

QCD–Summenregeln mit Massen

Diplomarbeit

von Michael Meyer–Hermann

Institut für Theoretische Physik
der Johann Wolfgang Goethe Universität

Frankfurt am Main, Oktober 1993

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	6
1 QCD–Summenregeln	10
1.1 Fragestellung und Problematik	10
1.1.1 Das Confinement	10
1.1.2 Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie	11
1.1.3 Zusammenfassung der Problematik	16
1.2 Die Operatorproduktentwicklung	16
1.2.1 Der Grundgedanke	16
1.2.2 Dimension und Grad der Singularität	19
1.2.3 OPE und QCD–Summenregeln	20
1.3 Dispersionsrelationen	22
1.3.1 Funktionen, die im Unendlichen verschwinden	23
1.3.2 Dispersionsrelation mit Subtraktionen	24
1.3.3 Dispersionsrelationen für Funktionen mit Polen auf der reellen Achse	26
1.4 Von der asymptotischen Freiheit zu den Resonanzen	30

1.4.1	Die Isolation der niedrigsten Resonanz	31
1.4.2	Zusammenfassung	37
2	Dimensionale Regularisierung	38
2.1	Motivation und Definition des Verfahrens	38
2.1.1	Motivation	38
2.1.2	Idee	39
2.1.3	Integrale über Räume mit kontinuierlicher Dimension	40
2.2	Beispielrechnungen	45
2.2.1	Einige nützliche Regularisierungen	45
2.2.2	Der skalare 1-Loop Polarisationsgraph	46
2.2.3	Der fermionische 1-Loop Polarisationsgraph	51
2.2.4	Der fermionische Polarisationsgraph ohne Masse	56
2.2.5	Skalare Propagatoren ohne Masse in beliebigen Potenzen	57
2.2.6	Integranden mit Logarithmen	60
3	Die Masse eines 4-Teilchen-Zustands	69
3.1	Einleitung	69
3.2	Die Entwicklung des Polarisationsensors	70
3.2.1	Die Streumatrix und der Strom	71
3.2.2	Das Wicksche Theorem	73
3.2.3	Eichinvarianz der Amplitude	76
3.2.4	Ergebnis	77
4	Nichtlokale Vakuumkondensate	80

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
4.1 Fermionische Felder	81
4.2 Skalare Felder mit Masse	83
4.3 Kondensate mit 4 Feldern	89
4.4 Die Fouriertransformierte der Kondensate	90
5 Regularisierung der Feynmangraphen	92
5.1 Graphen mit einem Fermionen–Kondensat	93
5.2 Der perturbative Graph ohne Kondensate	95
5.2.1 Aufstellen der Amplitude	95
5.2.2 Entwicklung des skalaren Polarisationsgraphen in der Masse	97
5.2.3 Die Faltung von 2 Loops	99
5.3 Graphen mit einem skalaren Kondensat	103
5.3.1 Aufstellen des Integrals	103
5.3.2 Beitrag nullter Ordnung	107
5.3.3 Beitrag erster Ordnung, die Behandlung von IR–Divergenzen	108
5.4 Der Graph mit zwei fermionischen Kondensaten	126
5.5 Graphen mit zwei skalaren Kondensaten	128
5.6 Graphen mit drei Kondensaten	131
6 Aufstellen der Summenregel	136
6.1 Einleitung	136
6.2 Die Summenregel	137
6.2.1 Der Imaginärteil der Polarisationsfunktion	137
6.2.2 Boreltransformation	138

6.3	Auswertung	141
6.4	Zusammenfassung	143
7	Die exakte Behandlung der Masse	151
7.1	Die Unitarität der S -Matrix	153
7.1.1	Theoretischer Hintergrund	153
7.1.2	Der 1-Loop Polarisationsgraph	157
7.1.3	Der perturbative 3-Loop Graph	159
7.2	Der Graph mit einem skalaren Kondensat	173
	Zusammenfassung	177
A	Technische Details der Summenregeln	180
A.1	Eine Differentiationsformel	180
A.2	Das Verhältnis benachbarter Momente	181
A.3	Eine Formel für Dispersionsrelationen	182
A.4	Die Boreltransformation	183
A.5	Die Laplacetransformation	184
A.6	Integrationen zur Subtraktion des Kontinuums	185
A.6.1	Integranden mit Potenzen und Exponentialfunktion	186
A.6.2	Integranden mit Potenzen, Logarithmus und Exponential- funktion	186
A.6.3	Transformation des Graphen mit 2 fermionischen Kondensaten	188
B	Technische Details zur Regularisierung	192
B.1	Wick-Rotation	192

B.2	Parametrisierung	193
B.3	Laurentreihenentwicklung	194
B.4	Darstellung der Funktionen \ln , \arctan und artanh	198
B.4.1	Parameterintegrale	198
B.4.2	Zusammenhänge zwischen den Funktionen	198
B.4.3	Entwicklung in der Masse	199
B.4.4	Der Hauptzweig des \ln	199
B.5	Einige Differentiationen	200
Bildverzeichnis		204
Literaturverzeichnis		206

Einleitung

Die Beobachtung von korrelierten Elektron–Positron–Paaren bei Schwerionen-Kollisionen, wie sie an der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI–Darmstadt) durchgeführt werden, haben zu Spekulationen über die Existenz von neuen Teilchenresonanzen geführt. Durch viele theoretische Überlegungen konnten alle Möglichkeiten bis auf komplexe Mehrteilchen–Zustände, die durch stark nichtstörungstheoretische Effekte charakterisiert sind, ausgeschlossen werden. Solche nicht–perturbativen Mehrteilchenzustände werden in dieser Arbeit untersucht.

Schwerionenreaktionen werden theoretisch durch ein Zweizentren–Coulombpotential beschrieben. Die Überlagerung der Coulombpotentiale der beiden kollidierenden Systeme findet bereits lange vor dem eigentlichen Stoß statt und kann — bei genügend schweren Systemen — eine kritische Größe überschreiten, so daß die spontane Emission von Positronen möglich wird. Dieses kritische System entspricht einem Coulombpotential zu einer Ladung von mindestens $Z = 172$. Das theoretische Energiespektrum der emittierten Positronen ist eine glatte Kurve (Greiner et al. 1985). Tatsächlich aber wurden an der GSI über der theoretisch vorhergesagten glatten Kurve scharfe Linien im Energiespektrum gemessen (z. B. Schweppe et al. 1983). Es gibt bis heute keine befriedigende Erklärung der Positronenspektren, obwohl viele Versuche unternommen wurden (Bokemeyer 1990). Bei der Intensivierung der Experimente hat man zu den emittierten Positronen koinzidente Elektronen gefunden (siehe Abb. 0.1 aus Bokemeyer 1990). Die Existenz koinzidenter Elektron–Positron–Paare hat den Gedanken nahegelegt, daß bei der Schwerionen-Kollision ein neutrales Objekt erzeugt wird, das dann in ein Elektron–Positron–Paar zerfällt. Aufgrund der Linienvielfalt bei verschiedenen Energien ist es dabei

Abbildung 0.1: Das Elektron–Positron Summenenergiespektrum für das System (Uran + Thorium). Die Einschußenergie beträgt $5.87 - 5.9 \text{ MeV}/u$. Bei 809 keV erhebt sich über dem glatten Untergrund ein deutlicher Peak.

naheliegender, eher an ein zusammengesetztes Objekt als an ein elementares Teilchen zu denken, mit dem man nur eine Linie erklären könnte. Punktteilchen können sogar systematisch und vollständig ausgeschlossen werden (Schäfer 1989). Die Idee eines zerfallenden Bindungszustands aus 2 Teilchen führte jedoch nicht zum gewünschten Erfolg (Ehrnsperger 1992 und Stein 1991). Die einzige Möglichkeit, den Erklärungsversuch durch einen zusammengesetzten Bindungszustand zu retten, ist ein Mehr–Teilchen–Zustand, in dem sich die Masse des Bindungszustandes zum größten Teil wegbindet (Müller 1986). Genau dieser Gedanke wird in dieser Arbeit weiterverfolgt, indem ein 4-Teilchen-Zustand studiert wird.

Der Rahmen der Fragestellung soll jedoch etwas weiter gefaßt werden, als es für die obige Fragestellung notwendig ist: Ist es möglich, einen 4-Teilchen-Zustand aus zwei fermionischen, masselosen Quarks und zwei skalaren Quarks mit Masse zu konstruieren, dessen Masse wesentlich kleiner ist als die Masse der Konstituenten? Die fermionischen Quarks sollen masselos sein, was eine gute Näherung für die leichten Quarks im Rahmen der QCD ist. Bei den skalaren Quarks mag man an

die supersymmetrischen Partner der Quarks (Sohnius 1985), die Squarks denken, deren Masse wohl im GeV -Bereich liegt. Ihre Masse soll im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht eingeschränkt werden.

Die Masse des Bindungszustands soll unter Berücksichtigung nicht-störungstheoretischer Effekte mit dem Verfahren der QCD-Summenregeln berechnet werden, das — neben Rechnungen auf dem Gitter — die einzige Methode zur Beschreibung nicht-abelscher Wechselwirkungen im nicht-perturbativen Bereich ist. Sie wurde bereits sehr erfolgreich auf die QCD angewendet (Reinders 1985). Dabei werden anhand des obigen Beispiels die Probleme herausgearbeitet, die bei der Berücksichtigung von Massen entstehen. In einer ersten Annäherung an das Problem wird eine Entwicklung in der Masse der skalaren Quarks durchgeführt, was die Gültigkeit der resultierenden Summenregel auf Konstituentenmassen von weniger als $300 MeV$ festlegt. Für die exakte Behandlung der Frage ist es notwendig, die nichtlokale Natur der Vakuumkondensate zu berücksichtigen, die bei endlicher Masse nicht-trivial ist. Auch ist die Regularisierung der 3-Loop-Feynmangraphen, die für die Summenregel maßgeblich sind, bei exakter Berücksichtigung der Masse ausgesprochen involviert.

Die Arbeit ist wie folgt organisiert: die ersten beiden Kapitel enthalten eine ausführliche Darstellung der QCD-Summenregeln und der dimensional Regularisierung. Dabei werden für die Summenregeln das Zusammenspiel von Confinement, chiraler Symmetriebrechung im hadronischen Spektrum, nicht-trivialer Vakuumstruktur, Operatorproduktentwicklung und Dispersionsrelationen, sowie der Balanceakt zwischen dem Bereich asymptotischer Freiheit und dem Confinement dargestellt. Für die Isolation der Masse des Bindungszustands werden zwei Verfahren vorgestellt: die Momente und die Boreltransformation. Die dimensionale Regularisierung wird axiomatisch behandelt und durch eine Vielzahl von konkreten Rechnungen exemplifiziert, die im Laufe der Arbeit benötigt werden. In den Kapiteln 3 bis 6 wird die Summenregel für den beschriebenen 4-Teilchen-Zustand aufgestellt. Dazu wird zunächst der Polarisationsensor für den entsprechenden Strom mit dem Wickschen Theorem entwickelt. In Kap. 4 werden die auftretenden nichtlokalen Vakuumkondensate analysiert. Dabei wird insbesondere auf die Wirkung der

endlichen Masse eingegangen. In Kap. 5 werden alle notwendigen Feynmangraphen regularisiert, wobei die Behandlung von IR-Divergenzen und ihre Auswirkung auf den Imaginärteil des Graphen eine wesentliche Rolle spielen wird. Zwei der Graphen werden in der Masse entwickelt und bis zur ersten Ordnung berücksichtigt. Die Summenregel wird in Kap. 6 aufgestellt und interpretiert. Die in der Masse der skalaren Quarks exakte Berechnung der Summenregel wird in Kap. 7 diskutiert.

Kapitel 1

QCD–Summenregeln

1.1 Fragestellung und Problematik

Die QCD–Summenregeln sind ein Verfahren mit dem man Kopplungskonstanten und Massen von Hadronen bestimmen kann. Es wurde von M.A. Shifman, A.I. Vainshtein und V.I. Zakharov 1978 in einer vielzitierten Originalarbeit (Shifman et al. 1979) eingeführt und gleich auf verschiedene hadronische Zustände mit Erfolg angewendet (Shifman et al. 1979, Teil 2). So wurden beispielsweise die Masse des Charmoniums mit guter Genauigkeit reproduziert und auch die Massenaufspaltung von ρ -, π - und a_1 -Mesonen bestätigt. Das Verfahren basiert auf der Idee, den mathematisch bisher unzugänglichen Bereich des Confinements mit Hilfe von Vakuumkondensaten anzunähern. Die Problematik und das Verfahren sollen in diesem Kapitel erläutert werden.

1.1.1 Das Confinement

In der Quantenchromodynamik ist man mit der laufenden Kopplungskonstanten konfrontiert (Muta 1987), die die QCD in zwei Bereiche aufteilt. Bei der Streuung mit großen Virtualitäten ist die Kopplungskonstante klein genug, um die Streuamplituden mit Hilfe von Störungstheorie berechnen zu können. Bei kleinen Virtua-

litäten (unterhalb 1.5 GeV) ist die Kopplungskonstante zu groß für eine sinnvolle Anwendung der Störungstheorie. Man befindet sich im Bereich des hadronischen Spektrums, einem Bereich, in dem das Confinement der QCD spürbar wird und die Quarks in gebundenen Zuständen zusammengehalten werden. Diese Resonanzen machen die QCD der weichen Impulse zu einem rein nicht-störungstheoretisches Problem. Es stellt sich also die Frage, auf welche Weise man beispielsweise die Massen solcher Resonanzen bestimmen kann. Ein geeignetes Verfahren muß nach der eben beschriebenen Problematik das Confinement der QCD berücksichtigen.

1.1.2 Die spontane Brechung der chiralen Symmetrie

Spontane Symmetriebrechung

Spontane Brechung einer Symmetrie liegt dann vor, wenn die betrachtete Lagrangedichte unter der Symmetrie invariant ist, jedoch sich das physikalische Vakuum unter den Generatoren Q der Symmetriegruppe verändert, d.h. $Q | 0 \rangle \neq 0$.

Aus der Invarianz der Lagrangedichte folgt, daß die Generatoren der Symmetriegruppe die Erhaltungsgröße eines zu der Symmetrie gehörigen Stroms sind: aus dem Noetherschen Theorem folgt, daß ein Viererstrom j^μ existiert, für den eine Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ erfüllt ist. Dann folgt, daß die Generatoren der Gruppe, die durch

$$Q := \int d^3x j^0(x) \quad (1.1)$$

definiert sind, eine Erhaltungsgröße sind, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int d^3x \frac{d}{dt} j^0(t, \vec{x}) \\ &= - \int d^3x \operatorname{div} \vec{j}(t, \vec{x}) \quad (\text{wegen } \partial_\mu j^\mu = 0) \\ &= - \int d\sigma \vec{n} \cdot \vec{j} \quad (\text{Satz von Gauß}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Dies bedeutet, daß die Generatoren mit dem Hamiltonoperator kommutieren $[Q, H] = 0$. Das Vakuum ist deshalb unendlich degeneriert in der Energie, denn die

Vakua $|0\rangle$, $Q|0\rangle$, $Q^2|0\rangle$ und $Q^n|0\rangle$ gehören alle zur gleichen Energie. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad in der Wahl des Vakuums suggeriert bereits das Vorhandensein eines Teilchen mit den Quantenzahlen des Generators Q . Genau dies ist der Inhalt des Goldstone-Theorems (Goldstone et al. 1962):

Eine globale Symmetrie, die die Lagrangedichte invariant läßt, nicht aber das Vakuum, führt zu einem masselosen Boson mit den Quantenzahlen des zugehörigen Generators.

Die Chirale Symmetriegruppe

Man betrachte die unitären Transformationen des Dirac-Spinors

$$\begin{aligned}\psi &\longrightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a}\psi \\ \psi &\longrightarrow e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi \quad ,\end{aligned}\tag{1.3}$$

wobei τ^a die 4 Paulimatrizen und α_a die Gruppenparameter sind. Die masselose QCD-Lagrangedichte ist unter diesen Transformationen invariant. Für die erste Transformation folgt dies trivial aus der Unitarität. Für die zweite Transformation benötigt man zusätzlich noch die Vertauschungsrelation:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\}_+ = 0\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu - igA^\mu)\psi \\ &\rightarrow i\overline{e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu - igA^\mu)e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi \\ &= i\psi^\dagger e^{\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\gamma_0\gamma_\mu(\partial^\mu - igA^\mu)e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi \\ &= -i\bar{\psi}e^{\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\gamma_\mu(\partial^\mu - igA^\mu)e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial^\mu - igA^\mu)\psi\end{aligned}\tag{1.5}$$

Die zu den beiden Transformationen gehörigen Erhaltungsgrößen sind (Pokorski 1990):

$$\begin{aligned}Q^a &= \int d^3x \bar{\psi}(x)\gamma_0\frac{1}{2}\tau^a\psi(x) \quad (\text{Isospin}) \\ Q_5^a &= \int d^3x \bar{\psi}(x)\gamma_0\gamma_5\frac{1}{2}\tau^a\psi(x)\end{aligned}\tag{1.6}$$

Die Chirale Symmetrie hadronischer Resonanzen

Nun zurück zu dem eigentlichen Problem, dem hadronischen Spektrum. Betrachtet man die Massen einiger mesonischer Resonanzen, stellt man fest, daß Mesonen, die sich nur durch ihre innere Parität unterscheiden, völlig unterschiedliche Massen haben. Beispielsweise hat das vektorielle ρ -Meson die Masse 770 MeV, während das axialvektorielle a_1 -Meson die Masse 1260 MeV hat. Man muß daher feststellen, daß in der Natur die chirale Symmetrie gebrochen sein muß, obwohl die masselose Lagrangedichte, wie oben gesehen, chiral invariant ist.

Innerhalb der Störungstheorie der masselosen QCD kann man dies auch direkt einsehen, wenn man beachtet, daß der Polarisationsstensor durch

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(k) &= -i \int d^4x \langle 0 | T \{ j_{V/A}^\mu(x) j_{V/A}^\nu \} | 0 \rangle e^{ikx} \\ \text{mit den Strömen} \quad j_V^\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \\ j_A^\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

gegeben ist (siehe Gln. 3.12 und 3.13), wobei $T\{\dots\}$ das zeitgeordnete Produkt bedeutet. Man erkennt leicht, daß der vektorielle und der axialvektorielle Strom auf das gleiche Produkt führen, denn es gilt mit Hilfe von $\gamma_5 \gamma_5 = \mathbf{1}$ und der Gl. 1.4:

$$\begin{aligned} j_A(x) j_A(0) &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(0) \\ &= -\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(0) \gamma_5 \gamma^\mu \gamma_5 \psi(0) \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \gamma_5 \gamma_5 \psi(0) \\ &= j_V(x) j_V(0) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die Antivertauschung von γ_5 mit $\psi(x)\bar{\psi}(0)$, die benutzt wurde, ist nur für die masselose Theorie korrekt, da die kontrahierten Dirac-Spinoren auf den fermionischen Propagator führen (siehe Gl. 3.8), für den im Impulsraum gilt

$$\gamma_5 (\not{p} + m) = - \not{p} \gamma_5 + m \gamma_5 \quad , \quad (1.9)$$

so daß durch die Masse eine Mischung von Vertauschung und Antivertauschung entsteht. Rein störungstheoretische Methoden unterscheiden demnach in der masselosen QCD nicht zwischen dem vektoriellen und dem axialvektoriellen Strom — die Massenaufspaltung bleibt damit ungeklärt.

Nun könnte man einwenden, die masselose QCD sei eben falsch und man müsse einen Masseterm in die Lagrangedichte einführen. Wie oben gesehen, würde dann der Polarisationsensor zwischen Strömen verschiedener innerer Parität unterscheiden. Die chirale Symmetrie der QCD-Lagrangedichte würde ebenfalls gebrochen, denn ein solcher Term ist nicht invariant unter der zweiten Transformation in Gl. 1.3:

$$\begin{aligned}
 m\bar{\psi}\psi &\longrightarrow im \overline{e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi} e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi \\
 &= im \psi^\dagger e^{\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5} \gamma_0 e^{-\frac{i}{2}\alpha_a\tau^a\gamma_5}\psi \\
 &= -im\bar{\psi}\psi
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Die chirale Symmetrie würde auf diese Weise *explizit* gebrochen, und die Massenaufspaltung produzierte keinen Widerspruch mehr. Jedoch gibt man durch die Einführung dieses Terms den Quarks eine Masse, die zumindestens für die u und d -Quarks vernachlässigbar klein ist (einige MeV). Es gibt einen allgemeinen Konsens darüber, daß die masselose Theorie eine gute Näherung für die QCD der leichten Quarks ist, so daß der Massenterm für die leichten Quarks seine Rechtfertigung verliert. Gerade das obige Beispiel der Massenaufspaltung tritt bei Mesonen auf, die aus leichten Quarks aufgebaut sind. Eine befriedigende Erklärung der Massenaufspaltung ist daher mit der *expliziten* Brechung der chiralen Symmetrie nicht möglich.

Stattdessen kann man die *spontane* Brechung der chiralen Symmetrie erwägen. Wegen des Goldstone-Theorems muß dann ein pseudoskalares, masseloses Meson existieren. Ein solches Meson ist nicht bekannt, aber das leichteste pseudoskalare Meson ist das π -Meson mit einer Masse von 140 MeV. Man hat versucht, diese Masse doch wieder durch die nichtverschwindende Masse der leichten Quarks zu erklären, so daß man wieder auf eine explizite Brechung der chiralen Symmetrie zurückgreifen muß, um eine konsistente Beschreibung zu bekommen.

Wirklich befriedigend sind beide Lösungen nicht. Jedoch erscheint es sofort einsichtig, daß es leichter ist, mit der kleinen Masse der leichten Quarks die relativ geringe Masse des leichtesten Mesons zu erklären, als die große Massenaufspaltung der ρ und a_1 -Mesonen. Deshalb wird im folgenden von einer *spontanen* Brechung

der chiralen Symmetrie ausgegangen. Im nächsten Abschnitt wird erläutert, welche Auswirkung dies auf die Struktur des Vakuums hat.

Vakuumkondensate

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß aus der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie ($Q_5^a | 0 \rangle \neq 0$) die Existenz von Vakuumkondensaten folgt. Dazu werden eine Matrixdarstellung der chiralen Symmetriegruppe T_{ij}^a und ein Multipllett aus dem Darstellungsraum Φ_i gewählt. Die unitäre Transformation des Multipletts lautet:

$$\begin{aligned}
 \Phi_i \rightarrow \Phi'_i &= e^{i\delta\alpha^a Q_5^a} \Phi_i e^{-i\delta\alpha^a Q_5^a} \\
 &\approx (1 + i\delta\alpha^a Q_5^a) \Phi_i (1 - i\delta\alpha^a Q_5^a) \\
 &\approx \Phi_i + i\delta\alpha^a Q_5^a \Phi_i - i\delta\alpha^a \Phi_i Q_5^a \\
 &= \Phi_i + i\delta\alpha^a [Q_5^a, \Phi_i]
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Gleichzeitig gilt mit der Darstellungsmatrix T_{ij}^a :

$$\begin{aligned}
 \Phi'_i &= (\delta_{ij} - i\delta\alpha^a T_{ij}^a) \Phi_j \\
 &= \Phi_i - i\delta\alpha^a T_{ij}^a \Phi_j
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Durch Vergleich der Gln. 1.11 und 1.12 folgt:

$$[Q_5^a, \Phi_i] = -T_{ij}^a \Phi_j \tag{1.13}$$

Nun wird der Vakuumerwartungswert dieses Kommutators betrachtet:

$$\begin{aligned}
 - \langle 0 | T_{ij}^a \Phi_j | 0 \rangle &= \langle 0 | [Q_5^a, \Phi_i] | 0 \rangle \quad (\text{wegen Gl. 1.13}) \\
 &= \underbrace{\langle 0 | Q_5^a \Phi_i | 0 \rangle}_{=0} - \underbrace{\langle 0 | \Phi_i Q_5^a | 0 \rangle}_{\neq 0} \\
 &= - \langle 0 | \Phi_i | v \rangle \neq 0 \\
 \implies \langle 0 | \Phi_i | 0 \rangle &\neq 0 \quad \text{für mindestens eine Komponente } i
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

Man beachte, daß die Überlegung unabhängig von der Bedeutung des Generators Q_5^a ist. Nirgendwo wurde explizit benutzt, daß es sich um den Generator der chiralen Symmetriegruppe handelt. Es gilt also ganz allgemein:

Die spontane Brechung einer Symmetrie führt auf nichtverschwindende Vakuumkondensate.

1.1.3 Zusammenfassung der Problematik

In den letzten beiden Abschnitten wurde aufgezeigt, welche Probleme bei der Berechnung von Resonanzmassen hadronischer Materie entstehen. Einmal bewirkt die Existenz des Confinements in der QCD die Notwendigkeit eines nicht-störungstheoretischen Verfahrens. Auf der anderen Seite wird durch die Massenaufspaltung von ρ und a_1 -Mesonen die spontane Brechung der chiralen Symmetrie angezeigt, die zwingend auf die Existenz von Vakuumkondensaten, also eines nicht-trivialen Vakuums führt. Ein Verfahren zur Bestimmung von Resonanzmassen muß genau diese beiden Punkte beinhalten, das Confinement und das nicht-triviale Vakuum. Es wird sich zeigen, daß die Operatorproduktentwicklung als Grundlage des gesuchten Verfahrens geeignet ist, dieses zu leisten.

1.2 Die Operatorproduktentwicklung

1.2.1 Der Grundgedanke

In diesem Abschnitt sollen nur die wesentlichen Grundzüge der Operatorproduktentwicklung (OPE) aufgezeigt werden. Dabei wird die Darstellung auf die für die QCD-Summenregeln wichtigen Aspekte konzentriert.

Wie ist das Produkt zweier Operatoren im gleichen Raumzeitpunkt definiert? Dies ist die Grundfrage, auf die die OPE eine Antwort geben will. Grundsätzlich sind Matrixelemente von lokalen Operatorprodukten nicht wohldefiniert, denn für einen Operator A und einen Zustand $|k\rangle$, für den gilt $\langle 0|A(0)|k\rangle \neq 0$, folgt für sein Produkt mit sich selbst:

$$\begin{aligned} \langle 0|A(x)A(x)|0\rangle &= \int \frac{d^3k}{2\omega} \langle 0|A(x)|k\rangle \langle k|A(x)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{2\omega} \langle 0|A(0)|k\rangle \langle k|A(0)|0\rangle \end{aligned}$$

$$= \int \frac{d^3k}{2\omega} \left| \underbrace{\langle 0|A(0)|k \rangle}_{\neq 0} \right|^2 \longrightarrow \infty \quad (1.15)$$

Das Operatorprodukt am gleichen Raumzeitpunkt ist daher singulär. Um die Struktur dieser Singularitäten untersuchen zu können, schlug 1969 Wilson die OPE vor (Wilson 1969). Er betrachtete die beiden Operatoren an leicht verschobenen Raumzeitpunkten und entwickelte das Produkt in eine Reihe.

$$\langle \phi|A_1(x+\xi)A_2(x-\xi)|\phi \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\xi) \langle \phi|B_j(x)|\phi \rangle \quad (1.16)$$

Die B_j sind linear unabhängige, lokale Operatoren, und die E_j sind bei $\xi = 0$ singuläre, komplexe Funktion, die von der Größe der Verschiebung abhängen. $|\phi \rangle$ soll einen beliebigen physikalischen Zustand darstellen. Durch diese Entwicklung wird eine Aufspaltung des Operatorproduktes in Funktionen $E_j(\xi)$ zu kleinen Abständen ξ und Operatoren $B_j(x)$ zu großen Abständen x erreicht. Dies entspricht einer Trennung von Störungstheorie und Nicht-Störungstheorie oder, auf die QCD bezogen, einer Trennung von asymptotischer Freiheit und Confinement. Die genaue Bedeutung der Funktionen E_j und der Operatoren B_j , ist noch zu klären.

Das Produkt in Gl. 1.16 ist nur zwischen gleichen physikalischen Zuständen definiert. Wenn dieser Zustand das Vakuum ist, können nur skalare Operatoren B_j erlaubt sein, oder allgemeiner Operatoren mit abgepaarten Indizes. Operatoren mit nicht kontrahiertem Farbindex beispielsweise könnten zwischen zwei Vakuumzuständen nur dann einen Beitrag liefern, wenn das Vakuum ebenfalls Farbe tragen würde. Man geht jedoch im Allgemeinen von einem strukturfreien Vakuum aus, so daß solche Operatoren nicht zu berücksichtigen sind. Mögliche Operatoren sind dann der Einheitsoperator und alle denkbaren Vakuumkondensate in der QCD:

$$B_j \in \{ \mathbf{1}, \bar{\phi}\phi, \bar{\psi}\psi, G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}, \dots \} \quad (1.17)$$

ϕ ist ein skalares, ψ ein fermionisches Quarkfeld und $G^{\mu\nu}$ der eichunabhängige Gluonfeldstärketensor. Der Grund für die Betrachtung skalarer Quarkfelder wird später klar werden.

Wenn man reine Störungstheorie betrachtet — in der QCD wäre dies der Bereich der asymptotischen Freiheit — gibt es keine Vakuumkondensate, denn das

Vakuum ist dann der Zustand ohne Teilchen. Wendet man ein normalgeordnetes Produkt von Operatoren auf einen teilchenfreien Zustand an, so liefert der rechts stehende Vernichter immer Null. Die Störungsreihe muß dann vollständig in der Funktion E_1 enthalten sein. Um dies anschaulich zu machen, wird das Beispiel des Polarisationsensors aus Gl. 1.7 betrachtet. Es gilt dann

$$\langle 0|j(x)j(y)|0 \rangle = E_1\left(\frac{x-y}{2}\right) + \sum_{j=2}^{\infty} E_j\left(\frac{x-y}{2}\right) \langle 0|B_j\left(\frac{x+y}{2}\right)|0 \rangle \quad (1.18)$$

Aus den genannten Gründen enthält die Funktion E_1 alle störungstheoretischen Graphen, die zu dem Strom $j(x)$ gehören (siehe Abb. 1.1). Die Operatoren für $j > 1$

Abbildung 1.1: Störungstheoretische Polarisationsgraphen für einen Quarkstrom

sind als nichtstörungstheoretische Korrekturen zu der Störungsreihe aufzufassen. Die dazugehörigen Funktionen $E_{j>1}$ sind dementsprechend die Feynmangraphen zu dem Strom $j(x)$, die das Kondensat $B_{j>1}$ enthalten. Es ist jedoch keine allgemeine Aussage darüber möglich, ab welcher Ordnung der Störungsreihe der erste Korrekturterm wichtiger wird als die nächste Ordnung der Störungsreihe und ob die Reihe überhaupt konvergent ist oder wenigstens die Korrekturen mit zunehmendem j kleiner werden.

1.2.2 Dimension und Grad der Singularität

Da für die B_j nur die Operatoren aus Gl. 1.17 in Betracht kommen und deren Matrixelemente endliche Größen darstellen, müssen die Singularitäten des Operatorproduktes (siehe Gl. 1.15) in den Funktionen $E_j(\xi)$ für den Grenzfall $\xi \rightarrow 0$ stecken. Es wird sich zeigen, daß die Größe der Singularität in direktem Zusammenhang zu der Dimension der Operatoren A_1 , A_2 und B_j aus Gl. 1.16 steht.

Es sei eine skaleninvariante Lagrangedichte gegeben — diese darf daher keine Massenterme enthalten — und es sei $U(\lambda)$ eine durch λ parametrisierte unitäre Skalentransformation, dann ist die *Dimension* $d(O)$ eines lokalen Operators $O(x)$ durch

$$U^+(\lambda) O(x) U(\lambda) = \lambda^{d(O)} O(\lambda x) \quad (1.19)$$

definiert.

Eine Skalentransformation der Gl. 1.16 ergibt

$$\begin{aligned} U^+(\lambda) A_1(x + \xi) \overbrace{U(\lambda) U^+(\lambda)}^{=1} A_2(x - \xi) U(\lambda) &= \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\xi) U^+(\lambda) B_j(x) U(\lambda) \\ \iff \lambda^{d(A_1)+d(A_2)} A_1(\lambda(x + \xi)) A_2(\lambda(x - \xi)) &= \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\xi) \lambda^{d(B_j)} B_j(\lambda x) \\ \iff A_1(\lambda(x + \xi)) A_2(\lambda(x - \xi)) &= \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\xi) \lambda^{d(B_j)-d(A_1)-d(A_2)} B_j(\lambda x) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Auf der anderen Seite kann man die bereits skalentransformierten Operatoren A_1 und A_2 nach Wilson entwickeln (GL. 1.16):

$$A_1(\lambda(x + \xi)) A_2(\lambda(x - \xi)) = \sum_{j=1}^{\infty} E_j(\lambda \xi) B_j(\lambda x) \quad (1.21)$$

Aus den Gln. 1.20 und 1.21 folgt durch Vergleich das Skalenverhalten der Funktionen E_j :

$$E_j(\lambda \xi) = \lambda^{d(B_j)-d(A_1)-d(A_2)} E_j(\xi) \equiv \lambda^{-d(E_j)} E_j(\xi) \quad (1.22)$$

Dieses Skalenverhalten bestimmt die Funktionen E_j bis auf eine Proportionalitätskonstante bereits vollständig. Es handelt sich um homogene Funktionen in ξ :

$$E_j(\xi) \sim \xi^{-d(E_j)} = \xi^{d(B_j)-d(A_1)-d(A_2)} \quad (1.23)$$

Mit Hilfe dieser einfachen Überlegung kann man bereits sehr viel über die Singularität des Operatorproduktes (siehe GL. 1.15) und die Art der Entwicklung 1.16 aussagen:

Wegen 1.23 treten nur in den Termen der Reihe Singularitäten auf, in denen die Bedingung

$$d(B_j) < d(A_1) + d(A_2) \quad (1.24)$$

erfüllt ist. *Die Singularitäten von E_j werden umso kleiner, je größer die Dimension des Operators B_j ist.* Man kann demnach die Terme auf der rechten Seite der Entwicklung 1.16 nach der Dimension der Operatoren B_j sortieren, wobei der Operator $B_1 = \mathbf{1}$ die kleinste Dimension hat ($d(\mathbf{1}) = 0$) und daher zur am stärksten singulären Funktion E_1 führt. Will man sich bei der Entwicklung auf Terme beschränken, deren Singularitäten mindestens vom Grad N sind, kann man eine obere Schranke für die Dimension der Operatoren B_j angeben, die berücksichtigt werden müssen (Gl. 1.23):

$$\boxed{d(B_j) < d(A_1) + d(A_2) - N} \quad (1.25)$$

1.2.3 OPE und QCD–Summenregeln

Man hat im vorigen Abschnitt gesehen, daß in der OPE zwei Entwicklungen gegeneinander konkurrieren. Einerseits hat man für $B_1 = \mathbf{1}$ die bekannte störungstheoretische Entwicklung in der Kopplungskonstanten. Andererseits hat man eine Entwicklung im Grad der Singularitäten des Operatorproduktes. Es ist nicht offensichtlich, welcher Beitrag in einer konkreten Rechnung wichtiger sein wird: die nächste Ordnung in α_s oder die nächst–schwächere Singularität.

Genau hier setzt das Verfahren der QCD–Summenregeln an. Es geht davon aus, daß die Begrenzung der asymptotischen Freiheit in der QCD und damit das

Erscheinen des Confinements eben nicht durch höhere Ordnungen der Kopplungskonstanten berücksichtigt wird, sondern durch die nächste Singularität — durch sogenannte *power corrections*. Damit wird nicht grundsätzlich die Gültigkeit der Störungsreihe in Zweifel gezogen, es wird nur erklärt, daß ab einer gewissen Ordnung der Entwicklung in der Kopplungskonstanten im Bereich des Confinements andere Korrekturen, im Sinne der OPE, wichtiger werden. Da diese *power corrections*, wie gesehen, durch Vakuumkondensate, die nur in Theorien mit nicht-trivialem Vakuum existieren, Eingang in die Entwicklung von Operatorprodukten finden, kann man diesen Ansatz auch so formulieren:

Aus dem Bereich der asymptotischen Freiheit kommend, wird der zunehmende Einfluß des Confinements durch das nicht-triviale Vakuum der QCD berücksichtigt.

Betrachtet man noch einmal die in Kap. 1.1.3 dargestellte Problematik für ein Verfahren, mit dem man Resonanzmassen hadronischer Materie berechnen wollte, stellt man fest, daß der obige Ansatz genau die gewünschten Anforderungen erfüllt. Das Confinement wird mit Hilfe von Korrekturen, die proportional zu Vakuumkondensaten sind, berücksichtigt, und durch die Existenz dieser Kondensate wird dem nicht-trivialen Charakter des QCD-Vakuums, und damit der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie Rechnung getragen.

Einige kritische Anmerkungen zu dem dargestellten Ansatz:

Die Gültigkeit der OPE wurde im Rahmen der Störungstheorie allgemein bewiesen (Zimmermann 1971). Die Anwendung und Erweiterung der Gültigkeit auf den nichtstörungstheoretischen Fall der QCD ist unbewiesen und fragwürdig. Die Begründer der QCD-Summenregeln (Shifman et al. 1979) erwarten einen Zusammenbruch der Gültigkeit ab einer bestimmten Dimension der Operatoren B_j .

Der Ansatz, das Confinement durch das nicht-triviale QCD-Vakuum zu berücksichtigen, ist schwer zu begründen und kann sich im Grunde nur durch den Erfolg der resultierenden Methode rechtfertigen.

Die QCD-Summenregeln erheben jedoch auch nicht den Anspruch, eine exakte Theorie darzustellen. Vielmehr soll ein mathematisch unzugänglicher Bereich der QCD erschlossen werden. Und nur durch die Erfolge in diesem Kontext wird das Verfahren zu beurteilen sein.

1.3 Dispersionsrelationen

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich ausschließlich auf die Ebene der Elementarteilchen. Ziel der QCD-Summenregeln ist es jedoch, Massen von hadronischen Zuständen zu berechnen. Man benötigt deshalb ein Bindeglied zwischen den Bereichen der Elementarteilchen und der hadronischen Materie. Genau dieses Bindeglied wird durch die Dispersionsrelationen zur Verfügung gestellt.

Allgemein stellen Dispersionsrelationen einen Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil einer komplexen Funktion dar (Joachain 1987), hier der Polarisationsfunktion. Eine hadronische Resonanz äußert sich als Pol auf der reellen Achse im Bereich $k^2 > 0$ und trägt auf diese Weise zum Imaginärteil der Polarisationsfunktion bei. Die aus der OPE im Bereich $q^2 < 0$ der Elementarteilchen berechnete Polarisationsfunktion wird daher durch die Dispersionsrelationen mit ihrem Imaginärteil und dadurch mit dem hadronischen Spektrum im Bereich $k^2 > 0$ in Beziehung gesetzt. Die benötigten Dispersionsrelationen werden im folgenden hergeleitet.

Die Basis von Dispersionsrelationen ist reine Funktionentheorie, so daß die benötigte Beziehung 1.45 für eine beliebige komplexe Funktion hergeleitet wird. Um diese auf die Polarisationsfunktion anzuwenden, sind dann die benötigten Voraussetzungen noch zu überprüfen.

Die Grundlage für die Dispersionsrelationen ist die *Cauchysche Integralformel* (Remmert 1984):

Sei γ ein nullhomologer Weg in einem Bereich D . Dann gilt für alle auf D holomorphen Funktionen f

$$\text{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma dz' \frac{f(z')}{z' - z} \quad (1.26)$$

$\text{ind}_\gamma(z)$ ist die Windungszahl des Weges γ um den Punkt z .

1.3.1 Funktionen, die im Unendlichen verschwinden

Im folgenden sei γ immer so gewählt, daß die Windungszahl eins wird. Die Cauchy-sche Integralformel soll zunächst auf einen Spezialfall angewendet werden:

1. f ist holomorph auf der oberen Halbebene \mathcal{D}^+
2. $z \in \mathcal{D}^+$
3. $f(z') \rightarrow 0$ für $|z'| \rightarrow \infty$
4. Der Weg γ soll auf der reellen Achse von $-\infty$ nach $+\infty$ gehen und im Unendlichen auf der oberen Halbebene geschlossen werden (siehe Abb. 1.2).

Abbildung 1.2: Der Integrationsweg γ

Die Forderung 1 wird auch in allen anderen Abschnitten beibehalten. Es wird sich zeigen, daß wegen des *Schwarzschen Spiegelungsprinzips* diese Forderung keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Die Forderung 3 ist die eigentliche Einschränkung, die zusammen mit dem gewählten Weg (4) die Integration in der oberen Halbebene zum Verschwinden bringt, so daß nur noch die Integration auf der reellen Achse verbleibt. Es wird zu diskutieren sein, wie man die so gewonnene Dispersionsrelation auf eine größere Klasse von Funktionen verallgemeinern kann. Die Cauchysche Integralformel lautet für diesen Spezialfall:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{x' - z} \quad z \in \mathcal{D}^+, x' \in \mathbf{R} \quad (1.27)$$

Die gewünschte Beziehung erhält man, indem man den Grenzfall $\Im z \rightarrow 0$ betrachtet. Anders gesagt bedeutet dies, daß man die Funktion f auf dem Rand des Weges γ auswertet. Für $z = x + i\varepsilon$ folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x + i\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{x' - x - i\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Die *Dirac-Identität* trennt die Singularität bei $x' = x$ in ein Hauptwertintegral ($\mathcal{P} f \dots$) und den Imaginärteil bei der Singularität auf.

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{x' - x - i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x' - x) \quad (1.29)$$

Damit folgt für Gl. 1.28

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{x' - x} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \delta(x' - x)}_{=f(x)} \\ \iff f(x) &= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{x' - x} \\ \implies &\boxed{\Re f(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\Im f(x')}{x' - x}} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Diese letzte Beziehung ist die einfachste Form einer Dispersionsrelation.

1.3.2 Dispersionsrelation mit Subtraktionen

In diesem Abschnitt soll die Forderung 3 auf S. 23 durch die Forderung

$$f(z) \longrightarrow \sum_{j=0}^n a_j z^j \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

ersetzt werden. In diesem Fall kann man die Integration nicht wie bisher auf die reelle Achse beschränken. Um dies trotzdem zu tun, wird die Cauchysche Integralformel auf die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (1.32)$$

angewendet. z_0 ist der sogenannte Subtraktionspunkt und bleibt fest gewählt mit $\Im z_0 > 0$. Für die Funktion $g(z)$ ist die Forderung 3 auf S. 23 wieder erfüllt, so daß folgt:

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - z)(x' - z_0)^{n+1}} \quad (1.33)$$

Wie im vorigen Abschnitt wird der Grenzfall betrachtet, in dem z_0 gegen die reelle Achse geht. Dazu wird $z_0 = x_0 + i\varepsilon$ ersetzt. Weiterhin werden die verallgemeinerte Dirac-Identität

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(x' - x - i\varepsilon)^{n+1}} = \mathcal{P} \frac{1}{(x' - x)^{n+1}} - \frac{i\pi}{n!} (-1)^n \delta^{(n)}(x' - x) \quad (1.34)$$

(das eingeklammerte, hochgestellte n meint die n -te Ableitung), sowie die Definition der Ableitung einer Distribution

$$\langle \phi, \delta' \rangle = - \langle \phi', \delta \rangle \quad (1.35)$$

benutzt. Damit kann Gl. 1.33 wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z - x_0)^{n+1}} &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - z)(x' - x_0 - i\varepsilon)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - z)(x' - x_0)^{n+1}} \\ &\quad - \frac{(-1)^n}{2n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{x' - z} \delta^{(n)}(x' - x_0) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - z)(x' - x_0)^{n+1}} \\ &\quad - \frac{(-1)^n}{2n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \left(\frac{f(x')}{x' - z} \right)^{(n)} (-1)^n \delta(x' - x_0) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - z)(x' - x_0)^{n+1}} - \frac{1}{2n!} \left(\frac{f(x')}{x' - z} \right)^{(n)} \Big|_{x'=x_0} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Ganz genauso macht man den Übergang von z zur reellen Achse (ersetze $z = x + i\varepsilon$).

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x - i\varepsilon)(x' - x_0)^{n+1}} \\ &\quad - \frac{1}{2n!} \left(\frac{f(x')}{x' - x} \right)^{(n)} \Big|_{x'=x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x)(x' - x_0)^{n+1}} - \frac{1}{2n!} \left(\frac{f(x')}{x' - x} \right)^{(n)} \Big|_{x'=x_0} \\
&\quad + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x_0)^{n+1}} \delta(x' - x)}_{= \frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}}} \\
&= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x)(x' - x_0)^{n+1}} - \frac{1}{n!} \left(\frac{f(x')}{x' - x} \right)^{(n)} \Big|_{x'=x_0}
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Es wäre wünschenswert, die *Subtraktionsterme* in eine andere Form zu bringen. Dazu wird die im Anhang bewiesene Identität A.7 benutzt. Gl. 1.37 bekommt damit die Form

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x)(x' - x_0)^{n+1}} \\
&\quad - \frac{1}{n!} \frac{1}{(x' - x)^{n+1}} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j)}(x') (x' - x)^j \Big|_{x'=x_0} \\
&= \frac{1}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x)(x' - x_0)^{n+1}} \\
&\quad - \frac{1}{(x_0 - x)^{n+1}} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x_0 - x)^j \\
\Rightarrow \quad &\boxed{f(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{i\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{f(x')}{(x' - x)(x' - x_0)^{n+1}} + \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0) (x - x_0)^j} \tag{1.38}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist die *Dispersionsrelation mit $n + 1$ Subtraktionen*. Sie ist für Funktionen gültig, die sich im Unendlichen nicht schlechter als ein Polynom n -ten Grades verhalten.

1.3.3 Dispersionsrelationen für Funktionen mit Polen auf der reellen Achse

Wie wirken sich Pole der Funktion f auf der positiven reellen Halbachse auf die Dispersionsrelationen aus. Diese Situation ist physikalisch gesehen die entscheidende,

denn die Resonanzen spiegeln sich als Pole auf der reellen Achse der Polarisationsfunktion wider. Dabei liegen in der Physik die Pole alle oberhalb eines bestimmten Wertes a , der Masse des leichtesten Zustandes im Spektrum. Sei f also eine Funktion mit endlich vielen Polen auf der reellen Achse oberhalb eines Wertes a . Man muß sich über die nötigen Voraussetzungen, die an f gestellt werden müssen, neu Gedanken machen. Zunächst erscheint es einsichtig, daß der Integrationsweg γ neu gewählt werden muß, damit die Pole einbezogen werden. Dazu wird über die gesamte Gaußsche Zahlenebene im Unendlichen integriert und auf der positiven, reellen Halbachse ein Schnitt gemacht. Dies ist in Abb. 1.3 veranschaulicht.

Abbildung 1.3: Integrationsweg mit Polen

Man erkennt sofort ein Folgeproblem: die Funktion f mußte nach den bisherigen Voraussetzungen (siehe S. 23) nur auf der oberen Halbebene holomorph sein. Mit dem neuen Integrationsweg jedoch benötigt man eine auf der gesamten Ebene holomorphe Funktion. Das *Schwarzsche Spiegelungsprinzip* weist den Weg, um die zusätzlichen Voraussetzungen zu minimieren:

Sei G ein Gebiet symmetrisch zur reellen Achse. Sei f auf $G \cap \mathcal{D}^+$ holomorph, auf $G \cap \mathbf{R}$ reell und auf $G \cap \{z = x + iy \mid y \geq 0\}$ stetig (siehe Abb. 1.4). Dann ist f auf

ganz G holomorph fortsetzbar durch die Funktion

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in G \cap (\mathcal{D}^+ \cup \mathbf{R}) \\ f^*(z^*) & \text{für } z \in G \cap \mathcal{D}^- \end{cases} \quad (1.39)$$

Man sieht daher, daß nur zwei harmlose zusätzliche Forderungen notwendig sind

Abbildung 1.4: Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip

(für physikalisch sinnvolle Funktionen gilt die Stetigkeit ebenso selbstverständlich, wie auch auf der reellen Achse nur reelle Werte angenommen werden), um eine Funktion, die in der oberen Halbebene holomorph ist, auf die gesamte Ebene holomorph fortzusetzen. Die Cauchysche Integralformel kann jetzt wieder auf die Funktion f angewendet werden. Die einzigen nichtholomorphen Stellen werden durch den gewählten Integrationsweg γ umgangen. Wenn die Funktion im Unendlichen verschwindet (Subtraktionen werden danach analog zum vorigen Abschnitt eingeführt), bleibt nur die Integration ober- und unterhalb der reellen Achse übrig. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^\infty dx' \frac{f(x' + i\varepsilon)}{x' - z} + \frac{1}{2i\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\infty^a dx' \frac{f(x' - i\varepsilon)}{x' - z} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_a^\infty dx' \frac{\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} (f(x' + i\varepsilon) - f(x' - i\varepsilon))}{x' - z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_a^\infty dx' \frac{\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} (f(x' + i\varepsilon) - f^*(x' + i\varepsilon))}{x' - z} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^\infty dx' \frac{\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Im f(x' + i\varepsilon)}{x' - z} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_a^\infty dx' \frac{\Im f(x')}{x' - z} \tag{1.40}
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Form der holomorphen Fortsetzung (Gl. 1.39) benutzt. Wie im vorigen Abschnitt kann man jetzt $\Im z \rightarrow 0$ gehen lassen und für Funktionen, die sich im Unendlichen wie Polynome endlichen Grades verhalten, Subtraktionen einführen. Der Weg ist völlig identisch und soll nicht wiederholt werden. Das Ergebnis ist

$$\boxed{f(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{\pi} \int_a^\infty dx' \frac{\Im f(x')}{(x' - x)(x' - x_0)^{n+1}} + \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j} \tag{1.41}$$

Im folgenden ist noch einmal aufgelistet, welche Voraussetzungen an die Funktion f zu stellen sind, um die Gültigkeit der obigen Dispersionsrelation zu gewährleisten.

1. f ist holomorph auf der oberen Halbebene \mathcal{D}^+
2. f hat endlich viele Polstellen in $\{x \in \mathbf{R} | x > a\}$
3. f ist reell auf der reellen Achse
4. $f \rightarrow \sum_{j=0}^n a_j z^j$ für $|z| \rightarrow \infty$
5. f ist stetig auf $\mathcal{D}^+ \cup \mathbf{R}$

Da die Dispersionsrelation im Rahmen der QCD-Summenregeln auf die Polarisationsfunktion angewendet werden soll, ist es erwähnenswert, daß die Polarisationsfunktion alle oben aufgeführten Eigenschaften besitzt. Dies kann mit Hilfe von allgemeinen Prinzipien wie *Unitarität*, *Kausalität* und *Lorentzinvarianz* gezeigt werden (Bogoliubov, Shirkov 1959).

1.4 Von der asymptotischen Freiheit zu den Resonanzen

In diesem Kapitel soll die Verbindung zwischen dem Abschnitt über die OPE und dem Abschnitt über die Dispersionsrelationen geschlagen werden. Auf der Ebene der Elementarteilchen — den Quarks — betrachtet man die Fouriertransformierte der Polarisationsfunktion für beliebige Ströme (Gl. 1.7)

$$\Pi(q^2) \sim \int d^4x \langle 0 | T \{ j^\mu(x) j_\mu(0) \} | 0 \rangle e^{iqx} \quad (1.42)$$

Mit Hilfe der OPE (Gl. 1.16) kann man das Produkt der Ströme entwickeln und dabei nichtstörungstheoretische Korrekturen in Form von Vakuumkondensaten berücksichtigen

$$\Pi(q^2) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \langle 0 | B_j(0) | 0 \rangle \int d^4x E_j(x) e^{iqx} \quad (1.43)$$

Die $\frac{1}{x}$ -Singularitäten der Koeffizientenfunktionen E_j äußern sich nach der Fouriertransformation in Ultraviolettdivergenzen für $q^2 \rightarrow -\infty$. Die Funktionen E_j können explizit berechnet werden, indem man die zu dem Operator B_j gehörigen Feynmangraphen regularisiert. Man erhält auf diese Weise einen geschlossenen Ausdruck für Π :

$$\Pi = \Pi(q^2, \langle \bar{q}q \rangle, \langle GG \rangle, \dots) \quad (1.44)$$

Die diversen Vakuumkondensate können dabei als Parameter der Summenregeln angesehen werden. Sie werden einmal an bekannte Resonanzmassen angepaßt und dann beibehalten.

Der Bereich der hadronischen Resonanzen jedoch liegt genau auf der anderen Seite der q^2 -Achse, nämlich bei $m_{Res}^2 = q^2 > 0$. Damit stellt sich die Frage, wie man mit dem bisherigen Formalismus auf der Quarkseite mit $q^2 < 0$ Informationen über die hadronische Seite mit $q^2 > 0$ gewinnen kann. Dieser Zusammenhang wird mit Hilfe der Dispersionsrelationen (siehe Gl. 1.41) mit einer Subtraktion hergestellt.

$$\boxed{\Pi_{OPE}(q^2) = \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{Had}(s)}{s(s - q^2)} + C} \quad (1.45)$$

C ist die Subtraktionskonstante, Π_{OPE} ist die Polarisationsfunktion aus Gl. 1.43, und Π_{Had} ist die Polarisationsfunktion der hadronischen Seite. Für die letzte kann man einen physikalisch begründeten Ansatz wagen. Immer wenn q^2 eine Resonanzmasse trifft, hat die Polarisationsfunktion eine Singularität, die sich als Beitrag zu ihrem Imaginärteil bemerkbar macht. Oberhalb einer gewissen Schwelle s_0 wird das Spektrum kontinuierlich sein, was in diesem Bereich zu einem konstanten Beitrag führt. Der Ansatz lautet demnach

$$\Im \Pi_{Had}(s) = \sum_i a_i \delta(s - m_i^2) + b \Theta(s - s_0) \quad (1.46)$$

Setzt man diesen Ansatz in Gl. 1.45 ein, folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_{OPE}(q^2) &= \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \sum_i a_i \frac{\delta(s - m_i^2)}{s(s - q^2)} + b \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Theta(s - s_0)}{s(s - q^2)} + C \\ &= \frac{q^2}{\pi} \sum_i a_i \frac{1}{m_i^2(m_i^2 - q^2)} + b \frac{q^2}{\pi} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{s(s - q^2)} + C \end{aligned} \quad (1.47)$$

Diese Darstellung bringt den Zusammenhang zwischen den hadronischen Massen m_i und der auf der Quarkenebene ermittelten Polarisationsfunktion 1.44 deutlich zum Vorschein. Man benötigt jetzt noch einen Formalismus, der die niedrigste Resonanz isoliert.

