintergrundfeld zu sprechen.

4. Quantenmechanik in gekrümmten Räumen

In diesem Kapitel kombinieren wir die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel. Zuerst leiten wir die allgemein-relativistische Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung her, dann besprechen wir die angewandten Lösungsverfahren und die daraus resultierenden Ergebnisse der beiden Gleichungen für Systeme, deren gravitatives Hintergrundfeld von einer dominierenden Zentralmasse erzeugt wird (beispielsweise Sterne). Dabei ist das Ziel grundsätzliche (qualitative) Unterschiede zwischen der ART und der pk-ART zu identifizieren. Da wir dafür kein realistisches inneres Metrikmodell (Sternmodell) benötigen, sehen wir davon ab, Zustandsgleichungen aufzustellen und damit die TOV-Gleichung zu lösen. Stattdessen berechnen wir die Ergebnisse für drei unterschiedliche Spielzeugmodelle der Metrik.

Als Modell 1 bezeichnen wir das neue pk-ART Modell, für das die Gesamtdichte im Inneren der Massenverteilung als konstant angenommen wird. Zudem setzen wir g_{00} als eine Exponentialfunktion an, sodass wir einen anisotropen Druck erhalten, wie in Anhang A gezeigt wird. Für den Außenraum des Modells wird die innere Metrik stetig mit der

pk-ART Außenmetrik (2.3.24) verbunden. Somit ergibt sich insgesamt die Metrik

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}\right) e^{\frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{2(r_0^5 - r_s r_0^4 + \frac{B}{2}r_0^2)}} (r^2 - r_0^2) c^2 dt^2 \\
&\quad - \frac{1}{1 - \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5}\right) r^2} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad r \leq r_0 \\
ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad r > r_0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.0.1}$$

Modell 2 und 3 wurden aus [47, Kapitel 21.1] (bzw. [48]) übernommen und dienen einerseits zum Test des Programms zur Lösung der Dirac-Gleichung und andererseits zur Darstellung des Verhaltens gebundener Zustände in der ART. Somit ist die Außenmetrik für beide Modelle die ART-Schwarzschildmetrik (2.3.23), aber die innere Metrik wird unterschiedlich angesetzt.

Für Modell 2 nutzen wir die Metrik einer konstanten Massendichte mit isotropem Druck (2.3.25), sofern der Radius des Sterns größer als das 1,2-fache des Schwarzschildradius ist ($r_0 > \frac{6}{5}r_s$). Für kleinere Werte wird dagegen ebenfalls ein exponentieller Ansatz durchgeführt, da das isotrope Modell für $r_0 \leq \frac{9}{8}r_s$ zusammenbricht (siehe Anhang A) und das isotrope und das exponentielle Modell für $r_0 \approx \frac{6}{5}r_s$ das gleiche Minimum des effektiven Potentials besitzen (das heißt $e^\nu(0)$ stimmt überein). Somit folgt

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) e^{\frac{r^2 - r_0^2}{2r_0^2\left(\frac{r_0}{r_s} - 1\right)}} c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad r \leq r_0, \quad r_0 \leq \frac{6}{5}r_s \\
ds^2 &= \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad r \leq r_0, \quad r_0 > \frac{6}{5}r_s \\
ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) \quad r > r_0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.0.2}$$

Modell 3 ist die Metrik einer Massenschale bei $r = r_0$. Die innere Metrik ist konstant, da der Raum für $r < r_0$ materiefrei ist. Dies führt dazu, dass e^λ an der Stelle $r = r_0$

unstetig ist, da nach der Einstein-Gleichung (2.3.22) $e^\lambda(0) = 1$ und somit $\lim_{r \rightarrow r_0^-} e^\lambda = 1$ gilt und dies nicht mit der Schwarzschildmetrik (2.3.23) vereinbar ist. Die zugehörigen Linienelemente sind

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) & r < r_0 \\ ds^2 &= \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2) & r > r_0 \end{aligned} \quad (4.0.3)$$

4.1. Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung in gekrümmten Räumen

Im Folgenden leiten wir die Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung im gekrümmten Raum her, indem wir die in den Gleichungen vorkommenden Operatoren für den gekrümmten Raum verallgemeinern. Dabei kann ein tieferes Verständnis der mathematischen Zusammenhänge dieses Unterkapitels und des vorherigen Kapitels mit Hilfe des Tetradenformalismus (siehe beispielsweise [18, 19, 48, 49]) gewonnen werden.

Betrachten wir zuerst den Impulsoperator. Dieser ist im flachen Raum in kartesischen Koordinaten proportional zum Nablaoperator und sein verjüngtes Produkt mit einem Vektorfeld $p_\mu \xi^\mu$ ist proportional zur Divergenz des Vektorfeldes. Da die Gleichungen der ART (und auch pk-ART) forminvariant unter Koordinatentransformationen sein müssen, ist dieser Zusammenhang auch für allgemeine Koordinaten gültig. Folglich muss der Impulsoperator für ein Vektorfeld proportional zur kovarianten Ableitung sein, da mit dieser die Divergenz im gekrümmten Raum gebildet wird [5, Kapitel 3.2]. Analog erhalten wir diesen Zusammenhang für beliebige Tensorfelder, sodass wir den Impulsoperator im Ortsraum als

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar D_\mu \quad (4.1.1)$$

identifizieren.

Da die Wellenfunktion der Klein-Gordon-Gleichung ein Skalar ist, können wir daraus direkt die verallgemeinerte Klein-Gordon-Gleichung für gekrümmte Räume herleiten

$$\begin{aligned}\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \Psi &= -\hbar^2 D_\mu D^\mu \Psi = -\hbar^2 D_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi \\ &= -\hbar^2 \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \Psi - \hbar^2 \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} g^{\lambda\nu} \partial_\lambda \Psi = m^2 c^2 \Psi \quad ,\end{aligned}\quad (4.1.2)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der erste Impulsoperator auf die skalare Wellenfunktion und der zweite Operator auf den daraus resultierenden Gradientenvektor wirkt. Mittels der Relation [5, Gleichung 3.11]

$$\left\{ \begin{matrix} \mu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \partial_\lambda \ln \left(\sqrt{|g|} \right) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \sqrt{|g|} \quad (4.1.3)$$

erhalten wir daraus die in Lehrbüchern übliche Form der Klein-Gordon-Gleichung (siehe beispielsweise [18])

$$\begin{aligned}-\hbar^2 \left(\partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}} g^{\lambda\nu} (\partial_\lambda \sqrt{-g}) \partial_\nu \right) \Psi &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right) \Psi \\ &= -\hbar^2 \square \Psi = m_0^2 c^2 \Psi \quad .\end{aligned}\quad (4.1.4)$$

Die Herleitung der Dirac-Gleichung für gekrümmte Räume ist komplizierter, denn wir benötigen zusätzlich das Transformationsverhalten der γ -Matrizen unter beliebigen Koordinatentransformationen und wir müssen die kovariante Ableitung des Spinors bestimmen. Beginnen wir also damit, das Transformationsverhalten der γ -Matrizen durch Wiederholung der Schritte in Kapitel 3 herzuleiten. Wir starten mit der Dirac-Gleichung

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu \Psi = mc \Psi \quad (4.1.5)$$

und multiplizieren sie mit mc :

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu mc \Psi = \hat{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{p}_\nu \Psi = m^2 c^2 \Psi \quad . \quad (4.1.6)$$

Im vorherigen Kapitel haben wir gezeigt, dass wir die γ -Matrizen im flachen Raum für Lorentztransformationen nicht ändern müssen. Es liegt von daher nahe anzunehmen, dass ihre Ortsabhängigkeit nur von der Metrik abhängt, sodass sie mit dem Impuls vertauschen, da die kovariante Ableitung der Metrikterme immer 0 ist. Damit folgt

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{p}_\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{p}_\nu \Psi = \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \Psi = \frac{\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu + \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}^\mu}{2} \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu \Psi \quad . \quad (4.1.7)$$

Da die Dirac-Gleichung weiterhin die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllt, verallgemeinert sich damit (3.4.23) zu

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \hat{\mathbb{1}} \quad . \quad (4.1.8)$$

Führen wir eine analoge Betrachtung der Hermitizität von \hat{p}_0 wie in [30, Kapitel 2] für die γ -Matrizen im gekrümmten Raum durch, folgt daraus, dass γ^0 weiterhin hermitesch sein muss, aber die γ^i -Matrizen nicht mehr antihermitesch sind. Vielmehr gilt

$$(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i + 2\frac{g^{0i}}{g^{00}} \hat{\mathbb{1}} \quad . \quad (4.1.9)$$

Diese Bedingungen können wir erfüllen, indem wir die γ -Matrizen des flachen Raums $\tilde{\gamma}^\mu$ als Basis der neuen Matrizen nutzen. Wir erhalten

$$\gamma^0 = \sqrt{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 \quad (4.1.10)$$

$$\gamma^i = \frac{g^{0i}}{g^{00}} \tilde{\gamma}^0 + a^i{}_j \tilde{\gamma}^j \quad , \quad (4.1.11)$$

wobei wir noch drei Freiheitsgrade besitzen und verlangen können, dass $a^1{}_2 = a^1{}_3 = a^2{}_3 = 0$ sind. Wir wollen die restlichen $a^i{}_j$ jedoch nicht allgemein bestimmen, da es uns im Rahmen dieser Arbeit reicht zu wissen, dass sie Funktionen der Metrikterme sind, und die genaue Form für sphärisch symmetrische Metriken herzuleiten.

In [30, Kapitel 5] wird gezeigt, dass wir mittels bilinearer Formen von Spinoren verschiedene Tensorfelder generieren können, mit deren Hilfe wir im Weiteren die kovariante

Ableitung der Spinoren herleiten. Die Größe $\bar{\Psi}\Psi$ ist ein Skalarfeld (siehe [30, Kapitel 5]). Von daher gilt für die kovariante Ableitung

$$D_\mu (\bar{\Psi}\Psi) = \partial_\mu (\bar{\Psi}\Psi) = (D_\mu \bar{\Psi}) \Psi + \bar{\Psi} (D_\mu \Psi) \quad . \quad (4.1.12)$$

Wie schon für Tensoren fordern wir, dass die Parallelverschiebung linear vom Spinor abhängt und wir folglich die kovariante Ableitung des Spinors als

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \Gamma_\mu \Psi \quad (4.1.13)$$

mit einer noch unbekanntenen Matrix Γ_μ schreiben können. Analog folgt für den adjungierten Spinor

$$D_\mu \bar{\Psi} = \partial_\mu \bar{\Psi} + \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}_\mu \quad (4.1.14)$$

und somit ergibt sich der Zusammenhang der beiden Verschiebungsmatrizen durch Einsetzen in (4.1.12)

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\bar{\Psi}\Psi) &= (\partial_\mu \bar{\Psi}) \Psi + \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}_\mu \Psi + \bar{\Psi} (\partial_\mu \Psi) + \bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi \\ \Rightarrow 0 &= \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}_\mu \Psi + \bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi \\ \Rightarrow \tilde{\Gamma}_\mu &= -\Gamma_\mu \quad . \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Weiterhin ist $\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi$ ein Vektorfeld mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) = \partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \bar{\Psi}\gamma^\beta\Psi \quad . \quad (4.1.16)$$

Da die Ortsabhängigkeit der γ -Matrizen allein durch die Metrikerterme gegeben ist, verschwindet ihre kovariante Ableitung. Somit erhalten wir daraus die Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \bar{\Psi}\gamma^\beta\Psi &= D_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) \\ &= -\bar{\Psi}\Gamma_\mu\gamma^\alpha\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\alpha\Gamma_\mu\Psi + \partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) - \bar{\Psi}(\partial_\mu\gamma^\alpha)\Psi \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

für eine beliebige Wellenfunktion Ψ . Somit gilt für die involvierten Matrizen

$$[\gamma^\alpha, \Gamma_\mu] = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu\gamma^\alpha \quad . \quad (4.1.18)$$

Analog zur Diskussion in Kapitel 3 zur Gleichung (3.4.45) können wir Γ_μ in die 16 unabhängigen Matrizen, die durch Produkte der γ -Matrizen gebildet werden können, entwickeln

$$\Gamma_\mu = a_\mu \hat{1} + b_{\mu\nu} \gamma^\nu + c_{\mu\nu\omega} \gamma^\nu \gamma^\omega + d_{\mu\nu\omega\lambda} \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda + e_\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad (4.1.19)$$

und alle Koeffizienten außer $c_{\mu\nu\omega} = -c_{\mu\omega\nu}$ auf 0 setzen, wie im Anhang B gezeigt wird.

Von daher nutzen wir den Ansatz

$$\Gamma_\mu = c_{\mu\nu\omega} \gamma^\nu \gamma^\omega \quad (4.1.20)$$

mit $c_{\mu\nu\omega} = -c_{\mu\omega\nu}$. Eingesetzt in (4.1.18) erhalten wir

$$2c_{\mu\nu\omega} (g^{\nu\alpha} \gamma^\omega - g^{\omega\alpha} \gamma^\nu) = 4c_{\mu\nu\omega} g^{\nu\alpha} \gamma^\omega = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \quad . \quad (4.1.21)$$

Entwickeln wir die γ -Matrizen wie in (4.1.11) mit dem allgemeinen Ansatz

$$\gamma^\mu = a^\mu_\nu \tilde{\gamma}^\nu \quad , \quad (4.1.22)$$

dann folgt daraus

$$4c_{\mu\nu\omega} g^{\nu\alpha} a^\omega_\rho \tilde{\gamma}^\rho = \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} a^\beta_\rho + \partial_\mu a^\alpha_\rho \right) \tilde{\gamma}^\rho \quad . \quad (4.1.23)$$

Die $\tilde{\gamma}^\rho$ sind linear unabhängig und somit ist

$$c_{\mu\eta\omega} a^\omega_\rho = \frac{1}{4} g_{\eta\alpha} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} a^\beta_\rho + \partial_\mu a^\alpha_\rho \right) \quad . \quad (4.1.24)$$

Eingesetzt in die affine Verbindung Γ_μ folgt daraus das Ergebnis

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= c_{\mu\eta\omega} \gamma^\eta \gamma^\omega = (c_{\mu\eta\omega} a^\omega_\rho) \gamma^\eta \tilde{\gamma}^\rho \\ &= \frac{1}{4} g_{\eta\alpha} \gamma^\eta \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} a^\beta_\rho + \partial_\mu a^\alpha_\rho \right) \tilde{\gamma}^\rho \\ &= \frac{1}{4} \gamma_\alpha \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \right) \quad , \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

das sich auch in Lehrbüchern wie [47, Kapitel 21.1] finden lässt.

Insgesamt lautet die verallgemeinerte Dirac-Gleichung im Ortsraum somit

$$\left\{ i\hbar \gamma^\mu \left[\partial_\mu + \frac{1}{4} \gamma_\alpha \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \right) \right] - mc \right\} \Psi = 0 \quad . \quad (4.1.26)$$

4.2. Auswertung der Klein-Gordon-Gleichung

In diesem Unterkapitel bestimmen wir die sphärisch symmetrischen gebundenen Zustände der Klein-Gordon-Gleichung für die beiden Metrikmodelle (4.0.1) und (4.0.2). Im ersten Schritt werden wir die Klein-Gordon-Gleichung (4.1.4) unter der Annahme dieser Symmetrie so weit wie möglich vereinfachen. Dafür betrachten wir das System schwarzschildartiger Koordinaten (2.3.3) und lösen die Gleichung soweit auf, dass nur noch die radiale Abhängigkeit der Wellenfunktion bestimmt werden muss. Danach werden wir die für die numerische Behandlung nötige Aufarbeitung der Gleichung für zwei unterschiedliche Lösungsverfahren nachvollziehen. Zum Abschluss diskutieren wir die erhaltenen Ergebnisse der beiden Metrikmodelle.

4.2.1. Sphärische Symmetrie

Um den in (4.1.4) auftretenden d'Alembert Operator zu vereinfachen, müssen wir die Determinante der Metrik g und die inverse Metrik $g^{\mu\nu}$ bestimmen. Durch die sphärische Symmetrie ist die Determinante der Metrik g das Produkt der Diagonalterme und es gilt

$$\sqrt{|g|} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \sin \vartheta \quad . \quad (4.2.1)$$

Zudem sind die Diagonalelemente der inversen Metrik in diesen Koordinaten gerade das Inverse der Elemente der Metrik

$$g^{\mu\mu} = -\frac{1}{g_{\mu\mu}} \quad (4.2.2)$$

und der Rest verschwindet. Folglich erhalten wir eingesetzt in die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(e^{-\nu} \partial_{ct}^2 - \frac{e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2} \partial_r e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 \partial_r - \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta \sin \vartheta \partial_\vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \right) \Psi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad . \quad (4.2.3)$$

Der Winkelanteil kann mittels des Drehimpulsoperators des flachen Raums (3.3.16) ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta \sin \vartheta \partial_\vartheta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \\
&= -\frac{1}{r^2} \left(\partial_\vartheta^2 + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \right) \\
&= \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

und folglich können wir erneut den Separationsansatz (3.3.22) verwenden. Wir erhalten somit

$$\left(-e^{-\nu} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2} \partial_r e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 \partial_r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \Psi = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \tag{4.2.5}$$

beziehungsweise durch Multiplizieren des Inversen des Zeit- und des Winkelanteils

$$\left(-e^{-\nu} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{e^{-\frac{\nu+\lambda}{2}}}{r^2} \partial_r e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} r^2 \partial_r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} R \quad . \tag{4.2.6}$$

Multiplizieren wir das aus und trennen die Terme nach ihrer Ableitungsordnung, ergibt sich

$$0 = -\frac{d^2 R}{dr^2} - \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \right) \frac{dR}{dr} + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} \right) e^\lambda R \quad , \tag{4.2.7}$$

wobei wir die partielle durch die totale Ableitung ersetzt haben, da R nur von der Radialkoordinate abhängt.

4.2.2. Umformung der Gleichungen zur numerischen Implementierung

In diesem Unterkapitel formen wir die Klein-Gordon-Gleichung auf zwei verschiedene Arten um, um diese anschließend numerisch zu implementieren. Bei der ersten Methode bilden wir die Bestimmung der Energieeigenwerte auf ein Eigenwertproblem einer Matrix

ab und lösen die Gleichung, indem wir die Matrix numerisch berechnen und anschließend diagonalisieren. Bei der zweiten Methode überführen wir die Klein-Gordon-Gleichung in ein Anfangswertproblem, das wir mit einem Runge-Kutta-Verfahren lösen können. Da dies zur Bestimmung der Energieeigenwerte jedoch nicht ausreicht, diskutieren wir zusätzlich den Zusammenhang zwischen der Zahl der Nulldurchgänge der Wellenfunktion und ihrer Energie.

Matrixverfahren

Im Folgenden formen wir die Klein-Gordon-Gleichung so um, dass wir die Form

$$\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} |\Psi\rangle = \hat{H}^2 |\Psi\rangle \quad (4.2.8)$$

erhalten. Danach überführen wir die Gleichung in die Form der einzelnen Zeilen der Eigenwertgleichung einer Matrix

$$E^2 \alpha_k = \sum_m \alpha_m \langle \Phi_k | \hat{H}^2 | \Phi_m \rangle \quad , \quad (4.2.9)$$

indem wir die Wellenfunktion

$$|\Psi\rangle = \sum_m \alpha_m |\Phi_m\rangle \quad (4.2.10)$$

in eine beliebige Basis entwickeln, eine $\hat{\mathbf{1}}$

$$\hat{\mathbf{1}} = \sum_n |\Phi_n\rangle \langle \Phi_n| \quad (4.2.11)$$

einfügen und mit $\langle \Phi_k |$ multiplizieren. Dann können wir aus (4.2.9) die Lösungen der Energie als Eigenwerte der Matrix H^2 gewinnen, wobei die Matrixelemente $H_{km}^2 = \langle \Phi_k | \hat{H}^2 | \Phi_m \rangle$ sind.

Wir isolieren zuerst die Energie und suchen zusätzlich nach einer Möglichkeit die Kinetik in die Minkowskiform zu bringen $\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right)$, da wir dann eine symmetrische Matrix

H^2 erhalten. Wir beginnen mit der umgestellten Gleichung

$$\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} R = -e^{\nu-\lambda} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \right) \frac{d}{dr} \right] R + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) e^\nu R \quad (4.2.12)$$

und setzen den Ansatz

$$R = g(r)\rho(r) \quad (4.2.13)$$

ein. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} g\rho = & -e^{\nu-\lambda} \left(g \frac{d^2}{dr^2} + \left(2 \frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} g + \frac{\nu' - \lambda'}{2} g \right) \frac{d}{dr} \right) \rho \\ & - e^{\nu-\lambda} \left(\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dg}{dr} + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \frac{dg}{dr} \right) \rho + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) e^\nu g\rho \quad . \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Geteilt durch g

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \rho = & -e^{\nu-\lambda} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{2}{g} \frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \right) \frac{d}{dr} \right) \rho \\ & - e^{\nu-\lambda} \left(\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{gr} \frac{dg}{dr} + \frac{\nu' - \lambda'}{2g} \frac{dg}{dr} \right) \rho + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) e^\nu \rho \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

und durch Einführen der Koordinate

$$d\bar{r} = \alpha dr \Leftrightarrow \frac{d}{dr} = \alpha \frac{d}{d\bar{r}} \quad (4.2.16)$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \rho = & -e^{\nu-\lambda} \left(\alpha^2 \frac{d^2 \rho}{d\bar{r}^2} + \frac{d\alpha}{dr} \frac{d\rho}{d\bar{r}} + \left(\frac{2}{g} \frac{dg}{dr} + \frac{2}{r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2} \right) \alpha \frac{d\rho}{d\bar{r}} \right) \\ & - e^{\nu-\lambda} \left(\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{2}{gr} \frac{dg}{dr} + \frac{\nu' - \lambda'}{2g} \frac{dg}{dr} \right) \rho + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) e^\nu \rho \quad , \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

wobei die Funktionen als $f(\bar{r}(r))$ (wir wechseln also nicht wirklich den Beobachter, sondern nutzen die neue Koordinate als Funktion von r) definiert sind. Wir fordern

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\bar{r}^2} &= e^{\nu-\lambda} \alpha^2 \frac{d^2 \rho}{d\bar{r}^2} \\ \frac{2}{\bar{r}} \frac{d\rho}{d\bar{r}} &= \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{dr} + \frac{2}{g\alpha} \frac{dg}{dr} + \frac{2}{\alpha r} + \frac{\nu' - \lambda'}{2\alpha} \right) \frac{d\rho}{d\bar{r}} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \\ g &= \frac{\bar{r}}{r} \quad .\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

Setzen wir dies ein, erhalten wir

$$\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \rho = - \left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) \rho + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} e^\nu + \frac{l(l+1)}{r^2} e^\nu + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} e^{\nu-\lambda} \right) \rho \quad .\tag{4.2.20}$$

Diese Form hat den Vorteil, dass die radialen Lösungen der Schrödingergleichung und der Klein-Gordon-Gleichung im flachen Raum Eigenfunktionen der Kinetik sind, sobald wir r durch \bar{r} ersetzen. Nutzen wir dann zur Auswertung der Gleichung noch das Skalarprodukt

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \int_0^\infty \Phi^*(\bar{r}) \Psi(\bar{r}) \bar{r}^2 d\bar{r}\tag{4.2.21}$$

sind diese auch orthonormal, sodass sie eine Orthonormalbasis bilden und wir das Problem auf die Eigenwertgleichung (4.2.9) zurückführen können. Es bleibt also die Matrix H^2 zu berechnen und zu diagonalisieren, wobei

$$\hat{H}^2 = - \left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}} \right) + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} e^\nu + \frac{l(l+1)}{r^2} e^\nu + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} e^{\nu-\lambda} \right)\tag{4.2.22}$$

gilt. Weiterhin können wir aufgrund der Ähnlichkeit zur dreidimensionalen Schrödingergleichung

$$V_{eff} = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} e^\nu + \frac{l(l+1)}{r^2} e^\nu + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} e^{\nu-\lambda}\tag{4.2.23}$$

als effektives Potential von ρ bezeichnen (wobei ρ keine Wahrscheinlichkeitsamplitude ist).

Nutzen wir die Lösungen der Schrödingergleichung des dreidimensionalen harmonischen Oszillators (3.3.24), dann sind unsere Basisfunktionen für ρ

$$\rho_{kl} = N_{kl} \bar{r}^l e^{-\gamma \bar{r}^2} L_k^{l+\frac{1}{2}}(2\gamma \bar{r}^2) \quad ,\tag{4.2.24}$$

deren Kinetik wir aus der Schrödingergleichung als

$$-\left(\frac{d^2}{d\bar{r}^2} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{d}{d\bar{r}}\right) \rho_{kl} = \left(-\frac{l(l+1)}{\bar{r}^2} - 4\gamma^2 \bar{r}^2 + 4\gamma\left(2k+l+\frac{3}{2}\right)\right) \rho_{kl} \quad (4.2.25)$$

ablesen können. Folglich wirkt der Operator

$$O(r, \bar{r}) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} e^\nu + \frac{l(l+1)}{r^2} e^\nu - \frac{l(l+1)}{\bar{r}^2} - 4\gamma^2 \bar{r}^2 + 4\gamma\left(2k+l+\frac{3}{2}\right) + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} e^{\nu-\lambda} \quad (4.2.26)$$

bezogen auf diese Basisfunktionen exakt wie \hat{H}^2 , sofern wir den Zusammenhang zwischen r und \bar{r} beachten. Dabei spielt es für die Berechnung der Skalarprodukte keine Rolle, ob wir r oder \bar{r} als unabhängige Variable ansehen. Jedoch ist die Wahl von r vorteilhaft, da

$$\bar{r} = \int_0^r e^{\frac{\lambda(x)-\nu(x)}{2}} dx \quad (4.2.27)$$

numerisch einfach zu berechnen ist, wohingegen wir analytisch keine Umkehrfunktion angeben können und somit die Berechnung von r für ein gegebenes \bar{r} deutlich aufwändiger ist. Folglich nutzen wir

$$O(r) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} e^\nu + \frac{l(l+1)}{r^2} e^\nu - \frac{l(l+1)}{\bar{r}^2(r)} - 4\gamma^2 \bar{r}^2(r) + 4\gamma\left(2k+l+\frac{3}{2}\right) + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} e^{\nu-\lambda} \quad (4.2.28)$$

und es gilt

$$H_{mk} = O_{mk} = \int_0^\infty \rho_{ml}(\bar{r}(r)) O(r) \rho_{kl}(\bar{r}(r)) \bar{r}^2(r) e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} dr \quad (4.2.29)$$

Die Integration über ein unendliches Intervall ist jedoch numerisch schwierig. Deshalb definieren wir die Variable x über

$$r = r_{sk} \tan(x) \quad , \quad (4.2.30)$$

wobei es sich bei r_{sk} um einen Skalierungsparameter handelt, den wir aus dimensionellen Gründen einführen müssen. Damit wird die unendliche obere Intervallgrenze auf den

Wert $\frac{\pi}{2}$ abgebildet und wir erhalten die Formel, die wir auch numerisch implementieren werden:

$$O_{mk} = r_{sk} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_{ml}(\bar{r}(x)) O(x) \rho_{kl}(\bar{r}(x)) \bar{r}^2(x) e^{\frac{\lambda(x)-\nu(x)}{2}} \left(1 + \frac{r^2(x)}{r_{sk}^2}\right) dx \quad . \quad (4.2.31)$$

Anfangswertproblem

Um die Energieeigenwerte der Klein-Gordon-Gleichung per Runge-Kutta-Verfahren zu lösen, benötigen wir einerseits die Lösung an einem Punkt für eine gegebene Energie und andererseits müssen wir ein Suchkriterium für die Energieeigenwerte erarbeiten.

Für die Herleitung des Startpunkts nähern wir (4.2.7) für kleine Radien, unter der Annahme, dass die Entwicklung der Metrikfunktionen im Zentrum endlich sind. Dann folgt daraus die Gleichung

$$0 \approx -\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{l(l+1)}{r^2} R \quad , \quad (4.2.32)$$

die allgemein durch

$$R = Ar^l + Br^{-l-1} \quad (4.2.33)$$

gelöst wird, wobei die Wellenfunktion nur für $B = 0$ normierbar ist. Der auftretende Fehler ist proportional zu r^l und konvergiert somit für $r \rightarrow 0$ gegen 0, solange $l \neq 0$ ist. Für $l = 0$ hingegen ist die Herleitung der Näherungslösung komplizierter, da wir für noch Terme höherer Ordnung beachten müssten. Wir können dieses Problem jedoch umgehen, indem wir R durch die Funktion $f(r) = rR(r)$ ersetzen. Die radiale Klein-Gordon-Gleichung ist dann

$$0 = -f'' - \frac{\nu' - \lambda'}{2} f' + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} f + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} \right) e^\lambda f \quad . \quad (4.2.34)$$

Setzen wir die Näherungslösung für kleine Radien $f = Ar^{l+1}$ ein, dann erhalten wir

$$0 = -\frac{\nu' - \lambda'}{2} l Ar^l + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} \right) Ar^{l+1} \quad . \quad (4.2.35)$$

Folglich konvergiert der Fehler der Differentialgleichung für $r \rightarrow 0$ für alle Drehimpulse gegen 0 und wir können die Näherungslösung verwenden.

Als nächstes überführen wir (4.2.34) in ein System aus zwei Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\begin{aligned} f' &= g \\ g' &= -\frac{\nu' - \lambda'}{2} g + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} f + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} \right) e^\lambda f \quad , \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

das wir numerisch mittels Runge-Kutta-Verfahren oder alternativ per Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren (Beschreibung der Verfahren siehe Anhang C.1) lösen. Dabei verwenden wir die Startwerte für r_0

$$\begin{pmatrix} f(r_0) \\ g(r_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ar_0^{l+1} \\ A(l+1)r_0^l \end{pmatrix} \quad , \quad (4.2.37)$$

wobei r_0 hinreichend klein gewählt werden muss. Für $l \neq 0$ bedeutet das

$$r_0^2 \ll \frac{l(l+1)}{\left| \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu(r_0)} \right|} \quad . \quad (4.2.38)$$

Dagegen ist die Abschätzung von für $l = 0$ von der Metrik abhängig. Verschwindet $\nu'(0) - \lambda'(0)$ nicht, dann gilt

$$\left| \frac{\nu'(r_0) - \lambda'(r_0)}{2r_0} \right| \gg \left| \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu(r_0)} \right| e^{\lambda(r_0)} \quad . \quad (4.2.39)$$

Ansonsten gilt in führender Ordnung

$$\begin{aligned} e^{-\nu} &\approx \frac{1}{\alpha} - \beta r^2 \\ e^\lambda &\approx 1 + \gamma r^2 \\ \nu' &\approx 2\alpha\beta r \\ \lambda' &\approx 2\gamma r \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

und wir erhalten die genäherte Differentialgleichung

$$0 \approx -f'' + \left(\alpha\beta - \gamma + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \alpha} \right) f \quad , \quad (4.2.41)$$

die von

$$\begin{aligned} f &= A e^{ar} + B e^{-ar} \\ a &= \left(\alpha\beta - \gamma + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

allgemein gelöst wird. Dies ist für kleine Radien genau dann proportional zu r , wenn wir $B = -A$ setzen. Somit muss für den Startwert $r_0 \ll a$ gelten.

Jetzt fehlt uns noch eine Methode, mit deren Hilfe wir die gebundenen Zustände finden können. Nähern wir dafür zuerst die Klein-Gordon-Gleichung (4.2.34) für große Radien. Für unsere beiden äußeren Metriken (2.3.23) und (2.3.24) erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &\approx -f'' - \frac{r_s}{r^2} f' + \left[\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \left(1 + \frac{r_s}{r} \right) - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \left(1 + \frac{2r_s}{r} \right) \right] f \\ &\approx -f'' + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \right) f \quad , \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

wobei wir die zweite Näherung mit Hilfe der Lösung

$$\begin{aligned} f(r) &= A e^{ar} + B e^{-ar} \\ a &= \sqrt{\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2}} \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

begründen können. Da gebundene Zustände normierbar sein müssen, gilt für sie $A = 0$ und $|E| < mc^2$. Hingegen divergieren freie Zustände für $|E| < mc^2$ mit $A e^{ar}$ und wir können $B e^{-ar}$ vernachlässigen. Somit ist es theoretisch möglich durch Lösen des Anfangswertproblems für verschiedenen Energiewerte gebundene und freie Zustände voneinander zu unterscheiden. Dies ist jedoch kein geeignetes Suchprinzip, da einerseits das Erraten eines Energieeigenwerts unwahrscheinlich ist und andererseits der Wert nicht numerisch darstellbar sein muss (der Energiewert kann nichtrational sein). Von daher

müssen wir anhand des Verhaltens der Wellenfunktion einschätzen können, wie nah wir einem Energieeigenwert sind.

Nehmen wir dafür an, wir kennen die Lösung der Differentialgleichung $f_0(r)$ für $E = E_0$. Für eine leicht abgeänderte Energie $E = E_0 + \epsilon \Delta E$ mit $\epsilon > 0$, folgt dann aus (4.2.34) in erster Ordnung von ϵ die Differentialgleichung

$$0 = -f'' - \frac{\nu' - \lambda'}{2} f' + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} f + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{E_0^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} \right) e^\lambda f - \epsilon \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2} e^{\nu-\lambda} f \quad . \quad (4.2.45)$$

Mit dem Ansatz $f(r) = (1 + \epsilon f_\epsilon(r)) f_0(r)$ ergibt sich

$$0 = -\epsilon \left(f_\epsilon'' + \frac{2f_0'}{f_0} f_\epsilon' + \frac{\nu' - \lambda'}{2} f_\epsilon' + \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2} e^{\lambda-\nu} \right) \quad , \quad (4.2.46)$$

sofern wir ausnutzen, dass f_0 die Klein-Gordon-Gleichung für E_0 erfüllt. Der homogene Teil der Differentialgleichung lässt sich mittels Trennung der Variablen lösen

$$f_{ch}' = A \frac{e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}}{f_0^2} \quad (4.2.47)$$

und mittels Variation der Konstanten erhalten wir die komplette Lösung

$$\begin{aligned} f_\epsilon' &= - \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2} \int f_0^2 e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} dr \frac{e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}}{f_0^2} \\ \Rightarrow f_\epsilon &= - \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2} \int \int f_0^2 e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} dr \frac{e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}}{f_0^2} dr \quad . \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

Verlangen wir, dass die Startwerte (4.2.37) weiterhin erfüllt sind, dann folgt für den allgemeinen Fall

$$\begin{aligned} f_\epsilon &\approx - \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2 \alpha} \int \int r^{2l+2} dr r^{-2l-2} dr \\ &= - \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2 \alpha} \frac{1}{2l+3} \int r + B r^{-2l-2} dr = \frac{E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2 \alpha} \frac{1}{2l+3} \left(r^2 - \frac{2B}{2l+1} r^{-2l+1} + C \right) \quad , \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

dass die beiden Integrale bei 0 beginnen

$$f_\epsilon = - \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2} \int_0^r \int_0^{r_1} f_0^2(r_2) e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}(r_2) dr_2 \frac{e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}(r_1)}{f_0^2(r_1)} dr_1 \quad . \quad (4.2.50)$$

Betrachten wir nun die Abweichungen für große Radien. Nehmen wir an f_0 sei der Radialteil eines Energieeigenzustands, dann gilt

$$\begin{aligned} f_\epsilon &\approx -\frac{2E_0\Delta E}{\hbar^2 c^2} \left[\int \left(B + \int e^{-2ar} dr \right) e^{2ar} dr + C \right] \\ &= -\frac{2E_0\Delta E}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{\tilde{B}}{2a} e^{2ar} - \frac{r}{2a} + \tilde{C} \right) \approx -\frac{E_0\Delta E}{\hbar^2 c^2 a} \tilde{B} e^{2ar} \quad . \end{aligned} \quad (4.2.51)$$

Solange die Metrik keine Ereignishorizonte aufweist, gilt $e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} > 0$ und der innere Integrand ist positiv. Folglich ist $\tilde{B} > 0$ und je nach Vorzeichen von ΔE divergiert die Wellenfunktion in eine andere Richtung. Somit muss ein Zustand immer zwischen einem Vorzeichenwechsel des divergenten Verhaltens liegen. Damit ist die Differenz der Nulldurchgänge (Knoten) zwischen den Wellenfunktionen des Energieeigenzustands und einem energetisch leicht höheren Zustand ungerade. Weiterhin können für $\epsilon \rightarrow 0$ weitere Nulldurchgänge auftreten, sofern f_0 einen Punkt r_0 besitzt, für den $f(r_0) = 0$ und $f'(r_0) = 0$ gilt, da der Unterschied der Wellenfunktionen für einen beliebigen festen Radius verschwindet. Die Existenz eines solchen Punktes steht jedoch im Widerspruch zu unserer Näherungslösung (4.2.44), da aus der Differentialgleichung und ihren Ableitungen $f(r) = 0 \forall r \geq r_0$ folgt. Somit unterscheidet sich eine Wellenfunktion für $(1 - \epsilon) E_0$ von einer mit einer Energie leicht über der Eigenenergie genau um einen Knoten. Analysieren wir zudem die Korrektur freier Zustände, indem wir in der zweiten Zeile von (4.2.51) a durch $-a$ ersetzen

$$f_\epsilon \approx -\frac{2E_0\Delta E}{\hbar^2 c^2} \left(-\frac{\tilde{B}}{2a} e^{-2ar} + \frac{r}{2a} + \tilde{C} \right) \approx -\frac{E_0\Delta E}{\hbar^2 c^2 a} r - \tilde{C} \quad , \quad (4.2.52)$$

stellen wir fest, dass dies sogar eine hinreichende Bedingung für einen Eigenzustand ist. Denn bei dem linearen Term in r handelt es sich exakt um die erwartete Korrektur einer Wellenfunktion, die in die gleiche Richtung divergiert. Folglich können wir die Anzahl der Knoten für unterschiedliche Bahndrehimpulse für $E = 0$ numerisch berechnen und kennen dann die Anzahl der Knoten aller Zustände der jeweiligen Drehimpulsquantenzahl. Danach suchen wir per Intervallmethode nach denen, die uns interessieren (üblicherweise die niedrigsten).

4.2.3. Wahl der Parameter

Um die obigen Matrixgleichungen für eine gegebene Metrik zu lösen, müssen wir die fünf freien Parameter M , m , l , γ und r_{sk} festlegen. Dabei haben die beiden letzteren im Grenzfall unendlich vieler Basisfunktionen und der Integralberechnung ohne numerischen Fehler keinen Einfluss, da es sich bei (4.2.24) unabhängig von γ um eine Basis des Raumes handelt und die Substitution der Variablen (4.2.30) den Integralwert unabhängig von r_{sk} nicht verändert. Realistisch gesehen, können wir sowohl aus zeitlichen als auch rechentechnischen Gründen nur eine endliche Zahl an Basisfunktionen nutzen und die Integrale nur mit einer endlichen Anzahl von Stützpunkten berechnen. Von daher müssen wir hier eine Wahl treffen, die im Sinne dessen, was wir berechnen wollen, möglichst geschickt ist. Üblicherweise interessieren uns bei einem Quantensystem die niedrigsten Zustände, da sich das System vorwiegend in diesen befindet (ausgenommen Situationen mit hoher Temperatur). Da wir wissen, dass der Drehimpuls die Energie erhöht, beschränken wir uns von daher auf $l \leq 3$. Weiterhin verwenden wir für die Festlegung von γ das Ritzsche Variationsverfahren. Dabei wird das Minimum des kleinsten Eigenwerts in Abhängigkeit von γ für eine durch Erfahrungswerte festgelegte Anzahl an Basisfunktionen gesucht.

