

**Die innere Struktur des Nukleons:
Vielteilchenkorrelatoren
und Störungskorrekturen
im Limes großer N_f**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Michael Meyer-Hermann
aus Reinbek bei Hamburg

Frankfurt am Main, August 1997
(D F 1)

Vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main
als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Bruno Lüthi

Gutachter: Prof. Dr. Andreas Schäfer und Prof. Dr. Reiner Dreizler

Datum der Disputation: 4.12.1997

Kommission: Prof. Dr. Reiner Dreizler, Prof. Dr. Ernst Mohler,
Prof. Dr. Andreas Schäfer und Prof. Dr. Reinhard Stock

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Tief-inelastische Lepton-Nukleon-Streuung	13
2.1	Kinematik	14
2.1.1	Definition und Invarianten	14
2.1.2	Elastische Streuung	16
2.1.3	Ruhesystem des Nukleons	17
2.1.4	Impuls-Schwerpunktssystem	17
2.1.5	Breit-System	18
2.1.6	Lichtkegeldarstellung	18
2.2	Wirkungsquerschnitt	19
2.3	Leptonischer Tensor	21
2.4	Hadronischer Tensor	23
2.5	Vorwärtsstreuamplitude	24
2.6	Strukturfunktionen des Nukleons	26
2.7	Das Parton-Modell	29
2.7.1	Voraussetzungen	29
2.7.2	Lichtkegeldominanz im Bjorken-Limes	29
2.8	Faktorisierung	31

2.9	Born-Näherung	34
2.10	Transversale und longitudinale Photonen	37
2.10.1	Polarisationsvektoren	37
2.10.2	Unpolarisierte Nukleonen	37
2.10.3	Der R -Faktor	39
2.10.4	Longitudinaler und transversaler Wirkungsquerschnitt . . .	40
2.10.5	Rück- und Ausblick	41
2.11	OPE Teil 1: freie Feldtheorie	42
2.11.1	Der freie Stromkommutator	42
2.11.2	Lichtkegel-Entwicklung der bilokalen Operatoren	44
2.11.3	Reduzierte Matrixelemente und Twist	45
2.11.4	Der hadronische Tensor in Operatoren	46
2.11.5	Parton-Modell im Bjorken-Limes der Feldtheorie	49
2.12	OPE Teil 2: wechselwirkende Feldtheorie	50
2.12.1	Der Faktorisierung zweiter Teil	51
2.12.2	Vorwärtsstreuamplitude	52
2.13	Momente der Strukturfunktionen	56
2.14	Experimentelle Situation	61
2.14.1	Die Strukturfunktion F_2	61
2.14.2	Die polarisierte Strukturfunktion	66
2.14.3	Zum R -Faktor	70
3	Operatorprodukt-Entwicklung	75
3.1	Entwicklung der Vorwärtsstreuamplitude	76
3.1.1	Entwicklung des Propagators nach Schwinger	76
3.1.2	Führender Twist-Operator zu g_1	79

3.1.3	Führender Twist-Operator zu $F_{1,2,L}$	79
3.1.4	Höherdimensionale Operatoren: Teil 1	82
3.2	Spin-Zerlegung von Operatoren	85
3.2.1	Zerlegung des Operators $P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda$	85
3.2.2	Zerlegung des Operators $P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho$	89
3.3	Höherdimensionale Operatoren: Teil 2	94
3.3.1	Höhere Twist-Operatoren für g_1	94
3.3.2	Höhere Twist-Operatoren für $F_{1,2,L}$	96
4	Die Renormalon-Methode	101
4.1	Problemstellung	101
4.2	Über die QCD-Kopplung	103
4.2.1	Skalenabhängigkeit der Kopplung	103
4.2.2	Charakterisierung von Theorien mit $\beta(g)$	104
4.2.3	Berechnung der Beta-Funktion	106
4.2.4	Die Lösung der Callan-Symanzik-Gleichung	110
4.3	Die QCD-Störungsreihe	112
4.3.1	Das asymptotische Verhalten der QCD-Störungsreihe	112
4.3.2	Borel-Summierbarkeit der Störungsreihe	115
4.3.3	Rekonstruktion der Störungskoeffizienten	117
4.3.4	IR-Renormalonen als nichtperturbative Korrektur	119
4.4	N_f -Entwicklung	121
4.4.1	Der Limes großer N_f	122
4.4.2	Naive-Non-Abelianization (NNA)	124
4.5	Definition des IR-Renormalon Verfahrens	126
4.5.1	IR-Renormalon-Pol und höherer Twist	126

4.5.2	Resummation von Loops in einem Gluon	127
4.5.3	Der effektive Gluon-Propagator	128
4.5.4	Stellenwert der Methode	129
5	Über die polarisierte Strukturfunktion g_1	133
5.1	Entwicklung des zeitgeordneten Stromprodukts	134
5.2	Regularisierung der Graphen	138
5.2.1	Selbstenergie-Graph	140
5.2.2	Vertex-Graphen	142
5.2.3	Box-Graph	150
5.3	Der Wilson-Koeffizient	154
5.3.1	Die Born-Näherung	155
5.3.2	Koeffizienten-Vergleich	156
5.4	Störungskorrekturen	157
5.4.1	Erste Ordnung a_s : der Fall $s = 0$	157
5.4.2	Zweite Ordnung a_s : die erste Ableitung bei $s = 0$	159
5.4.3	Restaurierung der Ward-Identität	162
5.4.4	Allgemeines zur Renormierung	167
5.4.5	Renormierung der Bjorken-Summenregel	168
5.4.6	Renormierung des dritten Moments von g_1^{NS}	169
5.5	Höhere Twist-Korrekturen zu g_1^{NS}	170
5.5.1	Die IR-Renormalon-Pole	171
5.5.2	Renormalon-Unsicherheit	173
5.5.3	$g_1^{\text{Tw}-4}$ im Impulsraum	174
5.5.4	Twist-4-Matrixelemente zur Bjorken-Summenregel	181
5.5.5	Twist-4-Matrixelemente zum dritten Moment	183

5.5.6	Twist-3-Korrektur zur Bjorken-Summenregel	184
6	Über die longitudinale Strukturfunktion F_L	187
6.1	Berechnung der Vorwärtsstreuamplitude	189
6.1.1	Bestimmung des relevanten Graphen	189
6.1.2	Analytische Regularisierung	190
6.1.3	Der Wilson-Koeffizient	192
6.2	Die Störungskoeffizienten	193
6.2.1	Der Baumgraph	193
6.2.2	Erste Ordnung Störungstheorie	193
6.2.3	Zweite Ordnung Störungstheorie	193
6.2.4	Dritte Ordnung Störungstheorie	195
6.2.5	Vergleich von exakten und NNA-Koeffizienten	195
6.3	Die Twist-4-Abschätzung	197
6.3.1	Operatorprodukt-Entwicklung	198
6.3.2	Renormalon-Pole	199
6.3.3	$F_L^{NS, Tw-4}$ im Impulsraum	200
6.3.4	Twist-4-Beiträge zu Momenten von F_L^{NS}	205
6.4	Bloch-Nordsieck-Aufhebung der Renormalonen	206
6.4.1	Twist-4-Renormalonen zu F_L^{NS}	207
6.4.2	Aufhebung der Renormalonen im ersten Moment	210
7	Über die chiral ungerade Verteilungsfunktion h_1	213
7.1	Der Drell-Yan-Prozeß	214
7.1.1	Faktorisierung	214
7.1.2	Born-Näherung	216
7.1.3	Der hadronische Tensor	216