1.4.1 Die Isolation der niedrigsten Resonanz

Es gibt zwei allgemein anerkannte Formalismen für die Isolation der niedrigsten Resonanz. Der eine nimmt die *Boreltransformation* auf beiden Seiten von Gl. 1.45 und gewichtet damit die Resonanzen mit e^{-st} , so daß nur die niedrigen Resonanzen einen wesentlichen Beitrag liefern (Shifman et al. 1979). In dem anderen Formalismus definiert man sogenannte *Momente* M_l , die im Wesentlichen die l -te Ableitung der Gl. 1.47 sind. Das Verhältnis von zwei benachbarten Momenten konvergiert gegen die Masse der niedrigsten Resonanz (Reinders et al. 1985). In diesem Abschnitt sollen beide Verfahren erläutert werden.

Die Momente

Die Momente sind durch

$$M_l(Q_0^2) := \frac{1}{l!} \left(-\frac{d}{dQ^2} \right)^l \Pi(Q^2) \Big|_{Q^2=Q_0^2} \quad \text{mit} \quad q^2 = -Q^2 \quad (1.48)$$

definiert. Q_0^2 ist ein frei wählbarer Auswertungspunkt, der als Parameter angesehen werden kann. Die Polarisationsfunktion kann durch die Dispersionsrelation 1.45 ersetzt werden. Dies ist gleichbedeutend mit der analytischen Fortsetzung von Π in den hadronischen Bereich. Es folgt

$$\begin{aligned} M_l(Q_0^2) &= \frac{1}{\pi l!} \int_0^\infty ds \Im \Pi_{Had}(s) \underbrace{\left(-\frac{d}{dQ^2} \right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)}}_{=\frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}}} \Big|_{Q^2=Q_0^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{Had}(s)}{(s+Q_0^2)^{l+1}} \Big|_{Q^2=Q_0^2} \quad , \end{aligned} \quad (1.49)$$

dabei wurde Gl. A.1 benutzt. Mit dem besprochenen Ansatz 1.46 für die hadronische Polarisationsfunktion folgt

$$\begin{aligned} M_l(Q_0^2) &= \sum_i \frac{a_i}{\pi} \frac{1}{(m_i^2 + Q_0^2)^{l+1}} + \frac{b}{\pi} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{(s + Q_0^2)^{l+1}} \\ &= \frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2 + Q_0^2)^{l+1}} + \sum_{i \neq R} \frac{a_i}{\pi} \frac{1}{(m_i^2 + Q_0^2)^{l+1}} + \frac{b}{\pi} \int_{s_0}^\infty \frac{ds}{(s + Q_0^2)^{l+1}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

a_R ist der zu der niedrigsten Masse M_R gehörige Koeffizient in der ersten Summe. In Gl. A.6 wird bewiesen, daß für das Verhältnis von benachbarten Momenten gilt:

$$\boxed{\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{M_l(Q_0^2)}{M_{l-1}(Q_0^2)} = \frac{1}{m_R^2 + Q_0^2}} \quad (1.51)$$

Hier wird deutlich, daß sich die hadronische Seite von Gl. 1.45 innerhalb dieses Formalismus auf das Inverse der gesuchten Masse der niedrigsten Resonanz reduziert, während die linke Seite durch sukzessive Differentiation aus der linken Seite von Gl. 1.45 berechnet werden kann.

Innerhalb des dargestellten Verfahrens wurden zwei Parameter eingeführt, die Zahl der Differentiationen l und der euklidische Auswertungspunkt Q_0^2 . Es soll kurz

diskutiert werden, wie sie zu wählen sind und welchen Einfluß sie haben. Zunächst sieht man wegen Gl. 1.51 sofort ein, daß eine große Zahl von Ableitungen die niedrigste Resonanz besser isoliert. Gleichzeitig geht dieser Prozeß umso schneller, je kleiner Q_0^2 gewählt wird, denn dann werden die Terme $\left(\frac{m_B^2 + Q_0^2}{m_i^2 + Q_0^2}\right)^l$, die für die Geschwindigkeit der Konvergenz maßgeblich sind (siehe Gl. A.5), bereits für ein kleines l sehr klein. Außerdem darf der Auswertungspunkt auch nicht groß gewählt werden, da die Polarisationsfunktion für große Q^2 vollständig durch die asymptotische Freiheit bestimmt wird und deshalb dort keine Information über die Resonanzen zu erwarten ist. Alles scheint dafür zu sprechen, Q_0^2 sehr klein und l genügend groß zu wählen. Auf der anderen Seite darf der Auswertungspunkt nicht so gewählt werden, daß er inmitten der hadronischen Resonanzen liegt, denn dann macht der Ansatz keinen Sinn mehr, sich dem Problem aus dem Bereich der asymptotischen Freiheit heraus zu nähern, indem man nichtstörungstheoretische Korrekturen hinzufügt. Diese Korrekturen würden dann die Berechnungen aus dem asymptotischen Bereich vollständig dominieren, und der Begriff Korrektur verlöre seinen Sinn. Damit der Ansatz sinnvoll bleibt, muß man daher Q_0^2 oberhalb des Resonanzbereiches wählen. Diese Forderung steht im Konflikt zu den übrigen, und es wird notwendig sein, die Zahl der Ableitungen zu erhöhen, um ihr nachkommen zu können. Der Balanceakt der QCD-Summenregeln wird gerade darin bestehen, Q_0^2 so groß zu wählen, daß der Begriff Korrektur seinen Sinn behält, aber gleichzeitig so klein zu wählen, daß die notwendige Zahl der Differentiationen nicht unvernünftig groß wird. Genau in diesem Dilemma sucht die Boreltransformation einen Kompromiß.

Die Boreltransformation

Eine alternative Möglichkeit, die niedrigste Resonanz zu isolieren, gelingt in einer Verbindung von Dispersionsrelation und Boreltransformation. Diese ist in Kapitel A.4 definiert. Man wendet die Boreltransformation (von Q^2 nach t) auf beiden Seiten der Dispersionsrelation 1.45 an. Für die rechte Seite (RS) ergibt sich nach einer Wick-Rotation und mit den Formeln A.15 und A.19

$$RS = \mathcal{B} \left\{ \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{Had}(s)}{s(s - q^2)} + C \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{B} \left\{ -\frac{Q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{Had}(s)}{s(s+Q^2)} + C \right\} \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{Had}(s)}{s} \mathcal{B} \frac{Q^2}{s+Q^2} + \mathcal{B}C \\
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{Had}(s)}{s} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\mathcal{B} \frac{1}{s+Q^2}}_{=e^{-st}} + C\delta(t) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \Im \Pi_{Had}(s) e^{-st} + C\delta(t) \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Soweit wurde die rechte Seite ganz allgemein umgeformt. Benutzt man nun noch den speziellen Ansatz 1.46 für den Imaginärteil der Polarisationsfunktion, folgt

$$\begin{aligned}
RS &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \sum_i a_i \delta(s - m_i^2) e^{-st} + \frac{b}{\pi} \int_{s_0}^\infty ds e^{-st} + C\delta(t) \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi} \sum_i a_i e^{-m_i^2 t}}_{\text{Resonanzen}} - \underbrace{\frac{b}{\pi} \frac{1}{t} e^{-s_0 t}}_{\text{Kontinuum}} + C\delta(t) \tag{1.53}
\end{aligned}$$

Die gleiche Umformung ist mit der linken Seite (LS) durchzuführen. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die benutzte Dispersionsrelation auch für Polarisationsfunktion Π_{OPE} gültig ist. Die übrigen Umformungen sind mit denen von der rechten Seite (Gl. 1.52) identisch:

$$\begin{aligned}
LS &= \mathcal{B} \Pi_{OPE}(q^2) = \mathcal{B} \left\{ \frac{q^2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\Im \Pi_{OPE}(s)}{s(s-q^2)} + C \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} + C\delta(t) \tag{1.54}
\end{aligned}$$

Man erkennt hier genau die Wirkung der Boreltransformation: Sie zieht den Imaginärteil einer Funktion (hier der Polarisationsfunktion) heraus, der ihre Polstruktur und damit auch die Resonanzen enthält, und gewichtet ihn mit e^{-st} , so daß die Resonanzen mit niedriger Masse hervorgehoben werden. Mathematisch formuliert bedeutet dies: Für eine Funktion, die die Voraussetzungen für eine Dispersionsrelation mit einer Subtraktion erfüllt (siehe S. 23 und Gl. 1.31), wirkt die Boreltransformation — bis auf eine Distribution bei $t = 0$ — gerade wie die Laplacetransformation des Imaginärteils (siehe Gl. A.21).

Die Boreltransformation der Gl. 1.45 erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen 1.53 und 1.54. Dabei fällt die Distribution δ heraus, π kürzt sich weg, und

es verbleibt

$$\int_0^\infty ds \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} = \sum_i a_i e^{-m_i^2 t} - \frac{b}{t} e^{-s_0 t} \quad (1.55)$$

Diese *Summenregel* liefert den gewünschten Zusammenhang zwischen den Resonanzmassen und dem aus der OPE gewonnenen Imaginärteil der Polarisationsfunktion. Die höheren Resonanzen sind gegenüber der niedrigsten exponentiell unterdrückt. Wie bei dem Verfahren der Momente ist die Unterdrückung umso besser, je weiter die niedrigste Resonanzmasse von den übrigen entfernt ist.

Gl. 1.55 enthält 3 Parameter, die Schwelle zum Kontinuum s_0 , den frei wählbaren Auswertungspunkt t und das Gewicht a_R der untersten Resonanz. Die niedrigste Resonanzmasse sollte für eine *gute* Summenregel nicht von t abhängen, wobei der Grad der Abhängigkeit nicht unabhängig von der Wahl von s_0 zu sehen ist. Eine sinnvolle Wahl von s_0 sollte in der QCD im Bereich $1.5 GeV$ liegen, wobei die einmal getroffene Wahl für alle weiteren Summenregeln bindend ist. Auch a_R kann als Fitparameter angesehen werden.

Um den etwas störenden Kontinuumsterm zu umgehen, kann man von vorneherein die Integration auf das Intervall $(0, s_0)$ beschränken. Man nennt diesen Schritt die *Subtraktion des Kontinuums*. Die Herleitung ist für diese Nuance absolut identisch, nur das der letzte Term fehlt:

$$\boxed{\int_0^{s_0} ds \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} = \sum_i a_i e^{-m_i^2 t}} \quad (1.56)$$

Der Preis, den man für diese Vereinfachung bezahlt, ist ein in der Regel involvierteres Integral auf der linken Seite.

Eine weitere Abwandlung des Verfahrens führt auf eine direkte Auflösung der Summenregel nach der Masse des hadronischen Zustands. Dazu geht man von der Dispersionsrelation 1.45 (unter Subtraktion des Kontinuums) aus, multipliziert sie auf beiden Seiten mit q^2 und macht erst dann eine Boreltransformation. Die hadronische Seite kann genau wie in Gl. 1.52 umgeformt werden. Man hat lediglich q^2 durch q^4 zu ersetzen und die Differentiation nach t durch eine zweite zu ergänzen.

$$RS = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds s \Im \Pi_{Had}(s) e^{-st} + c \delta^{(1)}(t) \quad (1.57)$$

Der Ansatz 1.46 wird für die Polarisationsfunktion eingesetzt:

$$\begin{aligned} RS &= \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds s \sum_i a_i \delta(s - m_i^2) e^{-st} + c\delta^{(1)}(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_i a_i m_i^2 e^{-m_i^2 t} + c\delta^{(1)}(t) \end{aligned} \quad (1.58)$$

Der Kontinuumsterm trägt nicht bei, da das Integrationsintervall und der Bereich des Kontinuums disjunkt sind. Auf der Ebene der Elementarteilchen gilt ganz entsprechend:

$$LS = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} ds s \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} + C \delta^{(1)}(t) \quad , \quad (1.59)$$

so daß insgesamt die zu Gl. 1.56 entsprechende Beziehung folgt:

$$\int_0^{s_0} ds s \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} = \sum_i a_i m_i^2 e^{-m_i^2 t} \quad (1.60)$$

Das Verhältnis der beiden Gleichungen 1.60 und 1.56 liefert auf der hadronischen Seite näherungsweise das Quadrat der Masse des Bindungszustands.

$$\boxed{\frac{\int_0^{s_0} ds s \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st}}{\int_0^{s_0} ds \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st}} = \frac{\sum_i a_i m_i^2 e^{-m_i^2 t}}{\sum_i a_i e^{-m_i^2 t}} \approx m_1^2} \quad (1.61)$$

Die Näherung ist umso besser, je weiter die höheren ($i > 2$) Resonanzen von der untersten entfernt sind. Im Prinzip hat man bei dieser Manipulation nichts anderes gemacht, als die Idee, die auf Gl. 1.51 führte, von den Momenten auf die Boreltransformation zu übertragen.

Es liegt relativ nahe, einen Zusammenhang zwischen dem Verfahren der Momente und der Boreltransformation zu vermuten. Dieser existiert tatsächlich:

Wenn man Q_0^2 aus dem letzten Abschnitt immer größer werden läßt, erkaufte man sich den Vorteil einer gut konvergenten und sinnvollen OPE mit der Notwendigkeit, immer mehr Differentiationen durchführen zu müssen. Wie sieht es jedoch aus, wenn man folgenden Grenzprozeß betrachtet:

$$Q_0^2 \rightarrow \infty, \quad l \rightarrow \infty, \quad \text{mit} \quad \frac{l}{Q_0^2} = \text{const} \equiv t \quad (1.62)$$

Ohne Beweis (Shifman et al. 1979) sei hier angegeben, daß dieser Grenzprozeß gegen die Boreltransformation konvergiert und die festgehaltene Konstante gerade der Parameter t der Boreltransformation ist, d. h. die Boreltransformation entspricht unendlich vielen Differentiationen mit einer Auswertung im Unendlichen.

1.4.2 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Verfahren der QCD–Summenregeln zur Berechnung hadronischer Resonanzmassen erläutert. Es wurde gezeigt, daß die OPE eine gute Möglichkeit ist, um das hadronische Spektrum von der Seite der asymptotischen Freiheit aus zu analysieren, indem man nichtstörungstheoretische Korrekturen in Form von Vakuumkondensaten berücksichtigt. Eine Dispersionsrelation bringt den Zusammenhang zu den hadronischen Resonanzmassen. Weiter wurden zwei Verfahren besprochen, um die niedrigste Resonanz des Spektrums zu isolieren: die Momente und die Boreltransformation.

Kapitel 2

Dimensionale Regularisierung

2.1 Motivation und Definition des Verfahrens

2.1.1 Motivation

Bei der Berechnung der Koeffizienten der Operatoren in der OPE treten häufig divergente Integrale auf. Beispielsweise ist der perturbative Polarisationsgraph eines 2-Quark-Zustands ultraviolett divergent, wie man leicht durch Abzählen der

Abbildung 2.1: Polarisationsgraph für 2 Fermionen

Potenzen von p ablesen kann.

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp \left\{ \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p - q)^2 - m^2} \gamma^\nu \right\} \quad (2.1)$$

Um diesem Graphen einen physikalisch sinnvollen Inhalt zuzuordnen, benötigt man eine Vorschrift, wie man diese Divergenzen von den physikalisch sinnvollen Teilen der Amplitude trennt. Die isolierten Unendlichkeiten werden dann in die physikalischen Parameter (Masse, Ladung oder die Wellenfunktion) der betrachteten Theorie *hineindefiniert*. Die Natur zeigt uns nur noch die auf diese Weise korrigierten Parameter. Der beschriebene Vorgang wird *Renormierung* genannt (Collins 1985).

Voraussetzung für die Renormierung der Theorie ist die Existenz einer Vorschrift, die es erlaubt, die Trennung von Divergenzen und endlichen Anteilen einer Amplitude vorzunehmen. Dabei sollte das Verfahren eindeutig sein, damit der endliche Teil durch die Wahl eines anderen Verfahrens nicht völlig anders ausfällt. Die klassische Pauli–Villars Regularisierung (Pauli, Villars 1949) ist auf die QED erfolgreich angewendet worden. Es wird ein Parameter eingeführt, der die Impulse, die in Loops umlaufen, nach oben begrenzt, und dadurch das Auftreten von Ultraviolettdivergenzen vermieden. Die Pauli–Villars Regularisierung ist nur auf abelsche Eichtheorien anwendbar und fällt deshalb für die nicht–abelsche QCD aus. Anfang der siebziger Jahre haben 't Hooft und Veltman ('t Hooft, Veltman 1972) die dimensionale Regularisierung eingeführt, die nicht nur auf nicht–abelsche Eichtheorien wie der QCD anwendbar ist, sondern auch noch den Vorteil hat, die Eichinvarianz der regularisierten Objekte zu erhalten. Dieses Verfahren soll in diesem Kapitel vorgestellt werden.

2.1.2 Idee

Im folgenden werden nur noch euklidische Impulse benutzt. Die Übertragung auf Minkowski–Impulse kann leicht durch eine Wick–Rotation vorgenommen werden (siehe Gl. B.1). Betrachtet man das Feynmanintegral (der Index 4 deutet die Di-

mension des Integrals an)

$$I_4(q) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p - q)^2 + m^2} \quad (2.2)$$

stellt man fest, daß es für $p^2 \rightarrow \infty$ divergiert. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn man das gleiche Integral in 3 Dimensionen ausrechnet. Die Divergenz eines Integrals hängt demnach davon ab, in welcher Dimension es berechnet wird.

Genau diese Tatsache wird in der dimensional Regularisierung ausgenutzt. Das in 4 Dimensionen divergente Integral wird in einer Dimension d berechnet, bei der es konvergent ist. Das gewonnene Ergebnis ist allerdings im interessanten Bereich bei $d = 4$ nicht gültig, so daß man die gewünschte Information nur durch analytische Fortsetzung des Ergebnisses in den Bereich um $d = 4$ erhalten kann. Es werden die Existenz und die Eindeutigkeit dieser Fortsetzung zu diskutieren sein. Das divergente Integral ist auf diese Weise zu einem geschlossenen Ausdruck geworden, der von dem Dimensionsparameter d abhängt. Für $d = 4$ muß dieser Ausdruck nach wie vor divergent sein. Die Divergenz wird jedoch auf natürliche Weise isoliert, wenn man die Laurentreihe des Ausdrucks aufschreibt. Diese ist in der Praxis meistens bekannt, da nach der beschriebenen Manipulation nur noch eine Kombination von Γ -Funktionen übrig bleibt, deren Laurentreihe durch die Reihendarstellung der Γ -Funktion (siehe Kap. B.3) gegeben ist.

2.1.3 Integrale über Räume mit kontinuierlicher Dimension

Axiomatik

Wie oben erläutert, baut die dimensionale Regularisierung auf der Fortsetzung 4-dimensionaler Feynmanamplituden auf eine kontinuierliche Dimension $d \in \mathbf{C}$ auf. Es ist deshalb zunächst notwendig zu definieren, was mit einem 3.29-dimensionalen Integral gemeint ist. Die Axiome, die dafür verwendet werden, müssen so gestaltet sein, daß man in den Grenzfällen natürlicher Dimension die bekannten Eigenschaften der Integrale wiederfindet. Dazu wird das folgende System von Axiomen

verwendet (Zinn-Justin 1990):

$$\begin{aligned} \int d^d p \{a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p)\} &= a_1 \int d^d p f_1(p) + a_2 \int d^d p f_2(p), \quad a_{1,2} \in \mathbf{R} \\ &\text{(Linearität)} \\ \int d^d p f(\lambda p) &= \lambda^{-d} \int d^d p f(p), \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{(Skalenverhalten)} \\ \int d^d p f(p+k) &= \int d^d p f(p) \quad \text{(Translationsinvarianz)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Linearität und die Translationsinvarianz sind für Integrale über euklidische Räume natürlicher Dimension richtig und werden einfach übernommen.

Die eigentlich interessante Forderung ist das Skalenverhalten, durch die eine radikale Aussonderung der nicht-logarithmischen Divergenzen vorgenommen wird. Um das zu verstehen, betrachte man eine Funktion $f(p) = (p^2)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbf{R}$. Aus der Linearität und dem Skalenverhalten folgt dann:

$$\begin{aligned} \int d^d p ((\lambda p)^2)^\alpha &= \lambda^{2\alpha} \int d^d p (p^2)^\alpha \\ &= \lambda^{-d} \int d^d p (p^2)^\alpha \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbf{R} \\ \implies \int d^d p (p^2)^\alpha &= 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Die radikale Elimination aller nicht-logarithmischen Divergenzen aus den Feynmanamplituden ist natürlich nur dann möglich, wenn man weiß, daß in der betrachteten Theorie nur solche Divergenzen auftreten und alle beispielsweise quadratischen Divergenzen — wenn sie denn auftreten — sich gegenseitig wegheben. Für die QCD ist dies sichergestellt (siehe z. B. Muta 1987), so daß die dimensionale Regularisierung hier Anwendung finden darf.

Eindeutigkeit

Damit die Definition des d -dimensionalen Integrals sinnvoll genutzt werden kann, benötigt man die Gewißheit über die Eindeutigkeit der Definition. Um die Normierung des Integrals festzulegen, ist es sinnvoll, ein in natürlicher Dimension bekanntes Integral auf d -Dimensionen zu erweitern (Collins 1985):

$$\int d^d p e^{-p^2} = \pi^{d/2} \quad (2.5)$$

Diese Normierung definiert die Integrale für alle Funktionen f eindeutig, da man jede Funktion in die Basis

$$b_{\lambda,k}(p) = e^{-\lambda^2(p+k)^2} \quad (2.6)$$

eindeutig entwickeln kann. Das Integral über die Basisfunktionen ist jedoch durch die Axiome 2.3 sowie die Normierung (Gl. 2.5) eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned} \int d^d p \, b_{\lambda,k}(p) &= \int d^d p \, e^{-\lambda^2(p+k)^2} \\ &= \int d^d p \, e^{-\lambda^2 p^2} && \text{(Linearität)} \\ &= \lambda^{-d} \int d^d p \, e^{-p^2} && \text{(Skalenverhalten)} \\ &= \lambda^{-d} \pi^{d/2} && \text{(Normierung)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Skalare Integranden

Um in der Praxis mit den verallgemeinerten Integralen arbeiten zu können, wäre es wünschenswert, die d -dimensionalen Integrale durch Integrale natürlicher Dimension ausdrücken zu können. Dies gelingt sehr leicht, wenn man sich auf skalare Integranden $f(p^2)$ beschränkt. Eine Koordinatentransformation auf d -dimensionale Kugelkoordinaten führt dann auf ein $(d-1)$ -dimensionales Integral über den winkelunabhängigen Integranden, dessen Wert eindeutig durch die Normierung (Gl. 2.5) festgelegt ist, und auf ein eindimensionales Integral über eine skalare Funktion, das mit herkömmlichen Mitteln ausgewertet werden kann.

$$\boxed{\begin{aligned} \int d^d p \, f(p^2) &= \int d^d \sigma \int_0^\infty dp \, p^{d-1} f(p^2) \\ &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp \, p^{d-1} f(p^2) \end{aligned}} \quad (2.8)$$

Die Integration über die d -dimensionale Hyperfläche $d^d \sigma$ kann auf die Normierung 2.5 zurückgeführt werden, wenn man für die Funktion $f(p^2) = e^{-p^2}$ ansetzt und Gl. B.9 berücksichtigt:

$$\int d^d p \, e^{-p^2} = \pi^{d/2}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^d \sigma \int_0^\infty dp p^{d-1} e^{-p^2} \\
&= \frac{1}{2} \int d^d \sigma \int_0^\infty dp^2 (p^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-p^2} \\
&= \frac{1}{2} \Gamma(d/2) \int d^d \sigma \\
\Rightarrow \int d^d \sigma &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Gleichzeitig hat man durch das Zurückführen des Integrals über die Hyperfläche auf die festgelegte Normierung dafür gesorgt, daß die Zerlegung des d -dimensionalen Integrals mit den bisherigen Forderungen konsistent ist. Es ist in Gl. 2.8 gelungen, das d -dimensionale Integral über eine skalare Funktion durch ein eindimensionales Integral auszudrücken.

Unkontrahierte Integranden

Wie jedoch ist zu verfahren, wenn der Integrand nicht skalar ist? In diesem Zusammenhang ist erst einmal zu klären, welche Bedeutung der metrische Tensor oder die γ -Matrizen in einem Raum mit d -Dimensionen haben. Man muß folglich die Dirac-Algebra (Bjorken, Drell 1990)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{2.10}$$

auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Dazu genügt es, den metrischen Tensor zu verallgemeinern, da durch die Algebra (Gl. 2.10) damit auch die Kontraktion von γ -Matrizen in d Dimensionen definiert wird. Die natürliche Verallgemeinerung ist (Muta 1987):

$$\boxed{g_\mu^\mu = 4 \quad \longrightarrow \quad g_\mu^\mu = d} \tag{2.11}$$

Damit folgt bei der Kontraktion von γ -Matrizen:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = d \quad \text{oder} \quad \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu = (2-d)\gamma_\nu \tag{2.12}$$

Angenommen der Integrand wäre $p^\mu p^\nu f(p^2)$. Dann müßte das Integral im Minkowskiraum folgende Struktur besitzen (im euklidischen Raum wäre $g^{\mu\nu}$ durch δ^{ij}

zu ersetzen):

$$\int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) = A g^{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Durch Kontraktion dieser Gleichung erhält man die Konstante A :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) &= \int d^d p p^2 f(p^2) \\ &= A g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d A \\ \implies A &= \frac{1}{d} \int d^d p p^2 f(p^2) \\ \implies \boxed{\int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) = \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int d^d p p^2 f(p^2)} & \quad (2.14) \end{aligned}$$

Dabei wurde Gl. 2.11 benutzt. Damit ist das Problem der Integrale in d Dimensionen mit nicht kontrahierten Integranden auf das entsprechende Integral mit skalarem Integranden zurückgeführt.

Mehr-Loop-Integrale

Für spätere Untersuchungen werden 3-Loop-Integrale von Bedeutung sein, so daß ein paar Gedanken zu diesem Thema notwendig sind. Ein Doppelintegral hat die allgemeine Form

$$I := \int \frac{d^{d_1} p_1}{(2\pi)^{d_1}} \int \frac{d^{d_2} p_2}{(2\pi)^{d_2}} f(p_1, p_2) \quad (2.15)$$

Es stellt sich jedoch die Frage, in welchem Verhältnis die Dimensionen d_1 und d_2 zueinander stehen. Wenn man die Vertauschbarkeit der Integrale beibehalten möchte, folgt hieraus die Gleichheit der Dimensionen. Diese ist immer dann notwendig, wenn der Integrand Terme der Form $p_1 \cdot p_2$ enthält, wie sie immer auftreten, wenn Fermionenpropagatoren vorhanden sind. Für den genauen Beweis sei auf (Collins 1985) verwiesen.

In der Regel werden alle 3 Integrale eines 3-Loop-Graphen einzeln divergent sein. Nach (Collins 1985) ist die Regularisierung so durchzuführen, daß nach jeder Integration die zugehörige Divergenz abzuziehen ist. Dies entspricht der sukzessiven Subtraktion von Countertermen, wie sie in Abb. 2.2 dargestellt ist. Die Kreuze auf

Abbildung 2.2: Sukzessive Regularisierung

den Linien bedeuten dabei die Ersetzung eines divergenten Untergraphen durch seinen Counterterm.

2.2 Beispielrechnungen

2.2.1 Einige nützliche Regularisierungen

Alle Gleichungen dieses Abschnitts gelten im euklidischen Raum. Bereits in Gl. 2.4 wurde die sehr allgemeine Eigenschaft

$$\boxed{\int d^d p (p^2)^\alpha = 0} \quad (2.16)$$

bewiesen.

Als nächstes wird die Formel

$$\boxed{I := \int d^d p \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + m^2)^\beta} = \pi^{d/2} m^{d+2\alpha-2\beta} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\beta - \alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(\beta)} } \quad (2.17)$$

bewiesen. Mit Hilfe von Gl. 2.8 wird dieses Integral auf ein eindimensionales Integral

zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp p^{d-1} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + m^2)^\beta} \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{m^{2\beta}\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp \frac{p^{d-1+2\alpha}}{\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right)^\beta} \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{m^{2\beta}\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{m dt}{2\sqrt{t}} \frac{(m^2 t)^{\frac{d-1}{2}+\alpha}}{(t+1)^\beta} \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{m^{2\beta-2\alpha-d}\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\frac{d}{2}+\alpha-1}}{(t+1)^\beta} \\
&\equiv \frac{\pi^{d/2}}{m^{2\beta-2\alpha-d}\Gamma(d/2)} B\left(\alpha + \frac{d}{2}, \beta - \alpha - \frac{d}{2}\right) \tag{2.18}
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $m^2 t = p^2$ und die Integraldarstellung der Beta-Funktion B (Gl. B.27) benutzt wurde. Die Beta-Funktion ist genau die behauptete Kombination von Γ -Funktionen (Gl. B.26). Dieses regularisierte Integral wird die Grundlage für viele andere Integrale bilden. Man sieht, daß beispielsweise für $\alpha = \beta = 1$ und $d = 4$ eine Divergenz in der Funktion $\Gamma(-d/2)$ auftritt, alle anderen Funktionen sind endlich. Mit Hilfe einer Reihendarstellung der Γ -Funktion (siehe Kap. B.3) erhält man die gesuchte Laurentreihe des Integrals um $d = 4$, in der der *Hauptteil* die isolierte Divergenz und der Rest den physikalisch sinnvollen endlichen Beitrag dieses Integrals darstellt.

2.2.2 Der skalare 1-Loop Polarisationsgraph

Nach den Feynmanregeln lautet der analytische Ausdruck für den Graphen in Abb. 2.3

$$\Pi_S(q) = ig^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \tag{2.19}$$

Dabei ist die Kopplung am Vertex mit g allgemein gehalten. p ist der Minkowski-Impuls, der im Loop umläuft, und Δ ist der Propagator eines skalaren Teilchen mit der Masse m , das Farbe tragen soll. Die Spur erstreckt sich deshalb über den Farbraum und ergibt den Faktor N_c . Mit den eingesetzten Propagatoren lautet die

Abbildung 2.3: Polarisationsgraph für 2 skalare Teilchen

Amplitude:

$$\Pi_S(q) = iN_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.20)$$

ϵ verschiebt den Pol bei $p^2 = m^2$ von der reellen Achse weg in die imaginäre Ebene.

Wie man unschwer erkennen kann, ist dieses Integral in 4 Dimensionen divergent. Es wird deshalb zunächst in d Dimensionen ausgewertet. Bei der Fortsetzung auf d Dimensionen muß die Dimension des Volumenelements $d^d p$ erhalten bleiben. Dies kann durch Einführen eines Dimensionsfaktors μ gewährleistet werden:

$$\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \longrightarrow \mu^{4-d} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} = (2\pi\mu)^\epsilon \frac{d^d p}{(2\pi)^4} \quad (2.21)$$

Am Ende wird das ausgewertete Integral um die Stelle $d = 4$ entwickelt werden, so daß man jetzt schon die Ersetzung $d = 4 - \epsilon$ vornehmen kann. Nach einer Wick-Rotation in den euklidischen Raum (siehe Kap. B.1) erhält man:

$$\Pi_S(q) = -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{1}{P^2 + m^2} \frac{1}{(P - Q)^2 + m^2} \quad (2.22)$$

Im euklidischen Raum ist die Verschiebung des Pols in die imaginäre Ebene überflüssig geworden, da der Nenner jetzt positiv definit ist.

Mit Hilfe der Feynmanparametrisierung B.5 kann der Nenner auf ein Polynom reduziert werden

$$\Pi_S(q) = -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[((P - Q)^2 + m^2)x + (P^2 + m^2)(1 - x)]^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(P-xQ)^2 + x(1-x)Q^2 + m^2]^2} \\
&= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P^2 + x(1-x)Q^2 + m^2]^2} \\
&= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P^2 + \Theta^2]^2} \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die Translationsinvarianz des Integrals ausgenutzt (siehe Gl. 2.3). Im letzten Schritt wurde die Ersetzung $\Theta^2 := x(1-x)Q^2 + m^2$ vorgenommen und das Integral damit auf die Form von Gl. 2.17 gebracht (mit $\alpha = 0$ und $\beta = 2$). Es folgt (mit $d = 4 - \varepsilon$):

$$\begin{aligned}
\Pi_S(q) &= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^4} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (\Theta^2)^{\frac{d}{2}-2} \\
&= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx (x(1-x)Q^2 + m^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \\
&= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)Q^2 + m^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Die Polarisationsfunktion ist damit auf ein eindimensionales, endliches Parameterintegral zurückgeführt. Die Divergenz des Anfangsausdrucks Gl. 2.20 erscheint hier als Divergenz der Γ -Funktion, bei der analytischen Fortsetzung des Ergebnisses zu $\varepsilon \approx 0$. Um die Divergenz zu isolieren, werden alle Terme, die ε enthalten, um $\varepsilon = 0$ herum entwickelt. Dazu werden die Gln. B.7 und B.15 bis zur ersten Ordnung benutzt. Gleichzeitig kann man in den Minkowskiraum zurückkehren, da die Impulsintegration jetzt durchgeführt ist. Dies kommt der Ersetzung $x(1-x)Q^2 = -x(1-x)q^2 - i\epsilon$ gleich.

$$\begin{aligned}
\Pi_S(q) &= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma\right) \int_0^1 dx \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)Q^2 + m^2}\right)\right) \\
&= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \int_0^1 dx \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2}\right) \right\} \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Der Counterterm, der in die Renormierung der physikalischen Konstanten der Theorie eingeht, kann jetzt einfach abgelesen werden. Er lautet $-\frac{6\pi^2 g^2}{\varepsilon(2\pi)^4}$.

Es verbleibt noch die Aufgabe, das Parameterintegral zu lösen. Eine partielle Integration liefert:

$$I_P := \int_0^1 dx \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= x \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon} \frac{q^2(2x^2 - x)}{4\pi\mu^2} \\
&= \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - \underbrace{\int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} - i\epsilon}}_{I_1 :=} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Um das Integral I_1 auswerten zu können, muß man zunächst die Pole des Integranden analysieren. Physikalische, d. h. reelle Pole treten nur auf, wenn die Bedingung $q^2 > 4m^2$ erfüllt ist, denn die Nullstellen des Nenners sind:

$$x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \right) \quad (2.27)$$

Damit die Pole für das Integral relevant sind, müssen sie im Intervall $0 \leq x_0 \leq 1$ liegen und daher auch reell sein. Reelle Pole sind aber nur möglich, wenn der Radikant größer als Null ist:

$$\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \in \mathbf{R} \quad \Longleftrightarrow \quad q^2 > 4m^2 \quad (2.28)$$

Pole, die dieser Bedingung genügen, liegen auch automatisch im gewünschten Intervall, denn

$$q^2 > 4m^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 < \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} < 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x_0 < 1 \quad (2.29)$$

Die Bedingung $q^2 > 4m^2$ ist physikalisch sinnvoll, denn die Erzeugung von 2 Teilchen der Masse m ist sicher nur dann möglich, wenn der einlaufende Viererimpulsbetrag mindestens doppelt so groß ist wie die Masse eines Teilchens, das erzeugt werden soll.

Mit Hilfe der Dirac-Identität Gl. 1.29 kann man den Beitrag des Pols zu dem Integral I_1 aus Gl. 2.26 von dem Rest trennen. Man erkennt, daß ein Pol zu einem Imaginärteil der Amplitude führt. Deshalb ist das Integral I_1 auf die Form $\int dx h(x) \frac{1}{x-i\epsilon}$ zu bringen (mit $h(x) \in \mathbf{R}$). Dies geschieht durch einige Substitutionen:

$$I_1 = \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} - i\epsilon}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{+1} dy \frac{y^2 - y}{y^2 - 1 + \frac{4m^2}{q^2} - i\epsilon} \quad \text{mit } y := 1 - 2x \\
&= \int_{-1}^{+1} dy \frac{y^2}{y^2 - 1 + \frac{4m^2}{q^2} - i\epsilon} \quad \text{wegen des um 0 symmetrischen Bereichs} \\
&= 2 \int_0^{+1} dy \frac{y^2}{y^2 - 1 + \frac{4m^2}{q^2} - i\epsilon} \quad \text{da der Integrand symmetrisch ist} \\
&= \int_{\frac{4m^2}{q^2}}^{\infty} dM^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \frac{1}{M^2 \left(\frac{M^2}{q^2} - 1 - i\epsilon \right)} \quad \text{mit } M^2 := \frac{4m^2}{1-y^2} \\
&= \int_{\frac{4m^2}{q^2}-1}^{\infty} dz \underbrace{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{(z+1)q^2}} \frac{1}{z+1} \frac{1}{z-i\epsilon}}_{\in \mathbf{R}} \quad \text{mit } z := \frac{M^2}{q^2} - 1 \quad (2.30)
\end{aligned}$$

I_1 hat nun die erhoffte Form, so daß die Dirac-Identität darauf angewendet werden kann. Für die Berechnung des Hauptwertintegrals ist die alte Darstellung (Gl. 2.26) angemessener. Wie oben diskutiert, treten Pole nur unter der Bedingung $q^2 > 4m^2$ auf, so daß der Imaginärteil von I_1 mit einer Θ -Funktion multipliziert werden muß. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} + i\pi \int_{\frac{4m^2}{q^2}-1}^{\infty} dz \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(z+1)q^2}} \frac{\delta(z)}{z+1} \Theta(q^2 - 4m^2) \\
&= \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} + i\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \Theta(q^2 - 4m^2) \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Das verbleibende Hauptwertintegral kann man auf die Integrale B.35, B.36 und B.37 zurückführen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} I_1 &= \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} \\
&= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2m^2}{q^2} \right) \int_0^1 dx \frac{1}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} \\
&= 2 - 2\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1}} \right) \Theta(4m^2 - q^2) \\
&\quad - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \Theta(q^2 - 4m^2)
\end{aligned}$$

$$= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \quad (\text{mit Gl. B.39}) \quad (2.32)$$

Nun können die Gln. 2.32, 2.31, 2.26 und 2.25 zusammengesetzt werden. Es folgt

$$\begin{aligned} \Pi_S(q) &= ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \\ &= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + i\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \Theta(q^2 - 4m^2) \right. \\ &\quad \left. - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dies ist das typische Aussehen einer Feynmanamplitude nach der Regularisierung. Ein reeller Vorfaktor, der die Kopplungskonstante und einige π enthält, ein Term $\sim \frac{1}{\varepsilon}$, der als Counterterm in die Renormierung der physikalischen Konstanten eingeht, konstante Summanden, ein Logarithmus (hier $\operatorname{artanh}(\dots)$), dessen Argument den Betrag des äußeren Impulses enthält, und einen Imaginärteil, der die Resonanzstruktur der betrachteten Amplitude widerspiegelt.

2.2.3 Der fermionische 1-Loop Polarisationsgraph

Die Behandlung des fermionischen 1-Loop Polarisationsgraphen in Abb. 2.1 auf S. 38 läuft völlig analog zu dem skalaren Graphen des vorigen Abschnitts, weshalb etwas weniger ausführlich vorgegangen wird. Nach den Feynmanregeln lautet der analytische Ausdruck für diesen Graphen

$$\Pi_F^{\mu\nu}(q) = ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\{S(p) \gamma^\mu S(p-q) \gamma^\nu\} \quad (2.34)$$

Dabei ist die Kopplung am Vertex mit g allgemein gehalten. p ist der Minkowski-Impuls, der im Loop umläuft, und S ist der Propagator eines fermionischen Teilchen mit der Masse m , das Farbe tragen soll. Die Spur erstreckt sich deshalb über den Farb- und den Lorentzraum. Mit den eingesetzten Propagatoren lautet die Amplitude:

$$\Pi_F^{\mu\nu}(q) = ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{Sp\{(\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\nu\}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) ((p-q)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (2.35)$$

ϵ verschiebt den Pol bei $p^2 = m^2$ von der reellen Achse weg in die imaginäre Ebene.

Die Auswertung der Spur über den Farbraum ergibt einen Faktor N_c . Die Spur über den Lorentzraum muß hingegen mit Hilfe der Eigenschaften der Dirac–Algebra (Gl. 2.10) berechnet werden. Dabei muß man die dimensionale Fortsetzung auf d Dimensionen erst bei der Kontraktion von Lorentzindizes berücksichtigen.

$$\begin{aligned}
& Sp\{(\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\nu\} \\
&= N_c Sp\{\not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu\} - N_c Sp\{\not{p} \gamma^\mu \not{q} \gamma^\nu\} + N_c m^2 Sp\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} \\
&= N_c Sp\{\not{p} \not{A} \not{p} \not{B}\} - N_c Sp\{\not{p} \not{A} \not{q} \not{B}\} + 4N_c m^2 g^{\mu\nu} \\
&= N_c p \cdot A Sp\{\not{p} \not{B}\} - N_c p \cdot p Sp\{\not{A} \not{B}\} + N_c p \cdot B Sp\{\not{A} \not{p}\} \\
&\quad - N_c p \cdot A Sp\{\not{q} \not{B}\} + N_c p \cdot q Sp\{\not{A} \not{B}\} - N_c p \cdot B Sp\{\not{A} \not{q}\} + 4N_c m^2 g^{\mu\nu} \\
&= 4N_c \{p^\mu p \cdot B - p^2 A \cdot B + p^\nu A \cdot p - p^\mu q \cdot B + p q A \cdot B - p^\nu A \cdot q + m^2 g^{\mu\nu}\} \\
&= 4N_c \{p^\mu p^\nu - p^2 g^{\mu\nu} + p^\nu p^\mu - p^\mu q^\nu + p \cdot q g^{\mu\nu} - p^\nu q^\mu + m^2 g^{\mu\nu}\} \\
&= 4N_c \{2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + g^{\mu\nu} (p \cdot q - p^2 + m^2)\} \tag{2.36}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird in Gl. 2.35 eingesetzt:

$$\Pi_F^{\mu\nu}(q) = 4iN_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + g^{\mu\nu} (p \cdot q - p^2 + m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) ((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)} \tag{2.37}$$

Die folgenden Schritte sind mit denen für den skalaren 1–Loop Graphen identisch. Dimensionale Fortsetzung (Gl. 2.21) und Wick–Rotation (Kap. B.1) ergeben:

$$\Pi_F^{ij}(Q) = 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{2P^i P^j - P^i Q^j - P^j Q^i + \delta^{ij} (P \cdot Q - P^2 - m^2)}{(P^2 + m^2) ((P - Q)^2 + m^2)} \tag{2.38}$$

Da der Nenner mit dem in Gl. 2.20 identisch ist, kann auch das Ergebnis der Feynmanparametrisierung (Gl. B.5) von Gl. 2.23 übernommen werden. Allerdings muß die Verschiebung $P \rightarrow P + xQ$ auch noch im Zähler durchgeführt werden. Mit $\Theta^2 := x(1 - x)Q^2 + m^2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Pi_F^{ij}(Q) &= 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P^2 + \Theta^2]^2} \\
&\quad \{2(P + xQ)^i (P + xQ)^j - (P + xQ)^i Q^j - (P + xQ)^j Q^i\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta^{ij} \left((P + xQ) \cdot Q - (P + xQ)^2 - m^2 \right) \} \\
= & 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \\
& \frac{2P^i P^j + 2x^2 Q^i Q^j - xQ^i Q^j - xQ^j Q^i + \delta^{ij} (xQ^2 - P^2 - x^2 Q^2 - m^2)}{[P^2 + \Theta^2]^2} \\
= & 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \\
& \frac{2P^i P^j - 2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij} (P^2 - x(1-x)Q^2 + m^2)}{[P^2 + \Theta^2]^2} \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wurde ausgenutzt, daß auch in d Dimensionen antisymmetrische Integranden nicht zu dem Integral beitragen, d. h.

$$\int d^d p p^i f(p^2) = 0 \tag{2.40}$$

Es liegt hier der Fall eines nicht kontrahierten Integranden vor. Man kann Gl. 2.14 entnehmen, daß in d -dimensionalen Integralen $P^i P^j = P^2 \delta^{ij}/d$ zu ersetzen ist. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\Pi_F^{ij}(Q) = & -4N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \\
& \left\{ \frac{\delta^{ij} P^2 \left(1 - \frac{2}{d}\right)}{[P^2 + \Theta^2]^2} + \frac{2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij} (x(1-x)Q^2 - m^2)}{[P^2 + \Theta^2]^2} \right\} \tag{2.41}
\end{aligned}$$

Die Impulsintegration besteht daher aus 2 Typen von Integralen, die beide durch Gl. 2.17 mit $\alpha = 0, 1$ und $\beta = 2$ abgedeckt sind. Das ergibt:

$$\begin{aligned}
\Pi_F^{ij}(Q) = & -\frac{4N_c g^2}{(2\pi)^4} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^1 dx \\
& \left\{ \delta^{ij} \left(1 - \frac{2}{d}\right) (\Theta^2)^{-1+\frac{d}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right. \\
& \left. + \left\{ 2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij} (x(1-x)Q^2 - m^2) \right\} (\Theta^2)^{-2+\frac{d}{2}} \Gamma(d/2) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right\}
\end{aligned}$$

und wegen Gl. B.12, sowie $d = 4 - \varepsilon$

$$\begin{aligned}
= & -\frac{4N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (\Theta^2)^{-2+\frac{d}{2}} \\
& \left\{ -\delta^{ij} \Theta^2 + 2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij} (x(1-x)Q^2 - m^2) \right\}
\end{aligned}$$

und durch Einsetzen von $\Theta^2 = x(1-x)Q^2 + m^2$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4N_c\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \\
&\quad \int_0^1 dx \, 2x(1-x) (x(1-x)Q^2 + m^2)^{-\varepsilon/2} \{Q^i Q^j - \delta^{ij} Q^2\} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Man findet auf diese Weise die Eichinvarianz wieder (siehe auch den Kommentar am Ende dieses Abschnitts). Nachdem die Impulsintegration ausgeführt ist, kann man in den Minkowskiraum zurückkehren. Außerdem kann man das Ergebnis in den Bereich um $\varepsilon = 0$ analytisch fortsetzen und nach ε entwickeln. Dazu werden die Gln. B.7 und B.15 herangezogen.

$$\begin{aligned}
\Pi_F^{\mu\nu}(q) &= -\frac{4N_c\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma(\varepsilon/2) \\
&\quad \int_0^1 dx \, 2x(1-x) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon} \right)^{\varepsilon/2} \\
&= -\frac{4N_c\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \\
&\quad \int_0^1 dx \, 2x(1-x) \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \quad (2.43)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung entspricht Gl. 2.25 für den skalaren Fall und trennt den Polarisationsensor in einen divergenten Teil ($\sim \frac{1}{\varepsilon}$) und ein eindimensionales, endliches Parameterintegral auf.

Das Parameterintegral über die Konstanten ist trivial:

$$\int_0^1 dx \, 2x(1-x) \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right\} = \left\{ \frac{2}{3\varepsilon} - \frac{1}{3}\gamma \right\} \quad (2.44)$$

Es verbleibt das Parameterintegral, das den Logarithmus enthält. Dieses kann genauso wie das entsprechende Integral im skalaren Fall behandelt werden (Gl. 2.26). Eine partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned}
I_P &:= -\int_0^1 dx \, 2x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2} \right) \\
&= -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - \underbrace{\frac{1}{3} \int_0^1 dx \, x^2 \frac{4x^2 - 8x + 3}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} - i\epsilon}}_{I_1 :=} \quad (2.45)
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die Polstruktur von I_1 identisch ist mit der aus Gl. 2.26, so daß die Diskussion der Pole einfach wiederholt werden kann (Gl. 2.27 – 2.29). Auch hier ist es wieder Ziel, den Beitrag des Pols mit der Dirac-Identität (Gl. 1.29) zu berechnen und dann das Hauptwertintegral auszuwerten. Dazu können die gleichen Substitutionen und Symmetrieeigenschaften wie in Gl. 2.30 benutzt werden. Das Ergebnis ist:

$$I_1 = -\frac{1}{3} \int_{\frac{4m^2}{q^2}-1}^{\infty} dz \underbrace{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{(z+1)q^2} \left(1 + \frac{2m^2}{(z+1)q^2}\right)}_{\in \mathbf{R}} \frac{1}{z+1} \frac{1}{z-i\epsilon} \quad (2.46)$$

Mit Hilfe der Dirac-Identität und der Einschränkung des Bereichs, in dem Pole auftreten können, auf $q^2 > 4m^2$, ergibt sich entsprechend Gl. 2.31:

$$I_1 = \frac{1}{3} \mathcal{P} \int_0^1 dx x^2 \frac{4x^2 - 8x + 3}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} - \frac{i\pi}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) \quad (2.47)$$

Das Hauptwertintegral kann mit einer umfangreichen aber trivialen Analysis mit den Formeln B.35 – B.38 (für $m \leq 4$) und Gl. B.39 berechnet werden. Das Ergebnis ist

$$I_1 = -\frac{5}{9} - \frac{4m^2}{3q^2} - \frac{i\pi}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \quad (2.48)$$

Die Gleichungen 2.43 – 2.45 und 2.48 müssen nur noch zusammengesetzt werden, und man erhält einen Ausdruck für den regularisierten fermionischen Polarisations-tensor:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\mu\nu}(q) &= ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\{S(p) \gamma^\mu S(p-q) \gamma^\nu\} \\ &= -\frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \\ &\quad \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \frac{5}{3} - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + i\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m^2}{q^2} - 2 \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Auch der fermionische Polarisationsgraph hat nach der Regularisierung die bei Gl. 2.33 diskutierte Form. Zusätzlich findet sich hier im Ergebnis die Eichinvarianz wieder $\{g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\}$ (siehe Gl. 3.20). Man könnte sich deshalb etwas Arbeit ersparen, wenn man von vornherein die Eichinvarianz für den Polarisationsstensor ansetzt und dann die Regularisierung nur für den mit $g_{\mu\nu}$ kontrahierten Tensor durchführt. Dadurch wäre der zu regularisierende Integrand gleich eine skalare Funktion, und man müßte nicht die ganzen Lorentzindizes mitschleppen. Das Ergebnis 2.49 wird auf diesem Weg reproduziert.

Durch die Mehrarbeit hat man jedoch auch etwas mehr Information bekommen. Man hat gesehen, daß die Eichinvarianz des fermionischen Polarisationsstensors durch die dimensionale Regularisierung nicht angetastet wurde. Dies ist ein allgemein gültiges Ergebnis:

Die dimensionale Regularisierung erhält die Eichinvarianz.

Dies ist keine Selbstverständlichkeit, denn andere Regularisierungsverfahren wie etwa die von Pauli–Villars haben diese Eigenschaft nicht. Die dimensionale Regularisierung hat sich nicht zuletzt wegen dieses fundamentalen Vorteils gegenüber anderen Verfahren durchgesetzt.

2.2.4 Der fermionische Polarisationsgraph ohne Masse

Für spätere Betrachtungen ist es wichtig, den regularisierten Polarisationsstensor für 2 Fermionen ohne Masse zu kennen. Dieser kann auf die allgemeine Rechnung des vorigen Abschnitts zurückgeführt werden. Dazu wird der erste Teil der Gl. 2.43 betrachtet und darin die Masse gleich Null gesetzt:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\mu\nu}(q)|_{m=0} &= -\frac{4N_c\pi^2g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma(\varepsilon/2) \\ &\quad \int_0^1 dx \, 2x(1-x) \left(\frac{-4\pi\mu^2}{x(1-x)q^2 + i\epsilon} \right)^{\varepsilon/2} \\ &= -\frac{8N_c\pi^2g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma(\varepsilon/2) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\varepsilon/2} \\ &\quad \int_0^1 dx \, x^{1-\frac{\varepsilon}{2}}(1-x)^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{8N_c\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma(\varepsilon/2) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\varepsilon/2} B\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (2.50)$$

wobei Gl. B.27 benutzt wurde. Diese Gleichung hat bereits die Form, aus der man durch Entwicklung in ε die Isolation der Divergenz erreichen kann. Dazu werden die Gleichungen B.26, B.15, B.17, B.25 und B.7 herangezogen, das Produkt ausmultipliziert und nach Potenzen von ε sortiert. Dies ergibt:

$$\boxed{\Pi_F^{\mu\nu}(q)|_{m=0} = -\frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\}} \quad (2.51)$$

Der Imaginärteil steckt in dem Logarithmus für $q^2 > 0$ (siehe Gl. B.45). Man findet im Wesentlichen die Struktur des Ergebnisses mit Masse wieder. Gl. 2.51 kann man auch dadurch bestätigen, daß man Gl. 2.49 in der Masse entwickelt. Für $m \rightarrow 0$ heben sich die Divergenzen, die in den beiden Logarithmen entstehen, gerade weg (siehe Gl. B.43).