Bei der numerischen Integration wird das Integral zwischen zwei Stützpunkten mit Hilfe der Position der Stützpunkte und den dortigen Funktionswerten angenähert. Dabei ist die Näherung umso besser, desto weniger sich die Funktion auf dem Intervall verändert. Somit kann der Fehler dadurch minimiert werden, dass die Stützpunkte in Bereichen, in denen die Funktion entweder schnell variiert oder einen großen Beitrag zum Integral liefert, möglichst dicht aufeinanderfolgen. Ist der Funktionswert hingegen gering oder das Verhalten der Funktion monoton, ist es geschickt die Stützpunktdichte geringer zu wählen. Da die Wahl der Stützpunkte in x festgelegt wird, beeinflusst die Wahl von r_{sk} , wo die Stützpunkte in r liegen und somit auch wie groß der Fehler der numerischen Integra-

tion für eine feste Stützpunktzahl ist. Somit können wir durch geschickte Wahl von r_{sk} den numerischen Aufwand verringern, um die gewünschte Genauigkeit zu erhalten. Die Basisfunktionen (4.2.24) besitzen einen exponentiellen Abfall, der für hinreichend große r den gesamten Integranden dominieren sollte. Folglich benötigen wir in diesem Bereich für die korrekte Integration weniger Stützpunkte, da die Funktion monoton und der Integrand klein ist. Gleichzeitig sinkt die Punktdichte für größere Radien automatisch, da

$$\frac{dr}{dx} = r_{sk} \left(1 + \tan^2(x)\right) \quad (4.2.53)$$

monoton steigt. Dabei markiert der Punkt $\tan(x) = 1$ beziehungsweise $r = r_{sk}$ einen Übergang des Verhaltens, denn für deutlich kleinere Radien ist die Steigung ungefähr 1 und die radialen Stützpunkte liegen genauso dicht beieinander wie in x ($\Delta r \approx \Delta x$). Für größere Werte dominiert hingegen der $\tan^2(x)$ -Term und die radialen Stützpunkte liegen deutlich weiter auseinander als die in x ($\Delta r \approx \tan^2(x)\Delta x$). Dementsprechend liegt es nahe, dass das Optimum der Skalierung ungefähr in der Größenordnung des letzten Maximums des Integranden

$$\rho_{ml}(\bar{r}(r)) O(r) \rho_{kl}(\bar{r}(r)) \bar{r}^2(r) e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \quad (4.2.54)$$

ist (siehe (4.2.29)). Da dies jedoch numerisch sehr aufwändig ist, geben wir uns stattdessen damit zufrieden, das Extremum der höchsten auftauchenden Ordnung in r und \bar{r} zu bestimmen. Diese ist

$$\bar{r}^{-2l+2m+2k+4} e^{-2\gamma\bar{r}^2} e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}, \quad (4.2.55)$$

wobei wir von der Entwicklung von $e^{\frac{\lambda-\nu}{2}}$ abgesehen haben. Wir setzen also die Skalierung r_{sk} auf das Maximum von (4.2.55), das heißt als Lösung der Gleichung (teilweise wird

noch mit einem Erfahrungswert multipliziert)

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \left[\frac{d}{dr} \left(\bar{r}^{2l+2m+2k+4} e^{-2\gamma\bar{r}^2} e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} \right) \right]_{r=r_{sk}} \\
\Rightarrow 0 &= 2l + 2m + 2k + 4 - 4\gamma\bar{r}^2(r_{sk}) + \frac{\lambda'(r_{sk}) - \nu'(r_{sk})}{2} \bar{r}(r_{sk}) e^{\frac{\nu-\lambda}{2}}(r_{sk}) \quad (4.2.56) \\
&\rightarrow r_{sk} \quad .
\end{aligned}$$

Dies lässt sich analytisch nicht lösen, ist jedoch numerisch leicht zu berechnen, sodass wir die Skalierung für jedes Integral anpassen können.

Es fehlt noch die Festlegung der beiden Massen. Im betrachteten System gibt es zwei typische Längenskalen; einerseits die Compton-Wellenlänge des Testteilchens $\lambda_c = \frac{\hbar}{mc}$ und andererseits die Ausdehnung der Massenverteilung. Gehen wir davon aus, dass die Massenverteilung so dicht ist, dass die Außenmetrik auch für Bereiche gilt, in denen g_{00} nahe 0 ist. Dann handelt es sich bei dieser Skala um den gravitativen Radius $r_G = \frac{r_s}{2}$. Es ist zu erwarten, dass das System in dem Bereich, in dem diese beiden Skalen ungefähr gleich groß sind, ein Übergangverhalten aufweist. Ist die Compton-Wellenlänge viel kleiner als der gravitative Radius, sollte die quantenmechanische Delokalisation des Testteilchens keine Rolle spielen und das System ein annähernd nicht-quantenmechanisches Verhalten aufweisen. Ist sie hingegen viel größer als der gravitative Radius, kann das Testteilchen nur schwach gebunden werden, da die Wellenfunktion einen Zustand mit großer Ortsunschärfe einnimmt und somit die Aufenthaltswahrscheinlichkeit an Orten mit hohem effektiven Potential klein ist. Von daher dürfte die Betrachtung dieses Übergangsbereichs am ergiebigsten sein und wir wählen die Massen so, dass annähernd

$$\begin{aligned}
r_G &= \frac{GM}{c^2} = \lambda_c = \frac{\hbar}{mc} \\
\Rightarrow Mm &= \frac{\hbar c}{G} = 1m_{Pl}^2 \quad (4.2.57)
\end{aligned}$$

gilt. Somit ist für diese Betrachtung nur das Produkt und nicht die Größe der einzelnen Massen relevant, solange unsere semiklassische Näherung gültig ist und die Annahmen

der eingesetzten Metrik erfüllt sind. Folglich sollte auch die relative Energie eines Zustands (dividiert durch die Testmasse) für zwei Systeme mit gleichem Massenprodukt näherungsweise übereinstimmen.

Für die Klein-Gordon-Gleichung im gekrümmten Raum (4.2.7) ist dies sogar exakt der Fall, da sie durch die Skalierung

$$\begin{aligned}
 M_n &= aM \\
 m_n &= \frac{m}{a} \\
 E_n &= \frac{E}{a} \\
 r_n &= ar \\
 \bar{r}_n &= a\bar{r} \quad , \tag{4.2.58}
 \end{aligned}$$

nicht verändert wird, solange sich die Metrikfunktionen ebenfalls mitskalieren. Das heißt $e^{\nu_n(ar)} = e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda_n(ar)} = e^{\lambda(r)}$ (gilt dies nicht, können wir auch \bar{r} nicht einfach skalieren, da der Zusammenhang zwischen r und \bar{r} nicht linear ist). Da die Metrik immer einheitenlos ist, sollte dies durch die zusätzliche Skalierung aller weiterer Längenskalen oder höherdimensionalen Größen immer der Fall sein. Beispielsweise ist dies für die Metriken in Kapitel 2.3

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{r_s}{r} &= 1 - \frac{r_{sn}}{r_n} \\
 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{r^3} &= 1 - \frac{r_{sn}}{r_n} + \frac{a^3 B}{r_n^3} = 1 - \frac{r_{sn}}{r_n} + \frac{B_n}{r_n^3} \\
 1 - \frac{r^2}{R^2} &= 1 - \frac{r_n^2}{a^2 R^2} = 1 - \frac{r_n^2}{R_n^2} \\
 1 - \frac{r_0^2}{R^2} &= 1 - \frac{a^2 r_0}{R_n^2} = 1 - \frac{r_{0n}^2}{R_n^2} \tag{4.2.59}
 \end{aligned}$$

konsistent möglich. Explizit wird das für alle in der Arbeit genutzten Metriken im Anhang D gezeigt.

Folglich müssen wir nur das Produkt Mm und somit eine Masse variieren. Dabei beschränken wir uns aufgrund der vorherigen Diskussion auf den Übergangsbereich mit

$Mm \approx 1m_{Pl}^2$. Deshalb bestimmen wir im Weiteren die Energieeigenwerte für das Produkt zwischen $0.001m_{Pl}^2$ und $1000m_{Pl}^2$. Dabei setzen wir die beiden Skalen und folglich die beiden Massen ungefähr auf den numerischen Wert 1, um die Gefahr von Pufferüberläufen zu minimieren. Damit liegen beide Massen im Bereich der Planck-Masse und die Nutzung von Planck-Einheiten bietet sich an. Da zudem nur das Produkt der Massen entscheidend ist, können wir eine Masse festhalten und wählen für das Programm $M = m_{Pl} = 1$. Dabei können wir nicht erwarten realistische Energieeigenwerte für die gewählten Parameter zu erhalten, denn wir nutzen eine semiklassische Näherung, für die das Gravitationsfeld klassisch beschrieben wird. Der gravitative Radius einer Planck-Masse ist eine Planck-Länge und auf dieser Längenskala darf das Gravitationsfeld nicht mehr klassisch behandelt werden, da Quantengravitationseffekte relevant werden. Folglich ist die klassisch errechnete Metrik für dieses Szenario höchstwahrscheinlich falsch (sicher können wir uns erst sein, sobald wir eine vollständige Quantengravitationstheorie besitzen). Weiterhin gehen die von uns genutzten Metrikmodelle (4.0.1), (4.0.2) und (4.0.3) von einer dominierenden Zentralmasse und einer im Vergleich dazu verschwindend geringen Testmasse aus. Dies ist jedoch für zwei gleich große Massen und insbesondere, wenn die „Testmasse“ größer als die Zentralmasse ist, nicht mehr der Fall, sodass die Näherung für diese Fälle zusammenbricht. Jedoch können wir die gewonnenen Ergebnisse dank der oben angesprochenen Skalierungseigenschaft der Klein-Gordon-Gleichung auf ein physikalisches System mit $M \gg m$, $M \gg m_{Pl}$ und $Mm \approx 1$ reskalieren. Für solche Systeme sind unsere Näherungen gerechtfertigt und von daher ist die aus der Numerik begründete obige Wahl der Massenparameter unbedenklich. Da jedoch alle erhaltenen Ergebnisse der Energieeigenwerte reskaliert werden müssen, werden wir die Energie im Verhältnis $\frac{E}{mc^2}$ angeben, denn dieses ist von der Skalierung unabhängig.

Letztlich bleiben also m im Bereich von $0.001m_{Pl}$ bis $1000m_{Pl}$ und weitere Parameter aus der Metrik, sofern diese nicht rein von der Masse abhängen, als freie Parameter übrig (beispielsweise B in der pk-Schwarzschildmetrik), die wir in den Ergebnissen systema-

tisch betrachten müssen.

Für die Anfangswertmethode können wir die vorherigen Überlegungen übernehmen. Wir müssen jedoch noch die genutzten Energien festlegen. Wie im vorherigen Unterkapitel schon angesprochen, liegen die Energien der gebundenen Zustände zwischen $E = 0$ und $E = mc^2$. Somit können wir die Energien mittels eines Intervallverfahrens bestimmen. In der Praxis zeigt sich jedoch, dass meist Energien existieren $E > 0$, für die die Anzahl der Knoten (ausgenommen von dem bei $r = 0$) 0 ist. Ist dies der Fall, können wir die untere Grenze unseres Startintervalls erhöhen, da wir sicher unter dem Grundzustand liegen. Hierfür nutzen wir das klassische Limit $E = mc^2 \min_r e^{\frac{r}{2}}$, denn unsere semiklassische Näherung ist nur dann gültig, wenn wir für große Massenprodukte näherungsweise die klassischen Situation erhalten. Da zudem die Kopplung für größere Massenprodukte ebenfalls steigt, können wir erwarten, dass der Grundzustand über diesem Limit liegt. Dies können wir sogar noch erweitern, indem wir für $Mm \leq 0.1m_{Planck}^2$ sogar mit $E = 0.99mc^2$ als untere Grenze zu beginnen. Sicherheitshalber muss jedoch immer überprüft werden, ob die Zahl der Knoten tatsächlich stimmt. Sobald dies nicht der Fall ist, halbieren wir die untere Grenze und setzen sie auf 0, falls die Zahl der Knoten weiterhin ungleich 0 ist.

4.2.4. Ergebnisse

Für die Berechnung der Energieeigenwerte der Klein-Gordon-Gleichung in gekrümmten Räumen wurden für beide im Unterkapitel 4.2.2 vorgestellte Methoden Programme geschrieben. Der Name des Programms für das Matrixdiagonalisationsverfahren ist „knergies“ und für das Lösen des Anfangswertproblems wurde das Programm „RK-KleinGordon“ geschrieben, das normalerweise ein klassisches Runge-Kutta-Verfahren zur Bestimmung der Wellenfunktion verwendet. Schlägt dieses fehl, wird versucht das Problem per Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren zu lösen. Die Beschreibung der Verfahren und

der Programme ist im Anhang C zu finden.

Die beiden Verfahren wurden sowohl für Spielzeugmodellmetriken als auch für ein skalares $\frac{1}{r}$ -Potential, dessen analytische Lösung bekannt ist (siehe [30, Kapitel 1.16]), miteinander verglichen. Trotz recht aufwändiger Optimierungsmaßnahmen war das Programm „kgennergies“ durchgehend langsamer (im Durchschnitt ungefähr um den Faktor 20) und gleichzeitig für das skalare Potential ungenauer. Der relative Unterschied der Grundzustandsenergie ist dabei ausnahmslos kleiner als 10^{-2} (meist kleiner als 10^{-3} und teilweise sogar kleiner als 10^{-4} ; allgemein ist der Fehler umso größer desto näher e^ν an 0 heran kommt beziehungsweise desto stärker das skalare Potential ist), sodass von einer korrekten Implementierung ausgegangen wird. Dies ist auf die schlechte Konvergenz der Eigenwerte für die verwendeten Oszillatorbasisfunktionen (4.2.24) zurückzuführen, deren Nutzung dementsprechend nicht empfohlen werden kann. Vor diesem Hintergrund wurden die in diesem Unterkapitel vorgestellten Ergebnisse per Runge-Kutta-Verfahren mit dem Programm „RKKleinGordon“ berechnet. Die zugehörigen Grafiken wurden, wie alle Graphen dieses Kapitels, mit der “Graphic Layout Engine” (<http://www.glegraphics.org/>) erstellt. Dabei wurde wenn möglich die „smooth“-Funktion verwendet, die zwischen den errechneten Punkten kubisch interpoliert (teilweise sind die Übergänge so scharf, dass die Glättung nicht funktioniert, der betreffende Teil der Kurve wird dann ausgeblendet. In diesem Fall wird die Option nicht genutzt). Die negativen Eigenzustände können durch Spiegelung an der x-Achse gewonnen werden.

Die Energieeigenwerte wurden für die Metrikmodelle (4.0.1) und (4.0.2) berechnet und die Ergebnisse bestätigen die Aussagen des vorherigen Unterkapitels. Betrachten wir das Verhältnis der Bindungsenergie des Grundzustands $B_0 = mc^2 - E_0$ und der des klassischen Minimums, stellen wir fest, dass Testteilchen für Massenprodukte $Mm \ll 1m_{Pl}^2$ unabhängig von der Metrik kaum gebunden sind. Die exakte Grenze sinkt je kleiner das absolute Minimum der Metrik wird, sie liegt aber selbst dann noch innerhalb von zwei Größenordnungen von $1m_{Pl}^2$, wenn das Minimum sehr klein (kleiner 10^{-3}) wird, wie

anhand der Grafiken 4.1 und 4.2 für das Modell 1 und anhand der Grafiken 4.3 und 4.4 für das Modell 2 zu sehen ist. So liegt das Metrikminimum für die Grafik 4.3 bei

$$e^\nu(0) = \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) e^{-\frac{1}{2\left(\frac{r_0}{r_s}-1\right)}} = \frac{1}{11} e^{-5} \approx 6 \cdot 10^{-4} \quad . \quad (4.2.60)$$

Folglich wird beispielsweise für die Bindung eines π^0 -Mesons eine zentrale Masse von etwa

$$M \approx 0,1 \frac{m_{Pl}^2}{m_{\pi^0}} \approx 0,1 \frac{1,22 \cdot 10^{19} \frac{GeV}{c^2}}{1,35 \cdot 10^2 \frac{MeV}{c^2}} 2,18 \cdot 10^{-8} kg = \frac{1,22 \cdot 2,18}{1,35} 10^{11} kg \approx 2 \cdot 10^{11} kg \quad (4.2.61)$$

benötigt, wobei für die Rechnung $m_{\pi^0} \approx 135 \frac{MeV}{c^2}$ und $m_{Pl} \approx 1,22 \cdot 10^{19} \frac{GeV}{c^2} \approx 2,18 \cdot 10^{-8} kg$ genutzt wurde.

Weiterhin zeigen die Grafiken ebenfalls, dass die Energie des Grundzustands für große Massenprodukte gegen den klassischen Grenzwert ($E_{class} = mc^2 \min_r e^{\frac{1}{2}}$) konvergiert. Dies beschränkt sich jedoch nicht nur auf den Grundzustand, sondern alle Zustände konvergieren für $Mm \rightarrow \infty$ gegen den klassischen Grenzwert, wie anhand der Grafiken 4.5, 4.6, 4.7 und 4.9 nachvollzogen werden kann. Dabei ist die Energie des gleichen Zustands für die pk-ART durchgehend größer als für die ART, sofern wir Zentralobjekte mit der gleichen Ausdehnung vergleichen (siehe die Paare 4.5 und 4.7 und 4.6 und 4.9). Das bedeutet die Bindungsenergie ist in der pk-ART geringer als für die ART. Dies kann durch den repulsiven Term der pk-ART (das heißt die Ansammlung der dunklen Energie im Sterninneren) verstanden werden. Analog zur Eisen-K- α -Linie in [12] lassen sich Parameter finden, für die die Graphen in gewissen Regionen ähnlich sind. Beispielsweise ist das Verhalten der Grafiken 4.7 und 4.8 für kleine Massen ähnlich. Jedoch decken sie sich nicht für Massenprodukte im Bereich $1m_{Pl}^2$ oder größer. Somit könnten die beiden Theorien durch Vermessung der Massenabhängigkeit auseinander gehalten werden, solange die angesetzten inneren Metrikmodelle realistisch sind.

Ein noch deutlicherer Unterschied zwischen der ART und pk-ART tritt beim Vergleich der Abhängigkeit der Energieeigenwerte vom Übergangspunkt r_0 auf. Während die Ener-

gien für das ART Modell (Modell 2 (4.0.2)) monoton steigen (für $r_0 > r_s$), fallen sie für pk-ART Modell (Modell 1) für Übergangsradien nahe des Minimums $r_0 = r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$ ab, bilden ein Minimum und steigen dann für größere Übergangsradien an. Dies zeigen die Grafiken 4.10, 4.11 und 4.12. Die Grafik 4.10 zeigt dabei, dass für pk-ART Parameter nahe dem Minimum das energetische Minimum nahe 0 liegt und somit die beiden Theorien allein dadurch schlecht unterschieden werden können. Für größere Werte des pk-Parameters liegt jedoch ein eindeutiger Unterschied vor (siehe 4.12). Weiterhin unterscheidet sich der Verlauf der Kurven sehr stark, sodass mit Hilfe weniger Messpunkte zwischen diesen Szenarien unterschieden werden kann.

Das für Modell 1 (4.0.1) auftretende Minimum, sollte dabei zumindest für große Massen für das r_0 auftreten, für das das Minimum des klassischen effektiven Potentials für Teilchen ohne Drehimpuls $V_{eff} = mc^2 e^{\frac{\nu}{2}}(0)$ sein Minimum besitzt. Dies ist äquivalent dazu, dass e^ν an der Stelle $r = 0$ in Abhängigkeit von r_0 minimal wird. Das bedeutet

$$\begin{aligned}
e^\nu(0, r_0) &= \left(1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}\right) e^{-\frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{2(r_0^3 - r_s r_0^2 + \frac{B}{2})}} \\
\frac{d}{dr_0} e^\nu(0, r_0) &= \left[\frac{r_s}{r_0^2} - \frac{3B}{2r_0^4} + \left(-\frac{r_s r_0}{r_0^3 - r_s r_0^2 + \frac{B}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{(r_0^3 - r_s r_0^2 + \frac{B}{2})^2} (3r_0^2 - 2r_s r_0) \right) \left(1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}\right) \right] e^{-\frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{2(r_0^3 - r_s r_0^2 + \frac{B}{2})}} \\
&= \frac{3r_s r_0^5 - 2r_s^2 r_0^4 - \frac{15}{2} B r_0^3 + 6B r_s r_0^2 - \frac{3B^2}{2}}{2r_0^4 (r_0^3 - r_s r_0^2 + \frac{B}{2})} e^{-\frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{2(r_0^3 - r_s r_0^2 + \frac{B}{2})}} \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad (4.2.62)
\end{aligned}$$

dass die realen Nullstellen nahe $r_0 = r_{min} = \frac{3B}{2r_s}$ des Polynoms fünften Grades $3r_s r_0^5 - 2r_s^2 r_0^4 - \frac{15}{2} B r_0^3 + 6B r_s r_0^2 - \frac{3B^2}{4}$ als energetische Minimum für große Massen in Frage kommen.

Grundzustandsenergie für $r_0 = 1,65r_{min}$ und $pc = 0,3$ im Modell 1

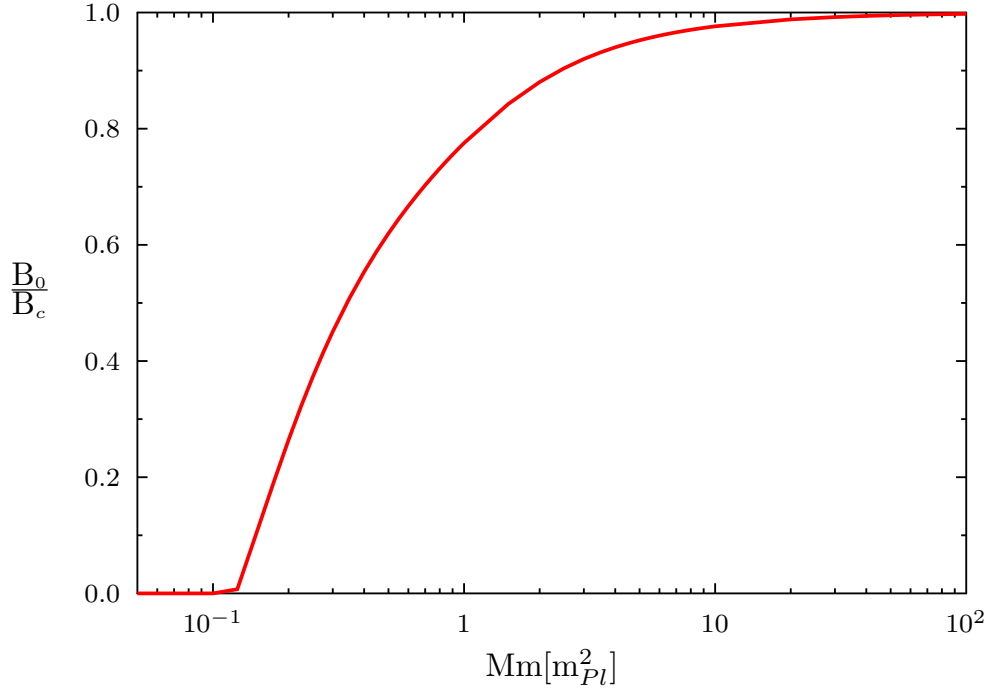


Abbildung 4.1.: Das Verhältnis der Bindungsenergie des Grundzustands $B_0 = mc^2 - E_0$ und der Bindungsenergie des klassischen Grenzwerts $B_c = mc^2 - E_c = mc^2 \left(1 - \min_r e^{\frac{\nu}{2}}\right)$ für das Modell 1 (4.0.1). Dabei ist der pk-Art Parameter $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ und $r_0 = 1,65r_{min} \approx 1,1r_s$, wobei r_{min} das Minimum der nach innen fortgesetzten Außenmetrik bezeichnet ($r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$).

Grundzustandsenergie für $r_0 = 2,2r_{min}$ und $pc = 0,3$ im Modell 1

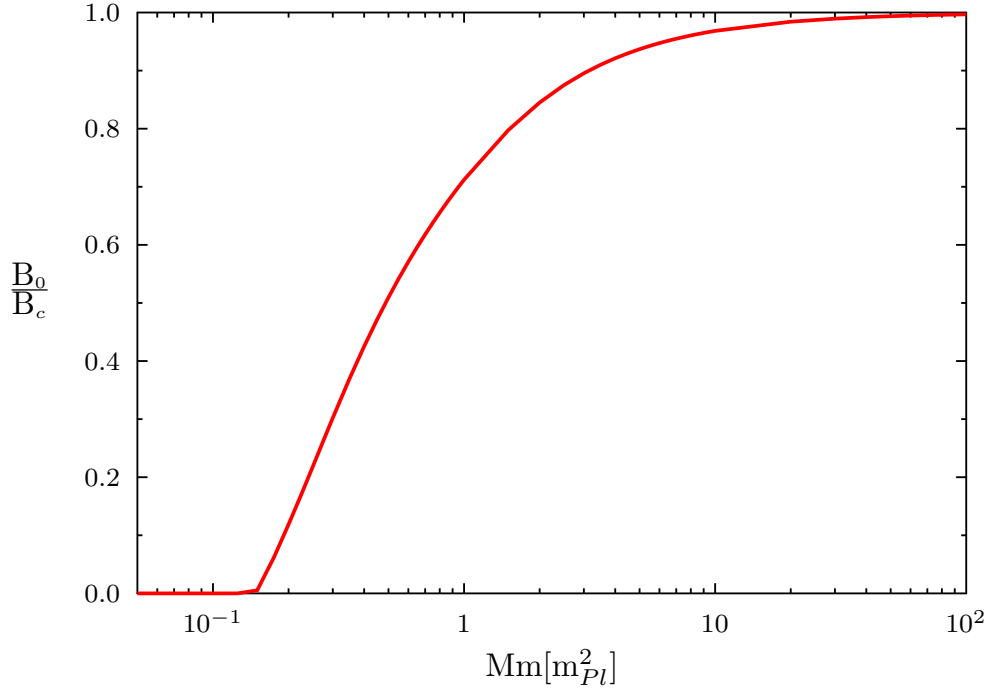


Abbildung 4.2.: Das Verhältnis der Bindungsenergie des Grundzustands $B_0 = mc^2 - E_0$ und der Bindungsenergie des klassischen Grenzwerts $B_c = mc^2 - E_c = mc^2 \left(1 - \min_r e^{\frac{v}{2}}\right)$ für das Modell 1 (4.0.1). Dabei ist der pk-Art Parameter $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ und $r_0 = 2,2r_{min} \approx 1,5r_s$, wobei r_{min} das Minimum der nach innen fortgesetzten Außenmetrik bezeichnet ($r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$).

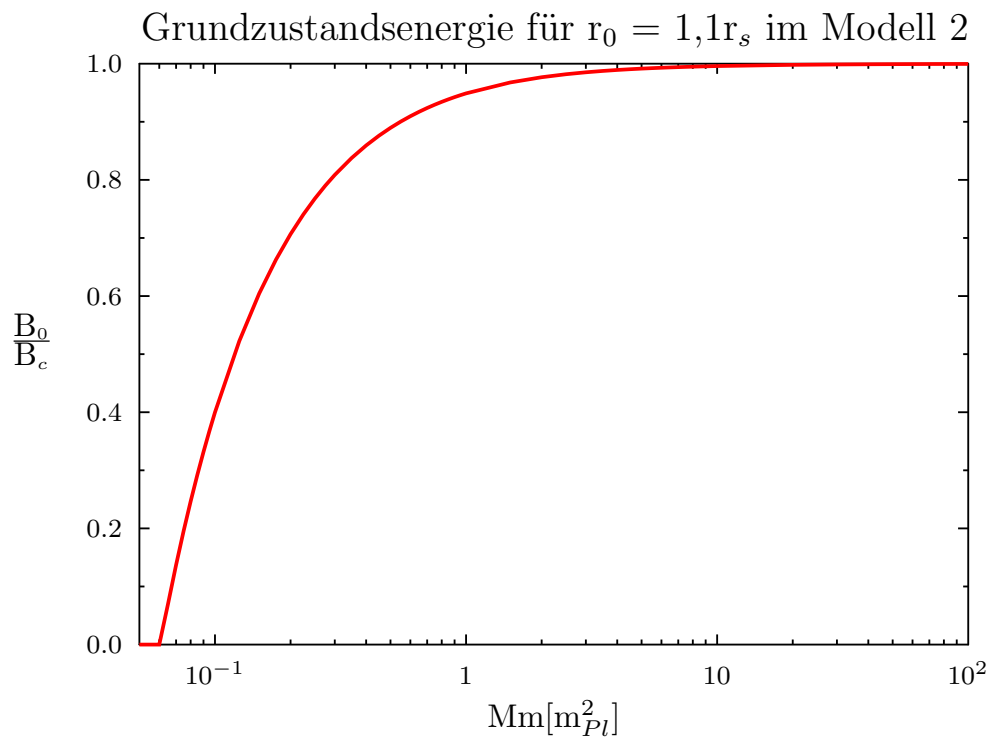


Abbildung 4.3.: Das Verhältnis der Bindungsenergie des Grundzustands $B_0 = mc^2 - E_0$ und der Bindungsenergie des klassischen Grenzwerts $B_c = mc^2 - E_c = mc^2 \left(1 - \min_r e^{\frac{\nu}{2}}\right)$ für das Modell 2 (4.0.2) mit dem Übergangsparameter $r_0 = 1, 1r_s$.

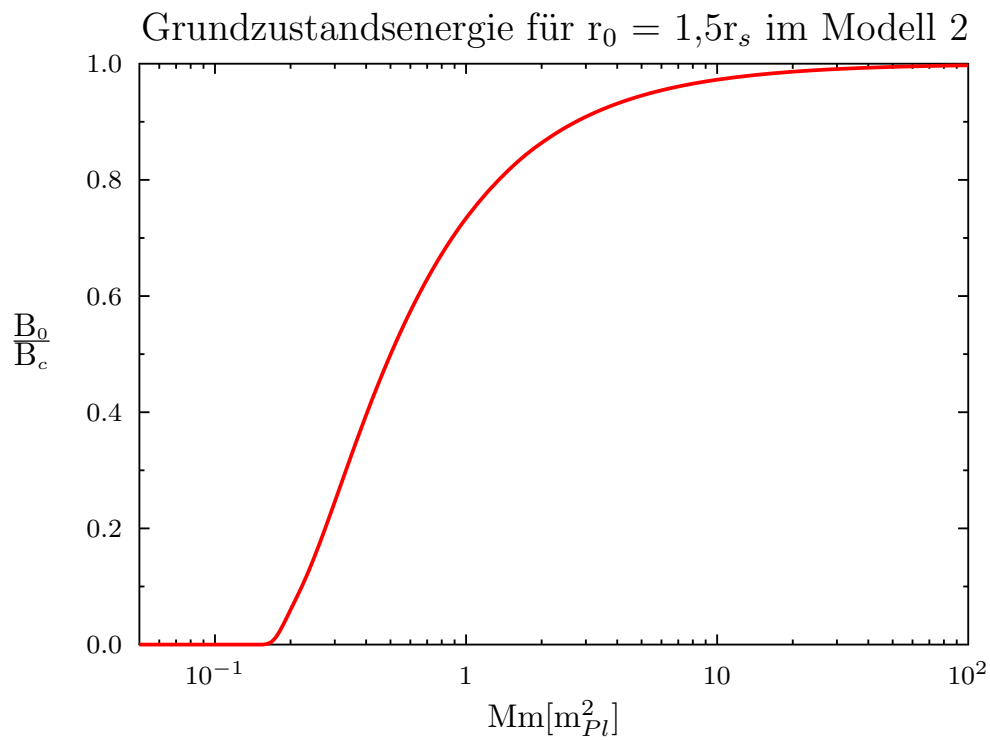


Abbildung 4.4.: Das Verhältnis der Bindungsenergie des Grundzustands $B_0 = mc^2 - E_0$ und der Bindungsenergie des klassischen Grenzwerts $B_c = mc^2 - E_c = mc^2 \left(1 - \min_r e^{\frac{\nu}{2}}\right)$ für das Modell 2 (4.0.2) mit dem Übergangparameter $r_0 = 1,5r_s$.

Energieeigenwerte für $r_0 = 1,65r_{min}$ und $pc=0,3$ im Modell 1

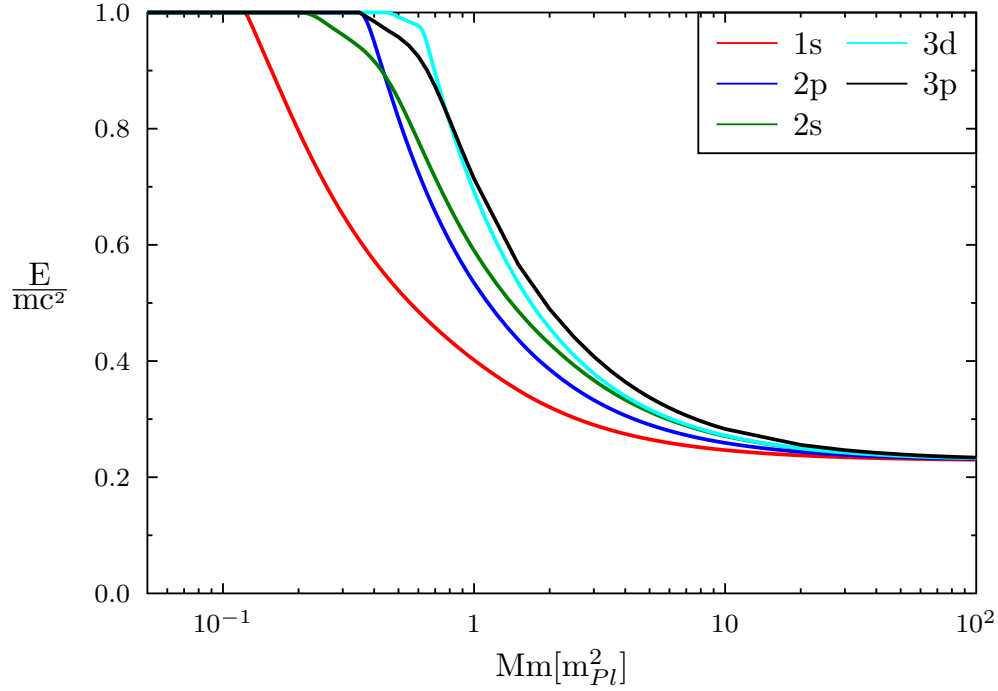


Abbildung 4.5.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 1 (4.0.1). Der pk-Parameter ist $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ und der Übergangspunkt wurde auf $r_0 = 1,65r_{min} \approx 1,1r_s$ gelegt, wobei r_{min} das Minimum der nach innen fortgesetzten Außenmetrik bezeichnet ($r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$).

Energieeigenwerte für $r_0 = 1,9r_{min}$ und $pc=0,4$ im Modell 1

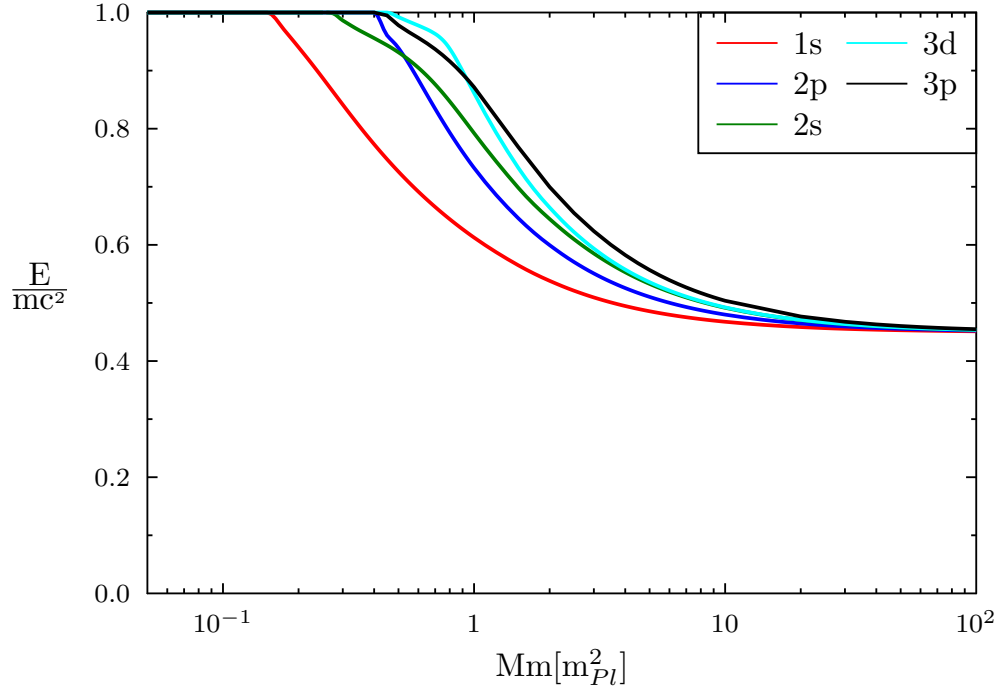


Abbildung 4.6.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 1 (4.0.1). Der pk-Parameter ist $B = pc r_s^3 = 0,4r_s^3$ und der Übergangspunkt wurde auf $r_0 = 1,9r_{min} \approx 1,5r_s$ gelegt, wobei r_{min} das Minimum der nach innen fortgesetzten Außenmetrik bezeichnet ($r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$).

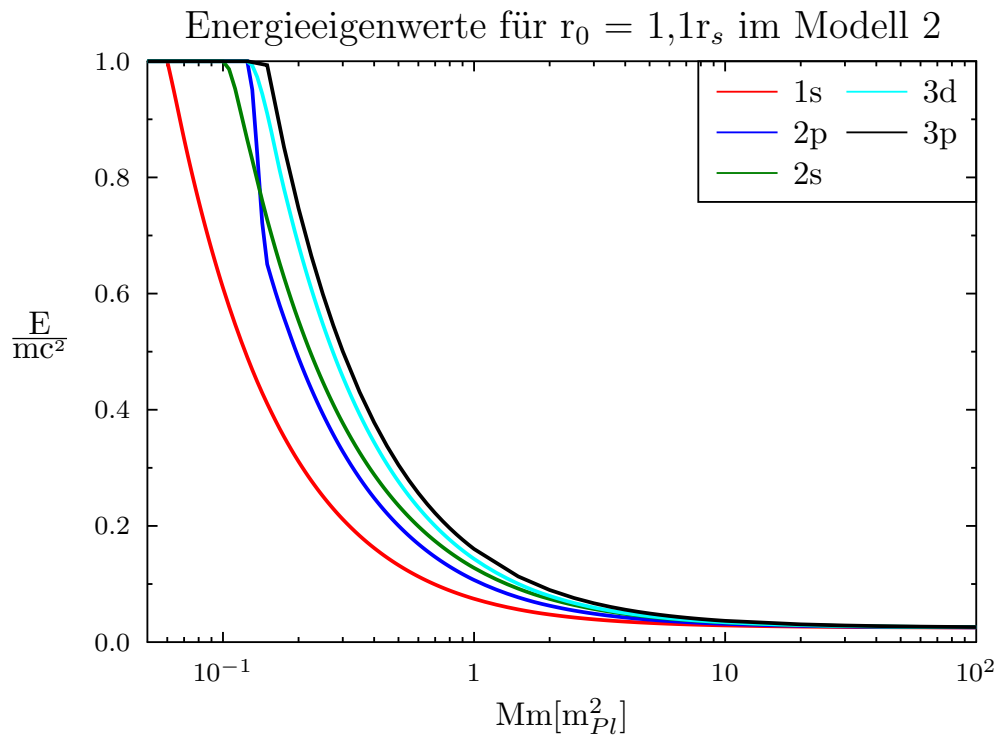


Abbildung 4.7.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 2 (4.0.2) mit dem Übergangspunkt $r_0 = 1,1r_s$.