7.1.4	Operator-Definition der Verteilungsfunktionen	217
7.2	Interpretation von h_1	219
7.2.1	Der Zusammenhang zum transversalen Spin	219
7.2.2	Die Ähnlichkeit von g_1 und h_1	221
7.2.3	Momente	222
7.2.4	Über den Einfluß der See-Quarks	224
7.2.5	Experimente	224
7.3	Vorwärtsstreuamplitude	225
7.3.1	Äquivalente Definition für $h_1^{\text{NS, Tw-2}}$	225
7.4	Regularisierung der Graphen	229
7.4.1	Bestimmung der Graphen	229
7.4.2	Der Baumgraph	231
7.4.3	Die Selbstenergie	231
7.4.4	Die Vertex-Korrektur	232
7.4.5	Box-Graph	236
7.4.6	Die gesamte Vorwärtsstreuamplitude	239
7.4.7	Wilson-Koeffizient	240
7.5	Störungskorrekturen	240
7.5.1	Der Wilson-Koeffizient bei $s = 0$	241
7.5.2	Die anomale Dimension für h_1	242
7.5.3	Renormierung	244
7.5.4	Störungskorrekturen zu Momenten von h_1	245
7.6	Abschätzung von Twist-4-Korrekturen	246
7.6.1	IR-Renormalon-Pole	247
7.6.2	Twist-4 zu h_1 im Impulsraum	248
7.6.3	Twist-4-Korrekturen zu Momenten von h_1	251

8 Zusammenfassung	253
A	257
A.1 Die Boreltransformation	257
A.2 Die Laplacetransformation	258
A.3 Momente	259
A.4 Die Pauli-Jordan-Funktion	261
A.5 Hypergeometrische Funktion	265
A.6 Operator-Identitäten	267
B γ-Algebra	273
B.1 Definition und Darstellung der γ -Algebra	273
B.1.1 Produkte von zwei γ -Matrizen	273
B.1.2 Hermitesche Konjugation	274
B.1.3 Die γ_5 Matrix	275
B.1.4 Der Kommutator von γ -Matrizen	275
B.1.5 <i>Sigma</i> -Tensor	276
B.1.6 ε -Tensor	277
B.1.7 Produkte von γ -Matrizen in 4-Dimensionen	278
B.1.8 Produkte von γ -Matrizen in d-Dimensionen	279
B.1.9 γ_5 in d-Dimensionen	280
B.2 Spuren	283
B.3 γ -Algebra auf dem Lichtkegel	285
B.4 Diskrete Transformationen	286
B.4.1 Ladungskonjugation	286
C Dimensionale Regularisierung	291

C.1	Motivation und Definition des Verfahrens	291
C.1.1	Motivation	291
C.1.2	Idee	292
C.1.3	Integrale über Räume mit kontinuierlicher Dimension	292
C.2	Formelsammlung für die Praxis	295
C.2.1	Wick-Rotation	295
C.2.2	Dirac-Identität	296
C.2.3	Differentiationen von Propagatoren	296
C.2.4	Parametrisierungen	299
C.2.5	Quadratische Ergänzungen	301
C.2.6	Parameterintegrale	301
C.2.7	Laurent-Reihen-Entwicklung	302
C.3	Regularisierung von Integralen	308
C.3.1	Das fundamentale Integral	308
C.3.2	Einer von zwei masselosen Propagatoren in beliebiger Potenz	309
C.3.3	Die Quark-Selbstenergie in der Borelebene	314
C.3.4	Zwei masselose Propagatoren in beliebigen Potenzen	317
C.3.5	Einer von drei masselosen Propagatoren in beliebiger Potenz	319
C.3.6	Die Vertex-Korrektur in der Borelebene	329
C.3.7	Der Box-Graph in der Borelebene	334
C.3.8	Ein spezielles Box-Graph-Integral	339
C.3.9	Integranden mit Logarithmen	341
C.3.10	Zwei skalare Propagatoren mit Masse	349
C.3.11	Der fermionische 1-Loop Polarisationsgraph	353
C.3.12	Alle regularisierten Integrale	356

Kapitel 1

Einleitung

Die zunehmende Genauigkeit, mit der die Struktur von Nukleonen oder Kernen experimentell analysiert wird, zieht die Notwendigkeit von immer genaueren theoretischen Vorhersagen für die Strukturfunktionen nach sich. So reicht beispielsweise in der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung die Beschränkung theoretischer Untersuchungen auf den Einfluß von Korrelationen weniger Teilchen im Nukleon während der Streuung — den sogenannten führenden Twist-Beiträgen — nicht mehr aus, um eine gute Beschreibung der vorhandenen Daten zu erhalten. Dies ist insbesondere für die Streuung mit mittlerem und niedrigem Impulsübertrag, also bei geringer Auflösung der Fall, bei der die Dauer der Wechselwirkung immer größer wird, die Quarks im Nukleon nicht mehr als freie Teilchen erscheinen und der Einfluß von langreichweitigen Korrelationen zwischen Quarks und Gluonen immer wichtiger wird. Noch drastischer stellt sich das Problem in der Lepton-Kern-Streuung, einem Gebiet, das in neuester Zeit ein starkes Interesse gefunden hat.

Konkreter sind solche Vielteilchen-Korrelationen — die höheren Twist-Effekte — für die Theorie in zweierlei Hinsicht von Bedeutung. Ist der Beitrag der Vielteilchen-Korrelationen zu einer Strukturfunktion gering, dient die Kenntnis desselben der Angabe eines systematischen Fehlers für die experimentelle Bestimmung der führenden Twist-Beiträge. Denn die Experimente kennen keine Unterscheidung von Beiträgen unterschiedlichen Twists. Dies ist z.B. bei der Bestimmung der QCD-Kopplung durch die Messung der Bjorken-Summenregel in der polarisierten Lepton-Nukleon-Streuung der Fall, deren Genauigkeit durch die fehlende Information über höhere Twist-Korrekturen begrenzt wird. Andererseits kann der Einfluß der Vielteilchen-Korrelationen so groß werden, daß ein theoretisches Verständnis der Experimente ohne die Einbeziehung höherer Twist-Effekte nicht möglich ist.

Dies ist für die unpolarisierte longitudinale Strukturfunktion der Fall, bei der eine große Diskrepanz von Vorhersage und Experiment vorliegt. Es gibt lediglich Parametrisierungen der höheren Twist-Korrekturen. Eine theoretische Berechnung derselben, die die Diskrepanz zum Experiment ausgleichen würde, existiert nicht. Eine Erklärung dieser Differenz ist von großer Bedeutung, da der R -Faktor — das Verhältnis von longitudinal und transversal polarisierten virtuellen Photonen bei der Streuung — in praktisch alle Wirkungsquerschnitte der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung eingeht. Außerdem ist R eine Größe die im Parton-Modell verschwindet und damit eine reine QCD-Größe ist. Die Berechnung des R -Faktors im Rahmen der QCD ist daher gleichzeitig als ein Test der QCD anzusehen.

Leider sind die Methoden für die Berechnung von Vielteilchen-Korrelationen begrenzt. Die Bestimmung über Gitter-Eichtheorien wird zwar versucht, ist aber bislang nicht erfolgreich, da die Mischung von Operatoren unterschiedlicher Dimension auf dem Gitter Schwierigkeiten bereitet. Die vielversprechendste Methode, die sich auf den Fundamenten der QCD bewegt, ist die Methode der QCD-Summenregeln. Auf der Grundlage der Faktorisierung von Amplituden in Teile kleiner und großer Skalen wird ein Balanceakt zwischen diesen beiden Bereichen versucht. Der störungstheoretische beschriebene Bereich kleiner Skalen wird auf so kleine Impulsüberträge übertragen, daß die Störungstheorie noch sinnvolle Ergebnisse liefert, aber doch auch schon mit dem nichtperturbativen hadronischen Spektrum einen Überlapp hat. In diesem engen Zwischenbereich werden die Informationen über Vielteilchen-Korrelationen gewonnen. Die QCD-Summenregeln bilden im Moment die einzige Methode, die vollständig auf der QCD fußt. Allerdings hat sie auch zwei deutliche Nachteile. Die Fehler der Vorhersagen werden mit 30% bis 100% angegeben, so daß man nicht von einer präzisen Bestimmung von Vielteilchen-Korrelationen sprechen kann. Vom praktischen Gesichtspunkt aus gesehen, steht dem großen Fehler ein immenser Rechenaufwand gegenüber.