2.2.5 Skalare Propagatoren ohne Masse in beliebigen Potenzen

Es wird später notwendig sein, den skalaren Propagator in der Masse zu entwickeln. Der Graph aus Abb. 2.3 wird dabei in mehrere Teile der Form

$$\boxed{I^{r,s}(q^2) := i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + i\epsilon)^r ((p - q)^2 + i\epsilon)^s}} \quad (2.52)$$

zerlegt. Dieses Integral wird in diesem Kapitel für beliebige $r, s \in \mathbf{R}$ regularisiert. Die analytische Fortsetzung auf d Dimensionen lautet mit Gl. 2.21

$$I^{r,s}(q^2) = i(2\pi\mu)^\varepsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + i\epsilon)^r ((p - q)^2 + i\epsilon)^s} \quad (2.53)$$

Mit Hilfe der Wick-Rotation (siehe Kap. B.1) kann das Integral im euklidischen Raum notiert werden:

$$I^{r,s}(-Q^2) = -(2\pi\mu)^\varepsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-P^2)^r (-(P - Q)^2)^s}$$

$$= (-1)^{r+s+1} (2\pi\mu)^\varepsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P^2)^r ((Q-P)^2)^s} \quad (2.54)$$

Unter Benutzung der Parametrisierung B.6 erhält man eine Darstellung, in der die Impulsintegration trivial wird

$$\begin{aligned} I^{r,s}(-Q^2) &= (-1)^{r+s+1} (2\pi\mu)^\varepsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma(r)} \int d^d x \frac{e^{2iPx}}{(x^2)^{2-r-\frac{\varepsilon}{2}}} \\ &\quad \frac{\Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma(s)} \int d^d y \frac{e^{2i(Q-P)y}}{(y^2)^{2-s-\frac{\varepsilon}{2}}} \\ &= (-1)^{r+s+1} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{4-\varepsilon} \Gamma(r) \Gamma(s)} \\ &\quad \int d^d x \int d^d y \frac{1}{(x^2)^{2-r-\frac{\varepsilon}{2}} (y^2)^{2-s-\frac{\varepsilon}{2}}} \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} e^{2iP(x-y)} e^{2iQy} \\ &= (-1)^{r+s+1} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{4-\varepsilon} \Gamma(r) \Gamma(s)} \\ &\quad \int d^d x \int d^d y \frac{1}{(x^2)^{2-r-\frac{\varepsilon}{2}} (y^2)^{2-s-\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{\pi^d}{(2\pi)^4} \delta^{(d)}(x-y) e^{2iQy} \\ &= (-1)^{r+s+1} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^d}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{4-\varepsilon} \Gamma(r) \Gamma(s)} \\ &\quad \int d^d x \frac{1}{(x^2)^{4-r-s-\varepsilon}} e^{2iQy} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Das letzte Parameterintegral kann ausgeführt werden, indem man Gl. B.6 rückwärts liest. Dabei wird α durch den Exponenten von x^2 bestimmt:

$$2 - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} = 4 - \varepsilon - r - s \quad \implies \quad \alpha = -2 + \frac{\varepsilon}{2} + r + s \quad (2.56)$$

Damit sind alle Integrale ausgeführt:

$$\begin{aligned} I^{r,s}(-Q^2) &= (-1)^{r+s+1} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^d}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{4-\varepsilon} \Gamma(r) \Gamma(s)} \\ &\quad \frac{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+r+s\right)}{\Gamma(4-r-s-\varepsilon)} \frac{1}{(Q^2)^{-2+\frac{\varepsilon}{2}+r+s}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Diesen Ausdruck kann man wieder in den Minkowskiraum zurücktransformieren, $d = 4 - \varepsilon$ setzen und etwas umordnen:

$$I^{r,s}(q^2) = (-1)^{1+\frac{\varepsilon}{2}} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^{4-\varepsilon}}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{-2+\frac{\varepsilon}{2}+r+s}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{4-\varepsilon}\Gamma(r)\Gamma(s)} \frac{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}}\Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+r+s\right)}{\Gamma(4-r-s-\varepsilon)} \\
&= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{-2+r+s}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
& \frac{\Gamma\left(2-r-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(2-s-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+r+s\right)}{\Gamma(r)\Gamma(s)\Gamma(4-r-s-\varepsilon)} \tag{2.58}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist symmetrisch gegen den Austausch von r und s , d. h. es gilt $I^{r,s} = I^{s,r}$. Die Divergenzen treten je nach Wahl des Paares (r, s) in verschiedenen Γ -Funktionen auf. Jedoch wird die Zahl der divergenten Γ -Funktionen niemals größer als eins. Das Ergebnis kann mit den Formeln aus Kap. B.3 in ε entwickelt werden. Dies ist im folgenden für einige Paare (r, s) durchgeführt.

$$\begin{aligned}
I^{1,1}(q^2) &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(2-\varepsilon)} \\
&= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \tag{2.59}
\end{aligned}$$

$I^{1,1}$ ist gerade das Integral des skalaren Polarisationsgraphen ohne Masse. Mit Masse wurde der Graph bereits untersucht (Gl. 2.33). Betrachtet man den Grenzfall $m \rightarrow 0$, so findet man tatsächlich das Ergebnis 2.59 wieder. Dies sieht man mit Hilfe von Gl. B.43 ein, wo der Grenzübergang durchgeführt ist.

$$\begin{aligned}
I^{1,2}(q^2) &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(1-\varepsilon)} \\
&= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon} + \gamma - \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{2,2}(q^2) &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(-\varepsilon)} \\
&= 2\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^{1,3}(q^2) &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(-1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(2+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\Gamma(-\varepsilon)} \\
&= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^4} \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Das Integral $I^{1,3}$ enthält demnach keine Divergenz und damit auch keinen Imaginärteil, der sich in allen anderen Integralen in dem Logarithmus verbirgt (siehe Gl. B.45).

2.2.6 Integranden mit Logarithmen

Mehrloopgraphen, die eine wichtige Rolle spielen werden, führen unweigerlich auf Mehrfachintegrale, denn für jeden Loop erhält man im Impulsraum eine zusätzliche Integration. Wie in Kap. 2.1.3 erwähnt, müssen die Integrale in einem solchen Fall sukzessive regularisiert werden. Aus den vorigen Beispielen ist zu entnehmen, daß bei der Regularisierung von Integralen nach der Entwicklung in ε in der Regel logarithmische Terme auftreten. Man ist demnach für die äußeren Integrationen mit Integranden konfrontiert, die Logarithmen enthalten. Einige Integrale dieser Art sollen hier regularisiert werden.

Integranden mit einem Logarithmus

Zunächst wird bewiesen, daß alle Integrale vom Typ

$$J_n := i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbf{Z} \quad (2.63)$$

verschwinden.

Um dieses Integral von dem Logarithmus zu befreien, kann ein Parameter η in den Exponenten eingeführt werden, so daß der Logarithmus durch eine Differentiation ersetzt wird, die erst nach der Regularisierung ausgeführt wird. Denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-1-n-\eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \exp \left\{ -(1+n+\eta) \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\ &= -\ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right)^{-1-n-\eta} \\ \Rightarrow \frac{1}{(q^2)^{n+1+\eta}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) &= -\frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Mit dieser Beziehung kann J_n als Grenzwert für η gegen Null dargestellt werden, wobei der Logarithmus verschwindet:

$$\begin{aligned} J_n &= -i \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial\eta} (k-q)^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} \\ &= -\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial\eta} (-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k-q)^2)^{-1} (q^2)^{n+1+\eta}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

Das letzte Integral hat die Form von Gl. 2.52 mit dem Paar $(r, s) = (-1, n+1+\eta)$, so daß aus Gl. 2.58 folgt

$$\begin{aligned} J_n &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial\eta} (-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta} \frac{1}{(k^2)^{-2+n+\eta}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\quad \frac{\Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 - n - \eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n + \eta\right)}{\Gamma(-1) \Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4 - n - \eta - \varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.66)$$

An dieser Darstellung erkennt man bereits, daß die Behauptung 2.63 richtig ist. Für endliches ε liefern alle Γ -Funktionen für alle n endliche Werte, während $\Gamma(-1)$ im Nenner unabhängig von allen Parametern den gesamten Ausdruck zu Null drückt.

Auf dem gleichen Weg kann das Integral

$$I_n := i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (2.67)$$

regularisiert werden.

Um den Logarithmus durch eine Differentiation zu ersetzen, benötigt man eine zu 2.64 analoge Beziehung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} &= \frac{\partial}{\partial\eta} \exp \left\{ (1+\eta) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\ &= \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\ \implies \left((k-q)^2 \right) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) &= (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Damit kann man für I_n schreiben

$$I_n = i \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{n+1}} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta}$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{1+\eta}} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{n+1} ((k-q)^2)^{-1-\eta}} \quad (2.69)$$

Das letzte Integral ist von der Form 2.52 mit den Parametern $(r, s) = (n+1, -1+\eta)$.

Das regularisierte Integral $I^{n+1, -1-\eta}$ ist in Gl. 2.58 zu finden. Es folgt

$$\begin{aligned} I_n &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{1+\eta}} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^{-2+n-\eta}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(1-n-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3+\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n-\eta\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(-1-\eta) \Gamma(4-n+\eta-\varepsilon)} \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (-4\pi\mu^2)^\eta (k^2)^{2-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(1-n-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3+\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n-\eta\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(-1-\eta) \Gamma(4-n+\eta-\varepsilon)} \quad (2.70) \end{aligned}$$

Betrachtet man dieses Ergebnis für endliches ε , findet man nur eine einzige im Grenzfalle $\eta \rightarrow 0$ divergente Γ -Funktion, deren Entwicklung mit Gl. B.20 $\frac{1}{\Gamma(-1-\eta)} = \eta + (1-\gamma)\eta^2$ lautet. Um η aus Gl. 2.70 zu eliminieren, muß man sich klar machen, was es bedeutet, erst nach η zu differenzieren und dann den Grenzprozeß $\eta \rightarrow 0$ durchzuführen:

Nach einer Entwicklung in η besteht der gesamte Ausdruck aus Produkten der Art

$$\begin{aligned} &(\eta + (1-\gamma)\eta^2) \left(\frac{1}{\varepsilon + \eta} + \text{const} \right) (\text{const} + (\varepsilon + \eta)) \cdots \\ &= \eta(\varepsilon + \text{const}) + \mathcal{O}(\eta^2) \quad , \quad (2.71) \end{aligned}$$

wobei alle Konstanten weggelassen wurden, da es hier nur um die Struktur geht. Das erste Produkt stammt von $\Gamma(-1-\eta)$. Zunächst erniedrigt die Differentiation nach η den Grad des Polynoms um eins. Es verbleiben ein von η unabhängiger Ausdruck und Terme höheren Grades in η . Diese letzten jedoch verschwinden nach dem Grenzprozeß, so daß nur die ursprünglich in η linearen Terme überleben. Da jedoch wegen $\Gamma(-1-\eta)$ ein η faktorisiert, bedeutet diese Feststellung, daß sonst nur noch Terme nullter Ordnung in η zu dem Ergebnis beitragen können. Für die Praxis kann man demnach folgendermaßen verfahren:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{f(\eta)}{\Gamma(-1-\eta)} = f(0) \quad , \quad \text{falls } f(0) \text{ endlich ist} \quad (2.72)$$

Gl. 2.70 bekommt damit die Form

$$\begin{aligned}
 I_n &= i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\
 &= -\frac{\pi^2 (k^2)^{2-n}}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma \left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(3 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n \right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(4-n-\varepsilon)}
 \end{aligned}
 \tag{2.73}$$

Für gegebenes n kann man diesen Ausdruck mit den Formeln des Kapitels B.3 in ε entwickeln und damit die Divergenz isolieren. Im folgenden wird dies für alle $n < 2$ durchgeführt, wo man eine lineare Divergenz in ε erwartet. Genau wie in Gl. 2.66 kann man sofort ablesen, daß das Integral für $n < 0$ verschwindet (wegen $\Gamma(n+1)$), d. h.

$$\boxed{I_{n<0} = 0} \tag{2.74}$$

Für $n = 1, 2$ treten doppelte Divergenzen auf, d. h. Terme der Art $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Für $n = 3$ ist die Divergenz wieder linear in ε , während für alle $n > 3$ überhaupt keine Divergenz in ε mehr auftritt. Diese Aussagen kann man einfach durch Abzählen der divergenten Γ -Funktionen verifizieren. Dabei ist die Zahl der Divergenzen im Nenner von denen im Zähler abzuziehen.

Für $n = 0$ kann man eine explizite Entwicklung nach ε durchführen. Es folgt mit der Entwicklungsformel B.34

$$\begin{aligned}
 I_0 &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^4 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(3 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\Gamma(4-\varepsilon)} \\
 &= -\frac{\pi^2}{6(2\pi)^4} k^4 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{11}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.75}$$

In den späteren Rechnungen wird auch noch der Fall $n = 1$ von Bedeutung sein.

$$I_1 = -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma \left(-\frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(3 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(-1 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\Gamma(3-\varepsilon)} \tag{2.76}$$

Wie bereits erwähnt, erhält man hier bei der Entwicklung eine doppelte Divergenz in ε . Dies führt auf unerwünschte Terme der Form $\frac{1}{\varepsilon} \ln(-k^2)$, deren Herkunft noch zu klären sein wird.

Integranden mit 2 Logarithmen

Bei Integranden mit 2 Logarithmen muß das im vorigen Abschnitt dargestellte Verfahren 2 mal angewendet werden. Das gesuchte Integral lautet

$$K_n := i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (2.77)$$

Die beiden Logarithmen werden mit Hilfe der Beziehungen 2.64 und 2.68 ersetzt

$$\begin{aligned} K_n &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\ &= - \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} \frac{(-4\pi\mu^2)^{1+\xi}}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\xi} \\ &= - \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{\xi-\eta-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-4\pi\mu^2)^{n+\eta-\xi} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{n+1+\eta} ((k-q)^2)^{-1-\xi}} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Das letzte Integral ist wieder von der Form 2.52, mit dem Parameterpaar $(r, s) = (n+1+\eta, -1-\xi)$. Die regularisierte Form dieses Integrals (Gl. 2.58) kann hier eingesetzt werden

$$\begin{aligned} K_n &= \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{\xi-\eta-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-4\pi\mu^2)^{n+\eta-\xi} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^{-2+n+\eta-\xi}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\xi}{2}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(1-n-\eta-\frac{\xi}{2}) \Gamma(3+\xi-\frac{\xi}{2}) \Gamma(-2+\frac{\xi}{2}+n+\eta-\xi)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(-1-\xi) \Gamma(4-n-\eta+\xi-\varepsilon)} \\ &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{\xi-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\xi}{2}+\eta-\xi} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(1-n-\eta-\frac{\xi}{2}) \Gamma(3+\xi-\frac{\xi}{2}) \Gamma(-2+\frac{\xi}{2}+n+\eta-\xi)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(-1-\xi) \Gamma(4-n-\eta+\xi-\varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Die Argumentation, die auf Gl. 2.72 führt, findet hier auf ξ Anwendung. Es folgt

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\xi}{2}+\eta} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(1-n-\eta-\frac{\xi}{2}) \Gamma(3-\frac{\xi}{2}) \Gamma(-2+\frac{\xi}{2}+n+\eta)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.80)$$

η jedoch faktorisiert nach einer Entwicklung nur für $n < 0$, da $\Gamma(n + 1 + \eta)$ im Nenner nur dann divergiert. Deshalb müssen die beiden Fälle $n < 0$ und $n \geq 0$ getrennt voneinander untersucht werden:

Im Fall $n < 0$ ist $\Gamma(n + 1 + \eta)$ im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ immer divergent. Um die Argumentation vor Gl.2.72 wieder anwenden zu können, muß man diese Γ -Funktion von n unabhängig notieren. Mit Hilfe von Gl. B.12 kann man sie auf die Form

$$\frac{1}{\Gamma(n + 1 + \eta)} = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \prod_{k=1}^{-n-1} (\eta - k) \quad (\text{für } n < 0) \quad (2.81)$$

bringen, wobei das Produkt nur für $n < -1$ gemeint ist (für $n = -1$ ist mit dem Produkt einfach 1 gemeint). Die Entwicklung B.21 dieser Funktion ist in erster Ordnung in η mit der von $\frac{1}{\Gamma(-1-\eta)}$ identisch — und nur diese Ordnung ist von Bedeutung. Man kann deshalb Gl. 2.72 anwenden, wobei die $\Gamma(-1 - \eta)$ einfach durch $\Gamma(\eta)$ zu ersetzen ist. Für Gl. 2.80 folgt

$$\begin{aligned} K_{n<0} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2} + \eta} \\ &\times \frac{\Gamma\left(1 - n - \eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n + \eta\right)}{\Gamma(\eta) \Gamma(4 - n - \eta - \varepsilon)} \prod_{k=1}^{-n-1} (\eta - k) \\ &\Rightarrow \\ &\boxed{K_{n<0} = (-1)^{-n-1} (-n-1)! \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\times \frac{\Gamma\left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n\right)}{\Gamma(4 - n - \varepsilon)}} \quad (2.82) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist die regularisierte Form des Integrals K_n im Bereich $n < 0$. Für alle n in diesem Bereich erhält man eine lineare Divergenz in ε , die nach der Entwicklung isoliert ist. Für $n = -1$ ergibt sich mit B.34

$$\begin{aligned} K_{-1} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^6 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(5 - \varepsilon)} \\ &= -\frac{1}{72} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^6 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{7}{2} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\} \quad (2.83) \end{aligned}$$

Für $n \geq 0$ kann man sich jedoch nicht auf die Terme nullter Ordnung beschränken, da $\Gamma(n+1+\eta)$ in diesem Fall nicht divergent ist. Man muß uneingeschränkt nach η entwickeln. Um dennoch einen in n allgemeinen, aber von η unabhängigen Ausdruck zu bekommen, kann man die Differentiation durchführen und in dem resultierenden Ausdruck den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ vornehmen. Die Differentiation ergibt mit Gl.2.64

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \right\} \\
&= \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \\
&\quad + \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \\
&= \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \\
&\quad + \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \\
&\quad \times \left\{ -\Psi\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \Psi(n+1+\eta) + \Psi(4-n-\eta-\varepsilon) \right\} \\
&= \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \\
&\quad \times \left\{ \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \Psi\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \Psi(n+1+\eta) + \Psi(4-n-\eta-\varepsilon) \right\} \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Definition der Ψ -Funktion aus B.28 entnommen. Der differenzierte Ausdruck kann nun in Gl. 2.80 eingesetzt werden. Da bei festem ε keine Divergenzen im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ auftreten, ist es möglich, den Grenzwert durchzuführen:

$$\begin{aligned}
K_{n \geq 0} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
&\quad \times \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)}
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \Psi \left(1 - n - \eta - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \Psi \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n + \eta \right) \right. \\ \left. - \Psi(n+1+\eta) + \Psi(4-n-\eta-\varepsilon) \right\}$$

 \Rightarrow

$$K_{n \geq 0} = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma \left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(3 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n \right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(4-n-\varepsilon)} \\ \times \left\{ \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \Psi \left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \Psi \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n \right) \right. \\ \left. - \Psi(n+1) + \Psi(4-n-\varepsilon) \right\}$$

(2.85)

Dies ist der regularisierte, von η unabhängige Ausdruck für das Integral K_n in Gl. 2.77 im Bereich $n \geq 0$. Es treten für kleine n Divergenzen höheren Grades in ε auf. In der Klammer ist für alle $n \geq 0$ mindestens eine Funktion divergent. Damit erhält man für $n = 0, 3$ eine quadratische, für $n = 1, 2$ eine kubische und für $n \geq 4$ eine lineare Divergenz.

Für $n = 0$ soll das regularisierte Integral in entwickelter Form notiert werden. In diesem Fall werden einige Zwischenschritte der Entwicklung dargestellt, da dieser Fall im Gegensatz zu den bisherigen illustrativ ist. Es ist hier darauf zu achten, daß wegen der quadratischen Divergenz in ε die Entwicklung mit Hilfe der Formeln in Kap. B.3 bis zur zweiten Ordnung in ε erfolgen muß, da auch die Terme zweiter Ordnung mit $\frac{1}{\varepsilon^2}$ multipliziert einen konstanten Beitrag zum endlichen Anteil des Integrals liefern. Es ist hier zum ersten Mal notwendig, die Ψ -Funktionen zu entwickeln. Die nötigen Entwicklungen finden sich in den Gln. B.31–B.33, B.7, B.12 und B.14–B.25. Es gilt auch $\Psi(1) = -\gamma$.

$$K_0 = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^4 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(3 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \Gamma \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{\Gamma(4-\varepsilon)} \\ \times \left\{ \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \Psi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) + \Psi \left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \Psi(1) + \Psi(4-\varepsilon) \right\} \\ = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^4 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{8} \ln^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\} \\ \times \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{11}{3} - \gamma + \varepsilon \left(\frac{85}{18} - \frac{1}{4} \zeta(2) - \frac{47}{24} \gamma + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ -\frac{2}{\varepsilon} + \frac{10}{3} + \frac{143}{72}\varepsilon + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} \\ \Rightarrow & \\ & \boxed{K_0 = -\frac{\pi^2}{6(2\pi)^4} k^4 \left\{ \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} - 2\gamma \right) - \frac{27}{4} - \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{7}{12}\gamma + \gamma^2 \right.} \\ & \quad \left. - \frac{10}{3}\ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) - \frac{1}{2}\ln^2\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} \quad (2.86)} \end{aligned}$$

Das Interessante ist, daß sich die Logarithmen der ersten und dritten Klammer im Zwischenschritt beim Ausmultiplizieren wegheben. Dies muß so sein, da ansonsten k^2 -abhängige Terme der Art $\frac{1}{\varepsilon}\ln(-k^2)$ auftreten würden. Ein von k^2 abhängiger Counterterm ist für die Renormierung jedoch ungeeignet. Für alle renormierbaren Theorien müssen deshalb diese Logarithmen, die zwischenzeitlich auftreten, spätestens nach der Regularisierung aller Graphen wegfallen (Collins 1985), wie es hier geschehen ist.

Kapitel 3

Die Masse eines -Teilchen-Zustands

3.1 Einleitung

Nachdem in den vorigen Kapiteln die Grundlagen der QCD–Summenregeln sowie die Technik der dimensional Regularisierung erläutert wurden, ist das Fundament vorhanden, auf dem man ein konkretes Problem beispielhaft vorführen kann. Dazu werden die möglichen Massen eines 4-Teilchen-Zustands studiert, der aus zwei leichten Quarks (*up*- oder *down*-Quarks) und zwei schweren skalaren Quarks zusammengesetzt ist. Die skalaren Quarks sollen bis auf den Spin und die Masse die gleichen Eigenschaften haben wie die herkömmlichen Quarks. Es wird speziell die Frage interessieren, ob es möglich ist, durch eine bestimmte Wahl der auftretenden Vakuumkondensate die Masse dieses Zustands wesentlich unter die Masse der Konstituenten abzusenken.

Die skalaren Quarks werden als hypothetische Teilchen phänomenologisch in die QCD eingeführt. Die Existenz solcher Teilchen wird im Rahmen der Supersymmetrie vorausgesagt (Sohnius 1985), allerdings sind die sogenannten Squarks sehr schwer und daher zur Erklärung der GSI–Resonanzen ungeeignet. In einer ersten Annäherung an das Problem kann man sich auf relativ kleine Massen beschränken

und eine Entwicklung in der Masse der skalaren Quarks durchführen (siehe Kap. 5), so daß die resultierende Summenregel für Squarks keine Anwendung findet. Allerdings wird es möglich sein, die Masse der skalaren Quarks wesentlich größer als die Masse der herkömmlichen, fermionischen Quarks zu wählen, deren geringfügige Masse von einigen MeV — wie so häufig im Rahmen der QCD — vernachlässigt wird.

Um die Summenregel für das erläuterte System aufzustellen, ist wie in dem allgemeinen Kapitel über QCD-Summenregeln vorzugehen. Zunächst ist der Polarisationsensor für einen 4-Teilchen-Zustand auf der hadronischen Seite mit Hilfe einer Dispersionsrelation und auf der Ebene der Elementarteilchen mit Hilfe der Operatorproduktentwicklung zu berechnen. In diesem Kapitel wird der Polarisationsensor auf der Ebene der Elementarteilchen definiert und für das Problem eines 4-Teilchen-Zustands spezifiziert. Er wird aus 16 Feynmangraphen zusammengesetzt, die nichlokale Vakuumkondensate enthalten, deren Bedeutung in Kap. 4 erläutert wird. In Kap. 5 werden alle in der Entwicklung auftretenden Feynmangraphen reguliert, bzw. deren Imaginärteil bestimmt, den man für die Summenregel braucht (siehe Gl. 1.56). Die Boreltransformation des Imaginärteils und der Vergleich der Ergebnisse mit dem hadronischen Sektor werden in Kap. 6 durchgeführt.

3.2 Die Entwicklung des Polarisationsensors

In diesem Abschnitt wird ein Ausdruck für den Polarisationsensor hergeleitet. Dazu wird der Vakuumerwartungswert der S -Matrix betrachtet, der durch den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Feldoperatoren bestimmt ist. Dieses Produkt kann mit dem Wickschen Theorem in eine Summe von normalgeordneten Produkten zerlegt werden, die mit Propagatoren multipliziert werden. Im trivialen Vakuum der QED würden die Vakuumerwartungswerte aller normalgeordneten Produkte verschwinden, da die rechts stehenden Vernichter direkt auf das Vakuum wirken, und es bliebe nur der völlig kontrahierte Term übrig, der aus einem reinen Produkt von Propagatoren besteht. Hingegen können im nichttrivialen Vakuum der QCD nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte von normalgeord-

neten Produkten entstehen, die hier berücksichtigt werden sollen. Alle Beiträge, die von Gluonenaustausch oder Gluonenkondensaten stammen, werden vernachlässigt.

3.2.1 Die Streumatrix und der Strom

Die Streumatrix S ist ein Operator, der einem Zustand $\Phi(t = -\infty)$ den Zustand nach einer Wechselwirkung $\Phi(t = +\infty)$ zuordnet. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Wechselwirkung zwischen den beiden asymptotisch freien Zuständen einzuführen. Man könnte an einen erzeugenden Strom denken oder die Wechselwirkung adiabatisch ein- und wieder ausschalten. Mit Hilfe eines solchen Stroms oder einer Funktion, die im Unendlichen verschwindet und zu endlicher Zeit maximal den Wert 1 erreicht, können die allgemeinen Forderungen, die man an die physikalische Observable S stellt, explizit formuliert werden. Solche Forderungen sind *Kovarianz* gegenüber Lorentztransformationen, *Unitarität* für die Erhaltung der Norm (und damit der Wahrscheinlichkeit) und *Kausalität*, d. h. die Forderung, daß ein Zustand zum Zeitpunkt t_0 nur spätere Zustände beeinflussen kann, und daß raumartige Zustände voneinander unabhängig sind (für alle Zeiten). Diese Eigenschaften sind notwendig, um die Gültigkeit der Dispersionsrelation 1.45 zu gewährleisten (man beachte auch die Bemerkung nach Gl. 1.41).

In der Störungstheorie zerlegt man den Streuoperator in eine Reihe von Streuoperatoren

$$S = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n S_n(x_1, \dots, x_n) \quad . \quad (3.1)$$

Dabei steht die 1 (der Term mit $n = 0$) für *keine* Streuung, und die S_n sind skalare Funktionen von den Feldoperatoren und ihren partiellen Ableitungen. n steht dabei für die Häufigkeit der Wechselwirkung oder für die Zahl der Vertizes (in der Sprache der Feynmangraphen). Die Formulierung der Forderungen nach *Kovarianz*, *Unitarität* und *Kausalität* von S können auf die einzelnen S_n übertragen werden. Mit diesen drei Forderungen kann eine Rekursionsformel für die S_n angegeben werden, wobei man S_1 aus dem Korrespondenzprinzip zur klassischen Feldtheorie gewinnt (Bogoliubov, Shirkov 1959). Daraus erhält man eine allgemeine Darstellung für den

Streuoperator durch die Wechselwirkungslagrangedichte \mathcal{L} :

$$S = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \dots dx_n T\{\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)\} \quad (3.2)$$

T bedeutet dabei das zeitgeordnete Produkt, das garantiert, daß die Feldoperatoren auf den Anfangszustand in der richtigen zeitlichen Abfolge angewendet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit ist der Polarisationsensor interessant, der dem Feynmangraphen in Abb. 3.1 entspricht. Die durchgezogenen Linien bedeuten masselose

Abbildung 3.1: Polarisationsgraph für je 2 skalare und fermionische Quarks

Quarks mit Spin 1/2, die gestrichelten Linien skalare Quarks mit der Masse m . Es handelt sich um einen Graphen mit 2 Vertizes, so daß aus Gleichung 3.2 nur der Term mit $n = 2$ in Betracht gezogen werden muß. Für den Vakuumerwartungswert des Operators S gilt dann

$$\begin{aligned} \langle 0|S|0 \rangle &= \frac{1}{2} \int dx dy \langle 0|S_2(x, y)|0 \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int dx dy \langle 0|T\{\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)\}|0 \rangle \\ &=: -\frac{i}{2} \int dx dy : A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x - y) A_\nu(y) : \end{aligned} \quad (3.3)$$

In der zweiten Zeile wurde Gl.3.2 benutzt, während die letzte Zeile als Definition des f Polarisationsensor $\Pi^{\mu\nu}$ aufgefaßt werden kann, wobei $: \dots :$ das normalgeordnete Produkt und A_μ das Eichfeld der QCD bedeutet. Die Wechselwirkungslagrangedichte ist durch

$$\mathcal{L} = -J^\mu(x)A_\mu(x) \quad , \quad (3.4)$$

gegeben, wobei J^μ der ankoppelnde Strom ist.

Der für den obigen Graphen zu betrachtende Strom ist das Produkt von einem fermionischen und einem skalaren Strom, was einem Vertex entspricht, in den ein fermionisches und ein skalares Quark ein- und wieder auslaufen. Beide Quarksorten tragen Farbe, die Farbindizes werden jedoch weggelassen

$$J^\mu(x) = g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\phi}(x) \phi(x) \quad . \quad (3.5)$$

ψ stellt das fermionische, ϕ das skalare Quarkfeld dar. g ist eine allgemein gehaltene Kopplungskonstante.

3.2.2 Das Wicksche Theorem

Der Polarisationsstensor ist (siehe Gl. 3.3) im Wesentlichen durch den Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes der Lagrangfunktion mit sich selbst gegeben. Es gilt daher, dieses Produkt mit dem Wickschen Theorem zu entwickeln und dadurch den Polarisationsstensor durch Propagatoren und Vakuumkondensate auszudrücken. Das Wicksche Theorem lautet für zeitgeordnete Produkte:

Das zeitgeordnete Produkt von n linearen Operatoren ist durch die Summe der normalgeordneten Produkte mit allen möglichen zeitgeordneten Kontraktionen gegeben.

Es ist zunächst zu klären, was mit *zeitgeordneten Kontraktionen* gemeint ist, und wie diese mit den Propagatoren zusammenhängen. Die zeitgeordnete Kontraktion zweier Operatoren u_1 und u_2 ist definiert als die Differenz zwischen dem zeitgeordnetem und dem normalgeordnetem Produkt der beiden Operatoren:

$$\overbrace{u_1(x_1) u_2(x_2)} := T\{u_1(x_1) u_2(x_2)\} - :u_1(x_1) u_2(x_2): \quad (3.6)$$

Die zeitgeordnete Kontraktion (durch die geschweifte Klammer angedeutet) ist eine komplexe Zahl, da der Übergang vom zeitgeordneten zum normalgeordneten Produkt allein durch Vertauschung der Feldoperatoren entsteht und die Kommutatoren komplexe Zahlen sind. Nimmt man auf beiden Seiten der Gleichung den Vakuumerwartungswert, so folgt

$$\overbrace{u_1(x_1) u_2(x_2)} = \langle 0 | T\{u_1(x_1) u_2(x_2)\} | 0 \rangle \quad , \quad (3.7)$$

da der Vakuumerwartungswert des normalgeordneten Produktes innerhalb der Störungstheorie verschwindet. Der Vakuumerwartungswert eines zeitgeordneten Produktes von Feldoperatoren ist jedoch gerade eine Greensfunktion (bis auf einen Faktor i), bzw. der zu den freien Feldern gehörige Propagator. Für fermionische Felder ψ oder skalare Felder ϕ gilt dann (Bjorken, Drell 1990, QFT)

$$\begin{aligned}\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)} &= +iS(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \\ \overbrace{\phi(x)\bar{\phi}(y)} &= -i\Delta(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \quad , \quad (3.8)\end{aligned}$$

wobei $S(x-y)$ der Propagator des freien Fermions und $\Delta(x-y)$ der Propagator des freien skalaren Bosons ist. Aufgrund der unterschiedlichen nichtlokalen Vertauschungsrelationen erhält man für die unter der Kontraktion vertauschten Felder:

$$\begin{aligned}\overbrace{\bar{\psi}(x)\psi(y)} &= -iS(y-x) = -\overbrace{\psi(y)\bar{\psi}(x)} \\ \overbrace{\bar{\phi}(x)\phi(y)} &= -i\Delta(y-x) = \overbrace{\phi(y)\bar{\phi}(x)}\end{aligned} \quad (3.9)$$

Nun zurück zur Anwendung des Wickschen Theorems auf das zeitgeordnete Produkt der Lagrangedichte mit sich selbst. Die Lagrangedichte ist durch die Gleichungen 3.4 und 3.5 bestimmt. Wenn man berücksichtigt, daß die Eichfelder, die fermionischen und die skalaren Felder untereinander kommutieren, wird das zeitgeordnete Produkt über alle diese Felder in drei zeitgeordnete Produkte zerlegt:

$$\begin{aligned}T \{ \mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y) \} &= T \{ J^\mu(x) A_\mu(x) J^\nu(y) A_\nu(y) \} \\ &= T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} T \{ J^\mu(x) J^\nu(y) \} \\ &= T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} T \{ g \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) \bar{\phi}(y) \phi(y) \} \\ &= g^2 T \{ A_\mu(x) A_\nu(y) \} T \{ \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) \} T \{ \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\phi}(y) \phi(y) \} \\ &\equiv g^2 T_A T_\psi T_\phi\end{aligned} \quad (3.10)$$

Diese 3 zeitgeordneten Produkte können mit dem Wickschen Theorem entwickelt werden, wobei gleich die Propagatoren für die kontrahierten Felder (Gl. 3.8, 3.9) eingesetzt werden. Wenn alle Felder in einem Summand kontrahiert werden, ist

dies gleichbedeutend mit dem Nehmen der Spur über die kontrahierten Indizes (hier Farb- und Lorentzindizes).

$$\begin{aligned}
T_A &\equiv T\{A_\mu(x)A_\nu(y)\} \\
&= : A_\mu(x)A_\nu(y) : + \overbrace{A_\mu(x)A_\nu(y)} \\
T_\psi &\equiv T\{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)\} \\
&= : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) : + : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^\nu\psi(y) : \\
&\quad + : \overbrace{\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)} : + : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\overbrace{\psi(x)\bar{\psi}(y)}\gamma^\nu\psi(y) : \\
&= : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) : - i\gamma^\mu S(x-y)\gamma^\nu : \bar{\psi}(x)\psi(y) : \\
&\quad - i\gamma^\nu S(y-x)\gamma^\mu : \bar{\psi}(y)\psi(x) : + Sp\{S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu\} \\
T_\phi &\equiv T\{\bar{\phi}(x)\phi(x)\bar{\phi}(y)\phi(y)\} \\
&= : \bar{\phi}(x)\phi(x)\bar{\phi}(y)\phi(y) : + : \bar{\phi}(x)\overbrace{\phi(x)\bar{\phi}(y)}\phi(y) : \\
&\quad + : \overbrace{\bar{\phi}(x)\phi(x)\bar{\phi}(y)\phi(y)} : + : \bar{\phi}(x)\overbrace{\phi(x)\bar{\phi}(y)}\phi(y) : \\
&= : \bar{\phi}(x)\phi(x)\bar{\phi}(y)\phi(y) : - i\Delta(x-y) : \bar{\phi}(x)\phi(y) : \\
&\quad - i\Delta(y-x) : \phi(x)\bar{\phi}(y) : - Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \tag{3.11}
\end{aligned}$$

In Gl. 3.3 wird der Vakuumerwartungswert des Produktes der 3 zeitgeordneten Produkte T_A, T_ψ, T_ϕ mit sich selbst benötigt, wobei für T_A nur der Term $: A_\mu(x)A_\nu(y) :$ mitgenommen werden muß, da keine Graphen mit inneren Linien für Eichbosonen berücksichtigt werden, die dem anderen Term in Gl. 3.11 entsprechen. Man erhält demnach einen Ausdruck für die Zwei-Punkte-Greensfunktion, indem man die Gln. 3.3 und 3.11 zusammensetzt.

$$\begin{aligned}
&: A_\mu(x)\Pi^{\mu\nu}(x-y)A_\nu(y) : \\
&= -i < 0 | T\{\mathcal{L}(x), \mathcal{L}(y)\} | 0 > \\
&= -ig^2 < 0 | : A_\mu(x) \\
&\quad \times \left\{ : \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) : - i\gamma^\mu S(x-y)\gamma^\nu : \bar{\psi}(x)\psi(y) : \right. \\
&\quad \left. - i\gamma^\nu S(y-x)\gamma^\mu : \bar{\psi}(y)\psi(x) : + Sp\{S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu\} \right\} \\
&\quad \times \left\{ : \bar{\phi}(x)\phi(x)\bar{\phi}(y)\phi(y) : - i\Delta(x-y) : \bar{\phi}(x)\phi(y) : \right. \\
&\quad \left. - i\Delta(y-x) : \phi(x)\bar{\phi}(y) : - Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \right\}
\end{aligned}$$

$$A_\nu(y) :| 0 \rangle \quad (3.12)$$

In dieser Gleichung kann man durch Vergleich der beiden Seiten einen Ausdruck für den Polarisationsstensor $\Pi^{\mu\nu}$ ablesen.

Für die spätere Berechnung der einzelnen Terme ist es sinnvoll, die Fouriertransformierte von $\Pi^{\mu\nu}(x-y)$ zu nehmen, da die exakten Propagatoren mit Masse im Ortsraum sehr kompliziert sind.

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = \int d^4(x-y) e^{ik(x-y)} \Pi^{\mu\nu}(x-y) \quad (3.13)$$

3.2.3 Eichinvarianz der Amplitude

Da der Polarisationsstensor ein Tensor zweiter Stufe ist, sind die Möglichkeiten für seine Struktur begrenzt. Er muß proportional einer Linearkombination von Tensoren zweiter Stufe sein. Die einzigen Tensoren zweiter Stufe, die in Frage kommen, sind $g^{\mu\nu}$ und das Produkt von 2 Vierervektoren $k^\mu k^\nu$. Diese Tensoren können mit beliebigen Funktionen von k^2 multipliziert werden. Die Struktur lautet deshalb

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = g^{\mu\nu} h(k^2) + k^\mu k^\nu g(k^2) \quad (3.14)$$

Nun kann man durch die Forderung nach Eichinvarianz der Amplitude einige Aussagen über die Funktionen h und g machen. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Funktion h in 2 Teile zu splitten: in einen von k^2 unabhängigen und einen von k^2 abhängigen Teil, aus dem aus Dimensionsgründen der Faktor k^2 vorgezogen wird.

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = c g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} k^2 f(k^2) + k^\mu k^\nu g(k^2) \quad (3.15)$$

Eichinvarianz bedeutet nun, daß die S -Matrix (siehe z. B. Gl. 3.3) unter einer Eichtransformation

$$A_\mu(k) \longrightarrow A_\mu + i\alpha k_\mu \quad (3.16)$$

invariant bleibt, d. h. für die Fouriertransformierte von Gl. 3.12 muß gelten

$$(A_\mu + i\alpha k_\mu) \Pi^{\mu\nu}(k) (A_\nu + i\alpha k_\nu) = A_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) A_\nu \quad (3.17)$$

Dies ist nur möglich, wenn gilt

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0 \quad \text{und} \quad \Pi^{\mu\nu}(k) k_\nu = 0 \quad (3.18)$$

Diese Forderung kann auf Gl. 3.15 angewendet werden.

$$\begin{aligned} 0 &= k_\mu \left(c g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} k^2 f(k^2) + k^\mu k^\nu g(k^2) \right) \\ &= c k^\nu + k^\nu k^2 f(k^2) + k^\nu k^2 g(k^2) \\ \implies c + k^2 \left(f(k^2) + g(k^2) \right) &= 0 \quad \text{für alle } k^2 \\ \implies c = 0 \quad \text{und} \quad f(k^2) = -g(k^2) &=: k^2 \Pi(k^2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diese direkte Folgerung aus der Eichinvarianz der Theorie ergibt für die allgemeine tensorielle Struktur des Polarisationsensors (Gl. 3.15)

$$\boxed{\Pi^{\mu\nu}(k) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \Pi(k^2)} \quad (3.20)$$

Durch Kontraktion der Gl. 3.20 kann die Funktion $\Pi(k^2)$ angegeben werden:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu}(k) &= g_{\mu\nu} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \Pi(k^2) \\ \iff \boxed{\Pi_\mu^\mu(k) = (d-1) \Pi(k^2)} &, \end{aligned} \quad (3.21)$$

wobei für die Kontraktion — im Hinblick auf die notwendige dimensionale Regularisierung — Gl. 2.11 benutzt wurde.

3.2.4 Ergebnis

Die Fouriertransformierte des Polarisationsensors (Gl. 3.13) kann nun geschlossen notiert werden, wenn man die Entwicklung mit Hilfe des Wickschen Theorems (Gl. 3.12) und die Eichinvarianz des Polarisationsensors (Gl. 3.21) ausnutzt

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{d-1} \int d^4(x-y) e^{ik(x-y)} g_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu}(x-y) \\ &= -\frac{1}{d-1} i g^2 \int d^4(x-y) e^{ik(x-y)} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \left\{ : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : - i \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu : \bar{\psi}(x) \psi(y) : \right. \\
& \quad \left. - i \gamma^\mu \gamma^\nu S(y-x) : \bar{\psi}(y) \psi(x) : + Sp\{S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu\} \right\} \\
& \times \left\{ : \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\phi}(y) \phi(y) : - i \Delta(x-y) : \bar{\phi}(x) \phi(y) : \right. \\
& \quad \left. - i \Delta(y-x) : \phi(x) \bar{\phi}(y) : - Sp\{\Delta(y-x) \Delta(x-y)\} \right\} | 0 \rangle (3.22)
\end{aligned}$$

Die Terme in den geschweiften Klammern müssen ausmultipliziert werden, so daß 16 Summanden entstehen, die jeweils einem Feynmangraphen entsprechen.

$$\begin{aligned}
\Pi(k^2) &= -\frac{1}{d-1} i g^2 \int d^4(x-y) e^{ik(x-y)} g_{\mu\nu} \\
& \times \left\{ \begin{aligned}
& \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : : \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\phi}(y) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - i \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : \Delta(x-y) : \bar{\phi}(x) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - i \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : \Delta(y-x) : \phi(x) \bar{\phi}(y) : | 0 \rangle \\
& - \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : Sp\{\Delta(y-x) \Delta(x-y)\} | 0 \rangle \\
& - i \langle 0 | \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu : \bar{\psi}(x) \psi(y) : : \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\phi}(y) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - \langle 0 | \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu : \bar{\psi}(x) \psi(y) : \Delta(x-y) : \bar{\phi}(x) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - \langle 0 | \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu : \bar{\psi}(x) \psi(y) : \Delta(y-x) : \phi(x) \bar{\phi}(y) : | 0 \rangle \\
& + i \langle 0 | \gamma^\mu S(x-y) \gamma^\nu : \bar{\psi}(x) \psi(y) : Sp\{\Delta(y-x) \Delta(x-y)\} | 0 \rangle \\
& - i \langle 0 | \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu : \bar{\psi}(y) \psi(x) : : \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\phi}(y) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - \langle 0 | \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu : \bar{\psi}(y) \psi(x) : \Delta(x-y) : \bar{\phi}(x) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - \langle 0 | \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu : \bar{\psi}(y) \psi(x) : \Delta(y-x) : \phi(x) \bar{\phi}(y) : | 0 \rangle \\
& + i \langle 0 | \gamma^\nu S(y-x) \gamma^\mu : \bar{\psi}(y) \psi(x) : Sp\{\Delta(y-x) \Delta(x-y)\} | 0 \rangle \\
& + \langle 0 | Sp\{S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu\} : \bar{\phi}(x) \phi(x) \bar{\phi}(y) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - i \langle 0 | Sp\{S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu\} \Delta(x-y) : \bar{\phi}(x) \phi(y) : | 0 \rangle \\
& - i \langle 0 | Sp\{S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu\} \Delta(y-x) : \phi(x) \bar{\phi}(y) : | 0 \rangle \\
& - \langle 0 | Sp\{S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu\} Sp\{\Delta(y-x) \Delta(x-y)\} | 0 \rangle \end{aligned} \right\} \\
& \hspace{15em} (3.23)
\end{aligned}$$

Es ist zu beachten, daß die Felder Farbindices tragen, bzw. die ψ -Felder tragen zusätzlich noch einen Lorentzindex. Deshalb werden die Spuren über die jeweils vorhandenen Indizes ausgeführt, d. h. über Farb- und Lorentzindices für eine Spur

mit fermionischen Feldern und über einen Farbindex für eine Spur mit skalaren Feldern.

Alle nicht kontrahierten Paare von Feldern in Gl. 3.23 hängen mit Vakuumkondensaten zusammen, wie im nächsten Abschnitt erläutert wird. Demnach wären in einem trivialen Vakuum alle Terme außer dem letzten Null. Hier sollen jedoch nichtverschwindende Vakuumkondensate im Rahmen der QCD zugelassen werden, so daß zunächst alle Terme zu $\Pi(k^2)$ beitragen. Es wird sich herausstellen, daß aus anderen Gründen dennoch eine große Zahl von Termen Null wird.

Kapitel 4

Nichtlokale Vakuumkondensate

In diesem Abschnitt soll die Bedeutung der Vakuumerwartungswerte von normalgeordneten Produkten zweier Felder an verschiedenen Raumzeitpunkten geklärt werden, wie sie in Gl. 3.23 aufgetreten sind. Den Produkten von skalaren Feldern wird eine besondere Bedeutung zukommen, da diese in dem betrachteten System eine a priori sogar groß anzusetzende Masse tragen. Da bei den folgenden Betrachtungen die Farb- und Lorentzindizes wichtig sind, werden sie explizit notiert. Griechische Indizes beziehen sich dabei auf den $SU(3)$ Farbraum, während mit lateinischen Buchstaben Lorentzindizes gemeint sind.

Unter Vakuumkondensaten versteht man den Vakuumerwartungswert von normalgeordneten Feldern am gleichen Raumzeitpunkt, wobei über alle Raumindizes summiert wurde (Pascual, Tarrach 1984). Man schreibt dafür

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle := \sum_{\alpha\beta ij} \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(x) : | 0 \rangle . \quad (4.1)$$

Solche Vakuumkondensate stellen nicht-störungstheoretische Beiträge zu dem Polarisationsensor dar, da der Vakuumerwartungswert von normalgeordneten Produkten in der Störungstheorie mit trivialem Vakuum verschwindet. Deshalb sind außer dem letzten Term alle Beiträge in Gl. 3.23 nicht-störungstheoretisch. Jedoch sind alle dort auftretenden normalgeordneten Produkte nichtlokal, d. h. die Felder werden an verschiedenen Raumzeitpunkten genommen. Um den Zusammenhang zu den obigen lokalen Vakuumkondensaten herzustellen, ist es ein naheliegender

Gedanke, eines der Felder um den Raumzeitpunkt des anderen Feldes herum zu entwickeln. Dabei werden Ableitungen der Felder auftauchen, die dann mit Hilfe der Bewegungsgleichungen für die Felder umgeformt werden können. Auf diesem Weg bekommt die Masse der Felder, die in den Bewegungsgleichungen steht, eine wesentliche Bedeutung. Es ist sofort einsichtig, daß für Felder mit verschwindender Masse nur der 0-te Ordnungsterm, also eine Konstante beiträgt, während für Felder mit Masse Korrekturterme zum Tragen kommen. Es wird die Frage zu behandeln sein, ob diese Korrekturen mit zunehmender Ordnung kleiner werden oder nicht. Der beschriebene Sachverhalt soll in den folgenden Abschnitten für fermionische und skalare Felder hergeleitet werden.

4.1 Fermionische Felder

Wie oben beschrieben, wird zunächst das erste Feld um den Raumzeitpunkt des anderen Feldes herum entwickelt:

$$\bar{\psi}_{\alpha i}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^{\mu_1} \cdots (x-y)^{\mu_n} (\bar{\psi}_i \partial_{\mu_1}^+ \cdots \partial_{\mu_n}^+)_{\alpha} (y) \quad (4.2)$$

ψ sind die fermionischen Felder, und ∂_{μ} sind nicht kovariante Ableitungen. In dieser Form ist die das Feld $\psi_{\alpha i}(x)$ nicht eindeutig bestimmt, denn eine Eichtransformation auf der rechten Seite, die vom Ort y abhängt, würde ein anderes Feld $\psi'_{\alpha i}(x)$ liefern, während die rechte Seite von der Transformation unberührt bleibt, da sie von y unabhängig ist. Um eine eindeutig definierte Taylorentwicklung zu gewährleisten, ist es deshalb notwendig, die rechte Seite eichinvariant zu machen. Ersetzt man die gewöhnlichen Ableitungen durch die kovarianten, erhält man die eindeutige Entwicklung:

$$\bar{\psi}_{\alpha i}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^{\mu_1} \cdots (x-y)^{\mu_n} (\bar{\psi}_i D_{\mu_1}^+ \cdots D_{\mu_n}^+)_{\alpha} (y) \quad (4.3)$$

Diese Ersetzung ist genau dann erlaubt, wenn eine Eichung existiert, in der die Entwicklungen 4.2 und 4.3 übereinstimmen. Die *Koordinaten-Eichung* $x^{\mu} A_{\mu}^a = 0$, wobei A_{μ}^a das Eichfeld ist, hat genau diese Eigenschaft. Man hat demnach gesehen,

daß die Wahl einer speziellen Eichung die Gleichheit von gewöhnlicher und kovarianter Ableitung innerhalb der Taylorentwicklung eines Feldes garantiert. Dieses Argument ist dabei auf beliebige Felder anwendbar.

Für das fermionische Feld wird der erste Ordnungsterm mitgenommen, um die Rolle der Masse zu demonstrieren. Aufgrund der Lorentzinvarianz kennt man die tensorielle Struktur des n -ten Ordnungsterms. Es muß ein kovarianter Tensor n -ter Stufe sein. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle & \\
= \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(y) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle + \langle 0 | : (\bar{\psi}_i D_\mu^+)_{\alpha}(y) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle & \\
= A \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} + B \delta_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{ji} (x - y)^\mu & \quad (4.4)
\end{aligned}$$

A und B sind Konstanten, die im folgenden bestimmt werden müssen. Summation über alle Indizes ergibt mit der Definition 4.1

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\psi} \psi \rangle &= \sum_{ij\alpha\beta} \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(y) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle \\
&= A \sum_{ij\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} = A \sum_{i\alpha} = 4N_c A \\
\implies A &= \frac{1}{4N_c} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad , \quad (4.5)
\end{aligned}$$

wobei N_c die Zahl der Farben ist. Die andere Konstante ergibt sich durch Kontraktion der Gl. 4.4 mit $(\gamma^\mu)_{ik}$ und mit der Gl. 2.12

$$\langle 0 | : (\bar{\psi} D_\mu^+ \gamma^\mu)_{\alpha k}(y) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle = B \delta_{\alpha\beta} (\gamma_\mu)_{ji} (\gamma^\mu)_{ik} = B d \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} \quad (4.6)$$

Unter Benutzung der Dirac-Gleichung

$$(iD_\mu \gamma^\mu - m) \psi(y) = 0 \quad . \quad (4.7)$$

folgt dann aus Gl. 4.6

$$im \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha k}(y) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle = B d \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} \quad (4.8)$$

Ebenso wie in Gleichung 4.5 durch Summation über alle Indizes die gesuchte Konstante folgte, geschieht dies auch hier:

$$im \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \sum_{ij\alpha\beta} im \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha k}(y) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= Bd \sum_{kj\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \delta_{kj} = Bd \sum_{k\alpha} = 4N_c Bd \\
\Rightarrow B &= \frac{im}{4dN_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Damit erhält man für den Zusammenhang des nichtlokalen Vakuumkondensates mit dem lokalen

$$\boxed{\langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle = \frac{1}{4N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} \left(\delta_{ij} + \frac{im}{d} (\gamma_\mu)_{ji} (x^\mu - y^\mu) \right)} \tag{4.10}$$

Man sieht hier deutlich, daß man in nullter Ordnung die bekannte Proportionalität zwischen nichtlokalem Vakuumerwartungswert und dem Vakuumkondensat bekommt, mit einer Proportionalitätskonstanten, die durch die Dimensionen der zugrundeliegenden Räume bestimmt ist. Man sieht aber auch, daß dieser Zusammenhang seine Korrektheit verliert, wenn man Felder mit Masse betrachtet, für die der zweite Term in Gl. 4.10 Bedeutung bekommt. Für das betrachtete 4-Teilchen-System sollten die Fermionen jedoch masselos sein (eine gute Näherung für die leichten Quarks), so daß auch in dieser Arbeit nur die einfache Proportionalität

$$\langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle = \frac{1}{4N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \tag{4.11}$$

Berücksichtigung findet. Dies wird für die skalaren Felder anders sein.

4.2 Skalare Felder mit Masse

Auch im Fall skalarer Felder wird das nichtlokale normalgeordnete Produkt von 2 skalaren Operatoren entwickelt

$$\bar{\phi}_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-y)^{\mu_1} \cdots (x-y)^{\mu_n} \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ \cdots D_{\mu_n}^+ \right)_\alpha(y) \tag{4.12}$$

In der Taylorentwicklung wurde — wie im Fall der fermionischen Felder — die kovariante Ableitung benutzt. Für die Rechtfertigung dieses Schritts wird auf die Diskussion nach Gl. 4.2 verwiesen.

Da für das hier betrachtete 4-Teilchen-System die skalaren Felder Masse tragen sollen, wird in der folgenden Betrachtung keine Vernachlässigungen vorgenommen.