Energieeigenwerte für $r_0 = 1,26r_{min}$ und $pc=0,3$ im Modell 1

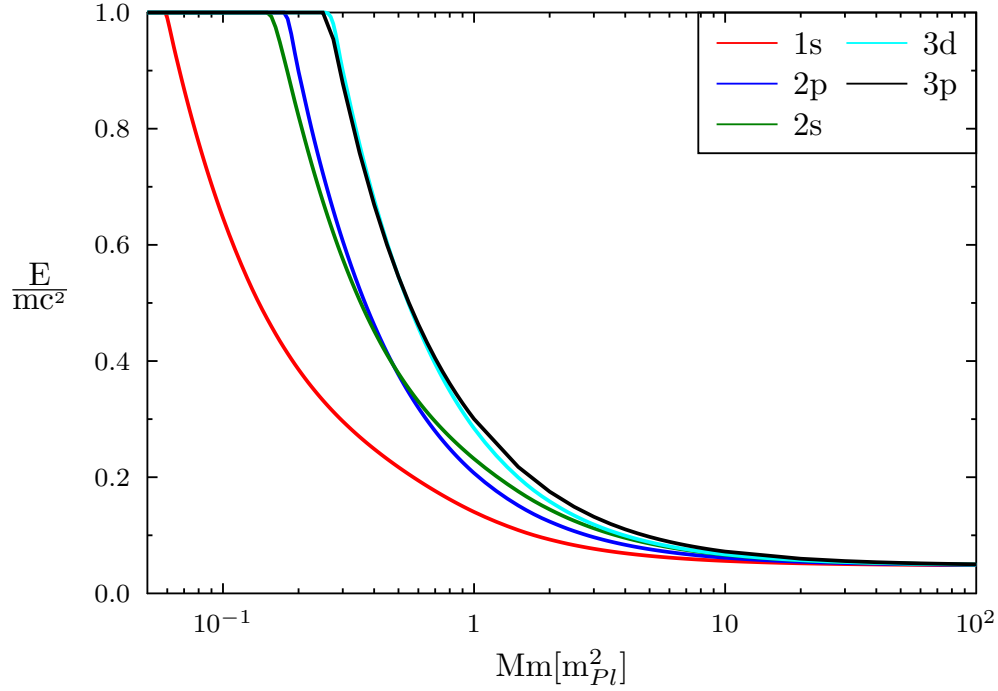


Abbildung 4.8.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 1 (4.0.1). Der pk-Parameter ist $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ und der Übergangspunkt wurde auf $r_0 = 1,26r_{min} \approx 0,85r_s$ gelegt, wobei r_{min} das Minimum der nach innen fortgesetzten Außenmetrik bezeichnet ($r_{min} = \sqrt{\frac{3B}{2r_s}}$).

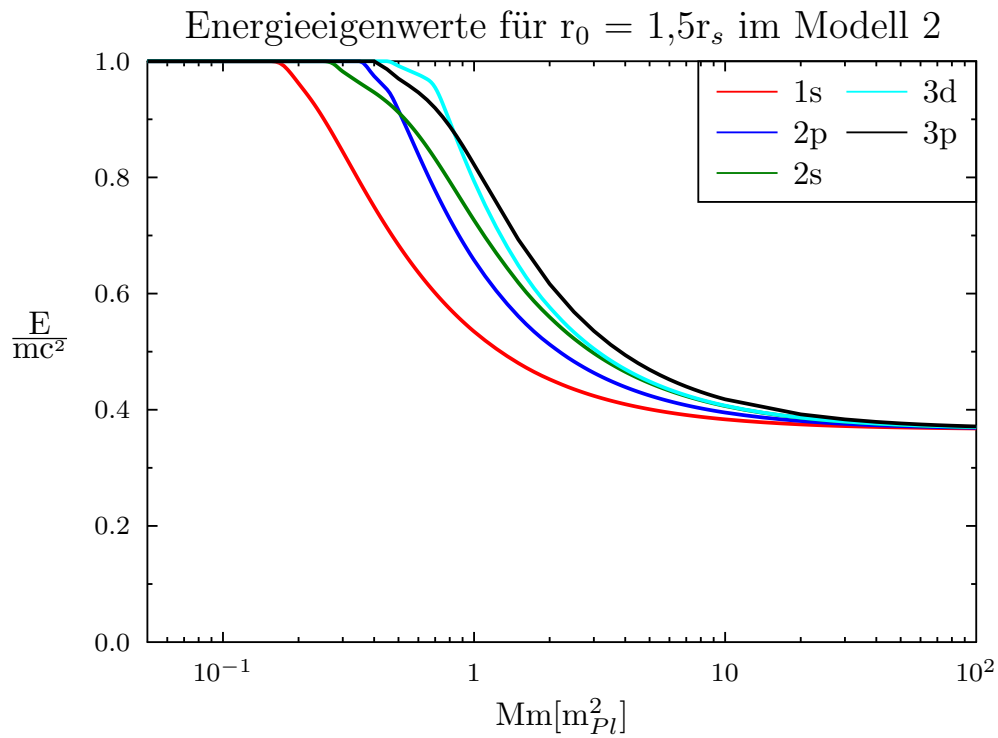


Abbildung 4.9.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 2 (4.0.2) mit dem Übergangspunkt $r_0 = 1,5r_s$.

Energieeigenwerte für $Mm = 1m_{Pl}^2$ und $pc = 0,3$ im Modell 1

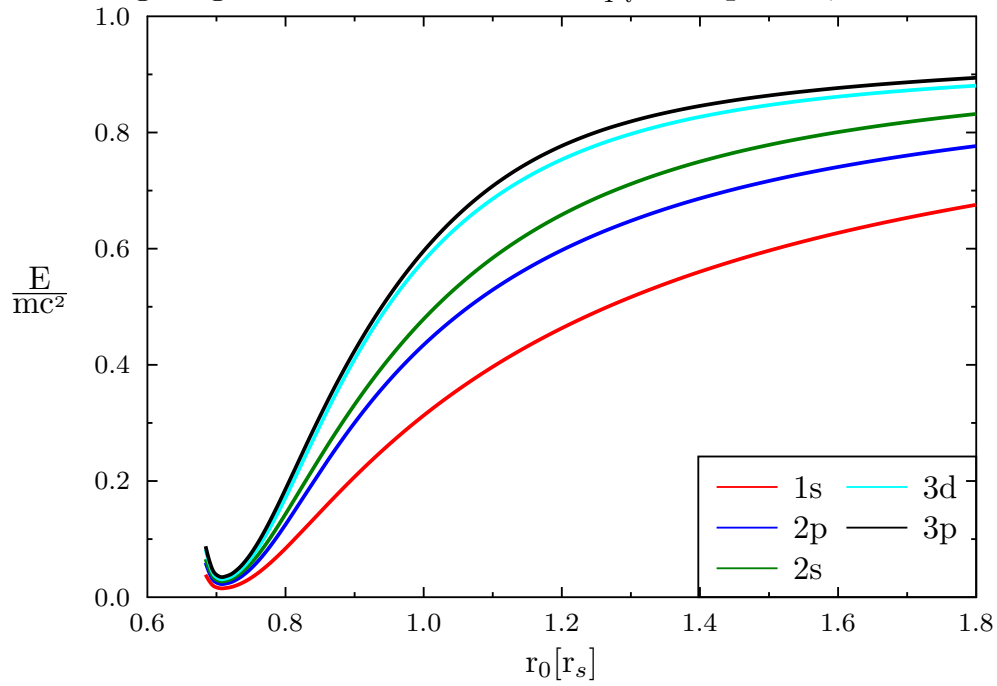


Abbildung 4.10.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Übergangspunkts r_0 für das Modell 1 (4.0.1) mit $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ und dem Massenprodukt $Mm = 1m_{Pl}^2$.

Energieeigenwerte für $Mm = 1m_{Pl}^2$ und $pc = 0,35$ im Modell 1

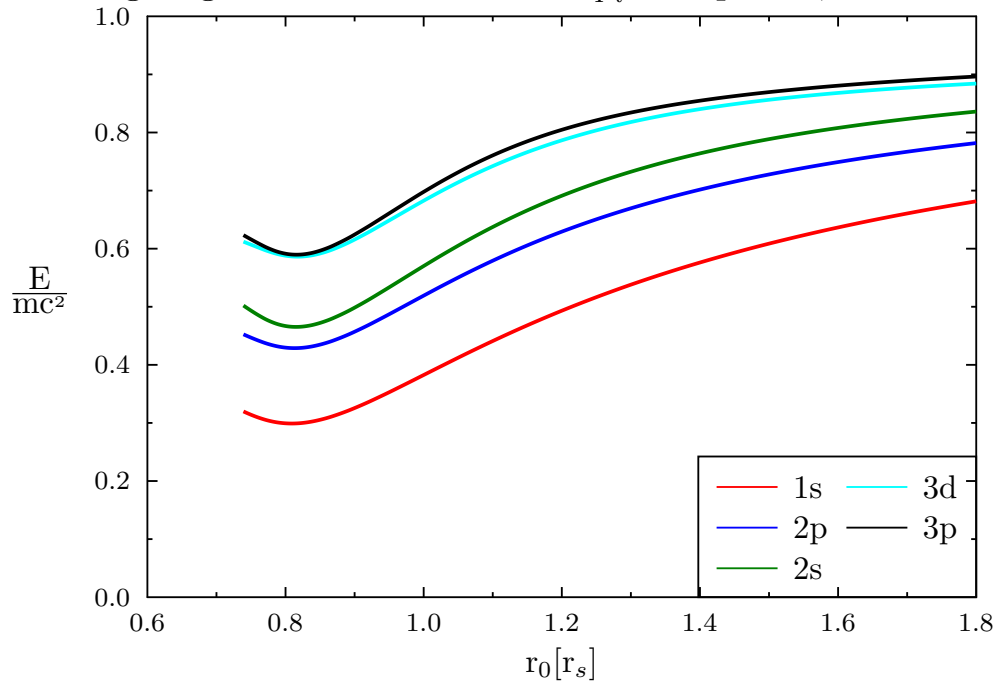


Abbildung 4.11.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Übergangspunkts r_0 für das Modell 1 (4.0.1) mit $B = pc r_s^3 = 0,35r_s^3$ und dem Massenprodukt $Mm = 1m_{Pl}^2$.

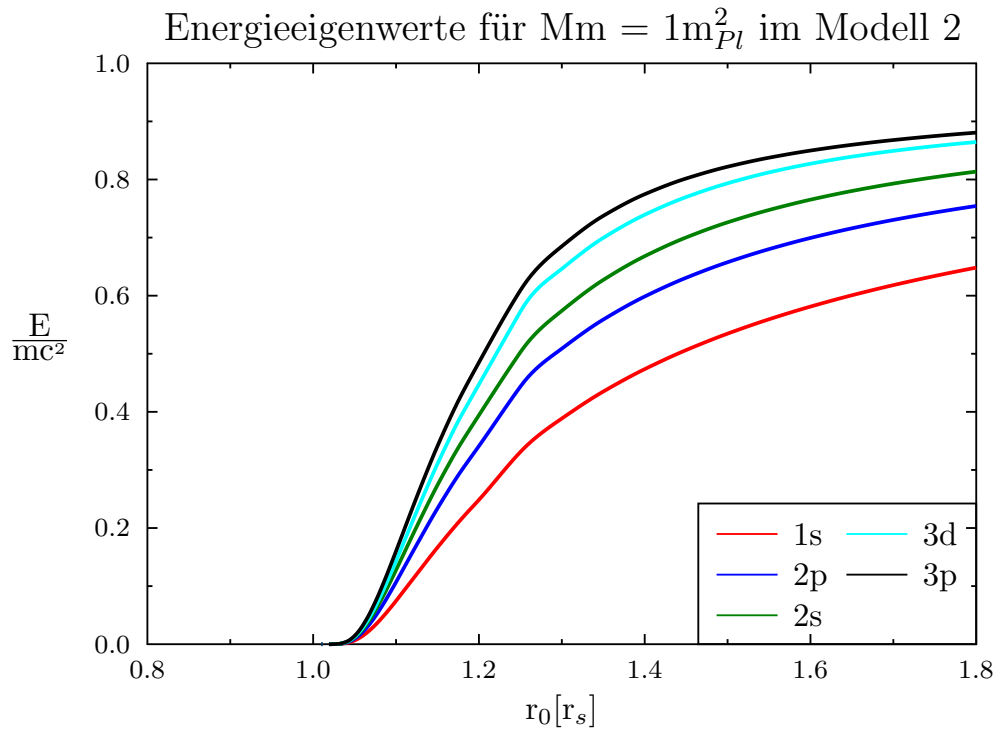


Abbildung 4.12.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Klein-Gordon-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Übergangspunkts r_0 für das Modell 2 mit dem Massenprodukt $Mm = 1m_{Pl}^2$ (4.0.2).

4.3. Auswertung der Dirac-Gleichung

Analog zum vorherigen Unterkapitel bestimmen wir die gebundenen Zustände der Dirac-Gleichung (4.1.26) für verschiedene sphärische symmetrische zeitunabhängige Metriken. Erneut werden wir zuerst die Symmetrie ausnutzen, um die Gleichungen soweit wie möglich zu vereinfachen, diskutieren dann die Aufarbeitung für die numerische Implementierung und die Wahl der Parameter und beenden das Kapitel mit der Diskussion der Ergebnisse, wobei wir die ART Ergebnisse mit denen von Soffel und Rafelski in [47, 48] vergleichen.

4.3.1. Sphärische Symmetrie

Unser Ziel ist, wie schon bei der Klein-Gordon-Gleichung, die Energieeigenwerte für schwarzschildartige Metriken (2.3.3) zu bestimmen, aber da für die Dirac-Gleichung die neuen γ -Matrizen und die Christoffelsymbole berechnet werden müssen, ist die Herleitung viel aufwändiger. Von daher beginnen wir mit einem isotropen Koordinatensystem, in dem die Metrik die Form [5, Kapitel 6.2]

$$\begin{aligned} ds^2 &= \omega(\rho)c^2 dt^2 - \delta(\rho) \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] \\ \rho &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

besitzt, da die räumlichen Koordinaten in diesem System austauschbar sind und sich dadurch unsere Rechnungen vereinfachen. In diesem Koordinatensystem können wir die γ -Matrizen als

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sqrt{\omega} \tilde{\gamma}_0 & \gamma^0 &= \frac{1}{\sqrt{\omega}} \tilde{\gamma}^0 \\ \gamma_i &= \sqrt{\delta} \tilde{\gamma}_i & \gamma^i &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \tilde{\gamma}^i \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

wählen und die Christoffelsymbole sind durch ([5, 25])

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 0 \\ 0i \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ i0 \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\omega}x^i}{2\omega\rho} \\
\begin{Bmatrix} i \\ 00 \end{Bmatrix} &= \frac{\bar{\omega}x^i}{2\delta\rho} \\
\begin{Bmatrix} i \\ ij \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} i \\ ji \end{Bmatrix} = \frac{\bar{\delta}x^j}{2\delta\rho} \\
\begin{Bmatrix} i \\ jj \end{Bmatrix} &= -\frac{\bar{\delta}x^i}{2\delta\rho} \quad \forall i \neq j
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

gegeben, wobei wir die Abkürzungen $\bar{\omega} = \frac{d\omega}{d\rho}$ und $\bar{\delta} = \frac{d\delta}{d\rho}$ verwendet haben.

Setzen wir dies in (4.1.25) ein, dann erhalten wir [25]

$$\Gamma_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \left[\gamma_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ i0 \end{Bmatrix} \gamma^i + \gamma^i \begin{Bmatrix} i \\ 00 \end{Bmatrix} \gamma^0 \right] = \frac{\bar{\omega}}{4\omega\rho} \gamma_0 \sum_{i=1}^3 \gamma^i x^i \tag{4.3.4}$$

und

$$\begin{aligned}
\Gamma_i &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{\omega} \tilde{\gamma}_0 \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\omega}}}{\partial x^i} \tilde{\gamma}^0 + \sum_{j=1}^3 \sqrt{\delta} \tilde{\gamma}_j \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\delta}}}{\partial x^i} \tilde{\gamma}^j + \gamma_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \begin{Bmatrix} i \\ ji \end{Bmatrix} \gamma^j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \gamma_j \begin{Bmatrix} j \\ ii \end{Bmatrix} \gamma^i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j \begin{Bmatrix} j \\ ji \end{Bmatrix} \gamma^j + \gamma_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0i \end{Bmatrix} \gamma^0 \right) \\
&= \frac{\bar{\delta}}{4\delta\rho} \gamma_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 x^j \gamma^j \quad .
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Folglich ist der komplette Parallelverschiebungsterm

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = \frac{1}{4\rho} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} + \frac{2\bar{\delta}}{\delta} \right) \sum_{i=1}^3 x^i \gamma^i \tag{4.3.6}$$

und in diesem Koordinatensystem ist die Dirac-Gleichung

$$\left[i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu + \frac{i\hbar}{4\rho} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} + \frac{2\bar{\delta}}{\delta} \right) \sum_{i=1}^3 x^i \gamma^i - mc \right] \Psi = 0 \quad . \tag{4.3.7}$$

Durch Vergleich der Linienelemente im isotropen und schwarzschildartigen Koordinatensystem

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \omega(\rho)c^2dt^2 - \delta(\rho) \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] \\
&= \omega(\rho)c^2dt^2 - \delta(\rho) \left[d\rho^2 + \rho^2d\vartheta^2 + \rho^2 \sin^2(\vartheta)d\varphi^2 \right] \\
&= e^\nu c^2dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2d\vartheta^2 - r^2 \sin^2(\vartheta)d\varphi^2
\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

ergeben sich die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\omega &= e^\nu \\
r &= \sqrt{\delta}\rho \\
\frac{dr}{d\rho} &= \sqrt{\delta}e^{-\frac{\lambda}{2}}
\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

und folglich gilt auch

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= \nu'\omega\sqrt{\delta}e^{-\frac{\lambda}{2}} \\
\bar{\delta} &= \frac{2}{r} \left(e^{-\frac{\lambda}{2}} - 1 \right) \delta^{\frac{3}{2}} \\
\partial_\rho &= \frac{dr}{d\rho}\partial_r = \sqrt{\delta}e^{-\frac{\lambda}{2}}\partial_r \quad .
\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Aufgrund der Kovarianz der Dirac-Gleichung behält der Term $\gamma^\mu\partial_\mu$ seine Form. Alternativ können wir dies explizit zeigen

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\partial_\mu &= \tilde{\gamma}_0 \frac{1}{\sqrt{\omega}}\partial_{ct} - \tilde{\gamma}_1 \frac{1}{\sqrt{\delta}}\partial_\rho - \tilde{\gamma}_2 \frac{1}{\sqrt{\delta}\rho}\partial_\vartheta - \tilde{\gamma}_3 \frac{1}{\sqrt{\delta}\rho \sin(\vartheta)}\partial_\varphi \\
&= \tilde{\gamma}_0 e^{-\frac{\nu}{2}}\partial_{ct} - \tilde{\gamma}_1 e^{-\frac{\lambda}{2}}\partial_r - \tilde{\gamma}_2 \frac{1}{r}\partial_\vartheta - \tilde{\gamma}_3 \frac{1}{r \sin(\vartheta)}\partial_\varphi = \gamma^\mu\partial_\mu \quad .
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Hingegen gilt für den Verschiebungsterm

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\rho} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega} + \frac{2\bar{\delta}}{\delta} \right) \sum_{i=1}^3 x^i \gamma^i &= \frac{1}{4} \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega\sqrt{\delta}} + \frac{2\bar{\delta}}{\delta^{\frac{3}{2}}} \right) \vec{e}_\rho \vec{\gamma} \\
&= \left(\frac{\nu'}{4} e^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{r} \left(e^{-\frac{\lambda}{2}} - 1 \right) \right) \vec{e}_r \vec{\gamma} \quad ,
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

wobei wir ausnutzen, dass r und ρ in die gleiche Richtung zeigen. Dabei sehen wir davon ab, die γ -Matrizen für die neuen Koordinaten zu verwenden, sondern wir nutzen die Matrizen des flachen Raums $\tilde{\gamma}^\mu$, da dies die Gleichung vereinfacht. Eingesetzt erhalten wir die Dirac-Gleichung für schwarschildartige Metriken

$$\left[i\hbar\tilde{\gamma}_0 e^{-\frac{\nu}{2}} \partial_{ct} - \vec{\tilde{\gamma}} \left(\vec{p} + \vec{\tilde{\Gamma}} \right) - mc \right] \Psi = 0 \quad , \quad (4.3.13)$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j &:= -i\hbar\sqrt{g^{jj}}\partial_j \\ \vec{\tilde{\Gamma}} &:= -i\hbar \left[\frac{\nu'}{4} e^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{r} \left(e^{-\frac{\lambda}{2}} - 1 \right) \right] \vec{e}_r \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

eingeführt haben.

Da die Metrik sphärisch symmetrisch ist und sich somit der Unterraum der Winkelkoordinaten nicht vom flachen Raum unterscheidet, können wir erneut auf die dort auftretenden Lösungen zurückgreifen. Zudem muss die Wellenfunktion erneut separierbar sein und wir wählen (analog zu [47, Kapitel 21]) den Ansatz

$$\Psi = e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \Phi_1(r, t) \chi_\kappa^\mu(\vartheta, \varphi) \\ i\Phi_2(r, t) \chi_{-\kappa}^\mu \end{pmatrix} \quad , \quad (4.3.15)$$

wobei κ als

$$\kappa = \begin{cases} -(j + \frac{1}{2}) & \text{falls } j = l + \frac{1}{2} \\ j + \frac{1}{2} & \text{falls } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad , \quad (4.3.16)$$

und die sogenannten Zweierspinoren $\chi_{\pm\kappa}^\mu$ über die Relation

$$\chi_{\kappa, \mu} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+\mu}{2j}} Y_{l, \mu - \frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-\mu}{2j}} Y_{l, \mu + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} & j = l + \frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-\mu+1}{2j+2}} Y_{l, \mu - \frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+\mu+1}{2j+2}} Y_{l, \mu + \frac{1}{2}} \end{pmatrix} & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.3.17)$$

in Abhängigkeit vom Drehimpuls j , seiner Projektion auf die z -Achse μ und dem Bahndrehimpuls l definiert werden [30, Kapitel 9.3]. Die kompliziertere Form der Winkellösung im Vergleich zur Schrödingergleichung oder Klein-Gordon-Gleichung entsteht dabei durch die in Kapitel 3.3 angesprochene Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls und kann beispielsweise in [30, Kapitel 9.3] nachgeschlagen werden.

Setzen wir das und die Blockform der γ -Matrizen im Minkowskiraum (3.4.53) ein, erhalten wir einen Term proportional zu

$$\vec{\sigma} \left(\vec{p} + \vec{\Gamma} \right) \begin{pmatrix} i\Phi_2 \chi_{-\kappa}^\mu \\ -\Phi_1 \chi_\kappa^\mu \end{pmatrix} . \quad (4.3.18)$$

Für dessen Auswertung nutzen wir die Relationen

$$(\vec{\sigma}\vec{a}) (\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma} (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (4.3.19)$$

$$(\vec{\sigma}\vec{L}) \chi_\kappa^\mu = -\hbar(\kappa + 1) \chi_\kappa^\mu \quad (4.3.20)$$

$$(\vec{\sigma}\vec{L}) \chi_{-\kappa}^\mu = \hbar(\kappa - 1) \chi_{-\kappa}^\mu \quad (4.3.21)$$

$$(\vec{\sigma}\vec{e}_r) \chi_{\pm\kappa}^\mu = -\chi_{\mp\kappa}^\mu \quad (4.3.22)$$

aus [30, Kapitel 9.3]. Folglich erhalten wir

$$\vec{\sigma} \left(\vec{p} + \vec{\Gamma} \right) = (\vec{\sigma}\vec{e}_r)^2 \vec{\sigma} \left(\vec{p} + \vec{\Gamma} \right) = (\vec{\sigma}\vec{e}_r) \left(\vec{p}_r + \vec{\Gamma}_r + i\vec{\sigma} (\vec{e}_r \times \vec{p}) \right) . \quad (4.3.23)$$

Der Operator \vec{p} unterscheidet sich nur im radialen Anteil von dem Impulsoperator im Minkowskiraum, sodass

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4.3.24)$$

gilt und wir $\vec{\sigma} \left(\vec{p} + \vec{\Gamma} \right)$ mittels

$$\vec{\sigma} \left(\vec{p} + \vec{\Gamma} \right) = (\vec{\sigma}\vec{e}_r) \left(\vec{p}_r + \vec{\Gamma}_r + i\frac{1}{r}\vec{\sigma}\vec{L} \right) \quad (4.3.25)$$

ersetzen können. Durch Kürzen des Winkelanteils erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
(1) \quad i\hbar\partial_t\Phi_1 &= -i\hbar c r e^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{\lambda}{4}} \left[-ie^{-\frac{\lambda}{2}}\partial_r + \frac{\tilde{\Gamma}_r}{\hbar} + i\frac{\kappa-1}{r} \right] e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{1}{r} \Phi_2 + mc^2 e^{\frac{\nu}{2}} \Phi_1 \\
(2) \quad i\hbar\partial_t\Phi_2 &= i\hbar c r e^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{\lambda}{4}} \left[-ie^{-\frac{\lambda}{2}}\partial_r + \frac{\tilde{\Gamma}_r}{\hbar} - i\frac{\kappa+1}{r} \right] e^{-\frac{\lambda}{4}} \frac{1}{r} \Phi_1 - mc^2 e^{\frac{\nu}{2}} \Phi_2 \quad . \quad (4.3.26)
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen des Faktors $\frac{1}{r}$ mit dem Impuls und gleichzeitiges Vorbeiziehen des Terms $e^{\frac{\nu}{4}}$ nach rechts am Impuls vorbei, ergibt sich daraus eine recht elegante Form des Gleichungssystems

$$i\hbar\partial_t\Phi = -i\hbar c\alpha_r e^{\frac{\nu-\lambda}{4}} \partial_r e^{\frac{\nu-\lambda}{4}} \Phi - i\hbar c\beta_r \alpha_r e^{\frac{\nu}{2}} \frac{\kappa}{r} \Phi + mc^2 e^{\frac{\nu}{2}} \beta_r \Phi \quad , \quad (4.3.27)$$

sofern wir den Vektor $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$ und die Matrizen

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.3.28)$$

definieren [47].

Betrachten wir gebundene Zustände, können wir Φ wie folgt ansetzen

$$\Phi(r, t) = e^{\frac{\lambda-\nu}{4}} \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad . \quad (4.3.29)$$

Umgestellt nach der radialen Ableitung erhalten wir dann die in [47] angegebene Form der Dirac-Gleichung für gebundene Zustände in einer schwarschildartigen Metrik

$$\frac{d}{dr} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = e^{\frac{\lambda}{2}} \begin{pmatrix} -\frac{\kappa}{r} & \frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \\ \frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} & \frac{\kappa}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad . \quad (4.3.30)$$

4.3.2. Numerisches Lösungsverfahren und Startwerte

Da das Matrixdiagonalisationsverfahren für die Klein-Gordon-Gleichung wenig erfolgreich war, beschränken wir uns für die Dirac-Gleichung auf die Beschreibung als An-

fangswertproblem. Dafür entkoppeln wir zuerst die Dirac-Gleichung, indem wir die obere Gleichung nach g umstellen, ableiten und dann die beiden Ausdrücke in die untere Gleichung einsetzen

$$g = \frac{f'e^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{\kappa}{r}f}{\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}} \quad (4.3.31)$$

$$g' = \frac{f''e^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{\lambda'}{2}f'e^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{\kappa}{r}f' - \frac{\kappa}{r^2}f}{\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}} + \frac{E\nu'}{2\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}} \frac{f'e^{-\frac{\lambda}{2}} + \frac{\kappa}{r}f}{\left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 0 = f'' + \left(-\frac{\lambda'}{2} + \frac{\frac{E\nu'}{2\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}}{\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}}\right) f' - \left[\frac{\kappa(\kappa e^{\frac{\lambda}{2}} + 1)}{r^2} - \frac{\frac{E\nu'\kappa}{2\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}}{\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}} + \left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2c^2}e^{-\nu}\right)e^{\frac{\lambda}{2}}\right] e^{\frac{\lambda}{2}} f$$

(4.3.32)

um ein Gleichung für f zu erhalten. Analog erhalten wir eine Gleichung für g durch Umstellen der unteren und Einsetzen in die obere Gleichung

$$f = \frac{g'e^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{\kappa}{r}g}{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}} \quad (4.3.33)$$

$$f' = \frac{g''e^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{\lambda'}{2}g'e^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{\kappa}{r}g' + \frac{\kappa}{r^2}g}{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}} - \frac{E\nu'}{2\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}} \frac{g'e^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{\kappa}{r}g}{\left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow 0 = g'' - \left(\frac{\lambda'}{2} + \frac{\frac{E\nu'}{2\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}}{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}}\right) g' - \left[\frac{\kappa(\kappa e^{\frac{\lambda}{2}} - 1)}{r^2} - \frac{\frac{E\nu'\kappa}{2\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}}{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c}e^{-\frac{\nu}{2}}} + \left(\frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2c^2}e^{-\nu}\right)e^{\frac{\lambda}{2}}\right] e^{\frac{\lambda}{2}} g$$

(4.3.34)

Beginnen wir wieder damit unsere Startwerte zu berechnen, indem wir die Dirac-Gleichung nahe des Ursprungs lösen. Da die Herleitung aufwändiger ist als die entsprechende der Klein-Gordon-Gleichung, verweisen wir hierfür auf den Anhang E und geben hier nur das Ergebnis an

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \approx A \begin{cases} \begin{pmatrix} r^{-\kappa} \\ -\frac{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c\sqrt{\alpha}}}{2\kappa-1} r^{-\kappa+1} \end{pmatrix} & \kappa < 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c\sqrt{\alpha}}}{2\kappa+1} r^{\kappa+1} \\ r^{\kappa} \end{pmatrix} & \kappa > 0 \end{cases} \quad (4.3.35)$$

Betrachten wir zudem abermals die Näherungslösungen der Außenmetriken ((2.3.23) und (2.3.24)) für große Radien. In führender Ordnung sind die Metrikterme

$$\begin{aligned} e^\nu &= e^{-\lambda} \approx 1 \\ \nu' &= -\lambda' \approx \frac{r_s}{r^2} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

und daraus folgt für die entkoppelten Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f'' + \left(\frac{r_s}{2} + \frac{Er_s}{2mc^2 + 2E} \right) \frac{f'}{r^2} - \left(\frac{m^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \right) f \\ 0 &= g'' + \left(\frac{r_s}{2} - \frac{Er_s}{2mc^2 - 2E} \right) \frac{g'}{r^2} - \left(\frac{m^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \right) g \quad . \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

Vernachlässigen wir die Terme proportional zur ersten Ableitung (durch die Lösung gerechtfertigt), dann ergibt sich wie schon bei der Klein-Gordon-Gleichung entweder ein exponentieller Anstieg oder Abfall

$$\begin{aligned} f(r) &= Ae^{ar} + Be^{-ar} \\ g(r) &= Ce^{ar} + De^{-ar} \\ a &= \sqrt{\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2}} \quad . \end{aligned} \quad (4.3.38)$$

Setzen wir (4.3.38) in (4.3.30) ein, erhalten wir die entsprechenden Näherungslösungen. Für freie Zustände sind sie

$$\begin{aligned} f(r) &\approx Ae^{ar} \\ g(r) &\approx \sqrt{\frac{mc^2 - E}{mc^2 + E}} Ae^{ar} \end{aligned} \quad (4.3.39)$$

und für gebundene Zustände ergibt sich

$$\begin{aligned} f(r) &\approx Ae^{-ar} \\ g(r) &\approx -\sqrt{\frac{mc^2 - E}{mc^2 + E}} Ae^{-ar} \end{aligned} \quad (4.3.40)$$

Folglich können erneut nur für $|E| < mc^2$ gebundene Zustände auftreten, da diese normierbar sind. Weiterhin zeigen (4.3.39) und (4.3.40), dass für $|E| < mc^2$ f und g entweder

in die selbe Richtung divergieren oder aus unterschiedlichen Richtungen gegen 0 konvergieren.

Im Anhang F wird gezeigt, dass die freien Zustände der Dirac-Gleichung für große Radien in unterschiedliche Richtungen divergieren, wenn zwischen ihren Energien ein Eigenzustand liegt. Zudem wird hergeleitet, dass f den letzten Knoten besitzt, wenn die Energie über der des Eigenzustands liegt, wohingegen für geringere Energien g den letzten Knoten aufweist. Analog zur Klein-Gordon-Gleichung verbieten (4.3.32) und (4.3.34) das Auftreten eines Orts, an dem die jeweilige Funktion und ihre Ableitung verschwindet. Jedoch sind die Gleichungen nicht gültig, wenn die beiden Vorfaktoren des Ableitungsterms und des Funktionsterms divergieren, das heißt für $mc^2 \pm Ee^{-\frac{\nu}{2}} = 0$. Beschränken wir uns nun auf positive Energien, da die Dirac-Gleichung (4.3.30) für die Transformation $E \rightarrow -E$, $\kappa \rightarrow -\kappa$ und $f \leftrightarrow g$ in sich selbst übergeht. Dann kann f keine solche Stelle besitzen und folglich gilt analog zur Klein-Gordon-Gleichung, dass f für eine Energie direkt über dem Eigenzustand einen Knoten mehr besitzt als für den Eigenzustand selbst. Da zudem die Lösungen der Differentialgleichungen

$$f' = \pm \frac{|\kappa|}{r} e^{\frac{\lambda}{2}} f \quad (4.3.41)$$

keine Nullstellen besitzen, solange $e^{\frac{\lambda}{2}}$ nicht divergiert, kann ein Vorzeichenwechsel von f nur dann stattfinden, wenn $\left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}}\right) e^{\frac{\lambda}{2}} g f < 0$ gilt. Für positive Energien ist das analog zu $f g < 0$. Folglich kann g maximal eine Nullstelle weniger als f besitzen (für $f(\epsilon) \cdot g(\epsilon) < 0$ sonst keine). Analog kann g nur dann sein Vorzeichen wechseln, wenn $\left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}}\right) e^{\frac{\lambda}{2}} f g < 0$ ist. Dies bedeutet, dass für $E = 0$ weder f noch g einen Knoten besitzen, sofern $f(\epsilon) \cdot g(\epsilon) > 0$ ist. Starten sie hingegen mit unterschiedlichem Vorzeichen hat eine der beiden Funktionen einen Knoten, da sie für große Radien in die gleiche Richtung divergieren (vorausgesetzt es handelt sich um keinen gebundenen Zustand). Anhand der Näherungslösung (4.3.35) sehen wir, dass für kleine Radien und $\kappa < 0$ f betragsmäßig größer als g ist und für $\kappa > 0$ g größer als f . Dieser Unterschied wird jeweils noch durch die Differentialgleichung verstärkt, sodass für $E = 0$ g den Knoten

für $\kappa < 0$ und f ihn für $\kappa > 0$ besitzt. Das bedeutet, dass für positive Energien f für den Grundzustand (beziehungsweise für den niedrigsten Zustand dieses Drehimpulses) keinen Knoten besitzt und der n -te angeregte Zustand exakt n Knoten besitzt. Wie schon bei Klein-Gordon wird jeder Zustand durch seinen Drehimpuls und die Zahl der radialen Knoten eindeutig identifiziert und in Anlehnung an das Wasserstoffatom nutzen wir die Anzahl aller Knoten plus eins als Hauptquantenzahl (das heißt $n = n_r + l + 1$, wobei n_r die Anzahl radialer Knoten ist). Zusätzlich geben wir noch die Gesamtdrehimpuls- und die Bahndrehimpulsquantenzahl an, um den Zustand eindeutig zu identifizieren.

Somit können wir die Energieeigenwerte der Dirac-Gleichung analog zur Klein-Gordon-Gleichung bestimmen, indem wir die Wellenfunktion für zwei verschiedene Energiewerte mittels Runge-Kutta-Verfahren simulieren (alternativ Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren) und die Anzahl der Knoten von f zu zählen (negative Energien werden aufgrund der Symmetrie nicht betrachtet). Danach wird das Intervall solange verkleinert, bis wir zwei Werte mit der gewünschten Anzahl an Knoten gefunden haben. Dabei wird jede Energie und die zugehörige Anzahl der Knoten gespeichert, damit wir für höhere Zustände direkt mit einem kleineren Intervall beginnen können. Danach verkleinern wir mittels eines exponentiellen Bisektionsverfahrens (Minimierung des relativen Fehlers) das Intervall solange, bis der relative Unterschied der beiden Grenzen nur noch $1.0 \cdot 10^{-6}$ ist. Die weiteren Details des Programms sind im Anhang C zu finden.

Alternative Methoden zu der hier vorgestellten können in der Literatur gefunden werden (beispielsweise [48, 50]).

4.3.3. Wahl der Parameter

Die freien Parameter für das im vorherigen Unterkapitel vorgestellte Verfahren sind M , m , κ und die beiden Grenzen des Anfangsenergieintervalls. Analog zur Klein-Gordon-Gleichung wollen wir wieder die niedrigsten Zustände bestimmen und können deshalb κ

auf Werte für kleine Bahndrehimpulse beschränken. Für die üblichen Rechnungen wählen wir $-3 \leq \kappa < 3$, da sich gezeigt hat, dass der $3d_{\frac{3}{2}}$ Zustand häufig zu den niedrigsten fünf zählt. Die typischen Längenskalen der Dirac-Gleichung sind analog zur Klein-Gordon-Gleichung die Compton-Wellenlänge des Teilchens und der gravitative Radius. Zudem bleibt auch die Dirac-Gleichung für die Skalierung (4.2.58) unverändert. Insofern ist erneut nur das Produkt der Massen relevant. Jedoch schränken wir den Bereich des Produktes, für den wir die Energieeigenwerte berechnen, nun auf $0,05m_{Pl}^2$ bis $1000m_{Pl}^2$ ein, da die Energieeigenwerte für Klein-Gordon im Bereich $0,001m_{Pl}^2$ bis $0,05m_{Pl}^2$ für fast alle Szenarien innerhalb der numerischen Genauigkeit mc^2 sind.

4.3.4. Ergebnisse

Wir beginnen mit der Reproduktion der Ergebnisse von [47, Fig. 21.1] zum Test des selbst geschriebenen Programms „RKDirac“. Da die Simulationsparameter weder im Buch [47] noch in [48] angegeben sind, wurde auch für diese Fälle eine systematische Studie durchgeführt. Von den errechneten Werten zeigen die beiden Graphen für das Produkt $Mm = 1m_{Pl}^2$, die beste Übereinstimmung. Die zugehörigen Graphen Abbildung 4.13 und Abbildung 4.14 zeigen die errechneten positiven Energiewerte für die fünf niedrigsten Zustände. Dabei wurden die Grafiken auf die gleiche Art wie bei der Klein-Gordon-Gleichung erstellt, sodass das Verfahren dort (Kapitel 4.2.4) nachgelesen werden kann. Die negativen Eigenzustände können erneut durch Spiegelung an der x-Achse gewonnen werden.

Auch für die Dirac-Gleichung sind die Zustände für Massenprodukte kleine $0,1m_{Pl}^2$ in fast allen Szenarien ungebunden und die Ergebnisse des dritten Modells (4.0.3) reihen sich dabei nahtlos ein. Die Grafik 4.15 zeigt die Bindungsenergie des Grundzustands normiert auf die des klassischen Grenzwerts in Abhängigkeit des Massenprodukts. Die innere Metrik geht bei $r_0 = 1,3r_s$ in die äußere Metrik über und der qualitative Verlauf der

Abhängigkeit ist analog zu dem für die anderen Modelle bei der Klein-Gordon-Gleichung, wie am Beispiel der Abbildung 4.1 zu sehen ist (Für die anderen beiden Modelle gilt dies ebenfalls weiterhin. Beispielsweise zeigt die Grafik 4.16 das Verhalten für Modell 1 (4.0.1) für $r_0 \approx 0.8r_s$ und $B = 0.3r_s^3$). Vergleichen wir die Massenabhängigkeit der kleinsten Energiewerte für die Dirac-Gleichung mit denen der Klein-Gordon-Gleichung für die gleichen Parameter fällt auf, dass der qualitative Verlauf übereinstimmt, aber die Diraczustände etwas schwächer gebunden sind (siehe dafür die Abbildungen 4.17 und 4.5 und 4.18 und 4.7 im direkten Vergleich). In Anbetracht der höheren Drehimpulsbarriere ist dies jedoch wenig verwunderlich.

Zudem ist die Bindung für Modell 3 (4.0.3) für gleich große Objekte stärker als in Modell 1 (4.0.1), aber schwächer als in Modell 2 (4.0.2), wie der Vergleich der drei Grafiken 4.17, 4.18 und 4.19 zeigt.