In dieser Arbeit wird deshalb ein alternativer Zugang zu höheren Twist-Korrekturen verwendet, der in den letzten Jahren immer größere Beachtung gefunden hat: die Renormalon-Methode. Dabei werden zwei Hauptziele verfolgt. Einerseits soll die gedankliche Basis der Methode ebenso herausgearbeitet werden, wie die Grenzen bei der Interpretation der Ergebnisse. Andererseits wird die Methode auf drei Strukturfunktionen des Nukleons angewendet und die Vorhersage phänomenologisch interpretiert. Dabei wird zu prüfen sein, wie stark der Einfluß von Vielteilchen-Korrelationen auf die polarisierte Strukturfunktion g_1 und ihre Momente ist, und ob diese Korrekturen zu einer nennenswerten Einschränkung bei

der Interpretation der Experimente führen. Es wird die Frage zu beantworten sein, ob die Renormalon-Methode eine höhere Twist-Korrektur erwarten läßt, die die unerklärte Diskrepanz von Theorie und Experiment bei der unpolarisierten longitudinalen Strukturfunktion F_L aufhebt.

Die Renormalon-Methode baut auf der Resummation von Twist-2-Störungskorrekturen in der NNA-Näherung (naive nonabelianization) auf, die es erlaubt, Aussagen über die Störungskorrekturen zu den Strukturfunktionen und ihren Momenten zu machen. Diese Korrekturen sind nur in der Näherung großer Flavor-Zahlen korrekt, so daß man diese Näherung mit den exakten Störungskorrekturen in der Literatur vergleichen kann und damit Aussagen über die Qualität dieser Näherung möglich werden. Die führenden Korrekturen sind in dieser Näherung exakt.

Schließlich wird der Einfluß von Vielteilchen-Korrelationen auf die chiral ungerade Verteilungsfunktion h_1 untersucht, die in einer masselosen Theorie ausschließlich im Drell-Yan-Prozeß auftritt. Es handelt sich um eine Verteilungsfunktion, die zwar von führendem Twist ist, jedoch lange keine Beachtung gefunden hat, so daß sehr wenig über sie bekannt ist. Die theoretischen Kenntnisse über h_1 und eine physikalische Interpretation derselben werden zusammengetragen. Außerdem werden die perturbativen Korrekturen in erster Ordnung der QCD-Kopplung berechnet, die bislang noch nicht bekannt sind, und der Einfluß der höheren Twist-Korrekturen abgeschätzt.

Einleitend wird eine Zusammenfassung von Theorie und Experiment zu der tiefinelastischen Lepton-Nukleon-Streuung vorgenommen. Im Rahmen der Operator-Produkt-Entwicklung werden die Twist-2- und die Twist-4-Anteile der Operator-Matrixelemente zu den ersten Momenten der unpolarisierten Strukturfunktionen F_L und F_2 sowie zu der polarisierten Strukturfunktion g_1 bestimmt. Die dabei gefundenen Twist-4-Operator-Matrixelemente werden dann der Gegenstand der Renormalon-Abschätzung sein.

Kapitel 2

Tief-inelastische Lepton-Nukleon-Streuung

Bei der Streuung von Leptonen an Nukleonen ist es möglich, über die innere Struktur der Nukleonen Informationen zu gewinnen, wenn die Energie der Leptonen groß genug ist, um Skalen aufzulösen, die kleiner als die Ausdehnung des Nukleons sind. Dies ist bereits bei Streuenergien von einigen GeV der Fall. Mit größeren Streuenergien wird die Wechselwirkungsdauer der Leptonen mit der inneren Struktur der Nukleonen entsprechend der Unschärferelation immer kürzer, so daß bei den an heutigen Beschleunigern erreichbaren Energien das Innenleben der Nukleonen eingefroren erscheint. Dementsprechend wurde in der Theorie das Parton-Modell entworfen, in dem ein Nukleon, aus 3 nichtwechselwirkenden punktförmigen Valenzquarks aufgebaut, vorgestellt wird. Die innere Struktur des Nukleons wird mit Strukturfunktionen parametrisiert, die spezifisch für die Eigenschaften des Nukleons sind. Diese Funktionen hängen formal von 2 Größen ab: von dem durch das virtuelle Photon (W^\pm - oder Z -Boson in der schwachen Wechselwirkung) vom Lepton auf das Nukleon übertragenen Impuls und von dem Impulsanteil des getroffenen Quarks am gesamten Nukleon. In guter Näherung stellt man jedoch ein Skalenverhalten fest, d.h. die Abhängigkeit vom Impulsübertrag ist gering. Sie erhält allerdings in der feldtheoretischen Beschreibung des Streuprozesses eine wesentliche Rolle. In diesem Rahmen werden Korrekturen durch virtuelle Gluonen miteinbezogen, die bei genügend großen Energien störungstheoretisch behandelt werden können.

Die Verteilungsfunktionen der Quarks und Gluonen im Nukleon sind jedoch durch die Betrachtung allein großer Impulsüberträge nicht ausreichend bestimmt.

Vielmehr werden längere Wechselwirkungszeiten bei kleineren Impulsüberträgen ein dynamisches Verhalten der Quarks und Gluonen im Nukleonen erwarten lassen. Die Vorstellung von einer Punktwechselwirkung mit nahezu eingefrorenen Quarks muß dann aufgegeben werden, und die Bedeutung von Korrelationen mehrerer Teilchen im Nukleon erhält eine größere Bedeutung. In diesem Bereich ist die Störungstheorie nicht mehr anwendbar, so daß sich zwei Bereiche unterschiedlicher Skalen gegenüberstehen, die theoretisch unterschiedlich behandelt werden müssen. Eine der Grundvoraussetzungen bei der Behandlung von Streuprozessen ist die Faktorisierungsannahme, die nur näherungsweise bewiesen werden konnte, also der Annahme der Möglichkeit einer Trennung von Effekten großer und kleiner Skalen. Diese Zusammenhänge werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert.¹

2.1 Kinematik

2.1.1 Definition und Invarianten

Den führenden Beitrag zur DIS erhält man ganz ohne Kenntnis von der QCD-Wechselwirkung. Es ist eine elektroschwache Streuung eines Leptons (Neutrinos, Elektrons oder Myons) mittels eines Vektorbosons (Photon, W- oder Z-Boson) an einem Nukleon (siehe Abb. 2.1). Das einlaufende Lepton trage den Impuls k sowie die Polarisation η und das auslaufende den Impuls k' sowie die Polarisation η' . Der Impulsübertrag des virtuellen Austauschteilchens ist $q = k - k'$. Dieses streut an einem Nukleon mit dem Impuls p_μ , der Masse m und dem Spin s_μ , das bei der Streuung in einen Mehrteilchen-Zustand X fragmentiert, der nicht identifiziert wird und den Gesamtimpuls p_X trägt.

Der hadronische Teil des Streuprozesses wird durch den raumartigen Impulsübertrag und den Impuls des einlaufenden Nukleons charakterisiert. Aus diesen beiden Impulsen q und p können neben der festen Masse des Nukleons zwei unabhängige Lorentzskalare gebildet werden:

$$Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2, \quad x = \frac{Q^2}{2p \cdot q}, \quad p^2 = m^2, \quad (2.1)$$

¹Die Darstellung bezieht sich in erster Linie auf die Streuung von Elektronen an Nukleonen mittels Austausch eines virtuellen Photons. Auf Veränderungen der Theorie durch die Betrachtung Neutrino-Nukleon-Streuung mit W- und Z-Bosonen wird an entsprechender Stelle hingewiesen. Eine ausführliche Darstellung von Neutrino-Nukleon-Streuung findet sich in Becher, Böhm, Joos 1983; oder Roberts 1990.