Dies bedeutet, daß die Entwicklung in allen Ordnungen berücksichtigt wird. Mit der Abkürzung $\xi := x - y$ lautet der Vakuumerwartungswert des normalgeordneten Produktes von 2 skalaren Feldern:

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \\
&+ \langle 0 | : \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \xi^{\mu_1} \\
&+ \frac{1}{2} \langle 0 | : \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ D_{\mu_2}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \xi^{\mu_1} \xi^{\mu_2} \\
&+ \dots \\
&+ \frac{1}{m!} \langle 0 | : \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ \dots D_{\mu_m}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \xi^{\mu_1} \dots \xi^{\mu_m} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Zwischen den Vakuumzuständen dürfen nur skalare Operatoren stehen. Da die Felder ϕ selbst skalar sind, darf nur eine gerade Anzahl von Ableitungen genommen werden, damit der gesamte Operator immer noch skalar werden kann. Dies bedeutet, daß alle Terme mit einer ungeraden Anzahl von Ableitungen verschwinden. Die verbleibenden Terme müssen paarweise gleiche Indizes tragen, wobei alle möglichen Kombinationen von Paaren zu berücksichtigen sind. Es folgt dann für die Terme der Entwicklung ($n := (m/2) \in \{0, 1, 2, \dots\}$):

$$\begin{aligned}
\langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle &= C_0 \delta_{\alpha\beta} \\
\langle 0 | : \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ D_{\mu_2}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle &= C_1 g_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\alpha\beta} \\
\langle 0 | : \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ \dots D_{\mu_4}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle &= C_2 (g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} + g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) \delta_{\alpha\beta} \\
\langle 0 | : \left(\bar{\phi} D_{\mu_1}^+ \dots D_{\mu_{2n}}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle &= C_n \underbrace{(g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \dots g_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} + \text{Perm.})}_{(2n-1)!! \text{ Terme}} \delta_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Die Koeffizienten C_n bekommt man (wie im Fall der Fermionen) durch Kontraktion der Gln. 4.14, Benutzung der Klein–Gordon–Gleichung

$$(\square + m^2)\phi(y) = 0 \quad \text{mit} \quad \square := g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu \tag{4.15}$$

und anschließende Summation über alle freien Indizes. Dies ist im folgenden für die ersten 4 Terme der Entwicklung durchgeführt. Dabei wird in Gl. 2.12 $d = 4$ und

die Zahl der Farben auf N_c festgesetzt.

$$\begin{aligned} \langle \bar{\phi}\phi \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \\ &= C_0 \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} = N_c C_0 \\ \Rightarrow C_0 &= \frac{1}{N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} -m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle 0 | : \left(\bar{\phi} g^{\mu_1\mu_2} D_{\mu_1}^+ D_{\mu_2}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \\ &= C_1 \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} g^{\mu_1\mu_2} g_{\mu_1\mu_2} = 4N_c C_1 \\ \Rightarrow C_1 &= -\frac{m^2}{4N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} m^4 \langle \bar{\phi}\phi \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle 0 | : \left(\bar{\phi} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} D_{\mu_1}^+ D_{\mu_2}^+ D_{\mu_3}^+ D_{\mu_4}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \\ &= C_2 \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3}) \\ &= N_c C_2 (16 + g_{\mu_3}^{\mu_2} g_{\mu_2}^{\mu_3} + g_{\mu_4}^{\mu_2} g_{\mu_2}^{\mu_4}) = 24N_c C_2 \\ \Rightarrow C_2 &= \frac{m^4}{24N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} -m^6 \langle \bar{\phi}\phi \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle 0 | : \left(\bar{\phi} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} g^{\mu_5\mu_6} D_{\mu_1}^+ \dots D_{\mu_6}^+ \right)_\alpha (y) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \\ &= C_3 \sum_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} g^{\mu_5\mu_6} (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} g_{\mu_5\mu_6} + \text{Permutationen}) \\ &= N_c C_3 (64 + 6 \cdot 16 + 8 \cdot 4) = 192N_c C_3 \\ \Rightarrow C_3 &= -\frac{m^6}{192N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\Rightarrow C_n = (-1)^n \frac{m^{2n}}{N_c G_n} \langle \bar{\phi}\phi \rangle, \quad (4.20)$$

wobei G_n durch

$$G_n := g^{\mu_1\mu_2} \dots g^{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} (g_{\mu_1\mu_2} \dots g_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} + \text{Permutationen}) \quad (4.21)$$

definiert ist. Es erscheint relativ plausibel, wie die Reihe für die Terme höherer Ordnung fortgesetzt werden könnte (siehe Gl. 4.20). Das Vorzeichen ist alternierend, da jedes Paar, das kontrahiert wird, ein $-m^2$ ergibt und die Zahl der Paare durch n gegeben ist. Dadurch wird auch schon die Potenz der Masse auf m^{2n} festgelegt. Alle C_n enthalten einen Faktor N_c von der Farbsummation. Die inversen numerischen

Gewichte G_n der C_n sind Element der Folge 1, 4, 24, 192, ... Man kann deshalb eine Rekursionsformel für die C_n vermuten

$$C_0 = 1 \quad C_{n+1} = -C_n \frac{m^2}{2n+4} \quad , \quad (4.22)$$

oder äquivalent dazu

$$G_0 = 1 \quad G_{n+1} = (2n+4) G_n \quad . \quad (4.23)$$

Diese Vermutung wird im folgenden bewiesen.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. $G_0 = 1$ ist korrekt. Aus der Rekursionsformel folgt für $n = 0$, daß $G_1 = 4$ ist, was auch das nächste Element der Folge bildet. Die Verankerung ist also perfekt. Für den Induktionsschluß ist noch zu zeigen, daß aus Gl. 4.21

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= (2n+4) G_n \\ &= g^{\mu_1 \mu_2} \dots g^{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} g^{\mu_{2n+1} \mu_{2n+2}} \left(g_{\mu_1 \mu_2} \dots g_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} g_{\mu_{2n+1} \mu_{2n+2}} + \text{Perm.} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

folgt. Die Zahl der metrischen Tensoren vor der Klammer in Gl. 4.21 ist n . Die Zahl der Permutationen in der Klammer ist $(2n-1)!!$, denn aufgrund der Symmetrie des metrischen Tensors ($g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$) muß man $2n$ Indizes auf n Plätze verteilen, wobei nur interessant ist, welche Indexpaare auftreten, nicht in welcher Reihenfolge die Paare stehen (der metrische Tensor kommutiert mit sich selbst). Man hat deshalb eine freie Auswahl für den ersten Index auf Platz 1. Für die Paarbildung auf Platz 1 hat man dann noch $2n-1$ Indizes zur Auswahl. Der erste Index auf Platz 2 ist wieder frei wählbar, so daß für die Paarbildung auf Platz 2 noch $2n-3$ Indizes verbleiben. Auf diese Weise ergibt sich die Zahl der möglichen Permutationen zu $(2n-1)(2n-3) \dots (3)(1) = (2n-1)!!$, wie oben behauptet.

Wie sieht nun G_{n+1} aus? Vor der Klammer ist $g^{\mu_{2n+1} \mu_{2n+2}}$ dazu gekommen. In der Klammer stehen jetzt entsprechend der obigen Argumentation $(2n+1)!! = (2n-1)!! + 2n(2n-1)!!$ Terme, die sich wie folgt aufteilen:

In $(2n-1)!!$ Termen wurde einfach $g_{\mu_{2n+1} \mu_{2n+2}}$ angehängt. Die Kontraktion durch den neuen metrischen Tensor vor der Klammer ergibt einen Faktor 4, der den

bisherigen Wert G_n multipliziert.

Es gibt dann für jeden der $(2n-1)!!$ alten Terme $2n$ Möglichkeiten die beiden neuen Indizes so unterzubringen, daß sie nicht gepaart werden (dieser Fall wurde ja eben schon berücksichtigt). In diesen Fällen ergibt sich einfach der bisherige Wert G_n ohne Faktor 4, da keine Kontraktion wegfällt oder hinzukommt. Es gilt nämlich für $a, b \notin \{2n+1, 2n+2\}$:

$$g^{\mu_{2n+1}\mu_{2n+2}} g_{\mu_a\mu_{2n+1}} g_{\mu_b\mu_{2n+2}} = g_{\mu_a}^{\mu_{2n+2}} g_{\mu_b\mu_{2n+2}} = g_{\mu_a\mu_b} \quad (4.25)$$

Durch diese Aufspaltung in 2 Gruppen hat man leicht gesehen, daß sich G_{n+1} von G_n nur durch einen Faktor $4 + 2n$ unterscheidet, wie in Gl. 4.23 behauptet. Damit ist auch gleichzeitig die Rekursionsformel 4.22 für die Koeffizienten C_n bewiesen.

Aus der Rekursionsformel 4.23 folgt eine einfache Darstellung der G_n . Es gilt

$$G_n = 2^n (n+1)! \quad (4.26)$$

Dies ist für $n = 0, 1$ sicher richtig. Für G_{n+1} folgt mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= (2n+4)G_n = (2n+4)2^n(n+1)! \\ &= 2^{n+1}(n+2)(n+1)! = 2^{n+1}(n+2)! \quad , \end{aligned} \quad (4.27)$$

was zu zeigen war.

Schließlich kann man Gl. 4.26 in Gl. 4.20 einsetzen und so eine explizite Darstellung der C_n bekommen

$$C_n = (-1)^n \frac{m^{2n}}{2^n N_c (n+1)!} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \quad , \quad (4.28)$$

die wiederum eine vollständige Darstellung der Reihe, in die das nichtlokale Kondensat in Gl. 4.13 entwickelt wurde, ermöglicht. Dazu ist Gl. 4.28 in Gl. 4.14 einzusetzen, die wiederum in Gl. 4.13 eingesetzt wird. Es folgt:

$$\begin{aligned} \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \frac{m^{2n}}{2^n N_c (n+1)!} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \delta_{\alpha\beta} \\ &\quad \times \underbrace{\left(g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} \cdots g_{\mu_{2n-1}\mu_{2n}} + \text{Perm.} \right)}_{(2n-1)!! \text{ Terme}} \xi^{\mu_1} \cdots \xi^{\mu_{2n}} \\ &= \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \frac{m^{2n}}{2^n (n+1)!} (\xi^2)^n \\ &\implies \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle = \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{m^2 \xi^2}{4} \right)^n}, \quad (4.29)$$

wobei in der letzten Zeile

$$\frac{(2n-1)!!}{2^n (2n)!} = \frac{1}{2^n (2n)!!} = \frac{1}{4^n n!} \quad (4.30)$$

benutzt wurde, wie man leicht durch vollständige Induktion bestätigt.

Gl. 4.29 ist eine geschlossene Darstellung des nichtlokalen Vakuumkondensates durch eine Entwicklung in der Masse der zugehörigen Felder, in der das lokale Vakuumkondensat als Konstante vor der Reihe steht. Auch hier sieht man (wie im fermionischen Fall), daß im Fall verschwindender Massen die Summe zusammenbricht und das nichtlokale Kondensat einfach proportional zum lokalen wird

$$\langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle = \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \quad (4.31)$$

Es stellt sich die Frage der Konvergenz dieser Reihe. Ist es gerechtfertigt, die Reihe nach n Termen abzubrechen oder nicht? ξ^2 ist der Abstand zwischen den Vertizes, der antiproportional zum Massenquadrat M^2 des einlaufenden Zustandes ist. Dies bedeutet, daß die Konvergenz der Reihe durch das Verhältnis m^2/M^2 bestimmt wird. Nur wenn die Masse der skalaren Quarks kleiner ist als die Masse des einlaufenden hadronischen Zustandes, kommt eine Konvergenz in Frage. Im Rahmen der betrachteten Fragestellung möchte man gerade wissen, ob der resultierende Zustand leichter sein könnte als seine Konstituenten, d. h. ob sich ein Teil der Konstituentenmassen wegbinden könnte. Relativ zu der Fragestellung gesehen, ist es demnach problematisch, die Reihe irgendwo abzubrechen. Sollte man daher eine Möglichkeit finden, die Größe der Kondensate so zu wählen, daß die Summenregel eine sehr kleine Masse des Bindungszustands voraussagt, wird es nicht möglich sein, eine zuverlässige Aussage über den absoluten Wert dieser Masse zu treffen, solange man die Reihe bei der Berechnung der Summenregel abbricht.

Man kann das Ergebnis 4.29 durch eine Besselfunktion ausdrücken. Diese sind durch

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\nu)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n+\nu} \quad (4.32)$$

definiert (Abramowitz, Stegun 1972, 9.1.10). Für $\nu = 1$ folgt

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dies ist genau die Form der Reihe, die das nichtlokale Kondensat bestimmt ($x := m|\xi|$), so daß alternativ zu Gl. 4.29 geschrieben werden kann

$$\boxed{\langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle = \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \frac{2}{m|\xi|} J_1(m|\xi|)} \quad (4.34)$$

Dieses Ergebnis ist insofern plausibel, als daß die Besselfunktion mit dem skalaren Propagator verwandt ist.

4.3 Kondensate mit 4 Feldern

Die Kondensate mit 4 Feldern sind durch einen Faktor $1/N_c^2$ unterdrückt. Sie werden mit der Hypothese behandelt, daß man ein 4-Teilchen Kondensat in zwei 2-Teilchen Kondensate aufspalten kann. Dies hat den Vorteil, daß man keine neuen Parameter $\langle \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi \rangle$ in die Berechnung einführt. Es gilt dann für Fermionen mit Gl. 4.11:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | : \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \gamma^\mu \psi_{j\beta}(x) \bar{\psi}_{k\eta}(y) \gamma^\nu \psi_{l\lambda}(y) : | 0 \rangle \\ &\approx \langle 0 | : \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \gamma_{ij}^\mu < 0 | : \psi_{j\beta}(x) \bar{\psi}_{k\eta}(y) : | 0 \rangle \gamma_{kl}^\nu \psi_{l\lambda}(y) : | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{4N_c} \langle \bar{\psi} \psi \rangle \delta_{jk} \delta_{\beta\eta} \langle 0 | : \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \psi_{l\lambda}(y) : | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{16N_c^2} \langle \bar{\psi} \psi \rangle^2 \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \delta_{jk} \delta_{\beta\eta} \delta_{il} \delta_{\alpha\lambda} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Entsprechend kann man mit Gl. 4.34 das 4-Bosonen Kondensat ausdrücken:

$$\begin{aligned} &\langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(x) \bar{\phi}_\eta(y) \phi_\lambda(y) : | 0 \rangle \\ &\approx \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) < 0 | : \phi_\beta(x) \bar{\phi}_\eta(y) : | 0 \rangle \phi_\lambda(y) : | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N_c} \delta_{\beta\eta} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \frac{2}{m|\xi|} J_1(m|\xi|) \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\lambda(y) : | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{N_c^2} \delta_{\beta\eta} \delta_{\alpha\lambda} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \frac{4}{m^2 \xi^2} J_1^2(m|\xi|)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

4.4 Die Fouriertransformierte der Kondensate

Da die Regularisierung der Feynmandiagramme in Gl. 3.23 im Impulsraum durchgeführt werden wird, ist es notwendig, die Fouriertransformationen der nichtlokalen Kondensate zu kennen. Für die masselosen Fermionen ist die Fouriertransformation trivial, da die nichtlokalen Kondensate konstant sind (siehe Gln. 4.11 und 4.35). Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle \} &= \frac{1}{4N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \int d^4x e^{ik(x-y)} \\
\iff \boxed{\mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \rangle \}} &= \frac{(2\pi)^4}{4N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta^4(k)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

bzw. für 4 Fermionen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \gamma_{ij}^\mu \psi_{j\beta}(x) \bar{\psi}_{k\eta}(y) \gamma_{kl}^\nu \psi_{l\lambda}(y) : | 0 \rangle \} \\
&= \frac{1}{16N_c^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \delta_{jk} \delta_{\beta\eta} \delta_{il} \delta_{\alpha\lambda} \int d^4x e^{ik(x-y)} \\
\iff \boxed{\mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\psi}_{i\alpha}(x) \gamma_{ij}^\mu \psi_{j\beta}(x) \bar{\psi}_{k\eta}(y) \gamma_{kl}^\nu \psi_{l\lambda}(y) : | 0 \rangle \}} &= \frac{(2\pi)^4}{16N_c^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \delta_{jk} \delta_{\beta\eta} \delta_{il} \delta_{\alpha\lambda} \delta^4(k)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Für das nichtlokale Kondensat aus 2 Bosonen gilt entsprechend mit Gl. 4.29

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : | 0 \rangle \} \\
&= \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \mathcal{F} \left\{ \left(\frac{m^2 \xi^2}{4} \right)^n \right\} \\
&= \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \int d^4x \left(\frac{m^2 \xi^2}{4} \right)^n e^{ik\xi} \\
&= \frac{1}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(n+1)!} \int d^4x \left(-\frac{m^2 \square_k}{4} \right)^n e^{ik\xi}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} & \mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(y) : |0 \rangle \} \\ & = \frac{(2\pi)^4}{N_c} \delta_{\alpha\beta} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{m^2 \square_k}{4} \right)^n \delta^4(k) \end{aligned}}, \quad (4.39)$$

wobei

$$\square_k = \left(\frac{\partial}{\partial k_0}, -\nabla_k \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial k_0}, -\nabla_k \right) \quad (4.40)$$

Schließlich ergibt sich auf dieselbe Weise die Fouriertransformierte des Kondensats aus 4 Bosonen

$$\boxed{\begin{aligned} & \langle 0 | : \bar{\phi}_\alpha(x) \phi_\beta(x) \bar{\phi}_\eta(y) \phi_\lambda(y) : |0 \rangle \\ & = \frac{(2\pi)^4}{N_c^2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi} \phi \rangle^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!(n+1)!(m+1)!} \left(\frac{m^2 \square_k}{4} \right)^{n+m} \delta^4(k) \end{aligned}}, \quad (4.41)$$

wobei das Kondensat zunächst wie in Gl. 4.36 in ein Produkt von 2 Kondensaten zerlegt wird, die beide Gl. 4.29 genügen. Die daraus entstehende Doppelsumme ist dann exakt wie in Gl. 4.39 fouriertransformiert worden.

Die Gln. 4.37 bis 4.41 werden in Kap. 5 über die Berechnung der Feynmangraphen, die in Gl. 3.23 auftreten, zugrunde gelegt.

Kapitel 5

Regularisierung der Feynmangraphen

Dieses Kapitel ist der Berechnung aller in Gl. 3.23 auftretenden Feynmangraphen gewidmet. Bevor die konkreten Rechnungen begonnen werden, einige Bemerkungen. Der volle perturbative Graph ohne Kondensate (Abb. 5.2) hat 3 Loops, so daß die Amplitude im Impulsraum über eine dreifache Integration zu ermitteln sein wird. Bei der Regularisierung dieses und des 2-Loop Graphen mit einem bosonischen Kondensat (Abb. 5.3) entstehen Probleme, wenn man die Masse der Bosonen exakt mitnehmen will. Aus diesem Grund werden zunächst die Propagatoren und das skalare Kondensat in der Masse entwickelt und bis zur Ordnung m^2 konsistent berücksichtigt. Die Propagatoren werden jedoch dadurch für verschwindende Virtualitäten divergent, was für den 2-Loop-Graphen zu Infrarot-Divergenzen führt. Diese müssen durch einen Cutoff reguliert werden, was im Prinzip dem Wiedereinführen einer Masse entspricht (Kap. 5.3.1).

Für alle Graphen, die mindestens 2 Kondensate enthalten, entstehen keine weiteren Schwierigkeiten, da durch ein Kondensat kein Impuls fließt und deshalb der Impuls auf Null festgelegt wird (daher die δ -Funktionen in den Graphen). Durch jedes Kondensat wird deshalb eine Integration erschlagen. Beispielsweise führen 2 Kondensate auf eine einfache Integration, wie sie in Kap. 2.2.2 reguliert wurde. Graphen mit 3 Kondensaten werden trivial, da überhaupt keine Integration mehr

ausgeführt werden muß. Schließlich verschwindet der Graph mit 4 Kondensaten, da durch diesen überhaupt kein Impuls mehr fließen kann.

Für die konkreten Rechnungen wird wie folgt vorgegangen. Zunächst kann man zeigen, daß alle Graphen, die nur ein fermionisches Kondensat enthalten — also bereits die Hälfte aller Graphen —, verschwinden (siehe Kap. 5.1). Die übrigen 7 Graphen müssen in gesonderten Kapiteln behandelt werden.

5.1 Graphen mit einem Fermionen-Kondensat

Die Berechnung der Graphen mit einem fermionischen Kondensat verläuft immer nach dem gleichen Muster. Deshalb wird der Weg exemplarisch für den Graphen, der außer dem fermionischen Kondensat keine weiteren Kondensate enthält, vorgeführt. Dies entspricht dem 8-ten Term in Gl. 3.23

$$\Pi_8(k^2) = \frac{g^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ (\gamma^\mu)_{ik} S_{kl}(x-y) (\gamma^\nu)_{kj} < 0 | : \bar{\psi}_{\alpha i}(x) \psi_{\beta j}(y) : | 0 \right. \\ \left. Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \right\} \quad (5.1)$$

und dem Graphen in Abb. 5.1

Abbildung 5.1: Graph mit einem fermionischen Kondensat

Das nichtlokale Kondensat kann mit Hilfe von Gl. 4.11 für masselose Fermionen ausgedrückt werden. Da die Fermionen masselos sind, bekommt man einen

ortsunabhängigen Ausdruck. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Pi_8(k^2) &= \frac{g^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ (\gamma^\mu)_{ik} S_{kl}(x-y) (\gamma^\nu)_{lj} \frac{1}{4N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \right. \\
&\quad \left. Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \right\} \\
&= \frac{g^2}{12N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ (\gamma^\mu)_{ik} S_{kl}(x-y) (\gamma^\nu)_{li} \right. \\
&\quad \left. Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \right\} \\
&= \frac{g^2}{12N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ Sp\{\gamma^\mu S(x-y)\gamma^\nu\} Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \right\}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Die Spur über den fermionischen Propagator und 2 Gamma-Matrizen verschwindet, da der Propagator für Fermionen ohne Masse im Ortsraum durch $\frac{\not{x}}{x^4}$ gegeben ist. Damit erhält man eine Spur über eine ungerade Anzahl von Gamma-Matrizen, die immer verschwindet. Man sieht hier ein, daß diese Argumentation nur richtig ist, wenn man den Fermionen die Masse Null zuordnet. Denn sonst gäbe es in dem Propagator noch weitere additive Terme (im Wesentlichen Besselfunktionen), und es gäbe Beiträge zur Spur, die nur 2 Gamma-Matrizen enthielten. Man würde dann einen Beitrag zu den Graphen mit einem fermionischen Kondensat erwarten, der in seiner Bedeutung durch die Größe der Masse bestimmt wäre. Da die Masse der fermionischen leichten Quarks in der QCD klein ist, kann man von einer guten Näherung ausgehen.

Die obige Argumentation ist völlig unabhängig von dem skalaren Teil in der Amplitude. Sie bleibt daher für alle Graphen mit genau einem fermionischen Kondensat korrekt, unabhängig von der Zahl der bosonischen Kondensate. Damit folgt:

$$\boxed{\Pi_n(k^2) = 0 \quad \text{für } n \in \{5, 6, \dots, 12\}} \quad , \tag{5.3}$$

wobei sich der Index n auf den n -ten Summanden in Gl. 3.23 bezieht.

5.2 Der perturbative Graph ohne Kondensate

5.2.1 Aufstellen der Amplitude

Abbildung 5.2: Der perturbative Graph

Der Graph, der in diesem Kapitel besprochen wird, entspricht dem 16-ten Term in Gl. 3.23. Es ist der Graph, der den Koeffizienten des Einheitsoperators in der Operatorproduktentwicklung darstellt, d. h. den rein perturbativen Teil der entwickelten Polarisationsfunktion. Die Fouriertransformierte des Graphen lautet

$$\Pi_{16}(k^2) = \frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ Sp \left\{ S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu \right\} Sp \left\{ \Delta(x-y) \Delta(y-x) \right\} \right\} \quad (5.4)$$

Dabei konnte der Vakuumerwartungswert durch eine Eins ersetzt werden, da er keine Operatorprodukte, sondern nur Propagatoren enthält.

Die Fouriertransformation eines Produktes von 2 Funktionen ist gleich der Faltung der Fouriertransformationen der einzelnen Funktionen, d. h. es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(x)g(x)\} &= \mathcal{F}f(x) * \mathcal{F}g(x) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{F}\{f(x)\}(p) \mathcal{F}\{g(x)\}(k-p) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser Beziehung kann die Fouriertransformation explizit durchgeführt werden:

$$\Pi_{16}(k^2) = \frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ Sp \left\{ \Delta(x-y) \Delta(y-x) \right\} \right\} (q)$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}\{Sp\{S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu\}\}(k-q) \\
= & \frac{ig^2}{3}g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\{\mathcal{F}\{\Delta(x-y)\}(p)\mathcal{F}\{\Delta(y-x)\}(q-p)\} \\
& \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp\{\mathcal{F}\{S(x-y)\}(p')\gamma^\mu\mathcal{F}\{S(y-x)\}(k-q-p')\gamma^\nu\} \\
\Rightarrow & \boxed{\begin{aligned} \Pi_{16}(k^2) = & \frac{ig^2}{3}g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \\ & \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp\{S(p')\gamma^\mu S(p'-(k-q))\gamma^\nu\} \end{aligned}} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck hätte auch mit den Feynmanregeln direkt von dem Feynmangraphen (Abb. 5.2) abgelesen werden können. Man erkennt die richtigen Energie-Impuls-Vektoren wieder, wie sie zur Gewährleistung der Energie-Impulserhaltung am Vertex notwendig sind.

Die resultierende Amplitude ist demnach im Impulsraum ein Dreifach-Integral, das den skalaren und den fermionischen 1-Loop-Graphen als Integranden eines äußeren Faltungsintegrals enthält. Anders gesagt, die beiden inneren Loopintegrale haben jeweils die Funktion eines Propagators in einem äußeren 1-Loop-Graphen. 3-Loop-Integrale sind nach den in Kap. 2.1.3 beschriebenen Regeln zu regularisieren. Die Dimensionen der 3 Integrale müssen zu jedem Zeitpunkt identisch sein, die Integrale sind einzeln zu regularisieren, und nach jedem Schritt ist der divergente Teil abzuziehen. Dabei treten jedoch Probleme auf, die im folgenden aufgezeigt werden.

Das letzte Integral in Gl. 5.6 über d^4p' ist bereits für masselose Propagatoren ausgewertet. Das Ergebnis findet sich in Gl. 2.51. Im Prinzip ist auch schon das Integral über d^4p in Gl. 2.33 berechnet worden. Setzt man beide Ergebnisse zusammen, ergibt sich für das Faltungsintegral über d^4q :

$$\begin{aligned}
\Pi_{16}(k^2) = & -\frac{12N_c}{9} \frac{ig^2\pi^4}{(2\pi)^8} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
& \times \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + i\pi\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \Theta(q^2 - 4m^2) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \right\} \\
& \times \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left| \frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right| + i\pi\Theta(q^2) \right\} \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Die beiden Terme, die ε enthalten, werden abgezogen, und es verbleibt ein nicht analytisch lösbares Integral über ein Produkt von Logarithmen. Eine numerische Lösung des Integrals kommt zu diesem Zeitpunkt nicht in Frage, da das Ergebnis ein weiteres Mal integriert werden muß, um die Boreltransformation durchzuführen, die für die Isolation der niedrigsten Resonanz nötig sein wird (siehe Kap. 1.4.1). Auch die Idee, die Boreltransformation vorzuziehen — zumal dieser Schritt auch sehr zweifelhaft wäre, da man die Integrationen vertauschen würde, obwohl das innerste Integral vor der Regularisierung noch divergent ist —, führt zu keinem brauchbaren Ausdruck.

Aus diesen Gründen werden die skalaren Propagatoren in der Hoffnung, daß die dann auftretenden Integrale lösbar sind, in der Masse entwickelt. Dabei werden alle Terme bis zur Ordnung m^2 berücksichtigt, was eine Einschränkung für die Größe der Masse der skalaren Quarks bedeutet. Deshalb wird nach einer Alternative für die Berechnung des perturbativen Graphen gesucht. In Kap. 7.1 wird gezeigt, wie man den Imaginärteil des Graphen — und nur diesen benötigt man für die aufzustellende Summenregel — berechnet. Hier soll zunächst die Entwicklung in der Masse der skalaren Quarks beschrieben werden.

5.2.2 Entwicklung des skalaren Polarisationsgraphen in der Masse

In diesem Abschnitt wird der skalare 1-Loop-Graph in Abb. 2.3 noch einmal reguliert, jedoch wird der skalare Propagator in der Masse entwickelt. Der skalare Propagator aus Gl. 3.8 lautet entwickelt:

$$\Delta(p) = -\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = -\frac{1}{p^2 + i\epsilon} - \frac{m^2}{(p^2 + i\epsilon)^2} - \frac{m^4}{(p^2 + i\epsilon)^3} + \mathcal{O}(m^6) \quad (5.8)$$

Die zu Gl. 2.19 entsprechende Gleichung lautet mit diesem Propagator

$$\begin{aligned}
\Pi_S(q) &= ig^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \\
&= iN_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 + i\epsilon} + \frac{m^2}{(p^2 + i\epsilon)^2} + \frac{m^4}{(p^2 + i\epsilon)^3} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{(p-q)^2 + i\epsilon} + \frac{m^2}{((p-q)^2 + i\epsilon)^2} + \frac{m^4}{((p-q)^2 + i\epsilon)^3} \right) \\
&= iN_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(p^2 + i\epsilon)((p-q)^2 + i\epsilon)} + \frac{m^2}{(p^2 + i\epsilon)^2((p-q)^2 + i\epsilon)} \right. \\
&\quad + \frac{m^2}{(p^2 + i\epsilon)((p-q)^2 + i\epsilon)^2} + \frac{m^4}{(p^2 + i\epsilon)^3((p-q)^2 + i\epsilon)} \\
&\quad \left. + \frac{m^4}{(p^2 + i\epsilon)^2((p-q)^2 + i\epsilon)^2} + \frac{m^4}{(p^2 + i\epsilon)((p-q)^2 + i\epsilon)^3} \right) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Spur über den Farbraum ausgeführt, was den Faktor N_c zur Folge hat.

Alle auftretenden Integrale wurden bereits in Kap. 2.2.5 regularisiert. Mit der Definition 2.52 kann der in der Masse entwickelte, skalare Polarisationsgraph als Summe der Integrale $I^{r,s}$ geschrieben werden. Dabei kann die Symmetrie im Austausch der Potenzen r und s ausgenutzt werden.

$$\begin{aligned}
\Pi_S(q) &= 3g^2 \{ I^{1,1}(q^2) + m^2 I^{1,2}(q^2) + m^2 I^{2,1}(q^2) \\
&\quad + m^4 I^{3,1}(q^2) + m^4 I^{2,2}(q^2) + m^4 I^{1,3}(q^2) \} \\
&= 3g^2 \{ I^{1,1}(q^2) + 2m^2 I^{1,2}(q^2) + 2m^4 I^{1,3}(q^2) + m^4 I^{2,2}(q^2) \} \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der in ϵ entwickelten Darstellungen (Gln. 2.59–2.62) für die auftretenden Integrale $I^{r,s}$ kann ein geschlossener Ausdruck für den skalaren Polarisations-

tionsgraphen bis zu 2-ten Ordnung in der Masse angegeben werden.

$$\begin{aligned}
 \Pi_S(q) &= ig^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \\
 &= -N_c g^2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2m^2}{q^2} \left(-\frac{2}{\varepsilon} + \gamma - \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2m^4}{q^4} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 2 - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Dieser Ausdruck kann für die weitere Berechnung des Graphen in Abb. 5.2 zugrunde gelegt werden.

5.2.3 Die Faltung von 2 Loops

Nun zurück zu dem Ausdruck 5.6, der die Amplitude des Graphen in Abb. 5.2 darstellt. Die beiden inneren Integrationen sind gelöst und liegen in regularisierter und in ε entwickelter Form vor (Gln. 2.51 und 5.11). Die $\frac{1}{\varepsilon}$ -Terme sind die Counterterme, die in die Renormierung eingehen, und werden im folgenden abgezogen. Über den endlichen Rest muß noch die dritte Integration durchgeführt werden, die als Faltungsintegral (Schwartz 1966)

$$\int d^4q f(q) g(k-q) \tag{5.12}$$

über die beiden Funktionen 2.51 und 5.11 aufgefaßt werden kann. Dabei ist zu beachten, daß in Gl.2.51 die Ersetzung $q \rightarrow (k-q)$ zu machen ist (vgl. die Integrationsvariablen in 5.6).

Um übersichtlich zu bleiben, wird im folgenden eine Trennung der verschiedenen Ordnungsterme in der Masse vorgenommen. Die Ordnung soll dabei als oberer Index erscheinen (Π_{16}^1 für den Beitrag proportional m^2).

Beitrag nullter Ordnung

Den Beitrag nullter Ordnung erhält man aus Gl. 5.6, indem man für die beiden inneren Loopintegrale die regularisierten Ausdrücke 2.51 sowie den Teil von Gl. 5.11 einsetzt, der proportional zu $m^0 = 1$ ist.

$$\begin{aligned}
\Pi_{16}^0(k^2) &= -\frac{1}{3}ig_{\mu\nu}N_c g^2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\{ 2 - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right\} \\
&\quad \{g^{\mu\nu}(k-q)^2 - (k-q)^\mu(k-q)^\nu\} \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= -ig^2 \frac{4N_c^2\pi^4}{9(2\pi)^8} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\{ 2 - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right\} \\
&\quad \{g^{\mu\nu}(k-q)^2 - (k-q)^\mu(k-q)^\nu\} \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= -ig^2 \frac{4N_c^2\pi^4}{3(2\pi)^8} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\{ 2 - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right\} \\
&\quad (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= -ig^2 \frac{4N_c^2\pi^4}{3(2\pi)^8} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \\
&\quad \times \left\{ \underbrace{(2-\gamma) \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right)}_{\text{1. Term}} + \underbrace{(2-\gamma) \left(\frac{5}{3} - \gamma \right)}_{\text{2. Term}} \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\left(\frac{5}{3} - \gamma \right) \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)}_{\text{3. Term}} + \underbrace{\ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right)}_{\text{4. Term}} \right\} \quad (5.13)
\end{aligned}$$

Der zweite Term ist ein Integral der Form

$$\int d^d q (k-q)^2 = \int d^d q (k^2 - 2k \cdot q + q^2) \quad . \quad (5.14)$$

Der mittlere Teil des Integranden verschwindet, da ein asymmetrischer Integrand über den gesamten Raum integriert wird. Das verbleibende Integral ist von der Form 2.16 und ist deshalb identisch Null, so daß der zweite Term in Gl. 5.13 verschwindet. Der dritte Term ist gerade das Integral J_{-1} in Gl. 2.63 und verschwindet deshalb ebenfalls. Der erste Term ist das Integral I_{-1} in Gl. 2.67. Die regularisierte Form von I_{-1} ist identisch Null, wie man in Gl. 2.74 erkennt. Der vierte Term mit

den 2 Logarithmen führt auf das Integral K_{-1} in Gl. 2.77. Von diesem Term stammt der einzige Beitrag in Gl. 5.13. Die Regularisierung wurde in Kap. 2.2.6 mit dem Ergebnis 2.83 durchgeführt. Dieses ist in Gl. 5.13 einzusetzen.

$$\begin{aligned} \Pi_{16}^0(k^2) &= -g^2 \frac{4N_c^2 \pi^4}{3(2\pi)^8} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2}\right) \\ &\implies \\ \boxed{\Pi_{16}^0(k^2) &= g^2 \frac{N_c^2 \pi^6}{54(2\pi)^{12}} k^6 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{7}{2} - \gamma + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dies ist der vollständige Ausdruck für den Graphen in Abb. 5.2 in nullter Ordnung der Masse des skalaren Quarks, also de facto ohne Masse. Um später die Summenregel aufzustellen, benötigt man den Imaginärteil der Polarisationsfunktion, der in dem Logarithmus steckt (siehe Gl. B.45):

$$\boxed{\Im \{ \Pi_{16}^0(k^2) \} = g^2 \frac{N_c^2 \pi^7}{54(2\pi)^{12}} k^6 \Theta(k^2)} \quad (5.16)$$

Beitrag erster Ordnung

Um den Beitrag erster Ordnung in der Masse der skalaren Quarks zu bestimmen, werden in Gl. 5.6 für die beiden inneren Loopintegrale wieder 2.51 und 5.11 eingesetzt, jedoch diesmal der Teil, der proportional zu m^2 ist.

$$\begin{aligned} \Pi_{16}^1(k^2) &= -i \frac{1}{3} \frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} N_c g^2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2m^2}{q^2} \left\{ \gamma - \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \\ &\quad \times 3(k-q)^2 \left\{ -\gamma + \frac{5}{3} + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \\ &= -ig^2 \frac{4N_c^2 \pi^4}{3(2\pi)^8} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \frac{2m^2}{q^2} \left\{ \gamma - \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \\ &\quad \times \left\{ -\gamma + \frac{5}{3} + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\} \\ &= -ig^2 m^2 \frac{8N_c^2 \pi^4}{3(2\pi)^8} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{q^2} \underbrace{\left\{ \left(\gamma - \frac{5}{3}\right) \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\}}_{1. \text{ Term}} \end{aligned}$$

$$+ \underbrace{\gamma \left(\frac{5}{3} - \gamma \right)}_{2. \text{ Term}} + \underbrace{\gamma \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right)}_{3. \text{ Term}} - \underbrace{\ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right)}_{4. \text{ Term}} \} \quad (5.17)$$

Wie bei der Berechnung der Beiträge nullter Ordnung in der Masse fällt der erste Term wegen Gl. 2.63 weg. Ebenso wie der zweite Term, der wieder aufgrund der Asymmetrie des Integranden und Gl. 2.16 identisch verschwindet (siehe auch die Diskussion von Gl. 5.14). Die beiden letzten Terme jedoch verschwinden nicht. Es sind die Integrale I_0 von Gl. 2.67, sowie K_0 aus Gl. 2.77. Sie werden in regularisierter Form (Gln. 2.75 und 2.86) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Pi_{16}^1(k^2) &= -g^2 m^2 \frac{8N_c^2 \pi^4}{3(2\pi)^8} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{q^2} \\ &\quad \times \left\{ \gamma \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) - \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\ &= -g^2 m^2 \frac{4N_c^2 \pi^6}{9(2\pi)^{12}} k^4 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \gamma + \frac{11}{3} \gamma - \gamma^2 + \gamma \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) + \frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{27}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} - 2\gamma \right) - \frac{1}{2} \zeta(2) - \frac{7}{12} \gamma + \gamma^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{10}{3} \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi_{16}^1(k^2) &= -g^2 m^2 \frac{4N_c^2 \pi^6}{9(2\pi)^{12}} k^4 \left\{ \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{2}{3\varepsilon} - \frac{27}{4} - \frac{1}{2} \zeta(2) + \frac{37}{12} \gamma \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{10}{3} - \gamma \right) \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \frac{1}{2} \ln^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\} \end{aligned}} \quad (5.18)$$

Damit ist auch der regularisierte Ausdruck für den Graphen in Abb. 5.2 in erster Ordnung der Masse der skalaren Quarks gefunden. Es bleibt nur der Imaginärteil für die Summenregel zu bestimmen. Es ist zu beachten, daß von beiden Termen, die einen Logarithmus enthalten, ein Imaginärteil kommen kann. Für den einfachen Logarithmus ist dieser durch Gl. B.45 bestimmt. Für den quadratischen Term gilt:

$$\ln^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) = \left(\ln \left| -\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right| + i\pi \Theta(k^2) \right)^2$$

$$= \ln^2 \left| -\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right| - \pi^2 \Theta(k^2) + 2i\pi \ln \left| -\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right| \Theta(k^2) \quad (5.19)$$

Damit kann man den Imaginärteil einfach ablesen:

$$\Im \{ \Pi_{16}^1(k^2) \} = g^2 \frac{4N_c^2 \pi^7}{9(2\pi)^{12}} m^2 k^4 \left(\frac{10}{3} - \gamma + \ln \left| -\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right| \right) \Theta(k^2) \quad (5.20)$$

5.3 Graphen mit einem skalaren Kondensat

5.3.1 Aufstellen des Integrals

Abbildung 5.3: Graph mit genau einem bosonischen Kondensat

Dieser Graph entspricht dem 14-ten und 15-ten Term in Gl. 3.23. Es ist der erste nichtperturbative Beitrag zur Polarisationsfunktion, denn anders als der perturbative Graph enthält dieser ein skalares Kondensat, was die Zahl der Integrationen um eins verringert. Da der skalare Propagator ebenso wie das skalare Kondensat beim Austausch von x und y symmetrisch ist, sind beide Beiträge identisch, so daß man sich auf die Berechnung eines Termes mit dem Faktor 2 beschränken kann. Der Graph lautet in Formeln:

$$\Pi_{14+15}(k^2) = -\frac{2g^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \{ \Delta(x-y) < 0 \mid : \bar{\phi}(x) \phi(y) : \mid 0 \rangle \} \quad (5.21)$$

$$Sp \{ S(x-y) \gamma^\mu S(y-x) \gamma^\nu \}$$

Mit Hilfe von Gl. 5.5 wird die Fouriertransformation auf die einzelnen Teile des Integranden angewendet. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\Pi_{14+15}(k^2) &= -\frac{2g^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ \Delta(x-y) < 0 \mid : \bar{\phi}(x)\phi(y) : \mid 0 \rangle \right\} (q) \\
&\quad \mathcal{F} \{ Sp \{ S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu \} \} (k-q) \\
&= \frac{2i}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ < 0 \mid : \bar{\phi}(x)\phi(y) : \mid 0 \rangle \right\} (p) \Delta(p-q) \\
&\quad ig^2 g_{\mu\nu} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp \{ S(p')\gamma^\mu S(p'+q-k)\gamma^\nu \} \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Die letzte Integration stellt den kontrahierten Polarisationsensor eines Fermionenloops dar. Dieser Graph wurde bereits in Gl. 2.51 regularisiert. Die Fouriertransformierte des skalaren Kondensats ist in Gl. 4.39 hergeleitet. Da die Masse der skalaren Quarks berücksichtigt werden soll, ist das Kondensat keine Konstante, sondern ortsabhängig und führt im Impulsraum auf eine Reihe von Differentialoperatoren und eine δ -Funktion. Diese Gleichungen werden eingesetzt und etwas umsortiert:

$$\begin{aligned}
\Pi_{14+15}(k^2) &= -\frac{2i}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p-q) \\
&\quad \times \frac{(2\pi)^4}{N_c} \delta_{\alpha\beta} < \bar{\phi}\phi > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{m^2 \square_p}{4} \right)^n \delta^4(p) \\
&\quad \times 4N_c \frac{\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= -ig^2 \frac{8N_c \pi^2}{3} < \bar{\phi}\phi > \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(\frac{-4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&\quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Delta(p-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{m^2 \square_p}{4} \right)^n \delta^4(p) \quad (5.23)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt gleichzeitig das Kroneckersymbol $\delta_{\alpha\beta}$ ausgeführt wurde. Es ergibt sich dadurch eine Spur über eine Einheitsmatrix im Farbraum, was einem Faktor N_c gleichkommt.

Der Counterterm $\frac{2}{\varepsilon}$ wird im folgenden weggelassen. Dieser Schritt entspricht dem Verfahren der sukzessiven Regularisierung von Mehrloopgraphen, wie es in Kap. 2.1.3 erläutert wurde. Entsprechend der Behandlung des perturbativen Graphen soll der skalare Propagator in der Masse entwickelt werden. Es ist wenig

sinnvoll, den Graphen mit einem skalaren Kondensat exakt in der Masse zu berechnen, wenn andere Graphen in der Masse entwickelt und bis zur ersten Ordnung berücksichtigt werden. In Kap. 7 wird trotzdem ein Weg vorgestellt, wie man den Propagator exakt in der Masse behandeln kann, ohne daß der Mehraufwand für die Berechnung wesentlich höher wird.

Der entwickelte skalare Propagator findet sich in Gl. 5.8 und wird in Gl. 5.23 eingesetzt. Um konsistent in der Ordnung der Masse zu bleiben, benötigt man dann nur noch die ersten Terme der Reihe, die von dem Kondensat stammt.

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}(k^2) &= \frac{8iN_c\pi^2g^2}{3} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\ &\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(p-q)^2 + i\epsilon} + \frac{m^2}{((p-q)^2 + i\epsilon)^2} + \frac{m^4}{((p-q)^2 + i\epsilon)^3} \right\} \\ &\left\{ 1 + \frac{m^2\Box_p}{8} + \frac{m^4\Box_p^2}{192} \right\} \delta^4(p) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Differentiation der Distribution $\delta^4(p)$ wird mit Hilfe von Gl. 1.35 auf den entwickelten Propagator umgewälzt.

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}(k^2) &= \frac{8iN_c\pi^2g^2}{3} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\ &\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta^4(p) \left\{ 1 + \frac{m^2\Box_p}{8} + \frac{m^4\Box_p^2}{192} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{(p-q)^2 + i\epsilon} + \frac{m^2}{((p-q)^2 + i\epsilon)^2} + \frac{m^4}{((p-q)^2 + i\epsilon)^3} \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Beim Ausmultiplizieren der beiden Klammern werden die Differentiationen mit Hilfe von Gl. B.46 ausgeführt, aus der die Beziehungen

$$\begin{aligned} \Box_p \frac{1}{(p-q)^2 + i\epsilon} &= 0 \\ \Box_p \frac{1}{((p-q)^2 + i\epsilon)^2} &= 8 \frac{1}{((p-q)^2 + i\epsilon)^3} \\ \Box_p^2 \frac{1}{((p-q)^2 + i\epsilon)^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

folgen, wobei die Verschiebung der Pole in die imaginäre Ebene um ε auf die Formel B.46 keinen Einfluß hat, da für kleine ε gilt:

$$\frac{1}{(p^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{1}{(p^2)^{n-1}} \frac{1}{p^2 + i\varepsilon} \quad (5.27)$$

Durch Anwendung der Gln. 5.26 auf 5.25 fallen einige der Terme in den geschweiften Klammern weg. Dies führt auf eine vereinfachte Form des Integranden

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}(k^2) = & \frac{8iN_c\pi^2 g^2}{3} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\ & \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p) \left\{ \frac{1}{(p-q)^2 + i\varepsilon} + \frac{m^2}{((p-q)^2 + i\varepsilon)^2} + \frac{2m^4}{((p-q)^2 + i\varepsilon)^3} \right\} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Es ist bemerkenswert, daß die Berücksichtigung der Masse der skalaren Quarks, die auf ortsabhängige skalare Kondensate führt, bis zur ersten Ordnung der Masse in diesem Graphen keine Rolle spielt. Vergleicht man die Gln. 5.25 und 5.28, so ist unschwer zu erkennen, daß der entwickelte skalare Propagator bis zur ersten Ordnung nur abgeschrieben wurde, obwohl die Differentiationen, die von der Entwicklung des Kondensates stammen, ausgeführt wurden. Es sieht deshalb so aus, als wäre der skalare Propagator bis zur ersten Ordnung der Masse nur mit der Identität multipliziert worden, was einem ortsunabhängigen Kondensat entspricht. Tatsächlich liegt die Ursache in Gl. 5.26, d. h. dem Verschwinden diverser Ableitungen. *Erst in zweiter Ordnung macht sich die Ortsabhängigkeit des Kondensates durch einen Faktor 2 bemerkbar.*

Nachdem die Differentiationen ausgeführt wurden, kann mit der δ -Funktion die p -Integration ausgeführt werden:

$$\boxed{\Pi_{14+15}(k^2) = \frac{8iN_c\pi^2 g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \times \left\{ \frac{1}{q^2 + i\varepsilon} + \frac{m^2}{(q^2 + i\varepsilon)^2} + \frac{2m^4}{(q^2 + i\varepsilon)^3} \right\}} \quad (5.29)$$

Dies ist der Ausdruck für den Graphen aus Abb. 5.3 bis zur *zweiten* Ordnung in der Masse der skalaren Quarks. Um die Regularisierung der auftretenden Integrale

fortzusetzen, werden die ersten beiden Ordnungen in der Masse getrennt behandelt. Der obere Index an Π_{14+15} bezeichnet dabei die gerade betrachtete Ordnung.

5.3.2 Beitrag nullter Ordnung

Der Beitrag nullter Ordnung kann von Gl. 5.29 abgelesen werden.

$$\Pi_{14+15}^0(k^2) = \frac{8iN_c\pi^2g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{q^2+i\epsilon} \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \quad (5.30)$$

Man sieht leicht ein, daß der Term $\frac{5}{3} - \gamma$ nicht zu der Amplitude beiträgt. Das zugehörige Integral

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{q^2} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - 2k \cdot q + q^2}{q^2} = 0 \quad (5.31)$$

verschwindet, denn der mittlere Term ist asymmetrisch und wird über den gesamten Raum integriert. Die anderen beiden Summanden verschwinden aufgrund von Gl. 2.16 bei der dimensional Regularisierung.

Das verbleibende Integral mit einem Logarithmus ist vom Typ I_0 in Gl. 2.67. Der regularisierte Ausdruck 2.75 wird eingesetzt

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}^0(k^2) &= -\frac{8N_c\pi^2g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{q^2+i\epsilon} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\ \implies \boxed{\Pi_{14+15}^0(k^2) &= \frac{4N_c\pi^4g^2}{9(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle k^4 \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \frac{11}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\}} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Dies ist der regularisierte Ausdruck für den Graphen in Abb. 5.3 in nullter Ordnung der Masse der skalaren Quarks. Das Kondensat wurde bis hier als Konstante behandelt. Den Imaginärteil erhält man mit Hilfe von Gl. B.45:

$$\boxed{\Im\{\Pi_{14+15}^0(k^2)\} = \frac{4N_c\pi^5g^2}{9(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle k^4 \Theta(k^2)} \quad (5.33)$$

5.3.3 Beitrag erster Ordnung, die Behandlung von IR-Divergenzen

Der Beitrag erster Ordnung in der Masse der skalaren Quarks zu dem Graphen in Abb. 5.3 kann ebenfalls in Gl. 5.29 abgelesen werden. Es ist

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}^1(k^2) &= \frac{8N_c\pi^2 g^2 m^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \\ &\quad i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2+i\epsilon)^2} \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Für den Term proportional zu $\frac{5}{3} - \gamma$ kann die Argumentation zu Gl. 5.31 wiederholt werden. Der einzige Beitrag zu der Amplitude stammt demnach von dem logarithmischen Term.

$$\Pi_{14+15}^1(k^2) = -\frac{8N_c\pi^2 g^2 m^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \underbrace{i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2+i\epsilon)^2} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)}_{=I_1} \quad (5.35)$$

Dieses Integral ist vom Typ I_1 in Gl. 2.67. Bei der Regularisierung wird man jedoch auf doppelte Divergenzen geführt (siehe Gl. 2.76), die gleichzeitig Terme der Art $\frac{1}{\epsilon} \ln(-k^2)$ hervorbringen. Das bedeutet, daß man einen divergenten Imaginärteil bekommt, der für das Aufstellen von Summenregeln völlig unbrauchbar ist. Um ein brauchbares Ergebnis zu erhalten, ist es sicherlich sinnvoll, nach der Herkunft dieser doppelten Divergenz zu suchen.

Ausgehend von Gl. 2.69 für $n = 1$

$$I_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{k^2 - 2k \cdot q + q^2}{(q^2+i\epsilon)^2 ((k-q)^2)^{-\eta}} \quad (5.36)$$

soll untersucht werden, welche Teile des Integranden zu UV- bzw. IR-Divergenzen führen. Dies geschieht durch einfaches Abzählen der Potenzen in q . Das Volumenelement wird wie $d^4q = |q|^3 d|q|$ behandelt. Für große $|q|$ ist $|k| \ll |q|$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Term} \sim k^2 : \quad I_{k^2} &\sim \frac{dq}{q^{1-2\eta}} \implies \text{logarithmisch UV-divergent} \\ \text{Term} \sim k \cdot q : \quad I_{kq} &\sim \frac{dq}{q^{-2\eta}} \implies \text{linear UV-divergent} \\ \text{Term} \sim q^2 : \quad I_{q^2} &\sim \frac{q dq}{q^{-2\eta}} \implies \text{quadratisch UV-divergent} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Hingegen gilt für kleine $|q|$, wenn $|k|$ dominiert:

$$\begin{aligned}
\text{Term} \sim k^2 : I_{k^2} &\sim \frac{dq}{q} \implies \text{logarithmisch IR-divergent} \\
\text{Term} \sim k \cdot q : I_{kq} &\sim dq \implies \text{IR-konvergent} \\
\text{Term} \sim q^2 : I_{q^2} &\sim q dq \implies \text{IR-konvergent}
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Man erkennt anhand dieser Aufstellung, daß der Term proportional k^2 auf beiden Seiten divergent ist, im infraroten und im ultravioletten Bereich. Die beiden anderen Terme enthalten wie alle bisher betrachteten Integrale nur Divergenzen im UV-Bereich. Bei der Regularisierung wird demnach für alle 3 Terme eine gemeinsame divergente Γ -Funktion zu erwarten sein, die die gemeinsame UV-Divergenz widerspiegelt. Hingegen wird die Regularisierung des Integrals I_{k^2} eine weitere divergente Γ -Funktion aufweisen, die die IR-Divergenz repräsentiert. Diese Vermutung wird im folgenden nachgewiesen, indem die 3 Teile von

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \{I_{k^2} + I_{kq} + I_{q^2}\} \\
&= I_{k^2}^{\eta=0} + I_{kq}^{\eta=0} + I_{q^2}^{\eta=0}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

noch einmal getrennt voneinander regularisiert werden. Der obere Index $\eta = 0$ soll die 3 Integrale jeweils nach Differentiation und Grenzwertprozeß darstellen.

Das Integral I_{k^2}

Das erste Integral, das betrachtet wird, soll das zu k^2 Gehörige sein. Es wird mit Hilfe der Feynmanparametrisierung B.4 regularisiert. Die dimensionale Fortsetzung 2.21 liefert:

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &\equiv \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(q^2 + i\epsilon)^2 ((k - q)^2)^{-\eta}} \\
&= i \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(q^2 + i\epsilon)^2 ((k - q)^2)^{-\eta}} \\
&= ik^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2 - \eta)}{\Gamma(-\eta)} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{x^{-1-\eta} (1 - x)}{((k - q)^2 x + q^2 (1 - x) + i\epsilon)^{2-\eta}} \\
&= ik^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2 - \eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k-q)^2 x + q^2(1-x) + i\epsilon)^{2-\eta}} \\
= & ik^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \\
& \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - 2k \cdot qx + k^2 x + i\epsilon)^{2-\eta}} \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Durch die Parametrisierung ist eine divergente Gamma-Funktion im Nenner entstanden, die zusammen mit der Differentiation und dem Grenzwertprozeß $\eta \rightarrow 0$ eine Identität ergeben wird.

Der Nenner kann durch eine Translation $q \rightarrow q + kx$ auf eine einfache Form gebracht werden. Durch eine Wick-Rotation (Kap. B.1) wird das Impulsintegral dann auf die Form von Gl. 2.17 gebracht.

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &= ik^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \\
& \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((q+kx)^2 - 2k \cdot (q+kx)x + k^2 x + i\epsilon)^{2-\eta}} \\
= & ik^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \\
& \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + k^2 x(1-x) + i\epsilon)^{2-\eta}} \\
= & K^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \\
& \times \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q^2 + K^2 x(1-x))^{2-\eta}} \quad (5.41)
\end{aligned}$$

In diesen Ausdruck kann man Gl. 2.17 mit den Parametern $m^2 = K^2 x(1-x)$, $\alpha = 0$ und $\beta = 2 - \eta$ einsetzen. Diese Impulsintegration ist nur im UV-Bereich divergent, so daß die divergente Γ -Funktion, die bei der Auswertung auftaucht, die UV-Divergenz des Integrals I_{k^2} darstellt. Das resultierende Parameterintegral ist von der Form B.27 (man beachte, daß für die Dimension des Integrals $d = 4 - \epsilon$ gilt).

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &= K^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma\left(2-\eta-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^4} (K^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2+\eta} \\
= & \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} K^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{K^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma\left(-\eta+\frac{\epsilon}{2}\right)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\frac{\epsilon}{2}} (1-x)^{1-\frac{\epsilon}{2}+\eta} \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Man kann jetzt in den Minkowskiraum zurückkehren und das Parameterintegral mit den Gln. B.27 und B.26 auswerten. Das Parameterintegral enthält die IR-Divergenz, da es an der unteren Grenze etwas stärker als $\frac{1}{x}$ divergiert.

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma\left(-\eta + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\frac{\varepsilon}{2}} (1-x)^{1-\frac{\varepsilon}{2}+\eta} \\
&= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma\left(-\eta + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(-\eta)} B\left(-\frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2} + \eta\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2} + \eta\right)}{\Gamma(-\eta)\Gamma(2 - \varepsilon + \eta)} \underbrace{\Gamma\left(-\eta + \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{UV-Divergenz} \underbrace{\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{IR-Divergenz}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit Gl. 2.58 für das Paar $(r, s) = (2, -\eta)$, so findet man dasselbe Ergebnis wieder (bis auf ein $(-4\pi\mu^2)^{-\eta}k^2$, das von der Definition von I_{k^2} stammt). Dort war die Rechnung mit der Parametrisierung B.6 durchgeführt worden. Die obige Rechnung brachte neben der Bestätigung des Ergebnisses durch eine andere Parametrisierung die genaue Lokalisierung des Punktes, an dem die IR-Divergenz auftaucht: die Parametrisierung hat gewissermaßen die IR-Divergenz aus dem Impulsintegral herausgezogen, das dann nur noch UV-divergent bleibt.