Diese Übereinstimmung lässt sich auch für die Energien in Abhängigkeit des Übergangspunkts betrachten, so zeigt der energetische Verlauf der Grafiken 4.20 und 4.10 große Ähnlichkeiten. Dies gilt ebenfalls für das zweite Modell (4.0.2) für die Abbildungen 4.13 und 4.12. Die Ergebnisse für Modell 3 (siehe Grafik 4.14) zeigen erneut ein Verhalten, dass wir bei den anderen beiden Modellen noch nicht beobachten konnten. Für kleine Radien steigt die Energie massiv mit dem Übergangsradius an, um dann langsam in eine Sättigungskurve überzugehen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass die innere Metrik konstant ist und somit der Verlauf somit in engen Zusammenhang mit $1 - \frac{r_s}{r_0}$ steht, dessen Steigung in Abhängigkeit von r_0 mit r_0^2 fällt.

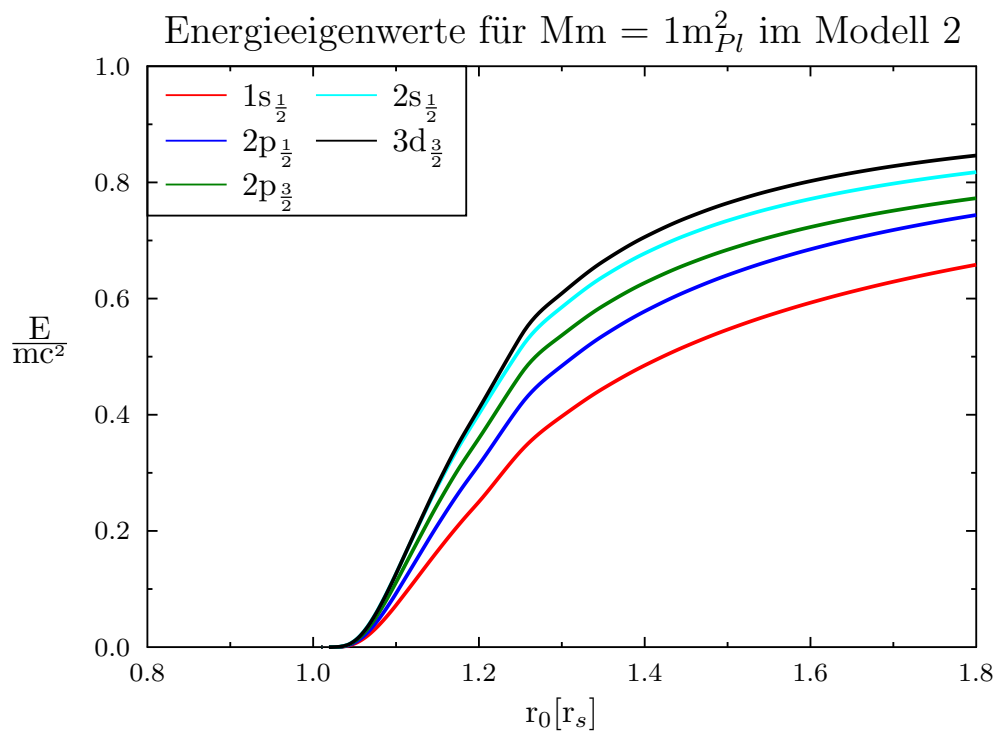


Abbildung 4.13.: Die fünf niedrigsten Energieeigenwerte der Dirac-Gleichung in Abhängigkeit von der Ausdehnung des Zentralobjekt r_0 für das Metrikmodell 2 (4.0.2).

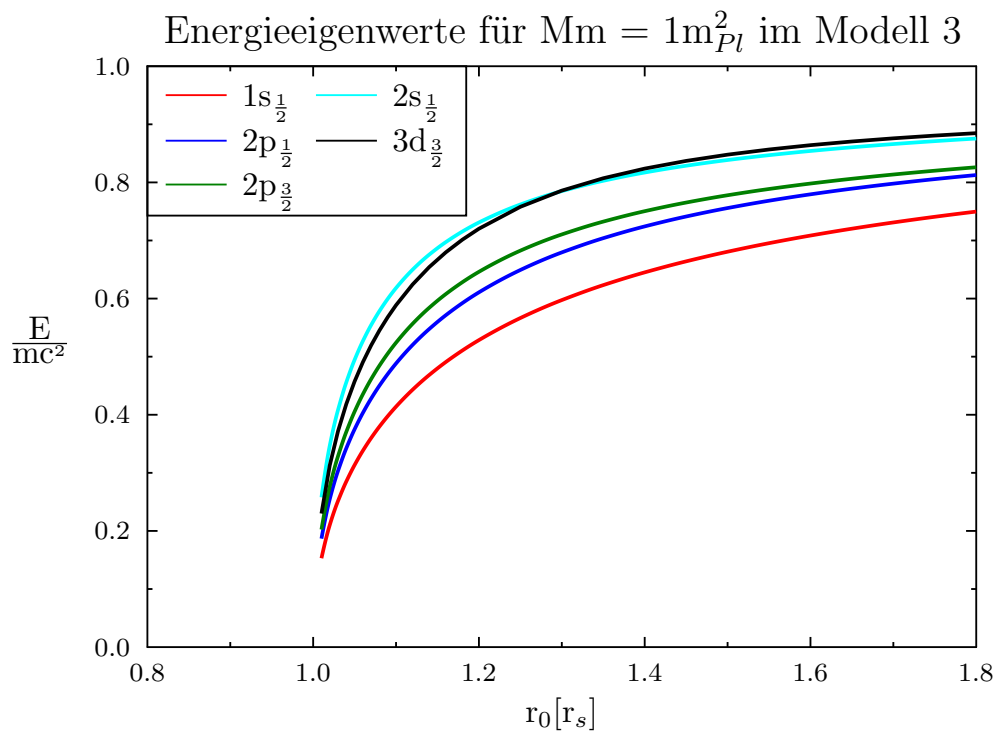


Abbildung 4.14.: Die fünf niedrigsten Energieeigenwerte der Dirac-Gleichung im Schalenmodell (Modell 3 (4.0.3)) in Abhängigkeit von der Ausdehnung des Zentralobjekt r_0 .

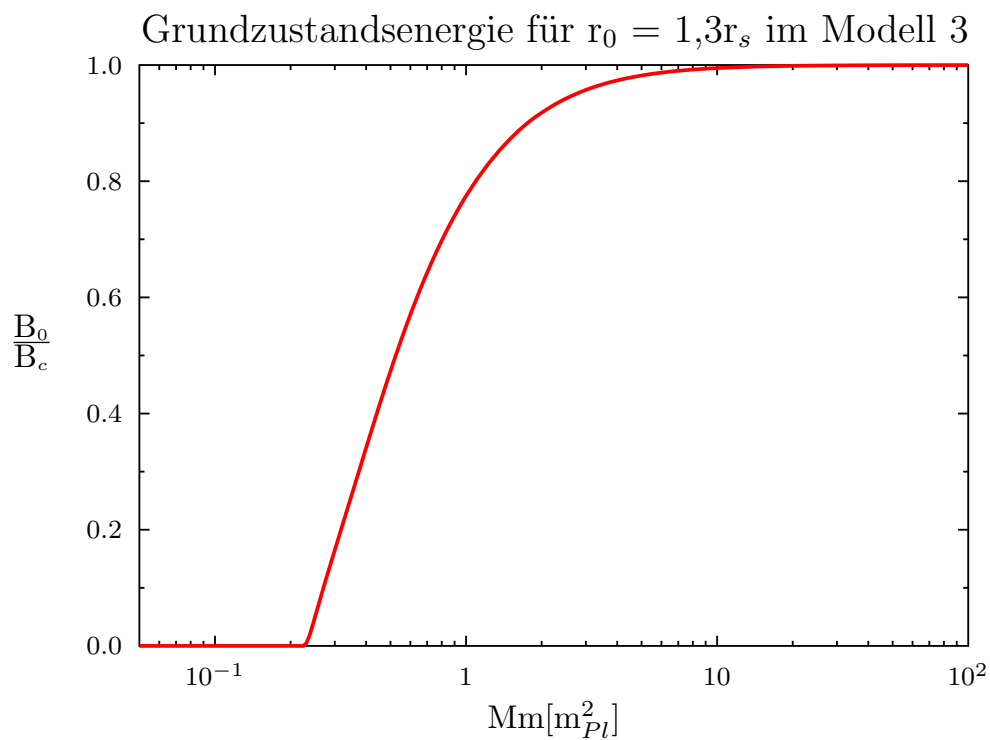


Abbildung 4.15.: Die Bindungsenergie des Grundzustands der Dirac-Gleichung im Schalenmodell (Modell 3 (4.0.3)) in Abhängigkeit des Massenprodukts für $r_0 = 1,3r_s$ normiert auf die Bindungsenergie des klassischen Grenzwerts $B_c = mc^2 - E_c = mc^2 \left(1 - \min_r e^{\frac{\nu}{r}}\right)$.

Grundzustandsenergie für $r_0 = 1,2r_{min}$ und $pc = 0,3$ im Modell 1

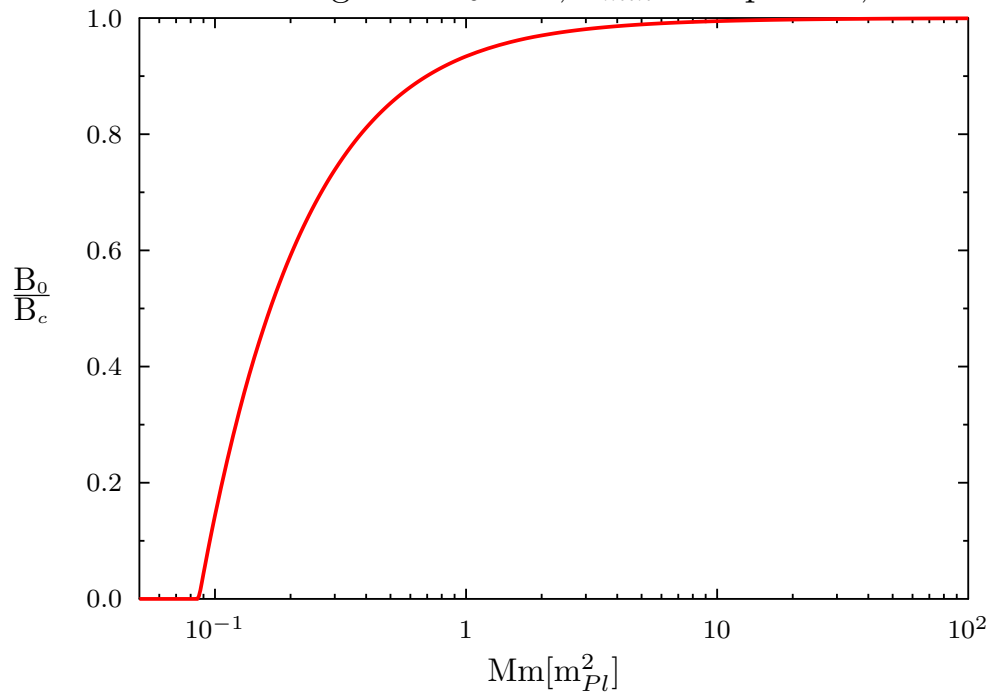


Abbildung 4.16.: Die Bindungsenergie des Grundzustands der Dirac-Gleichung im Modell 1 (4.0.1) in Abhängigkeit des Massenprodukts für $r_0 = 1,2r_{min} \approx 0,8r_s$ und $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ normiert auf die Bindungsenergie des klassischen Grenzwerts $B_c = mc^2 - E_c = mc^2 \left(1 - \min_r e^{\frac{\nu}{2}}\right)$.

Energieeigenwerte für $r_0 = 1,65r_{min}$ und $pc = 0,3$ im Modell 1

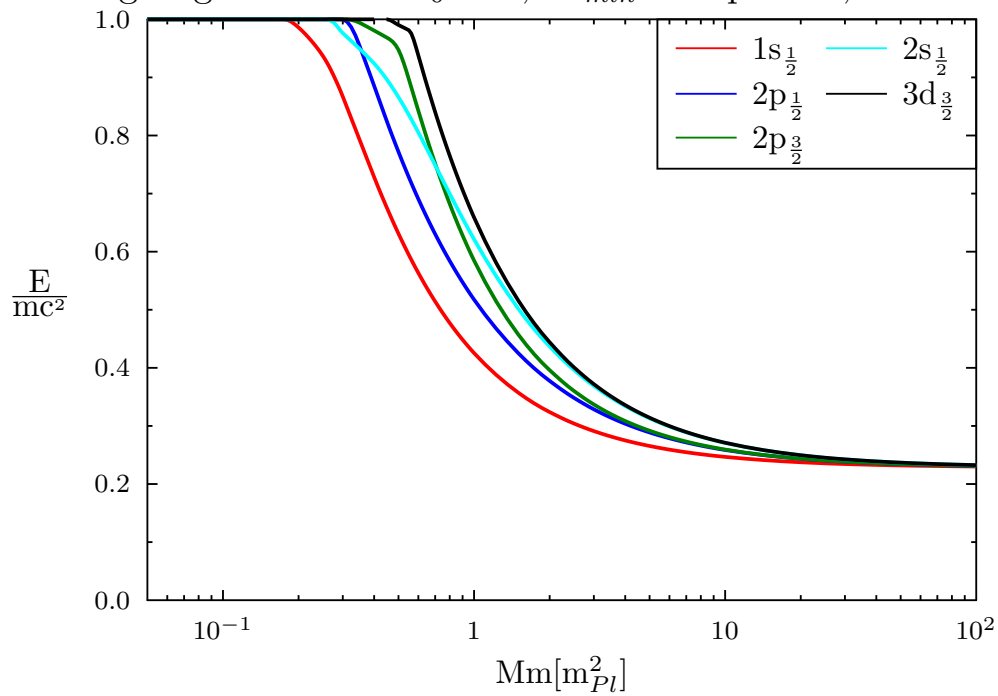


Abbildung 4.17.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Dirac-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 1 (4.0.1) mit dem Übergangspunkt $r_0 = 1,65r_{min} \approx 1,1r_s$ für $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$.

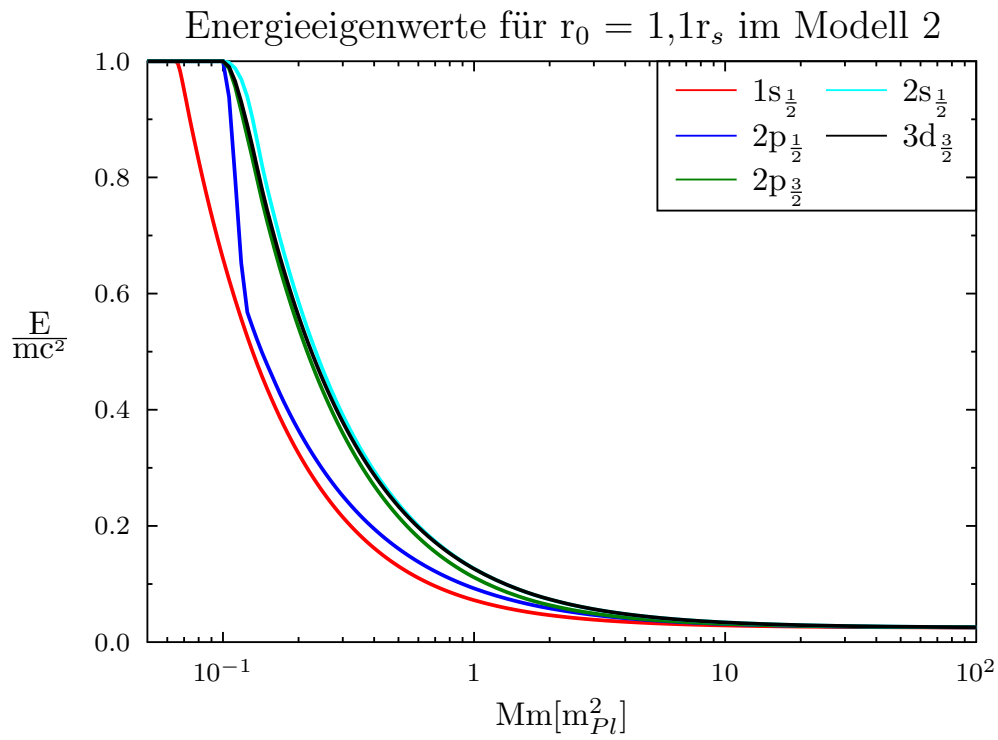


Abbildung 4.18.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Dirac-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 2 (4.0.2) mit dem Übergangspunkt $r_0 = 1,1r_s$.

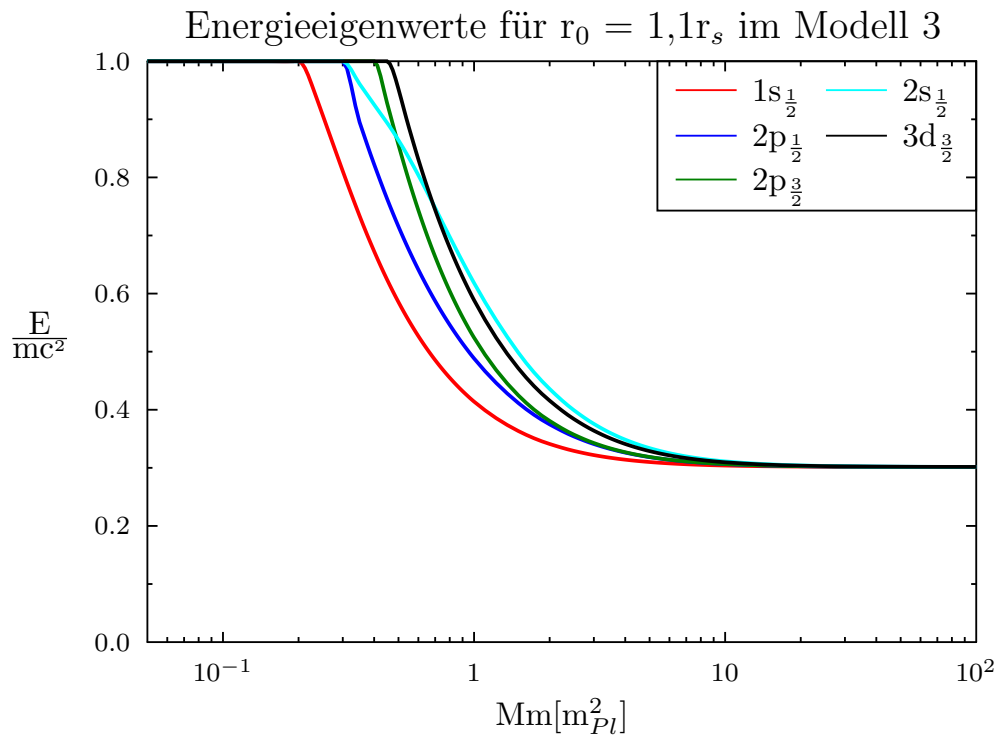


Abbildung 4.19.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Dirac-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Massenprodukts für das Modell 3 (4.0.3) mit dem Übergangspunkt $r_0 = 1,3r_s$.

Energieeigenwerte für $Mm = 1m_{Pl}^2$ und $pc = 0,3$ im Modell 1

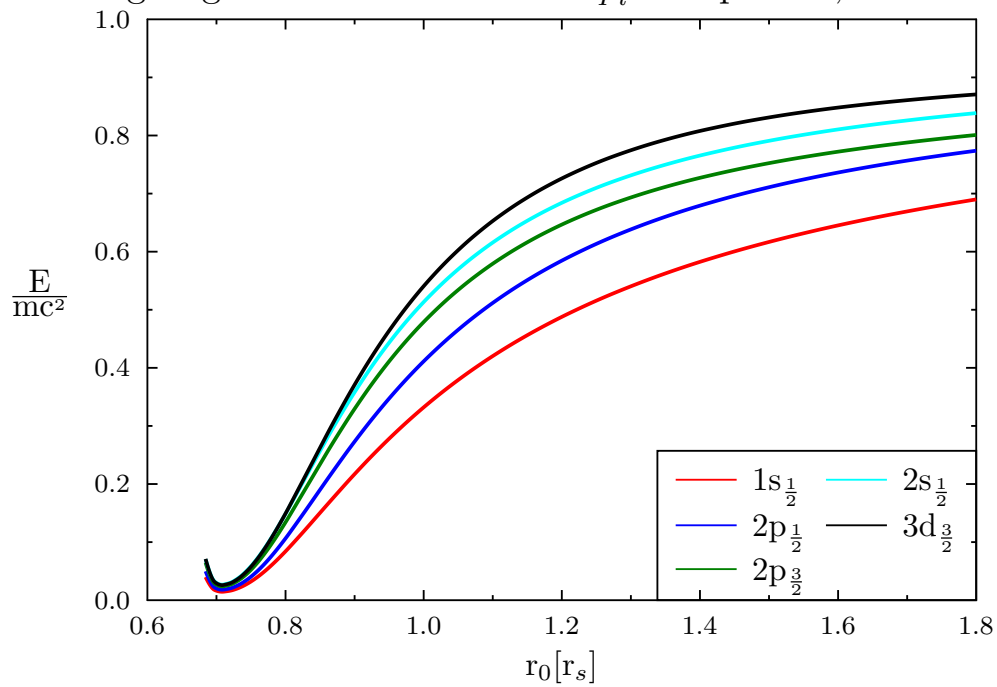


Abbildung 4.20.: Die Energie der fünf niedrigsten Eigenzustände der Dirac-Gleichung normiert auf die Testmasse in Abhängigkeit des Übergangspunkts r_0 für das Modell 1 (4.0.1) mit $B = pc r_s^3 = 0,3r_s^3$ und dem Massenprodukt $Mm = 1m_{Pl}^2$.

5. Quantenfeldtheorie und Vakuumfluktuationen

In diesem Kapitel untersuchen wir Vakuumfluktuationen in gekrümmten Räumen in Anwesenheit von Materie und leiten ein simples qualitatives Modell der Vakuumfluktuationsdichte in Abhängigkeit der Massendichte her, um die in [13] vorgestellten Ergebnisse für Neutronensterne in der pk-ART gegebenenfalls zu verfeinern. Dafür beginnen wir mit einer kurzen Einführung in die Quantenfeldtheorie für spinlose Bosonen im flachen und diskutieren danach die grundlegenden Anpassungen für den gekrümmten Raum. Im Anschluss skizzieren wir die Renormalisierung des Erwartungswerts des zweidimensionalen Energie-Impuls-Tensors, formen das Ergebnis für unsere Bedürfnisse um und beenden das Kapitel mit der Entwicklung des Modells. Dabei können die Grundlagen in [1, 18, 51] nachgeschlagen werden.

5.1. Quantenfeldtheorie in flachen Räumen

Wie wir in Kapitel 3.4 gesehen haben, können wir die relativistischen Wellengleichungen nicht als Einteilchenwellenfunktionen interpretieren. Andererseits ist es zumindest für die Energieeigenfunktionen möglich, einzelne Teilchen und ihre Eigenschaften zu messen, sodass vom klassischen Standpunkt her ein Widerspruch entsteht, da wir die Funktion

Ψ weder als Welle noch als Teilchen interpretieren können. Diesen Widerspruch können wir durch eine zweite Quantisierung auflösen, wenn wir an Stelle der Koordinaten eines Teilchens die kontinuierliche Wellenfunktion Ψ quantisieren.

Wir könnten den in Kapitel 3.2 gewählten anschaulichen Weg zur Identifikation der Operatoren und Gleichungen für Felder wiederholen. Dies ist jedoch nicht nötig, da wir die dortigen Ergebnisse ebenfalls durch das deutlich einfachere Postulat herleiten können, dass die Poissonklammer der klassischen Mechanik (siehe [35, Kapitel 6]) für die Operatoren quantenmechanischer Systeme in den Kommutator gemäß der Vorschrift

$$\{f, g\} \rightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (5.1.1)$$

übergeht. Weiterhin kann eine klassische Feldgleichung aus dem Grenzwert eines diskreten Systems gewonnen werden (siehe [52, Kapitel 13]), sodass wir diese Quantisierungsvorschrift ebenfalls für Felder verwenden können. Dabei übernimmt die Feldstärke an einem bestimmten Raumzeitpunkt die Rolle der Koordinate eines Teilchens und die zum Impuls äquivalente Größe ist die zugehörige Impulsdichte, die durch Ableitung der Lagrangedichte \mathcal{L} des Systems gewonnen werden kann [1, 52]:

$$\pi_i(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}(\Psi_k(x^\mu), \partial_\nu \Psi_k(x^\mu))}{\partial (\partial_0 \Psi_i)} \quad (5.1.2)$$

Da jedoch die quantenmechanischen Felder nicht die Einheit eines Ortes haben, müssten wir diese hier anpassen. Dies umgehen wir, indem wir für die Herleitungen dieses Kapitels die natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$) benutzen. Somit sind die Quantisierungsbedingungen für Felder

$$\begin{aligned} [\hat{\Psi}_j(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_k(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\hat{\pi}_j(\vec{x}, t), \hat{\pi}_k(\vec{x}', t)] &= 0 \\ [\hat{\pi}_j(\vec{x}, t), \hat{\Psi}_k(\vec{x}', t)] &= -i\delta_{jk}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad . \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Zudem erhalten wir mit dieser Vorschrift ebenfalls die zeitliche Änderung der Operatoren, sofern wir das Heisenberg-Bild benutzen

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{\Psi}_k}{dt} &= i [\hat{H}, \hat{\Psi}_k] \\ \frac{d\hat{\pi}_k}{dt} &= i [\hat{H}, \hat{\pi}_k] \quad .\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

Dabei können wir den Hamiltonoperator durch Integration des Hamiltondichteoperators $\hat{\mathcal{H}} = \hat{T}_{00}$ berechnen, den wir zusammen mit dem restlichen Energie-Impuls-Tensor des Feldes durch Betrachten einer infinitesimalen Koordinatenverschiebung erhalten [1, Kapitel 11]:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = -\hat{g}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{L}} + \hat{g}_{\mu\sigma} \sum_k \left(\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\sigma \hat{\Psi}_k)} \frac{\partial \hat{\Psi}_k}{\partial x^\nu} \right) \quad .\tag{5.1.5}$$

Beschränken wir uns im Weiteren auf skalare (spinlose) Felder, dann benötigen wir eine Lagrangedichte, deren Lagrange-Gleichung die Klein-Gordon-Gleichung (3.4.15) ist. Hierfür wird in der Literatur üblicherweise (siehe [1, 18])

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\eta^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - m^2 \Psi^2 \right)\tag{5.1.6}$$

verwendet. Somit ist der zum Feld zugehörige Impuls die Ableitung der Wellenfunktion

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Psi)} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^0}\tag{5.1.7}$$

und der Energie-Impuls-Tensor ist durch

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} m^2 \Psi^2\tag{5.1.8}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \pi \frac{\partial \Psi}{\partial x^0} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\pi^2 - \eta^{jk} \frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \frac{\partial \Psi}{\partial x^k} + m^2 \Psi^2 \right)\tag{5.1.9}$$

gegeben.

Wie schon in Kapitel 4 können wir das Feld in eine Basis des Raums entwickeln. Nutzen wir dafür die Basis der ebenen Wellen, die die Klein-Gordon-Gleichung erfüllen, dann

erhalten wir für das quantisierte Feld ([1])

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \left[\hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x} + i\omega_k t} \right] \\ &:= \int d^3k \left[\hat{a}(\vec{k}) f_{\vec{k}}(x^\mu) + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) f_{\vec{k}}^*(x^\mu) \right] \quad ,\end{aligned}\tag{5.1.10}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\omega_k &= \sqrt{k^2 + m^2} \\ f_{\vec{k}}(x) &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t}\end{aligned}\tag{5.1.11}$$

verwendet wurden. Die Entwicklungskoeffizienten wurden durch hermitesche Operatoren ersetzt, damit das Feld hermitesch und damit eine reale Messgröße ist. Drehen wir die Entwicklung um, dann erhalten wir

$$\hat{a}(\vec{k}) = i \int \left(f_{\vec{k}}^*(x^\mu) \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t} - \frac{\partial f_{\vec{k}}^*(x^\mu)}{\partial t} \hat{\Psi} \right) d^3x \quad .\tag{5.1.12}$$

Dies lässt sich mit Hilfe des Pseudoskalarprodukts

$$(\Psi_1, \Psi_2) = -i \int [\Psi_1 \partial_t \Psi_2^* - (\partial_t \Psi_1) \Psi_2^*] d^3x\tag{5.1.13}$$

vereinfachen zu

$$\hat{a}(\vec{k}) = (\Psi, f_{\vec{k}}) \quad .\tag{5.1.14}$$

Nutzen wir dies und (5.1.3), dann folgt daraus

$$\begin{aligned}[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= \int \int d^3x d^3y \left\{ f_{\vec{k}}^*(x^\mu) f_{\vec{k}'}(y^\mu) [\partial_t \hat{\Psi}(x^\mu), \partial_t \hat{\Psi}(y^\mu)] \right. \\ &\quad - (\partial_t f_{\vec{k}}^*(x^\mu)) f_{\vec{k}'}(y^\mu) [\hat{\Psi}(x^\mu), \partial_t \hat{\Psi}(y^\mu)] \\ &\quad - f_{\vec{k}}^*(x^\mu) (\partial_t f_{\vec{k}'}(y^\mu)) [\partial_t \hat{\Psi}(x^\mu), \hat{\Psi}(y^\mu)] \\ &\quad \left. + (\partial_t f_{\vec{k}}^*(x^\mu)) (\partial_t f_{\vec{k}'}(y^\mu)) [\partial_t \hat{\Psi}(x^\mu), \partial_t \hat{\Psi}(y^\mu)] \right\} \\ &= -i \int d^3x \left\{ f_{\vec{k}'}(x^\mu) \partial_t f_{\vec{k}}^*(x^\mu) - [\partial_t f_{\vec{k}'}(x^\mu)] f_{\vec{k}}^*(x^\mu) \right\} \\ &= (f_{\vec{k}'}, f_{\vec{k}}) = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

und analog erhalten wir

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}(\vec{k}')] &= 0 \\ [\hat{a}^\dagger(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Setzen wir zudem das entwickelte Feld in den Hamiltonoperator ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \mathcal{H} d^3x = \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3k d^3k'}{16\pi^3 \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left\{ \left(-\omega_k \omega_{k'} - \sum_j k_j k'_j + m^2 \right) \right. \\ &\quad \left[\hat{a}(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}') e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x} - i(\omega_k + \omega_{k'})t} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}') e^{-i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{x} + i(\omega_k + \omega_{k'})t} \right] \\ &\quad \left(\omega_k \omega_{k'} + \sum_j k_j k'_j + m^2 \right) \left[\hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}') e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x} - i(\omega_k - \omega_{k'})t} \right. \\ &\quad \left. \left. \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}') e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x} + i(\omega_k - \omega_{k'})t} \right] \right\} d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \right] \quad . \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Somit ist der Hamiltonoperator das Integral über die Hamiltonoperatoren der einzelnen Moden

$$\hat{H}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) + \hat{a}(\vec{k}) \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \right] \quad . \quad (5.1.18)$$

Dies entspricht dem Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators für die Schrödinger-Gleichung ([29, Kapitel 7]). Zudem erfüllen die Koeffizientenoperatoren $\hat{a}(\vec{k})$ und $\hat{a}^\dagger(\vec{k})$ dieselben Vertauschungsrelation, wie die dort auftretenden Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, sofern wir von der auf kontinuierliche Variablen angepassten Normierung absehen. Diese Analogie lässt sich noch vertiefen, sofern wir den k-Raum durch periodische Randbedingungen oder das Zerlegen in Volumenzellen diskretisieren (siehe [1, Kapitel 12] oder [18, Kapitel 2]). Dann erhalten wir die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \\ [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] &= 0 \\ [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] &= 0 \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

und den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hat{H}_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_k (2\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + 1) \quad . \quad (5.1.20)$$

Der Operator $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ misst beim harmonischen Oszillator die Anzahl der Anregungen (Phononen) und besitzt von daher nur natürliche Eigenwerte. Folglich gilt dies hier ebenfalls, nur dass der Operator nicht die Phononen, sondern die Anzahl der Teilchen des spinlosen Feldes misst (beispielsweise π^0 -Mesonen [9]). Dies bedeutet, dass die Energieeigenzustände durch direkte Produkte der Eigenzustände der Anzahloperatoren $N_{\vec{k}}$ gegeben sind. Diese Zustände werden in normierter Form die Fockzustände genannt und für eine abzählbare Anzahl an Moden in der Form $|n_{\vec{k}_1}, n_{\vec{k}_2}, \dots\rangle$ geschrieben. Dabei ist die Energie jeder einzelnen Mode minimal, wenn wir uns in einem Eigenzustand befinden, für den $n_{\vec{k}} = 0$ gilt. Somit ist der Zustand, für den $N_{\vec{k}} |0\rangle = 0$ für alle \vec{k} gilt, der jeweilige mit der geringsten Energie und beschreibt das Vakuum. Dies bedeutet jedoch, dass die Energie des Vakuums divergiert, denn es gilt

$$\hat{H} |0\rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{2} \omega_k |0\rangle \quad . \quad (5.1.21)$$

Solange wir alle Gravitationseffekte ignorieren, können wir dieses Problem durch Streichen des divergenten Terms lösen, da für die anderen drei grundsätzlichen Wechselwirkungen nur Energieunterschiede von Belang sind. Alternativ führen wir die Normalordnung ein, die besagt, dass wir ein Produkt aus Erzeugungs- (\hat{a}^\dagger) und Vernichtungsoperatoren (\hat{a}) so umordnen müssen, dass alle Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugungsoperatoren stehen. Unabhängig davon, welche Methode wir für die Beseitigung der Unendlichkeit wählen, nennen wir diesen Vorgang Renormalisierung.

Analog könnten wir weitere Felder quantisieren und Wechselwirkungen in die Theorie einbauen. Da wir jedoch in dieser Arbeit semiklassische Gravitationseffekte betrachten wollen, können wir diese Renormalisierungsmethode nicht nutzen und wir verweisen für eine tiefere Einführung in die Quantenfeldtheorie in flachen Räumen auf die Literatur (beispielsweise [1]).

5.2. Quantenfeldtheorie in gekrümmten Räumen

Da wir uns im gekrümmten Raum ebenfalls auf spinlose Felder beschränken, beginnen wir mit der Herleitung der zur Klein-Gordon-Gleichung (4.1.4) zugehörigen Lagrangedichte. In Kapitel 4 haben wir die Wellengleichungen durch die Nutzung des angepassten Impulsoperators (4.1.1) erhalten. Dies sollte hier ebenfalls gelten und von daher ersetzen wir die Ableitungen in (5.1.6) ebenfalls durch die entsprechende kovariante Ableitung. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[(D_\mu \Psi) (D^\mu \Psi) - m^2 \Psi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - m^2 \Psi \right] .\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

Diese Lagrangedichte führt in der Tat auf die korrekte Wellengleichung, wenn wir beachten, dass wir die partielle Ableitung in der Lagrange-Gleichung ebenfalls durch eine kovariante Ableitung ersetzen müssen, da das Integralmaß für die Berechnung der Wirkung

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^4\bar{x} \quad (5.2.2)$$

noch beachtet werden muss. Alternativ können wir wie in [18, Kapitel 3] das Integralmaß in die Definition der Lagrangedichte aufnehmen und die Wellengleichung durch die Lagrange-Gleichung des flachen Raums bestimmen. Das heißt wir verwenden

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - m^2 \Psi \right] , \quad (5.2.3)$$

sofern wir, wie in den vorherigen Kapiteln schon implizit angenommen, von einer minimalen Kopplung des Skalarfeldes an das Gravitationsfeld ausgehen (denn theoretisch ist noch eine Kopplung des Feldes an den Krümmungsskalar möglich [18, Kapitel 3]).

Passen wir zudem das Pseudoskalarprodukt (5.1.13) ebenfalls auf den gekrümmten Raum an. Dieses ist [18, Kapitel 3]

$$(\Psi_1, \Psi_2) = -i \int_{\Sigma} [\Psi_1 \partial_\mu \Psi_2^* - (\partial_\mu \Psi_1) \Psi_2^*] \sqrt{-g_\Sigma} d\Sigma^\mu , \quad (5.2.4)$$

wobei der zu integrierende Raum Σ orthogonal zum in die Zukunft gerichteten Normalenvektor n^μ des Beobachters sein muss. Das heißt $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$ (eine tiefergehende Erklärung kann in [5, Kapitel 7] gefunden werden). Verschwinden die Metrikkomponenten g^{0i} erhalten wir bis auf das Integralmaß wieder die Form des flachen Raums

$$\begin{aligned} (\Psi_1, \Psi_2) &= -i \int [\Psi_1 \partial_t \Psi_2^* - (\partial_t \Psi_1) \Psi_2^*] \sqrt{-g_V} dV \\ &= -i \int [\Psi_1 \partial_t \Psi_2^* - (\partial_t \Psi_1) \Psi_2^*] d^3x \quad . \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Damit können wir für jeden Beobachter die Entwicklung in Moden (5.1.10) ebenfalls durchführen, indem wir eine orthonormale Basis suchen. Benutzen wir der Einfachheit halber periodische Randbedingungen, haben wir eine abzählbare Anzahl an Moden und die Bedingungen für die Basis $u_j(x)$ sind

$$\begin{aligned} (u_j, u_k) &= \delta_{jk} \\ (u_j^*, u_k^*) &= -\delta_{jk} \\ (u_j, u_k^*) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Daraus folgt die Entwicklung des Feldoperators

$$\hat{\Psi} = \sum_j [\hat{a}_j u_j(x) + \hat{a}_j^\dagger u_j^*(x)] \quad . \quad (5.2.7)$$

Weiterhin können wir die Kommutationsrelationen (5.1.19) und die Entwicklung des Hamiltonoperators ebenfalls übernehmen und wir definieren von daher wieder das Vakuum $a_j^\dagger a_j |0\rangle = 0 \forall j$ (oder äquivalent $a_j |0\rangle = 0$).