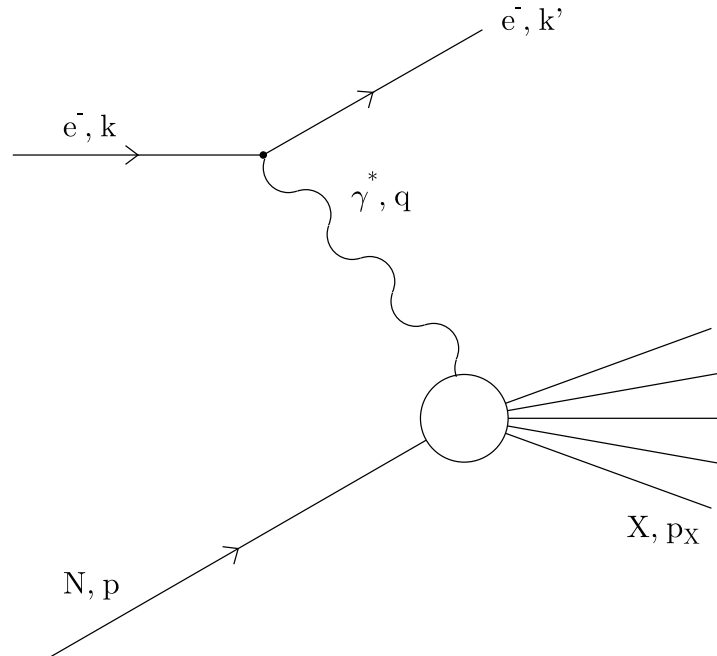


Abbildung 2.1: Die tief-inelastische-Lepton-Nukleon-Streuung in niedrigster Ordnung der QCD-Störungstheorie.

wobei $Q^2 > 0$. Der für die tief-inelastische Streuung relevante kinematische Bereich ist der großer Impulsüberträge — also Q^2 wesentlich größer als eine typische hadronische Skala von 1 GeV^2 . Im Grenzfall $Q^2 \rightarrow \infty$ spricht man vom Bjorken-Limes, wenn dabei das oben eingeführte Bjorken- x konstant bleibt. In diesem Limes wird sich eine rein partonische Interpretation der DIS als exakt erweisen.

Der Viererimpulsübertrag hängt mit dem Streuwinkel ϑ des auslaufenden Leptons relativ zur Strahlachse des einlaufenden Leptons zusammen. Vernachlässigt man die Masse der Leptonen, gilt

$$\begin{aligned} Q^2 &= -(k - k')^2 \approx 2k \cdot k' = 2EE' - 2\vec{k} \cdot \vec{k}' = 2EE'(1 - \cos \vartheta) \\ &= 4EE' \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad , \end{aligned} \quad (2.2)$$

wenn E und E' die Energien der ein- und auslaufenden Leptonen sind.

Die invariante Masse des hadronischen Endzustands W^2 ist für $x < 1$ und hinreichend großem Q^2 wesentlich größer als die Masse des einlaufenden Nukleons

$$W^2 = (p+q)^2 = m^2 + 2pq + q^2 = m^2 + 2pq(1-x) = m^2 + Q^2 \frac{1-x}{x} \gg m^2 \quad (2.3)$$

so daß der größte Teil der erzeugten Masse aus dem Streuprozeß und nicht von der einlaufenden Masse herrührt.

Häufig benutzte Größen sind außerdem die Schwerpunktsenergie

$$s = (p+k)^2 = m^2 + 2p \cdot k + \mathcal{O}(m_1^2) \quad (2.4)$$

und der Energieübertrag

$$\nu = \frac{p \cdot q}{m} \quad . \quad (2.5)$$

Der Spin-Pseudovektor kann mit Hilfe eines Einheitsvektors \vec{n} ausgedrückt werden, der im Ruhesystem des Nukleons in Richtung der Spineinstellung zeigt²:

$$s_\mu = \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{m}, \vec{n} + \frac{(\vec{p} \cdot \vec{n}) \vec{p}}{m(p_0 + m)} \right) \quad . \quad (2.6)$$

Das Quadrat dieses Spinvektors ist

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(\vec{p} \cdot \vec{n})^2}{m^2} - \vec{n}^2 - 2 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{n})^2}{m(p_0 + m)} - \frac{(\vec{p} \cdot \vec{n})^2 \vec{p}^2}{m^2(p_0 + m)^2} \\ &= -1 + (\vec{p} \cdot \vec{n})^2 \frac{(p_0 + m)^2 - 2m(p_0 + m) + m^2 - p_0^2}{m^2(p_0 + m)^2} \\ &= -1 \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Hier ist zu beachten, daß der Spinvektor häufig mit einer Massendimension definiert wird. Dann sind die Komponenten jeweils mit der Masse m zu multiplizieren und für das Quadrat gilt $s^2 = -m^2$. Das Skalarprodukt mit dem Nukleon-Vierer-Impuls verschwindet:

$$\begin{aligned} p \cdot s &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{n}}{m} p_0 - \vec{p} \cdot \vec{n} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{n} \vec{p}^2}{m(p_0 + m)} = \vec{p} \cdot \vec{n} \frac{p_0(p_0 + m) - m(p_0 + m) + m^2 - p_0^2}{m(p_0 + m)} \\ &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.1.2 Elastische Streuung

Den Grenzfall elastischer Streuung erhält man, wenn die invariante Masse des hadronischen Endzustands mit der des einlaufenden Nukleons identisch ist, also falls

²Siehe z.B. Roberts 1990, S.17.

$W^2 = m^2$ gilt. Diese Bedingung ist für $Q^2 = 2pq$ — also für $x = 1$ — erfüllt. Das virtuelle Austauschteilchen löst in diesem Fall die innere Struktur des Nukleons nicht auf, sondern streut an dem gesamten Hadron. Hierbei handelt es sich nicht um den kinematischen Bereich, der für die tief-inelastische Lepton-Nukleon-Streuung interessant ist, der durch $W^2 \gg m^2$ charakterisiert ist.

2.1.3 Ruhesystem des Nukleons

Im Ruhesystem des Nukleons verschwindet dessen Impuls und die Energie besteht allein aus der Ruhemasse

$$p_\mu = (m, \vec{0}) \quad . \quad (2.9)$$

Die Richtung der dritten Raumachse kann dann in Richtung des Impulses des Photons gewählt werden, so daß dessen Viererimpuls

$$q_\mu = (q_0, \vec{0}_\perp, q_3) = \left(\nu, \vec{0}_\perp, -\sqrt{\nu^2 + Q^2} \right) \quad (2.10)$$

mit $\nu = E - E'$ wird. Die dritte Komponente wurde mit $q^2 = -Q^2$ konsistent gewählt. Die Bjorken-Variable x erhält die Form

$$x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{2m(E - E')} = \frac{2EE' \sin^2 \frac{\vartheta}{2}}{m(E - E')} \quad . \quad (2.11)$$

Der Spin hat im Ruhesystem die Gestalt

$$s_\mu = (0, \vec{n}) \quad . \quad (2.12)$$

Der kinematische Faktor $s - m^2$ mit der Schwerpunktsenergie (2.4) erhält in der Näherung kleiner Leptonen-Massen m_l eine sehr einfache Form:

$$s - m^2 = 2p \cdot k + \mathcal{O}(m_l^2) = 2mE + \mathcal{O}(m_l^2) \quad . \quad (2.13)$$