Schließlich können die Differentiation sowie der Grenzwertprozeß $\eta \rightarrow 0$ aus Gl. 5.39 durchgeführt werden (man beachte Gl. 2.72).

$$\begin{aligned}
I_{k^2}^{\eta=0} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} I_{k^2} \\
&= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(2 - \varepsilon)} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma_{IR}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Eine Entwicklung in ε kann hier nicht durchgeführt werden, da nicht klar ist, wie die IR-divergente Γ -Funktion relativ zu der UV-divergenten zu behandeln ist. Diese Frage wird auf S. 114 weiter verfolgt.

Das Integral I_{kq}

Die Behandlung des Integrals I_{kq}

$$I_{kq} = -\frac{2i}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{k \cdot q}{(q^2 + i\epsilon)^2 ((k - q)^2)^{-\eta}} \quad (5.45)$$

läuft zunächst ganz analog zu dem Integral I_{k^2} , da die beiden Nenner identisch sind. Entsprechend Gl. 5.40 folgt:

$$I_{kq} = -2i \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{k \cdot q}{(q^2 - 2k \cdot qx + k^2 x + i\epsilon)^{2-\eta}} \quad (5.46)$$

Die darauf folgende Translation $q \rightarrow q + kx$ wird auch hier ausgeführt, muß jedoch zusätzlich auf den Zähler des Integranden angewendet werden.

$$I_{kq} = -2i \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{k \cdot (q + kx)}{(q^2 + k^2 x(1-x) + i\epsilon)^{2-\eta}} \quad (5.47)$$

Der Term $k \cdot q$ im Zähler des Integranden ist asymmetrisch und verschwindet deshalb (der Rest hängt nur noch von q^2 ab). Der verbleibende Integrand wird Wick-rotiert (Kap. B.1).

$$I_{kq} = -2K^2 \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\Gamma(2-\eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-\eta} (1-x) \times \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q^2 + K^2 x(1-x))^{2-\eta}} \quad (5.48)$$

Man sieht an dieser Stelle, wie das zusätzliche q im Zähler (gegenüber I_{k^2}) zu einer um eins größeren Potenz des Parameters x geführt hat, so daß die vorher auftretende IR-Divergenz hier nicht mehr zum Tragen kommt. Sonst kann der Rest der Regularisierung aus dem vorigen Abschnitt übernommen werden. Das Impulsintegral mit der UV-Divergenz kann mit Gl. 2.17 und den Parametern $m^2 = K^2 x(1-x)$, $\alpha = 0$ und $\beta = 2-\eta$ berechnet werden. Zurück im Minkowskiraum kann das verbleibende, diesmal konvergente, Parameterintegral über x mit den Gln. B.27

und B.26 berechnet werden. Es folgt:

$$\begin{aligned}
I_{kq} &= -2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} K^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{K^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma(-\eta + \frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-\frac{\varepsilon}{2}} (1-x)^{1-\frac{\varepsilon}{2}+\eta} \\
&= 2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma(-\eta + \frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-\frac{\varepsilon}{2}} (1-x)^{1-\frac{\varepsilon}{2}+\eta} \\
&= 2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \Gamma(2 - \frac{\varepsilon}{2} + \eta)}{\Gamma(3 - \varepsilon + \eta) \Gamma(-\eta)} \underbrace{\Gamma\left(-\eta + \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{UV-Divergenz} \quad (5.49)
\end{aligned}$$

Es bleibt noch die Operation in Gl. 5.39 auf dieses Ergebnis anzuwenden. Dazu wird Gl. 2.72 benutzt. Danach muß man die Entwicklung in ε mit den Gleichungen aus Kap. B.3 (speziell B.34) durchführen.

$$\begin{aligned}
I_{kq}^{\eta=0} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} I_{kq} \\
&= -2 \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \Gamma(2 - \frac{\varepsilon}{2})}{\Gamma(3 - \varepsilon)} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + 2 - \gamma + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} \quad (5.50)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist in sofern interessant, als daß es (bis auf k^2) exakt mit dem masselosen skalaren 1-Loop-Polarisationsgraphen übereinstimmt (Gl. 2.59). Der später notwendige Imaginärteil ist (siehe Gl. B.45)

$$\boxed{\Im\{I_{kq}^{\eta=0}\} = -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \Theta(k^2)} \quad (5.51)$$

Das Integral I_{q^2}

Dieses Integral kann auf die gleiche Weise wie die beiden vorigen Integrale regulariert werden — also mit der Feynmanparametrisierung. Die Rechnung führt jedoch zu keinen neuen Erkenntnissen und auf das gleiche Ergebnis, das sich auch aus Gl. 2.58 ergibt. I_{q^2} lautet

$$\begin{aligned}
I_{q^2} &= \frac{i}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{(q^2 + i\epsilon)^2 ((k-q)^2)^{-\eta}} \\
&= \frac{i}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + i\epsilon) ((k-q)^2)^{-\eta}} \equiv \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} I^{1,-\eta}(q^2) \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist tatsächlich von der Form $I^{r,s}$ in Gl. 2.51 mit den Parametern $(r, s) = (1, -\eta)$. Den regularisierten Ausdruck erhält man durch Einsetzen dieses Parameterpaares in Gl. 2.58. Es folgt:

$$I_{q^2} = -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{\varepsilon}{2}+\eta\right)}{\Gamma(-\eta) \Gamma(3-\varepsilon+\eta)} \underbrace{\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}-\eta\right)}_{UV-Divergenz} \quad (5.53)$$

Der Anfangsausdruck von I_{q^2} enthält nur eine Divergenz für $q \rightarrow \infty$. Im infraroten Bereich ist es konvergent. Dementsprechend ist auch nur eine divergente Γ -Funktion aufgetreten, die die UV-Divergenz repräsentiert. Auch hier muß die Operation aus Gl. 5.39 unter Berücksichtigung von Gl. 2.72 durchgeführt werden. Der von η unabhängige Ausdruck wird in ε mit B.34 entwickelt.

$$\begin{aligned} I_{q^2}^{\eta=0} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} I_{q^2} \\ &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3-\varepsilon)} \Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi^2}{2(2\pi)^4} k^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.54)$$

Hier kann der Imaginärteil mit Hilfe von Gl. B.45 abgelesen werden:

$$\boxed{\Im\{I_{q^2}^{\eta=0}\} = -\frac{1}{2} \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \Theta(k^2)} \quad (5.55)$$

Die Behandlung der IR-Divergenz

Entsprechend Gl. 5.39 sind nun alle Teilintegrale $I_{k^2}^{\eta=0}$, $I_{kq}^{\eta=0}$ und $I_{q^2}^{\eta=0}$ regularisiert. Die jeweiligen Ausdrücke 5.44, 5.50 und 5.54 müssen in Gl. 5.39 eingesetzt werden. Der resultierende Ausdruck für I_1 enthält dann alle IR- und UV-divergenten Γ -Funktionen. Dabei wird die Γ -Funktion, die eine IR-Divergenz darstellt, durch einen Index gekennzeichnet.

$$I_1 = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right) \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma_{IR}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(2-\varepsilon)} - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3-\varepsilon)} + \frac{\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3-\varepsilon)} \right\} \quad (5.56)$$

Um die gemeinsame UV-Divergenz herauszustellen, werden die drei Summanden auf die gleiche Form gebracht. Dazu wird mehrfach Gl. B.12 herangezogen.

$$I_1 = \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3 - \varepsilon)} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left\{ (2 - \varepsilon)\Gamma_{IR}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) - 2\Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \right\} \quad (5.57)$$

Man erkennt hier die erwartete Struktur des Ergebnisses: alle 3 Summanden sind UV-divergent, was sich in der gemeinsamen divergenten Funktion $\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ zeigt. Hingegen enthält nur der erste Summand, der von I_{k^2} stammt, eine zweite, diesmal IR-divergente Γ -Funktion.

Es stellt sich die Frage, wie man die IR-Divergenz aus diesem Ausdruck beseitigt. Man könnte beispielsweise der Versuchung erliegen, die IR-divergente Γ -Funktion nach ε zu entwickeln und den dabei auftretenden $\frac{1}{\varepsilon}$ -Term wegzulassen. Man würde gewissermaßen ein unabhängiges ε_{IR} einführen und die Divergenzen in ε und ε_{IR} sukzessive, wie in Kap. 2.1.3 beschrieben, entfernen. Jedoch stellt sich die Frage, welche der konvergenten Γ -Funktionen von ε und welche von ε_{IR} abhängen, denn diese Wahl beeinflusst den Koeffizienten des $\frac{1}{\varepsilon_{IR}}$ -Terms, den man weglassen möchte. Außerdem stellt sich die Frage, in welchem Verhältnis ε und ε_{IR} zueinander stehen, was die Koeffizienten der nach dem Abzug der IR-Divergenz verbleibenden Terme beeinflusst. Kurz: das vorgeschlagene Verfahren ist nicht eindeutig definiert.

Deshalb soll ein erneuter Versuch gestartet werden, das Integral I_{k^2} in Gl. 5.40 zu regularisieren. Der Weg jedoch soll direkt der Problematik der IR-Divergenz angepaßt sein. Dazu wird ein IR-cutoff-Parameter a^2 als Masse in die Propagatoren eingeführt, der am Ende gegen Null gehen soll. Gl. 5.40 lautet mit diesem Parameter:

$$I_{k^2} = \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(q^2 - a^2 + i\epsilon)^2 ((k - q)^2 - a^2 + i\epsilon)^{-\eta}} \quad (5.58)$$

Die Schritte der Regularisierung sind zunächst identisch mit denen, die auf Gl. 5.40 angewendet wurden: dimensionale Fortsetzung mit Gl. 2.21, Wick-Rotation (siehe Kap. B.1), Feynmanparametrisierung mit Gl. B.4 und Translation des Integrals mit

$q \rightarrow q + kx$. Man bekommt auf diesem Weg:

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &= i \frac{(2\pi\mu)^\varepsilon}{(-4\pi\mu^2)^\eta} k^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - a^2 + i\epsilon)^2 ((k - q)^2 - a^2 + i\epsilon)^{-\eta}} \\
&= \frac{(2\pi\mu)^\varepsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} K^2 \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q^2 + a^2)^2 ((K - Q)^2 + a^2)^{-\eta}} \\
&= \frac{(2\pi\mu)^\varepsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} K^2 \frac{\Gamma(2 - \eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x) \\
&\quad \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(K - Q)^2 + a^2] x + (Q^2 + a^2)(1 - x)]^{2-\eta}} \\
&= \frac{(2\pi\mu)^\varepsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} K^2 \frac{\Gamma(2 - \eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x) \\
&\quad \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[Q^2 + a^2 - 2k \cdot Qx + K^2 x]^2 - \eta}} \\
&= \frac{(2\pi\mu)^\varepsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} K^2 \frac{\Gamma(2 - \eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x) \\
&\quad \int \frac{d^d Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[Q^2 + K^2 x(1 - x) + a^2]^{2-\eta}} \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Dieses Integral hat die Form von Gl. 2.17 mit

$$\alpha = 0, \beta = 2 - \eta \text{ und } m^2 = K^2 x(1 - x) + a^2.$$

Das Ergebnis wird eingesetzt, $d = 4 - \varepsilon$ berücksichtigt und dann die Wick-Rotation rückgängig gemacht.

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &= \frac{(2\pi\mu)^\varepsilon}{(4\pi\mu^2)^\eta} \frac{K^2}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma(2 - \eta)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x) \\
&\quad \times \pi^{d/2} (K^2 x(1 - x) + a^2)^{d/2-2+\eta} \frac{\Gamma\left(2 - \eta - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2 - \eta)} \\
&= \frac{\pi^2 K^2}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - \eta\right)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x) \left(\frac{4\pi\mu^2}{K^2 x(1 - x) + a^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \\
&= -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2} - \eta\right)}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1 - x) \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1 - x) + a^2 - i\epsilon} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \tag{5.60}
\end{aligned}$$

Im Ursprungs Ausdruck 5.58 haben a^2 und $i\epsilon$ unterschiedliche Vorzeichen. Dies darf sich durch die Manipulationen nicht ändern, so daß sich das Vorzeichen des wieder eingeführten $i\epsilon$ als negativ ergibt.

Die Berechnung des verbleibenden Parameterintegrals ist nur mit einer etwas zweifelhaft anmutenden Maßnahme gelungen: durch eine partielle Integration und ein paar Substitutionen kann man es auf eine Form bringen, in der die untere Integrationsgrenze durch den Massenparameter a^2 gegeben ist. Auch im Integranden kommt a^2 noch vor. Wenn man im Integranden den Grenzwert für $a^2 \rightarrow 0$ nimmt, a^2 als Integrationsgrenze ungleich Null jedoch beibehält, behandelt man den Massenparameter inkonsistent. Andererseits hat er keine physikalische Relevanz, denn er soll ja nur die IR-Divergenz des Integrals verhindern. Dies jedoch wird auch schon erreicht, indem man durch den Massenparameter das Integrationsintervall etwas oberhalb von Null beginnen läßt. Man kann sich daher auf den Standpunkt stellen, daß der Massenparameter überall Null gesetzt werden kann, solange die IR-Divergenz dadurch nicht wieder auftaucht. Das Ergebnis, das man auf diesem Weg findet, lautet:

$$\begin{aligned} I_{k^2}^{\eta=0} &\equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} I_{k^2} \\ &= -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon}(1 - \gamma) - \frac{5}{4}\gamma + \gamma^2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-k^2}{16\pi\mu^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

In diesem Ausdruck wurden bereits die Differentiation nach η sowie der Grenzwert $\eta \rightarrow 0$, wie in Gl. 5.39 vorgeschrieben, durchgeführt. Dies wurde durch den oberen Index $\eta = 0$ angedeutet.

Das Bemerkenswerte an diesem Ergebnis sind die fehlenden nicht-quadratischen Logarithmen, die ja für den Imaginärteil des Integrals wichtig sind. Der gesamte Imaginärteil wird durch den quadratischen Logarithmus bestimmt. Mit Gl. 5.19 erhält man:

$$\Im \{ I_{k^2}^{\eta=0} \} = -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \ln \left| \frac{k^2}{16\pi\mu^2} \right| \Theta(k^2) \quad (5.62)$$

Im folgenden wird ohne suspekte Manipulationen gezeigt, daß die linearen Logarithmen tatsächlich wegfallen und damit das Ergebnis auf *saubere* Weise bestätigt. Der Ausgangspunkt ist das Parameterintegral in Gl. 5.60. Zunächst wird der Integrand in $\alpha := \frac{\varepsilon}{2} - \eta$ bis zur zweiten Ordnung entwickelt. Die zweite Ordnung ist wegen der Differentiation nach η notwendig, die nach der Auswertung durchgeführt werden muß (siehe Gl. 5.39). Für die Entwicklung werden die Gln. B.7 und

B.15 benutzt.

$$\begin{aligned}
I_{k^2} &= -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta}(1-x) \left\{ \frac{1}{\alpha} - \gamma + \frac{\alpha}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ 1 + \alpha \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) + \frac{\alpha^2}{2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) \right\} \\
&= -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta}(1-x) \\
&\quad \times \left\{ \underbrace{\frac{1}{\alpha} - \gamma + \frac{\alpha}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma \right)}_{H_0} + \underbrace{\ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right)}_{H_1} \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\alpha\gamma \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right)}_{H_2} + \underbrace{\frac{\alpha}{2} \ln^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right)}_{H_3} \right\}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Die Berechnung des Imaginärteils von I_{k^2} gliedert sich auf in 4 Teile. In H_0 kann kein Imaginärteil auftreten, dies ist nur bei den Termen mit Logarithmen möglich, deren Argument negativ werden kann.

Zur Berechnung von H_1 wird eine partielle Integration durchgeführt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) &= \frac{k^2(1-2x)}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \\
\int dx (x^{-1-\eta} - x^{-\eta}) &= \frac{1}{\eta} x^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} x^{-\eta} + c
\end{aligned}$$

Damit folgt für H_1 :

$$\begin{aligned}
H_1 &\equiv -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta}(1-x) \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) \\
&= -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{\eta} x^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} x^{-\eta} \right) \Big|_0^1 \\
&\quad + \frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\eta} x^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} x^{-\eta} \right) \frac{k^2(1-2x)}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \\
&= \underbrace{\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \ln \left(\frac{a^2}{4\pi\mu^2} \right) \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right)}_{\in \mathbf{R}} \\
&\quad + \frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4 \Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\eta} x^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} x^{-\eta} \right) \frac{1-2x}{x^2 - x + \frac{a^2}{k^2} - i\epsilon}
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Da hier nur der Imaginärteil berechnet werden soll, braucht man sich nicht um den reellen Randterm zu kümmern. Der Imaginärteil des Integrals kann mit der Dirac-Identität 1.29 isoliert werden. Um diese anwenden zu können, muß der Integrand mit einigen Substitutionen auf die Form $\frac{1}{x-i\epsilon}$ gebracht werden. Es sind die gleichen Substitutionen, die auch bei der Berechnung des Parameterintegrals für den skalaren 1-Loop-Polarisationsgraphen mit Masse benutzt wurden (Gl. 2.30). Mit $y := 1 - 2x$ folgt:

$$\begin{aligned} \Im\{H_1\} &= \frac{2\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{-1}^1 dy \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1-y}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1-y}{2} \right)^{-\eta} \right) \\ &\quad \times \Im \left\{ \frac{y}{y^2 - 1 + \frac{4a^2}{k^2} - i\epsilon} \right\} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Als nächstes soll die Substitution $z := \frac{4a^2}{k^2(1-y^2)} - 1$ durchgeführt werden. Im Integrationsintervall ist diese Zuordnung jedoch nicht eindeutig, so daß man das Intervall in zwei Teile aufteilen muß: $[-1, 1] = [-1, 0] + [0, 1]$. Das untere Intervall kann durch die Substitution $y' := -y$ auf das obere abgebildet werden. Auf diesen Intervallen ist die gewünschte Substitution eindeutig definiert. Es gilt

$$\begin{aligned} z := \frac{4a^2}{k^2(1-y^2)} - 1 &\implies y = +\sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}} \\ &\implies y^2 - 1 + \frac{4a^2}{k^2} = \frac{4a^2}{k^2} \frac{z}{z+1} \\ &\implies \frac{dy}{dz} = \frac{2a^2}{k^2(z+1)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Für den Imaginärteil von H_1 folgt damit:

$$\begin{aligned} \Im\{H_1\} &= \frac{2\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dy \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1-y}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1-y}{2} \right)^{-\eta} \right) \\ &\quad \Im \left\{ \frac{y}{y^2 - 1 + \frac{4a^2}{k^2} - i\epsilon} \right\} \\ &\quad - \frac{2\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dy \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1+y}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1+y}{2} \right)^{-\eta} \right) \\ &\quad \Im \left\{ \frac{y}{y^2 - 1 + \frac{4a^2}{k^2} - i\epsilon} \right\} \\ &= \frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{\frac{4a^2}{k^2}-1}^{\infty} dz \Im \left\{ \frac{1}{(z+1)(z-i\epsilon)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{-\eta} \right) \\
& - \frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{\frac{4a^2}{k^2}-1}^{\infty} dz \Im \left\{ \frac{1}{(z+1)(z-i\epsilon)} \right\} \\
& \times \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{-\eta} \right) \\
= & \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \left\{ \frac{1}{\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right)^{-\eta} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right)^{1-\eta} + \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right)^{-\eta} \right\} \tag{5.67}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt bereits die Dirac-Identität angewendet und mit der resultierenden Distribution $\delta(z)$ die Integration ausgeführt wurde. An dieser Stelle leuchtet ein, wie man auch den Hauptwert des Integrals berechnen kann: wenn man im Integranden $a^2 \rightarrow 0$ gehen läßt, wird aus der Wurzel eine einfache eins. Das erste Integral fällt vollständig weg, und das zweite ist leicht analytisch lösbar. Der IR-Cutoff bleibt dabei in der unteren Integrationsgrenze erhalten. Auf diesem Weg erhält man die oben diskutierte Gleichung 5.61. Bei der Berechnung des Imaginärteils soll hier a^2 konsistent bis zum Ende der Rechnung mitgenommen werden. Gl. 5.67 muß dann zunächst in η entwickelt werden (es sei an $\alpha = \frac{\epsilon}{2}$ erinnert).

$$\begin{aligned}
\Im\{H_1\} = & \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} (-\eta + \gamma\eta^2) \left\{ \frac{1}{\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \left(1 - \eta \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right) \right. \\
& - (1 - \eta) \left(1 - \eta \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right) \\
& - \frac{1}{\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \left(1 - \eta \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right) \\
& \left. + (1 - \eta) \left(1 - \eta \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} (-1 + \gamma\eta) \left\{ \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) - \eta \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right. \\
&\quad + \eta^2 \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) - \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \\
&\quad \left. + \eta \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) - \eta^2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right\} \\
&\hspace{20em} (5.68)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist der erste Teil des Imaginärteils von I_{k^2} (man erinnere sich an Gl. 5.63). Er muß nach η differenziert und der Grenzwertprozeß $\eta \rightarrow 0$ durchgeführt werden (siehe Gl. 5.39). Der resultierende Ausdruck sei durch einen oberen Index gekennzeichnet. Es ist bei der Berechnung zu beachten, daß durch die Operation $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta}$ nur die Terme überleben, die linear in η sind.

$$\begin{aligned}
\Im\{H_1^{\eta=0}\} &\equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Im\{H_1\} \\
&= \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \\
&\quad \times \left\{ \gamma \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) + \eta \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \gamma \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right\} \\
&= \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \left\{ \gamma \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) + \ln \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \gamma \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2} \right) \right\} \\
&\longrightarrow -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \gamma \quad \text{für } a^2 \rightarrow 0 \hspace{10em} (5.69)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck weist keinerlei Divergenzen mehr auf, auch nachdem der IR-Cutoff gegen Null gegangen ist.

Um $\Im\{H_2\}$ zu berechnen (siehe Gl. 5.63), benötigt man keine weitere Rechnung,

da der Integrand strukturell mit dem von H_1 identisch ist. Es gilt

$$\Im\{H_2\} = -\left(\frac{\varepsilon}{2} - \eta\right) \gamma \Im\{H_1\} \quad (5.70)$$

Für $\Im\{H_1\}$ kann Gl. 5.68 eingesetzt werden, d. h. der IR- und UV-regularisierte Ausdruck vor dem Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \Im\{H_2\} = & -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \gamma \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \eta - \gamma\eta^2\right) \\ & \left\{ \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) - \eta \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) + \eta^2 \ln\left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) \right. \\ & \left. - \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) + \eta \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) - \eta^2 \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.71)$$

Nach Gl. 5.39 muß dieser Ausdruck nach η differenziert und der Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ durchgeführt werden. Entsprechend Gl. 5.69 bekommt man

$$\begin{aligned} \Im\{H_2^{\eta=0}\} & \equiv \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Im\{H_2\} \\ & = -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \gamma \left\{ \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) - \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2}}}{2}\right) \right\} \\ & \longrightarrow \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \gamma \quad \text{für } a^2 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

Hier hat man das oben bereits angekündigte Resultat von Gl. 5.62: die Imaginärteile von $H_1^{\eta=0}$ und $H_2^{\eta=0}$ heben sich gerade weg, so daß von den linearen Logarithmen kein Imaginärteil entsteht. Dies entspricht dem Ergebnis in Gl. 5.61, wo die linearen Logarithmen einfach weggefallen waren.

Damit kann ein Imaginärteil von $I_{k^2}^{\eta=0}$ in Gl. 5.63 nur noch von H_3 stammen, dem Integral über einen quadratischen Logarithmus. Auch hier wird als erstes eine partielle Integration durchgeführt.

$$\begin{aligned} H_3 & = -\frac{\pi^2 k^2 \alpha}{2(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx x^{-1-\eta} (1-x) \ln^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) \\ & = -\frac{\pi^2 k^2 \alpha}{2(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right) \ln^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{\eta} x^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} x^{-\eta} \right) \frac{1-2x}{x^2 - x + \frac{a^2}{k^2} - i\epsilon} \\
& \quad \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-k^2 x(1-x) + a^2 - i\epsilon} \right) \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Der auftretende Randterm ist wieder reell und kann für die Berechnung des Imaginärteils weggelassen werden. Das verbleibende Integral wird mit denselben Substitutionen umgeformt, wie dies in den Gln. 5.65 – 5.67 geschehen ist. Der Endausdruck kann übernommen werden, mit dem Unterschied, daß hier die Substitution zusätzlich im Logarithmus durchgeführt werden muß. Um Wiederholungen zu vermeiden, wird gleich der resultierende Ausdruck notiert:

$$\begin{aligned}
\Im\{H_3\} &= - \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \Im \int_{\frac{4a^2}{k^2}-1}^{\infty} dz \frac{1}{(z+1)(z-i\epsilon)} \ln \left(\frac{a^2 z}{4\pi\mu^2(z+1)} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{-\eta} \right) \\
& + \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \Im \int_{\frac{4a^2}{k^2}-1}^{\infty} dz \frac{1}{(z+1)(z-i\epsilon)} \ln \left(\frac{a^2 z}{4\pi\mu^2(z+1)} \right) \\
& \quad \times \left(\frac{1}{\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{1-\eta} - \frac{1}{1+\eta} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4a^2}{k^2(z+1)}}}{2} \right)^{-\eta} \right) \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Im Integranden werden die Massenparameter a^2 Null gesetzt. Zur Regularisierung der IR-Divergenz wird der Parameter in der unteren Integrationsgrenze und im Logarithmus beibehalten. Die erste Integration verschwindet dabei vollständig und es verbleibt ein stark vereinfachtes zweites Integral:

$$\Im\{H_3\} = \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \Im \int_{\frac{4a^2}{k^2}-1}^{\infty} dz \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right) \frac{1}{z(z+1)} \ln \left(\frac{a^2 z}{4\pi\mu^2(z+1)} \right) \quad (5.75)$$

Durch eine weitere Substitution wird dieses Integral trivial ausführbar:

$$\begin{aligned}
w &:= \frac{a^2}{4\pi\mu^2} \frac{z}{z+1} \implies \frac{dw}{dz} = \frac{a^2}{4\pi\mu^2} \frac{1}{(z+1)^2} \\
&\implies z(z+1) = w \frac{dz}{dw} \quad (5.76)
\end{aligned}$$

Mit den neuen Integrationsgrenzen $u := \frac{a^2}{4\pi\mu^2} \left(1 - \frac{k^2}{4a^2}\right)$ und $o := \frac{a^2}{4\pi\mu^2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Im\{H_3\} &= \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \Im \int_u^o dw \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right) \frac{\ln(w)}{w} \\
&= \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{2(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right) \Im\{\ln^2(w)\}_u^o \\
&= \frac{\pi^2 k^2 \alpha}{2(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right) \Im \left\{ \ln^2 \left(-\frac{k^2}{16\pi\mu^2} \right) \right\} \\
&= -\frac{\pi^3 k^2 \alpha}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{1+\eta} \right) \ln \left| -\frac{k^2}{16\pi\mu^2} \right| \quad (5.77)
\end{aligned}$$

Auch hier muß entsprechend Gl. 5.39 eine Differentiation und ein Grenzwert in η durchgeführt werden. Dazu wird das bisherige Ergebnis in η entwickelt (mit Gl. B.21 und $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} - \eta$). Es überleben nur die in η linearen Terme.

$$\begin{aligned}
\Im\{H_3^{\eta=0}\} &= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \Im\{H_3\} \\
&= \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \ln \left| \frac{-k^2}{16\pi\mu^2} \right| \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \eta (-\eta + \gamma\eta^2) \left(\frac{1}{\eta} - 1 + \eta \right) \\
&= -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \ln \left| -\frac{k^2}{16\pi\mu^2} \right| \quad (5.78)
\end{aligned}$$

Es ist demnach gelungen, durch Einführen eines Massenparameters die IR-Divergenzen aus dem Integral I_{k^2} zu eliminieren und einen endlichen Imaginärteil zu bestimmen. Die konsistente Behandlung des Realteils ist an der Komplexität der Parameterintegrale gescheitert, wobei die geschilderte inkonsistente Behandlung des Massenparameters im Imaginärteil zu keinem Fehler geführt hat.

Zusammenfassung

Es ist Zeit, zu rekapitulieren. Der Graph in Abb. 5.3 hat sich in erster Ordnung der Masse der skalaren Quarks als ein infrarot- und ultraviolett-divergentes Integral herausgestellt. Die normale Regularisierung führt auf doppelte Divergenzen, die einen divergenten Imaginärteil des Graphen implizieren. In dem letzten Kapitel wurde das infrarot-divergente Integral I_{k^2} (Definition in den Gln. 5.36 und 5.39) mit Hilfe eines Massenparameters a^2 regularisiert und sein Imaginärteil bestimmt. Dabei wurde es in 3 Parameterintegrale zerlegt (siehe Gl. 5.63), deren Imaginärteile

in den Gln. 5.69, 5.72 und 5.78 ermittelt wurden. Um den Imaginärteil von $I_{k^2}^{\eta=0}$ zu bekommen, sind die drei Ergebnisse einfach zu addieren.

$$\begin{aligned}
\Im I_{k^2}^{\eta=0} &= \Im H_1^{\eta=0} + \Im H_2^{\eta=0} + \Im H_3^{\eta=0} \\
&= -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \gamma + \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \gamma - \frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \ln \left| -\frac{k^2}{16\pi\mu^2} \right| \\
&= -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \ln \left| -\frac{k^2}{16\pi\mu^2} \right|
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem Imaginärteil von Gl. 5.62 überein.

Um den Beitrag des Graphen in Abb. 5.3 in erster Ordnung der Masse zu bekommen, sind die 3 Beiträge zu dem Integral I_1 in Gl. 5.39 zusammzusetzen. Die regularisierten Ausdrücke sind in den Gln. 5.50, 5.54 und 5.61 zu finden.

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{5-2\gamma}{\varepsilon} - \frac{11}{4} \gamma + \gamma^2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \zeta(2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) + \frac{1}{2} \ln^2 \left(\frac{-k^2}{16\pi\mu^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Den zugehörigen Imaginärteil kann man entweder direkt ablesen (mit Gl. B.45) oder aus den Gln. 5.51, 5.55 und 5.79 zusammensetzen.

$$\Im \{I_1\} = -\frac{\pi^3 k^2}{(2\pi)^4} \Theta(k^2) \left\{ \frac{3}{2} + \ln \left| -\frac{16\pi\mu^2}{k^2} \right| \right\} \tag{5.81}$$

Dies ist bis auf einen Vorfaktor gleichzeitig der Imaginärteil des Graphen selbst. Unter Berücksichtigung von Gl. 5.35 erhält man:

$$\boxed{\Im \{\Pi_{14+15}^1(k^2)\} = \frac{8N_c \pi^5 g^2 m^2 k^2}{3(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{3}{2} + \ln \left| -\frac{16\pi\mu^2}{k^2} \right| \right\} \Theta(k^2)} \tag{5.82}$$

Dieser Ausdruck wird für das Aufstellen der Summenregel zugrunde gelegt.

5.4 Der Graph mit zwei fermionischen Kondensaten

Abbildung 5.4: Der Graph mit 2 fermionischen Kondensaten

Dieser Graph entspricht dem 4-ten Term in Gl. 3.23. Er enthält 2 fermionische Kondensate und ist daher ein nichtperturbativer Beitrag zur Polarisationsfunktion. Im Gegensatz zu den Graphen mit einem fermionischen Kondensat (Kap. 5.1) verschwindet dieser nicht. Die Fouriertransformation der Amplitude muß man mit Gl. 5.5 auf die einzelnen Teile des Integranden umwälzen. Die Fouriertransformierte des 4 Fermionen–Kondensats ist durch Gl. 4.38 gegeben.

$$\begin{aligned}
\Pi_4(k^2) &= \frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : | 0 \rangle Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \\
&= \frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : | 0 \rangle \right\} (q) \\
&\quad \mathcal{F} \{ Sp\{\Delta(y-x)\Delta(x-y)\} \} (k-q) \\
&= \frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^4}{16N_c^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \gamma_{ij}^\mu \gamma_{kl}^\nu \mathbf{1}_{\alpha\beta} \mathbf{1}_{\eta\lambda} \delta_{jk} \delta_{\beta\eta} \delta_{il} \delta_{\alpha\lambda} \delta^4(q) \\
&\quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp \{ \Delta(p) \Delta(p+q-k) \} \\
&= \frac{ig^2}{48N_c^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 g_{\mu\nu} Sp\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} Sp\{\mathbf{1}\} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp \{ \Delta(p) \Delta(p-k) \} \\
&= \frac{ig^2}{3N_c} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Sp \{ \Delta(p) \Delta(p-k) \} \tag{5.83}
\end{aligned}$$

In den letzten beiden Schritten wurde die q -Integration mit der δ -Funktion erschlagen. Außerdem haben die beiden Kroneckersymbole aus den unabhängigen γ -Matrizen eine Spur über die beiden Matrizen erzeugt, die auf $4g^{\mu\nu}$ führt. Der zweite metrische Tensor kontrahiert diesen, so daß insgesamt folgt

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\gamma_{ij}^\mu\gamma_{kl}^\nu\delta_{jk}\delta_{il} &= g_{\mu\nu}\gamma_{ij}^\mu\gamma_{jl}^\nu\delta_{il} = g_{\mu\nu}Sp\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} \\ &= 4g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 16 \end{aligned} \quad (5.84)$$

Analog dazu wurden die Kroneckersymbole im Farbraum behandelt. Für die γ -Matrizen sind hier allerdings Einheitsmatrizen einzusetzen. Auf diese Weise bekommt man

$$\mathbf{1}_{\alpha\beta}\mathbf{1}_{\eta\lambda}\delta_{\beta\eta}\delta_{\alpha\lambda} = Sp\{\mathbf{1}\} = N_c \quad (5.85)$$

Das verbleibende Integral ist gerade das Integral für den skalaren 1-Loop Polarisationsgraphen, der bereits in Kap. 2.2.2 regularisiert wurde. Das Ergebnis in Gl. 2.33 wird in die obige Gleichung eingesetzt. Es ergibt sich damit für die regularisierte Amplitude zu dem Graphen in Abb. 5.4

$$\begin{aligned} \Pi_4(k^2) &= -\frac{\pi^2 g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + i\pi\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2) - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Dieser Graph wurde exakt in der Masse des skalaren Quarks berechnet. Es treten hier bei der Berechnung keine Probleme auf, da durch die Kondensate die Zahl der Integrationen verkleinert wird, die durch die Zahl der freien Impulse in einem Graphen bestimmt wird. Durch ein Kondensat fließt jedoch kein Impuls, so daß jedes Kondensat einen Impuls auf Null festlegt. Dieser Vorteil findet auch bei dem nächsten Graphen Anwendung.

Für die Summenregel ist der Imaginärteil wichtig:

$$\Im \left\{ \Pi_4(k^2) \right\} = -\frac{\pi^3 g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2) \quad (5.87)$$

5.5 Graphen mit zwei skalaren Kondensaten

Abbildung 5.5: Der Graph mit 2 skalaren Kondensaten

Dieser Graph entspricht dem 13-ten Term in Gl. 3.23, d. h.

$$\begin{aligned} \Pi_{13}(k^2) = & -\frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | : \bar{\phi}(x)\phi(x) \bar{\phi}(y)\phi(y) : |0 \rangle \right. \\ & \left. Sp\{S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu\} \right\} \end{aligned} \quad (5.88)$$

Er enthält ein 4-Teilchen-Kondensat und ist daher nichtperturbativ. Durch das doppelte Kondensat werden 2 Integrationen beseitigt, so daß man mit weniger Problemen zu rechnen hat, als das bei dem Graphen mit einem skalaren Kondensat der Fall war (Kap. 5.3.1).

Das 4-Teilchen Kondensat von skalaren Teilchen wird entsprechend der Hypothese in Kap. 4.3 in ein Produkt von zwei 2-Teilchen Kondensaten zerlegt. Um den Graphen im Impulsraum zu notieren, muß man die Fouriertransformation mit Gl. 5.5 sukzessive auf die einzelnen Teile des Integranden umwälzen. Jeder Schritt bringt dabei ein neues Faltungsintegral:

$$\begin{aligned} \Pi_{13}(k^2) &= -\frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | : \bar{\phi}(x)\phi(y) : |0 \rangle \langle 0 | : \phi(x)\bar{\phi}(y) : |0 \rangle \right. \\ & \quad \left. Sp\{S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu\} \right\} \\ &= -\frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | : \bar{\phi}(x)\phi(y) : |0 \rangle \langle 0 | : \phi(x)\bar{\phi}(y) : |0 \rangle \right\} (q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F} \{Sp\{S(x-y)\gamma^\mu S(y-x)\gamma^\nu\}\} (k-q) \\
= & -\frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | : \bar{\phi}(x)\phi(y) : |0 \rangle \langle 0 | : \phi(x)\bar{\phi}(y) : |0 \rangle \right\} (q) \\
& \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp \{ \mathcal{F}\{S(x-y)\}(p')\gamma^\mu \mathcal{F}\{S(y-x)\}(k-q-p')\gamma^\nu \} \\
= & -\frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \left\{ \langle 0 | : \bar{\phi}(x)\phi(y) : |0 \rangle \langle 0 | : \phi(x)\bar{\phi}(y) : |0 \rangle \right\} (q) \\
& \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp \{ S(p')\gamma^\mu S(p'+q-k)\gamma^\nu \} \tag{5.89}
\end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte des Kondensats ist aus Gl. 4.41 zu entnehmen. Da es in ein Produkt von 2 Kondensaten zerlegt wird, bekommt man eine Doppelsumme, die vor die beiden Integrationen gezogen wird.

$$\begin{aligned}
\Pi_{13}(k^2) &= -\frac{ig^2}{3} g_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(2\pi)^4}{N_c^2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \\
&\times \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!m!(m+1)!} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{n+m} \delta^4(q) \\
&\times \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp \{ S(p')\gamma^\mu S(p'+q-k)\gamma^\nu \} \\
= & -\frac{ig^2(2\pi)^4}{3N_c^2} g_{\mu\nu} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!m!(m+1)!} \\
&\times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{n+m} \delta^4(q) \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} Sp \{ S(p')\gamma^\mu S(p'+q-k)\gamma^\nu \} \tag{5.90}
\end{aligned}$$

Das Integral über p' ist bereits in regularisierter Form aus Gl. 2.51 bekannt. Die Kontraktion dieses Ausdrucks mit $g_{\mu\nu}$ liefert $3(k-q)^2$

$$\begin{aligned}
\Pi_{13}(k^2) &= \frac{(2\pi)^4}{3N_c^2} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!m!(m+1)!} \\
&\times \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{n+m} \delta^4(q) \\
&\times \frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} g_{\mu\nu} \{ g^{\mu\nu} (k-q)^2 - (k-q)^\mu (k-q)^\nu \} \\
&\times \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+1)! m! (m+1)!} \\
&\quad \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{n+m} \delta^4(q)
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Die zweifache Ableitung, die auf die δ -Funktion wirkt, kann durch zweimaliges Anwenden der Beziehung 1.35 auf den Rest des Integranden umgewälzt werden. Die Ausdrücke, die dann differenziert werden müssen, sind

$$(k-q)^2 \quad \text{und} \quad (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right).$$

Da der Summationsindex der Reihe die Zahl der Differentiationen bestimmt, treten Differentiationen beliebig hohen Grades auf. Betrachtet man jedoch die Gln. B.50 bis B.53, so stellt man fest, daß die Reihe bereits bei $n+m=2$ abbricht, da alle höheren Ableitungen Null liefern. In der folgenden Umformung wird die Reihe demnach nicht abgebrochen, sondern vollständig explizit notiert, die Differentiation durchgeführt und dann die δ -Funktion angewendet.

$$\begin{aligned}
\Pi_{13}(k^2) &= \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^4(q) \\
&\quad \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+1)! m! (m+1)!} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{n+m} \\
&\quad (k-q)^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^4(q) \\
&\quad \left\{ 1 + \frac{2}{2} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{1+0} + \frac{1}{4} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{1+1} + \frac{2}{12} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^{2+0} \right\} \\
&\quad (k-q)^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^4(q) \left\{ 1 + \frac{m^2 \square_q}{4} + \frac{5}{12} \frac{m^4 \square_q^2}{16} \right\} \\
&\quad (k-q)^2 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \\
&= \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \delta^4(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ (k-q)^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right) - \frac{5m^4}{192} \frac{32}{(k-q)^2} \right. \\
& \left. + \frac{m^2}{4} 8 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} \right) + \frac{m^2}{4} \left(8 \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) - 12 \right) \right\} \\
= & \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c (2\pi)^4} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \left\{ k^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right) \right. \\
& \left. + 2m^2 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + 2m^2 \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right) - 3m^2 - \frac{5}{6} \frac{m^4}{k^2} \right\} \\
= & \frac{4\pi^2 g^2}{3N_c (2\pi)^4} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \left\{ (k^2 + 2m^2) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right) \right. \\
& \left. - \frac{5}{6} \frac{m^4}{k^2} - 3m^2 \right\} \tag{5.92}
\end{aligned}$$

Schließlich sind die beiden Kroneckersymbole im Farbraum wie in Gl. 5.85 zu behandeln. Es folgt

$$\boxed{\Pi_{13}(k^2) = \frac{4\pi^2 g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \left\{ (k^2 + 2m^2) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right) - 3m^2 - \frac{5}{6} \frac{m^4}{k^2} \right\}} \tag{5.93}$$

Dies ist bereits das volle Ergebnis für die Amplitude des Graphen von Abb. 5.5. Man beachte, daß dieses Ergebnis in allen Ordnungen der Masse des skalaren Quarks exakt ist, denn alle höheren Ordnungen tragen zu der Amplitude nicht bei. Für diesen Graphen ist deshalb keine Näherung notwendig.

Der Imaginärteil, der für die Summenregel wichtig ist, lautet mit Gl. B.45

$$\boxed{\Im \{ \Pi_{13}(k^2) \} = \frac{4\pi^3 g^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 (k^2 + 2m^2) \Theta(k^2)} \tag{5.94}$$

5.6 Graphen mit drei Kondensaten

In Gl. 3.23 gibt es 2 Terme mit einem skalaren und zwei fermionischen Kondensaten, den 2-ten und 3-ten Term. Da der Propagator ebenso wie das skalare Kondensat

Abbildung 5.6: Der Graph mit einem skalaren und zwei fermionischen Kondensaten gegen Austausch von x und y symmetrisch ist, ergibt sich beide Male der gleiche Beitrag, so daß man sich auf die Berechnung des Beitrags in Abb. 5.6 mit einem Faktor 2 beschränken kann. Die Amplitude lautet:

$$\begin{aligned} \Pi_{2+3}(k^2) = & -\frac{2g^2}{3} g_{\mu\nu} \mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : | 0 \rangle \\ & \langle 0 | : \bar{\phi}(x) \phi(y) : | 0 \rangle \Delta(x-y) \} (k) \end{aligned} \quad (5.95)$$

Das 6–Teilchen Kondensat wurde dabei in ein fermionisches 4–Teilchen und ein skalares 2–Teilchen Kondensat zerlegt. Dies ist erlaubt, da die fermionischen und skalaren Felder kommutieren. Das 4–Fermionen Kondensat ist durch Gl. 4.35 gegeben und kann daher unter der Fouriertransformation als Konstante behandelt werden. Hingegen ist das skalare Kondensat ortsabhängig (da die skalaren Quarks Masse tragen) und muß daher ebenso wie der skalare Propagator fouriertransformiert werden. Die Fouriertransformation wird mit Gl. 5.5 auf die beiden Teile einzeln angewendet, so daß folgt

$$\begin{aligned} \Pi_{2+3}(k^2) = & -\frac{2g^2}{3} g_{\mu\nu} \langle 0 | : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \bar{\psi}(y) \gamma^\nu \psi(y) : | 0 \rangle \\ & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \mathcal{F} \{ \langle 0 | : \bar{\phi}(x) \phi(y) : | 0 \rangle \} (q) \Delta(k-q) \end{aligned} \quad (5.96)$$

Für die beiden Kondensate können die Gln. 4.35 und 4.39 eingesetzt werden.

$$\Pi_{2+3}(k^2) = -\frac{2g^2}{3} g_{\mu\nu} \frac{1}{16N_c^2} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \gamma^\mu \gamma^\nu \delta_{jk} \delta_{\beta\eta} \delta_{il} \delta_{\alpha\lambda}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta(k-q) \frac{(2\pi)^4}{N_c} \delta_{\alpha'\beta'} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{m^2 \square q}{4} \right)^n \delta^4(q) \\
&= -\frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \\
& \int d^4 q \Delta(k-q) \left(\frac{m^2 \square q}{4} \right)^n \delta^4(q) \tag{5.97}
\end{aligned}$$

In der letzten Umformung wurden die Gln. 5.84 und 5.85 benutzt, um die diversen Kroneckersymbole auszuführen.

Die Ableitungen der δ -Funktion werden durch $2n$ -fache Anwendung von Gl. 1.35 auf den skalaren Propagator umgewälzt. Die Lösung des obigen Integrals besteht deshalb im Wesentlichen in der Berechnung der n -ten Ableitung des skalaren Propagators. Es ist jedoch sehr schwierig einen allgemeinen Ausdruck für die n -te Ableitung von $\frac{1}{(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon}$ nach q zu finden. Wenn man jedoch beachtet, daß das nichtlokale Vakuumkondensat aus 4.13 die Form eines Propagators hat, und dieser Propagator der freien Klein–Gordon–Gleichung 4.15 genügen muß — wenn man davon ausgeht, daß die enthaltenen Felder frei sind —, dann kann man den skalaren Propagator unter dem Integral auf eine einfachere Form bringen: sei Δ_{NP} der *Propagator für das nichtlokale Vakuumkondensat*

$$\int d^4 q f(q^2, q, \dots) \Delta_{NP}(q) = \int d^4 q f(m^2, q, \dots) \Delta_{NP}(q) \tag{5.98}$$

Die Berechtigung dieses Schritts steht und fällt mit der Frage, ob denn die Felder in dem nichtlokalen Kondensat wirklich frei sind oder nicht. Innerhalb der bisher vorgestellten Rechnungen wurde die Störungsreihe immer nur in nullter Ordnung berücksichtigt, d. h. es wurde kein Gluonenaustausch zwischen den fermionischen oder skalaren Quarkfeldern erlaubt. In diesem Rahmen ist der obige Schritt wohl zu rechtfertigen. Sollte man jedoch Gluonenaustausch berücksichtigen wollen, würde die Benutzung von Gl. 5.98 zu einer inkonsistenten Behandlung der Wechselwirkung führen.

Im folgenden wird die besprochene Beziehung benutzt, so daß man den Propagator des skalaren Quarks in Gl. 5.97 umschreiben kann:

$$\Pi_{2+3}(k^2) = \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}
& \int d^4 q \frac{1}{(k-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^n \delta^4(q) \\
&= \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \\
& \int d^4 q \frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + i\epsilon} \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^n \delta^4(q) \\
&= \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \\
& \int d^4 q \delta^4(q) \left(\frac{m^2 \square_q}{4} \right)^n \frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + i\epsilon} \quad , \quad (5.99)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt bereits die Differentiationen der δ -Funktion wie angekündigt durch die Anwendung der Differentialoperatoren auf den jetzt umgeschriebenen skalaren Propagator durchgeführt werden. Für die Differentiation dieses Ausdrucks kann man die allgemeine Formel B.54 benutzen.

$$\begin{aligned}
\Pi_{2+3}(k^2) &= \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \\
& \int d^4 q \delta^4(q) \left(\frac{m^2}{4} \right)^n (2n)! 4^n \frac{(k^2)^n}{(k^2 - 2k \cdot q + i\epsilon)^{2n+1}} \\
&= \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \\
& \int d^4 q \delta^4(q) m^{2n} \frac{k^{2n}}{(k^2 - 2k \cdot q + i\epsilon)^{2n+1}} \quad (5.100)
\end{aligned}$$

Die δ -Funktion ist nun anwendbar, und das Integral wird dadurch ausgeführt.

$$\Pi_{2+3}(k^2) = \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} m^{2n} \frac{k^{2n}}{(k^2 + i\epsilon)^{2n+1}} \quad (5.101)$$

Der Pol des Propagators, der um ϵ in die imaginäre Ebene geschoben wurde, führt auf einen Imaginärteil der Amplitude, der mit der verallgemeinerten Dirac-Identität 1.34 vom Rest der Amplitude isoliert wird.

$$\begin{aligned}
\Pi_{2+3}(k^2) &= \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} (m^2)^n (k^2)^n \left\{ \frac{1}{(k^2)^{2n+1}} - (-1)^{2n} \frac{i\pi}{(2n)!} \delta^{(2n)}(k^2) \right\} \\
&= \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{(m^2)^n}{(k^2)^{n+1}} - i\pi \frac{1}{n!(n+1)!} (k^2)^n \delta^{(2n)}(k^2) \right\} \quad (5.102)$$

Man sieht an dieser Darstellung, daß der Imaginärteil nur für $n = 0$ auftritt, denn wenn man die $2n$ -te Ableitung der δ -Funktion durch $2n$ Differentiationen von $(k^2)^n$ nach k^2 durchführt, ergibt dies für $n \geq 1$ bereits Null, denn man differenziert ein Polynom n -ten Grades $2n$ mal. Aus diesem Grund kann man für Gl. 5.102 auch schreiben:

$$\Pi_{2+3}(k^2) = \frac{2g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{(m^2)^n}{(k^2)^{n+1}} - i\pi \delta(k^2) \delta_{n0} \right\} \quad (5.103)$$

Dies ist der volle Graph aus Abb. 5.6 in allen Ordnungen der Masse der skalaren Quarks. Die Reihe aus der Entwicklung des nichtlokalen Kondensats wurde an keiner Stelle angetastet. Auch der Imaginärteil, der die Masse überhaupt nicht enthält, ist nicht etwa eine Näherung in nullter Ordnung der Masse, sondern in allen Ordnungen exakt. Er wird für die Summenregel noch benötigt:

$$\Im\{\Pi_{2+3}(k^2)\} = -\frac{2\pi g^2}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \delta(k^2) \quad (5.104)$$

Es ist jedoch zu beachten, daß dieser Ausdruck nur so lange korrekt bleibt, wie der Austausch von Gluonen vernachlässigt wird (siehe Gl. 5.98).

Kapitel 6

Aufstellen der Summenregel

6.1 Einleitung

In den letzten drei Kapiteln wurden die Vorbereitungen getroffen, um die Summenregel für die Masse des niedrigsten Bindungszustandes aus zwei skalaren Quarks mit Masse und zwei masselosen Quarks aufzustellen. Der für die Summenregel grundlegende Polarisationsensor wurde in Kap. 3 mit dem Wickschen Theorem hergeleitet, wobei nur die niedrigste Ordnung der Störungsreihe, d. h. keine Wechselwirkung berücksichtigt wurde. Stattdessen wurden die nichtstörungstheoretischen Quark-Kondensate in die Rechnung einbezogen. Auf diesem Weg haben sich 16 Terme ergeben (siehe Gl. 3.23), die jeweils einem Feynmangraphen entsprechen.

Die Ausdrücke in Gl. 3.23 enthalten nichtlokale Vakuumkondensate, deren Bedeutung in Kap. 4 geklärt wurde, indem ihr Zusammenhang zu lokalen Vakuumkondensaten hergeleitet wurde. Für das Kondensat aus fermionischen Quarks ist dieser Zusammenhang wegen der Masselosigkeit der Teilchen trivial (siehe Gl. 4.11). Hingegen ergibt sich für das nichtlokale Kondensat aus skalaren Quarks eine Reihe in der skalaren Quarkmasse, die auf eine Besselfunktion führt (siehe Gln. 4.29 und 4.34).

Um schließlich den Imaginärteil der Polarisationsfunktion, der über die Dispersionsrelation mit dem hadronischen Spektrum zusammenhängt, zu bestimmen,

müssen alle Graphen aus Gl. 3.23 regularisiert werden. Dabei war es in einigen Fällen notwendig, eine Entwicklung in der Masse der skalaren Quarks durchzuführen, die bis zur ersten Ordnung konsistent berücksichtigt wurde. Durch diese Näherung ergibt sich für die Masse der skalaren Quarks eine obere Schranke: Das zugehörige nichtlokale Kondensat ist als Entwicklung in Potenzen von $m^2\xi^2$ dargestellt (Gl. 4.29). Da $\xi = x - y$ den Abstand der Vertizes bezeichnet, ist dies wie eine Entwicklung in $\left(\frac{m}{M}\right)^2$ aufzufassen, wobei M die Masse des äußeren Bindungszustands ist. Die Einschränkung auf die erste Ordnung in der Masse der skalaren Quarks ist damit gleichbedeutend mit der Forderung $m < M$. Die Masse der skalaren Quarks muß kleiner bleiben als die Masse des 4-Teilchen-Zustands (siehe auch die Diskussion zu Gl. 4.29).

In diesem Kapitel wird der gesamte Imaginärteil der Polarisationsfunktion aus den regularisierten Graphen des vorigen Kapitels zusammengesetzt und in Gl. 1.56 bzw. 1.61 eingesetzt. Die letzte Gleichung stellt dann die gesuchte Summenregel für die Masse des 4-Teilchen-Zustands dar (siehe Kap. 1.4.1), deren Auswertung das Kapitel beschließt.