Nehmen wir an, ein zweiter Beobachter entwickelt den Feldoperator ebenfalls, nutzt dabei aber eine andere Basis \bar{u}_j , die ebenfalls die Bedingungen (5.2.6) erfüllt. Dann gilt

$$\hat{\Psi} = \sum_j [\hat{a}_j \bar{u}_j(x) + \hat{a}_j^\dagger \bar{u}_j^*(x)] \quad . \quad (5.2.8)$$

Zudem können wir die beiden Basen ineinander entwickeln. Wir setzen an

$$\bar{u}_j = \sum_k [\alpha_{jk} u_k + \beta_{jk} u_k^*] \quad . \quad (5.2.9)$$

Um die Beziehung umzudrehen, bilden wir die Pseudoskalarprodukte

$$\begin{aligned} (u_m, \bar{u}_j) &= \sum_k [\alpha_{jk}^* (u_m, u_k) + \beta_{jk}^* (u_m, u_k^*)] = \alpha_{jm}^* \\ (u_m, \bar{u}_j^*) &= \sum_k [\alpha_{jk} (u_m, u_k^*) + \beta_{jk} (u_m, u_k)] = -\beta_{jm} \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

und erhalten so

$$\begin{aligned} u_j &= \sum_k [\alpha_{kj}^* \bar{u}_k - \beta_{kj} \bar{u}_k^*] \\ \alpha_{jm} &= (\bar{u}_j, u_m) \\ \beta_{jm} &= -(\bar{u}_j, u_m^*) \quad . \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Setzen wir dies in (5.1.14) ein, können wir die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zueinander in Beziehung setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= (\hat{\Psi}, u_j) = \sum_k [\hat{a}_k (\bar{u}_k, u_j) + \hat{a}_k^\dagger (\bar{u}_k^*, u_j)] \\ &= \sum_k (\hat{a}_k \alpha_{kj} + \hat{a}_k^\dagger \beta_{kj}^*) \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

und analog ergibt sich

$$\hat{\bar{a}}_j = \sum_k (\alpha_{jk}^* \hat{a}_k - \beta_{jk} \hat{a}_k^\dagger) \quad . \quad (5.2.13)$$

Dies hat zur Folge, dass die beiden Beobachter für $\beta_{jk} \neq 0$ nicht darin übereinstimmen, welcher Zustand das Vakuum beschreibt, denn der zweite Beobachter definiert sein Vakuum gemäß $\hat{\bar{a}}_j^\dagger \hat{\bar{a}}_j |\bar{0}\rangle = 0$ und der Erwartungswert der Teilchenzahl einer bestimmten Mode in diesem Zustand für den ersten Beobachter ist

$$\begin{aligned} \langle \bar{0} | \hat{N}_j | \bar{0} \rangle &= \langle \bar{0} | \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j | \bar{0} \rangle = \sum_{k,m} \langle \bar{0} | (\hat{a}_m^\dagger \alpha_{mj} + \hat{a}_m \beta_{mj}) (\hat{a}_k \alpha_{kj} + \hat{a}_k^\dagger \beta_{kj}^*) | \bar{0} \rangle \\ &= \sum_{k,m} \beta_{mj} \beta_{kj}^* \langle \bar{0} | \hat{a}_m \hat{a}_k^\dagger | \bar{0} \rangle = \sum_{k,m} \beta_{mj} \beta_{kj}^* \langle \bar{0} | (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_m + \delta_{km}) | \bar{0} \rangle \\ &= \sum_k |\beta_{kj}|^2 \quad . \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

Im flachen Raum können wir dies für zwei Beobachter, deren Moden durch eine Lorentztransformation ineinander übergehen, ignorieren, da dann die β -Koeffizienten verschwinden, aber im Allgemeinen ist dies nicht der Fall (siehe Anhang G). Somit sind die Definition des Vakuums und die Teilchenzahl vom Beobachter abhängig und sind damit keine objektiven Messgrößen des Systems. Zwar können wir die Fockzustände verschiedener Beobachter durch die Bogoliubov Transformation (bezeichnet die Gleichungen (5.2.9) bis (5.2.13)) in Verbindung bringen, müssen aber dafür die Metrik für alle Zeiten und Orte kennen, die in kausalem Zusammenhang mit den Beobachtern stehen. Von daher ist es sinnvoll stattdessen lokale Tensorgrößen zu betrachten, die für zwei Beobachter durch die Tensortransformation (2.1.2) in Verbindung gebracht werden können. Insbesondere ist der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors des Quantenfeldes von Interesse, da dieser für unsere semiklassische Näherung über die Einstein-Gleichung (2.1.30) an das gravitative Feld koppelt. Wie wir im vorherigen Unterkapitel gesehen haben, divergiert die Energie jedoch schon im flachen Raum. Folglich benötigen wir ein mit der Gravitation vereinbares Renormalisierungsverfahren.

Im gekrümmten Raum können wir den Energie-Impuls-Tensor eines beliebigen Quantenfeldes einerseits wieder über die Betrachtung der räumlichen und zeitlichen Verschiebungen und andererseits durch Variation der Wirkung nach der Metrik erhalten [18, Kapitel 3.8]. So ist der Energie-Impuls-Tensor für ein minimal gekoppeltes Skalarfeld

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial\Psi}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} m^2 g_{\mu\nu} \Psi^2 \quad . \quad (5.2.15)$$

An der Basisentwicklung des Feldes (5.2.7) lässt sich erkennen, dass die Divergenzen für alle Operatoren auftreten, die quadratisch in den Feldern sind und von daher beinhaltet die Renormalisierung quadratischer Feldterme die Renormalisierung des Energie-Impuls-Tensors. Zudem sollte auch die Renormalisierung der Wirkung oder der Lagrangedichte \mathcal{L} die des Energie-Impuls-Tensors beinhalten. Dementsprechend existieren für die Renormalisierung verschiedene Verfahren, die ebenfalls für wechselwirkende quantisierte

Felder verwendet werden. Jedoch versagen sie wie in Kapitel 1 schon erwähnt für Prozesse beliebiger Ordnung des Gravitonfeldes. Aus diesem Grund werden die Berechnungen im Allgemeinen auf die Korrekturen niedrigster Ordnung (eine Schleife) beschränkt.

Ein Beispiel ist das dimensionale Regularisierungsverfahren. Die Grundidee dabei ist, dass der renormalisierte Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors eine Quelle des gravitativen Feldes sein sollte und somit über die Einstein-Gleichung an die Geometrie des Raumes koppelt. Dabei sollen die in der Gleichung vorkommenden Terme endlich sein. Das heißt die Variation der Summe der Wirkung des Gravitationsfeldes S_g und der noch nicht normierten effektiven Wirkung des Quantenfeldes W

$$S = S_g + W \quad (5.2.16)$$

soll auf die Einstein-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda_B g_{\mu\nu} &= -8\pi G_B \langle T_{\mu\nu} \rangle \end{aligned} \quad (5.2.17)$$

führen. Unter der Annahme, die Zahl der Dimensionen des Raums sei beliebig, kann dann W bzw. die zugehörige Lagrangedichte als endlicher funktionaler Ausdruck mit Polstellen in der Dimensionsanzahl (beispielsweise $n=4$) berechnet werden. Dabei stellt sich heraus, dass die divergenten Terme ausschließlich von der Struktur des Raumes, das heißt der Metrik, abhängen, sodass die Terme auch als Teil der gravitationellen Wirkung verstanden werden können. Dadurch erhält man eine Veränderung der in der Einstein-Gleichung auftauchenden Konstanten Λ_B (und die Möglichkeit von Zusatztermen siehe [18, Kapitel 6.2]), sodass die neue Wirkung die Form

$$S = \tilde{S}_g + \tilde{W} \quad (5.2.18)$$

besitzt und die Variation

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} &= 0 \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} &= -8\pi G \langle T_{\mu\nu} \rangle \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

ergibt. Danach können wir die Zahl der Dimensionen wieder auf 4 setzen und sowohl die Wirkung als auch die Einstein-Gleichung bleiben endlich. Das heißt das Ausweichen auf beliebige Dimensionen wird genutzt, um die divergenten Term zu identifizieren und dann wird angenommen, dass in der gravitativen Wirkung ein entsprechender Gegenterm existiert, den wir nicht messen können, da in der Realität das Gravitationsfeld nie ohne die zugehörigen Vakuumfluktuationen auftritt. Die dazu nötigen Rechnungen können in [18, Kapitel 6] nachgeschlagen werden.

Prinzipiell ist es auf diese Art möglich den renormalisierten Energie-Impuls-Tensor jeder Metrik zu bestimmen. Jedoch ist dies in der Praxis aufgrund der Nichtlinearität der Gravitation häufig nicht möglich. Ein interessantes Ergebnis ist jedoch der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors eines masselosen Skalarfeldes [18, 51]

$$\begin{aligned} \langle T_{\pm\pm}^{2D} \rangle &= -\frac{\hbar}{12\pi c} C^{\frac{1}{2}} \partial_{\pm}^2 C^{-\frac{1}{2}} \\ \langle T_{\pm\mp}^{2D} \rangle &= \frac{\hbar C}{96\pi c} R \\ R &= 4C^{-1} \partial_+ \partial_- \ln C \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

für die Metrik

$$ds^2 = C(x^+, x^-) dx^+ dx^- \quad , \quad (5.2.21)$$

da wir daraus mittels einer Monopolnäherung den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors im vierdimensionalen Raum näherungsweise berechnen können.

5.3. Umformungen

Wir gehen wieder davon aus, dass das zu betrachtende System sphärisch symmetrisch ist. Die Vakuumfluktuationen weisen dann nur eine radiale Abhängigkeit auf. Solange wir wie im vorherigen Unterkapitel die Wechselwirkungen der Vakuumfluktuationen untereinander vernachlässigen, verhalten sie sich somit wie der Monopol eines nichtwechselwirkenden Feldes (beispielsweise das elektrische Feld). Folglich sind sie näherungsweise durch [51]

$$\langle T_{\nu}^{\mu 4D} \rangle \approx \frac{1}{4\pi r^2} \langle T_{\nu}^{\mu 2D} \rangle \quad (5.3.1)$$

gegeben. Im vierdimensionalen Raum benutzen wir erneut das schwarzschildartige (ct, r) -Koordinatensystem. Von daher transformieren wir (5.2.20) ebenfalls in dieser Koordinatensystem. Schreiben wir dafür die Erwartungswerte zuerst mit Hilfe der räumlichen $\xi = \frac{1}{2}(x^+ - x^-)$ und der zeitlichen Koordinate $ct = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$ um (die Umkehrtransformation ist $x^+ = ct + \xi$ und $x^- = ct - \xi$), deren Linienelement

$$ds^2 = C(\xi) \left((dct)^2 - d\xi^2 \right) \quad (5.3.2)$$

ist. Damit sind die zweidimensionalen Vakuumfluktuationen im (x^+, x^-) -System

$$\begin{aligned} \langle T_{\pm\pm} \rangle &= -\frac{\hbar}{48\pi c} C^{\frac{1}{2}} \partial_{\xi}^2 C^{-\frac{1}{2}} \\ \langle T_{+-} \rangle &= \frac{\hbar C}{96\pi c} R \\ R &= -C^{-1} \partial_{\xi}^2 \ln C \quad . \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Für die Radialkoordinate r ist das Linienelement im Allgemeinen jedoch

$$ds^2 = C(r) (dct)^2 - \frac{1}{D(r)} dr^2 \quad . \quad (5.3.4)$$

Daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$\begin{aligned} Cd\xi^2 &= \frac{1}{D} dr^2 \\ \Rightarrow dr &= \sqrt{CD} d\xi \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\langle T_{\pm\pm} \rangle &= -\frac{\hbar}{48\pi c} C^{\frac{1}{2}} \partial_{\xi}^2 C^{-\frac{1}{2}} = -\frac{\hbar}{48\pi c} C^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{d\xi} \partial_r \frac{dr}{d\xi} \partial_r C^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{\hbar}{96\pi c} C \sqrt{D} \partial_r \sqrt{D} C^{-1} C' = \frac{\hbar c}{96\pi} \left(DC'' - \frac{D}{C} (C')^2 + \frac{1}{2} C' D' \right) \\
\langle T_{+-} \rangle &= -\frac{\hbar}{96\pi c} \partial_{\xi}^2 \ln C = -\frac{\hbar}{96\pi c} \frac{dr}{d\xi} \partial_r \frac{dr}{d\xi} \partial_r \ln C \\
&= -\frac{\hbar}{96\pi c} \sqrt{CD} \partial_r \sqrt{\frac{D}{C}} C' = -\frac{\hbar}{96\pi c} \left(DC'' - \frac{D}{2C} (C')^2 + \frac{1}{2} C' D' \right) \quad . \quad (5.3.6)
\end{aligned}$$

Somit ist der zweidimensionale Erwartungswert des kovarianten Energie-Impuls-Tensors im (ct, r) -System

$$\begin{aligned}
\langle T_{ct}^{ct \ 2D} \rangle &= \frac{1}{C} \left[\langle T_{++} \rangle \left(\frac{\partial x^+}{\partial ct} \right)^2 + \langle T_{--} \rangle \left(\frac{\partial x^-}{\partial ct} \right)^2 \right] + 2 \langle T_{+-} \rangle \frac{\partial x^+}{\partial ct} \frac{\partial x^-}{\partial ct} \\
&= \frac{1}{2C} (\langle T_{++} \rangle + \langle T_{+-} \rangle) = -\frac{\hbar}{384\pi c} D \left(\frac{C'}{C} \right)^2 \quad (5.3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_r^{r \ 2D} \rangle &= -D \left[\langle T_{++} \rangle \left(\frac{\partial x^+}{\partial r} \right)^2 + \langle T_{--} \rangle \left(\frac{\partial x^-}{\partial r} \right)^2 + 2 \langle T_{+-} \rangle \frac{\partial x^+}{\partial r} \frac{\partial x^-}{\partial r} \right] \\
&= -\frac{1}{2C} [\langle T_{++} \rangle - \langle T_{+-} \rangle] = -\frac{\hbar}{192\pi c C} \left(2DC'' - \frac{3D}{2C} (C')^2 + C' D' \right) \quad (5.3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{ctr}^{2D} \rangle &= \langle T_{++} \rangle \frac{\partial x^+}{\partial ct} \frac{\partial x^+}{\partial r} + \langle T_{--} \rangle \frac{\partial x^-}{\partial ct} \frac{\partial x^-}{\partial r} + \langle T_{+-} \rangle \left(\frac{\partial x^+}{\partial ct} \frac{\partial x^-}{\partial r} + \frac{\partial x^-}{\partial ct} \frac{\partial x^+}{\partial r} \right) \\
&= \frac{1}{4} (\langle T_{++} \rangle - \langle T_{--} \rangle - \langle T_{+-} \rangle + \langle T_{+-} \rangle) \frac{1}{\sqrt{CD}} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle T_r^{ct \ 2D} \rangle = \langle T_{ct}^{r \ 2D} \rangle = 0 \quad . \quad (5.3.9)$$

Eine alternative Form erhalten wir, wenn wir den Schwarzschildischen Ansatz $C = e^{\nu}$ und $D = e^{-\lambda}$ nutzen. Damit folgt für die beiden Diagonalelemente

$$\begin{aligned}
\langle T_{ct}^{ct \ 2D} \rangle &= -\frac{\hbar}{384\pi c} e^{-\lambda} (\nu')^2 \\
\langle T_r^{r \ 2D} \rangle &= -\frac{\hbar e^{-\lambda}}{192\pi c} \left(2\nu'' - \frac{1}{2} (\nu')^2 - \nu' \lambda' \right) \quad . \quad (5.3.10)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (2.3.17) und (2.3.22) erhalten wir zudem

$$\begin{aligned}\langle T_{ct}^{ct\ 2D} \rangle &= -\frac{\hbar}{96\pi c} \frac{\left(m + \frac{4\pi G}{c^4} p_r r^3\right)^2}{r^3 (r - 2m)} \\ \langle T_r^{r\ 2D} \rangle &= -\frac{\hbar}{96\pi c} \left[\frac{16\pi G}{c^4} (\rho c^2 + p'_r r + 3p_r) - \left(8r - 10m - 4m'r + \frac{8\pi G}{c^4} p_r r^3\right) \frac{m + \frac{4\pi G}{c^4} p_r r^3}{r^3 (r - 2m)} \right].\end{aligned}\tag{5.3.11}$$

5.4. Modellentwicklung

Nach der Vorarbeit im letzten Unterkapitel können wir verschiedene Metriken unter dem Einfluss der Vakuumfluktuationen berechnen. Wir beginnen mit einer allgemeinen Analyse der Folgen im materiefreien Raum und vergleichen diese mit Vissers Ergebnissen [53]. Danach berechnen wir die Vakuumfluktuationen für verschiedene Massenverteilungen. Hierbei beschränken wir uns auf feste Metriken und berechnen daraus die Vakuumfluktuationen $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, indem wir die Metrik in die Gleichungen (5.3.7) und (5.3.8) einsetzen. Insofern handelt es sich um die Ergebnisse nullter Ordnung.

5.4.1. Materiefreier Raum

Die obigen Gleichungen geben uns den Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors der Vakuumfluktuationen für eine beliebige, aber feste Hintergrundmetrik. Da jedoch jede Energie gravitativ wechselwirkt, wird sich das mittlere Gravitationsfeld diesem Erwartungswert anpassen. Folglich sollte die Hintergrundmetrik die Einstein-Gleichungen (ohne kosmologische Konstante) (2.1.30)

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} \left(T_{\mu\nu}^{mat} + \langle T_{\mu\nu}^{vac} \rangle \right)\tag{5.4.1}$$

erfüllen. Im Allgemeinen werden sich allerdings die Vakuumfluktuationen der neuen von denen der alten Hintergrundmetrik unterscheiden, sodass wir den Vorgang wiederholen

müssen. Konvergieren die Metrik und der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors auch im Grenzfall unendlich vieler Iterationen nicht, können wir folglich keine physikalisch relevante Aussage treffen. Für jedes physikalisch existierende System muss jedoch eine Lösung existieren und wir nehmen von daher an, dass das Verfahren für alle betrachteten Fälle konvergiert.

Wir können nicht ausschließen, dass die Vakuumfluktuationen zusätzlich über eine der anderen Grundkräfte mit der im Raum vorliegenden Materie wechselwirken und wir von daher die Materieeigenschaften (beispielsweise die Zustandsgleichung) in jedem Iterationsschritt ändern müssen. Im materiefreien Raum sind die Vakuumfluktuationen jedoch die einzige Quelle des Gravitationsfeldes. Folglich gilt nach (5.3.10)

$$\begin{aligned}\rho = \rho_{vac} &= \frac{1}{4\pi r^2} \langle T_{ct}^{ct} \rangle = -\frac{\hbar}{1536\pi^2 c r^2} e^{-\lambda} (\nu')^2 \\ \frac{p_r}{c^2} = \frac{p_{r\ vac}}{c^2} &= -\frac{1}{4\pi r^2} \langle T_r^{r} \rangle = \frac{\hbar e^{-\lambda}}{768\pi^2 c r^2} \left(2\nu'' - \frac{1}{2} (\nu')^2 - \nu' \lambda' \right) \quad . \quad (5.4.2)\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (2.3.11) ein und gehen davon aus, dass es sich bei der Metrik schon um die selbstkonsistente Lösung handelt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{\hbar G}{96\pi c^3 r^2} \left(\frac{1}{2} (\nu')^2 - 2\nu'' + \frac{1}{2} (\nu')^2 + \nu' \lambda' \right) e^{-\lambda} \\ &= \frac{l_{Pl}^2}{96\pi r^2} (\nu'^2 - 2\nu'' + \nu' \lambda') e^{-\lambda} = -e^{-\lambda} \frac{\nu' + \lambda'}{r} \\ \Rightarrow \lambda' &= -\nu' + \frac{l_{Pl}^2}{48\pi r} \frac{\nu''}{1 + \frac{l_{Pl}^2 \nu'}{96\pi r}} \quad . \quad (5.4.3)\end{aligned}$$

Eingesetzt in (2.3.12) ergibt sich eine Differentialgleichung für ν

$$\frac{l_{Pl}^2}{192\pi r^2} (\nu')^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{l_{Pl}^2}{48\pi r^2} \frac{\nu''}{1 + \frac{l_{Pl}^2 \nu'}{96\pi r}} - \frac{1}{r^2} e^{-\nu + \frac{l_{Pl}^2}{48\pi} \int \frac{2\nu''}{r - \frac{l_{Pl}^2 \nu'}{96\pi}} dr} \quad , \quad (5.4.4)$$

die die selbstkonsistente Lösung erfüllen muss. Allerdings ist sie nicht analytisch lösbar, sodass wir den vollständigen Effekt der Vakuumfluktuationen auf die Metrik nur numerisch berechnen können. Wobei dies auch eine größere Herausforderung ist, da die üblichen Verfahren aufgrund der Komplexität der Gleichung zumindest in dieser Form

nicht in Frage kommen (beispielsweise das in 4 genutzte Runge-Kutta-Verfahren).

Betrachten wir jedoch makroskopische Objekte, dann ist $r_s \gg l_{Pl}$ und wir können nach $\frac{l_{Pl}^2}{r_s^2}$ entwickeln. Alternativ können wir eine entsprechende Anzahl an Iterationen durchführen, da der Unterschied der Metrikfunktionen, der Dichte und des Druckes des nächsten und denen des n-ten Iterationsschritts von der Größenordnung $\left(\frac{l_{Pl}^2}{r_s^2}\right)^{n+1}$ ist (siehe Anhang H).

Nehmen wir an, dass die Metrik für große Radien in die Minkowskimetrik übergeht, dann ist die Lösung nullter Ordnung die Schwarzschildmetrik (2.3.23)

$$e^{\nu_0} = e^{-\lambda_0} = 1 - \frac{r_s}{r} \quad . \quad (5.4.5)$$

Die Dichte und der Radialdruck der Vakuumfluktuationen sind dann nach (5.3.10)

$$\begin{aligned} \rho &= - \frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} \frac{\left(\frac{r_s}{r}\right)^2}{1 - \frac{r_s}{r}} = - \frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} \frac{r_s^2}{r^4 - r_s r^3} \\ &= - \frac{\hbar}{1536\pi^2 cr_s^4} \left(\frac{r_s}{r}\right)^6 \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_r}{c^2} &= \frac{\hbar}{768\pi^2 cr^2} \left[\frac{4rr_s - 2r_s^2}{(r^2 - r_s r)^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{r_s}{r^2 - r_s r}\right)^2 \right] \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \\ &= \frac{\hbar}{768\pi^2 cr_s^2} \frac{8r_s^3 r - 3r_s^4}{r^5 (r - r_s)} = \frac{\hbar}{96\pi^2 cr_s^4} \left(\frac{r_s}{r}\right)^5 \frac{1 - \frac{3}{8} \frac{r_s}{r}}{1 - \frac{r_s}{r}} \quad . \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Vergleichen wir dies mit den Ergebnissen von Visser [53]

$$\begin{aligned} \rho^{Vis} &= - \frac{\hbar}{192\pi^2 cr_s^4} \left(\frac{r_s}{r}\right)^6 \frac{1 - \frac{9r_s}{5r} + \frac{33r_s^2}{40r^2}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} \\ \frac{p_r^{Vis}}{c^2} &= - \tau(r) = \frac{\hbar}{2880\pi^2 cr_s^4} \left(\frac{r_s}{r}\right)^6 \frac{1 - 3\frac{r_s}{r} + \frac{15r_s^2}{8r^2}}{\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

fällt auf, dass die Vakuumfluktuationsdichte für beide Näherungen für große Radien proportional zu $\left(\frac{r_s}{r}\right)^6$ abfällt. Der Vorfaktor weist jedoch eine Diskrepanz von ungefähr einer Größenordnung auf (Faktor 8). Zudem enthält Vissers Ergebnis noch Terme höher Ordnung, sodass die Differenz der beiden Näherungen für Radien nahe des Schwarzschildradius ansteigt (vor allem aufgrund der schnelleren Divergenz von ρ^{Vis}).

Der Druck fällt für beide Methoden für größere Radien ab, aber Visser sagt einen Abfall proportional zu $\left(\frac{r_s}{r}\right)^6$ voraus, wohingegen unsere Näherung einen führenden Term proportional zu $\left(\frac{r_s}{r}\right)^5$ liefert. Zudem weisen die beiden Näherungen erneut Unterschiede in den Termen höhere Ordnung auf. Da jedoch sowohl die Vakuumfluktuationsdichte als auch der -druck am Schwarzschildradius divergieren, bricht die Näherung zusammen und die Unterschiede unserer zu Vissers Näherung sind dort unbedenklich. Die Differenzen für große Radien legen jedoch nahe, dass zumindest eine der beiden Methoden essentielle Terme vernachlässigt und wir uns von daher nur auf die qualitativen Aussagen unserer Näherung verlassen können. Somit ist die Verwendung eines phänomenologischen Modells, das die qualitativen Kernaussagen enthält, gerechtfertigt. In diesem Fall handelt es sich dabei um die Aussage, dass die Vakuumfluktuationen zum Stern hin ansteigen. Vor diesem Hintergrund wollen wir die Rückwirkung von (5.4.7) hier nicht diskutieren, die Berechnung kann jedoch im Anhang H gefunden werden.

5.4.2. Metriken konstanter Materiedichte

Gehen wir dazu über das Sterninnere zu betrachten. Dabei verwenden wir direkt das iterative Verfahren, da die komplette Differentialgleichung schon für den materiefreien Fall nicht analytisch lösbar ist. Weiterhin werden wir analog zum vorherigen Unterkapitel die Rückwirkung auf die Metrik nicht diskutieren. Jedoch befindet sich eine kurze Analyse im Anhang H.

Beginnen wir mit der Analyse von Metriken mit konstanter Massendichte $\rho_M(r) = \rho_0$. Für alle Metriken dieser Klasse gilt (2.3.22)

$$\begin{aligned} m_0(r) &= \frac{4\pi G}{3c^2} \rho_0 r^3 \\ e^{-\lambda_0} &= 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2 \quad . \end{aligned} \tag{5.4.9}$$

Verlangen wir zusätzlich, dass die Metrik stetig am Punkt r_0 an die Schwarzschildmetrik (2.3.23) anschließt, erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_0} &= 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2 = 1 - \frac{r_s}{r_0} \\ \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 &= \frac{r_s}{r_0^3} \quad . \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

Zudem können wir $m_0(r)$ in (5.3.11) einsetzen und erhalten die Vakuumfluktuationen nullter Ordnung

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{4\pi r^2} \langle T_{ct}^{ct} \rangle = -\frac{\hbar G^2}{216c^5} \frac{\left(\rho_0 + \frac{3p_r}{c^2}\right)^2}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2} \\ \frac{p_r}{c^2} &= -\frac{1}{4\pi r^2} \langle T_r^r \rangle = \frac{\hbar G}{72\pi c^3 r^2} \left(\rho_0 + \frac{3p_r'}{c^2} r + \frac{3p_r}{c^2} + \frac{2\pi G r^2 \left(\rho_0 - \frac{p_r}{c^2}\right) \left(\rho_0 + \frac{3p_r}{c^2}\right)}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2} \right) \quad , \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

wobei wir die Definition $R^2 = \frac{3c^2}{8\pi G \rho_0}$ nutzen.

Nehmen wir an, der Druck sei isotrop (um dies anzuzeigen markieren wir die Größen im Folgenden mit „iso“). Der Radialdruck ist in diesem Fall (siehe Anhang A)

$$\begin{aligned} \frac{p_r^{iso}}{c^2} &= \rho_0 \frac{\sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2-r_0^2}} - 1}{3 - \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2-r_0^2}}} \\ \frac{p_r^{iso}}{c^2} &= -\rho_0 \left(\frac{r}{3\sqrt{R^2-r_0^2} - R^2 + r^2} - \frac{r}{\sqrt{R^2-r_0^2}\sqrt{R^2-r^2}} \frac{\sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2-r_0^2}} - 1}{\left(3 - \sqrt{\frac{R^2-r^2}{R^2-r_0^2}}\right)^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

Eingesetzt in (5.4.11) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\rho_{vac}^{iso} &= -\frac{\frac{\hbar G^2}{216c^5}\rho_0^2}{\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2} = -\frac{\frac{l_{Pl}^2}{576\pi R^2}\rho_0}{\left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_0^2}{R^2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2} \\ \frac{p_{r,vac}^{iso}}{c^2} &= \frac{\hbar G}{72\pi c^3 r^2}\rho_0 \left(\frac{2\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{3\sqrt{1-\frac{r_0^2}{R^2}}-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3r^2}{R^2} \frac{2\sqrt{1-\frac{r_0^2}{R^2}}-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_0^2}{R^2}}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}-1+\frac{r^2}{R^2}\right)\left(3\sqrt{1-\frac{r_0^2}{R^2}}-\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)} \right) . \quad (5.4.13)\end{aligned}$$

Betrachten wir zusätzlich die Vakuumfluktuationen für unser exponentielles Modell (siehe Anhang A). Für dieses ist der Radialdruck

$$\begin{aligned}\frac{p_r}{c^2} &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0^2 \frac{r_0^2-r^2}{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2} \\ \Rightarrow \rho_0 + \frac{3p_r}{c^2} &= \rho_0 \frac{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r^2}{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r^2} . \quad (5.4.14)\end{aligned}$$

Setzen wir dies in (5.4.11) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho_{vac} &= -\frac{\hbar G^2}{216c^5}\rho_0^2 \frac{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r^2}{\left(1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2\right)^2} = -\frac{l_{Pl}^2}{576\pi R^2}\rho_0 \frac{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r^2}{\left(1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2\right)^2} \\ \frac{p_{r,vac}}{c^2} &= \frac{\hbar G}{72\pi c^3 r^2} \left(\rho_0 \frac{1-\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 r^2}{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2} + \frac{2\pi G}{c^2}\rho_0^2 r^2 \frac{1-\frac{32\pi G}{9c^2}\rho_0 r_0^2 + \frac{8\pi G}{9c^2}\rho_0 r^2}{\left(1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2\right)^2} \right) \\ &= \frac{l_{Pl}^2}{72\pi R^2} \frac{R^2}{r^2}\rho_0 \left(\frac{1-\frac{8\pi G}{c^2}\rho_0 r^2}{1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2} + \frac{2\pi G}{c^2}\rho_0 r^2 \frac{1-\frac{32\pi G}{9c^2}\rho_0 r_0^2 + \frac{8\pi G}{9c^2}\rho_0 r^2}{\left(1-\frac{8\pi G}{3c^2}\rho_0 r_0^2\right)^2} \right) , \quad (5.4.15)\end{aligned}$$

wobei wir hier R als typische Länge des System über $R^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho_0}$ eingebaut und $l_{Pl}^2 = \frac{\hbar G}{c^3}$ genutzt haben.

In [13] wird eine Verbindung zwischen den Vakuumfluktuationen und dem in der pk-Art auftauchende Quellterm angenommen. Dabei wurde die Vakuumfluktuationsdichte proportional zur Massendichte modelliert. Für eine konstante Massendichte folgt daraus, dass die Vakuumfluktuationsdichte ebenfalls konstant sein müsste. Dies steht nicht im

Einklang mit den Ergebnissen dieses Unterkapitels, da die Vakuumfluktuationsdichte für beide Metriken nach Außen hin abfällt.

Der Vergleich mit Vissers Ergebnissen im letzten Unterkapitel hat gezeigt, dass nur der qualitative Verlauf der berechneten Vakuumfluktuationen verlässlich ist. Suchen wir von daher ein Modell, dass die beiden Fälle grob zusammenfasst. Nähern wir dafür (5.4.13) für kleine Radien. Wir erhalten

$$\rho_{vac}^{iso} \approx -\frac{\frac{l_{Pl}^2}{576\pi R^2} \rho_0}{\left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\right)^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2 \left(3\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - 1\right)}\right) . \quad (5.4.16)$$

Die Vakuumfluktuationsdichte für unser anisotropes Modell (5.4.15) fällt ebenfalls proportional zu r^2 ab. Verstehen wir R als eine typische Länge des Systems und nicht über seine Abhängigkeit der Dichte, dann könnte ein Modell der Form

$$\rho_{vac} = \alpha \rho_M (1 - \beta r^2) \quad (5.4.17)$$

realitätsnäher sein.

5.4.3. Variable Materiedichte

Um die Validität des oben vorgeschlagenen Modells der Vakuumfluktuationsdichte zu unterstreichen, betrachten wir die Vakuumfluktuationsdichte für variable Massendichten. Dafür nehmen wir an, dass e^ν weiterhin durch unser exponentielles Modell aus Anhang A gegeben ist. Das heißt

$$e^\nu = \left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right) e^{\frac{r_s}{2(r_0^3 - r_s r_0^2)}(r^2 - r_0^2)}$$

$$\nu' = \frac{r_s}{r_0^3 - r_s r_0^2} r \quad . \quad (5.4.18)$$

Dazu wählen wir die Dichte

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \xi \frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad . \quad (5.4.19)$$

Damit gilt

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2 \left(1 - \xi \frac{3r^2}{5r_0^2} \right) . \quad (5.4.20)$$

Wir verlangen, dass $e^{-\lambda}$ am Punkt r_0 stetig in die Schwarzschildmetrik übergeht und erhalten somit

$$\begin{aligned} 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2 \left(1 - \xi \frac{3r_0^2}{5r_0^2} \right) &= 1 - \frac{r_s}{r_0} \\ \Rightarrow \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 \left(1 - \frac{3}{5}\xi \right) &= \frac{r_s}{r_0^3} . \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Daraus ergeben sich die Vakuumfluktuationen

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{4\pi r^2} \langle T_{ct}^{ct} \rangle = -\frac{\hbar}{1536\pi^2 c r^2} \left[1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2 \left(1 - \xi \frac{3r^2}{5r_0^2} \right) \right] \frac{r_s^2}{(r_0^3 - r_s r_0^2)^2} r^2 \\ &= -\frac{\hbar G r_s}{576\pi c^3 r_0^3} \frac{1 - \frac{3}{5}\xi}{\left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right)^2} \rho_0 \left[1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2 \left(1 - \xi \frac{3r^2}{5r_0^2} \right) \right] \\ &= -\frac{l_{Pl}^2 r_s}{576\pi r_0^3} \frac{1 - \frac{3}{5}\xi}{\left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right)^2} \rho_0 \left[1 - \frac{r_s r^2}{\left(1 - \frac{3}{5}\xi \right) r_0^3} \left(1 - \xi \frac{3r^2}{5r_0^2} \right) \right] , \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

wobei wir dieses Mal die Metrikterme in (5.3.10) eingesetzt haben. Das obige Modell (5.4.17) hingegen liefert

$$\begin{aligned} \rho_{vac}^{Mod} &= \alpha \rho_0 \left(1 - \xi \frac{r^2}{r_0^2} \right) (1 - \beta r^2) \\ &= \alpha \rho_0 \left(1 - \xi \frac{r^2}{r_0^2} - \beta r^2 + \xi \beta \frac{r^4}{r_0^2} \right) . \end{aligned} \quad (5.4.23)$$

Wählen wir

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{l_{Pl}^2 r_s}{576\pi r_0^3} \frac{1 - \frac{3}{5}\xi}{\left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right)^2} \\ \beta &= \frac{r_s}{\left(1 - \frac{3}{5}\xi \right) r_0^3} - \frac{\xi}{r_0^2} , \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

dann sind die beiden Ausdrücke für kleine Radien näherungsweise identisch, da die Modelldichte

$$\rho_{vac}^{Mod} = -\frac{l_{Pl}^2 r_s}{576\pi r_0^3} \frac{1 - \frac{3}{5}\xi}{\left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right)^2} \rho_0 \left(1 - \frac{r_s r^2}{\left(1 - \frac{3}{5}\xi \right) r_0^3} + \frac{\xi r_s r^4}{\left(1 - \frac{3}{5}\xi \right) r_0^5} - \frac{\xi^2 r^4}{r_0^4} \right) \quad (5.4.25)$$

ist. Zudem ist der qualitative Verlauf auch für größere Radien ähnlich, sodass (5.4.17) in diesem Fall ein akzeptables phänomenologisches Modell ist. Insbesondere stimmen die beiden Dichten für $\xi = 0$ (konstante Dichte) und für

$$\begin{aligned} \frac{r_s}{\left(1 - \frac{3}{5}\xi\right) r_0^5} - \frac{\xi}{r_0^4} &= \frac{\frac{3}{5}r_s}{\left(1 - \frac{3}{5}\xi\right) r_0^5} \\ \Rightarrow \xi_{1,2} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24\frac{r_s}{r_0}}}{6} \end{aligned} \quad (5.4.26)$$

vollständig überein.

Betrachten wir zusätzlich die Massenverteilung

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \xi \frac{r}{r_0}\right) \quad (5.4.27)$$

und setzen diese ebenfalls sowohl in (5.3.10) als auch in (5.4.17) ein. Aus (5.3.10) folgt

$$\rho_{vac} = -\frac{l_{Pl}^2 r_s}{576\pi r_0^3} \frac{1 - \frac{3}{4}\xi}{\left(1 - \frac{r_s}{r_0}\right)^2} \rho_0 \left[1 - \frac{r_s r^2}{\left(1 - \frac{3}{4}\xi\right) r_0^3} \left(1 - \frac{3}{4}\xi \frac{r}{r_0}\right)\right] . \quad (5.4.28)$$

Das Modell (5.4.17) gibt hingegen

$$\rho_{vac}^{Mod} = \alpha \rho_0 \left(1 - \xi \frac{r}{r_0} - \beta r^2 + \xi \beta \frac{r^3}{r_0}\right) . \quad (5.4.29)$$

Vergleichen wir dies, fällt auf, dass in (5.4.28) kein linearer Term auftritt, sodass das Modell die Dichte nur für $\xi = 0$ korrekt wiedergeben kann. Jedoch fällt die Dichte für beide Ausdrücke mit den führenden Ordnungen ab und es tritt eine höhere positive Ordnung auf, sodass sie einen qualitativ ähnlichen Verlauf besitzen. Folglich können wir das Modell (5.4.17) für die Berechnung qualitativer Aussagen nutzen, müssen jedoch beachten, dass die Ergebnisse ungenau sind und dementsprechend keine quantitativen Aussagen getroffen werden sollten.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Zu Beginn der Arbeit haben wir die Betrachtung semiklassischer Quantengravitationseffekte motiviert, die Ziele definiert und die genutzten Notationen und Konventionen aufgelistet.

Im zweiten Kapitel haben wir uns die grundsätzlichen Postulate der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) und die Grundlagen der Tensoralgebra wieder in Erinnerung gerufen, um dann auf die zur Aufstellung der Einstein-Gleichung nötigen Schritte einzugehen. Danach haben wir kurz die Eigenschaften pseudokomplexer Zahlen diskutiert und das Kapitel mit einer Einführung in die von Hess und Greiner [10] aufgestellte pseudokomplexe Allgemeine Relativitätstheorie (pk-ART) beendet. Dabei haben wir gesehen, dass sich die Theorie wegen der Nullteiler der pseudokomplexen Zahlen nur aufgrund des veränderten Variationsverfahrens von einer doppelten Formulierung der ART unterscheidet. Zudem haben wir diskutiert, dass die Korrekturen niedrigster Ordnung der pk-ART zu Veränderungen der makroskopischen Gleichungen führen, die im Rahmen der ART durch einen zusätzlichen Energie-Impuls-Tensor beschrieben werden können.

Danach haben wir zuerst die Grundpostulate der nichtrelativistischen Quantenmechanik wiederholt und haben dann mit Hilfe des Impuls-, des Hamilton- und des Drehimpulsoperators die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion eines quantenmechanischen Teilchens und den Separationsansatz für sphärisch symmetrische Problemstellungen besprochen, um danach die Existenz des Spins zu diskutieren. Das Kapitel endete mit einer

ausführlichen Rekapitulation der Aufstellung der relativistischen Wellengleichungen im Minkowskiraum und der dafür nötigen gruppentheoretischen Grundlagen.

Im vierten Kapitel haben wir die Klein-Gordon- und die Dirac-Gleichung auf gekrümmte Räume verallgemeinert (gravitatives Hintergrundfeld). Im Anschluss haben wir die Klein-Gordon-Gleichung für eine sphärisch symmetrische Metrik sowohl in die Lösung eines Eigenwertproblems als auch in die Lösung eines Anfangswertproblems umgeformt und die beiden Versionen für die numerische Implementierung aufbereitet. Dabei treten unterschiedliche Parameter auf, die für die Simulationen gesetzt werden mussten, sodass wir im nächsten Schritt die sinnvollen beziehungsweise interessanten Bereiche dieser Parameter identifiziert haben. Anschließend haben wir die Ergebnisse der Klein-Gordon-Gleichung für ein aus [47] übernommenes ART-Metrikmodell und eines der pk-ART besprochen. Dafür wurden die die Energieeigenwerte für ein ART- und ein pk-ART-Spielzeugmodell der Metrik mit konstanter Dichte bestimmt und grafisch dargestellt. Dabei wurde die Berechnung nur über die Beschreibung als Anfangswertproblem durchgeführt, da die Lösung des Eigenwertproblems mit der genutzten Basis deutlich aufwändiger ist. Die Ergebnisse zeigen, dass die Bindung zweier Massen durch die Gravitation in beiden Theorien sehr schwach ist, wenn ihr Produkt nicht ungefähr ein Zehntel des Quadrats der Planck-Masse übersteigt. Für ein π^0 -Meson bedeutet dies, dass die zentrale Masse größer als $2 \cdot 10^{11} kg$ sein muss. Weiterhin ist die vorhergesagte Bindungsenergie für das ART-Modell deutlich größer als für das pk-ART-Modell, wenn die Zentralobjekte die gleiche Ausdehnung besitzen. Dies ist verständlich, da in der pk-ART ein repulsiver Quellterm auftritt, der im ART Bild als Ansammeln der dunklen Energie im Sterninneren interpretiert werden kann. Dabei verschwinden für das ART-Modell alle Eigenwerte, sobald ein Ereignishorizont auftritt, wohingegen die Energieniveaus des pk-ART-Modells ein absolutes Minimum in Abhängigkeit des Übergangspunkts von Innen- und Außenmetrik zeigen. Dieses hängt von dem in der pk-ART vorhandenen B-Parameter ab. Dabei kann die Position des Minimums für große Massen über das Minimum des effektiven

Potentials in Abhängigkeit des Übergangspunkts gefunden werden. Im Anschluss haben wir diese Analyse für die Dirac-Gleichung mit einem zusätzlichen dritten Modell wiederholt. Dabei haben wir festgestellt, dass die qualitativen Ergebnisse gleich sind. Jedoch ist ein durch die Dirac-Gleichung beschriebenes Fermion für die gleichen Parameter leicht schwächer gebunden.