2.1.4 Impuls-Schwerpunktssystem

Das Impuls-Schwerpunktssystem ist dadurch gekennzeichnet, daß die Impulsvektoren des virtuellen Austauschteilchens und des einlaufenden Nukleons in entgegengesetzte Richtungen zeigen und vom Betrag her identisch sind. Das System kann so gelegt werden, daß nur die dritten Komponenten der beiden Vektoren ungleich Null sind. Ist E_q der Betrag des Impulses des virtuellen Teilchens, lauten die Vektoren:

$$q_\mu = (q_0, \vec{0}_\perp, E_q) \quad p_\mu = (\sqrt{E_q^2 + m^2}, \vec{0}_\perp, -E_q) \quad . \quad (2.14)$$

Daraus erhält man unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung m^2/E_q^2

$$p \cdot q = q_0 E \sqrt{1 + \frac{m^2}{E^2} + E_q^2} \approx E_q (q_0 + E_q) \quad (2.15)$$

und

$$Q^2 = E_q^2 - q_0^2 = (E_q + q_0)(E_q - q_0) \quad , \quad (2.16)$$

woraus für das Bjorken- x folgt:

$$x = \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{E_q - q_0}{2E_q} + \mathcal{O}(m^2) \quad . \quad (2.17)$$

Der Spinvektor erhält in diesem System ein komplizierteres Aussehen:

$$s_\mu = \left(-\frac{E_q n_3}{m}, n_1, n_2, n_3 \left(1 + \frac{E_q^2}{m \sqrt{E_q^2 + m^2 + m^2}} \right) \right) \quad . \quad (2.18)$$

2.1.5 Breit-System

Das Breit-System ist so konstruiert, daß das einlaufende Nukleon sehr schnell ist. Dazu wählt man ein System, in dem es keinen Energietransfer gibt, also das virtuelle Austauscheteilchen ausschließlich Impuls in der dritten Komponente transportiert

$$q_\mu = (0, 0, 0, -Q) \quad . \quad (2.19)$$

Die ein- und auslaufenden Leptonen haben dann die gleiche Energie. Der Viererimpuls des Nukleons muß die Bedingungen $p \cdot q = \frac{Q^2}{2x}$ und $p^2 = m^2$ erfüllen:

$$p_\mu = \left(\sqrt{\frac{Q^2}{4x^2} + m^2}, 0, 0, \frac{Q}{2x} \right) \quad . \quad (2.20)$$

Dieses System ist besonders geeignet, um die Eigenschaften des Parton-Modells zu untersuchen, da sich die Partonen des schnellen Nukleons praktisch in der gleichen Richtung bewegen.

2.1.6 Lichtkegeldarstellung

Die Lichtkegeldarstellung ist mit der Darstellung im Breit-System weitgehend identisch. Auch hier hat man ein System, in dem der Impuls des Hadrons und der

Impulsübertrag groß sind:

$$\begin{aligned} (q^+, q^-, \vec{q}_\perp) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-Q, Q, \vec{0}_\perp) \quad , \\ (p^+, p^-, \vec{p}_\perp) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{Q^2}{4x^2} + m^2} + \frac{Q}{2x}, \sqrt{\frac{Q^2}{4x^2} + m^2} - \frac{Q}{2x}, \vec{0}_\perp \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Mit der Definition des Skalarprodukts auf dem Lichtkegel erhält man die Konsistenz mit den üblichen Definitionen:

$$2p \cdot q = -Q \sqrt{\frac{Q^2}{4x^2} + m^2} - \frac{Q^2}{2x} + Q \sqrt{\frac{Q^2}{4x^2} + m^2} - \frac{Q^2}{2x} = \frac{Q^2}{x} \quad (2.22)$$

und $-q^2 = Q^2$. Für Hadronen auf der Massenschale ist die +Komponente des Hadronimpulses für großen Impulsübertrag Q groß, während die -Komponente von der Ordnung m^2/Q^2 ist. Beide Komponenten sind positiv definit.

2.2 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß in Abb. 2.1 berechnet sich als Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit- und Volumeneinheit dividiert durch den Fluß der einfallenden Teilchen und der Target-Dichte. Normiert man den Ein-Teilchen-Zustand $|ps\rangle$ — wobei p der Impuls ist, und s für alle sonstigen Quantenzahlen und insbesondere für den Spin steht — auf

$$\langle p's' | ps \rangle = 2p_0 (2\pi)^3 \delta^3(p' - p) \delta_{s's} \quad , \quad (2.23)$$

so erhält man für den Wirkungsquerschnitt³

$$\sigma_{DIS} = \frac{1}{s - m^2} \sum_X \int \frac{d^3 k'}{2k'_0 (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta^4(k' + p_X - k - p) |\langle k'\eta' X | T | k\eta ps \rangle|^2 \quad , \quad (2.24)$$

wobei T das Übergangsmatrixelement ist — also die S -Matrix ohne den wechselwirkungsfreien Teil und ohne Energieimpuls-Erhaltung, die durch die δ -Distribution gesichert ist. Die Masse der einlaufenden Leptonen wurde hier vernachlässigt — m ist die Masse des Nukleons. Die möglichen Polarisierungen der einlaufenden und auslaufenden Leptonen sowie des einlaufenden Nukleons sind offengehalten. Für unpolarisierte Streuung könnte man über die Polarisierungen mitteln, was zu einem Faktor $1/8$ und drei Summen über die Polarisierungen $\eta\eta's$ führte. Über die

³Siehe dazu beispielsweise die Herleitung des Flußfaktors in Muta 1987, S.59; Joachain 1987.

hadronischen Endzustände X wird summiert, so daß es sich um einen inklusiven Wirkungsquerschnitt handelt. $s = (p + k)^2$ ist die Schwerpunktenenergie. Der Flußfaktor $s - m^2$ ist in der Näherung masseloser Leptonen richtig, so daß in der gleichen Näherung auch

$$s - m^2 = (p + k)^2 - m^2 = p^2 + 2p \cdot k + k^2 - m^2 = 2p \cdot k + \mathcal{O}(m_l^2) \quad (2.25)$$

gilt, wenn m_l die Masse des Leptons ist.

Das Übergangsmatrixelement für Elektron-Nukleon-Streuung erhält man durch die Spinoren eines ein- und auslaufenden Elektrons, verbunden durch eine Vektor-Kopplung an das virtuelle Photon, das durch einen Propagator dargestellt wird und seinerseits an einen elektromagnetischen Strom j_μ zwischen hadronischem Anfangs- und Endzustand ankoppelt⁴

$$\langle k' \eta' X | T | k \eta p s \rangle = \bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^\rho u_\eta(k) \frac{e^2}{Q^2} \langle X | j_\rho(0) | p s \rangle \quad (2.26)$$

In diesem Ausdruck deutet sich eine Faktorisierung von leptonischem und hadronischem Teil der Streuung an. Für den Wirkungsquerschnitt ist

$$\begin{aligned} \sigma_{DIS}^{eN} &= \frac{2}{p \cdot k} \frac{\alpha_{em}^2}{Q^4} \sum_X \int \frac{d^3 k'}{2k'_0 (2\pi)} (2\pi)^4 \delta^4(p_X - p - q) \\ &\quad (\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^\mu u_\eta(k))^* (\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^\nu u_\eta(k)) \langle p s | j_\mu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p s \rangle \\ &= \frac{1}{p \cdot k} \frac{\alpha_{em}^2}{Q^4} \int \frac{d^3 k'}{k'_0} L^{\mu\nu}(k, k') W_{\mu\nu}(p, q, s) \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit den leptonischen und hadronischen Tensoren⁵

$$L^{\mu\nu}(k, k') = (\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^\mu u_\eta(k))^* (\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^\nu u_\eta(k)) \quad , \quad (2.28)$$

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{1}{2\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p_X - p - q) \langle p s | j_\mu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p s \rangle \quad (2.29)$$

und $\alpha_{em} = e^2/(4\pi)$. Die Hermitezität der Ströme ist nur im Fall der elektromagnetischen Streuung gewährleistet und wurde deshalb nicht benutzt. Es ist zu beachten, daß der so definierte hadronische Tensor auch für die schwache Streuung korrekt ist, wenn man den schwachen Strom für den elektromagnetischen einsetzt.