6.2 Die Summenregel

6.2.1 Der Imaginärteil der Polarisationsfunktion

Der Imaginärteil von Gl. 3.23 ergibt sich durch schlichtes Addieren aller nach der Regularisierung in Kap. 5 hergeleiteten Imaginärteile der einzelnen Feynmangraphen. Diese findet man in den Gleichungen 5.3 für Graphen mit einem Quark-Kondensat, 5.16 und 5.20 für den perturbativen Graphen bis zur ersten Ordnung der Squarkmasse, 5.33 und 5.82 für die Graphen mit einem Kondensat aus skalaren Quarks, 5.87 für den Graphen mit zwei Kondensaten aus fermionischen Quarks, 5.94 für den Graphen mit zwei Kondensaten aus skalaren Quarks und 5.104 für den Graphen mit zwei Kondensaten aus skalaren Quarks und einem Kondensat aus fer-

mionischen Quarks. Die Summe ist (ab hier sei $s := k^2$ gesetzt):

$$\begin{aligned}
\Im \{\Pi(s)\} &= g^2 \frac{N_c^2 \pi^7}{54(2\pi)^{12}} s^3 \Theta(s) \\
&+ g^2 \frac{4N_c^2 \pi^7}{9(2\pi)^{12}} m^2 s^2 \left(\frac{10}{3} - \gamma + \ln \left| -\frac{4\pi\mu^2}{s} \right| \right) \Theta(s) \\
&+ g^2 \frac{4N_c \pi^5}{9(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle s^2 \Theta(s) \\
&+ g^2 \frac{8N_c \pi^5 m^2 s}{3(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{3}{2} + \ln \left| -\frac{16\pi\mu^2}{s} \right| \right\} \Theta(s) \\
&- g^2 \frac{\pi^3}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \Theta(s - 4m^2) \\
&+ g^2 \frac{4\pi^3}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 (s + 2m^2) \Theta(s) \\
&- g^2 \frac{2\pi}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \delta(s)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

6.2.2 Boreltransformation

Die Summenregel für den 4-Teilchen-Zustand aus je 2 skalaren Quarks und 2 fermionischen Quarks erhält man durch Boreltransformation der Dispersionsrelation für den Imaginärteil der Polarisationsfunktion, der im letzten Abschnitt hergeleitet wurde (siehe Kap.1.4.1). Die Boreltransformation führt nach Subtraktion des Kontinuums auf den Ausdruck 1.56. Auf der linken Seite ist eine Integration über den Imaginärteil der Polarisationsfunktion mit dem Gewicht e^{-st} durchzuführen. Alle dafür notwendigen Integrale sind im Anhang dafür bereitgestellt: A.27 – A.30, A.34, A.35, A.56 und eine triviale Integration über eine δ -Funktion. Insgesamt ergibt dies

$$\begin{aligned}
a_M e^{-M^2 t} &= \int_0^{s_0} ds \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} \\
&= g^2 \frac{N_c^2 \pi^7}{54(2\pi)^{12}} \left\{ \frac{6}{t^4} - e^{-s_0 t} \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \right\} \\
&+ g^2 \frac{4N_c^2 \pi^7}{9(2\pi)^{12}} m^2 \left(\frac{10}{3} - \gamma \right) \left\{ \frac{2}{t^3} - e^{-s_0 t} \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right\} \\
&- g^2 \frac{4N_c^2 \pi^7}{9(2\pi)^{12}} m^2 \left\{ \frac{2}{t^3} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \ln(4\pi\mu^2 t) - E_1(s_0 t) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-s_0 t} \left(\frac{3}{t^3} + \frac{s_0}{t^2} + \ln \left(\frac{s_0}{4\pi\mu^2} \right) \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right) \Big\} \\
+ & g^2 \frac{4N_c\pi^5}{9(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{2}{t^3} - e^{-s_0 t} \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right\} \\
+ & g^2 \frac{4N_c\pi^5}{(2\pi)^8} m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{1}{t^2} - e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \right\} \\
- & g^2 \frac{8N_c\pi^5}{3(2\pi)^8} m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{1}{t^2} \left(1 - \gamma - \ln(16\pi\mu^2 t) - E_1(s_0 t) \right) \right. \\
& \left. - e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln \left(\frac{s_0}{16\pi\mu^2} \right) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \right) \right\} \\
+ & g^2 \frac{\pi^3}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \frac{1}{t} \left(e^{-s_0 t} - e^{-4m^2 t} \right) \\
- & g^2 \frac{2\pi^3}{3(2\pi)^4} m^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \left\{ E_1(s_0 t) + \gamma + \ln(4m^2 t) \right. \\
& \left. - 2 e^{-4m^2 t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n (n-1) n!} \right\} \\
+ & g^2 \frac{4\pi^3}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \left\{ \frac{1}{t^2} - e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \right\} \\
+ & g^2 \frac{8\pi^3}{3(2\pi)^4} m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \frac{1}{t} \left(1 - e^{-s_0 t} \right) \\
- & g^2 \frac{2\pi}{3N_c} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \tag{6.2}
\end{aligned}$$

Dabei sind M die Masse des niedrigsten Bindungszustands und a_M der zugehörige Koeffizient aus dem hadronischen Spektrum (siehe Gl. 1.46).

Diese Gleichung hängt von vielen Parametern ab. N_c ist die Zahl der Farben und wird auf 3 festgelegt. Die Größe $\pi\mu^2$ stammt aus der Regularisierung und wird hier willkürlich als die Masse des skalaren Quarks gewählt. Man schränkt dadurch nicht die Aussagekraft der Summenregel ein, sondern legt nur das Renormierungsschema fest. Die Masse der skalaren Quarks ist wesentlich größer anzusetzen als die der fermionischen Quarks, die vernachlässigt wurde. Andererseits darf sie die Masse der resultierenden Bindungszustände nicht überschreiten, so daß eine Wahl um 500 MeV sinnvoll erscheint. Die Kontinuumsschwelle s_0 sollte vernünftiger Weise mindestens das doppelte der Masse der Konstituenten betragen, damit hadronische Bindungszustände erlaubt bleiben. Es bietet sich an, die Schwelle auf die üblichen QCD-Werte von 1.5 GeV festzulegen. Bei einer Variation der skalaren Quarkmasse,

wird die Kontinuumsschwelle immer an $s_0 = 3m$ angepaßt. Die Werte für die beiden Kondensate sind als Parameter anzusehen.

Zwei weitere unbestimmte Parameter sind der Koeffizient des hadronischen Spektrums a_M und die Kopplungskonstante g^2 . Diese können jedoch durch eine geschickte Manipulation aus der Summenregel entfernt werden. Dazu erinnere man sich an Gl. 1.61. In dieser Form ist die gesuchte Masse des Bindungszustands direkt abzulesen. Der Koeffizient a_M hat sich auf der rechten Seite gekürzt, ebenso wie die Kopplungskonstante, die allen Termen gemeinsam ist (siehe Gl. 6.2) und deshalb in beiden Integralen faktorisiert. Dieser Vorteil wird durch ein zusätzliches Integral erkauft, dessen Integrand zusätzlich zu e^{-st} mit s gewichtet wird. Alle benötigten Integrale können im Anhang gefunden werden: A.28 – A.31, A.46, A.47 und A.61

$$\begin{aligned}
a_M M^2 e^{-M^2 t} &= \int_0^{s_0} ds s \Im \Pi_{OPE}(s) e^{-st} \\
&= g^2 \frac{N_c^2 \pi^7}{54(2\pi)^{12}} \left\{ \frac{24}{t^5} - e^{-s_0 t} \left(\frac{24}{t^5} + \frac{24s_0}{t^4} + \frac{12s_0^2}{t^3} + \frac{4s_0^3}{t^2} + \frac{s_0^4}{t} \right) \right\} \\
&+ g^2 \frac{4N_c^2 \pi^7}{9(2\pi)^{12}} m^2 \left(\frac{10}{3} - \gamma \right) \left\{ \frac{6}{t^4} - e^{-s_0 t} \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \right\} \\
&- g^2 \frac{4N_c^2 \pi^7}{9(2\pi)^{12}} m^2 \left\{ \frac{6}{t^4} \left(\frac{11}{6} - \gamma - \ln(4\pi\mu^2 t) - E_1(s_0 t) \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-s_0 t} \left(\frac{11}{t^4} + \frac{5s_0}{t^3} + \frac{s_0^2}{t^2} + \ln \left(\frac{s_0}{4\pi\mu^2} \right) \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \right) \right\} \\
&+ g^2 \frac{4N_c \pi^5}{9(2\pi)^8} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{6}{t^4} - e^{-s_0 t} \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \right\} \\
&+ g^2 \frac{4N_c \pi^5}{(2\pi)^8} m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{2}{t^3} - e^{-s_0 t} \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right\} \\
&- g^2 \frac{8N_c \pi^5}{3(2\pi)^8} m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle \left\{ \frac{2}{t^3} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \ln(16\pi\mu^2 t) - E_1(s_0 t) \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{-s_0 t} \left(\frac{3}{t^3} + \frac{s_0}{t^2} + \ln \left(\frac{s_0}{16\pi\mu^2} \right) \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right) \right\} \\
&- g^2 \frac{\pi^3}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \left\{ \frac{1}{t^2} e^{-4m^2 t} - e^{-s_0 t} \left(\frac{s_0}{t} + \frac{1}{t^2} \right) \right\} \\
&- g^2 \frac{2\pi^3}{3(2\pi)^4} m^2 \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 \frac{1}{t} \left(e^{-4m^2 t} + e^{-s_0 t} \right) \\
&+ g^2 \frac{4\pi^3}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \left\{ \frac{2}{t^3} - e^{-s_0 t} \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$+ g^2 \frac{8\pi^3}{3(2\pi)^4} m^2 \langle \bar{\phi}\phi \rangle^2 \left\{ \frac{1}{t^2} - e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \right\} \quad (6.3)$$

Der Quotient der Gln. 6.2 und 6.3 ist ein direktes Maß für die gesuchte Masse des 4-Teilchen-Bindungszustands aus 2 skalaren und 2 fermionischen Quarks und damit die gesuchte Summenregel.

6.3 Auswertung

Um die im letzten Abschnitt hergeleitete Summenregel auszuwerten, soll zunächst ein Überblick darüber gewonnen werden, welche Beiträge zum Imaginärteil der Polarisationsfunktion dominieren, um dann eine sinnvolle Wahl für die Parameter zu ermöglichen. Dazu ist von Gl. 6.2 auszugehen, versuchsweise ein Parametersatz zu wählen. Die Beiträge setzen sich aus den Ergebnissen von 5 Graphen mit unterschiedlichen Kondensaten zusammen, die jeweils Terme in nullter und in erster Ordnung der skalaren Quarkmasse enthalten. Eine erste Untersuchung betrifft die Beiträge von den einzelnen Ordnungstermen in der Masse. In Abb. 6.1 findet man die Summe aller Beiträge und ihre Aufteilung in die Terme proportional m^0 bzw. m^2 , wobei die Beiträge von verschiedenen Graphen jeweils aufaddiert wurden. Man erkennt, daß für eine Masse der skalaren Quarks von 500 MeV eine Dominanz des ersten Ordnungsterms proportional m^2 gegenüber dem Term proportional m^0 besteht. Dies legt die Vermutung nahe, daß die nächsten Ordnungen in der Entwicklung merkliche Beiträge liefern könnten. Es erscheint daher sinnvoll, die Masse der skalaren Quarks noch etwas abzusenken, um sicher zu gehen, daß die Summenregel aussagekräftig ist. Für eine Masse von 200 MeV und sonst unveränderte Parameter erhält man die umgekehrte Situation (siehe Abb. 6.2): der Beitrag proportional m^2 ist gegenüber dem m^0 -Term unterdrückt. Man kann demnach erwarten, daß höhere Potenzen noch stärker unterdrückt sind und das Abbrechen der Reihe nach dem ersten Ordnungsterm eine gute Näherung bildet. Ein weiterer Test, der die Qualität der Summenregel überprüft, wird die resultierende Masse des Bindungszustands selbst sein. Sie muß — wie in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt — wesentlich größer als die Masse der skalaren Quarks bleiben. Es wird sich zeigen, daß diese beiden Tests zu kohärenten Ergebnissen führen: für skalare Quarkmassen, für

die der m^2 -Term dominant wird (500 MeV), wird auch die Masse des Bindungszustands von vergleichbarer Größe sein, während sie für kleinere skalare Quarkmassen darüber liegt.

Eine entsprechende Untersuchung differenziert zwischen den Beiträgen der einzelnen Graphen, wobei diesmal die beiden Ordnungen der Masse jeweils addiert werden (siehe Abb. 6.3). Um die Größenordnungen besser vergleichen zu können, wurden die Vorzeichen der Beiträge ignoriert. Man erkennt, daß die Beiträge der Graphen mit Kondensaten aus skalaren Quarks stark dominieren. Die übrigen Graphen, insbesondere der perturbative Graph, sind durch mehr als 2 Größenordnungen unterdrückt. Um die Verhältnisse etwas zu entschärfen, wird der Wert des Kondensats aus skalaren Quarks halbiert (siehe Abb. 6.4).

Nachdem ein sinnvoller Parametersatz gefunden ist ($s_0 = 1.5 \text{ GeV}$, $\langle \bar{\phi}\phi \rangle = 500 \text{ MeV}$, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = 200 \text{ MeV}$ und $m = 200 \text{ MeV}$), kann man die Summenregel selbst auswerten. Die Masse des Bindungszustands ergibt sich als das Verhältnis der Gln. 6.3 und 6.2. Um den Einfluß der einzelnen Parametergrößen zu demonstrieren, wird jeweils ein Parameter variiert, während die übrigen festgehalten werden. Die Variation des Kondensats aus fermionischen Quarks (siehe Abb. 6.5) ist im Bereich um 200 MeV sehr sensitiv. Eine minimale Vergrößerung des Kondensats führt bereits zu einer wesentlichen Vergrößerung der Masse des Bindungszustands. Für sehr kleine Kondensate konvergiert die Masse gegen einen Wert von 400 MeV .

Die Variation des Kondensats aus skalaren Quarks zeigt für den kleinsten Wert die größte Masse des Bindungszustands an, während eine Vergrößerung zu immer kleiner werdenden Massen führt (siehe Abb. 6.6). Jedoch wird ein Wert von ungefähr 400 MeV auch hier nicht unterschritten, auch wenn man das Kondensat noch wesentlich vergrößert.

Das gleiche Verhalten findet man auch bei der Variation der skalaren Quarkmasse (siehe Abb. 6.7). Den größten Bindungszustand findet man für die kleinste Masse, während sich für größere Massen der Bindungszustand nur noch unwesentlich ändert. Hier ist jedoch zu beachten, daß aufgrund der obigen Diskussion der Qualität der Summenregel die Werte oberhalb von $m = 400 \text{ MeV}$ nicht aussagekräftig sind.

6.4 Zusammenfassung

Die Massen des Bindungszustands liegen alle im Bereich von $400 - 800 \text{ MeV}$ und damit mindestens doppelt so hoch wie die gewählte Masse der skalaren Quarks. Die Bedingung $\frac{m}{M} < 1$ ist damit erfüllt (siehe die Diskussion zu Gl. 4.29) und ein Abbruch der Entwicklung in der Masse der skalaren Quarks gerechtfertigt. Der nächste Ordnungsterm proportional m^4 ist mindestens durch einen Faktor $\frac{1}{16}$ unterdrückt. Der Fehler liegt damit unterhalb der 10% Grenze, einer Genauigkeitsgrenze, die der Erwartungen an QCD-Summenregeln entspricht.

Die Kernfrage ist, ob es möglich ist, durch eine bestimmte Wahl der Kondensate die Masse des 4-Teilchen-Zustands wesentlich abzusenken. Es hat sich gezeigt, daß alle Variationen der Parameter einen unteren Wert von 400 MeV nicht unterschreiten. Ein überdurchschnittliches Absenken der Masse scheint also nicht möglich, was insbesondere die Erklärung der Positronenspektren durch solche Zustände unwahrscheinlich macht. Allerdings ist man aufgrund der begrenzten Entwicklung in der Masse der skalaren Quarks auf kleine Massen beschränkt. Es ist nicht auszuschließen, daß sich das Verhalten für große skalare Quarkmassen, wie sie beispielsweise in supersymmetrischen Theorien prognostiziert werden, grundlegend ändert. Allerdings erscheint eine Absenkung der Resonanzmasse in den MeV Bereich für schwerere Konstituenten sehr unwahrscheinlich.

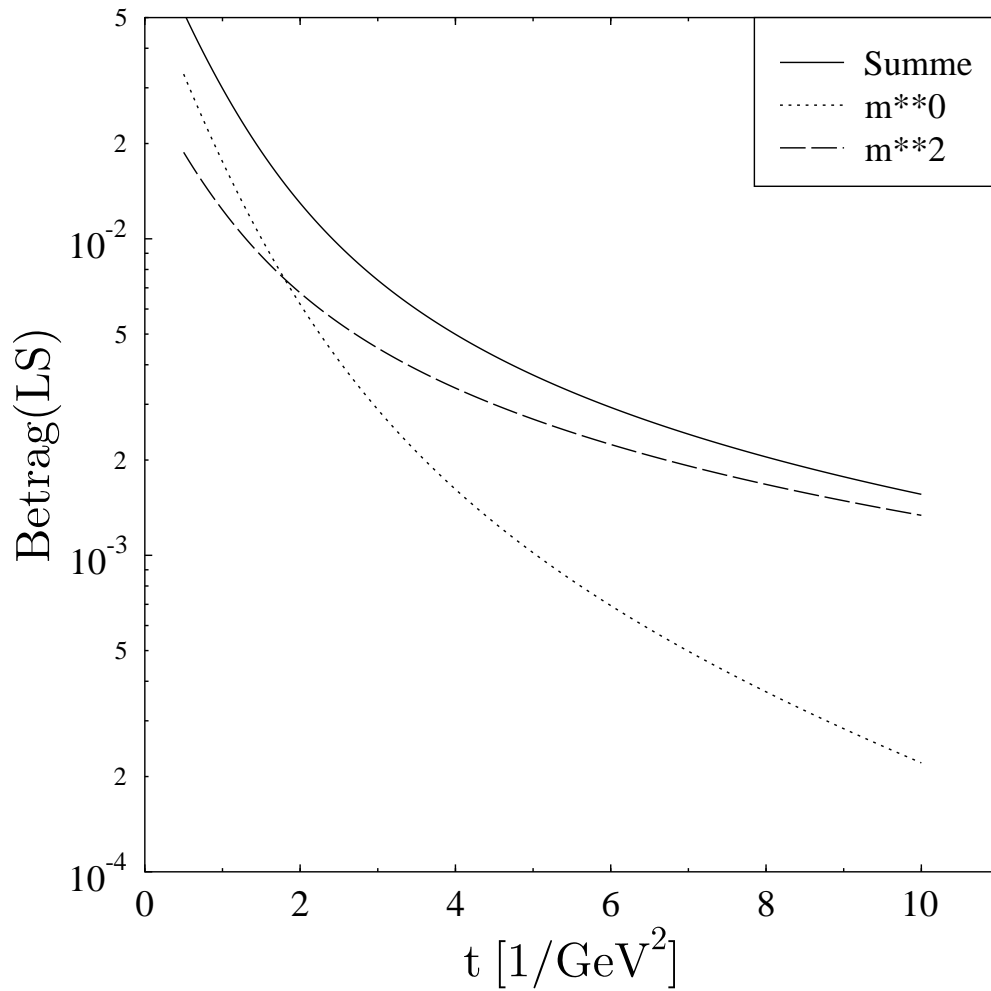


Abbildung 6.1: Die Größenordnung der Beiträge von den beiden Ordnungen in der Masse der skalaren Quarks. Der m^2 -Term dominiert. Parameterwahl: 1.5 GeV für die Kontinuumsschwelle, 1 GeV für das Kondensat aus skalaren Quarks, 200 MeV für das Kondensat aus fermionischen Quarks und 500 MeV für die Masse der skalaren Quarks.

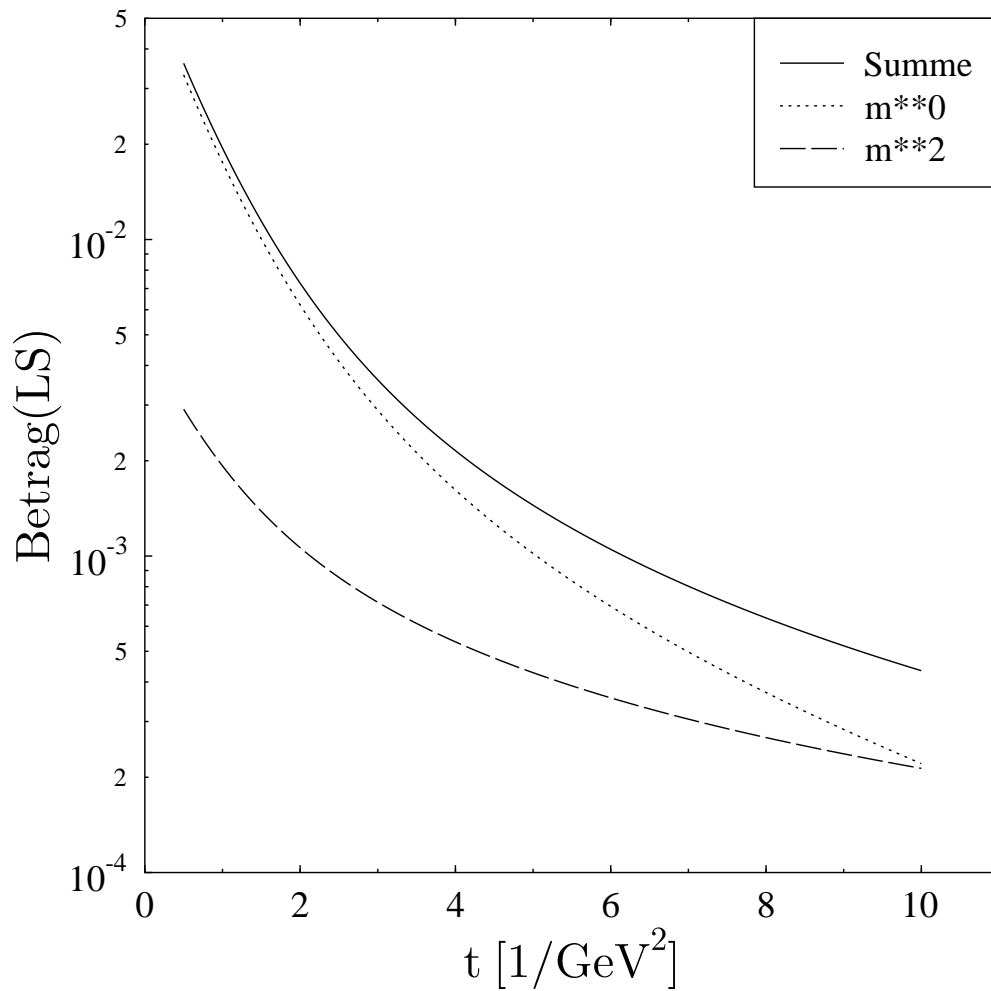


Abbildung 6.2: Die Größenordnung der Beiträge von den beiden Ordnungen in der Masse der skalaren Quarks. Für die kleinere Masse dominiert jetzt der m^0 -Term. Parameterwahl: 1.5 GeV für die Kontinuumsschwelle, 1 GeV für das Kondensat aus skalaren Quarks, 200 MeV für das Kondensat aus fermionischen Quarks und 200 MeV für die Masse der skalaren Quarks.

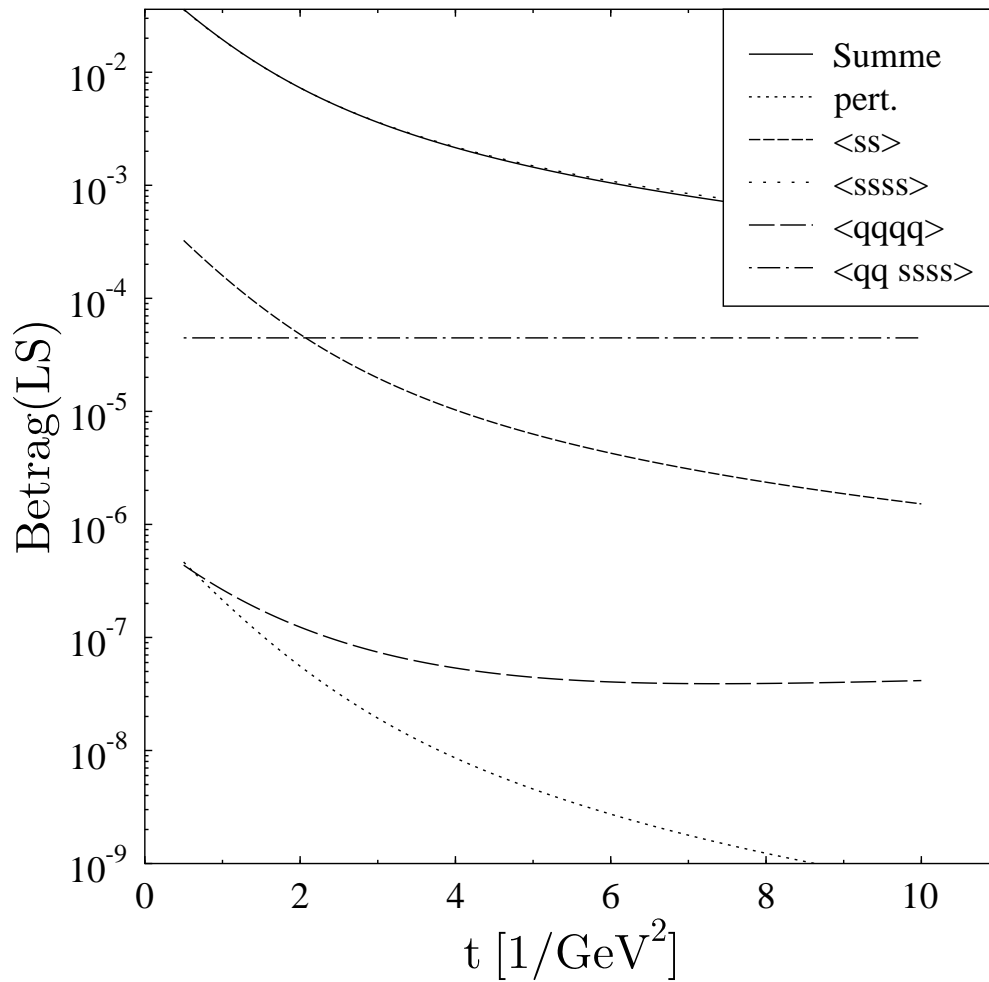


Abbildung 6.3: Die Größenordnung der Beiträge der einzelnen Graphen. Man sieht eine starke Dominanz des Beitrags vom 4-Bosonen-Kondensat. Parameterwahl: 1.5 GeV für die Kontinuumsschwelle, 1 GeV für das Kondensat aus skalaren Quarks, 200 MeV für das Kondensat aus fermionischen Quarks und 200 MeV für die Masse der skalaren Quarks.

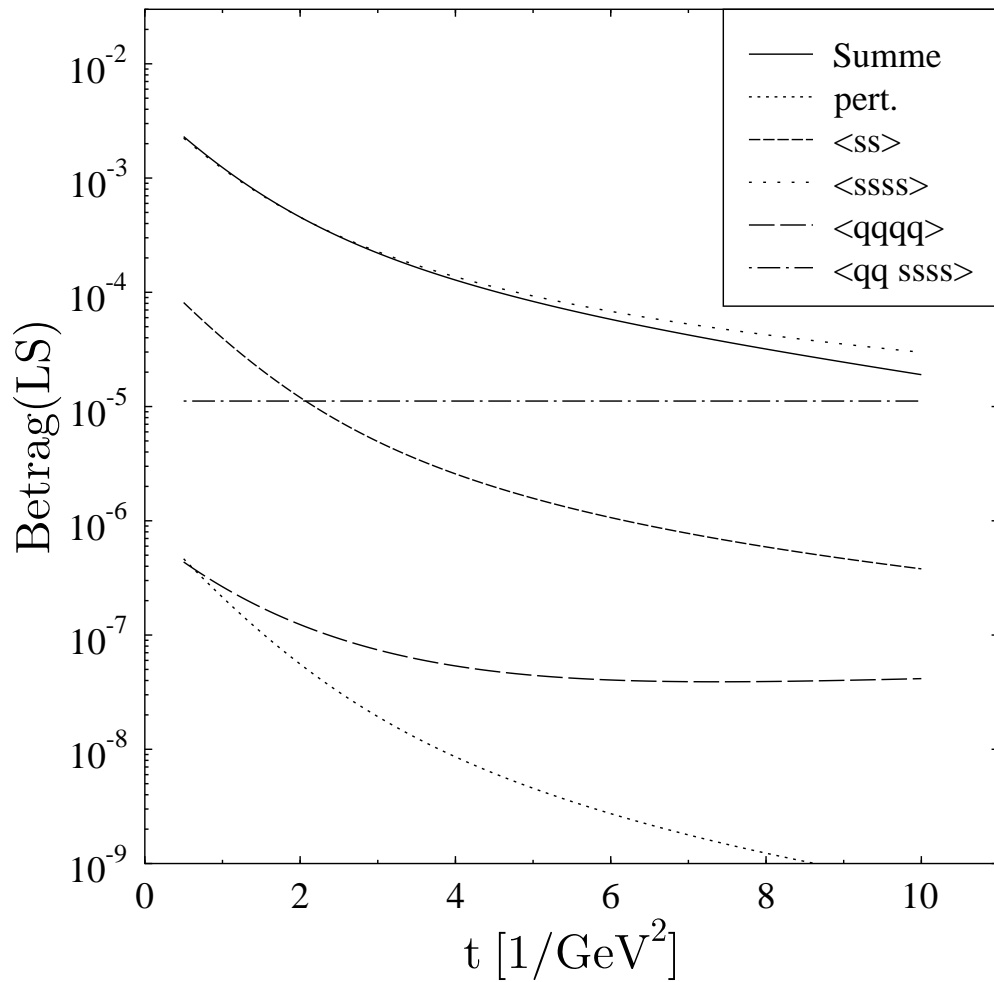


Abbildung 6.4: Die Größenordnung der Beiträge der einzelnen Graphen für ein kleineres Kondensat aus skalaren Quarks. Parameterwahl: 1.5 GeV für die Kontinuumsschwelle, 0.5 GeV für das Kondensat aus skalaren Quarks, 200 MeV für das Kondensat aus fermionischen Quarks und 200 MeV für die Masse der skalaren Quarks.

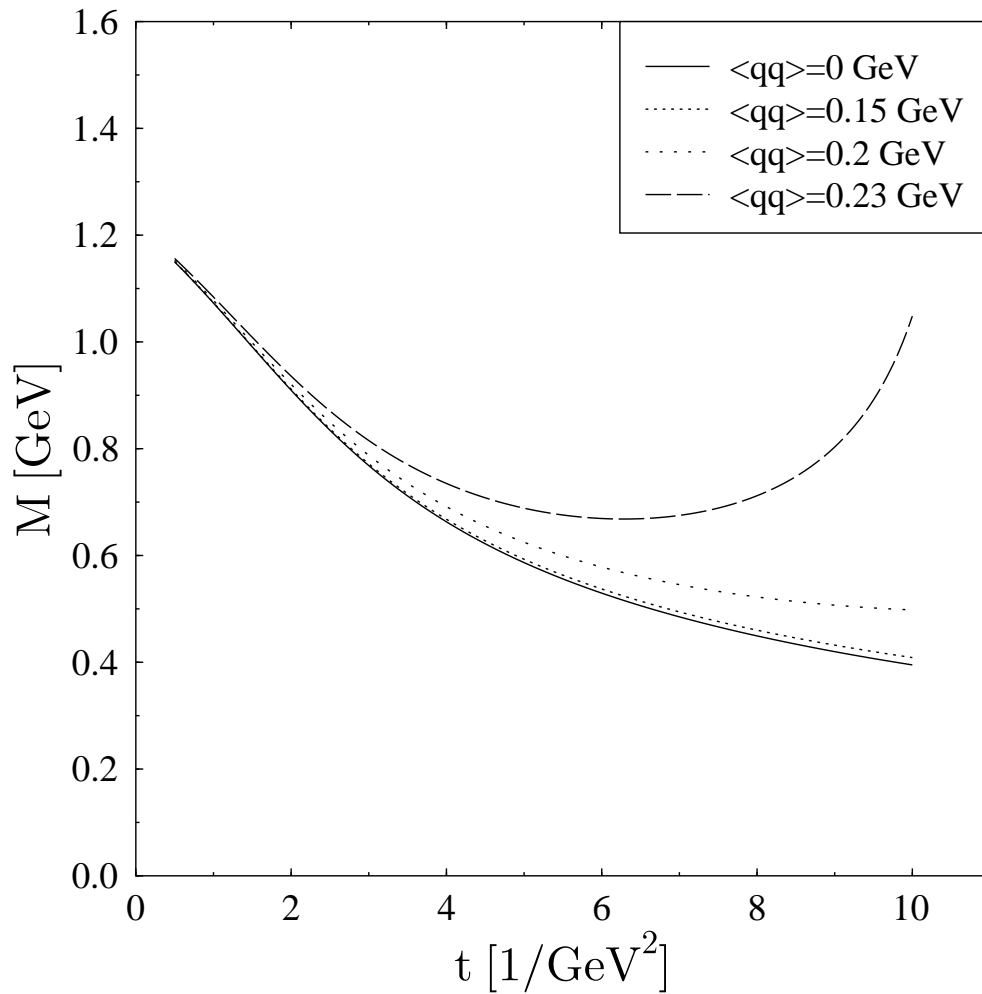


Abbildung 6.5: Die Masse des 4-Teilchen-Zustands in Abhängigkeit von der Größe des Kondensats aus fermionischen Quarks. Eine Masse von 400 MeV wird nicht unterschritten. Parameterwahl: 1.5 GeV für die Kontinuumsschwelle, 0.5 GeV für das Kondensat aus skalaren Quarks und 0.2 GeV für die Masse der skalaren Quarks.

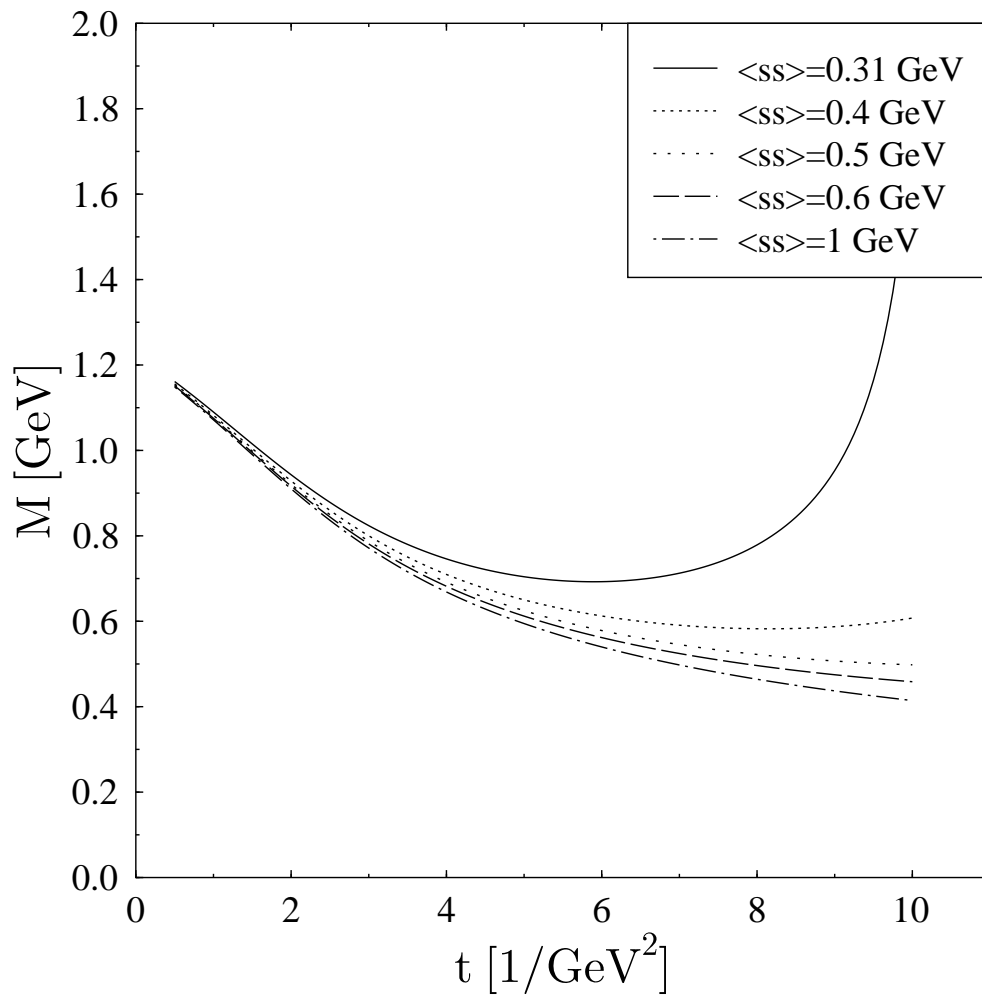


Abbildung 6.6: Die Masse des 4-Teilchen-Zustands in Abhängigkeit von der Größe des Kondensats aus skalaren Quarks. Eine Masse von 400 MeV wird nicht unterschritten. Parameterwahl: 1.5 GeV für die Kontinuumsschwelle, 200 MeV für das Kondensat aus fermionischen Quarks und 200 MeV für die Masse der skalaren Quarks.

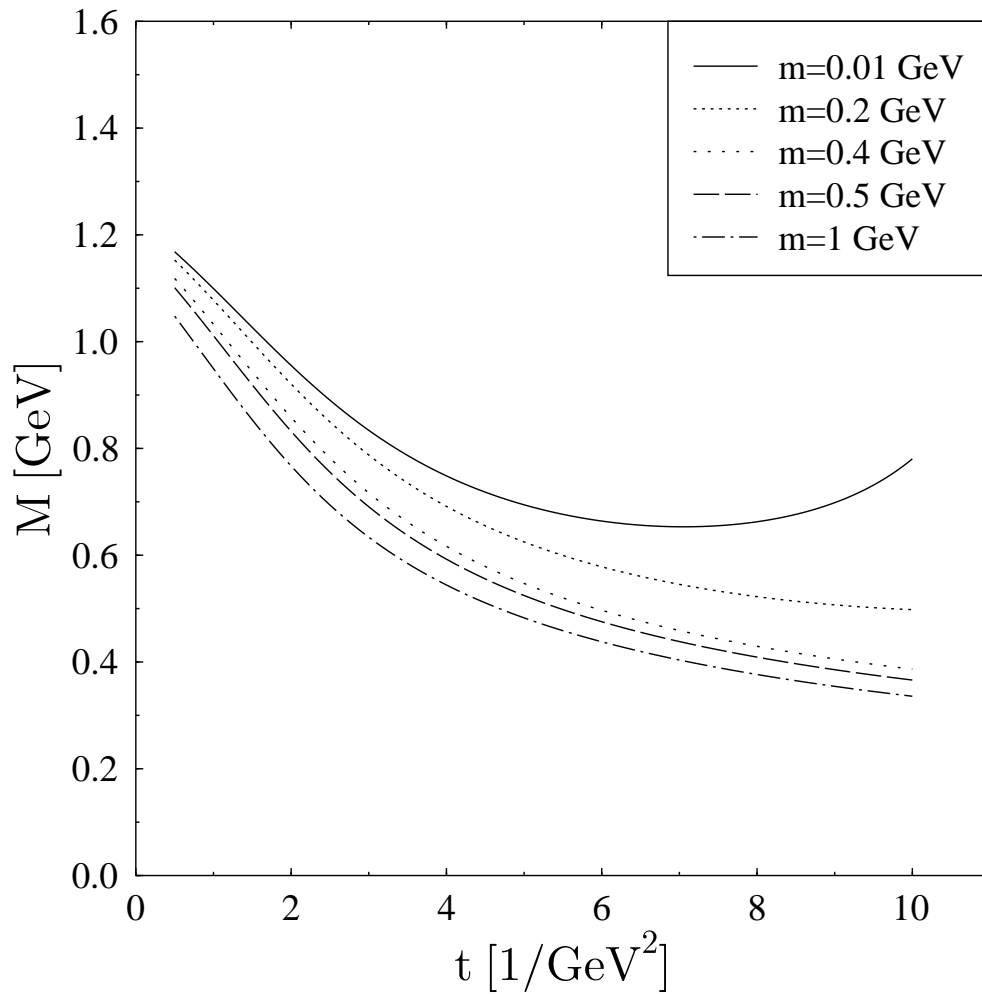


Abbildung 6.7: Die Masse des 4-Teilchen-Zustands in Abhängigkeit von der Masse der skalaren Quarks. Eine Masse von 400 MeV wird nicht unterschritten. Parameterwahl: das dreifache der skalaren Quarkmasse für die Kontinuumschwelle, 200 MeV für das Kondensat aus fermionischen Quarks und 0.5 GeV für das Kondensat aus skalaren Quarks.

Kapitel 7

Die exakte Behandlung der Masse

Die Auswertung der Summenregel für den 4-Teilchen-Zustand bis zu ersten Ordnung der skalaren Quarkmasse hat keine mögliche wesentliche Absenkung der Masse des Bindungszustands hervorgebracht. Auch wenn hier noch keine vollständige Behandlung in allen Ordnungen der Masse möglich ist, soll dennoch dargelegt werden, an welchen Stellen in den bisherigen Rechnungen Näherungen gemacht wurden. In einigen Fällen können jetzt schon Vorschläge gemacht werden, wie eine Erweiterung auf größere Massen auszusehen hätte.

Der Fall großer Massen ist insbesondere für die Supersymmetrie von Bedeutung. Die Supersymmetrie sagt zu allen bekannten Fermionen einen bosonischen Partner mit ansonsten gleichen Quantenzahlen und entsprechend zu allen bekannten Bosonen einen fermionischen Partner voraus. Die bosonischen Partner der Quarks sind skalare Quarks, sogenannte Squarks. Im Gegensatz zu den leichten Quarks der QCD (einige MeV) wird die Ruhemasse der Squarks im Allgemeinen als sehr groß angenommen (einige GeV) (Barger et al. 1984). Es ist möglich, eine obere Schranke $m < 40 \text{ GeV}$ anzugeben (Ellis, Nanopoulos 1982). Die Literatur ist in diesem Punkt jedoch sehr widersprüchlich (z. B. Baer et al. 1987; Barger et al. 1984; Duncan 1983; Goldberg 1984; Suzuki 1982).

Es wäre interessant zu erfahren, welche Masse wohl gebundene Zustände haben könnten, die aus mehreren solchen skalaren Quarks zusammengesetzt sind. Um diese Frage zu beantworten, ist das folgende Procedere denkbar. Man führt die Squarks phenomenologisch in die QCD ein und benutzt die QCD–Summenregeln, um die Masse von den gewünschten Resonanzen zu berechnen. Genau dies ist bereits für einen 2–Teilchen–Zustand geschehen (Ignatiev et al. 1982). Das Ergebnis ist eine Masse von ungefähr 70GeV, wobei natürlich einige Parameter (Vakuumkondensat und skalare Quarkmasse) argumentativ festgelegt wurden.¹ Der gleiche Weg kann auch auf einen 4–Teilchen Zustand verallgemeinert werden, der aus 2 Quarks und 2 Squarks aufgebaut ist.

Um auf dem Weg zu einer in der skalaren Quarkmasse exakten Summenregel etwas voranzukommen, wird das bisher Erreichte unter diesem Aspekt beleuchtet. Die erste Auswirkung der skalaren Quarkmasse zeigte sich bei der Analyse der nichtlokalen Vakuumkondensate, die bei der Entwicklung des Polarisationsensors aufgetaucht waren. Man kann für die Vakuumerwartungswerte von nichtlokalen, normalgeordneten Feldoperatorprodukten keine Konstanten ansetzen, wenn die Felder Masse tragen. Eine exakte Untersuchung dieses Umstands in Kap. 4 führte auf eine Reihe (siehe Gl. 4.29), die die endliche Masse der skalaren Felder exakt berücksichtigt.

Auch bei der Regularisierung der Feynmangraphen spielte die skalare Quarkmasse eine wichtige Rolle. Bis auf zwei, wurden alle Graphen in der Masse exakt regularisiert. Der perturbative Graph und der Graph mit einem Kondensat aus skalaren Quarks wurden in der Masse entwickelt und nur bis zur ersten Ordnung regularisiert. Für den perturbativen Graphen wird im nächsten Abschnitt eine in der Masse exakte Berechnung vorgestellt. Hingegen wird für den Graphen mit einem Kondensat nur das Regularisierungsproblem noch einmal vollständig formuliert, indem alle zu regularisierenden Integrale explizit notiert und interpretiert werden.

¹Aus dem Artikel geht nicht klar hervor, in welcher Form die skalare Quarkmasse auf der Seite der Elementarteilchen berücksichtigt wurde. Die Ortsabhängigkeit der Kondensate, die mit der Masse zusammenhängt, ist wohl nicht eingegangen.

7.1 Die Unitarität der S -Matrix

In diesem Abschnitt wird dargestellt, wie es möglich ist, mit Hilfe der Unitaritätsbedingung für die Streumatrix den Imaginärteil von Polarisationsgraphen zu berechnen. Dabei wird der virtuelle Zwischenzustand eines Polarisationsgraphen als realer Streuprozess auf der Massenschale behandelt.

7.1.1 Theoretischer Hintergrund

Die Streumatrix S ordnet einem Anfangszustand $\Phi(t = -\infty)$ den Endzustand $\Phi(t = +\infty)$ zu. Es wurde bereits in Kap. 3 darauf hingewiesen, daß die Streumatrix S unitär sein muß, damit die Norm erhalten bleibt. Dieser Umstand wird jetzt benutzt, um den Imaginärteil von Polarisationsfunktionen direkt zu bestimmen.

Zunächst soll die S -Matrix etwas umgeschrieben werden. Sie enthält immer die Identität — den Operator, der keine Streuung ausdrückt, und den Anfangszustand unverändert läßt —, und dieser Teil ist für die Berechnung von Polarisationsfunktionen unwichtig. Sei der Anfangszustand durch i und der Endzustand durch f symbolisiert. Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit für die S -Matrix folgende Form ansetzen:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} \quad (7.1)$$

Die Wechselwirkung der Streumatrix steckt dann in der T -Matrix, aus der noch die Energie-Impulserhaltung, die bei der Streuung nicht verletzt werden darf, explizit herausgezogen wurde (P_f und P_i sind die Viererimpulse des End- bzw. Anfangszustands).

Es stellt sich die Frage, wie sich die Unitaritätsforderung an die S -Matrix $(S^+ S)_{fi} = \delta_{fi}$ auf die T -Matrix auswirkt. Dazu wird Gl. 7.1 in die Unitaritätsbeziehung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \delta_{fi} &= (S^+ S)_{fi} = \sum_n S_{fn}^+ S_{ni} = \sum_n S_{nf}^* S_{ni} \\ &= \sum_n \left(\delta_{nf} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_f) T_{nf}^* \right) \left(\delta_{ni} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_n - P_i) T_{ni} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) T_{if}^* + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} \\
&\quad + i^2(2\pi)^8 \sum_n \delta^{(4)}(P_n - P_f) \delta^{(4)}(P_n - P_i) T_{ni} T_{nf}^* \\
&= \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{if}^* + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi} \\
&\quad - i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{ni} T_{nf}^* \\
&\implies \boxed{T_{fi} - T_{if}^* = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_f - P_n) T_{nf}^* T_{ni}} \quad , \quad (7.2)
\end{aligned}$$

wobei P_n die Summe der Viererimpulse aller Teilchen im Zustand n ist. Diese Beziehung bildet die Grundlage für das im folgenden dargestellte Verfahren. Es ist zu beachten, daß bei kleiner Kopplungskonstante die T -Matrix in erster Ordnung hermitesch ist, denn die rechte Seite ist ein Ausdruck von rein zweiter Ordnung und verschwindet daher in erster Ordnung.

Die Idee, mit dieser Beziehung den Imaginärteil eines Polarisationsensors zu berechnen, basiert auf einer Uminterpretation des Graphen. An dem Vertex wird nicht ein virtueller Zwischenzustand erzeugt, sondern es werden *fiktive reale Teilchen* erzeugt, die auf der Massenschale liegen. Der dadurch entstehende Streuprozess unterliegt der in der Streutheorie üblichen Kinematik. Der gesamte Polarisationsgraph ist demnach als die Streuung des äußeren Zustands in sich selbst über einen realen Zwischenzustand zu interpretieren. Auf der linken Seite von Gl. 7.2 ist dann $i = f$, und man erhält den Imaginärteil der T -Matrix. Alle an dem Zwischenzustand beteiligten realen Teilchen haben einen unbestimmten Impuls, über den summiert wird. An jedem Vertex erschlägt die Kinematik des Streuprozesses eine der Summationen, so daß für den üblichen Polarisationsgraphen mit einem virtuellen Elektron-Positron-Paar keine Integration mehr auszuführen ist. Der Vorteil dieses Verfahrens wird deutlich, wenn man dies mit der relativ aufwendigen Regularisierung in Kap. 2.2.3 vergleicht.

Gl. 7.2 wird mit dieser Interpretation im Hinterkopf umgeformt. Zunächst ist $i = f$, da der einlaufende Zustand in sich selbst gestreut wird. Dabei ist zu beachten, daß die linke Seite mit dem Imaginärteil zusammenhängt:

$$T_{ii} - T_{ii}^* = 2i\Im T_{ii} = i(2\pi)^4 \sum_n \delta^{(4)}(P_i - P_n) T_{ni}^* T_{ni} \quad (7.3)$$

Als nächstes ist die Summe über alle n zu interpretieren. Es ist die Summe über alle realen Zwischenzustände, die bei der Streuung entstehen können. Die Summe ist deshalb als Integral über die Dreierimpulse aller Teilchen, die an dem Zwischenzustand beteiligt sind, und als Summe über alle ihre Quantenzahlen λ aufzufassen. Über die Energie-Komponente der Viererimpulse wird nicht integriert, da die Teilchen auf der Massenschale liegen sollen. Für l am Zwischenzustand beteiligte Teilchen bedeutet dies:

$$\Im T_{ii} = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_l} \int \frac{d^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 p_l}{2E_l(2\pi)^3} \delta^{(4)}(P_i - P_n) T_{ni}^* T_{ni} \quad (7.4)$$

Dabei wurde das invariante Integrationsmaß benutzt. Man kann das gleiche Integral auch in 4 Dimensionen notieren. Dann fehlen die Faktoren $\frac{1}{2E_i}$, und man hat stattdessen die Deltafunktion $\delta(p_i^2 - m_i^2)$. Damit ist die obige Notation äquivalent zu einer kovarianten Schreibweise.

Für die folgende Rechnung ist es sinnvoll, ein spezielles Koordinatensystem zu wählen und sich die Kinematik klar zu machen. Es wird das Schwerpunktsystem gewählt, in dem der einlaufende Dreierimpuls \vec{k} verschwindet und damit die Beziehung $k^2 = E^2$ für den Viererimpuls gilt. Spaltet man die Deltafunktion in zwei Teile, ergibt sich:

$$\Im T_{ii} = \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_l} \int \frac{d^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 p_l}{2E_l(2\pi)^3} \delta^{(3)}(-\vec{P}_n) \delta(E - E_n) T_{ni}^* T_{ni} \quad (7.5)$$

E_n ist die Summe aller Energien und \vec{P}_n die Summe aller Dreierimpulse der Teilchen im realen Zwischenzustand.

Schließlich ist für die T -Matrix ein expliziter Ausdruck zu finden. Sie vermittelt die Ankopplung des einlaufenden Zustands mit der Polarisierung e_μ an einen Strom J^μ . Der allgemeine Ausdruck lautet (Landau, Lifschitz 1989):

$$\begin{aligned} T_{ni} &= -e_\nu J^\nu \quad \text{und} \quad T_{ni}^* = -e_\mu^* J^{\mu*} \\ T_{ni}^* T_{ni} &= e_\mu^* e_\nu J^{\mu*} J^\nu \end{aligned} \quad (7.6)$$

Erwartungsgemäß erhält man für gleiche Anfangs- und Endzustände einen Zusammenhang mit dem Polarisationsstensor:

$$T_{ii} = e_\mu^* e_\nu \Pi^{\mu\nu} \quad (7.7)$$

Diese Gleichung ist in Analogie zu Gl. 3.3 zu sehen. Da man sich hier nicht für die Polarisierungen der Zustände interessiert, kann man eine Mittelung vornehmen (Landau, Lifschitz 1989):

$$\overline{e_\mu^* e_\nu} = -\frac{1}{3} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (7.8)$$

Dies entspricht der allgemeinen tensoriellen Struktur des Polarisationsensors, wie sie in Gl. 3.20 gefunden wurde. Durch Einsetzen dieser Beziehungen in die obigen Gleichungen findet man unter Berücksichtigung von Gl. 3.21 und der Transversalität $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = k_\mu J^\mu = 0$:

$$T_{ni}^* T_{ni} = -\frac{1}{3} J^{\mu*} J^\mu \quad (7.9)$$

sowie

$$T_{ii} = -\frac{1}{3} \Pi^{\mu\mu} = -\Pi \quad (7.10)$$

Diese beiden Ausdrücke werden in Gl. 7.5 eingesetzt, und man erhält einen allgemeinen Ausdruck für den Imaginärteil der Polarisationsfunktion, der nur noch von dem jeweils interessanten Strom und der Kinematik abhängt.

$$\Im \Pi(E) = \frac{1}{6} (2\pi)^4 \int \frac{d^3 p_1}{2E_1 (2\pi)^3} \cdots \frac{d^3 p_l}{2E_l (2\pi)^3} \times \delta^{(3)}(-\vec{p}_1 - \dots - \vec{p}_l) \delta(E - E_1 - \dots - E_l) \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_l} J_\mu^* J^\mu \quad (7.11)$$

Die Gleichung hat bis zur Summe gelesen genau die Form des allgemeinen Phasenraumfaktors in nicht-invarianter Notation (Hagedorn 1963), den man aus der reinen Kinematik des Systems herleitet. Durch den Strom geht die dynamische Komponente des Systems in die Rechnung ein. Dies ist eine vielversprechende Analogie.

Da alle Teilchen des Zwischenzustands auf der Massenschale liegen, ist es mit den Beziehungen $d^3 p_i = p_i^2 d\Omega d|p_i|$ und $|p_i| = \sqrt{E_i^2 - m_i^2}$ immer möglich, eine Dreierimpulsintegration in eine Integration über die zugehörige Energie umzuwandeln. Es folgt durch Differentiation der letzten Beziehung:

$$d^3 p_i = \sqrt{E_i^2 - m_i^2} E_i d\Omega dE_i \quad (7.12)$$

Dadurch können zwei der l Integrationen in Gl. 7.11 mit den beiden Deltafunktionen ausgeführt werden, so daß immer $l - 2$ Integrale ungelöst bleiben.

7.1.2 Der 1-Loop Polarisationsgraph

Um glaubhaft zu machen, daß dieses Verfahren wirklich zum Ziel führt, wird zunächst der Imaginärteil der Polarisationsfunktion mit einem Zwischenzustand aus einem Fermion und dem zugehörigen Antiteilchen jeweils mit der Masse m berechnet und das Ergebnis in Gl. 2.49 reproduziert.