Das Thema des finalen Kapitels war die Quantenfeldtheorie in gekrümmten Räumen. Zuerst haben wir die Quantenfeldtheorie für freie spinlose Felder in flachen Räumen besprochen. Dabei sind wir auf die (kanonische) Quantisierung des Feldes, die Zerlegung in Teilchenmoden und die daraus resultierenden Fockzustände eingegangen. Zusätzlich haben wir die Divergenz der Vakuumenergie diskutiert und sind auf das recht einfache Normierungsverfahren der Normalordnung eingegangen. Im nächsten Schritt haben wir die Quantenfeldtheorie für gekrümmte Hintergründeräume verallgemeinert und sind auf den Zusammenbruch des Teilchenkonzepts und die daraus resultierende Notwendigkeit Tensorgrößen zu betrachten eingegangen. Zudem wurde die dimensionale Renormalisierung des Energie-Impuls-Tensors skizziert. Danach haben wir den aus [18] entnommenen Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors für unsere Bedürfnisse umgeformt, um daraus näherungsweise die Vakuumfluktuationsdichte und den zugehörigen Radialdruck in vier Dimensionen zu bestimmen. Das resultierende Ergebnis der Schwarzschildmetrik haben wir dann mit den Ergebnissen Vissers [53] verglichen und die Unterschiede qualitativ besprochen. Zum Abschluss haben wir uns erst zwei Modelle für eine konstante und dann zwei Modelle einer variierenden Massendichte angeschaut und daraus ein qualitatives Modell der Vakuumfluktuationsdichte innerhalb von Sternen hergeleitet, das sich dadurch auszeichnet, dass die Vakuumfluktuationsdichte zum Rand des Sterns hin schneller abfällt als die zugehörige Massendichte.

Da die pk-ART erst 2009 aufgestellt wurde, weist ihre Beschreibung noch einige Lücken auf. Aus fundamental theoretischer Sicht ist das dringlichste Problem für die Beschreibung makroskopischer Systeme weiterhin die Identifikation des Quellterms, für die wir

in dieser Arbeit mit der Betrachtung der Vakuumfluktuationen wahrscheinlich nur einen kleinen Teil der Vorarbeit geleistet haben. Zudem ist der Zusammenhang des Real- und des Pseudo-Imaginärteils der pseudokomplexen Koordinaten und somit auch die Rolle der minimalen Länge in der Theorie nicht verstanden, sodass die Betrachtung mikroskopischer Systeme in der Theorie bisher nicht möglich ist. Weiterhin ist auch auf der Modellebene noch viel Arbeit nötig. So existieren bisher für die pk-ART keine Simulation von Sternverschmelzungen oder Gravitationswellen und es fehlen realistische pk-ART-Metriken für das Sterninnere.

Auch die in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen können verallgemeinert werden. So könnten die Simulationen der gebundenen Zustände auf Massen mit Ladungen oder eine drehende Zentralmasse verallgemeinert werden. Alternativ könnten Modelle mit variabler Dichte entwickelt und mit den hier präsentierten Ergebnissen verglichen werden. Zudem beruhen die Ergebnisse der Vakuumfluktuationen auf der Analyse von Spielzeugmodellmetriken, sodass die Berechnungen für Metriken, die aus einer realistischen Zustandsgleichung der Materie folgen, wiederholt werden könnten. Zudem wurden sie für die Entwicklung des inneren Sternmodells mehrmals genähert, sodass auch hier Entwicklungspotential ist. Außerdem existieren weitere semiklassische Quantengravitationsphänomene, auf die wir hier nicht genauer eingehen konnten, wie beispielsweise die Hawkingstrahlung, deren Betrachtung in der pk-ART ergiebig sein könnte.

Als direkte Konsequenz dieser Arbeit kann jedoch angesehen werden, dass einerseits die Simulationen der Neutronensterne mit dem neu entwickelten Modell wiederholt werden müssen und andererseits eine physikalische Observable für die Berechnung der gebundenen Zustände identifiziert werden muss, da es in absehbarer Zeit wohl kaum möglich sein wird, die Energiezustände für Zentralobjekte verschiedener Größen oder für Teilchen verschiedener Massen so genau zu vermessen wie für den direkten Nachweis nötig wäre.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei meinen beiden Betreuern Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner und Prof. Dr. Peter Otto Hess bedanken, denn ohne ihre organisatorische und fachliche Unterstützung wäre die Erstellung dieser Arbeit nicht möglich gewesen. Dabei ist es ihnen zusätzlich gelungen, dass ich die Arbeit mit ihnen als konstruktiv und angenehmen empfand.

Zudem bedanke ich mich bei Prof. Dr. Peter Hess für die Ermöglichung meines Aufenthaltes in Mexiko und seine Gastfreundschaft währenddessen, wobei ich mich in diesem Zusammenhang ebenfalls bei HGS-HIRE und bei DGAPA-PAPIIT(No. IN100315) für die dafür nötige finanzielle Unterstützung bedanken möchte.

Dem FIAS und seinen Mitarbeitern danke ich für die generelle finanzielle Unterstützung meines Promotionsstudiums sowie die Bereitstellung des dafür nötigen Arbeitsplatzes und für die Hilfe bei der Lösung organisatorischer und technischer Probleme. Insbesondere möchte ich hier Laura Quist hervorheben, die stets eine verlässliche Ansprechpartnerin für meine aufkommenden organisatorischen Fragen war.

Prof. Dr. Marcus Bleicher danke ich für die unkomplizierte Übernahme der Erstellung des dritten Gutachtens.

Zudem gilt mein Dank Thomas Schönenbach, Alexander Koloczek, Dr. Mirko Schäfer und Isaac Rodríguez für ihre Diskussionsbereitschaft und für ihren Beitrag zu meiner schönen Zeit am FIAS und an der Universität Frankfurt in den letzten Jahren.

Abschließend bedanke ich mich noch bei meiner Familie für ihre fortwährende Unterstützung und ihre guten Ratschläge.

Anhang

A. Berechnung der Metriken

A.1. Konstante Massendichte bei isotropem Druck

In diesem Unterkapitel lösen wir das Gleichungssystem (2.3.22) unter der Annahme, dass die Massendichte konstant ($\rho(r) = \rho_0$) und der Druck isotrop ($p_\vartheta = p_r = p$) ist. Damit erhalten wir das vereinfachte Gleichungssystem

$$m' = \frac{4\pi G \rho_0 r^2}{c^2}$$

$$\frac{p'}{c^2} = - \frac{m + \frac{4\pi G p r^3}{c^4}}{r(r - 2m)} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)$$

(A.1)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$\nu' = - \frac{2p'}{\rho_0 c^2 + p} .$$

Wir beginnen mit der Integration der ersten Gleichung

$$m(r) = \frac{4\pi G}{c^2} \int \rho_0 r^2 dr = \frac{4\pi G}{3c^2} \rho_0 r^3 , \quad (\text{A.2})$$

wobei wir die Integrationskonstante 0 gesetzt haben. Dies setzen wir in die dritte Gleichung ein und erhalten damit

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2 := 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad . \quad (\text{A.3})$$

Als Nächstes integrieren wir die vierte Gleichung von (A.1). Wir erhalten

$$De^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{8\pi G}{c^2} \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) \quad . \quad (\text{A.4})$$

Setzen wir in diese Gleichung (2.3.11) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} De^{-\frac{\nu}{2}} &= \frac{e^{-\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') \\ \frac{1}{2}Dr &= e^{-\lambda} \frac{\nu'}{2} e^{\frac{\nu}{2}} + \lambda' e^{-\lambda} e^{\frac{\nu}{2}} \\ \frac{1}{2}Dr &= e^{-\lambda} \left(e^{\frac{\nu}{2}} \right)' - \left(e^{-\lambda} \right)' e^{\frac{\nu}{2}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Durch Einsetzen von $e^{-\lambda}$ und Einführen der Abkürzung $\gamma = e^{\frac{\nu}{2}}$ folgt daraus die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}Dr = \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \gamma' + \frac{r}{R^2} \gamma \quad , \quad (\text{A.6})$$

deren allgemeine Lösung die homogene Lösung plus eine spezielle Lösung ist. Die spezielle Lösung ist

$$\gamma_s = \frac{1}{2}DR^2 \quad . \quad (\text{A.7})$$

Die homogene Lösung können wir durch Trennung der Variablen berechnen

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \gamma_h' + \frac{r}{R^2} \gamma_h \\ \frac{\gamma_h'}{\gamma_h} &= - \frac{r}{R^2 - r^2} \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{\gamma_h}{C_1} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \ln(C_2) \\ \Rightarrow \gamma_h &= C_1 C_2 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} = C \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Somit ist die allgemeine Lösung

$$\gamma = \frac{1}{2}DR^2 - C\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} := B - C\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad , \quad (\text{A.9})$$

wobei wir die auftretenden Konstanten über die Randbedingungen bestimmen müssen.

Beginnen wir damit (A.4) mit $\frac{R^2}{2}$ zu multiplizieren

$$\frac{1}{2}DR^2 = \frac{4\pi G}{c^2}R^2 \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) e^{\frac{\nu}{2}} = \frac{3}{2\rho_0} \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) e^{\frac{\nu}{2}} \quad . \quad (\text{A.10})$$

Nehmen wir an, die Metrik geht an der Stelle $r = r_0$ in den Außenraum der ART, das heißt die Schwarzschildmetrik (2.3.23), über. Verlangen wir zudem, dass der Druck stetig ist, folgt daraus $p(r_0) = 0$ und damit aus der obigen Gleichung

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2}DR^2 = \frac{3}{2\rho_0}\rho_0 \left(B - C\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \right) = \frac{3}{2}B - \frac{3}{2}C\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \\ B &= 3C\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Aus der Stetigkeit von $e^{-\lambda}$ und e^ν folgt

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r_s}{r_0} &= 1 - \frac{r_0^2}{R^2} \\ \Rightarrow R^2 &= \frac{r_0^3}{r_s} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r_s}{r_0} &= \left(B - C\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \right)^2 = 4C^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) = 4C^2 \left(1 - \frac{r_s}{r_0} \right) \\ \Rightarrow C &= \frac{1}{2} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

sodass wir insgesamt die Metrik

$$ds^2 = \left[\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 (d\vartheta^2 - \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) \quad (\text{A.14})$$

erhalten. Zudem können wir noch den Druck aus (A.10) berechnen

$$\begin{aligned} \frac{p}{c^2} &= \frac{2}{3}\rho_0 B e^{-\frac{\nu}{2}} - \rho_0 = \rho_0 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}}}{\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} - 1 \right) \\ &= \rho_0 \frac{\sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r_0^2}} - 1}{3 - \sqrt{\frac{R^2 - r^2}{R^2 - r_0^2}}} . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Die Einschränkung der Lösung auf $r_0 > \frac{9}{8}r_s$ ergibt sich daraus, dass der Nenner im Zentrum für $r_0 = \frac{9}{8}r_s$ verschwindet.

A.2. Exponentielles Modell

Berechnen wir, wie die Dichte und die Drücke in unserem exponentiellen Modell (4.0.1) aussehen. Beginnen wir damit die in Kapitel 2.3 gemachte Aussage für $r > r_0$ zu beweisen, dass (2.3.24) aus den Zustandsgleichungen $\frac{p_r}{c^2} = -\rho$ und $\frac{p_\theta}{c^2} = \frac{3}{2}\rho$ folgt. Dafür setzen wir die Metrik in die Gleichungen (2.3.12), (2.3.13) und (2.3.14) ein. Zuerst berechnen wir ρ

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c^2}{8\pi G} \left[\frac{1 - e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{(e^{-\lambda})'}{r} \right] \\ &= \frac{c^2}{8\pi G} \left(\frac{r_s}{r^3} - \frac{B}{2r^5} - \frac{r_s}{r^3} + \frac{3B}{2r^5} \right) \\ &= \frac{c^2}{8\pi G} \frac{B}{r^5} . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Durch Einsetzen von $\nu' = -\lambda'$ in (2.3.13), erhalten wir ohne weitere Rechnungen

$$\frac{p_r}{c^2} = -\rho . \quad (\text{A.17})$$

Zum Abschluss der Betrachtung des Außenraums bestimmen wir p_ϑ

$$\begin{aligned}
\frac{p_\vartheta}{c^2} &= -\frac{c^2}{8\pi G} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda''}{2} - \frac{\lambda'^2}{2} + \frac{\lambda'}{r} \right) \\
&= \frac{c^2}{8\pi G} \left[\frac{1}{2} (e^{-\lambda})'' + \frac{1}{r} (e^{-\lambda})' \right] \\
&= \frac{c^2}{8\pi G} \left(-\frac{r_s}{r^3} + \frac{3B}{r^5} + \frac{r_s}{r^3} - \frac{3B}{2r^5} \right) \\
&= \frac{3}{2} \frac{c^2}{8\pi G} \frac{B}{r^5} = \frac{3}{2} \rho \quad .
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Im Gegensatz dazu sind die Zustandsgleichungen des Innenraums deutlich komplizierter.

Wie im vorherigen Unterkapitel ist die Massendichte konstant

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{c^2}{8\pi G} \left[\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} + 2 \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) \right] \\
&= \frac{3c^2}{8\pi G} \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) \quad ,
\end{aligned} \tag{A.19}$$

aber in dieser Metrik ist der Druck anisotrop. Der Radialdruck ist dabei stetig

$$\begin{aligned}
\frac{p_r}{c^2} &= \frac{c^2}{8\pi G} \left[e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \right] \\
&= \frac{c^2}{8\pi G} \left[-\left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) + \frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{3B}{2r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} \left[1 - \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) r^2 \right] \right] \\
&= \frac{\rho}{3} \left[-1 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} - \frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} r^2 \right] - \frac{c^2}{8\pi G} \frac{B}{r_0^5} \frac{1 - \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) r^2}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} \\
&= \frac{8\pi G}{9c^2} \rho^2 \frac{r_0^2 - r^2}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho r_0^2} - \frac{c^2}{8\pi G} \frac{B}{r_0^5} \frac{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho r^2}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho r_0^2} \quad ,
\end{aligned} \tag{A.20}$$

wohingegen der Tangentialdruck unstetig ist

$$\begin{aligned}
\frac{p_\vartheta}{c^2} &= \frac{c^2}{8\pi G} \left[e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{2r} \right) + (e^{-\lambda})' \left(\frac{\nu'}{4} + \frac{1}{2r} \right) \right] \\
&= \frac{c^2}{8\pi G} \left[1 - \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) r^2 \right] \left[\frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{3B}{2r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} + \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{3B}{2r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} \right)^2 r^2 \right] \\
&\quad + \frac{c^2}{4\pi G} \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) r \left(\frac{1}{4} \frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{3B}{2r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} r + \frac{1}{2r} \right) \\
&= a (r^2 - r_0^2)^2 + b (r^2 - r_0^2) + d \quad ,
\end{aligned} \tag{A.21}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$a = -\frac{1}{4} \left(\frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{3B}{2r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} \right)^2 \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$b = \frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{3B}{2r_0^5}}{2 \left(1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3} \right)^2} \left[-\frac{r_s}{2r_0^3} + \frac{3B}{4r_0^5} + \frac{Br_s}{r_0^6} - \frac{B^2}{2r_0^8} \right] \quad (\text{A.23})$$

$$d = -ar_0^4 + br_0^2 + 2 \frac{\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{r_0^5}}{1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}} \quad (\text{A.24})$$

verwendet haben.

Somit ähnelt das Modell einem Stern mit konstanter Dichte und isotropen Druck, da die Dichte ebenfalls konstant ist und die Drücke für kleine Radien quadratisch mit dem Radius abfallen.

B. Kovariante Ableitung eines Spinors

In diesem Anhangskapitel berechnen wir ausführlich die kovariante Ableitung eines Spinors mit Hilfe der Tensorfelder, die durch bilineare Formen der Wellenfunktion (bzw. des Spinors) gebildet werden (siehe [30, Kapitel 5]).

Wir beginnen analog zu Tensoren (siehe 2.1) mit der Forderung, dass die Parallelverschiebung eines Spinors linear vom Spinor selbst abhängt. Somit ist unser Ansatz

$$D_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi + \Gamma_\mu \Psi \quad , \quad (\text{B.1})$$

wobei Γ_μ eine noch unbekannte Matrix ist. Analog folgt für den adjungierten Spinor

$$D_\mu \bar{\Psi} = \partial_\mu \bar{\Psi} + \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}_\mu \quad . \quad (\text{B.2})$$

Das Produkt des adjungierten Spinors mit dem Spinor $\bar{\Psi}\Psi$ ist ein Skalarfeld (siehe [30, Kapitel 5]), dessen kovariante Ableitung seine partielle Ableitung ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
D_\mu (\bar{\Psi}\Psi) &= \partial_\mu (\bar{\Psi}\Psi) = (D_\mu \bar{\Psi}) \Psi + \bar{\Psi} (D_\mu \Psi) \\
\Rightarrow \partial_\mu (\bar{\Psi}\Psi) &= (\partial_\mu \bar{\Psi}) \Psi + \bar{\Psi} (\partial_\mu \Psi) = (\partial_\mu \bar{\Psi}) \Psi + \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}_\mu \Psi + \bar{\Psi} (\partial_\mu \Psi) + \bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi \\
&\Rightarrow 0 = \bar{\Psi} \tilde{\Gamma}_\mu \Psi + \bar{\Psi} \Gamma_\mu \Psi \\
&\Rightarrow \tilde{\Gamma}_\mu = -\Gamma_\mu \quad .
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Weiterhin ist $\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi$ ein Vektorfeld, sodass seine kovariante Ableitung durch

$$D_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) = \partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \bar{\Psi}\gamma^\beta\Psi \tag{B.4}$$

gegeben ist. Zudem ist sie ebenfalls

$$D_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) = (D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\alpha\Psi + \bar{\Psi} (D_\mu \gamma^\alpha) \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\alpha (D_\mu \Psi) \quad . \tag{B.5}$$

Die Ortsabhängigkeit der γ -Matrizen ist ausschließlich durch die Metrik definiert und somit verschwinden ihre kovariante Ableitungen. Nutzen wir dies aus, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \bar{\Psi}\gamma^\beta\Psi \\
&= -\bar{\Psi}\Gamma_\mu\gamma^\alpha\Psi + \bar{\Psi}\gamma^\alpha\Gamma_\mu\Psi + \partial_\mu (\bar{\Psi}\gamma^\alpha\Psi) - \bar{\Psi} (\partial_\mu \gamma^\alpha) \Psi \\
\Rightarrow \bar{\Psi} [\gamma^\alpha, \Gamma_\mu] \Psi &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \bar{\Psi}\gamma^\beta\Psi + \bar{\Psi} (\partial_\mu \gamma^\alpha) \Psi
\end{aligned} \tag{B.6}$$

für einen beliebigen Spinor Ψ . Somit gilt für die involvierten Matrizen

$$[\gamma^\alpha, \Gamma_\mu] = \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \quad . \tag{B.7}$$

In Kapitel 3 (vor (3.4.45)) wird erläutert, dass die 16 linear unabhängigen Matrizen, die aus den γ -Matrizen gebildet werden können, eine Basis des Spinraums sind. Folglich können wir die affinen Verbindungen Γ_μ in diese Basis entwickeln und wir erhalten

$$\Gamma_\mu = a_\mu \hat{1} + b_{\mu\nu} \gamma^\nu + c_{\mu\nu\omega} \gamma^\nu \gamma^\omega + d_{\mu\nu\omega\lambda} \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda + e_\mu \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad . \tag{B.8}$$

Dass die obigen Matrizen nicht alle linear unabhängig sind, kann durch die Antikommutationsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\hat{\mathbf{1}} \quad (\text{B.9})$$

gezeigt werden. So ist beispielsweise $\gamma^1\gamma^0$ durch eine Linearkombination aus $\gamma^0\gamma^1$ und $\hat{\mathbf{1}}$ darstellbar

$$\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1 + 2g^{01}\hat{\mathbf{1}} \quad (\text{B.10})$$

bzw. allgemein gilt

$$\gamma^\nu\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^\nu + 2g^{\mu\nu}\hat{\mathbf{1}} \quad . \quad (\text{B.11})$$

Ein Beispiel einer Basis ist $\hat{\mathbf{1}}, \gamma^\nu, \gamma^\nu\gamma^\omega$ mit $\nu < \omega$, $\gamma^\nu\gamma^\omega\gamma^\lambda$ mit $\nu < \omega < \lambda$ und $\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} c_{\mu\nu\omega} &= 0 & \nu &\geq \omega \\ d_{\mu\nu\omega\lambda} &= 0 & \omega &\geq \nu \vee \lambda \geq \omega \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Da es nachher von Vorteil sein wird, nehmen wir jedoch eine Modifikation vor. Wie an (B.11) zu sehen ist, führt die Vertauschung zweier γ -Matrizen nur zu einem zusätzlichen zu $\mathbf{1}$ proportionalen Term. Folglich können wir ebenfalls

$$\Gamma_\mu = \tilde{a}_\mu\hat{\mathbf{1}} + b_{\mu\nu}\gamma^\nu + \tilde{c}_{\mu\nu\omega}\gamma^\nu\gamma^\omega + d_{\mu\nu\omega\lambda}\gamma^\nu\gamma^\omega\gamma^\lambda + e_\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (\text{B.13})$$

mit

$$\tilde{c}_{\mu\nu\omega} = -\tilde{c}_{\mu\omega\nu} \quad (\text{B.14})$$

ansetzen.

In (B.7) ist der Kommutator der affinen Verbindung mit den γ -Matrizen festgelegt. Diesen können wir ebenfalls mit dem Ansatz (B.13) berechnen, wobei es leichter ist, die

Basismatrizen einzeln zu betrachten. Der Kommutator der γ -Matrizen mit dem Einheitsoperator $\hat{\mathbb{1}}$ verschwindet und somit ist der zugehörige Koeffizient \tilde{a}_μ frei wählbar. Wir setzen

$$\tilde{a}_\mu = 0 \quad . \quad (\text{B.15})$$

Der Kommutator der γ -Matrizen untereinander ist

$$[\gamma^\alpha, \gamma^\nu] = \gamma^\alpha \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\alpha = 2 \left(\gamma^\alpha \gamma^\nu - g^{\nu\alpha} \hat{\mathbb{1}} \right) \quad , \quad (\text{B.16})$$

wobei wir im zweiten Schritt die Gleichung (B.11) genutzt haben.

Analog können wir die Kommutatoren für die Basismatrizen höherer Ordnung bestimmen. So folgt für die Basismatrizen aus zwei γ -Matrizen

$$\begin{aligned} [\gamma^\alpha, \gamma^\nu \gamma^\omega] &= [\gamma^\alpha, \gamma^\nu] \gamma^\omega + \gamma^\nu [\gamma^\alpha, \gamma^\omega] \\ &= 2\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\omega - 2g^{\nu\alpha} \gamma^\omega + 2\gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\omega - 2g^{\omega\alpha} \gamma^\nu \\ &= 2 \{ \gamma^\alpha, \gamma^\nu \} \gamma^\omega - 2g^{\nu\alpha} \gamma^\omega - 2g^{\omega\alpha} \gamma^\nu \\ &= 2g^{\nu\alpha} \gamma^\omega - 2g^{\omega\alpha} \gamma^\nu \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

wobei wir im zweiten Schritt (B.16) und im letzten Schritt (B.9) eingesetzt haben. Für die kubischen Terme ergibt sich der Kommutator

$$\begin{aligned} [\gamma^\alpha, \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda] &= [\gamma^\alpha, \gamma^\nu] \gamma^\omega \gamma^\lambda + \gamma^\nu [\gamma^\alpha, \gamma^\omega \gamma^\lambda] \\ &= 2\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda - 2g^{\nu\alpha} \gamma^\omega \gamma^\lambda + 2g^{\omega\alpha} \gamma^\nu \gamma^\lambda - 2g^{\lambda\alpha} \gamma^\nu \gamma^\omega \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

wenn wir (B.16) und (B.17) nutzen und für den quadratischen Term ergibt sich

$$\begin{aligned} [\gamma^\alpha, \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] &= [\gamma^\alpha, \gamma^0] \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 + \gamma^0 [\gamma^\alpha, \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3] \\ &= 2\gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 - 2g^{0\alpha} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 + 2\gamma^0 \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \\ &\quad - 2g^{1\alpha} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + 2g^{2\alpha} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 - 2g^{3\alpha} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \\ &= 2g^{0\alpha} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 - 2g^{1\alpha} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + 2g^{2\alpha} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 - 2g^{3\alpha} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

sofern wir im zweiten Schritt (B.16) und (B.18) und im letzten Schritt (B.9) ausnutzen.

Setzen wir (B.16), (B.17), (B.18) und (B.19) zusammen mit dem Ansatz (B.13) in (B.7), dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
[\gamma^\alpha, \Gamma_\mu] &= 2b_{\mu\nu} (\gamma^\alpha \gamma^\nu - 2g^{\nu\alpha} \hat{\mathbf{1}}) + 2\tilde{c}_{\mu\nu\omega} (g^{\nu\alpha} \gamma^\omega - g^{\omega\alpha} \gamma^\nu) \\
&\quad + 2d_{\mu\nu\omega\lambda} (\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda - 2g^{\nu\alpha} \gamma^\omega \gamma^\lambda + 2g^{\omega\alpha} \gamma^\nu \gamma^\lambda - 2g^{\lambda\alpha} \gamma^\nu \gamma^\omega) \\
&\quad + 2e_\mu (2g^{0\alpha} \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 - 2g^{1\alpha} \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + 2g^{2\alpha} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 - 2g^{3\alpha} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2) \\
&= \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \mu\beta \end{array} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \quad . \tag{B.20}
\end{aligned}$$

Für die Gleichung müssen die Koeffizienten so gewählt werden, dass die beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Beginnen wir damit den quadratischen Term $\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda$ zu betrachten, denn nur dieser kann Terme proportional zur Basismatrix $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ produzieren. Es gilt

$$d_{\mu\nu\omega\lambda} \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda = d_{\mu 012} \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 + d_{\mu 013} \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 + d_{\mu 023} \gamma^\alpha \gamma^0 \gamma^2 \gamma^3 + d_{\mu 123} \gamma^\alpha \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad . \tag{B.21}$$

Der Koeffizient α ist beliebig, da die jeweilige Vertauschungsrelation für alle γ -Matrizen gilt. Wählen wir beispielsweise $\alpha = 0$, dann ist der obige Ausdruck

$$d_{\mu\nu\omega\lambda} \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\omega \gamma^\lambda = 2d_{\mu 012} g^{00} \gamma^1 \gamma^2 + 2d_{\mu 013} g^{00} \gamma^1 \gamma^3 + 2d_{\mu 023} g^{00} \gamma^2 \gamma^3 + d_{\mu 123} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \quad . \tag{B.22}$$

Die quadratischen Terme $\gamma^1 \gamma^2$, $\gamma^1 \gamma^3$ und $\gamma^2 \gamma^3$ können möglicherweise an anderer Stelle kompensiert werden. Jedoch existiert, wie schon erwähnt, kein weiterer Ausdruck in (B.20), der einen Term proportional zu $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ produzieren kann. Folglich können die beiden Seiten nur dann übereinstimmen, wenn

$$d_{\mu 123} = 0 \tag{B.23}$$

gilt. Analog können wir für α ungleich 0 vorgehen. Dann müssen wir zwar noch γ -Matrizen vertauschen, aber wir erhalten jeweils einen Term proportional zu $\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$

für das $d_{\mu\nu\omega\lambda}$, für das $\nu \neq \alpha$, $\omega \neq \alpha$ und $\lambda \neq \alpha$ gilt. Folglich erhalten wir

$$d_{\mu\nu\omega\lambda} = 0 \quad . \quad (\text{B.24})$$

Die Terme nächsthöherer Ordnung sind die kubischen Terme $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^0\gamma^2\gamma^3$, $\gamma^0\gamma^1\gamma^3$ und $\gamma^0\gamma^1\gamma^2$. Diese treten ausschließlich in Proportionalität zu e_μ auf und sind jeweils linear unabhängig. In der letzten Zeile von (B.20) tritt jedoch kein kubischer Term auf, sodass wir daraus

$$e_\mu = 0 \quad (\text{B.25})$$

erhalten.

Betrachten wir die Terme proportional zu $b_{\mu\nu}$. Wir wählen wieder $\alpha = 0$ und erhalten so

$$b_{\mu\nu} (\gamma^0\gamma^\nu - g^{\nu 0}\hat{\mathbf{1}}) = 2b_{\mu 0}g^{00}\hat{\mathbf{1}} + b_{\mu 1} (\gamma^0\gamma^1 - g^{01}\hat{\mathbf{1}}) + b_{\mu 2} (\gamma^0\gamma^2 - g^{02}\hat{\mathbf{1}}) + b_{\mu 3} (\gamma^0\gamma^3 - 2g^{03}\hat{\mathbf{1}}) \quad . \quad (\text{B.26})$$

Wenn wir wie in (B.24) gefordert $d_{\mu\nu\omega\lambda} = 0$ setzen, generiert kein weiterer Term in (B.20) quadratische Terme in den γ -Matrizen. Weiterhin sind $\gamma^0\gamma^1$, $\gamma^0\gamma^2$ und $\gamma^0\gamma^3$ voneinander linear unabhängig und somit muss

$$b_{\mu 1} = b_{\mu 2} = b_{\mu 3} = 0 \quad (\text{B.27})$$

gelten. Sobald dies der Fall ist, existiert jedoch außer $2b_{\mu 0}g^{00}\hat{\mathbf{1}}$ kein weiterer Term proportional zu $\hat{\mathbf{1}}$ und folglich erhalten wir

$$b_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (\text{B.28})$$

Setzen wir diese Zwischenergebnisse ((B.24), (B.25) und (B.28)) in (B.20) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} [\gamma^\alpha, \Gamma_\mu] &= 2\tilde{c}_{\mu\nu\omega} (g^{\nu\alpha}\gamma^\omega - g^{\omega\alpha}\gamma^\nu) = 4\tilde{c}_{\mu\nu\omega}g^{\nu\alpha}\gamma^\omega \\ &= \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu, \beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Entwickeln wir die γ -Matrizen wie in (4.1.11) und schreiben allgemein

$$\gamma^\mu = a^\mu_\nu \tilde{\gamma}^\nu \quad , \quad (\text{B.30})$$

dann folgt daraus

$$4\tilde{c}_{\mu\nu\omega} g^{\nu\alpha} a^\omega_\rho \tilde{\gamma}^\rho = \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} a^\beta_\rho + \partial_\mu a^\alpha_\rho \right) \tilde{\gamma}^\rho \quad . \quad (\text{B.31})$$

Die $\tilde{\gamma}^\rho$ sind linear unabhängig und somit ist

$$\tilde{c}_{\mu\eta\omega} a^\omega_\rho = \frac{1}{4} g_{\eta\alpha} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} a^\beta_\rho + \partial_\mu a^\alpha_\rho \right) \quad . \quad (\text{B.32})$$

Eingesetzt in die affine Verbindung Γ_μ ergibt das

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \tilde{c}_{\mu\eta\omega} \gamma^\eta \gamma^\omega = \left(\tilde{c}_{\mu\eta\omega} a^\omega_\rho \right) \gamma^\eta \tilde{\gamma}^\rho \\ &= \frac{1}{4} g_{\eta\alpha} \gamma^\eta \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} a^\beta_\rho + \partial_\mu a^\alpha_\rho \right) \tilde{\gamma}^\rho \\ &= \frac{1}{4} \gamma_\alpha \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\beta \end{matrix} \right\} \gamma^\beta + \partial_\mu \gamma^\alpha \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

und somit die Form, die sich auch in Lehrbüchern wie [47, Kapitel 21.1] finden lässt.

C. Programme

C.1. Verwendete Verfahren

In diesem Unterkapitel diskutieren wir kurz die in der Arbeit verwendeten numerischen Verfahren. Für die tieferen Details wird auf [54] verwiesen.

Bisektionsverfahren

Das Bisektionsverfahren ist ein Verfahren der numerischen Mathematik, mit dem Probleme gelöst werden können, die sich auf ein Nullstellenproblem zurückführen lassen. Zu Beginn des Verfahrens werden zwei Punkte (x_1 und x_2) benötigt, die das Intervall begrenzen, in dem die zu suchende Nullstelle liegt, das heißt das Produkt der Funktionswerte der beiden Punkte ist negativ

$$f(x_1)f(x_2) < 0 \quad . \quad (C.1)$$

Dann wird der Funktionswert für den Mittelpunkt des Intervalls $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ berechnet und x_3 ersetzt die Intervallgrenze, für die $f(x_i)f(x_3) > 0$ gilt. Dies wird solange wiederholt bis der durch den Abstand der beiden Intervallgrenzen gegebene Fehler den Genauigkeitsansprüchen entspricht.

Die im Programm „kgennergies“ verwendete Variante teilt jedoch das Intervall nicht in der Mitte, sondern nutzt den Mittelpunkt des Exponenten. Das heißt $x_1 = 10^{y_1}$, $x_2 = 10^{y_2}$ und $x_3 = 10^{y_3}$ mit $y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$. Dies hat den Vorteil, dass nicht der absolute Fehler der beiden durch die Halbierung entstehenden Teilintervalle gleich groß ist, sondern der relative Fehler, der für uns maßgeblich ist.

Dieses simple Verfahren wird in “kgennergies” verwendet, da wir sicher gehen wollen, dass keiner der Iterationsschritte zu einem negativen γ -Wert führt, da sonst die zu berechnenden Integrale divergieren und das Verfahren einen Fehler produziert. In “RKKleinGordon” und “RKDirac” verwenden wir dies, um negative Testenergien zu vermeiden. Denn diese können wir durch Spiegelung an der x-Achse gewinnen.

Regula-falsi-Verfahren

Das Regula-Falsi-Verfahren ist ebenfalls ein Nullstellenverfahren, dessen Stützwerte auf ein Intervall beschränkt sind. Es wird ebenfalls ein Anfangsintervall benötigt, für das das Produkt der Funktionswerte der beiden Grenzpunkte (x_1 und x_2) negativ ist. Jedoch wird das Intervall nicht in der Mitte geteilt, sondern die Funktionswerte der beiden Grenzpunkte werden durch eine Sekante verbunden. Dann wird der Funktionswert an der Nullstelle der Sekante x_3 berechnet

$$x_3 = x_1 - \frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_1) \quad (\text{C.2})$$

und x_3 ersetzt erneut die Intervallgrenze, für die $f(x_i)f(x_3) > 0$ gilt.

Runge-Kutta-Verfahren

Runge-Kutta-Verfahren dienen der Lösung von Anfangswertproblemen von Systemen gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Das heißt es liegt ein Gleichungssystem der Form

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_0, \dots, y_{N-1}) \quad i = 0, \dots, N - 1 \quad (\text{C.3})$$

vor, wobei die Funktionen f_i bekannt sind, und wir kennen die Lösung für einen Punkt x_0 für alle y_i . An diesem bekannten Punkt sind folglich sowohl die Funktionswerte als auch über die Differentialgleichungen die jeweiligen Ableitungen bekannt. Das Ziel des Verfahrens ist, daraus die Funktionswerte y_i an einem beliebigen anderen Ort x_1 zu bestimmen.

Die Taylorentwicklung jeder Zielfunktion in x_0 besitzt die Form

$$y_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n y_i(x)}{dx^n} (x_0) (x - x_0)^n \quad . \quad (\text{C.4})$$

Ist die Differenz $h = x - x_0$ hinreichend klein, dann können wir die Funktion durch die führenden beiden Terme annähern und die Funktion am Ort $x_0 + h$ ist

$$y_i(x_0 + h) \approx y_i(x_0) + h \frac{dy_i(x)}{dx}(x_0) \quad , \quad (\text{C.5})$$

wobei ein Fehler der Größenordnung $O(h^2)$ auftritt. Für die elementarste Form eines Runge-Kutta-Verfahrens, das Euler-Verfahren, berechnen wir auf diese Weise sukzessive die Funktionswerte an den Orten $x_n = x_0 + nh$ bis wir x_1 erreichen. Wir benötigen bis dahin $N = \frac{x_1 - x_0}{h}$ Schritt und akkumulieren somit insgesamt einen Fehler proportional zu h .

Ein allgemeines Runge-Kutta-Verfahren benutzt das gleiche Prinzip, nur dass für jeden Schritt noch Zwischenschritte eingefügt werden. So nutzt beispielsweise das Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung einen Zwischenpunkt in der Mitte des Intervalls, um den Term zweiter Ordnung $O(h^2)$ in das Näherungsverfahren aufzunehmen. Die beiden Schritte sind

$$\begin{aligned} k_{1i} &= h f_i(x_n, y_0, \dots, y_{N-1}) \\ k_{2i} &= h f_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{10}}{2}, \dots, y_{N-1} + \frac{k_{1N-1}}{2}\right) \\ y_{in+1} &\approx y_{in} + k_{2i} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Durch Taylorentwicklung von f kann nachvollzogen werden, dass $k_{2i} = \frac{dy_i}{dx}h + \frac{1}{2} \frac{d^2y_i}{dx^2}$ ist und wir somit einen Fehler der Größenordnung $O(h^3)$ erhalten.

Aus numerischer Sicht ist das beste Verfahren, das Verfahren, mit dem die Ergebnisse am schnellsten innerhalb einer vordefinierten Genauigkeit berechnet werden können. Innerhalb der simplen Runge-Kutta-Verfahren (ohne Anpassung der Schrittweite) ist

dies meist das klassische Runge-Kutta-Verfahren der vierten Ordnung [54, Kapitel 16]

$$\begin{aligned}
k_{1i} &= h f_i(x_n, y_0, \dots, y_{N-1}) \\
k_{2i} &= h f_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{10}}{2}, \dots, y_{N-1} + \frac{k_{1N-1}}{2}\right) \\
k_{3i} &= h f_i\left(x_n + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_{20}}{2}, \dots, y_{N-1} + \frac{k_{2N-1}}{2}\right) \\
k_{4i} &= h f_i(x_n + h, y_0 + k_{30}, \dots, y_{N-1} + k_{3N-1}) \\
y_{in+1} &= y_{in} + \frac{1}{6} (k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}) + O(h^5) \quad , \quad (C.7)
\end{aligned}$$

das wir von daher in den Programmen “RKKleinGordon” und “RKDirac” verwenden.

Zusätzlich kann noch die Schrittweite dynamisch angepasst werden. Im einfachsten Fall bietet sich hierfür die Berechnung des jeweiligen Runge-Kutta-Schritts sowohl für h als auch $\frac{h}{2}$ an. Sofern der Unterschied der beiden Approximationen größer als die gewünschte Genauigkeit ist wird dann die Schrittweite reduziert und der Schritt wiederholt. Ist der Unterschied hingegen viel kleiner als die gewünschte Genauigkeit, kann die Schrittweite für den nächsten Schritt erhöht und die Berechnung der Ergebnisses somit beschleunigt werden. Für das klassische Runge-Kutta-Verfahren erfordert dies jedoch 11 statt der 8 für die Berechnung des $\frac{h}{2}$ -Schritts nötigen Berechnungen und erhöht somit den Aufwand pro Schritt um den Faktor 1,375. Folglich ist das adaptierte Verfahren langsamer, solange die Anpassung der Schrittweite dies nicht kompensiert. Dieser Faktor kann noch durch die sogenannten Runge-Kutta-Fehlerberg-Verfahren verringert werden, bei der eine Kombination von Zwischenpunkten genutzt wird, deren Ergebnisse auf 2 Arten mit einer um eines unterschiedlichen Fehlerordnung kombiniert werden können. Der Unterschied der beiden Ergebnisse kann zur Abschätzung des Fehlers genutzt und die Schrittweite auf dieser Grundlage angepasst werden.

Da diese Verfahren stark oszillierende Stellen besser auflösen und somit zu einer genaueren Approximation der Funktionen führen, schalten wir in unserem Programmen auf ein solches um, sofern die Knotenanzahl für eine Änderung der Energie aus dem vorher

definierten Intervall springt. Die Details und die dafür benutzten Cash-Karp-Parameter können in [54, Kapitel 16] gefunden werden.