⁴Der Fall von Neutrino-Nukleon-Streuung unterscheidet sich hier durch einen komplizierteren Propagator für ein massives Eichboson. Außerdem wäre im hadronischen Matrixelement ein schwacher Strom einzusetzen, so daß die Ladung e^2 nicht auftauchen würde.

⁵Die Vorfaktoren des leptonischen und hadronischen Teils des Wirkungsquerschnitts sind Konvention.

Aus (2.27) kann man auch den differentiellen Wirkungsquerschnitt herleiten, der die Wahrscheinlichkeit mißt, das auslaufende Elektron in einem speziellen Volumenelement des Phasenraums wiederzufinden:

$$k'_0 \frac{d\sigma_{DIS}^{eN}}{d^3k'} = \frac{1}{p \cdot k} \frac{\alpha_{em}^2}{Q^4} L^{\mu\nu}(k, k') W_{\mu\nu}(p, q, s) \quad . \quad (2.30)$$

Dies ist der für inklusive Messungen relevante Ausdruck, in denen der hadronische Endzustand nicht betrachtet und allein der Impuls des auslaufenden Elektrons gemessen wird.

Es ist häufig notwendig, den doppelt differentiellen inklusiven Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von ν und Q^2 zu notieren. Ist ϑ der Winkel der auslaufenden Leptonen gegenüber dem Strahl der einfallenden Leptonen, gilt $dQ^2/d\vartheta = 2k_0 k'_0 \sin \vartheta$. Im Ruhesystem des Nukleons gilt außerdem $d\nu/dk'_0 = -1$. Daraus erhält man

$$k'_0 \frac{d\sigma}{d^3k'} = \frac{p \cdot k}{m\pi} \frac{d\sigma}{d\nu dQ^2} \quad , \quad (2.31)$$

woraus mit (2.30) folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{m\pi \alpha_{em}^2}{(p \cdot k)^2 Q^4} L^{\mu\nu}(k, k') W_{\mu\nu}(p, q, s) \quad . \quad (2.32)$$

Dieses Resultat wurde zwar im Ruhesystem des Nukleons hergeleitet, enthält aber ausschließlich kovariante Größen und muß deshalb unabhängig vom Koordinatensystem richtig sein.

2.3 Leptonischer Tensor

Betrachtet man polarisierte einlaufende und unpolarisierte auslaufende Leptonen, muß in (2.28) über die Polarisierungen der auslaufenden Leptonen summiert werden. Dann kann der leptonische Tensor mit Hilfe der Projektionsoperatoren

$$\sum_{\eta} u_{\eta}(k) \bar{u}_{\eta}(k) = \not{p} + m \quad , \quad (2.33)$$

bzw.

$$u_{\eta}(k) \bar{u}_{\eta}(k) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) (1 + \gamma_5 \not{\epsilon}) \xrightarrow{m=0} \frac{1}{2} \not{p} (1 + \gamma_5 \eta) \quad (2.34)$$

in die Form einer Spur gebracht werden:

$$L^{\mu\nu}(k, k') = \frac{1}{2} \sum_{\eta'} (\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^{\mu} u_{\eta}(k))^\dagger (\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^{\nu} u_{\eta}(k))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\eta'} \left(u_{\eta}^{\dagger}(k) (\gamma^{\mu})^{\dagger} \gamma^0 u_{\eta'}(k') \right) \left(\bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^{\nu} u_{\eta}(k) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\eta'} \bar{u}_{\eta}(k) \gamma^{\mu} u_{\eta'}(k') \bar{u}_{\eta'}(k') \gamma^{\nu} u_{\eta}(k) \\
&= \frac{1}{2} \bar{u}_{\eta}(k) \gamma^{\mu} (\not{k}' + m_l) \gamma^{\nu} u_{\eta}(k) \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ u_{\eta}(k) \bar{u}_{\eta}(k) \gamma^{\mu} (\not{k}' + m_l) \gamma^{\nu} \} \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{k} + m_l) (1 + \gamma_5 \not{s}) \gamma^{\mu} (\not{k}' + m_l) \gamma^{\nu} \} \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} \{ (\not{k} + m_l) \gamma^{\mu} (\not{k}' + m_l) \gamma^{\nu} \} \\
&\quad + \frac{m_l}{4} \text{Tr} \{ \not{k} \gamma_5 \not{s}^l \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \} + \frac{m_l}{4} \text{Tr} \{ \gamma_5 \not{s}^l \gamma^{\mu} \not{k}' \gamma^{\nu} \} \\
&= k^{\mu} k'^{\nu} + k^{\nu} k'^{\mu} - g^{\mu\nu} k \cdot k' + g^{\mu\nu} m_l^2 - i m_l \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k_{\alpha} s_{\beta}^l + i m_l \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} k'_{\alpha} s_{\beta}^l \\
&= k^{\mu} k'^{\nu} + k^{\nu} k'^{\mu} - g^{\mu\nu} k \cdot k' + g^{\mu\nu} m_l^2 - i m_l \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha} s_{\beta}^l \quad , \quad (2.35)
\end{aligned}$$

wobei (B.8), (B.107) und (B.106) sowie die Eigenschaft, daß eine Spur über eine ungerade Zahl von γ -Matrizen identisch verschwindet, benutzt wurden. In dieser Darstellung des leptonischen Tensors ist die Masse der Leptonen exakt berücksichtigt. Im chiralen Limes ist lediglich der Term von der Ordnung m_l^2 zu vernachlässigen. Im antisymmetrischen Term kann die Masse durch die Definition eines Spinpseudovektors mit Massendimension eliminiert werden. Durch diese Umdefinition erhält man den gleichen antisymmetrischen Teil, wie durch die Wiederholung der Rechnung mit Projektionsoperatoren in der Helizitätsdarstellung (2.34). Der Spin kann dann ausschließlich parallel oder antiparallel zum Impuls des Leptons stehen und wird deshalb durch $s_{\mu} = \eta p_{\mu}$ definiert.

In der Darstellung (2.27) des inklusiven differentiellen Wirkungsquerschnitts wurde die Masse der Leptonen bereits vernachlässigt, so daß dies auch hier ohne zusätzliche Annahmen möglich ist. Dann gilt

$$2k \cdot k' = 2k \cdot k' - k^2 - k'^2 + k^2 + k'^2 = -(k - k')^2 + \mathcal{O}(m_l^2) = Q^2 + \mathcal{O}(m_l^2) \quad , \quad (2.36)$$

denn die Leptonen liegen auf der Massenschale. Der leptonische Tensor (2.35) lautet damit:

$$L^{\mu\nu}(k, k') = k^{\mu} k'^{\nu} + k^{\nu} k'^{\mu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} Q^2 - i \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} q_{\alpha} s_{\beta}^l + \mathcal{O}(m_l^2) \quad . \quad (2.37)$$

Hier wurde bereits die Masse in den Spin hineindefiniert. Der so hergeleitete leptonische Tensor enthält einen gegenüber der Vertauschung der Lorentzindizes μ und ν

symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil. Letzteren erhält man nur im Fall von polarisierten einlaufenden Leptonen. Dies hat zur Folge, daß für unpolarisierte Leptonen ausschließlich der symmetrische Teil des hadronischen Tensors (2.29) wesentlich ist, während eine antisymmetrischer Teil des hadronischen Tensors nur im Fall polarisierter Leptonen relevant ist.

2.4 Hadronischer Tensor

In diesem Abschnitt soll der hadronische Tensor (2.29) weiter analysiert und vereinfacht werden. Zunächst kann die am Vertex impulserhaltende δ -Distribution in ein vierdimensionales Integral über die gesamte Raum-Zeit umgewandelt werden.