Die Kinematik ist durch einen einlaufenden Zustand mit dem Impuls $\vec{k} = \vec{0}$ und der Energie E bestimmt, der in ein Fermion mit der Masse m , dem Impuls \vec{p}_2 und der Energie E_2 sowie in das zugehörige Antiteilchen mit derselben Masse, dem Impuls $-\vec{p}_1$ und der Energie E_1 gestreut wird (siehe Abb. 7.1). Der Strom lautet

Abbildung 7.1: Der Zerfall des äußeren Zustands in ein Teilchenpaar

für dieses System

$$J^\mu = \bar{\Psi}(p_2)\gamma^\mu\Psi(-p_1) \quad \text{sowie} \quad J_\mu^* = \bar{\Psi}(-p_1)\gamma_\mu\Psi(p_2) \quad (7.13)$$

In Gl. 7.11 wird das Produkt $J_\mu^* J^\mu$ benötigt, wobei über alle Quantenzahlen summiert wird. Dies führt zu einer Spur über die Lorentz- und die Farbindizes. Der maßgebliche Ausdruck ist:

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda_1 \lambda_2} S_{p_{LF}} \left\{ \bar{\Psi}(-p_1)\gamma_\mu\Psi(p_2) \bar{\Psi}(p_2)\gamma^\mu\Psi(-p_1) \right\} \\ &= S_{p_{LF}} \left\{ \gamma_\mu \sum_{\lambda_2} \Psi(p_2)\bar{\Psi}(p_2) \gamma^\mu \sum_{\lambda_1} \Psi(-p_1)\bar{\Psi}(-p_1) \right\} \\ &= S_{p_{LF}} \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^\mu (\not{p}_1 - m) \} \\ &= S_{p_{LF}} \{ \gamma_\mu \not{p}_2 \gamma^\mu \not{p}_1 \} - S_{p_{LF}} \{ \gamma_\mu \gamma^\mu m^2 \} \\ &= -2N_c S_{p_L} \{ \not{p}_2 \not{p}_1 \} - 4N_c S_{p_L} \{ m^2 \} \\ &= -8N_c (p_1 p_2 + 2m^2) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Die Spur über den Farbraum hat jeweils einen Faktor N_c gebracht. In der dritten Zeile wurde die Beziehung $\sum_\lambda \Psi(p, \lambda) \bar{\Psi}(p, \lambda) = \not{p} + m$ für Quarkfelder benutzt (Greiner 1987). Außerdem ist in der vorletzten Zeile die Beziehung $\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2 \not{p}$ eingegangen.

Der gewonnene Ausdruck für das Stromprodukt wird in Gl. 7.11 eingesetzt.

$$\Im \Pi_F(E) = -\frac{N_c}{3(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_1}{E_1} \frac{d^3 p_2}{E_2} \delta^{(3)}(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta(E - E_1 - E_2) (p_1 p_2 + 2m^2) \quad (7.15)$$

Die Integration über \vec{p}_2 kann ausgeführt werden, wobei zuvor die Eigenschaft $E_1 = E_2$ genutzt wird, die im Schwerpunktsystem gilt, denn $\vec{p}_1^2 = -m^2 + E_1^2 = \vec{p}_2^2 = -m^2 + E_2^2$.

$$\Im \Pi_F(E) = \frac{N_c}{3(2\pi)^2} \int \frac{d^3 p_1}{E_1^2} \delta(E - 2E_1) (E_1^2 + \vec{p}_1^2 + 2m^2) \quad (7.16)$$

Die verbleibende Integration wird mit Gl. 7.12 auf eine Energieintegration umgeschrieben und ausgeführt:

$$\begin{aligned} \Im \Pi_F(E) &= \frac{N_c}{3(2\pi)^2} \int \frac{dE_1 d\Omega}{E_1} \sqrt{E_1^2 - m^2} \delta(E - 2E_1) (2E_1^2 + m^2) \\ &= -\frac{N_c}{6(2\pi)^2} \int d\Omega \frac{2}{E} \sqrt{\frac{E^2}{4} - m^2} \left(\frac{2E^2}{4} + m^2 \right) \\ &= -\frac{4\pi N_c}{6(2\pi)^2} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E^2}} \left(\frac{E^2}{2} + m^2 \right) \\ &= -\frac{4\pi N_c}{3 \cdot 4 (2\pi)^2} E^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{E^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{E^2} \right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

Wenn man dieses Ergebnis wieder auf die von Gl. 3.20 bekannte tensorielle Form umschreibt und $E^2 = k^2$ benutzt, erhält man tatsächlich das erhoffte Ergebnis 2.49, das bereits durch dimensionale Regularisierung des Feynmangraphen in Abb. 2.1 (S. 38) gewonnen wurde.

$$\implies \boxed{\Im \Pi_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^4} (g^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{k^2} \right)} \quad (7.18)$$

7.1.3 Der perturbative 3-Loop Graph

In diesem Abschnitt wird der Imaginärteil des perturbativen Graphen in Abb. 5.2, der gleichzeitig den 16-ten Summanden in Gl. 3.23 darstellt, ein weiteres Mal berechnet. Diesmal wird die eben hergeleitete Gl. 7.11 benutzt, so daß keine Einschränkung an die Masse der skalaren Quarks mehr notwendig sein wird, wie es in Kap. 5.2 der Fall war.

Die Kinematik wird durch den Zerfall des einlaufenden Zustands (E, \vec{k}) in vier Teilchen bestimmt: ein Antiquark mit $(E_1, -\vec{p}_1)$, ein Antiquark mit $(E_2, -\vec{p}_2)$, ein Squark mit (E_3, \vec{p}_3) und ein Quark mit (E_4, \vec{p}_4) (siehe Abb. 7.2). Der Strom für

Abbildung 7.2: Der Zerfall des äußeren Zustands in zwei Teilchenpaare

dieses System ist durch Gl. 3.5 gegeben.

$$J^\mu = \bar{\Psi}(p_4)\gamma^\mu\Psi(-p_1)\bar{\phi}(p_3)\phi(-p_2) \quad (7.19)$$

Dementsprechend erhält man für das Stromprodukt:

$$J_\mu^* J^\mu = g^2 \bar{\phi}(-p_2)\phi(p_3)\bar{\Psi}(-p_1)\gamma_\mu\Psi(p_4)\bar{\Psi}(p_4)\gamma^\mu\Psi(-p_1)\bar{\phi}(p_3)\phi(-p_2) \quad (7.20)$$

Die Summe über alle Quantenzahlen λ_{1-4} ergibt eine Spur, unter der die Felder umsortiert werden können. Es ergibt sich auf diesem Weg derselbe Ausdruck, wie für den Fall ohne skalare Teilchen (siehe Gl. 7.14), wobei hier die fermionischen Quarks keine Masse mehr tragen sollen:

$$\sum_{\lambda_1 \dots \lambda_4} J_\mu^* J^\mu = g^2 Sp\{ \bar{\Psi}(-p_1)\gamma_\mu\Psi(p_4)\bar{\Psi}(p_4)\gamma^\mu\Psi(-p_1) \underbrace{\bar{\phi}(p_3)\phi(-p_2)\bar{\phi}(-p_2)\phi(p_3)}_{=1} \}$$

$$\begin{aligned}
&= g^2 Sp \left\{ \bar{\Psi}(-p_1) \gamma_\mu \Psi(p_4) \bar{\Psi}(p_4) \gamma^\mu \Psi(-p_1) \right\} \\
&= -8N_c p_1 p_4
\end{aligned} \tag{7.21}$$

In den letzten Schritt ist bereits die Masselosigkeit der Fermionen eingegangen. Diese Gleichung stellt den dynamischen Teil in Gl. 7.11 dar und wird eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\Im \Pi_{16}(E) &= -\frac{4N_c}{3} (2\pi)^4 \int \frac{d^3 p_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{2E_2(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{2E_3(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4(2\pi)^3} p_1 p_4 \\
&\quad \times \delta^{(3)}(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E - E_1 - E_2 - E_3 - E_4) \\
&= -\frac{N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \frac{p_1 p_4}{E_1 E_2 E_3 E_4} \\
&\quad \times \delta^{(3)}(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E - E_1 - E_2 - E_3 - E_4)
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Mit den beiden Deltafunktionen sollen die beiden Integrationen über die Impulse der Fermionen p_1 und p_4 ausgeführt werden. Dazu wäre es wünschenswert, wenn man das Viererprodukt $p_1 p_4$ mit Hilfe von kinematischen Beziehungen durch die Impulse der Bosonen p_2 und p_3 ausdrücken könnte. Die benötigten Beziehungen sind

$$p_{1,4}^2 = 0 \quad \text{Masselosigkeit der Fermionen} \tag{7.23}$$

$$p_{2,3}^2 = E_{2,3}^2 - \vec{p}_{2,3}^2 = m^2 \quad \text{Masse der Bosonen} \tag{7.24}$$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad \text{Energieerhaltung} \tag{7.25}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_4 = -\vec{p}_2 - \vec{p}_3 \quad \text{Impulserhaltung} \tag{7.26}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
p_1 p_4 &= \frac{1}{2} (p_1 + p_4)^2 \\
&= \frac{1}{2} (E_1 + E_4)^2 - \frac{1}{2} (\vec{p}_1 + \vec{p}_4)^2 \\
&= \frac{1}{2} (E - E_2 - E_3)^2 - \frac{1}{2} (\vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2 \\
&= \frac{E^2}{2} - E(E_2 + E_3) + \frac{(E_2 + E_3)^2}{2} - \frac{\vec{p}_2^2 - \vec{p}_3^2}{2} - \vec{p}_2 \vec{p}_3 \\
&= \frac{E^2}{2} + m^2 - E(E_2 + E_3) + p_2 p_3 \equiv f(2, 3)
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Gl. 7.22 kann mit der Funktion $f(2, 3)$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\Im \Pi_{16}(E) &= -\frac{N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \frac{f(2, 3)}{E_1 E_2 E_3 E_4} \\
&\quad \times \delta^{(3)}(-\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E - E_1 - E_2 - E_3 - E_4)
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Unter Berücksichtigung von Gl. 7.23 kann die Integration über d^3p_4 ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} \Im\Pi_{16}(E) &= \frac{N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3 \frac{f(2,3)}{E_1 E_2 E_3 \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2}} \\ &\quad \times \delta\left(E - E_1 - E_2 - E_3 - \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2}\right) \end{aligned} \quad (7.29)$$

Um die Integration über d^3p_1 durchzuführen, sind der Integrand und das Volumenelement auf die Energie E_1 umzuschreiben. Dabei wird wiederholt Gl. 7.23 benutzt. Für die Wurzel im Nenner gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2} &= \sqrt{\vec{p}_1^2 + 2\vec{p}_1(\vec{p}_2 + \vec{p}_3) + (\vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2} \\ &= \sqrt{E_1^2 + 2E_1\alpha \cos\theta + \alpha^2} \end{aligned} \quad (7.30)$$

mit $\alpha := |\vec{p}_2 + \vec{p}_3|$ und dem Winkel θ zwischen \vec{p}_1 und $\vec{p}_2 + \vec{p}_3$. Das Volumenlement ist durch

$$d^3p_1 = 2\pi |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| \sin\theta d\theta = 2\pi E_1^2 dE_1 \sin\theta d\theta \quad (7.31)$$

gegeben. Der Raumwinkel muß explizit notiert werden, da der Integrand winkelabhängig ist. Schließlich ist die Deltafunktion so umzuformen, daß das Argument nach E_1 aufgelöst erscheint. Dazu kann Gl. 7.30 benutzt werden.

$$\begin{aligned} &\delta\left(E - E_1 - E_2 - E_3 - \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)^2}\right) \\ &= 2(E - E_1 - E_2 - E_3) \delta\left((E - E_1 - E_2 - E_3)^2 - E_1^2 - 2E_1\alpha \cos\theta - \alpha^2\right) \\ &= 2(E - E_1 - E_2 - E_3) \\ &\quad \delta\left((E - E_2 - E_3)^2 - 2E_1(E - E_2 - E_3) + E_1^2 - E_1^2 - 2E_1\alpha \cos\theta - \alpha^2\right) \\ &= 2(E - E_1 - E_2 - E_3) \\ &\quad \delta\left(-2E_1(E - E_2 - E_3 + \alpha \cos\theta) + (E - E_2 - E_3)^2 - \alpha^2\right) \\ &= -\frac{E - E_1 - E_2 - E_3}{E - E_2 - E_3 + \alpha \cos\theta} \delta\left(E_1 - \underbrace{\frac{(E - E_2 - E_3)^2 - \alpha^2}{2(E - E_2 - E_3 + \alpha \cos\theta)}}_{F(\theta)}\right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Die Gleichungen 7.30–7.32 werden in Gl. 7.29 eingesetzt und die Integration über die Energie E_1 durchgeführt.

$$\Im\Pi_{16}(E) = -\frac{N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3p_2 d^3p_3 2\pi E_1^2 dE_1 \sin\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{E - E_1 - E_2 - E_3}{E - E_2 - E_3 + \alpha \cos\theta} \frac{f(2, 3) \delta(E_1 - F(\theta))}{E_1 E_2 E_3 \sqrt{E_1^2 + 2E_1 \alpha \cos\theta + \alpha^2}} \\
& = -\frac{2\pi N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3 p_2 d^3 p_3 \frac{f(2, 3)}{E_2 E_3} \sin\theta d\theta \\
& \quad \times \int dE_1 E_1 \frac{E - E_1 - E_2 - E_3}{E - E_2 - E_3 + \alpha \cos\theta} \frac{\delta(E_1 - F(\theta))}{\sqrt{E_1^2 + 2E_1 \alpha \cos\theta + \alpha^2}} \\
& = -\frac{2\pi N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3 p_2 d^3 p_3 \frac{f(2, 3)}{E_2 E_3} \\
& \quad \int_0^\pi d\theta \sin\theta F(\theta) \frac{E - F(\theta) - E_2 - E_3}{E - E_2 - E_3 + \alpha \cos\theta} \frac{1}{\sqrt{F(\theta)^2 + 2F(\theta)\alpha \cos\theta + \alpha^2}}
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Betrachtet man das Produkt im Nenner und vergleicht es mit der Form von $F(\theta)$ (siehe Gl. 7.32), so sieht man, daß sich wesentliche Teile wegheben. Der Nenner lautet mit der Abkürzung $x := E - E_2 - E_3$:

$$\begin{aligned}
& (x + \alpha \cos\theta) \sqrt{F(\theta)^2 + 2E_1 \alpha \cos\theta + \alpha^2} \\
& = \left\{ \frac{1}{4} (x^2 - \alpha^2)^2 + (x^2 - \alpha^2) (x + \alpha \cos\theta) \alpha \cos\theta + \alpha^2 (x + \alpha \cos\theta)^2 \right\}^{1/2} \\
& = \left\{ \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \frac{1}{4} \alpha^4 + \alpha \cos\theta x^3 - \alpha^3 \cos\theta x + \alpha^2 \cos^2\theta x^2 \right. \\
& \quad \left. - \alpha^4 \cos^2\theta + \alpha^2 x^2 + 2\alpha^3 \cos\theta x + \alpha^4 \cos^2\theta \right\}^{1/2} \\
& = \left\{ +\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 + \frac{1}{4} \alpha^4 + \alpha \cos\theta x^3 + \alpha^2 \cos^2\theta x^2 + \alpha^3 \cos\theta x \right\}^{1/2} \\
& = \frac{1}{2} \left(\alpha^2 + (E - E_2 - E_3)^2 + 2(E - E_2 - E_3)\alpha \cos\theta \right)
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Dieses erstaunlich einfache Ergebnis wird in Gl. 7.33 eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\Im\Pi_{16}(E) & = -\frac{\pi N_c}{3(2\pi)^8} \int d^3 p_2 d^3 p_3 \frac{f(2, 3)}{E_2 E_3} \\
& \quad \times \int_0^\pi d\theta \sin\theta F(\theta) \frac{E - F(\theta) - E_2 - E_3}{\alpha^2 + (E - E_2 - E_3)^2 + 2(E - E_2 - E_3)\alpha \cos\theta}
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Mit der Abkürzung $x := E - E_2 - E_3$ ist noch der folgende Ausdruck zu untersuchen:

$$F(\theta)(x - F(\theta)) = \frac{x^2 - \alpha^2}{2(x + \alpha \cos\theta)} \left(x - \frac{x^2 - \alpha^2}{2(x + \alpha \cos\theta)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^3 - x\alpha^2}{2(x + \alpha \cos\theta)} - \frac{(x^2 - \alpha^2)^2}{4(x + \alpha \cos\theta)^2} \\
&= \frac{2(x^3 - x\alpha^2)(x + \alpha \cos\theta) - (x^2 - \alpha^2)^2}{4(x + \alpha \cos\theta)^2} \\
&= \frac{2x^4 + 2x^3\alpha \cos\theta - 2x^2\alpha^2 - 2x\alpha^3 \cos\theta - x^4 + 2x^2\alpha^2 - \alpha^4}{4(x + \alpha \cos\theta)^2} \\
&= \frac{x^4 - \alpha^4 + 2x^3\alpha \cos\theta - 2x\alpha^3 \cos\theta}{4(x + \alpha \cos\theta)^2} \\
&= \frac{(x^2 - \alpha^2)(x^2 + \alpha^2 + 2x\alpha \cos\theta)}{4(x + \alpha \cos\theta)^2} \tag{7.36}
\end{aligned}$$

Der zweite Teil des Zählers kürzt sich gerade mit dem Nenner in Gl. 7.35, so daß ein stark vereinfachtes Integral verbleibt:

$$\Im\Pi_{16}(E) = -\frac{\pi N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3p_2 d^3p_3 \frac{f(2,3)}{E_2 E_3} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{x^2 - \alpha^2}{(x + \alpha \cos\theta)^2}}_{I_\theta :=} \tag{7.37}$$

Das Integral über θ ist durch eine einfache Substitution leicht zu lösen ($u := \cos\theta$):

$$\begin{aligned}
I_\theta &= \int_{-1}^{+1} du \frac{x^2 - \alpha^2}{(x + \alpha u)^2} = -\frac{x^2 - \alpha^2}{\alpha(x + \alpha u)} \Big|_{-1}^{+1} \\
&= -\frac{x^2 - \alpha^2}{\alpha(x + \alpha)} + \frac{x^2 - \alpha^2}{\alpha(x - \alpha)} = 2 \tag{7.38}
\end{aligned}$$

Damit erhält man die Form des Imaginärteils der Polarisationsfunktion, in der die ersten beiden Integrationen ausgeführt wurden. Es wird der explizite Ausdruck für $f(2,3)$ (Gl. 7.27) wieder eingesetzt.

$$\boxed{\Im\Pi_{16}(E) = -\frac{\pi N_c}{12(2\pi)^8} \int d^3p_2 d^3p_3 \frac{E^2 + 2m^2 - 2E(E_2 + E_3) + 2p_2 p_3}{E_2 E_3}} \tag{7.39}$$

Die Integrationsgrenzen der verbleibenden Integrale sind nach einer Umwandlung in eine Energieintegration leicht mit der Kinematik zu ermitteln. In jedem Fall ist sicher, daß E_3 wie E_2 größer als die Masse m der erzeugten Teilchen sein muß. Es soll jeweils die Integration über d^3p_3 zuerst ausgeführt werden. Dann gilt für die oberen Grenzen $E_3 = E - E_1 - E_2 - E_4 < E - E_2$ und $E_2 = E - E_1 - E_3 - E_4 < E - m$.

Gleichung 7.39 zerfällt in vier Integraltypen:

$$\Im\Pi_{16}(E) = -\frac{\pi N_c}{12(2\pi)^8} \sum_{i=1}^4 I_i \tag{7.40}$$

mit

$$I_1 := (E^2 + 2m^2) \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3} \quad (7.41)$$

$$I_2 := -2E \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3} (E_2 + E_3) \quad (7.42)$$

$$I_3 := 2 \int d^3 p_2 d^3 p_3 \quad (7.43)$$

$$I_4 := -2 \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \frac{d^3 p_3}{E_3} \vec{p}_2 \vec{p}_3 \quad (7.44)$$

Im folgenden wird jeweils die erste Integration durchgeführt. Dabei ist zu beachten, daß man die Impulsintegration mit Gl. 7.12 (nicht mit Gl. 7.31) in eine Energieintegration umzuwandeln hat, da die zugehörigen Teilchen jetzt Masse tragen. Es wird sich als sinnvoll erweisen, nach der ersten Integration die Integrale $I_{1..4}$ alle auf die gleiche Form mit einer Wurzel, einem Logarithmus und einem Polynom zu bringen.

Für I_1 bedeutet die Transformation des Integrals:

$$I_1 = (E^2 + 2m^2) \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \int_m^{E-E_2} dE_3 d\Omega \sqrt{E_3^2 - m^2} \quad (7.45)$$

Der Integrand ist von den Winkeln unabhängig, so daß die Raumwinkelintegration gerade 4π ergibt. Das Integral über die Wurzel ist bekannt (Gradstein, Ryshik 1982, 2.271.3):

$$\begin{aligned} I_1 &= 4\pi (E^2 + 2m^2) \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \left\{ \frac{E_3}{2} \sqrt{E_3^2 - m^2} - \frac{m^2}{2} \ln \left(E_3 + \sqrt{E_3^2 - m^2} \right) \right\} \Big|_m^{E-E_2} \\ &= 2\pi (E^2 + 2m^2) \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \left\{ (E - E_2) \sqrt{(E - E_2)^2 - m^2} \right. \\ &\quad \left. - m^2 \ln \left(\frac{E - E_2 + \sqrt{(E - E_2)^2 - m^2}}{m} \right) \right\} \\ &= 8\pi^2 (E^2 + 2m^2) \int_m^{E-m} dE_2 \sqrt{E_2^2 - m^2} \left\{ (E - E_2) \sqrt{(E - E_2)^2 - m^2} \right. \\ &\quad \left. - m^2 \ln \left(\frac{E - E_2 + \sqrt{(E - E_2)^2 - m^2}}{m} \right) \right\} \quad (7.46) \end{aligned}$$

Der erste der beiden Integranden soll auf die gleiche Form gebracht werden, wie der Term mit dem Logarithmus. Dies wird durch eine partielle Integration ermöglicht

(setze $x := E_2$). Man beachte hierzu, daß $\ln \left(\frac{E-x+\sqrt{(E-x)^2-m^2}}{m} \right)$ Stammfunktion von $\frac{-1}{\sqrt{(E-x)^2-m^2}}$ ist.

$$\begin{aligned}
& \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} (E-x) \sqrt{(E-x)^2 - m^2} \\
&= - \int_m^{E-m} dx \underbrace{\sqrt{x^2 - m^2} (E-x)}_{v:=} \underbrace{\left((E-x)^2 - m^2 \right)}_{u':=} \frac{-1}{\sqrt{(E-x)^2 - m^2}} \\
&= \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} \ln \left(\frac{E-x + \sqrt{(E-x)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&\quad \times \left\{ \left((E-x)^2 - m^2 \right) \left[\frac{x(E-x)}{x^2 - m^2} - 3 \right] - 2m^2 \right\} \tag{7.47}
\end{aligned}$$

Die Randterme sind weggefallen. Dieses Ergebnis wird in Gl. 7.46 eingesetzt.

$$\begin{aligned}
I_1 &= 8\pi^2 (E^2 + 2m^2) \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} \ln \left(\frac{E-x + \sqrt{(E-x)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&\quad \times \left\{ \left((E-x)^2 - m^2 \right) \left[\frac{x(E-x)}{x^2 - m^2} - 3 \right] - 3m^2 \right\} \tag{7.48}
\end{aligned}$$

Das Integral I_2 kann auf das Integral I_1 zurückgeführt werden, indem die Integrationen vertauscht werden. Dies ist möglich, da der Integrand symmetrisch in den beiden Integrationsvariablen ist (man beachte die Abhängigkeit der oberen Integrationsgrenze von der äußeren Integrationsvariablen):

$$\begin{aligned}
I_2 &= -8\pi E \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} (E_2 + E_3) \\
&= -32\pi^2 E \int_m^{E-m} dE_2 \sqrt{E_2^2 - m^2} \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} (E_2 + E_3) \\
&= -32\pi^2 E \int_m^{E-m} dE_2 E_2 \sqrt{E_2^2 - m^2} \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} \\
&\quad - 32\pi^2 E \int_m^{E-m} dE_3 E_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} \int_m^{E-E_3} dE_2 \sqrt{E_2^2 - m^2} \\
&= -64\pi^2 E \int_m^{E-m} dE_2 E_2 \sqrt{E_2^2 - m^2} \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} \\
&= -32\pi^2 E \int_m^{E-m} dE_2 E_2 \sqrt{E_2^2 - m^2} \\
&\quad \times \left\{ (E - E_2) \sqrt{(E - E_2)^2 - m^2} - m^2 \ln \left(\frac{E - E_2 + \sqrt{(E - E_2)^2 - m^2}}{m} \right) \right\}
\end{aligned}$$

(7.49)

Dabei ist die Auswertung des Integrals aus Gl. 7.46 übernommen worden. Auch hier werden die beiden Integranden auf die gleiche Form gebracht. Der erste Summand kann durch eine zu Gl. 7.47 analoge Rechnung auf die Form mit einem Logarithmus gebracht werden ($x := E_2$):

$$\begin{aligned}
& \int_m^{E-m} dx x \sqrt{x^2 - m^2} (E - x) \sqrt{(E - x)^2 - m^2} \\
&= - \int_m^{E-m} dx \underbrace{\sqrt{x^2 - m^2} x (E - x) ((E - x)^2 - m^2)}_{v:=} \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{(E - x)^2 - m^2}}}_{w':=} \\
&= \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} \ln \left(\frac{E - x + \sqrt{(E - x)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&\quad \times \left\{ ((E - x)^2 - m^2) \left[\frac{x^2(E - x)}{x^2 - m^2} + E - 4x \right] - 2x m^2 \right\} \quad (7.50)
\end{aligned}$$

Der zweite Summand hat bereits die richtige Form, so daß sich insgesamt für I_2 in Gl. 7.49 ergibt:

$$\begin{aligned}
I_2 &= -32\pi^2 E \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} \ln \left(\frac{E - x + \sqrt{(E - x)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&\quad \times \left\{ ((E - x)^2 - m^2) \left[\frac{x^2(E - x)}{x^2 - m^2} + E - 4x \right] - 3x m^2 \right\} \quad (7.51)
\end{aligned}$$

Für I_3 gilt

$$\begin{aligned}
I_3 &= 8\pi \int d^3 p_2 \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} E_3 \\
&= \frac{8\pi}{3} \int d^3 p_2 \left[(E - E_2)^2 - m^2 \right]^{\frac{3}{2}} \quad (7.52)
\end{aligned}$$

Wieder kann man durch eine partielle Integration den Integranden auf die Form mit einem Logarithmus bringen ($x := E_2$):

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{32\pi^2}{3} \int_m^{E-m} dx x \sqrt{x^2 - m^2} \left[(E - E_2)^2 - m^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\
&= - \frac{32\pi^2}{3} \int_m^{E-m} dx x \sqrt{x^2 - m^2} \underbrace{\left((E - E_2)^2 - m^2 \right)^2}_{v:=} \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{(E - E_2)^2 - m^2}}}_{w':=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{32\pi^2}{3} \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} \ln \left(\frac{E - x + \sqrt{(E - x)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&\quad \times \left((E - x)^2 - m^2 \right) \left\{ \frac{x^2 \left((E - x)^2 - m^2 \right)}{x^2 - m^2} + (E - x)^2 - m^2 - 4x(E - x) \right\}
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Sehr leicht sieht man ein, daß das Integral I_4 verschwindet:

$$\begin{aligned}
I_4 &= -4\pi \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta |p_2| |p_3| \cos\vartheta \\
&= -4\pi \int \frac{d^3 p_2}{E_2} \int_m^{E-E_2} dE_3 \sqrt{E_3^2 - m^2} \int_{-1}^{+1} du u |p_2| |p_3| = 0
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Die Gln. 7.48, 7.51 und 7.53 werden in Gl. 7.40 eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\Im \Pi_{16}(E) &= -\frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \int_m^{E-m} dx \sqrt{x^2 - m^2} \ln \left(\frac{E - x + \sqrt{(E - x)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&\quad \left\{ \left(\frac{E^2}{2} + m^2 \right) \left\{ \left((E - x)^2 - m^2 \right) \left[\frac{x(E - x)}{x^2 - m^2} - 3 \right] - 3m^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. - 2E \left\{ \left((E - x)^2 - m^2 \right) \left[\frac{x^2(E - x)}{x^2 - m^2} + E - 4x \right] - 3x m^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3} \left((E - x)^2 - m^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ \frac{x^2 \left((E - x)^2 - m^2 \right)}{x^2 - m^2} + (E - x)^2 - m^2 - 4x(E - x) \right\} \right\} \\
&= -\frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \int_m^{E-m} dx \frac{P(x)}{\sqrt{x^2 - m^2}} \ln \left(\frac{E - x + \sqrt{(E - x)^2 - m^2}}{m} \right)
\end{aligned} \tag{7.55}$$

Der Imaginärteil der Polarisationsfunktion ist auf ein Integral über $x = E_2$ reduziert, wobei der Integrand das Produkt von einer Wurzel $\sqrt{x^2 - m^2}^{-1}$ mit einem Logarithmus von einem komplizierten Argument und einem Polynom $P(x)$ sechsten Grades ist.

Es ist möglich, die Wurzel durch eine Substitution zu beseitigen.

$$t := -\frac{x}{m} + \sqrt{\frac{x^2}{m^2} - 1} \quad x = -m \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\begin{aligned}
\text{Grenzen:} \quad & t(m) = -1 \quad \text{und} \quad t(E - m) = 1 - a + \sqrt{a^2 - 2a} \quad \left(a := \frac{E}{m} \right) \\
\text{Es gilt:} \quad & \frac{dx}{dt} = -m \frac{t^2 - 1}{2t^2} \\
\text{und} \quad & \sqrt{x^2 - m^2} = m \frac{t^2 - 1}{2t}
\end{aligned} \tag{7.56}$$

Gl. 7.55 bekommt dann die Gestalt:

$$\begin{aligned}
\Im\Pi_{16}(E) &= \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \int_{-1}^{1-a+\sqrt{a^2-2a}} dt m \frac{t^2 - 1}{2t^2} \frac{P\left(-m \frac{t^2+1}{2t}\right)}{m \frac{t^2-1}{2t}} \\
&\quad \ln \left(\frac{E + m \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(E + m \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - m^2}}{m} \right) \\
&= \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \int_{-1}^{1-a+\sqrt{a^2-2a}} dt \frac{P\left(-m \frac{t^2+1}{2t}\right)}{t} \\
&\quad \ln \left(a + \frac{t^2 + 1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2 + 1}{2t}\right)^2 - 1} \right)
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Das Polynom sechsten Grades in x wird durch die Substitution 7.56 zu einem Polynom in t :

$$P\left(-m \frac{t^2 + 1}{2t}\right) = \sum_{i=0}^6 a_i \left(-m \frac{t^2 + 1}{2t}\right)^i = \sum_{k=-6}^6 b_k t^k \tag{7.58}$$

Für die Bestimmung der Koeffizienten b_k geht man von der geschweiften Klammer in Gl. 7.55 aus, setzt für x Gl. 7.56 ein und sortiert den erhaltenen Ausdruck nach Potenzen von t . Die sehr langwierige, uninteressante Polynomumformung soll hier nicht durchgeführt werden. Das Ergebnis wurde mit Hilfe eines REDUCE-Programms verifiziert:

$$\begin{aligned}
b_0 &= m^6 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{1}{2} \right) & b_1 &= a m^6 \left(-\frac{a^4}{4} - \frac{41a^2}{48} + \frac{1}{3} \right) \\
b_2 &= m^6 \left(-\frac{17a^4}{12} - \frac{5a^2}{3} + \frac{5}{48} \right) & b_3 &= a m^6 \left(-\frac{29a^2}{16} - \frac{23}{16} \right) \\
b_4 &= m^6 \left(-\frac{5a^2}{8} - \frac{5}{12} \right) & b_5 &= a m^6 \frac{5}{48} \\
b_6 &= m^6 \frac{1}{16} & b_i &= b_{-i}
\end{aligned} \tag{7.59}$$

Setzt man die Gleichungen 7.57 – 7.59 zusammen, erhält man eine Darstellung des Imaginärteils der Polarisationsfunktion durch eine Summe von gleichartigen Integralen:

$$\begin{aligned} \Im \Pi_{16}(E) &= \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \sum_{k=-6}^6 b_k \int_{-1}^{1-a+\sqrt{a^2-2a}} dt t^{k-1} \\ &\quad \times \ln \left(a + \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (7.60)$$

Diese Integrale kann man durch elliptische Integrale in der Legendreschen kanonischen Form ausdrücken (Gröbner, Hofreiter 1957). Dazu wird eine weitere partielle Integration durchgeführt, in der der Logarithmus differenziert wird.

$$\begin{aligned} u &:= \ln \left(a + \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1} \right) \\ u' &= \frac{t^2-1}{2t^2} \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1}} \\ v' &:= t^{k-1} \implies v = \frac{1}{k} t^k \end{aligned} \quad (7.61)$$

Diese Substitution entfernt den Logarithmus aus allen Integralen. Nur der Term mit $\frac{1}{t}$ liefert eine andere Stammfunktion, die wieder einen Logarithmus hervorbringt. Dies bedeutet, daß die Substitution nur für die Terme $k \neq 0$ durchgeführt wird und der Term mit $k = 0$ abgetrennt wird. Der Randterm verschwindet an der oberen Grenze identisch und an der unteren Grenze aus Symmetriegründen. Der Imaginärteil der Polarisationsfunktion lautet dann ($g := 1 - a + \sqrt{a^2 - 2a}$):

$$\begin{aligned} \Im \Pi_{16}(E) &= \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \sum_{\substack{k=-6 \\ k \neq 0}}^6 \frac{b_k}{k} t^k \ln \left(a + \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1} \right) \Big|_{-1}^g \\ &\quad - \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \sum_{\substack{k=-6 \\ k \neq 0}}^6 \frac{b_k}{k} \int_{-1}^g dt t^k \frac{t^2-1}{2t^2} \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} b_0 \int_{-1}^g dt \frac{1}{t} \ln \left(a + \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1} \right)}_{I_0 :=} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_0 + \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \ln(a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a}) \underbrace{\sum_{\substack{k=-6 \\ k \neq 0}}^6 \frac{b_k}{k} (-1)^k}_{=0 \text{ wegen Gl. 7.59}} \\
&\quad - \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \sum_{\substack{k=-6 \\ k \neq 0}}^6 \frac{b_k}{k} \int_{-1}^g dt \frac{t^{k+1} - t^{k-1}}{\sqrt{(2ta + t^2 + 1)^2 - 4t^2}} \\
&= I_0 - \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \sum_{\substack{k=-6 \\ k \neq 0}}^6 \frac{b_k}{k} \int_{-1}^g dt \frac{t^{k+1} - t^{k-1}}{\sqrt{t^4 + 4at^3 + 2t^2(2a^2 - 1) + 4at + 1}}
\end{aligned} \tag{7.62}$$

Bis auf I_0 haben diese Integrale alle die Form von elliptischen Integralen, für die folgende Rekursionsformeln für $n > 0$ gelten (Gröbner, Hofreiter 1957). Es werden die Abkürzungen $y := at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e$ und $G_n := \int dt \frac{t^n}{y}$ benutzt.

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{t^{n-3}y}{a(n-1)} - \frac{2b(2n-3)}{a(n-1)} G_{n-1} - \frac{6c(n-2)}{a(n-1)} G_{n-2} \\
&\quad - \frac{2d(2n-5)}{a(n-1)} G_{n-3} - \frac{e(n-3)}{a(n-1)} G_{n-4} \quad \text{für } n \neq 1 \\
G_{-n} &= -\frac{y}{e(n-1)t^{n-1}} - \frac{2d(2n-3)}{e(n-1)} G_{-n+1} - \frac{6c(n-2)}{e(n-1)} G_{-n+2} \\
&\quad - \frac{2b(2n-5)}{e(n-1)} G_{-n+3} - \frac{a(n-3)}{e(n-1)} G_{-n+4} \quad \text{für } n \neq 1
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Mit diesen Rekursionsformeln kann man alle Integrale in Gl. 7.62 auf die sogenannten *Normalintegrale* $G_{-1,0,+1}$ zurückführen (die Koeffizienten $a - e$ werden durch Vergleich mit Gl. 7.62 bestimmt). Die 24 resultierenden Normalintegrale werden dann mit den Gewichten b_k aus Gl. 7.59 aufsummiert. Der entstandene Ausdruck ist an den Integrationsgrenzen auszuwerten. Das von einem weiteren REDUCE-Programm bestätigte Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
\Im\Pi_{16}(E) &= I_0 - \frac{8\pi^3 N_c}{9(2\pi)^8} a^4 m^6 (G_1(t) - G_{-1}(t)) \Big|_{-1}^{1-a+\sqrt{a^2-2a}} \\
&\quad - \frac{4\pi^3 N_c m^6}{3(2\pi)^8} \sqrt{a^2 - 2a} \left(-\frac{1}{72} a^5 - \frac{1}{72} a^4 - \frac{41}{144} a^3 - \frac{13}{48} a^2 + \frac{11}{9} a + \frac{1}{12} \right)
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Die Differenz der verbleibenden elliptischen Integrale ist jedoch analytisch lösbar. Um dies einzusehen, wird die alte Form der Integranden wieder hergestellt. Die letzte Umformung der Wurzel in Gl. 7.62 wird rückgängig gemacht. Die Integrale lauten dann:

$$\begin{aligned} G_1 &= \int dt \frac{t}{y} = \frac{1}{2} \int dt \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - 1}} \frac{t^2-1}{2t^2} \frac{2t^2}{t^2-1} \\ G_{-1} &= \int dt \frac{1}{ty} = \frac{1}{2} \int dt \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - 1}} \frac{t^2-1}{2t^2} \frac{2}{t^2-1} \end{aligned} \quad (7.65)$$

Diese Integrale sind bis auf den letzten Term identisch, so daß die Differenz der Integrale durch die Differenz der jeweils letzten Teile charakterisiert wird, die gerade 2 ergibt. Der dann verbleibende Integrand hat eine Stammfunktion, die man aus Gl. 7.61 entnehmen kann.

$$\begin{aligned} G_1 - G_{-1} \Big|_{-1}^g &= \frac{1}{2} \int_{-1}^g dt \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - 1}} \frac{t^2-1}{2t^2} \left(\frac{2t^2}{t^2-1} - \frac{2}{t^2-1} \right) \\ &= \int_{-1}^g dt \frac{1}{\sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - 1}} \frac{t^2-1}{2t^2} \\ &= \ln \left(a + \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - 1} \right) \Big|_{-1}^{1-a+\sqrt{a^2-2a}} \\ &= -\ln \left(a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a} \right) \end{aligned} \quad (7.66)$$

Dies wird in Gl. 7.64 eingesetzt:

$$\begin{aligned} \Im \Pi_{16}(E) &= I_0 + \frac{8\pi^3 N_c}{9(2\pi)^8} a^4 m^6 \ln \left(a - 1 + \sqrt{a^2 - 2a} \right) \\ &\quad - \frac{4\pi^3 N_c m^6}{3(2\pi)^8} \sqrt{a^2 - 2a} \left(-\frac{1}{72} a^5 - \frac{1}{72} a^4 - \frac{41}{144} a^3 - \frac{13}{48} a^2 + \frac{11}{9} a + \frac{1}{12} \right) \end{aligned} \quad (7.67)$$

Schließlich wird noch die Abkürzung $a = \frac{E}{m}$ explizit gemacht:

$$\begin{aligned} \Im \Pi_{16}(E) &= I_0 + \frac{8\pi^3 N_c}{9(2\pi)^8} E^4 m^2 \ln \left(\frac{E - m + \sqrt{(E - m)^2 - m^2}}{m} \right) \\ &\quad - \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \sqrt{(E - m)^2 - m^2} \left(-\frac{1}{72} E^5 m - \frac{1}{72} E^4 m^2 - \frac{41}{144} E^3 m^3 \right. \\ &\quad \quad \quad \left. - \frac{13}{48} E^2 m^4 + \frac{11}{9} E m^5 + \frac{1}{12} m^6 \right) \end{aligned} \quad (7.68)$$

Der Imaginärteil des perturbativen Graphen ist vollständig durch das verbliebene Integral I_0 aus Gl. 7.62 ausgedrückt worden, in das jetzt noch der Koeffizient b_0 aus Gl. 7.59 eingesetzt wird.

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \left(\frac{a^2 m^6}{4} + \frac{m^6}{2} \right) \\ &\quad \times \int_{-1}^{1-a+\sqrt{a^2-2a}} dt \frac{1}{t} \ln \left(a + \frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(a + \frac{t^2+1}{2t} \right)^2 - 1} \right) \end{aligned} \quad (7.69)$$

Wenn man die Substitution 7.56 rückgängig macht, erhält man die sehr viel einfacher anmutende Form von I_0

$$I_0 = -\frac{4\pi^3 N_c}{3(2\pi)^8} \left(\frac{E^2 m^4}{4} + \frac{m^6}{2} \right) \int_1^{\frac{E}{m}-1} dx \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{E}{m} - x \right)}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (7.70)$$

wie man leicht durch Vergleich der Gln. 7.55 und 7.57 bestätigt (es gilt $\ln \left(a - x + \sqrt{(a - x)^2 - 1} \right) = \operatorname{arcosh}(a - x)$).

Zusammenfassend kann man sagen, daß man durch die Benutzung der Unitaritätsbedingung dem Imaginärteils der Polarisationsfunktion ein ganzes Stück näher gekommen ist, auch wenn der technische Aufwand sehr groß gewesen ist. Die Interpretation des Zwischenzustands als fiktivem aber realen Streuprozess, sprich die Tatsache, daß die *erzeugten* Teilchen auf der Massenschale liegen, hat dazu geführt, daß keine Regularisierung des Graphen mehr notwendig war (wie dies in Kap. 5.2 der Fall war) und die Berechnung zu einer reinen technischen Integrationsübung wurde. Bis auf das Integral I_0 , das nicht analytisch gelöst werden kann, hat

man einen einfachen, wohldefinierten Ausdruck gefunden. Dabei sei noch einmal betont, daß Gl. 7.68 in allen Ordnungen der Masse der skalaren Quarks exakt ist und deshalb auch für die Berechnung von Summenregeln für die Massen von Bindungszuständen mit schweren Squarks geeignet ist. Dabei wird wieder eine Transformation durchgeführt (wie in Kap. 6), die eventuell doch noch zu einer analytischen Lösung von I_0 in Gl. 7.70 führen könnte, wenn man die Transformations-Integration mit der Integration über $x = E_2$ vertauscht, was ohne weiteres möglich wäre, da I_0 keine Divergenzen enthält. Diese Frage wird allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht beantwortet.

7.2 Der Graph mit einem skalaren Kondensat

Dieser Graph wurde bereits in Kap. 5.3.1 besprochen und ist in Abb. 5.3 zu sehen. Bei der Regularisierung dieses Graphen wurde der skalare Quarkpropagator in der Masse bis zur ersten Ordnung entwickelt und — konsistenter Weise — die Reihe, die das nichtlokale Kondensat aus skalaren Quarks darstellt (Gl. 4.29), bei der gleichen Ordnung abgebrochen. Der nullte Ordnungsterm konnte unproblematisch regularisiert werden, jedoch enthielt der erste Ordnungsterm IR-Divergenzen, deren Regularisierung recht aufwendig ausfiel (siehe Kap. 5.3.3). Es ist zu erwarten, daß die höheren Ordnungsterme ebenfalls IR-divergent sind, da die Potenz von q , die bereits in erster Ordnung für die IR-Divergenz verantwortlich war, mit der Ordnung ansteigt.

In diesem Abschnitt wird der Graph mit einem Kondensat noch einmal analysiert, wobei der skalare Propagator hier nicht in der Masse entwickelt werden soll. Es wird dabei die Frage beantwortet, in welchen Ordnungen UV- bzw. IR-Divergenzen auftreten und ob es möglich ist, daß zu dem Imaginärteil des Graphen nur eine endliche Anzahl von Ordnungen beiträgt. Der Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die in der Masse noch exakte Gl. 5.23, wobei der Counterterm weggelassen wird:

$$\Pi_{14+15}(k^2) = -ig^2 \frac{8N_c \pi^2}{3} \langle \bar{\phi}\phi \rangle \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(\frac{-4\pi\mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\}$$

$$\underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \Delta(p-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \left(\frac{m^2 \square_p}{4} \right)^n \delta^4(p)}_{I_p :=} \quad (7.71)$$

Für das Integral I_p kann die Argumentation von S. 133 wiederholt werden, auf der der Begriff des *Propagators für ein nichtlokales Vakuumkondensat* diskutiert wurde. Die Umformungen sind mit denen in Gl. 5.99 identisch, und es folgt

$$I_p = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p) \left(\frac{m^2 \square_p}{4} \right)^n \frac{1}{q^2 - 2p \cdot q + i\epsilon} \quad (7.72)$$

Die Differentiationen werden mit Hilfe von Gl. B.54 durchgeführt. Danach kann die Deltafunktion ausgeführt werden.

$$\begin{aligned} I_p &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p) \frac{(m^2 q^2)^n}{(q^2 - 2p \cdot q + i\epsilon)^{2n+1}} \\ &= - \frac{1}{(2\pi)^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \frac{(m^2 q^2)^n}{(q^2 + i\epsilon)^{2n+1}} \end{aligned} \quad (7.73)$$

Dieses Ergebnis kann in Gl. 7.71 eingesetzt werden

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}(k^2) &= ig^2 \frac{8N_c \pi^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} (m^2)^n \\ &\quad \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (k-q)^2 \left\{ \frac{5}{3} - \gamma + \ln \left(\frac{-4\pi \mu^2}{(k-q)^2} \right) \right\} \frac{1}{(q^2 + i\epsilon)^{n+1}} \end{aligned} \quad (7.74)$$

Der Beitrag von $\frac{5}{3} - \gamma$ ist identisch Null, wie man mühelos mit der verallgemeinerten Dirac-Identität 1.34 oder der Gl. 2.16 nachweist.

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}(k^2) &= -g^2 \frac{8N_c \pi^2}{3(2\pi)^4} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} (m^2)^n \\ &\quad \times i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \ln \left(\frac{(k-q)^2}{-4\pi \mu^2} \right) \frac{(k-q)^2}{(q^2 + i\epsilon)^{n+1}} \end{aligned} \quad (7.75)$$

Für $n = 0$ findet man Gl. 5.32 und für $n = 1$ Gl. 5.35 wieder. Beide Integrale wurden bereits ausführlich diskutiert und erfolgreich regularisiert, wobei der Fall $n = 1$ infrarote Divergenzen aufzeigte. Die Tatsache, daß die mit der Entwicklung des skalaren Propagators gefundenen Integrale auch ohne diese Entwicklung — stattdessen mit der Argumentation von S. 133 — bestätigt werden, ist eine indirekte Verifikation der Formel 5.98 auf der Ebene ohne Gluonenaustausch.

Für die höheren Ordnungen zeichnet sich folgende Entwicklung ab. Durch Abzählen der Potenzen von q^2 nach dem Vorbild von den Gln. 5.37 und 5.38 kann man herausfinden, welche Ordnungsterme UV-divergent, IR-divergent oder auf beiden Seiten divergent sind. Für den $n = 2$ -Term erwartet man das gleiche Verhalten wie für $n = 1$ — eine beidseitige Divergenz. Der Beitrag, der sich wie $\frac{d^4 q k^2}{q^6}$ verhält, ist IR-divergent, während der Beitrag $\frac{d^4 q q^2}{q^6}$ UV-divergent ist. Der zweite Ordnungsterm wird demnach eine doppelte Divergenz liefern, die nach dem Muster von Kap. 5.3.3 behandelt werden muß. Alle höheren Ordnungen $n > 2$ liefern natürlich erst recht eine IR-Divergenz, da die Potenz von q^2 im Nenner immer größer wird. Die UV-Divergenz verschwindet jedoch für $n > 2$, denn die größte Potenz von q^2 im Zähler ist für $n = 3$ durch $\frac{d^4 q q^2}{q^8}$ gegeben. Für größere n wird diese Situation immer *entspannter*. Dies bedeutet, daß man für alle $n > 2$ maximal einfache Divergenzen erwartet.

Um diese Aussagen zu bestätigen, wird das verbliebene Integral über den Logarithmus regularisiert. Es ist vom Typ I_n für $n \geq 0$ (siehe Kap. 2.2.6), und das Ergebnis ist in Gl. 2.73 zu finden.

$$\begin{aligned} \Pi_{14+15}(k^2) &= g^2 \frac{8N_c \pi^4}{3(2\pi)^8} \langle \bar{\phi} \phi \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} (m^2)^n (k^2)^{2-n} \\ &\quad \times \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(4 - n - \varepsilon)} \end{aligned}$$

(7.76)

Die obige Diskussion wird durch dieses Ergebnis bestätigt. Dazu muß man die für $\varepsilon \rightarrow 0$ divergenten Gammafunktionen abzählen. Dies wird in der folgenden Liste

aufgeführt:

$$\begin{aligned}
 n = 0 & \sim \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2}\right) && \text{einfache Divergenz} \\
 n = 1 & \sim \Gamma\left(-1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) && \text{doppelte Divergenz} \\
 n = 2 & \sim \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) && \text{doppelte Divergenz} \\
 n = 3 & \sim \Gamma\left(-2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) && \text{einfache Divergenz} \\
 n > 3 & \sim \frac{\Gamma\left(-2 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(4 - n - \varepsilon)} && \text{keine Divergenz}
 \end{aligned} \tag{7.77}$$

Das Erfreuliche an dieser Aufstellung ist nicht nur, daß die Divergenzen wie vermutet auftreten, sondern auch, daß für $n > 3$ überhaupt keine Divergenzen mehr auftreten. Die Beiträge zum Imaginärteil des Graphen, entstehen jedoch nur durch die divergenten Beiträge, denn der Imaginärteil steckt in dem ersten Ordnungsterm der Entwicklung von $\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}$ aus Gl. 7.76, der proportional zu $\varepsilon \ln(-k^2)$ ist. Ein Imaginärteil entsteht demnach nur, wenn bei der Entwicklung der Gammafunktionen ein Term proportional $\frac{1}{\varepsilon}$ existiert, also wenn eine Gammafunktion divergent ist.

Die obige Betrachtung hat gezeigt, daß man bei exakter Berücksichtigung des skalaren Propagators in den ersten beiden Ordnungen der skalaren Quarkmasse die Ergebnisse bestätigt, die durch eine Entwicklung des Propagators gefolgt waren. Weiter hat man gesehen, daß nur noch zwei weitere Ordnungen — also Terme proportional m^4 , m^6 — Divergenzen aufweisen, so daß nur noch diese beiden Ordnungen für das Aufstellen von Summenregeln maßgeblich sind. Dies wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr durchgeführt.

Zusammenfassung

Der Beginn dieser Diplomarbeit war einer Darstellung des Verfahrens der QCD-Summenregeln zur Berechnung von Massen hadronischer Resonanzen gewidmet. Das Verfahren versucht, aus dem störungstheoretischen Bereich der QCD heraus Informationen über das hadronische Spektrum zu bekommen. In der Darstellung wurde der Schwerpunkt auf die Bedeutung von Vakuumkondensaten für die Berücksichtigung des Confinements und der chiralen Symmetriebrechung im hadronischen Spektrum gelegt. Außerdem wurde vorgeführt, wie man mit Hilfe von Dispersionsrelationen eine Verbindung zwischen störungstheoretischem Bereich der QCD und dem hadronischen Spektrum schlagen kann. Das Verfahren ist vom Konzept her so angelegt, daß man immer nur die Masse des niedrigsten Zustands berechnen kann. Für die Isolation dieses Zustands wurden zwei Möglichkeiten vorgestellt. Das Ergebnis ist eine Gleichung, deren eine Seite aus dem hadronischen Spektrum stammt, und deren andere Seite auf der Ebene der Elementarteilchen — also der Quarks — zu bestimmen ist. Die dafür notwendige dimensionale Regularisierung ist in axiomatischer Weise behandelt worden.

Ziel dieser Arbeit war es, eine Aussage darüber zu treffen, ob es möglich ist, daß sich in einem Bindungszustand aus zwei Quarks und zwei hypothetischen, skalaren Quarks die Massen der Konsituenten so weit wegheben, daß die Masse des Bindungszustandes sehr viel kleiner wird. Um diese Frage zu beantworten, wurde das zuvor dargestellte Verfahren der QCD-Summenregeln benutzt. Bei ihrer Berechnung wurde die Masse der skalaren Quarks — im Hinblick auf die vorausgesagten schweren Squarks in der Supersymmetrie — solange wie der Aufwand vertretbar blieb, exakt behandelt. Der wesentliche Inhalt der Arbeit besteht darin, die Auswir-

kung der Berücksichtigung endlicher Massen auf das Aufstellen von Summenregeln dargestellt zu haben.

Ein wesentlicher Punkt war die Auswirkung der Masse auf die nichtlokalen Vakuumkondensate, wie sie nach einer Entwicklung des Polarisationsensors mit dem Wick'schen Theorem aufgetreten sind. Für masselose Konstituenten werden diese Kondensate als Konstanten behandelt. Es wurde gezeigt, daß endliche Massen auf eine Ortsabhängigkeit der Kondensate führt, und es ist gelungen, eine Darstellung dieser Kondensate in allen Ordnungen der Masse explizit anzugeben (Gl. 4.29).

Die endliche Masse der skalaren Quarks hat auch zu einer wesentlich erschwerten Regularisierung der Feynmangraphen geführt, die für die Summenregel berechnet werden müssen. Aus diesem Grund wurden der perturbative Graph (Kap. 5.2) und der Graph mit einem Kondensat aus skalaren Quarks (Kap. 5.3.1) in der Masse der skalaren Quarks entwickelt und bis zur ersten Ordnung berücksichtigt. Die Auswirkung der Masse besteht im Auftreten von IR-Divergenzen, die zu doppelt divergenten Integralen führen, deren Imaginärteile divergent bleiben und damit nicht für die Summenregeln zu gebrauchen sind. Es ist deshalb notwendig gewesen, die unerwünschten IR-Divergenzen durch das Einführen von Parametern gesondert zu regularisieren (Kap. 5.3.3). Es ist gelungen alle weiteren Graphen mit mehreren Kondensaten in der Masse exakt zu regularisieren.

Die Summenregel wurde mit dem Verfahren der Boreltransformation — bis zur ersten Ordnung der Masse konsistent — aufgestellt (Kap. 6). Die resultierende Masse des Vierteilchen-Bindungszustands konnte durch keine Wahl der Parameter (Kondensate und skalare Quarkmasse) wesentlich abgesenkt werden. In bezug auf die in der Einleitung dargestellte Problematik, die Positronenspektren an der GSI-Darmstadt durch die zwischenzeitliche Erzeugung eines Bindungszustands, der dann in e^+e^- -Paare zerfällt, zu erklären, bedeutet dies ein weiteres Gegenargument. Denn man hatte die Absenkung der Masse des Mehrteilchen-Bindungszustand als letzte Möglichkeit angesehen, die *Teilchentheorie* zu retten (Müller et al. 1986). Die Aussage der Summenregel ist allerdings aufgrund der erwähnten Entwicklung auf skalare Quarkmassen von weniger als 300 MeV beschränkt, jedoch wird eine Absenkung in den MeV -Bereich für noch schwerere

skalare Quarks immer unwahrscheinlicher.