C.2. Matrixdiagonalisierungsprogramm

Zur Berechnung der Energieeigenwerte der Klein-Gordon-Gleichung per Matrixdiagonalisierungsverfahren (siehe 4.2.2) wurde das Programm „kgennergies“ geschrieben. Es liefert für einen Parametersatz bestehend aus $pc = \frac{B}{r_s}$, l , m und „mode“, der eine der vorher definierten Metriken auswählt, das effektive Potential und die Verhältnisse $\frac{E_n}{mc^2}$ für eine festgelegte Anzahl Basisfunktionen n . Diese ist so definiert, dass erfahrungsgemäß der relative Unterschied der fünf niedrigsten Energieeigenwerte zwischen der Nutzung von n Basisfunktionen und $n-5$ Basisfunktionen kleiner als 10^{-3} ist. Dafür wird erst das Minimum der Grundzustandsenergie in Abhängigkeit von dem Parameter der Basisfunktionen γ gesucht und danach die Eigenwerte berechnet. Die Grafik C.1 zeigt eine schematische Darstellung dieser Abhängigkeit.

Der Programmdurchlauf des Hauptprogramms kann anhand der Grafik C.2 nachvollzogen werden, die ein vereinfachtes, aber alle essentiellen Schritte enthaltendes Flussdiagramm zeigt. Er startet mit dem Laden der Parameter aus einer vorher abgespeicherten Textdatei. Danach werden Hilfsvariablen wie beispielsweise \bar{r} (siehe (4.2.27)) am Übergangspunkt zwischen innerer und äußerer Metrik definiert und in einen Parameterfeld gespeichert, das allen Unterfunktionen komplett übergeben wird. Im nächsten Schritt wird sowohl die Anzahl der Basisfunktionen, die zur Optimierung von γ genutzt wird, als auch die Anzahl, die zur Berechnung der Energieeigenwerte verwendet wird, festgelegt. Danach wird die Unterfunktion „findgam“ aufgerufen.

Die Unterfunktion „findgam“ ermittelt γ mittels eines Bisektionsverfahrens (siehe C.1) des Exponenten der Intervallgrenzen. Die Zahl der Iterationsschritte wird dabei so gewählt, dass der gefundene Wert weniger als 6% vom wahren Optimum abweicht. Das

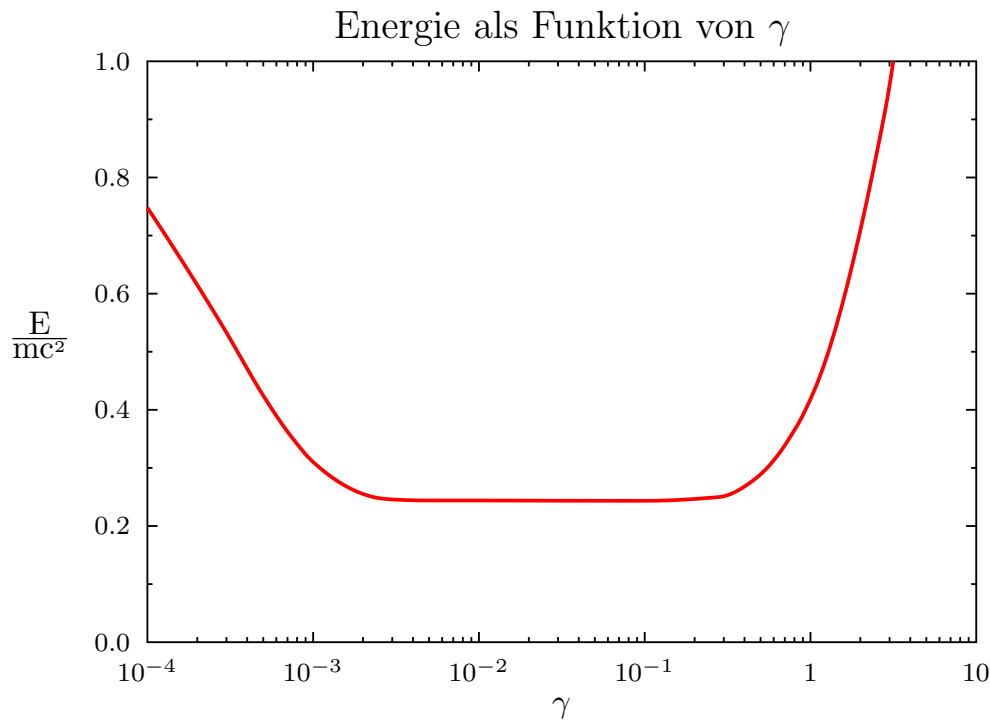


Abbildung C.1.: Der typische Verlauf der Abhängigkeit der Grundzustandsenergie von γ .

Unterprogramm beginnt mit dem Aufruf der Unterfunktion „fsg“, die das Startintervall berechnet, indem mit Hilfe des ROOT-Objekts [55] „GaussLegendreIntegrator“ (wird für alle Integrale genutzt) für eine Basisfunktion der Erwartungswert des \hat{H}^2 -Operators in Einerschritten des Exponenten von 10^{-16} bis 1 berechnet wird. Der niedrigste Wert wird als linke Begrenzung des Suchintervalls gesetzt und für die rechte Grenze wird entweder das Tausend- oder das Millionenfache gesetzt (Erfahrungswerte). Dann führt „findgam“ selbst die Bisektionsschritte mit der im Vorlauf festgelegten Anzahl der Basisfunktionen für die γ -Suche durch, wobei die Energiewerte mit der Unterfunktion „getev“ bestimmt werden (dieses arbeitet ähnlich wie das weiter unten beschriebene getnev, nur dass es keine Ausgabe liefert, die Matrix nur einmal diagonalisiert und den niedrigsten Eigenwert

zurückgibt). Der letzte berechnete Wert von γ wird an das Hauptprogramm übergeben und dieses speichert ihn an dritter Position im Parameterfeld ab.

Danach erfolgt die automatische Erstellung der Namen der Ausgabedateien in Abhängigkeit der eingegebenen Parameter und deren Übergabe an die Unterfunktion „getnev“. Dieses definiert eine leere $n \times n$ -Matrix mit Hilfe des ROOT-Objekts „TMatrixD“, füllt sie blockweise (es wird erst immer eine quadratische Untermatrix beendet) und diagonalisiert sie. Die Diagonalisierung wird sowohl für $n=5$ als auch für n mit Hilfe des ROOT-Objekts „TMatrixDEigen“ durchgeführt.

Die Unterfunktion „getnev“ führt zudem die Ausgabe durch. Die gewonnenen Werte werden auf verschiedene Arten aufbereitet und in die verschiedenen im Hauptprogramm definierten Dateien geschrieben (Es wäre auch möglich die Daten im Nachhinein für die zu erstellenden Graphen aufzubereiten, aber das Programm übernimmt schon einen Großteil dieser Aufgabe.).

Zum Schluss berechnet das Programm optional noch das effektive Potential (4.2.23) in Abhängigkeit von r und \bar{r} in äquidistanten Schritten $\Delta r = 0.1r_s$.

Essentiell für den Programmdurchlauf sind zudem noch einige Hilfsfunktionen. Insbesondere existiert eine Unterfunktion für jede auftretende Metrikfunktion („enu“ für e^ν , „elam“ für e^λ , „nupr“ für ν' und „lampr“ für λ'), für die Berechnung des Skalierungsparameter nach (4.2.56) („getscale“), für den Operator $O(r)$ in (4.2.28) („oper“) und für die Basisfunktionen (4.2.24). Weiterhin berechnet „getrbar“ durch Lösen des Integrals (4.2.27) \bar{r} für ein gegebenes r und „getr“ benutzt eine Regula-Falsi-Verfahren (siehe C.1), um r für ein gegebenes \bar{r} zu bestimmen.

Nicht essentiell für das Verfahren sind die zwei Hilfsfunktionen „numsampoints“, die die benötigte Stützpunktzahl des Integrals (4.2.31) bestimmt, und „splitint“, die das Integral in drei Teile spaltet, um die benötigte Punktzahl zu reduzieren.

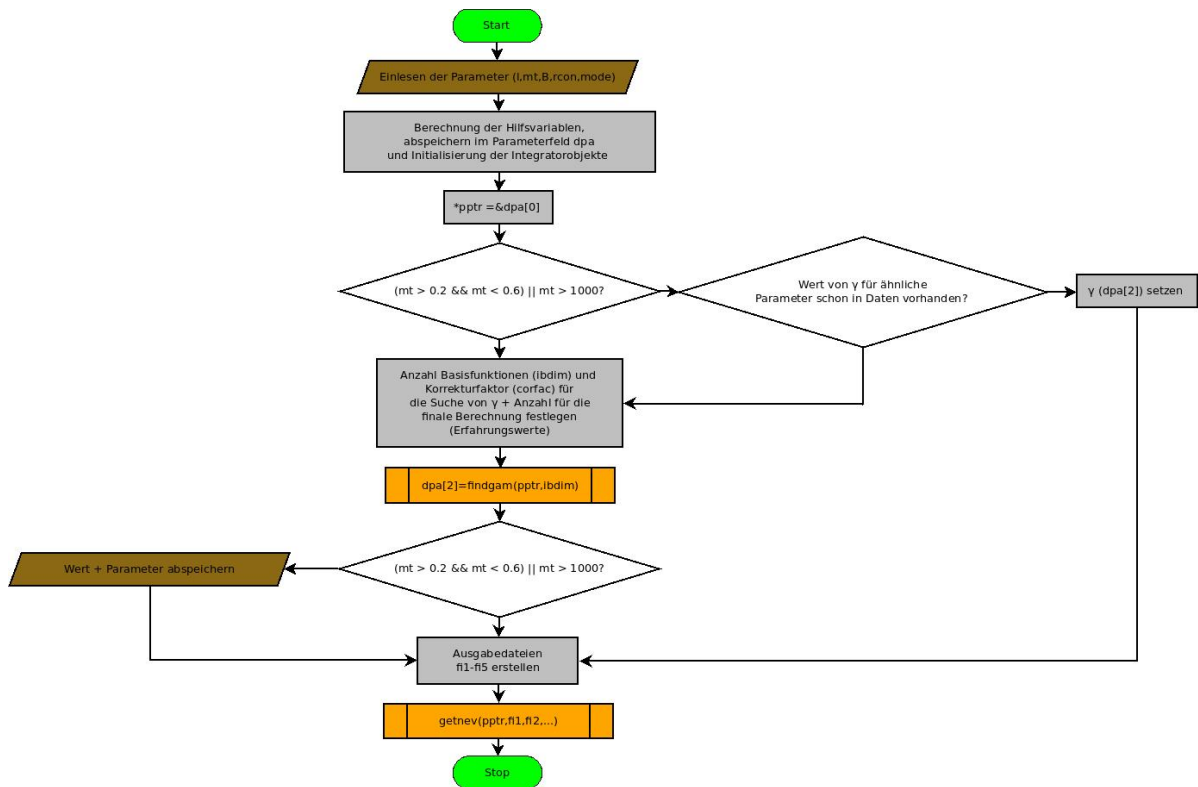


Abbildung C.2.: Vereinfachtes, aber alle essentiellen Schritte enthaltendes Flussdiagramm des Hauptprogramms von „kgenergies“. Ist eine Abfrage nicht erfüllt, folgt das Programm dem Pfeil nach unten. Die anderen Richtungen sind für wahre Aussagen.

C.3. Programme zur Lösung des Anfangswertproblems

Die beiden Programme „RKKleinGordon“ und „RKDirac“ sind so ähnlich, dass wir sie in diesem Unterkapitel zusammen diskutieren. Beide lösen die respektive Gleichung für eine angesetzte Energie mittels eines klassischen Runge-Kutta-Verfahrens, zählen dann die Knoten der Wellenfunktion gemäß der Diskussion in Kapitel 4 und passen die Energie auf dieser Grundlage an, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Beim Programmstart müssen die Parameter $pc = \frac{B}{r_s^3}, l$ (bzw. $|\kappa|$ für „RKDirac“), $m, r_0,$ „mode“ (dient der Wahl des Metrikmodell) und die gewünschte Schrittweite übergeben werden. Dabei gibt l die maximale Drehimpulsquantenzahl an, für die Zustände berechnet werden sollen. Die Anzahl der Zustände wird dabei als Differenz des Hilfsparameters „anz“, der suboptimalerweise im Programmcode gesetzt wird, und der Drehimpulsquantenzahl gesetzt, sodass für niedrigere Drehimpulse mehr Zustände berechnet werden.

Nachdem die Parameter in die entsprechenden Programmvariablen geladen wurden, wird die untere Grenze der Energie für unsere drei Modelle in Kapitel 4 auf $0.99mc^2e^{\frac{\kappa}{2}}(0)$ gesetzt und die Zahl der Knoten der zugehörigen Wellenfunktion bestimmt (beziehungsweise bei der Dirac-Gleichung die Zahl der Knoten für die obere Komponente, wenn die Energie größer 0 ist und die Zahl der Knoten der unteren Komponente für Energien kleiner 0). Ist diese ungleich 0 wird die Energie halbiert, bis wir eine untere Intervallgrenze mit einer knotenfreien Wellenfunktion besitzen. Als obere Intervallgrenze wird die Ruheenergie mc^2 gewählt. Danach werden die Energien für eine Drehimpulsquantenzahl berechnet, wobei das zu untersuchende Intervall auf das Anfangsintervall gesetzt wird, sobald wir die Drehimpulsquantenzahl ändern. Innerhalb der Drehimpulsschleife wird beginnend mit dem niedrigsten Zustand für jeden zu berechnenden Zustand per Bisektionsverfahren (siehe C.1) ein Startintervall gesucht, in dem nur dieser Zustand liegt. Die dabei auftretenden Testergebnisse werden zusammen mit der zugehörigen Zahl der Knoten gespeichert, um darauf für höhere Zustände noch zugreifen zu können. Liegt dieses Intervall vor, werden solange Bisektionsschritte ausgeführt, bis die relative Abweichung der beiden Intervallgrenzen kleiner als eine vordefinierte Präzision ist (momentan 10^{-6}). Tritt bei diesem Prozess aus irgendwelchen Gründen ein Sprung der Knotenanzahl außerhalb des vordefinierten Intervall ein (Knoten wurden übersehen), wird auf das Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren umgestellt und die Berechnung wiederholt.

Die Ergebnisse werden nach jedem Durchlauf zusammen mit der Knotenzahl abgespeichert. Sobald alle gewünschten Zustände berechnet wurden, definiert das Programm die

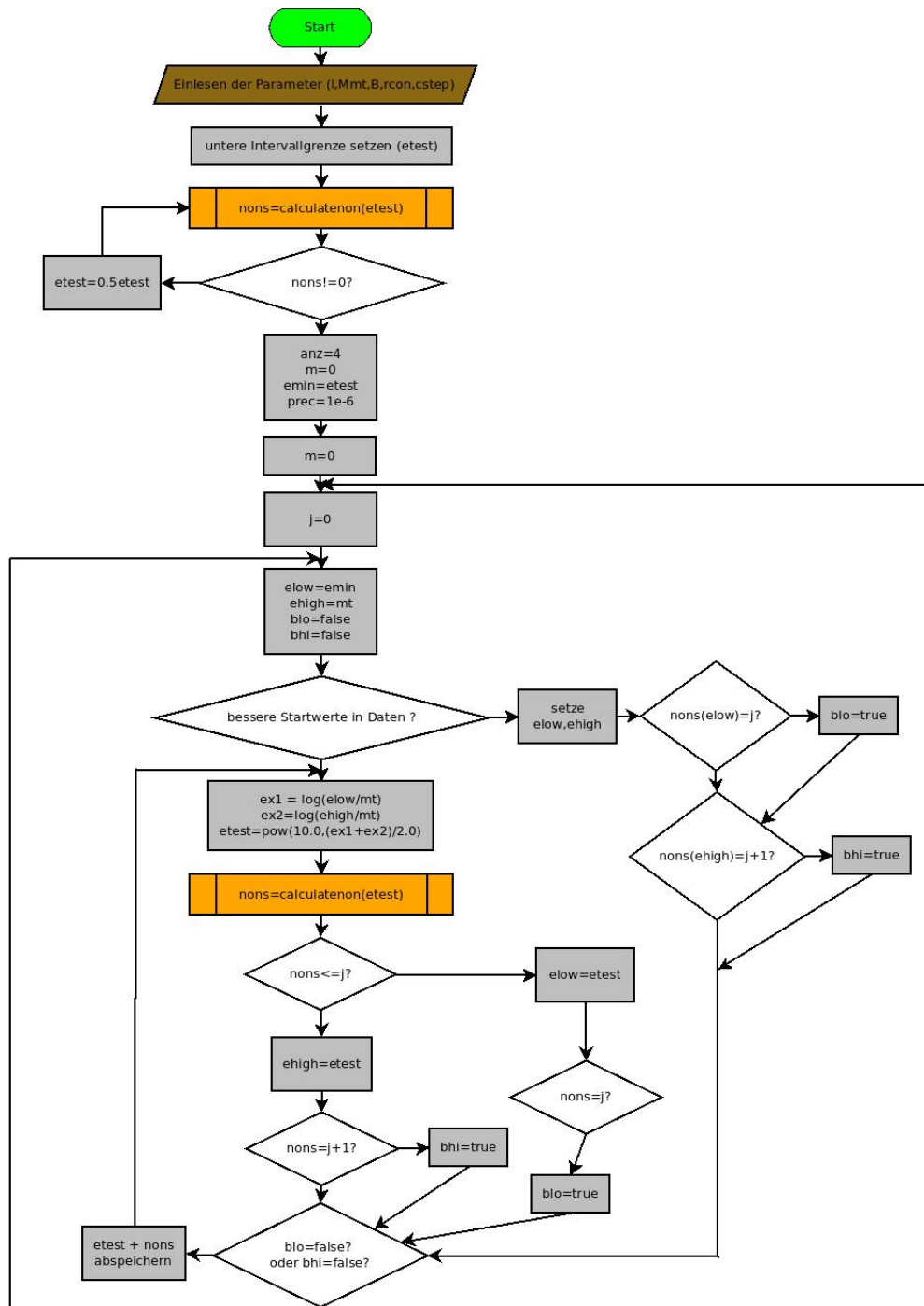
Ausgabedateien und schreibt die Daten.

Die Berechnung der Knoten für einen gegebenen Parametersatz führt die Funktion „calculatenon“ durch. Diese ruft zuerst für die Simulation der Wellenfunktion die Unterfunktion „rkmethod“ auf und überprüft dann, ob das Produkt der Wellenfunktion für zwei nebeneinanderliegende Punkte negativ ist. Jedes Mal, wenn dies der Fall ist, wird ein Zähler inkrementiert. Dieser wird am Ende an das Hauptprogramm zurück gegeben.

„rkmethod“ setzt die Amplitude der Wellenfunktion und legt fest, wie weit sie simuliert werden soll. Da die Amplitude für Massenprodukte größer $300m_{Pl}^2$ häufig divergiert, führt sie gegebenenfalls noch eine Reskalierung der Amplitude durch, damit es nicht zu Pufferüberläufen kommt. Für die Simulation der Wellenfunktion sind die beiden Unterfunktion „rkstart“ und „rkstep“ beziehungsweise „rkfstep“ zuständig. Wie durch den Namen suggeriert wird berechnet „rkstart“ die Startwerte der Gleichungen gemäß (4.2.37) beziehungsweise (4.3.35). Gleichzeitig werden noch die Terme nächsthöherer Ordnung abgeschätzt und der Startpunkt im Zweifelsfall näher an das Zentrum verlegt. Die Unterfunktionen „rkstep“ und „rkfstep“ berechnen einen einzigen Runge-Kutta-Schritt (siehe (C.7)) beziehungsweise einen Runge-Kutta-Fehlberg-Schritt (siehe [54, Kapitel 16]) und werden solange aufgerufen, bis der Zielradius ($40r_s$) oder die maximale Schrittzahl (10^5) erreicht ist.

Zusätzlich gibt es noch jeweils eine Hilfsfunktionen für die benötigten Metrikterme, für f' und für g' . Wobei in beiden letzteren der Hauptunterschied der beiden Programme besteht. Ansonsten gibt es Unterschiede für die Schleife der Drehimpulsquantenzahlen und bei der Ausgabe, die jeweils im Hauptprogramm zu finden sind.

Die folgende Grafik zeigt ein vereinfachtes, aber alle essentiellen Schritte enthaltendes Flussdiagramm der Hauptfunktion von „RKKleinGordon“.



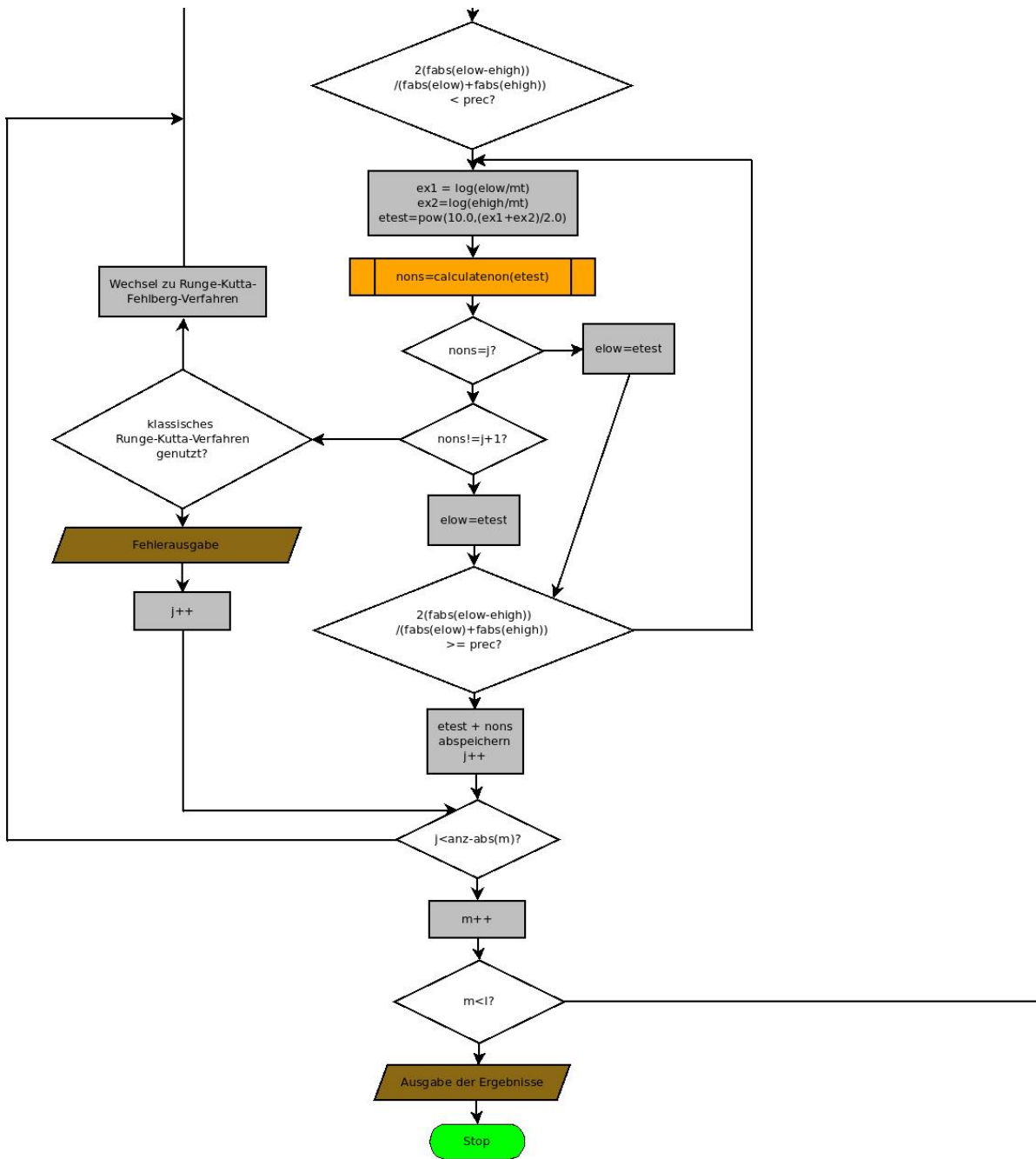


Abbildung C.3.: Vereinfachtes, aber alle essentiellen Schritte enthaltendes Flussdiagramm des Hauptprogramms von “RKKleinGordon”. Ist eine Abfrage nicht erfüllt, folgt das Programm dem Pfeil nach unten. Die anderen Richtungen sind für wahre Aussagen.

D. Skalierung der Metriken

Im Unterkapitel 4.2.3 wurde ausgenutzt, dass die Klein-Gordon-Gleichung durch die Skalierung

$$\begin{aligned}
 M_n &= aM \\
 m_n &= \frac{m}{a} \\
 E_n &= \frac{E}{a} \\
 r_n &= ar \\
 \bar{r}_n &= a\bar{r} \quad ,
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

unverändert bleibt, sofern sich auch die Metrik skalieren lässt, sodass $e^{\nu_n(r_n)} = e^{\nu(r)}$ und $e^{\lambda_n(r_n)} = e^{\lambda(r)}$ gilt. In dieser Sektion zeigen wir, dass dies für die in der Arbeit genutzten drei Metrikmodelle (siehe Anfang Kapitel 4) der Fall ist.

Beginnen wir mit Modell 1 (4.0.1). Die Metrik ist

$$\begin{aligned}
 e^\nu &= \begin{cases} \left(1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}\right) e^{\frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{r_0^5 - r_s r_0^4 + \frac{B}{2}r_0^2}} (r^2 - r_0^2) & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3} & r > r_0 \end{cases} \\
 e^{-\lambda} &= \begin{cases} 1 - \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5}\right) r^2 & r \leq r_0 \\ 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3} & r > r_0 \end{cases} .
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Aus der Skalierung der Masse folgt, dass der Schwarzschildradius ebenfalls skaliert werden muss, das heißt $r_{sn} = ar_s$. Somit müssen wir den Parameter B ebenfalls skalieren, da wir durch Einsetzen in die Außenmetrik die Bedingung

$$\begin{aligned}
 e^{\nu(r)} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{B}{2r^3} &= 1 - \frac{r_{sn}}{r_n} + \frac{a^3 B}{2r_n^3} = 1 - \frac{r_{sn}}{r_n} + \frac{B_n}{2r_n^3} = e^{\nu_n(r_n)} \\
 \Rightarrow B_n &= a^3 B
 \end{aligned} \tag{D.3}$$

erhalten. Beachten wir diese, verändert die Skalierung die Außenmetrik nicht. Für die innere Metrik müssen wir e^ν und e^λ separat betrachten. Beginnen wir mit e^ν

$$\begin{aligned}
e^{\nu(r)} &= \left(1 - \frac{r_s}{r_0} + \frac{B}{2r_0^3}\right) e^{\frac{r_s r_0^2 - \frac{3}{2}B}{r_0^5 - r_s r_0^4 + \frac{B}{2}r_0^2}} (r^2 - r_0^2) \\
&= \left(1 - \frac{r_{sn}}{ar_0} + \frac{B_n}{2a^3 r_0^3}\right) e^{\frac{r_{sn} a^2 r_0^2 - \frac{3}{2}B_n}{a^5 r_0^5 - r_{sn} a^4 r_0^4 + \frac{B_n}{2} a^2 r_0^2}} (r_n^2 - a^2 r_0^2) \\
&= \left(1 - \frac{r_s}{r_{0n}} + \frac{B}{2r_{0n}^3}\right) e^{\frac{r_s r_{0n}^2 - \frac{3}{2}B}{r_{0n}^5 - r_s r_{0n}^4 + \frac{B}{2}r_{0n}^2}} (r^2 - r_{0n}^2) = e^{\nu_n(r_n)} \\
\Rightarrow r_{0n} &= ar_0 \quad , \tag{D.4}
\end{aligned}$$

dann folgt für e^λ keine weitere Bedingung

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda(r)} &= 1 - \left(\frac{r_s}{r_0^3} - \frac{B}{2r_0^5}\right) r^2 = 1 - \left(\frac{a^2 r_{sn}}{r_{0n}^3} - \frac{a^2 B_n}{r_{0n}^5}\right) \frac{r_n^2}{a^2} \\
&= 1 - \left(\frac{r_{sn}}{r_{0n}^3} - \frac{B_n}{r_{0n}^5}\right) r_n^2 = e^{-\lambda_n(r_n)} \quad . \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Somit ist das Metrikmodell 1 skalierbar.

Die äußere Metrik des zweiten Metrikmodells (4.0.2) ist die äußere Metrik des ersten Metrikmodells mit $B = 0$. Folglich ist sie ebenfalls skalierbar. Weiterhin ist die innere Metrik für $r_0 \leq \frac{6}{5}r_s$ ebenfalls skalierbar, da es sich dabei um die innere Metrik von Modell 1 für $B = 0$ handelt. Wir müssen dafür jedoch die Bedingung $r_{0n} = ar_0$ übernehmen. Folglich muss die innere Metrik für $r_0 > \frac{6}{5}r_s$ noch überprüft werden. Nutzen wir die Beziehung $R^2 = \frac{r_0^3}{r_s}$, gilt für e^ν

$$\begin{aligned}
e^{\nu(r)} &= \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_s}{r_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2 r_s}{r_0^3}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r_{sn}}{r_{0n}}} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{r_n^2 r_{sn}}{r_{0n}^3}}\right)^2 = e^{\nu_n(r_n)} \quad . \tag{D.6}
\end{aligned}$$

Die Skalierung von e^λ erzeugt ebenfalls keine weiteren Bedingungen, da

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{r^2}{R^2} = 1 - \frac{r^2 r_s}{r_0^3} = 1 - \frac{r_n^2 r_{sn}}{r_{0n}^3} = e^{-\lambda_n(r_n)} \tag{D.7}$$

ist. Folglich ist Modell 2 ebenfalls skalierbar.

Die Außenmetrik von Modell 3 (4.0.3) und Modell 2 ist identisch. Folglich ist diese skalierbar. Weiterhin ist e^λ für die innere Metrik 1 und weist somit keine Abhängigkeit von den skalierten Größen auf. Dementsprechend müssen wir nur noch e^ν für den Innenraum betrachten

$$e^{\nu(r)} = 1 - \frac{r_s}{r_0} = 1 - \frac{r_{sn}}{ar_0} = 1 - \frac{r_{sn}}{r_{0n}} = e^{\nu_n(r_n)}$$

$$\Rightarrow r_{0n} = ar_0 \quad . \quad (D.8)$$

Somit ist die Metrik skalierbar, wobei erneut der Übergangspunkt r_0 ebenfalls mit dem Faktor a skaliert werden muss.

E. Lösung der Dirac-Gleichung nahe des Ursprungs

Nehmen wir an, wir hätten eine Metrik, für die für r gegen 0 sowohl e^ν als auch e^λ quadratisch gegen einen festen Wert gehen. Zudem soll dieser für e^λ eins sein (siehe (2.3.22)). Folglich lassen sich die Metrikfunktionen für kleine r entwickeln als

$$e^{-\nu} \approx \frac{1}{\alpha} - \beta r^2$$

$$e^\lambda \approx 1 + \gamma r^2$$

$$\nu' \approx 2\alpha\beta r$$

$$\lambda' \approx 2\gamma r \quad . \quad (E.1)$$

Setzen wir das in die entkoppelten Gleichungen (4.3.32) und (4.3.34) der Dirac-Gleichung ein, dann ergibt sich für kleine Radien

$$\begin{aligned}
0 &\approx f'' - \left(\gamma - \frac{E\alpha\beta}{mc^2 + E} \right) r f' \\
&\quad - \left[\frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} + \frac{\gamma}{2} \kappa (2\kappa + 1) - \frac{\kappa E\alpha\beta}{mc^2 + E} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \alpha} \right] f \\
0 &\approx g'' - \left(\gamma + \frac{E\alpha\beta}{mc^2 - E} \right) r g' \\
&\quad - \left[\frac{\kappa(\kappa - 1)}{r^2} + \frac{\gamma}{2} \kappa (2\kappa - 1) - \frac{\kappa E\alpha\beta}{mc^2 - E} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \alpha} \right] g \quad , \quad (\text{E.2})
\end{aligned}$$

wobei wir den Vorfaktor des ersten Ableitungsterms in die führende Ordnung und den Vorfaktor von f beziehungsweise g in die beiden führenden Ordnungen entwickelt haben. Ist $\kappa \neq \pm 1$ wird der Term nullter Ordnung für hinreichend kleine r jeweils von dem Drehimpulsterm dominiert und wir können die anderen Terme vernachlässigen

$$\begin{aligned}
0 &\approx f'' - \left(\gamma - \frac{E\alpha\beta}{mc^2 + E} \right) r f' - \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} f \\
0 &\approx g'' - \left(\gamma + \frac{E\alpha\beta}{mc^2 - E} \right) r g' - \frac{\kappa(\kappa - 1)}{r^2} g \quad . \quad (\text{E.3})
\end{aligned}$$

Weiterhin vernachlässigen wir den Term proportional zu f' beziehungsweise g' , wobei dies jedoch im Nachhinein durch das Ergebnis begründet sein muss. Folglich sind die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= f'' - \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} f \\
0 &= g'' - \frac{\kappa(\kappa - 1)}{r^2} g \quad (\text{E.4})
\end{aligned}$$

zu lösen. Mit Hilfe des Ansatzes $f, g = Ae^{\alpha r}$ erhalten wir die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
f(r) &= Ar^{-\kappa} + Br^{\kappa+1} \\
g(r) &= Cr^{\kappa} + Dr^{-\kappa+1} \quad , \quad (\text{E.5})
\end{aligned}$$

durch die auch die Vernachlässigung des ersten Ableitungsterms gerechtfertigt wird.

Diese Lösung muss jedoch noch eingeschränkt werden, da die Wellenfunktion einerseits normierbar sein (gebunden) und andererseits die Dirac-Gleichung näherungsweise erfüllen muss. Nehmen wir nun $\kappa < -1$ an, dann folgt $C = 0$ aus der Normierbarkeit. Setzen wir mit dieser Bedingung (E.5) in (4.3.30) ein, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} -A\kappa r^{-\kappa-1} + B(\kappa + 1)r^\kappa &= -\kappa e^{\frac{\lambda}{2}} \left(Ar^{-\kappa-1} + Br^\kappa \right) + \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \right) Dr^{-\kappa+1} \\ D(-\kappa + 1)r^{-\kappa} &= \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \right) \left(Ar^{-\kappa} + Br^{\kappa+1} \right) + \kappa Dr^{-\kappa} \quad , \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

wobei die Metrikfunktionen noch entwickelt werden müssen. Dabei ist die führende Ordnung der oberen Gleichung r^κ und durch Vergleich erhalten wir

$$\begin{aligned} B(\kappa + 1)r^\kappa &= -B\kappa r^\kappa \\ \Rightarrow B &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Da B wegfällt, ist die neue niedrigste Ordnung der oberen Gleichung $r^{-\kappa-1}$, die jedoch ohne weitere Bedingungen direkt erfüllt ist. Gehen wir von daher zu unteren Gleichung über. Deren höchste Ordnung ist $r^{-\kappa}$ und es folgt

$$\begin{aligned} D(-\kappa + 1) &= \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) A + \kappa D \\ \Rightarrow D &= -\frac{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}}}{2\kappa - 1} A \quad . \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Höhere Ordnungen können wir nicht mehr betrachten, da wir für noch einen freien Parameter für die Normierung benötigen. Folglich ist unsere genäherte Wellenfunktion

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \approx A \begin{pmatrix} r^{-\kappa} \\ -\frac{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}}}{2\kappa - 1} r^{-\kappa+1} \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{E.9})$$

Als Nächstes betrachten den Fall $\kappa = -1$, dann fällt der $\frac{\kappa(\kappa+1)}{r^2}$ -Term in der Gleichung für f weg und wir erhalten

$$0 \approx f'' - \left(\gamma - \frac{E\alpha\beta}{mc^2 + E} \right) r f' - \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{E\alpha\beta}{mc^2 + E} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \alpha} \right] f \quad , \quad (\text{E.10})$$

wohingegen der führende Term für g erhalten bleibt und wir somit die selbe Näherungslösung verwenden können.

Lassen wir erneut für f den Term proportional zu f' wegfallen, dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$0 \approx f'' - \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{E\alpha\beta}{mc^2 + E} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2c^2\alpha} \right] f \quad , \quad (\text{E.11})$$

die durch

$$f = Ae^{ar} + Be^{-ar}$$

$$a = \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{E\alpha\beta}{mc^2 + E} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} - \frac{E^2}{\hbar^2c^2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.12})$$

gelöst wird. Somit war das Wegstreichen des f' -Terms gerechtfertigt, da er für diese Lösung eine höhere Ordnung in r besitzt.

Setzen wir (E.12) und den Ansatz für

$$g(r) = \frac{C}{r} + Dr^2 \quad (\text{E.13})$$

wieder in die Dirac-Gleichung (4.3.30) ein, dann erhalten wir

$$(1) a (Ae^{ar} - Be^{-ar}) = \frac{1}{r} e^{\frac{\lambda}{2}} (Ae^{ar} + Be^{-ar}) + \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \right) e^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{C}{r} + Dr^2 \right)$$

$$(2) -\frac{C}{r^2} + 2Dr = \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \right) e^{\frac{\lambda}{2}} (Ae^{ar} + Be^{-ar}) - \frac{1}{r} e^{\frac{\lambda}{2}} \left(\frac{C}{r} + Dr^2 \right) \quad . \quad (\text{E.14})$$

Da die Lösungen nur für kleine Radien gelten, müssen wir noch die Metrikfunktionen und f in r entwickeln und dann die führenden Ordnungen vergleichen. Beginnen wir

damit die beiden führenden Ordnungen der oberen Gleichung zu überprüfen

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{r} (A + B) + \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) \frac{C}{r} \\
\Rightarrow C &= - \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right)^{-1} (A + B) \\
a(A - B) &= \frac{1}{r} ar (A - B) \\
\Rightarrow 0 &= 0 \quad . \quad (E.15)
\end{aligned}$$

Analog betrachten wir die zwei führenden Ordnungen der zweiten Gleichung und erhalten so eine zweite Bedingung für C

$$\begin{aligned}
-\frac{C}{r^2} &= -\frac{C}{r^2} \\
\Rightarrow 0 &= 0 \\
0 &= \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) (A + B) - \frac{\gamma}{2} C \\
\Rightarrow C &= \frac{2}{\gamma} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) \quad . \quad (E.16)
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
- \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right)^{-1} (A + B) &= \frac{2}{\gamma} \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) \\
\Rightarrow B = -A \quad \cup \quad \frac{\gamma}{2} &= -\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \alpha} \quad . \quad (E.17)
\end{aligned}$$

Die zweite Möglichkeit können wir ignorieren, da wir durch eine leichte Variation der Energie immer dafür sorgen können, dass die Bedingung nicht erfüllt ist. Folglich muss es sich bei der resultierenden Lösung dabei, um eine hebbare Lücke der Lösung mit $B = -A$ handeln.

Da daraus $C = 0$ folgt, müssen wir noch D bestimmen und betrachten dafür für beide Gleichungen die lineare Ordnung. Diese ist für die obere Gleichung von (E.14) automatisch erfüllt, da alle Terme proportional zu $A + B$ sind. Für die untere Gleichung erhalten

wir hingegen

$$\begin{aligned}
2Dr &= \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) ar (A - B) - Dr \\
\Rightarrow D &= \frac{2}{3} \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) aA \quad .
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Somit ist unsere Lösung

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \approx A \begin{pmatrix} e^{ar} - e^{-ar} \\ \frac{2}{3} \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) a \end{pmatrix} \quad . \tag{E.19}$$

Für kleine r können wir jedoch auch die Exponentialfunktionen noch in die lineare Ordnung entwickeln. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &\approx A \begin{pmatrix} 2ar \\ \frac{2}{3} \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) a \end{pmatrix} \\
&= \tilde{A} \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{3} \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}} \right) \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned} \tag{E.20}$$

Dies ist jedoch genau das gleiche Ergebnis wie wir durch die Formel (E.9) erhalten hätten. Zudem bleibt die Dirac-Gleichung unter der Transformation $E \rightarrow -E$, $\kappa \rightarrow -\kappa$ und $f \leftrightarrow g$ unverändert, sodass die allgemeine Näherungslösung für kleine Radien

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \approx A \begin{cases} \begin{pmatrix} r^{-\kappa} \\ -\frac{\frac{mc}{\hbar} - \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}}}{2\kappa - 1} r^{-\kappa + 1} \end{pmatrix} & \kappa < 0 \\ \begin{pmatrix} \frac{\frac{mc}{\hbar} + \frac{E}{\hbar c \sqrt{\alpha}}}{2\kappa + 1} r^{\kappa + 1} \\ r^{\kappa} \end{pmatrix} & \kappa > 0 \end{cases} \tag{E.21}$$

ist.

F. Energievariation in der Dirac-Gleichung

Analog zur Analyse der Klein-Gordon-Gleichung in Kapitel 4.2.2 gehen wir davon aus, dass $\begin{pmatrix} f(r) \\ g(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0(r) \\ g_0(r) \end{pmatrix}$ die korrekte radiale Lösung der Dirac-Gleichung für $E = E_0$ sei. Entwickeln wir (4.3.32) für die Energie $E = E_0 + \epsilon \Delta E$ in erster Ordnung in ϵ , erhalten wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
0 = f'' + & \left[-\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} \left(\frac{E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} + \frac{\Delta E mc^2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{(mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}})^2 \epsilon} \right) \right] f' \\
& - \left[\frac{\kappa^2 e^{\frac{\lambda}{2}} + \kappa}{r^2} + \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{E_0^2}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} - \frac{2E_0 \Delta E}{\hbar^2 c^2} e^{-\nu} \epsilon \right) e^{\frac{\lambda}{2}} \right. \\
& \left. - \frac{\nu' \kappa}{2r} \left(\frac{E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} + \frac{\Delta E mc^2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{(mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}})^2 \epsilon} \right) \right] e^{\frac{\lambda}{2}} f + O(\epsilon^2) \quad . \quad (F.1)
\end{aligned}$$

Wählen wir erneut den Ansatz

$$f(r) = (1 + \epsilon f_\epsilon(r)) f_0(r) \quad (F.2)$$

und nutzen aus, dass f_0 (4.3.32) und f'_0 (4.3.30) für $E = E_0$ erfüllen, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 = \epsilon f_0 & \left(f''_\epsilon + 2 \frac{f'_0}{f_0} f'_\epsilon + \left(-\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} \frac{E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} \right) f'_\epsilon \right. \\
& \left. + \frac{\nu'}{2} \frac{\Delta E mc^2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{(mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}})^2} \left(\frac{f'_0}{f_0} + \frac{\kappa}{r} e^{\frac{\lambda}{2}} \right) + \frac{2\Delta E E_0}{\hbar^2 c^2} e^{\lambda - \nu} \right) + O(\epsilon^2) \\
= \epsilon f_0 & \left(f''_\epsilon + 2 \frac{f'_0}{f_0} f'_\epsilon + \left(-\frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} \frac{E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} \right) f'_\epsilon \right. \\
& \left. + \frac{\Delta E \nu'}{2\hbar c} \frac{mc^2 e^{\frac{\lambda - \nu}{2}}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} \frac{g_0}{f_0} + \frac{2\Delta E E_0}{\hbar^2 c^2} e^{\lambda - \nu} \right) + O(\epsilon^2) \quad . \quad (F.3)
\end{aligned}$$

Den homogenen Anteil der Differentialgleichung für f_ϵ können wir mittels Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned}\frac{f''_{\epsilon h}}{f'_{\epsilon h}} &= -2\frac{f'_0}{f_0} - \frac{\lambda'}{2} + \frac{\nu'}{2} \frac{E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} \\ \Rightarrow f'_{\epsilon h} &= \frac{Ae^{\frac{\lambda}{2}}}{f_0^2} (mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}) \quad .\end{aligned}\tag{F.4}$$

Die komplette Lösung erhalten wir damit durch Variation der Konstante $A(r)$

$$\begin{aligned}f'_\epsilon &= \frac{A(r)e^{\frac{\lambda}{2}}}{f_0^2} (mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}) \\ \Rightarrow A' &= -\frac{\Delta E}{\hbar c} \left(\frac{\nu'}{2} \frac{mc^2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{(mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}})^2} g_0 + \frac{2E_0}{\hbar c} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}-\nu}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} f_0 \right) f_0 \\ \Rightarrow f_\epsilon &= -\frac{\Delta E}{\hbar c} \int \int \left(\frac{\nu'}{2} \frac{mc^2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{(mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}})^2} g_0 + \frac{2E_0}{\hbar c} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}-\nu}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} f_0 \right) f_0 dr \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{f_0^2} (mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}) dr \quad .\end{aligned}\tag{F.5}$$

Für kleine Radien, wollen wir weiterhin unsere Näherungslösung (4.3.35) nutzen, sodass wir die Integralgrenzen für $\kappa < 0$ wie folgt wählen

$$f_{\epsilon, \kappa < 0} = -\frac{\Delta E}{\hbar c} \int_0^r \int_0^{r_1} \left(\frac{\nu'}{2} \frac{mc^2 e^{-\frac{\nu}{2}}}{(mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}})^2} g_0 + \frac{2E_0}{\hbar c} \frac{e^{\frac{\lambda}{2}-\nu}}{mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}} f_0 \right) f_0 dr_2 \frac{e^{\frac{\lambda}{2}}}{f_0^2} (mc^2 + E_0 e^{-\frac{\nu}{2}}) dr_1 \quad .\tag{F.6}$$

Für $\kappa > 0$ wählen wir hingegen

$$f_{\epsilon, \kappa > 0} = f_{\epsilon, \kappa < 0} + \frac{\Delta E}{\hbar c \sqrt{\alpha} (2\kappa + 1)} \quad .\tag{F.7}$$

Nehmen wir an E_0 sei ein Energieeigenwert und betrachten das Verhalten der Störung f_ϵ für große Radien. Sei (4.3.40) eine gute Näherung von f_0 für alle Radien $r \geq r_0$, dann

gilt

$$\begin{aligned}
f_\epsilon &\approx -\frac{\Delta E}{\hbar c} \left[C_1 + \int_{r_0}^r \left(A^2 C_2 + \frac{2E_0}{\hbar c} \int_{r_0}^{r_1} f_0^2(r_2) dr_2 \right) \frac{1}{f_0^2(r_1)} dr_1 \right] \\
&\approx -\frac{\Delta E}{\hbar c} \left[C_1 + \int_{r_0}^r \left(C_2 e^{2ar_1} - \frac{E_0}{\hbar ca} + \frac{E_0}{\hbar ca} e^{2a(r_1-r_0)} \right) dr_1 \right] \\
&\approx -\frac{\Delta E}{\hbar c} \frac{\tilde{C}_2}{2a} e^{2ar} .
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Somit bricht die Näherung für hinreichend große Radien zusammen und das divergente Verhalten der freien Zustände wechselt wie schon bei Klein-Gordon beim Eigenzustand sein Vorzeichen. Im Gegensatz zu Klein-Gordon können wir aus dieser Rechnung nicht feststellen, welches Vorzeichen \tilde{C}_2 besitzt. Jedoch gilt für jeden beliebig großen, festen Radius, dass die Wellenfunktion an diesem Punkt für hinreichend kleines ϵ näherungsweise durch $f_0(r)$ gegeben ist. Folglich gibt es für ein hinreichend kleines ϵ einen Bereich $r_0 \leq r < r_1$, für den $f(r)$ durch (4.3.40) gegeben ist. Für $E = E_0 + \epsilon \Delta E$ ist die Dirac-Gleichung dann

$$\begin{aligned}
f' &= -\frac{\kappa}{r} e^{\frac{\lambda}{2}} f + \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E_0}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \right) e^{\frac{\lambda}{2}} g + \epsilon \frac{\Delta E}{\hbar c} e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} g \\
&\approx \left(\frac{mc}{\hbar} + \frac{E_0}{\hbar c} \right) g + \epsilon \frac{\Delta E}{\hbar c} g
\end{aligned} \tag{F.9}$$

$$g' = \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E_0}{\hbar c} e^{-\frac{\nu}{2}} \right) e^{\frac{\lambda}{2}} f - \epsilon \frac{\Delta E}{\hbar c} e^{\frac{\lambda-\nu}{2}} f + \frac{\kappa}{r} e^{\frac{\lambda}{2}} g \tag{F.10}$$

$$\approx \left(\frac{mc}{\hbar} - \frac{E_0}{\hbar c} \right) f - \epsilon \frac{\Delta E}{\hbar c} f . \tag{F.11}$$

Sofern $\Delta E > 0$ ist, gilt in diesem Bereich $|f(r, E)| < |f_0(r)|$ und $|g(r, E)| < |g_0(r)|$. Folglich besitzt f den letzten Knoten. Ist ΔE hingegen kleiner als 0, dann dreht sich die Relation jeweils um und g besitzt den Knoten. Also ist \tilde{C}_2 positiv.

Betrachten wir noch die Störung für den Fall, dass f_0 ein freier Zustand ist. Dann folgt

für große Radien

$$\begin{aligned}
f_\epsilon &\approx -\frac{\Delta E}{\hbar c} \left[C_1 + \int_{r_0}^r \left(A^2 C_2 + \frac{2E_0}{\hbar c} \int_{r_0}^{r_1} f_0^2(r_2) dr_2 \right) \frac{1}{f_0^2(r_1)} dr_1 \right] \\
&\approx -\frac{\Delta E}{\hbar c} \left[C_1 + \int_{r_0}^r \left(C_2 e^{-2ar_1} + \frac{E_0}{\hbar ca} - \frac{E_0}{\hbar ca} e^{-2a(r_1-r_0)} \right) dr_1 \right] \\
&\approx -\frac{\Delta E E_0}{\hbar^2 c^2 a} r \quad , \tag{F.12}
\end{aligned}$$

dass die Divergenzrichtung unverändert bleibt, da wir genau das Ergebnis erhalten, das auch aus der Entwicklung von (4.3.39) folgt.

G. Vakuen inertialer Beobachter

In dieser Anhangsektion zeigen wir einerseits, dass Beobachter mit nichtverschwindenden β -Koeffizienten der Bogoliubov Transformation existieren und andererseits gehen wir unter diesem Gesichtspunkt auf die Quantenfeldtheorie des flachen Raums ein. Beginnen wir hierfür damit, ein zweidimensionales Robertson-Walker Universum ([5]) mit dem Linienelement

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 \tag{G.1}$$

zu betrachten, wobei a den Radius des Universums angibt. Durch die Koordinatentransformation $d\eta = \frac{dt}{a}$, erhalten wir

$$ds^2 = a^2(\eta) (d\eta^2 - dx^2) = C(\eta) (d\eta^2 - dx^2) \quad . \tag{G.2}$$

Nehmen wir an, das Universum expandiere für einen endlichen Zeitraum, sodass

$$\begin{aligned}
C(\eta) &= 1 & \eta < 0 \\
C(\eta) &= 1 + a & \eta > \eta_0
\end{aligned} \tag{G.3}$$

gilt. Dabei sei a eine Konstante, sodass die Metrik außerhalb der expansiven Periode jeweils konstant ist. Die Klein-Gordon-Gleichung (4.1.2) ist dann

$$\begin{aligned} -m^2\Psi &= \left(\frac{1}{C(\eta)}\partial_\eta C(\eta)\frac{1}{C(\eta)}\partial_\eta - \frac{1}{C(\eta)}\partial_x C(\eta)\frac{1}{C(\eta)}\partial_x \right) \Psi \\ 0 &= \left(\partial_\eta^2 - \partial_x^2 + m^2 C(\eta) \right) \Psi \quad . \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

Nutzen wir den Separationsansatz

$$\Psi = e^{ikx} f_k(\eta) \quad , \quad (\text{G.5})$$

dann ist die Gleichung

$$0 = \partial_\eta^2 f_k(\eta) + \left(k^2 + C(\eta)m^2 \right) f_k(\eta) \quad (\text{G.6})$$

zu lösen. Für $\eta > \eta_0$ ist die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} f_k(\eta) &= Ae^{-i\omega_k^{out}\eta} + Be^{i\omega_k^{out}\eta} \\ \omega_k^{out} &= \sqrt{k^2 + m^2(1+a)} \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

wohingegen wir für $\eta < 0$ die Lösungen des flachen Raums

$$\begin{aligned} f_k(\eta) &= Ae^{-i\omega_k^{in}\eta} + Be^{i\omega_k^{in}\eta} \\ \omega_k^{in} &= \sqrt{k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

erhalten. Dementsprechend sind unsere Basisfunktionen

$$\begin{aligned} u_j &= u_j^{in} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{k_j}^{in}}} e^{ik_j x - i\omega_{k_j}^{in}\eta} \\ \bar{u}_j &= u_j^{out} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_{k_j}^{out}}} (1+a)^{-\frac{1}{4}} e^{ik_j x - i\omega_{k_j}^{out}\eta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Eingesetzt in (5.2.11) erhalten wir daraus für $\eta > \eta_0$

$$\begin{aligned} \beta_{jm} &= i \frac{(1+a)^{-\frac{1}{4}}}{4\pi\omega_{k_m}^{in}\omega_{k_j}^{out}} \int \left[e^{ik_j x - i\omega_{k_j}^{out}\eta} \partial_\eta e^{-ik_m x + i\omega_{k_m}^{in}\eta} - \left(\partial_\eta e^{ik_j x - i\omega_{k_j}^{out}\eta} \right) e^{-ik_m x + i\omega_{k_m}^{in}\eta} \right] \sqrt{1+ad}x \\ &= \frac{(1+a)^{\frac{1}{4}}}{4\pi\omega_{k_m}^{in}\omega_{k_j}^{out}} \left(\omega_{k_m}^{in} - \omega_{k_j}^{out} \right) \int e^{i(k_j+k_m)x - i(\omega_{k_m}^{in} + \omega_{k_j}^{out})\eta} dx \\ &= \frac{(1+a)^{\frac{1}{4}}}{2\omega_{k_m}^{in}\omega_{k_j}^{out}} \left(\omega_{k_m}^{in} - \omega_{k_j}^{out} \right) \delta_{k_j, k_m} e^{-i(\omega_{k_m}^{in} + \omega_{k_j}^{out})\eta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Folglich sind die Vakuen der ruhenden Beobachters vor und nach der Expansion nicht identisch und der ruhende Beobachter nach der Expansion kann Anregungen des Feldes messen, sofern sich das Skalarfeld vor der Expansion im Vakuum befunden hat. Auf diesem Effekt beruhen ebenfalls die von Hawking [14] entdeckte thermische Strahlung, die durch die Bildung eines schwarzen Loches entsteht, der von Unruh [15] beschriebene nach ihm benannte Unruh-Effekt und weitere Beispiele die in [18, Kapitel 3-5] gefunden werden können.

Betrachten wir hingegen zwei Beobachter im flachen Raum, deren Koordinatensysteme durch eine Lorentztransformation ineinander übergehen können. Solange die Zeit durch die Transformation nicht umgekehrt wird (sonst müssen wir für ein System ω_k durch $-\omega_k$ ersetzen, da der Normalenvektor des Skalarprodukts in die Zukunft zeigt), gilt

$$\begin{aligned} u_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k t} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-ik_\mu x^\mu} \\ \bar{u}_{\vec{k}} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega_k \bar{t}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-ik_\mu \bar{x}^\mu} \quad , \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

sofern wir $k_0 = \omega_k$ definieren. Eingesetzt in (5.2.11) folgt daraus

$$\begin{aligned} \beta_{\vec{k}'\vec{k}} &= \frac{i}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \int \left[e^{-ik'_\mu \bar{x}^\mu(x^\nu)} \partial_t e^{-ik_\mu x^\mu} - \left(\partial_t e^{-ik'_\mu \bar{x}^\mu(x^\nu)} \right) e^{-ik_\mu x^\mu} \right] d^3x \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^3 \sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left(\omega_k - k'_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial t} \right) \int e^{-i(k'_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} + k_\nu) x^\nu} d^3x \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \left(\omega_k - k'_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial t} \right) e^{-i(k'_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial t} + \omega_k) t} \delta^3 \left(k'_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^i} + k_i \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} (\omega_k - \omega_k) e^{-2i\omega_k t} \delta^3 \left(k'_\mu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^i} + k_i \right) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

Somit identifizieren alle inertialen Beobachter im flachen Raum den selben Zustand als Vakuum und die Teilchenzahl ist eine sinnvolle Messgröße.

H. Rückwirkung der Vakuumfluktuationen auf die Metrik

In diesem Anhang beweisen wir einerseits die in 5.4.1 aufgestellte Behauptung, dass die Entwicklung der Einstein-Gleichung bis zur Ordnung $\frac{l_{Pl}^{2n}}{r_s^{2n}}$ innerhalb der Näherung äquivalent zur Durchführung von n Iterationen ist, und andererseits werden wir die erste Korrektur der Metrikterme für die Schwarzschildmetrik und das exponentielle Modell (siehe Anhang A) bestimmen.

Den Beweis führen wir per vollständiger Induktion. Unsere Induktionsannahme ist dabei, dass die Entwicklung der Einstein-Gleichung bis zur Ordnung $\frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}}$ innerhalb der Näherung äquivalent zur Durchführung von n Iterationsschritten ist, wobei r_t eine typische Länge des Systems ist und ein Iterationsschritt das Ausrechnen der Vakuumfluktuationen für eine feste Metrik und die Bestimmung der daraus folgenden Korrekturen für die Metrik beinhaltet, wenn wir das Resultat der Vakuumfluktuationen als Quelle in die Einstein-Gleichung einbringen. Dies ist äquivalent zu der Aussage, dass die Differenz der Metriken des n+1-ten Schrittes und des n-ten Schrittes in führender Ordnung von $\frac{l_{Pl}^{2n+2}}{r_t^{2n+2}}$ abhängt.

Wir beginnen damit, die Aussage für den ersten Iterationsschritt zu beweisen, um den Induktionsanfang zu erhalten. Die Dichte und der Druck nullter Ordnung sind allein durch die entsprechenden Materiegrößen gegeben und als die Metrik nullter Ordnung bezeichnen wir die Lösung der zugehörigen Einstein-Gleichung. Somit sind Vakuumfluktuationsdichte und -druck (5.3.10)

$$\begin{aligned} \rho_{vac,1} &= -\frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} e^{-\lambda_0} (\nu'_0)^2 \\ \frac{p_{r,vac,1}}{c^2} &= -\frac{\hbar}{768\pi^2 cr^2} e^{-\lambda_0} \left(2\nu''_0 - \frac{1}{2} (\nu'_0)^2 - \nu'_0 \lambda'_0 \right) \quad . \end{aligned} \quad (H.1)$$

Wir ignorieren die eventuell auftretenden Änderungen der Materieeigenschaften, da diese maximal von der selben Größenordnung wie die Änderungen durch die Vakuumfluktua-

tionen sein sollten und dies somit für den Beweis nicht von Bedeutung ist. Dadurch erhalten wir mittels (2.3.22)

$$\begin{aligned}
m'_1 &= \frac{4\pi G}{c^2} \rho r^2 = \frac{4\pi G}{c^2} \left(\rho_0 - \frac{\hbar}{1536\pi^2 c r^2} e^{-\lambda_0} (\nu'_0)^2 \right) r^2 \\
\Rightarrow m_1 &= m_0 - \frac{\hbar G}{384\pi c^3} \int e^{-\lambda_0} (\nu'_0)^2 dr = m_0 - \frac{l_{Pl}^2}{384\pi r_t^2} \int e^{-\lambda_0} (r_t \nu'_0)^2 dr \\
\Rightarrow e^{-\lambda_1} &= 1 - \frac{2m_0}{r} + \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_t^2} \frac{1}{r} \int e^{-\lambda_0} (r_t \nu'_0)^2 dr \\
&= e^{-\lambda_0} + \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_t^2} \frac{1}{r} \int e^{-\lambda_0} (r_t \nu'_0)^2 dr \quad .
\end{aligned} \tag{H.2}$$

Dabei haben wir die Länge r_t eingefügt, die eine typische Längenskala des Systems darstellt. Für eine sphärisch symmetrische Außenmetrik handelt es sich dabei beispielsweise um den Schwarzschildradius. Die Gleichung zeigt, dass unsere Behauptung für $e^{-\lambda}$ und somit auch für λ für die erste Iteration erfüllt ist. Um dies für ν ebenfalls zu zeigen nutzen wir (2.3.11) und stellen die Gleichung nach ν' um

$$\nu'_1 = -\lambda'_1 + \frac{8\pi G}{c^2} e^{\lambda_1} r \left(\rho_0 + \frac{p_{r,0}}{c^2} \right) + \frac{8\pi G}{c^2} e^{\lambda_1} r \left(\rho_{vac,1} + \frac{p_{r,vac,1}}{c^2} \right) \quad . \tag{H.3}$$

Für λ' ist die Behauptung schon bewiesen und analog zu oben, können wir den Term $\frac{8\pi G}{c^2} \left(\rho_{vac,1} + \frac{p_{r,vac,1}}{c^2} \right)$ proportional zu $\frac{l_{Pl}^2}{r_t^2}$ schreiben, sodass die Behauptung für eine Iteration korrekt ist. Folglich ist unsere Induktionsannahme für den ersten Iterationsschritt bewiesen.

Als Nächstes führen wir den Induktionsschritt durch. Das heißt wir beweisen unsere Aussage für eine beliebige Anzahl an Iterationsschritten. Dafür nehmen wir an, dass die Induktionsannahme für die Metrik des n-ten Schritts korrekt ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda_{n-1} + \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} \lambda_+ \\
\nu_n &= \nu_{n-1} + \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} \nu_+ \quad .
\end{aligned} \tag{H.4}$$

Eingesetzt in (5.3.10) erhalten wir die Dichte

$$\begin{aligned}
\rho_{vac,n+1} &= -\frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} e^{-\lambda_n} (\nu'_n)^2 \\
&\approx -\frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} \left(e^{-\lambda_{n-1}} (\nu'_{n-1})^2 - \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} \lambda_+ e^{-\lambda_{n-1}} (\nu'_{n-1})^2 + 2 \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} e^{-\lambda_{n-1}} \nu'_{n-1} \nu'_+ \right) \\
&= \rho_{vac,n} - \frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} e^{-\lambda_{n-1}} \left(-\lambda_+ (\nu'_{n-1})^2 + 2\nu'_{n-1} \nu'_+ \right) \\
&\approx \rho_{vac,n} - \frac{\hbar}{1536\pi^2 cr^2} \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} e^{-\lambda_0} \left(-\lambda_+ (\nu'_0)^2 + 2\nu'_0 \nu'_+ \right)
\end{aligned} \tag{H.5}$$

und den Druck der Vakuumfluktuationen

$$\begin{aligned}
\frac{p_{r,vac,n+1}}{c^2} &= \frac{p_{r,vac,n}}{c^2} \left(1 - \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} \lambda_+ \right) \\
&\quad - \frac{\hbar}{768\pi^2 cr^2} \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} e^{-\lambda_{n-1}} \left(2\nu''_+ - \nu'_{n-1} \nu'_+ - \lambda'_{n-1} \nu'_+ - \lambda'_+ \nu'_{n-1} \right) \\
&\approx \frac{p_{r,vac,n}}{c^2} + \frac{\hbar}{768\pi^2 cr^2} \frac{l_{Pl}^{2n}}{r_t^{2n}} e^{-\lambda_0} \\
&\quad \left[\lambda_+ \left(2\nu''_0 - \frac{1}{2} (\nu'_0)^2 - \nu'_0 \lambda'_0 \right) - 2\nu''_+ + \nu'_0 (\nu'_+ + \lambda'_+) - \lambda'_0 \nu'_+ \right] .
\end{aligned} \tag{H.6}$$

Setzen wir dies erneut in die Metrik ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda_{n+1}} &\approx e^{-\lambda_n} + \frac{l_{Pl}^{2(n+1)}}{192\pi r_t^{2(n+1)}} \frac{f}{r} \\
\nu'_{n+1} &\approx \nu'_n + \frac{l_{Pl}^{2(n+1)}}{192\pi r_t^{2(n+1)}} e^{\lambda_0} \left[\lambda'_0 \frac{f}{r} - \frac{f}{r^2} + 2g(r) - \frac{8\pi G}{c^2} f \left(\rho_0 + \frac{p_{r,0}}{c^2} \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{H.7}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
f(r) &= \int e^{-\lambda_0} \left(-\lambda_+ (r_t \nu'_0)^2 + 2r_t^2 \nu'_0 \nu'_+ \right) dr \\
g(r) &= e^{-\lambda_0} \left[\lambda_+ \left(2\nu''_0 - \frac{1}{2} (\nu'_0)^2 - \nu'_0 \lambda'_0 \right) - 2\nu''_+ + \nu'_0 (\nu'_+ + \lambda'_+) - \lambda'_0 \nu'_+ \right]
\end{aligned} \tag{H.8}$$

verwendet haben. Folglich ist der Unterschied der n+1-ten Metrikfunktionen zu den n-ten Metrikfunktionen in führender Ordnung proportional zu $\frac{l_{Pl}^{2(n+1)}}{r_t^{2(n+1)}}$ und der Beweis ist erbracht, da dies genau der Forderung unserer Induktionsannahme entspricht.

H.1. Rückwirkung erster Ordnung auf die Schwarzschildmetrik

Setzen wir die Ergebnisse (5.4.7) in die m' -Gleichung von (2.3.22) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} m' &= \frac{4\pi G}{c^2} \rho r^2 = -\frac{\hbar G}{384\pi c^3} \frac{r_s^2}{r^4 - r_s r^3} = -\frac{l_{Pl}^2}{384\pi r_s^2} \frac{r_s^4}{r^3 (r - r_s)} \\ m(r) &= \frac{r_s}{2} - \frac{l_{Pl}^2}{384\pi r_s^2} \left[\frac{r_s^3 + 2r_s^2 r}{2r^2} + r_s \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{H.9})$$

Aus $e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$ erhalten wir damit

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \left[\frac{r_s^3 + 2r_s^2 r}{2r^3} + \frac{r_s}{r} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right] . \quad (\text{H.10})$$

Außerdem setzen wir p_r und $m(r)$ in (2.3.17) ein und nähern in erster Ordnung von $\frac{l_{Pl}^2}{96\pi r_s^2}$

$$\begin{aligned} \nu' &\approx \frac{r_s}{r(r - r_s)} - \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \left[\frac{r_s^3 + 2r_s^2 r}{2r^2 (r - r_s)^2} + \frac{r_s}{(r - r_s)^2} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) - \frac{8r_s^3 r - 3r_s^4}{r^3 (r - r_s)^2} \right] \\ &= \frac{r_s}{r(r - r_s)} - \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \left[\frac{2r_s^2 r^2 - 15r_s^3 r + 6r_s^4}{2r^3 (r - r_s)^2} + \frac{r_s}{(r - r_s)^2} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{H.11})$$

Integriert folgt daraus

$$\begin{aligned} \nu &\approx \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) - \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \\ &\quad \left[\frac{10r_s r^2 - 6r_s^2 r + 3r_s^3}{2r^2 (r - r_s)} + 5 \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) - \frac{r_s}{r - r_s} - \frac{r}{r - r_s} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right] \\ &= \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) - \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \left[\frac{8r_s r^2 - 6r_s^2 r + 3r_s^3}{2r^2 (r - r_s)} + \frac{4r - 5r_s}{r - r_s} \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

und somit erhalten wir die Metrik

$$e^\nu \approx 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \left[\frac{8r_s r^2 - 6r_s^2 r + 3r_s^3}{2r^3} + \left(4 - 5\frac{r_s}{r} \right) \ln \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \right] . \quad (\text{H.13})$$

Erneut sehen wir, dass unsere Näherung für $r \rightarrow r_s$ zusammenbricht, da die Korrekturterme von (H.10) und (H.13) dort divergieren. Andererseits können wir die Näherung

für $r \gg r_s$ betrachten

$$\begin{aligned} e^\nu &\approx 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{l_{Pl}^2}{192\pi r_s^2} \left(\frac{8r_s^3}{3r^3} + \frac{2r_s^4}{3r^4} \right) \\ e^{-\lambda} &\approx 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{l_{Pl}^2}{768\pi r_s^2} \frac{r_s^4}{r^4} . \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Somit liefern die Vakuumfluktuationen in erster Näherung einen attraktiven Beitrag, da das effektive Potential proportional zu $e^{\frac{\nu}{2}}$ ist.

H.2. Rückwirkung erster Ordnung für eine konstante Materiedichte

Die Berechnung der Rückwirkung der Vakuumfluktuationen unter Anwesenheit von Materie stellt uns vor das Problem, dass wir wissen müssen, ob und wie die Vakuumfluktuationen mit der gewöhnlichen Materie wechselwirken. Im einfachsten Fall findet keine Wechselwirkung statt und die Materiedichte und die Drücke können in dem System ohne Vakuumfluktuationen bestimmt werden. Nehmen wir dies an (wobei wir auch eine gravitative Wechselwirkung über die TOV Gleichung zulassen könnten) und betrachten die Vakuumfluktuationen für eine konstante Materiedichte bei isotropen Druck (5.4.13). Mit Hilfe von Mathematica können wir das korrigierte $m(r)$ berechnen. Jedoch ist das dafür nötige Integral

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right)^{-2} dr &= \frac{4}{9 \frac{r_0^2}{R^2} - 8} \left(- \frac{3r \left(\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) - 3 \frac{r_0^2}{R^2+3}}{-9 \frac{r_0^2}{R^2} + \frac{r^2}{R^2} + 8} \right. \\ &\quad \left. + R \frac{\sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \arctan \left(\frac{3 \frac{r}{R} \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} - 1}}{\sqrt{8 - 9 \frac{r_0^2}{R^2}} \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1}} \right)}{\sqrt{8 - 9 \frac{r_0^2}{R^2}} \sqrt{\frac{r_0^2}{R^2} - 1} \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1}} - R \frac{\arctan \left(\frac{r}{R} \right)}{\sqrt{8 - 9 \frac{r_0^2}{R^2}}} \right) \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

so kompliziert, dass die Berechnung von e^ν und die Interpretation der analytischen Lösung nicht möglich ist. Folglich werden wir die hervorgerufene Änderung der Metrik nicht betrachten.

Analysieren wird ersatzweise die Rückwirkung der Vakuumfluktuationen des deutlich leichteren exponentiellen Modells (5.4.15). Es folgt

$$\begin{aligned}
m(r) &= \frac{4\pi G}{3c^2} \rho_0 r^3 \left(1 - \frac{l_{Pl}^2}{576\pi R^2} \frac{1 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r^2}{\left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right)^2} \right) \\
\Rightarrow e^{-\lambda} &= 1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2 \left(1 - \frac{l_{Pl}^2}{576\pi R^2} \frac{1 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r^2}{\left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right)^2} \right) . \quad (\text{H.16})
\end{aligned}$$

Fordern wir zudem, dass der Materiedruck ebenfalls unverändert bleibt, und entwickeln in erster Ordnung in $\frac{l_{Pl}^2}{R^2}$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nu' &\approx \nu'_0 - \frac{Gl_{Pl}^2}{216c^2 R^2} \frac{\rho_0 r \left(1 - \frac{8\pi G}{5c^2} \rho_0 r^2\right)}{\left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right)^2 \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right)^2} \\
&+ \frac{Gl_{Pl}^2}{27c^2 R^2} \frac{R^2}{r} \rho_0 \left(\frac{1 - \frac{8\pi G}{c^2} \rho_0 r^2}{\left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right) \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right)} + \frac{2\pi G}{c^2} \rho_0 r^2 \frac{1 - \frac{8\pi G}{9c^2} \rho_0 (4r_0^2 - r^2)}{\left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right)^2 \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right)} \right) . \quad (\text{H.17})
\end{aligned}$$

Integriert ergibt sich

$$\begin{aligned}
\nu &= \nu_0 + \frac{Gl_{Pl}^2}{216c^2 R^2} \frac{\rho_0}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2} \left(\frac{1}{\frac{40\pi G}{3c^2} \rho_0 \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right)} + \frac{3 \ln \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right)}{\frac{80\pi G}{3c^2} \rho_0} \right) \\
&+ \frac{Gl_{Pl}^2}{27c^2 R^2} \frac{\rho_0 R^2}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2} \left[\ln \left(\frac{r}{r_0}\right) + \ln \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right) \right] \\
&+ \frac{Gl_{Pl}^2}{27c^2 R^2} \frac{2\pi G}{c^2} \rho_0^2 R^2 \frac{-\frac{r^2}{6} + 2 \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right) \frac{\ln \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right)}{\frac{8\pi G}{c^2} \rho_0}}{\left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2\right)^2} \quad (\text{H.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nu_0 + \frac{l_{Pl}^2}{5760\pi R^2} \frac{1}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2} \\
&\left[\frac{2}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2} + 123 \ln \left(1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r^2\right) + 80 \ln \left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{10 \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 r_0^2} \right] . \quad (\text{H.19})
\end{aligned}$$

Folglich bricht unsere Näherung für $r \rightarrow 0$ und für $r^2 \rightarrow \frac{c^2}{8\pi G \rho_0} = R^2$ zusammen. Wobei letzteres analog zur Einschränkung $r_0 > r_s$ der äußeren Metrik im letzten Unterkapitel ist, da $r \leq r_0$ und $R^2 = \frac{r_0^3}{r_s}$ gilt.

Literaturverzeichnis

- [1] James D. Bjorken und Sidney D. Drell. *Relativistische Quantenfeldtheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, Deutschland, 1984.
- [2] Michael E. Peskin und Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Vereinigte Staaten von Amerika, 1995.
- [3] Anthony Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, Princeton und Oxford, 2003.
- [4] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen Phys.*, 354:769–822, 1916.
- [5] Ronald Adler, Maurice Bazin und Menahem Schiffer. *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill Book Company, Vereinigte Staaten von Amerika, 1975.
- [6] Roger Penrose. The question of cosmic censorship. *J. Astrophys. Astron.*, 20:233–248, 1999.
- [7] Clifford M. Will. The Confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Rel.*, 9:3, 2006, arXiv:gr-qc/0510072.

- [8] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys.Lett.*, B716:1–29, 2012, arXiv:1207.7214 [hep-ex].
- [9] Keith A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin.Phys.*, C38:090001, 2014.
- [10] Peter O. Hess und Walter Greiner. Pseudo-complex General Relativity. *Int. J. Mod. Phys.*, E18:51–77, 2009, arXiv:0812.1738 [gr-qc].
- [11] Thomas Schöenbach et al. Experimental tests of pseudo-complex General Relativity. *MNRAS*, 430 (4):2999–3009, 2014, arXiv:1209.2815 [gr-qc].
- [12] Thomas Schöenbach et al. Ray-tracing in pseudo-complex General Relativity. *MNRAS*, 442 (1):121–130, 2014, arXiv:1312.1170 [astro-ph.GA].
- [13] Isaac Rodríguez, Peter O. Hess, Stefan Schramm und Walter Greiner. Neutron stars within pseudo-complex general relativity. *J.Phys.*, G41:105201, 2014.
- [14] Stephen W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun.Math.Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [15] William G. Unruh. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14:870–892, 1976.
- [16] Ian T. Drummond und S.J. Hathrell. QED Vacuum Polarization in a Background Gravitational Field and Its Effect on the Velocity of Photons. *Phys.Rev.*, D22:343, 1980.
- [17] Carlos Barcelo, Stefano Liberati, Sebastiano Sonego und Matt Visser. Fate of gravitational collapse in semiclassical gravity. *Phys.Rev.*, D77:044032, 2008, 0712.1130.
- [18] Nicholas D. Birrell und Paul C. W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, Vereinigtes Königreich, 1994.

- [19] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Vereinigte Staaten von Amerika, 1984.
- [20] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry*. Pearson Education, Inc., San Francisco, 2004.
- [21] Torsten Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Elsevier GmbH, München, 2006.
- [22] Peter O. Hess, Leila Maghlaoui und Walter Greiner. The Robertson-Walker Metric in a Pseudo-Complex General Relativity. *Int. J. Mod. Phys.*, E19:1315–1339, 2010, arXiv:1001.5208 [gr-qc].
- [23] Gunther Caspar, Thomas Schönenbach, Peter O. Hess, Mirko Schäfer und Walter Greiner. Pseudo-Complex General Relativity: Schwarzschild, Reissner-Nordström and Kerr Solutions. *Int. J. Mod. Phys.*, E21:1250015, 2012, arXiv:1202.6561 [gr-qc].
- [24] Francesco Antonuccio. Semicomplex analysis and mathematical physics. arXiv:gr-qc/9311032, 1993.
- [25] Gunther Caspar. Die Reissner-Nordström-Metrik in der Pseudokomplexen Allgemeinen Relativitätstheorie. Masterarbeit, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main, 2011.
- [26] Eduardo R. Caianiello. Is there a maximal acceleration? *Nuovo Cim. Lett.*, 32:65, 1981.
- [27] James D. Bjorken und Sidney D. Drell. *Relativistische Quantenmechanik*. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, Deutschland, 1984.
- [28] Walter Greiner. *Quantenmechanik Einführung*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2005.
- [29] Ramamurti Shankar. *Principles of Quantum Mechanics*. Springer, New York, 1994.

- [30] Walter Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2000.
- [31] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen Phys.*, 384:361–376, 1926.
- [32] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen Phys.*, 384:489–527, 1926.
- [33] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen Phys.*, 385:437–490, 1926.
- [34] Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem. *Annalen Phys.*, 386:109–139, 1926.
- [35] Walter Greiner. *Klassische Mechanik II*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2003.
- [36] Michael Artin. *Algebra*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.
- [37] Walter Greiner und Berndt Müller. *Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 1990.
- [38] Norbert Straumann. *Quantenmechanik*. Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [39] A. R. Edmonds. *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [40] Roman Sexl und Helmuth K. Urbantke. *Relativität, Gruppen, Teilchen*. Springer Verlag, Wien, 1992.
- [41] Norbert Straumann. *Relativistische Quantentheorie*. Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [42] Bernd Thaller. *The Dirac Equation*. Springer Verlag, Berlin, 1992.

- [43] Ronald Y. Cusson, Paul-Gerhard Reinhard, Joseph J. Molitoris, Horst Stöcker und Walter Greiner. Time dependent Dirac equation with relativistic mean field dynamics applied to heavy ion scattering. *Phys.Rev.Lett.*, 55:2786–2789, 1985.
- [44] Bin Liu und Horace Crater. Two-body Dirac equations for nucleon-nucleon scattering. *Phys.Rev.*, C67:024001, 2003, arXiv:nucl-th/0208045.
- [45] Lucas Lamata and Juan León, Tobias Schatz und Enrique Solano. Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion. *Phys.Rev.Lett.*, 98:253005, 2007, arXiv:quant-ph/0701208.
- [46] Emerson Sadurní, Eladio Rivera-Mociños, and Alfonso Rosado. Discrete symmetry in graphene: the Dirac equation and beyond. arXiv:1411.6319 [cond-mat.other].
- [47] Walter Greiner, Berndt Müller und Johann Rafelski. *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.
- [48] Michael Soffel, Berndt Müller und Walter Greiner. The Electrostatic and Gravitational Field of Spherically Symmetric Objects. *Phys.Lett.*, A62:67–69, 1977.
- [49] Jeffrey Yopez. Einstein’s vierbein field theory of curved space. arXiv:1106.2037 [gr-qc], 2011.
- [50] Edward Ackad und Marko Horbatsch. Numerical Solution of the Dirac Equation by a Mapped Fourier Grid Method. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 38:3157–3172, 2005.
- [51] Thanu Padmanabhan. Gravity and the thermodynamics of horizons. *Phys.Rept.*, 406:49–125, 2005, gr-qc/0311036.
- [52] Charles Poole und John Safko Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, San Francisco, 2000.

- [53] Matt Visser. Gravitational vacuum polarization. 2: Energy conditions in the Boulware vacuum. *Phys.Rev.*, D54:5116–5122, 1996, gr-qc/9604008.
- [54] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling und Brian P. Flannery. *Numerical Recipes in C++*. Cambridge University Press, Cambridge, Vereinigtes Königreich, 2002.
- [55] Rene Brun und Fons Rademakers. ROOT: An object oriented data analysis framework. *Nucl.Instrum.Meth.*, A389:81–86, 1997.