Um diese Aussage auch auf größere skalare Quarkmassen zu erweitern, ist es notwendig, die skalare Quarkmasse in allen Ordnungen mitzunehmen. Bis auf zwei Graphen (siehe oben) ist dies bereits geschehen. In Kap. 7 wurden die notwendigen Schritte aufgezeigt und teilweise durchgeführt. So ist es möglich gewesen, den Imaginärteil des perturbativen Graphen mit Hilfe der Unitaritätsbedingung exakt zu berechnen. Man betrachtet bei diesem Verfahren die virtuell erzeugten Teilchen im Polarisationsgraphen als realen Streuprozess, in dem der einlaufende Zustand in vier Teilchen gestreut wird, die auf der Massenschale liegen. Weiterhin konnte gezeigt werden, daß der Imaginärteil des Graphen mit einem Kondensat vollständig durch die ersten vier Ordnungen in der Masse der skalaren Quarks bestimmt ist. Die Regularisierung der beiden fehlenden Ordnungen wäre der Schritt, der sich an diese Arbeit anschließen müßte, um das Problem in allen Ordnungen der skalaren Quarkmasse exakt beantworten zu können.

Die Arbeit hat nicht nur ein weiteres Argument gegen eine Teilcheninterpretation der GSI-Linien geliefert, sondern auch allgemein gezeigt, welche Probleme bei der Anwendung von Summenregeln auf Systeme mit endlichen Massen auftreten. Die in der Arbeit dargestellten Lösungsvorschläge sind für eine — in vielen Anwendungen notwendige — konsistente Weiterführung der Summenregeln auf Systeme mit Massen hilfreich.

Anhang A

Technische Details der Summenregeln

A.1 Eine Differentiationsformel

Satz: Für $l > 0$ gilt

$$\boxed{\left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}}} \quad (\text{A.1})$$

Beweis: durch vollständige Induktion. Für $l = 1$ ist die Behauptung korrekt, denn es gilt

$$\left(-\frac{d}{dQ^2}\right) \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \frac{s(s+Q^2) - sQ^2}{s^2(s+Q^2)^2} = \frac{1}{(s+Q^2)^2} \quad (\text{A.2})$$

Schluß von l nach $l + 1$: Es gelte

$$\left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}} \quad (\text{A.3})$$

Dann folgt

$$\left(-\frac{d}{dQ^2}\right) \left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \left(-\frac{d}{dQ^2}\right) \frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= l! (-1)^2 (l+1) (s+Q^2)^{-(l+2)} \\
&= \frac{(l+1)!}{(s+Q^2)^{(l+2)}} \quad , \quad (A.4)
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

A.2 Das Verhältnis benachbarter Momente

Die Behauptung ist, daß mit den Momenten aus Gl. 1.50 die Isolation der niedrigsten Resonanz m_R durch das Bilden des Verhältnisses von zwei benachbarten Momenten erreicht werden kann. Es gilt dann der Zusammenhang 1.51. Dieses Verhältnis lautet:

$$\begin{aligned}
\frac{M_l(Q_0^2)}{M_{l-1}(Q_0^2)} &= \frac{\frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2+Q_0^2)^{l+1}} + \sum_{i \neq R} \frac{a_i}{\pi} \frac{1}{(m_i^2+Q_0^2)^{l+1}} + \frac{b}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{(s+Q_0^2)^{l+1}}}{\frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2+Q_0^2)^l} + \sum_{i \neq R} \frac{a_i}{\pi} \frac{1}{(m_i^2+Q_0^2)^l} + \frac{b}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{(s+Q_0^2)^l}} \\
&= \frac{\frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2+Q_0^2)^{l+1}}}{\frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2+Q_0^2)^l}} \frac{1 + \sum_{i \neq R} \frac{a_i}{a_R} \left(\frac{m_R^2+Q_0^2}{m_i^2+Q_0^2} \right)^{l+1} + \frac{b}{a_R} \int_{s_0}^{\infty} ds \left(\frac{m_R^2+Q_0^2}{s+Q_0^2} \right)^{l+1}}{\underbrace{1 + \sum_{i \neq R} \frac{a_i}{a_R} \left(\frac{m_R^2+Q_0^2}{m_i^2+Q_0^2} \right)^l + \frac{b}{a_R} \int_{s_0}^{\infty} ds \left(\frac{m_R^2+Q_0^2}{s+Q_0^2} \right)^l}_{\rightarrow 1 \quad \text{für } l \rightarrow \infty}}
\end{aligned} \quad (A.5)$$

Der zweite Bruch geht für hinreichend viele Ableitungen gegen 1, da die Beziehung $m_R < m_i < s_0$ gilt und deshalb der Bruch $\left(\frac{m_R^2+Q_0^2}{m_i^2+Q_0^2} \right)^l$ für große l beliebig klein wird (entsprechend für s_0 statt m_i^2). Man sieht an dieser Stelle, daß ein großer Abstand zwischen den Resonanzen die Konvergenz beschleunigt. Der erste Bruch ist dagegen von der Zahl der Ableitungen unabhängig. Er hängt nur noch von der niedrigsten Resonanzmasse ab, so daß folgt:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{M_l(Q_0^2)}{M_{l-1}(Q_0^2)} = \frac{\frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2+Q_0^2)^{l+1}}}{\frac{a_R}{\pi} \frac{1}{(m_R^2+Q_0^2)^l}} = \frac{1}{m_R^2 + Q_0^2} \quad (A.6)$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang 1.51.

A.3 Eine Formel für Dispersionsrelationen

Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\boxed{\left(\frac{f(y)}{y-x}\right)^{(n)} = \frac{1}{(y-x)^{n+1}} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j)}(y) (y-x)^j} \quad (\text{A.7})$$

Beweis: durch vollständige Induktion. Induktionsverankerung:

$$n = 0: \quad \frac{f(y)}{y-x} = \frac{1}{(y-x)^1} f(y) (y-x)^0 = \frac{f(y)}{y-x} \quad \checkmark \quad (\text{A.8})$$

Schluß von n nach $n+1$: Es gelte Gl. A.7. Dann berechnet sich die nächste Ableitung zu:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(y)}{y-x}\right)^{(n+1)} &= \left\{ (y-x)^{n+1} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j)}(y) (y-x)^j \right. \\ &\quad \left. - (n+1) (y-x)^n \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j)}(y) (y-x)^j \right\} \frac{1}{(y-x)^{2n+2}} \\ &= \left\{ (y-x)^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} \left(f^{(j+1)}(y) (y-x)^j + f^{(j)}(y) (y-x)^{j-1} j \right) \right. \\ &\quad \left. - (n+1) (y-x)^n \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j)}(y) (y-x)^j \right\} \frac{1}{(y-x)^{2n+2}} \\ &= \left\{ \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j+1)}(y) (y-x)^{j+1} \right. \\ &\quad + \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{(j-1)!} f^{(j)}(y) j (y-x)^j \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{(n+1)!}{j!} f^{(j)}(y) (y-x)^j \right\} \frac{1}{(y-x)^{n+2}} \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Im folgenden werden die beiden ersten Summen einzeln betrachtet. Für die erste Summe gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j+1)}(y) (y-x)^{j+1} &= \\ \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j+1)}(y) (y-x)^{j+1} &+ f^{(n+1)}(y) (y-x)^{n+1} \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Für die zweite Summe gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{(j-1)!} f^{(j)}(y) (y-x)^j \\
&= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} \frac{n!}{(j-1)!} f^{(j)}(y) (y-x)^j \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+n+1} \frac{n!}{j!} f^{(j+1)}(y) (y-x)^{j+1} \\
&= - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+n} \frac{n!}{j!} f^{(j+1)}(y) (y-x)^{j+1} \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Dies ist gerade das Negative der Summe in Gl. A.10, so daß die Summe der Gln. A.10 und A.11, die in Gl. A.9 eingeht, nur aus dem Term

$$f^{(n+1)}(y) (y-x)^{n+1} = -(-1)^{(n+1)+n} \frac{(n+1)!}{(n+1)!} f^{(n+1)}(y) (y-x)^{n+1} \tag{A.12}$$

besteht. Dies ist gerade der $(n+1)$ -te Summand der dritten Summe in Gl. A.9, so daß insgesamt folgt

$$\left(\frac{f(y)}{y-x} \right)^{(n+1)} = \frac{1}{(y-x)^{n+2}} \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{j+n+1} \frac{(n+1)!}{j!} f^{(j)}(y) (y-x)^j, \tag{A.13}$$

was zu zeigen war.

A.4 Die Boreltransformation

Die Boreltransformation einer Funktion $f(Q^2)$ ist definiert als

$$\mathcal{B} \left(f(Q^2) \right) (t) \equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz f(z) e^{zt} \tag{A.14}$$

Im folgenden sind einige Formeln für die Arbeit mit Boreltransformationen hergeleitet. Mit der Substitution $z' = -iz$ und unter Benutzung der Cauchyschen Integralformel (siehe Gl. 1.26) folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} \frac{1}{s+Q^2} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \frac{e^{zt}}{z+s} \\
&= \frac{i}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{e^{iz't}}{iz'+s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{e^{iz't}}{z' - is} \\
&= e^{iz't} \Big|_{z'=is} = e^{-st} \\
\iff &\boxed{\mathcal{B} \frac{1}{s + Q^2} = e^{-st}} \tag{A.15}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt mit der gleichen Substitution und der Definition der δ -Funktion:

$$\boxed{\mathcal{B}1 = \delta(t)} \quad \text{denn} \tag{A.16}$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{iz't} = \delta(t) \tag{A.17}$$

Für Polynome n -ten Grades folgt ganz analog:

$$\boxed{\mathcal{B}(Q^2)^n = \delta^{(n)}(t)} \quad \text{denn} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} z^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{iz't} (iz')^n \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{iz't} = \delta^{(n)}(t)
\end{aligned}$$

Allgemeiner gilt für beliebige Funktionen die mit $(Q^2)^n$ multipliziert werden

$$\boxed{\mathcal{B} \left((Q^2)^n f(Q^2) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \mathcal{B} f(Q^2)} \quad \text{denn} \tag{A.19}$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} z^n f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} f(z) \tag{A.20}$$

A.5 Die Laplacetransformation

Die Umkehrung der Boreltransformation ist die Laplacetransformation.

$$\mathcal{L}(f(t))(t) = \int_0^{\infty} ds f(s) e^{-st} \tag{A.21}$$

Es werden einige Beispiele angegeben, die für das Aufstellen der Summenregel in Kap. 6 benötigt werden.

Durch vollständige Induktion beweist man für $n \geq 0$

$$\boxed{\int_0^\infty ds s^n e^{-st} = \frac{n!}{t^{n+1}}} \quad (\text{A.22})$$

Für $n = 0$ gilt tatsächlich

$$\int_0^\infty ds e^{-st} = -\frac{1}{t} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{t} \quad (\text{A.23})$$

Setzt man die Behauptung für n voraus, folgt für $n + 1$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds s^{n+1} e^{-st} &= -\frac{s^{n+1}}{t} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{n+1}{t} \int_0^\infty ds s^n e^{-st} \\ &= \frac{n+1}{t} \frac{n!}{t^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{t^{n+2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

was zu beweisen war.

Für Funktionen, die eine Potenz von s und einen Logarithmus enthalten, gilt (Gradstein, Ryshik 1981, 4.352):

$$\int_0^\infty ds s^{\nu-1} \ln(s) e^{-st} = \frac{\Gamma(\nu)}{t^\nu} (\Psi(\nu) - \ln(t)) \quad (\text{A.25})$$

Die Funktionen Γ und Ψ sind in Kap. B.3 besprochen. Aus dieser Formel erhält man nach einer einfachen Skalentransformation

$$\boxed{\int_0^\infty ds s^{\nu-1} \ln\left(\frac{s}{b}\right) e^{-st} = \frac{\Gamma(\nu)}{t^\nu} (\Psi(\nu) - \ln(bt))} \quad (\text{A.26})$$

Den Wert der Ψ -Funktion erhält man mit den Gln. B.29 und B.30.

A.6 Integrationen zur Subtraktion des Kontinuums

In Kap. 6 werden Integrationen mit dem Gewicht e^{-st} und dem Integrationsintervall $[0, s_0]$ benutzt, was der Subtraktion des Kontinuums oberhalb von s_0 entspricht. Die notwendigen Integrale werden hier bereitgestellt.

A.6.1 Integranden mit Potenzen und Exponentialfunktion

$$\int_0^{s_0} ds e^{-st} = -\frac{1}{t} e^{-st} \Big|_0^{s_0} = \frac{1}{t} (1 - e^{-s_0 t}) \quad (\text{A.27})$$

$$\int_0^{s_0} ds s e^{-st} = -\frac{s}{t} e^{-st} \Big|_0^{s_0} + \frac{1}{t} \int_0^{s_0} ds e^{-st} = \frac{1}{t^2} - e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} ds s^2 e^{-st} &= -\frac{s^2}{t} e^{-st} \Big|_0^{s_0} + \frac{2}{t} \int_0^{s_0} ds s e^{-st} \\ &= \frac{2}{t^3} - e^{-s_0 t} \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} ds s^3 e^{-st} &= -\frac{s^3}{t} e^{-st} \Big|_0^{s_0} + \frac{3}{t} \int_0^{s_0} ds s^2 e^{-st} \\ &= \frac{6}{t^4} - e^{-s_0 t} \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} ds s^4 e^{-st} &= -\frac{s^4}{t} e^{-st} \Big|_0^{s_0} + \frac{4}{t} \int_0^{s_0} ds s^3 e^{-st} \\ &= \frac{24}{t^5} - e^{-s_0 t} \left(\frac{24}{t^5} + \frac{24s_0}{t^4} + \frac{12s_0^2}{t^3} + \frac{4s_0^3}{t^2} + \frac{s_0^4}{t} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Allgemein gilt die Rekursionsformel:

$$\boxed{\int_0^{s_0} ds s^n e^{-st} = \frac{n}{t} \int_0^{s_0} ds s^{n-1} e^{-st} - \frac{s_0^n}{t} e^{-s_0 t}} \quad (\text{A.32})$$

A.6.2 Integranden mit Potenzen, Logarithmus und Exponentialfunktion

Wenn der Integrand zusätzlich einen Logarithmus enthält, ist die Herleitung sehr langwierig. Deshalb werden nur die wesentlichen Zwischenergebnisse notiert. Die Idee ist, die gesuchten Integrale auf die Formel A.26 zurückzuführen. Von dem Ergebnis dort muß das Integral über das Intervall $[s_0, \infty]$ abgezogen werden. Um dieses herzuleiten, benötigt man die elementaren Integrale (at und x sollen dimensionslos sein):

$$\int_1^{\infty} dx e^{-atx} = \frac{1}{at} e^{-at} \quad (\text{A.33})$$

$$\int_1^{\infty} dx x e^{-atx} = e^{-at} \left(\frac{1}{at} + \frac{1}{a^2 t^2} \right) \quad (\text{A.34})$$

$$\int_1^{\infty} dx x^2 e^{-atx} = e^{-at} \left(\frac{1}{at} + \frac{2}{a^2 t^2} + \frac{2}{a^3 t^3} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\int_1^{\infty} dx x^3 e^{-atx} = e^{-at} \left(\frac{1}{at} + \frac{3}{a^2 t^2} + \frac{6}{a^3 t^3} + \frac{6}{a^4 t^4} \right) \quad (\text{A.36})$$

Für das Exponentialintegral $E_1(x)$, $x > 0$ gibt es die Darstellung (Gradstein, Ryshik 1981, 4.331):

$$\int_1^{\infty} dx \ln(x) e^{-atx} = \frac{1}{at} E_1(at) \quad , \quad (\text{A.37})$$

wobei das Exponentialintegral auch durch die Reihe

$$E_1(x) = -\gamma - \ln(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n n!} \quad (\text{A.38})$$

dargestellt wird (Abramowitz, Stegun 1972, 5.1.11). Eine partielle Integration von Gl. A.37 ($\ln(x)$ wird integriert) führt auf das Integral mit der ersten Potenz in x . Man erhält eine beliebige Potenz von x durch sukzessives partielles Integrieren des Integrals mit der um eins verminderten Potenz. Damit ergibt sich:

$$\int_1^{\infty} dx \ln(x) x e^{-atx} = \frac{1}{a^2 t^2} + \frac{1}{a^2 t^2} E_1(at) \quad (\text{A.39})$$

$$\int_1^{\infty} dx \ln(x) x^2 e^{-atx} = e^{-at} \left(\frac{1}{a^2 t^2} + \frac{3}{a^3 t^3} \right) + \frac{2}{a^3 t^3} E_1(at) \quad (\text{A.40})$$

$$\int_1^{\infty} dx \ln(x) x^3 e^{-atx} = e^{-at} \left(\frac{1}{a^2 t^2} + \frac{5}{a^3 t^3} + \frac{11}{a^4 t^4} \right) + \frac{6}{a^4 t^4} E_1(at) \quad (\text{A.41})$$

Durch eine Skalentransformation und mit den Gln. A.34 – A.36 erhält man die gesuchten Integrale:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\infty} ds s \ln \left(\frac{s}{b} \right) e^{-st} &= s_0^2 \int_1^{\infty} dx x \ln(x) e^{-s_0 t x} + s_0^2 \ln \left(\frac{s}{b} \right) \int_1^{\infty} dx x e^{-s_0 t x} \\ &= e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln \left(\frac{s}{b} \right) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \right) + \frac{1}{t^2} E_1(s_0 t) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\infty} ds s^2 \ln \left(\frac{s}{b} \right) e^{-st} &= e^{-s_0 t} \left(\frac{3}{t^3} + \frac{s_0}{t^2} + \ln \left(\frac{s}{b} \right) \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{t^3} E_1(s_0 t) \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\infty} ds s^3 \ln \left(\frac{s}{b} \right) e^{-st} &= e^{-s_0 t} \left(\frac{11}{t^4} + \frac{5s_0}{t^3} + \frac{s_0^2}{t^2} + \ln \left(\frac{s}{b} \right) \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \right) \\ &\quad + \frac{6}{t^4} E_1(s_0 t) \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Zusammen mit der Gl. A.26 erhält man das gleiche Integral über das Intervall $[0, s_0]$:

$$\int_0^{s_0} ds s \ln\left(\frac{s}{b}\right) e^{-st} = \frac{1}{t^2} (1 - \gamma - \ln(bt) - E_1(s_0 t)) - e^{-s_0 t} \left(\frac{1}{t^2} + \ln\left(\frac{s_0}{b}\right) \left(\frac{1}{t^2} + \frac{s_0}{t} \right) \right) \quad (\text{A.45})$$

$$\int_0^{s_0} ds s^2 \ln\left(\frac{s}{b}\right) e^{-st} = \frac{2}{t^3} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \ln(bt) - E_1(s_0 t) \right) - e^{-s_0 t} \left(\frac{3}{t^3} + \frac{s_0}{t^2} + \ln\left(\frac{s_0}{b}\right) \left(\frac{2}{t^3} + \frac{2s_0}{t^2} + \frac{s_0^2}{t} \right) \right) \quad (\text{A.46})$$

$$\int_0^{s_0} ds s^3 \ln\left(\frac{s}{b}\right) e^{-st} = \frac{6}{t^4} \left(\frac{11}{6} - \gamma - \ln(bt) - E_1(s_0 t) \right) - e^{-s_0 t} \left(\frac{11}{t^4} + \frac{5s_0}{t^3} + \frac{s_0^2}{t^2} + \ln\left(\frac{s_0}{b}\right) \left(\frac{6}{t^4} + \frac{6s_0}{t^3} + \frac{3s_0^2}{t^2} + \frac{s_0^3}{t} \right) \right) \quad (\text{A.47})$$

A.6.3 Transformation des Graphen mit 2 fermionischen Kondensaten

Der Imaginärteil des Graphen mit 2 Quark-Kondensaten ist durch Gl. 5.94 gegeben. Die für das Aufstellen der Summenregel notwendige Transformation lautet daher (siehe Gl. 1.56):

$$\begin{aligned} T &:= \int_0^{s_0} ds \sqrt{1 - \frac{a}{s}} e^{-st} \Theta(s - a) \\ &= \int_a^{s_0} ds \sqrt{1 - \frac{a}{s}} e^{-st} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

wobei die Abkürzung $a := 4m^2$ eingeführt wurde. Eine analytische Lösung dieses Integrals ist mir nicht bekannt. Die übrigen Graphen wurden konsistent nur bis zur Ordnung m^2 in der skalaren Quarkmasse entwickelt. Es wäre demnach sinnvoll,

auch diesen Graphen in der Masse zu entwickeln. Eine Entwicklung der obigen Gleichung in a führt jedoch auf einen an der unteren Integrationsgrenze divergenten Integranden. Hingegen erhält man durch eine Entwicklung der Wurzel in $1/s$ das gewünschte Ergebnis. Die Entwicklung der Wurzel lautet:

$$\sqrt{1 - \frac{a}{s}} = 1 - \frac{a}{2s} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2s}\right)^n \quad (\text{A.49})$$

Setzt man diese Entwicklung in Gl. A.48 ein, sind alle auftretenden Integrale bekannt (Gradstein, Ryshik 1981, 2.325.1 und 2.324.2):

$$H_0 := \int_a^{s_0} ds e^{-st} = -\frac{1}{t} (e^{-s_0 t} - e^{-at}) \quad (\text{A.50})$$

$$H_1 := \int_a^{s_0} ds \frac{e^{-st}}{s} = -E_1(s_0 t) + E_1(at) \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} H_n &:= \int_a^{s_0} ds \frac{e^{-st}}{s^n} \\ &= -\frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} E_1(st) \Big|_a^{s_0} - e^{-st} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-t)^{k-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k) s^{n-k}} \Big|_a^{s_0} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Für das Exponentialintegral E_1 wird auf Gl. A.38 verwiesen. Man sieht, daß die Entwicklung der Wurzel nach $1/s$ implizit zu einer Entwicklung in a bzw. m^2 geführt hat. Das gesamte Integral A.48 ist durch die Größen H_n und die Entwicklung der Wurzel darstellbar:

$$T = H_0 - \frac{a}{2} H_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n H_n \quad (\text{A.53})$$

Für H_0 kann einfach der Ausdruck A.50 eingesetzt werden. Will man sich auf die erste Ordnung in a beschränken, fallen für $H_{n \geq 1}$ die meisten Terme weg. Für H_1 erhält man mit Gl. A.38

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} H_1 &= \frac{a}{2} (E_1(s_0 t) - E_1(at)) \\ &= \frac{a}{2} \left(E_1(s_0 t) + \gamma + \ln(at) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (at)^n}{n n!} \right) \\ &= \frac{a}{2} (E_1(s_0 t) + \gamma + \ln(at)) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Ebenso folgt für die Terme mit $n \geq 2$:

$$- \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n H_n$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n \\
&\quad \times \left(- \frac{(-t)^{n-1}}{(n-1)!} E_1(st) \Big|_a^{s_0} - e^{-st} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-t)^{k-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} s^{n-k} \Big|_a^{s_0} \right) \\
&= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n \left(e^{-at} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-t)^{k-1}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)} a^{n-k} \right) + \mathcal{O}(a^2) \\
&= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n \left(e^{-at} \frac{1}{(n-1) a^{n-1}} \right) + \mathcal{O}(a^2) \\
&= -a e^{-at} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n (n-1) n!} + \mathcal{O}(a^2) \tag{A.55}
\end{aligned}$$

Diese Ergebnisse werden in A.53 eingesetzt und $a = 4m^2$ rücksbstituiert:

$$\begin{aligned}
T &= \int_0^{s_0} ds \sqrt{1 - \frac{a}{s}} e^{-st} \Theta(s-a) \\
&= -\frac{1}{t} \left(e^{-s_0 t} - e^{-4m^2 t} \right) + 2m^2 \left(E_1(s_0 t) + \gamma + \ln(4m^2 t) \right) \\
&\quad - 4m^2 e^{-4m^2 t} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n (n-1) n!} \tag{A.56}
\end{aligned}$$

Die verbleibende Reihe konvergiert gegen eine Zahl im Intervall $(0, 1/2]$. Dies erkennt man durch Vergleich mit der Reihe, die bei der Entwicklung der Wurzel aufgetreten ist (Gl. A.49). An der Stelle $\frac{a}{s} = 1$ lautet diese Gleichung:

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!} > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n (n-1) n!} > 0 \tag{A.57}$$

Diese Reihe ist eine Majorante der Reihe, die in Gl. A.56 auftritt.

Auf die gleiche Weise wird das Integral

$$T' = \int_0^{s_0} ds s e^{-st} \sqrt{1 - \frac{a}{s}} \Theta(s-a) \tag{A.58}$$

in der Masse (bzw. in a) entwickelt. Die obige Rechnung kann identisch wiederholt werden, nur daß der Integrand jeweils mit s zu multiplizieren ist, was sich durch einen um eins verminderten Index an den Funktionen H bemerkbar macht. Die zu A.53 entsprechende Gleichung lautet dann:

$$T' = H_{-1} - \frac{a}{2} H_0 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2}\right)^n H_{n-1} \tag{A.59}$$

Für H_{-1} gilt:

$$H_{-1} \equiv \int_a^{s_0} ds s e^{-st} = -\frac{1}{t} (s_0 e^{-s_0 t} - a e^{-at}) + \frac{1}{t} H_0 \quad (\text{A.60})$$

H_0 ist durch Gl. A.50 gegeben, und die übrigen Terme sind alle mindestens von der Ordnung a^2 , denn man kombiniert jetzt in jedem Element der Reihe a^n mit H_{n-1} statt mit H_n , wie es in Gl. A.55 der Fall war, wo man mindestens die Ordnung a erhielt. Damit ist T' bereits vollständig berechnet ($a = 4m^2$):

$$T' = -\frac{1}{t} (s_0 e^{-s_0 t} - a e^{-at}) - \frac{1}{t^2} (e^{-s_0 t} - e^{-at}) + \frac{a}{2t} (e^{-s_0 t} - e^{-4m^2 t})$$

$$\implies$$

$$\boxed{\int_0^{s_0} ds s e^{-st} \sqrt{1 - \frac{a}{s}} \Theta(s - a) = e^{-4m^2 t} \left(\frac{2m^2}{t} + \frac{1}{t^2} \right) - e^{-s_0 t} \left(\frac{s_0}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{2m^2}{t} \right)}$$

(A.61)

Anhang B

Technische Details zur Regularisierung

B.1 Wick–Rotation

Die Wick–Rotation ermöglicht es, einen im Minkowskiraum formulierten Ausdruck in den euklidischen Raum zu transformieren. Dazu wird die Nullkomponente der Vierervektoren im Minkowskiraum in die komplexe Ebene fortgesetzt. Sei also k^2 der Minkowskiimpuls. Dann lautet die Wick–Rotation

$$k_0 = iK_0, \quad \vec{k} = \vec{K} \quad \text{mit} \quad K_0 \in \mathbf{R} \quad (\text{B.1})$$

Damit lauten die Skalarprodukte und Volumenelemente in d Dimensionen

$$d^d k = i d^d K, \quad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -K_0^2 - \vec{K}^2 = -K^2 \quad \text{mit} \quad K^2 \equiv K_0^2 + \vec{K}^2 \quad (\text{B.2})$$

Diese Rotation ist jedoch mit Vorsicht zu genießen, da man darauf zu achten hat, daß der Teil der imaginären Ebene, der bei der Rotation überfahren wird, keine Pole enthält. In Abb. B.1 sind die Lage der Pole und der bei der Rotation überstrichene Bereich für den Fall eines Propagators der Form $\frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$ im Minkowskiraum dargestellt. Die Pole des Propagators liegen bei

$$k_0 = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2 - i\epsilon} \quad (\text{B.3})$$

Abbildung B.1: Veranschaulichung der Wick-Rotation

Durch die Wahl des Vorzeichens von $i\epsilon$ wird bestimmt, in welche Richtung die Pole von der reellen Achse weg in die imaginäre Ebene verschoben werden. Das Vorzeichen ist gerade so gewählt, daß die Wick-Rotation bedenkenlos durchgeführt werden kann.

B.2 Parametrisierung

In Feynmanamplituden treten im Nenner häufig Produkte von Polynomen auf, deren Faktoren jeweils von einem Propagator stammen. Es ist sinnvoll, diese Produkte durch ein Polynom zu ersetzen, um Formeln wie Gl. 2.17 benutzen zu können. Dies kann man nur unter Inkaufnahme eines Parameterintegrals erreichen. Für die Polynome a und b gilt (Pokorski 1990):

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}} \quad (\text{B.4})$$

α und β können beliebige reelle Zahlen sein. Für $\alpha = \beta = 1$ reduziert sich die Gleichung zu:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} \quad (\text{B.5})$$

Eine alternative Parametrisierung, die vorwiegend im euklidischen Anwendung findet, ist (Pascual, Tarrach 1984)

$$\frac{1}{(K^2)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(2 - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma(\alpha)} \int d^d x \frac{e^{2iKx}}{(x^2)^{2-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad (\text{B.6})$$

wobei $d = 4 - \varepsilon$ gewählt wurde.

B.3 Laurentreihenentwicklung

Im folgenden soll eine Reihe von Laurentreihenentwicklungen angegeben werden, die nach der dimensional Regularisierung von Feynmanamplituden benötigt werden. Die Dimension des Raumes, über den integriert wird, ist $d = 4 - \varepsilon$. Es wird dann nach ε bis zur zweiten Ordnung entwickelt, auch wenn in der Arbeit meistens nur die erste Ordnung benötigt wird.

Es gilt für eine beliebige Funktion f

$$f^z = 1 + z \ln(f) + \frac{1}{2} z^2 \ln^2(f) + \dots \quad (\text{B.7})$$

Dies sieht man ganz leicht ein, wenn man die Funktion $g(z) := f^z$ etwas anders notiert:

$$\begin{aligned} f^z &= \exp(\ln(f^z)) = \exp(z \ln(f)) \\ \implies \frac{dg}{dz} &= \ln(f) \exp(z \ln(f)) \\ \implies \frac{d^2g}{dz^2} &= \ln^2(f) \exp(z \ln(f)) \\ \implies f^z &= g(0) + z \left. \frac{dg}{dz} \right|_{z=0} + \frac{1}{2} z^2 \left. \frac{d^2g}{dz^2} \right|_{z=0} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis.

Eine integrale Darstellung der Γ -Funktionen lautet (Abramowitz, Stegun 1972, 6.1.1)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \quad (\text{B.9})$$

Für die Entwicklung von Γ -Funktionen kann man allgemein von der Darstellung (Abramowitz, Stegun 1972, 6.1.33) ausgehen:

$$\begin{aligned} \ln(\Gamma(1+z)) &= -\ln(1+z) + z(1-\gamma) + \frac{1}{2}[\zeta(2)-1]z^2 + \dots \\ \text{mit } \zeta(2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Es werden die Riemannsche Zeta-Funktion und die Eulersche Konstante γ benutzt. Damit kann die Γ -Funktion selbst entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+z) &= \frac{1}{1+z} \exp \left\{ z(1-\gamma) + \frac{1}{2}z^2(\zeta(2)-1) + \dots \right\} \\ &= (1-z+z^2-\dots) \left\{ 1 + (1-\gamma)z + \frac{1}{2}z^2(\zeta(2)-\gamma) + \dots \right\} \\ \implies \Gamma(1+z) &= 1 - \gamma z + \frac{1}{2}z^2 \left(\zeta(2) - \frac{1}{2}\gamma \right) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Alle anderen Γ -Funktionen können mit Hilfe der Beziehung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{B.12})$$

und der Entwicklung

$$\frac{1}{1 \pm z/n} = 1 \mp \frac{z}{n} + \left(\frac{z}{n}\right)^2 \mp \dots \quad (\text{B.13})$$

auf $\Gamma(1+z)$ in Gl. B.11 zurückgeführt werden. Es sollen hier nur die Ergebnisse aufgelistet werden:

$$\Gamma(-1+z) = -\frac{1}{z} - (1-\gamma) - \frac{z}{2} \left(2 + \zeta(2) - \frac{3}{2}\gamma \right) \quad (\text{B.14})$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \frac{z}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma \right) \quad (\text{B.15})$$

$$\Gamma(1+z) = 1 - \gamma z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma \right) \quad (\text{B.16})$$

$$\Gamma(2+z) = 1 + (1-\gamma)z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - \frac{3}{2}\gamma \right) \quad (\text{B.17})$$

$$\Gamma(3+z) = 2 \left(1 + \left(\frac{3}{2} - \gamma \right) z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + 1 - \frac{5}{2}\gamma \right) \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\Gamma(4+z) = 6 \left(1 + \left(\frac{11}{6} - \gamma \right) z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + 2 - \frac{19}{6}\gamma \right) \right) \quad (\text{B.19})$$

Für die inversen Γ -Funktionen erhält man:

$$\frac{1}{\Gamma(-1+z)} = -z + (1-\gamma)z^2 + \frac{z^3}{2} \left(\zeta(2) + \frac{5}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \gamma z^2 - \frac{z^3}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \gamma z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{1}{\Gamma(2+z)} = 1 - (1-\gamma)z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - 2 + \frac{5}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{1}{\Gamma(3+z)} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{3}{2} - \gamma \right) z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - \frac{7}{2} + \frac{7}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \right) \quad (\text{B.24})$$

$$\frac{1}{\Gamma(4+z)} = \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{11}{6} - \gamma \right) z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - \frac{85}{18} + \frac{25}{6}\gamma - 2\gamma^2 \right) \right) \quad (\text{B.25})$$

Die Beta-Funktion ist durch

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{B.26})$$

definiert. Eine nützliche Integraldarstellung der Beta-Funktion ist (Abramowitz, Stegun 1972, 6.2.1)

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \int_0^\infty dt \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \quad (\text{B.27})$$

Die Psi-Funktion ist durch

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (\text{B.28})$$

definiert. Die Entwicklung der Psi-Funktion erhält man aus ihrer Reihendarstellung (Abramowitz, Stegun 1972, 6.3.14)

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1} \quad (\text{B.29})$$

und der Rekursionsformel

$$\psi(1+z) = \frac{1}{z} + \psi(z) \quad (\text{B.30})$$

Die letzte Beziehung erlaubt es, jede Funktion $\psi(n+z)$ mit n aus den ganzen Zahlen als eine Summe von rationalen Funktionen von z und der Funktion $\psi(1+z)$ auszudrücken. Dies soll an 2 Beispielen erläutert werden

$$\begin{aligned}\Psi(-2+z) &= \frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} + \Psi(1+z) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + 1+z - \frac{1}{z} + \Psi(1+z) \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}z + \Psi(1+z)\end{aligned}\tag{B.31}$$

$$\begin{aligned}\Psi(4+z) &= \frac{1}{3+z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1+z} + \Psi(1+z) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + 1 - z + z^2 + \Psi(1+z) \\ &= \frac{11}{6} - \frac{49}{36}z + \frac{251}{216}z^2 + \Psi(1+z)\end{aligned}\tag{B.32}$$

Es genügt deshalb, die Entwicklung der letzten Funktion zu kennen:

$$\psi(1+z) = -\gamma + \zeta(2)z - \zeta(3)z^2 + \dots\tag{B.33}$$

Schließlich sollen einige Produkte von Γ -Funktionen in entwickelter Form angegeben werden. Die Entwicklung wird auf die erste Ordnung in z beschränkt.

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma(3-z)} &= \frac{1}{2}(1+z) \\ \frac{\Gamma\left(2-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma(2-z)} &= 1 + \frac{z}{2}(1-\gamma) \\ \frac{\Gamma\left(1-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(-2+\frac{z}{2}\right)}{\Gamma(4-z)} &= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{z} - \gamma + \frac{11}{3}\right) \\ \frac{\Gamma\left(2-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(-3+\frac{z}{2}\right)}{\Gamma(5-z)} &= -\frac{1}{72}\left(\frac{2}{z} - \gamma + \frac{7}{2}\right)\end{aligned}\tag{B.34}$$

B.4 Darstellung der Funktionen \ln , \arctan und artanh

B.4.1 Parameterintegrale

Mit den Abkürzungen $y := ax^2 + bx + c$ und $\Delta := 4ac - b^2$ gelten folgende Beziehungen (Gradstein, Ryshik 1981, 2.17):

$$\int dx \frac{1}{y} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right) & \text{für } \Delta > 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{artanh}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) & \text{für } \Delta < 0 \end{cases} \quad (\text{B.35})$$

$$\int dx \frac{x}{y} = \frac{1}{2a} \ln(y) - \frac{b}{2a} \int dx \frac{1}{y} \quad (\text{B.36})$$

$$\int dx \frac{x^2}{y} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln(y) + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int dx \frac{1}{y} \quad (\text{B.37})$$

$$\int dx \frac{x^m}{y} = -\frac{x^{m-1}}{(1-m)a} - \frac{b}{a} \int dx \frac{x^{m-1}}{y} - \frac{c}{a} \int dx \frac{x^{m-2}}{y} \quad (\text{B.38})$$

B.4.2 Zusammenhänge zwischen den Funktionen

Für die inversen Tangens- und Tangenshyperbolicus-Funktionen gilt der Zusammenhang (Bogoliubov, Shirkov 1959, S.402):

$$ix \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{ix}\right) = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{B.39})$$

Der Zusammenhang zum Logarithmus lautet (Bronstein 1985, S.86):

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (\text{B.40})$$

Für $x = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}^{-1}$ gelten die äquivalenten Darstellungen

$$\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left(-\frac{k^2}{4m^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \right)^2 \right) \\
 &= \ln \left(-\frac{|k|}{2m} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \right) \right) \tag{B.41}
 \end{aligned}$$

B.4.3 Entwicklung in der Masse

Ein Ausdruck, der bei der Regularisierung des fermionischen Polarisationsensors wichtig ist, lautet

$$A := \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \right) \tag{B.42}$$

Er soll hier in der Masse m^2 entwickelt werden. Mit Gl. B.41 folgt:

$$\begin{aligned}
 A &= \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(1 - \frac{2m^2}{k^2} + \mathcal{O}(m^4) \right) \ln \left(-\frac{1 + 1 - \frac{2m^2}{k^2} + \mathcal{O}(m^4)}{1 - 1 + \frac{2m^2}{k^2} + \mathcal{O}(m^4)} \right) \\
 &\approx \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(1 - \frac{2m^2}{k^2} \right) \ln \left(-\frac{k^2 - m^2}{m^2} \right) \\
 &\approx \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \ln \left(-\frac{k^2}{m^2} \right) \quad \text{für } k^2 \gg m^2 \\
 &= -\ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \tag{B.43}
 \end{aligned}$$

B.4.4 Der Hauptzweig des \ln

Nach der Regularisierung von Integralen treten häufig Terme der Art $\ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)$ auf. Für $k^2 < 0$ ist dieser Ausdruck wohldefiniert. Hingegen muß man sich an die analytische Fortsetzung des Logarithmus für komplexe Argumente erinnern, um für den Bereich $k^2 > 0$ einen Sinn in diesem Ausdruck zu finden. Für $z \in \mathbf{C}$ ist der Logarithmus definiert durch die Abbildung:

$$\begin{aligned}
 \ln : \quad \mathbf{C} &\longrightarrow \mathbf{C} \\
 z = |z|e^{i\varphi} &\longmapsto \ln|z| + i\varphi \tag{B.44}
 \end{aligned}$$

Bezogen auf den obigen Ausdruck, ist $\varphi = \pi$ zu wählen, denn es gilt $e^{i\pi} = -1$, so daß man erhält

$$\begin{aligned} \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) &= \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right)\Theta(-k^2) + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right)\Theta(k^2) + i\pi\Theta(k^2) \\ \implies \boxed{\ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) &= \ln\left|\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right| + i\pi\Theta(k^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

Demnach findet man nach der Regularisierung eines Integrals den Imaginärteil des Integrals, der die Resonanzstruktur widerspiegelt (siehe dazu die Diskussion der Dispersionsrelationen), in den Logarithmen, deren Argument nicht positiv definit ist.

B.5 Einige Differentiationen

Zunächst wird die Formel

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^n \frac{1}{(k-q)^{2j}} = 2^{2n} \frac{(j+n-1)!(j+n-2)!}{(j-1)!(j-2)!} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n)}}} \quad (\text{B.46})$$

für Minkowskiimpulse k, q bewiesen. Die Ableitungen sind kovariant definiert, d. h. es gilt $\frac{\partial}{\partial q}q = 4$. Für $j = 1$ führen die kombinatorischen Faktoren auf das interessante Ergebnis

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) \frac{1}{(k-q)^{2j}} = 4 \frac{(1)!(0)!}{(0)!(-1)!} \frac{1}{(k-q)^4} = 0 \quad (\text{B.47})$$

Der Beweis von Gl. B.46 erfolgt durch vollständige Induktion in n . Für $n = 0$ gilt

$$\frac{1}{(k-q)^{2j}} = 2^0 \frac{(j-1)!(j-2)!}{(j-1)!(j-2)!} \frac{1}{(k-q)^{2j}}, \quad (\text{B.48})$$

womit die Verankerung stimmt. Es gelte nun die Behauptung für n . Dann liefert die nächste Differentiation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^{n+1} \frac{1}{(k-q)^{2j}} = \frac{\partial^2}{\partial q^2} \underbrace{2^{2n} \frac{(j+n-1)!(j+n-2)!}{(j-1)!(j-2)!}}_{c_n :=} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n)}}$$

$$\begin{aligned}
&= c_n(j+n) \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{2(k-q)_\mu}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \\
&= 2c_n(j+n) \left\{ \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \frac{\partial}{\partial q_\mu} (k-q)_\mu \right. \\
&\quad \left. + (k-q)_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \right\} \\
&= 2c_n(j+n) \left\{ -\frac{4}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \right. \\
&\quad \left. + (j+n+1)(k-q)_\mu \frac{2(k-q)^\mu}{(k-q)^{2(j+n+2)}} \right\} \\
&= 2c_n(j+n) \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \{-4 + 2(j+n+1)\} \\
&= 2^2 c_n(j+n)(j+n-1) \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \\
&= c_{n+1} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \quad , \tag{B.49}
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Es ist zu beachten, daß diese Formel für beliebige $j \in \mathbf{Z}$ richtig bleibt. So folgt z. B. für $j = -1$ und $n = 1$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} (k-q)^2 = 4 \frac{(-1)!(-2)!}{(-2)!(-3)!} = 8 \tag{B.50}$$

Für alle $n > 1$ wird der Ausdruck Null.

Differentiationen von Termen, die einen Logarithmus enthalten, kann man nach 4 Ableitungen auf die obige Formel zurückführen. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial q^2} (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{ \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_\mu} (k-q)^2 + (k-q)^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{ -2(k-q)_\mu \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2(k-q)_\mu \right\} \\
&= -2 \left\{ -4 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) - (k-q)_\mu \frac{2(k-q)^\mu}{(k-q)^2} - 4 \right\} \\
\Rightarrow &\frac{\partial^2}{\partial q^2} (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) = 8 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) + 12 \tag{B.51}
\end{aligned}$$

Die nächsten beiden Ableitungen ergeben dann

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^2 (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left\{ 8 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) + 12 \right\} \\
&= -16 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{(k-q)_\mu}{(k-q)^2} \\
&= -16 \left\{ \frac{1}{(k-q)^2} \frac{\partial}{\partial q_\mu} (k-q)_\mu + (k-q)_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{(k-q)^2} \right\} \\
&= -16 \left\{ -\frac{4}{(k-q)^2} + (k-q)_\mu \frac{2(k-q)_\mu}{(k-q)^4} \right\} \\
\Rightarrow & \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^2 (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) = \frac{32}{(k-q)^2} \tag{B.52}
\end{aligned}$$

Wegen B.47 verschwindet jede weitere Ableitung, so daß man schreiben kann

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^n \left\{ (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} = \begin{cases} 8 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) + 12 & \text{für } n = 1 \\ \frac{32}{(k-q)^2} & \text{für } n = 2 \\ 0 & \text{für } n > 2 \end{cases} \tag{B.53}$$

Eine weitere nützliche Formel betrifft die $2n$ -te Ableitung eines mit dem skalaren Propagator verwandten Ausdrucks:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^n \frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + a} = (2n)! 4^n \frac{(k^2)^n}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+1}}, \tag{B.54}$$

wobei a eine beliebige komplexe Konstante ist. p, q sind Minkowskiimpulse und n ist aus den natürlichen Zahlen mit Null. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für die Verankerung hat man

$$\frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + a} = 0! 4^0 \frac{(k^2)^0}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^1} \tag{B.55}$$

Für den Schluß von n nach $n + 1$ gelte die Behauptung für n . Dann folgt für die nächste Differentiation:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^{n+1} \frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + a} &= (2n)! 4^n (k^2)^n \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+1}} \\
&= (2n)! 4^n (k^2)^n (-2n - 1) \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{-2k_\mu}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+2}} \\
&= (2n + 1)! 4^n (k^2)^n (-2n - 2) \frac{-4k_\mu k^\mu}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+3}} \\
&= (2n + 2)! 4^{n+1} (k^2)^n \frac{k^2}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+3}} \\
&= (2(n + 1))! 4^{n+1} (k^2)^{n+1} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2(n+1)+1}}
\end{aligned} \tag{B.56}$$

was zu zeigen war.

Abbildungsverzeichnis

0.1	Elektron-Positron Summenenergiespektrum	7
1.1	Störungstheoretische Polarisationsgraphen für einen Quarkstrom . .	18
1.2	Der Integrationsweg γ	23
1.3	Integrationsweg mit Polen	27
1.4	Das Schwarzsche Spiegelungsprinzip	28
2.1	Polarisationsgraph für 2 Fermionen	38
2.2	Sukzessive Regularisierung	45
2.3	Polarisationsgraph für 2 skalare Teilchen	47
3.1	Polarisationsgraph für je 2 skalare und fermionische Quarks	72
5.1	Graph mit einem fermionischen Kondensat	93
5.2	Der perturbative Graph	95
5.3	Graph mit genau einem bosonischen Kondensat	103
5.4	Der Graph mit 2 fermionischen Kondensaten	126
5.5	Der Graph mit 2 skalaren Kondensaten	128
5.6	Der Graph mit einem skalaren und zwei fermionischen Kondensaten	132

6.1	Aufspaltung nach Ordnung der skalaren Quarkmasse, $m = 500 \text{ MeV}$	144
6.2	Aufspaltung nach Ordnung der skalaren Quarkmasse, $m = 200 \text{ MeV}$	145
6.3	Aufspaltung nach Graphen, Kondensat groß	146
6.4	Aufspaltung nach Graphen, Kondensat klein	147
6.5	Variation des Kondensats aus fermionischen Quarks	148
6.6	Variation des Kondensats aus skalaren Quarks	149
6.7	Variation der skalaren Quarkmasse	150
7.1	Der Zerfall des äußeren Zustands in ein Teilchenpaar	157
7.2	Der Zerfall des äußeren Zustands in zwei Teilchenpaare	159
B.1	Veranschaulichung der Wick–Rotation	193

Literatur

Abramowitz, Milton / **Stegun**, Irene A. (Hrsg.), Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 9. Aufl., 1972.

Baer, Howard / **Karatas**, Debra / **Tata**, Xerxes, On the Squark and Gluino Mass Limits from the Cern $p\bar{p}$ -Collider, in: Phys. Lett. B 183 (1987), 220–226.

Barger, V. / **Hagiwara**, K. / **Keung**, W.-Y., Constraints on Squark Masses from CERN $p\bar{p}$ Collider Data, in: Phys. Lett. 145B (1984), 147–150.

Becher, Peter / **Böhm**, Manfred / **Joos**, Hans, Eichtheorie der starken und elektroschwachen Wechselwirkung. Teubner, Stuttgart, 2. Aufl., 1983.

Bjorken, James D. / **Drell**, Sidney D., Relativistische Quantenmechanik, Mannheim/Wien/Zürich, in: BI-Hochschultaschenbücher Bd. 98 (1990).

Bjorken, J.D. / **Drell**, S.D., Relativistische Quantenfeldtheorie, Mannheim/Wien/Zürich, in: BI-Hochschultaschenbücher Bd. 101 (1990).

Bogoliubov, N.N. / **Shirkov**, D.V., Introduction to the Theory of Quantized Fields, in: Interscience Monographs in Physics and Astronomy, Vol. III. Hrsg. v. R.E. Marshak. Interscience Publishers, New York/London 1959.

Bokemeyer, Helmut, Positronenspektroskopie nach Schwerionenstößen, Darmstadt, in: GSI-90-11 Report (Mai 1990).

Bronstein, I.N. / **Semendjajew**, K.A., Taschenbuch der Mathematik, hrsg. v. G. Grosche, V. Ziegler, D. Ziegler. Nauka und Teubner, Moskau/Leipzig, 22. Aufl., 1985.

Coleman, Sidney / **Mandula**, Jeffrey, All Possible Symmetries of the S -Matrix,

in: Phys. Rev. 159 (1967), 1251–1256.

Collins, John, Renormalization. Cambridge University Press, Cambridge u.a. 1985.

Duncan, M.J., Nuclear Parity Violation from Supersymmetric QCD, in: Nucl. Phys. B214 (1983), 21–35.

Ehrnsperger, B. / **Reinhardt**, J. / **Schäfer**, A. / **Greiner**, W., Bound states of composite particles and the GSI lines, in: Z. Phys. A346 (1992), 133–136.

Ellis, John / **Nanopoulos**, D.V., Flavour–Changing Neutral Interactions in Broken Supersymmetric Theories, in: Phys. Lett. 110B (1982), 44–48.

Goldberg, H., Strong Lower Bound on Squark Masses in Minimal N=1 Supergravity, in: Phys. Lett. 147B (1984), 289–293.

Goldstone, J. / **Salam**, A. / **Weinberg**, S., in: Phys. Rev. 127 (1962), 965.

Gradstein / **Ryshik**, Summen–, Produkt– und Integraltafeln. Harri Deutsch, Thun/-Frankfurt am Main, 1, 1981.

Greiner, Walter, Relativistische Quantenmechanik: Wellengleichungen. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main, 2. Aufl., 1987.

Greiner, Walter / **Müller**, Berndt / **Rafelski**, Johann, Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Springer, Berlin u.a. 1985.

Gröbner, Wolfgang / **Hofreiter**, Nikolaus (Hrsg.), Integraltafel. Erster Teil: Unbestimmte Integrale. Springer, Wien/Innsbruck, 2. Aufl., 1957.

Hagedorn, R., Relativistic Kinematics. W. A. Benjamin, Inc., New York/Amsterdam 1963.

Ignatiev, A.Yu. et al., Coloured Scalars and New Hadrons, in: Theor. Math. Phys. 53 (1982), 1063–1067.

Joachain, Charles J., Quantum Collision Theory. North Holland, Amsterdam u.a., 3. Aufl., 1987.

Landau, L.D. / **Lifschitz**, E.M., Quantenelektrodynamik, hrsg. v. Paul Ziesche. Akademie-Verlag, Berlin, 6. Aufl., 1986.

Leibbrandt, George, Introduction to the Technique of Dimensional Regularization, in: *Rev. Mod. Phys.* 47 (1975), 849–876.

Müller, B. / **Reinhardt**, J. / **Greiner**, W. / **Schäfer**, A., Is there a tightly bound poly-positronium state?, in: *J. Phys.* A324 (1986), 243.

Müller–Kirsten, H.J.W. / **Wiedemann**, A., *Supersymmetry: An Introduction with Conceptual and Computational Details*. World Scientific, Singapore 1987.

Muta, Taizo, *Foundations of Quantum Chromodynamics. An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*. World Scientific, Singapore 1987.

Pascual, P. / **Tarrach**, R., *QCD: Renormalization for the Practitioner*. Springer, Berlin u.a. 1984.

Pauli, W. / **Villars**, F., On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory, in: *Rev. Mod. Phys.* 21 (1949), 434–444.

Pokorski, Stefan, *Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Aufl., 1990.

Reinders, L.J. / **Rubinstein**, H.R. / **Yazaki**, S., Hadron Properties from QCD Sum Rules, in: *Phys. Rep.* 127 (1985), 1–97.

Remmert, Reinhold, *Funktionentheorie I*. Springer, Berlin u.a. 1984.

Schäfer, Andreas, New particles in strong fields? in: *J. Phys.* G 15 (1989), 373.

Schwartz, Laurent, *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris 1966.

Schweppe, J. **et al.**, in: *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983), 2261.

Schwinger, Julian, *Particles, Sources and Fields*. Addison–Wesley, Reading (Massachusetts) u.a., Vol. II, 1973.

Shifman, M.A. / **Vainshtein**, A.I. / **Zakharov**, V.I., QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations, in: *Nucl. Phys.* B147 (1979), 385–447.

Dies., QCD and Resonance Physics. Applications, in: *Nucl. Phys.* B147 (1979), 448–518.

Sohnius, Martin F., Introducing Supersymmetry, in: *Phys. Rep.* 128 (1985), 39–

204.

Stein, E. / Graf, J. / Reinhardt, J. / Schäfer, A. / Greiner, W., Can extended objects explain the GSI e^+e^- -lines?, in: Z. Phys. A340 (1991), 377.

Suzuki, Mahiko, Constraints on Masses of Supersymmetric Scalar Partners of Quarks by Parity Violating Nuclear Transitions, in: Phys. Lett. 115B (1982), 40–44.

't Hooft, G. / Veltman, M., Regularization and Renormalization of Gauge Fields, in: Nucl. Phys. B44 (1972), 189–213.

Wilson, Kenneth G., Non-Lagrangian Models of Current Algebra, in: Phys. Rev. 179 (1969), 1499–1512.

Ynduráin, F.J., Nonperturbative propagators for scalars and fermions to all orders in their masses, in: Z. Phys. C 42 (1989), 653–656.

Zimmermann, Wolfhart, Local Operator Products and Renormalization in Quantum Field Theory, in: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory; 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Volume 1. Hrsg. v. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton. The M.I.T. Press, Cambridge (Mass.) u.a. 1971, S. 395–589.

Zinn-Justin, Jean, Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Clarendon Press, Oxford u.a. 1990.

Danksagung

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Walter Greiner für die Anregung zu dieser Arbeit, die Bereitschaft, auf meine speziellen Vorstellungen einzugehen, und die stete Förderung danken.

Herr Prof. Dr. Andreas Schäfer und Herr Dr. Lech Mankiewicz standen ständig als Ansprechpartner zur Verfügung, und ich danke ihnen für die wertvollen fachlichen Diskussionen.

Mein Dank gilt auch der Studienstiftung des deutschen Volkes, die mich seit 1990 förderte.

Schließlich möchte ich meinen Eltern, meiner Freundin Ulrike Ruttmann und ihrer Familie für die finanzielle und moralische Unterstützung während des gesamten Studiums danken.