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{1}{2\pi} \sum_X \int d^4x e^{-i(p_X - p - q)x} \langle ps | j_\mu^\dagger(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | ps \rangle \quad . \quad (2.38)$$

Der Teil der Exponentialfunktion mit den hadronischen Impulsen ist gerade der Translationsoperator, so daß man mit

$$\langle ps | e^{-i(p_X - p)x} j_\mu(0) | X \rangle = \langle ps | j_\mu(x) | X \rangle \quad (2.39)$$

und der dann anwendbaren Vollständigkeitsrelation $\sum |X\rangle\langle X| = 1$ den hadronischen Tensor als Fourier-transformiertes Matrixelement eines nichtlokalen Stromprodukts zwischen Nukleonzuständen erhält:

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | j_\mu^\dagger(x) j_\nu(0) | ps \rangle \quad . \quad (2.40)$$

Dies ist die Lorentz-kovariante Darstellung des hadronischen Tensors.

Aufgrund von Energieerhaltung zeigt sich, daß das nichtlokale Stromprodukt auch durch den entsprechenden Stromkommutator ersetzt werden kann. Dies wird deutlich, wenn man sich das Integral mit vertauschten Strömen anschaut:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}(p, q, s) &:= \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | j_\nu(0) j_\mu^\dagger(x) | ps \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_X \int d^4x e^{iqx} \langle ps | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | e^{-i(p - p_X)x} j_\mu^\dagger(0) | ps \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(p - p_X - q) \langle ps | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu^\dagger(0) | ps \rangle \quad . \quad (2.41) \end{aligned}$$

Die in der Distribution geforderte Bedingung $p^\mu - q^\mu = p_X^\mu$ kann nicht erfüllt werden, denn

$$(p - q)^2 = m^2 - 2p \cdot q - Q^2 = m^2 - Q^2 \frac{1+x}{x} < m^2 \quad . \quad (2.42)$$

Das Kleinerzeichen folgt aus $Q^2 > 0$. Die Masse des Nukleons ist die kleinste im Spektrum der Baryonen, woraus die kinematische Bedingung $p_X^2 > m^2$ folgt, die durch (2.42) verletzt würde. $V_{\mu\nu}$ muß deshalb verschwinden, und das Stromprodukt darf durch den Stromkommutator ersetzt werden:

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | [j_\mu^\dagger(x), j_\nu(0)] | ps \rangle . \quad (2.43)$$

Die Forderung nach Kausalität erzwingt für den Kommutator zeitartige Abstände $x^2 > 0$ — für raumartige Abstände verschwindet der Kommutator identisch.⁶ Das bilokale Stromprodukt kann einerseits im Rahmen der Operatorprodukt-Entwicklung in lokale Operatoren entwickelt werden.⁷ Andererseits können auch allgemeine Forderungen an den hadronischen Tensor benutzt werden, um die Tensorstruktur desselben zu ermitteln.⁸

Die elektromagnetischen Ströme sind Lorentzvektoren, hermitesch und Erhaltungsgrößen, d.h. es gilt

$$j_\mu^\dagger(x) = j_\mu(x) \quad , \quad \partial^\mu j_\mu = 0 \quad . \quad (2.44)$$

Damit folgt für $W_{\mu\nu}^{(eN)}$, daß es sich um einen Lorentz-Tensor zweiter Stufe handelt, der eichinvariant ist

$$q^\mu W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q, s) = q^\nu W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q, s) = 0 \quad . \quad (2.45)$$

Außerdem folgt aus (2.29) für hermitesche Ströme die Symmetrie unter komplexer Konjugation:

$$W_{\nu\mu}^{(eN)\dagger} = W_{\mu\nu}^{(eN)} \quad . \quad (2.46)$$

Diese Eigenschaften der Elektron-Nukleon-Streuung werden bei der Analyse der Lorentzstruktur des hadronischen Tensors gebraucht werden.

2.5 Vorwärtsstreuamplitude

Der hadronische Tensor (2.43) ist als das Quadrat einer Amplitude eingeführt worden. Der Endzustand X in dieser Amplitude ist nach der Quadrierung der Amplitude ein Zwischenzustand X , der auf der Massenschale liegt. Verallgemeinert man

⁶Siehe dazu z.B. Bogoliubov, Shirkov 1959, Paragraph 18.

⁷Siehe dazu Kap. 2.11.

⁸Dies wird in Kap. 2.6 durchgeführt.

diesen Zwischenzustand zu einem virtuellen Zustand, erhält man für den hadronischen Tensor die Struktur einer Vorwärtsstreuamplitude. Die gesuchte Information über den realen Streuprozess kann als Massenpol der Vorwärtsstreuamplitude wiedergefunden werden. Damit erhält man die Aussage des optischen Theorems⁹, nämlich daß der Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude mit dem Quadrat der Amplitude — hier dem hadronischen Tensor — übereinstimmt. Dieser Zusammenhang soll in diesem Kapitel explizit gemacht werden.

Ausgehend von der Definition der Vorwärtsstreuamplitude

$$T_{\mu\nu}(p, q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle p | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | p \rangle \quad (2.47)$$

— hier werden alle notwendigen Quantenzahlen durch p abgekürzt, und T bedeutet das zeitgeordnete Produkt der darauf folgenden Operatoren — ist der Zusammenhang mit dem hadronischen Tensor zu rekonstruieren. Unter Verwendung der Vollständigkeitsrelation für hadronische Zustände und der Translationsinvarianz des Matricelements folgt

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(p, q) &= i \sum_X \int d^4x e^{-i(p_X - p - q)x} \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle \Theta(x_0) \\ &+ i \sum_X \int d^4x e^{-i(p - p_X - q)x} \langle p | j_\nu(0) | X \rangle \langle X | j_\mu(0) | p \rangle \Theta(-x_0) \quad . \quad (2.48) \end{aligned}$$

Die Integration über die Raumkomponenten kann ausgeführt werden und ergibt eine δ -Distribution. Der zweite Summand in (2.48) verschwindet wie $V_{\mu\nu}$ in (2.41) aus Energieerhaltungsgründen, so daß im folgenden nur noch der erste Term

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(p, q) &= i(2\pi)^3 \sum_X \delta^3(\vec{p}_X - \vec{p} - \vec{q}) \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle \\ &\int dx_0 e^{-i(p_{X0} - p_0 - q_0)x_0} \Theta(x_0) \quad (2.49) \end{aligned}$$

untersucht wird. Die Theta-Distribution wird in der Integral-Schreibweise

$$\Theta(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega x_0} \frac{1}{\omega + i\varepsilon} \quad (2.50)$$

eingesetzt und die ω - und die x_0 -Integration vertauscht, wobei die letztere eine weitere δ -Distribution liefert, mit der die erstere ausgeführt werden kann:

$$T_{\mu\nu}(p, q) = (2\pi)^2 \sum_X \delta^3(\vec{p}_X - \vec{p} - \vec{q}) \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle$$

⁹Siehe z.B. die Darstellung des optischen Theorems in Joachain 1987.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\varepsilon} \int dx_0 e^{-i(p_{X0} + \omega - p_0 - q_0)x_0} \\
&= (2\pi)^3 \sum_X \delta^3(\vec{p}_X - \vec{p} - \vec{q}) \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\omega + i\varepsilon} \delta(p_0 + q_0 - p_{X0} - \omega) \\
&= (2\pi)^3 \sum_X \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta^3(\vec{p}_X - \vec{p} - \vec{q})}{p_{X0} - p_0 - q_0 - i\varepsilon} \quad . \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude wird durch den Pol bei $p_{X0} = p + q + i\varepsilon$ bestimmt. Wegen der Energieerhaltung kann der zweite Term in (2.48), dessen Nenner $p_{X0} + q_0 - p_0 - i\varepsilon$ wäre, keinen Pol haben kann und deshalb auch nicht für den Imaginärteil relevant werden. Der Pol wird mit der Dirac-Identität (C.16) ausgewertet, so daß der Imaginärteil von $T_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\text{Im } T_{\mu\nu}(p, q) &= \pi(2\pi)^3 \sum_X \delta^3(\vec{p}_X - \vec{p} - \vec{q}) \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle \delta(p_{X0} - p_0 - q_0) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^4 \sum_X \delta^4(\vec{p}_X - \vec{p} - \vec{q}) \langle p | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p \rangle \quad (2.52)
\end{aligned}$$

lautet. Der Vergleich dieses Ausdrucks mit dem hadronischen Tensor in der Form (2.29) ergibt den gesuchten Zusammenhang:

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{1}{\pi} \text{Im } T_{\mu\nu}(p, q, s) \quad . \quad (2.53)$$

2.6 Strukturfunktionen des Nukleons

Aus der Eichinvarianz des hadronischen Tensors (2.45) kann seine Lorentz-Struktur bestimmt werden. Betrachtet man zunächst unpolarisierte Nukleonen, kann man mit den Impulsen p und q ausschließlich die Strukturen

$$g_{\mu\nu}, p_\mu p_\nu, p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu, q_\mu q_\nu, i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} p^\rho q^\lambda \quad (2.54)$$

bilden. Dabei wurde der Term $p_\mu q_\nu$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgeteilt. Der antisymmetrische Teil ist paritätsverletzend, da der total antisymmetrische Tensor gegenüber Paritätstransformationen ungerade ist. Er trägt deswegen ausschließlich zur Neutrino-Nukleon-Streuung bei, da in der schwachen Wechselwirkung paritätsverletzende Prozesse existieren. In der elektromagnetischen Streuung sind alle Vertizes paritätserhaltend, so daß die Struktur $i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} p^\rho q^\lambda$ dafür nicht relevant ist. Der unpolarisierte Anteil des hadronische Tensors besteht folglich ausschließlich aus symmetrischen Lorentzstrukturen, die bei

der Kontraktion mit dem unpolarisierten leptonischen Tensor (2.37) einen Beitrag zum inklusiven Wirkungsquerschnitt liefern.

Betrachtet man hingegen polarisierte Nukleonen, werden die möglichen Lorentzstrukturen vielfältiger. Unter Hinzunahme eines Pseudo-Lorentzvektors für den Spin des Nukleons sind die Strukturen

$$i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}q^\rho p^\lambda q \cdot s, i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}p^\rho s^\lambda, i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}q^\rho s^\lambda, p_\mu s_\nu + p_\nu s_\mu, q_\mu s_\nu + q_\nu s_\mu \quad (2.55)$$

möglich. Terme wie $s_\mu s_\nu$ können nicht auftreten, da sie mehrere Spin-Pseudovektoren enthalten. Von den oben aufgeführten Strukturen sind die letzten beiden gegenüber Paritätstransformationen ungerade und sind deshalb nur für die schwachen Streuprozesse von Bedeutung.

Beschränkt man sich auf elektromagnetische Streuung, wird der hadronische Tensor zu einer Linearkombination der paritätserhaltenden Strukturen:

$$W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) = a_1 g_{\mu\nu} + a_2 p_\mu p_\nu + a_3 (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu) + a_4 q_\mu q_\nu + a_5 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}q^\rho p^\lambda q \cdot s + a_6 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}p^\rho s^\lambda + a_7 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}q^\rho s^\lambda \quad . \quad (2.56)$$

Dabei sind die Koeffizienten a_1, \dots, a_7 komplexe, skalare Funktionen von den Invarianten der Streuung (2.1). Es ist zu beachten, daß die in μ, ν antisymmetrischen Strukturen, die für polarisierte Nukleonen auftreten, nur dann einen Beitrag zum inklusiven Wirkungsquerschnitt liefern, wenn der leptonische Tensor auch antisymmetrische Anteile enthält — also wenn die Leptonen ebenfalls polarisiert betrachtet werden.

(2.56) muß wegen (2.46) gegenüber Vertauschung der Lorentzindizes und gleichzeitiger hermitescher Konjugation invariant sein:

$$W_{\nu\mu}^{(eN)\dagger}(p, q) = a_1^* g_{\mu\nu} + a_2^* p_\nu p_\mu + a_3^* (p_\nu q_\mu + q_\nu p_\mu) + a_4^* q_\nu q_\mu - a_5^* i\varepsilon_{\nu\mu\rho\lambda}q^\rho p^\lambda q \cdot s - a_6^* i\varepsilon_{\nu\mu\rho\lambda}p^\rho s^\lambda - a_7^* i\varepsilon_{\nu\mu\rho\lambda}q^\rho s^\lambda \quad . \quad (2.57)$$

Damit dies mit (2.56) identisch ist, müssen alle Koeffizienten reelle Funktionen sein, also

$$a_i^* = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, 7 \quad . \quad (2.58)$$

Aufgrund der Eichinvarianz (2.45) muß außerdem die Kontraktion von (2.56) mit q^μ Null ergeben:

$$\begin{aligned} q^\mu W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) &= a_1 q_\nu + a_2 p \cdot q p_\nu + a_3 p \cdot q q_\nu + a_3 q^2 p_\nu + a_4 q^2 q_\nu \\ &\quad + a_5 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}q^\rho p^\lambda q^\mu q \cdot s + a_6 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}p^\rho s^\lambda q^\mu + a_7 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}q^\rho s^\lambda q^\mu \\ &= (a_1 + a_3 p \cdot q + a_4 q^2) q_\nu + (a_2 p \cdot q + a_3 q^2) p_\nu + a_6 i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda}p^\rho s^\lambda q^\mu \quad . \end{aligned} \quad (2.59)$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 p \cdot q + a_4 q^2 &= 0 \quad , \\ a_2 p \cdot q + a_3 q^2 &= 0 \quad , \\ a_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

erfüllt sind. Für a_5 und a_7 erhält man hier keine weitere Bedingung. Die Kontraktion mit q^ν ergibt keine neuen Anforderungen an die Koeffizienten-Funktionen, da der hadronische Tensor in symmetrische und antisymmetrische Strukturen zerlegt wurde. Das obige Gleichungssystem enthält drei Gleichungen und fünf Unbekannte. Setzt man die zweite Gleichung

$$a_3 = -a_2 \frac{p \cdot q}{q^2} = \frac{a_2}{2x} \quad (2.61)$$

in die erste ein, erhält man die Beziehung

$$a_4 = \frac{a_1}{Q^2} + \frac{a_2}{4x^2} \quad . \quad (2.62)$$

Setzt man diese Lösungen in die allgemeine Form des unpolarisierten hadronischen Tensors (2.56) ein, verbleiben nur noch vier unabhängige Koeffizienten:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) &= a_1 \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) + a_2 \left(p_\mu p_\nu + \frac{p_\mu q_\nu}{2x} + \frac{q_\mu p_\nu}{2x} + \frac{q_\mu q_\nu}{4x^2} \right) \\ &\quad + a_5 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho p^\lambda q \cdot s + a_7 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho s^\lambda \\ &= a_1 \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) + a_2 \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) \\ &\quad + a_5 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho p^\lambda q \cdot s + a_7 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho s^\lambda \quad . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Diese sind wegen (2.58) alle reell und hängen von den Skalaren Q^2 und x ab. Die als Strukturfunktionen bezeichneten Koeffizienten werden üblicherweise in dimensionsloser Form notiert

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) &= -F_1(x, Q^2) \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) + F_2(x, Q^2) \frac{1}{p \cdot q} \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) \\ &\quad + i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho \frac{1}{p \cdot q} \left(s^\lambda \left(g_1(x, Q^2) + g_2(x, Q^2) \right) + p^\lambda \frac{s \cdot q}{p \cdot q} g_2(x, Q^2) \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.64)$$

da die so definierten Funktionen F_1, F_2, g_1, g_2 die Eigenschaft haben, im Bjorken-Limes zu skalieren.¹⁰

¹⁰Siehe dazu das Kap. 2.9 zum Parton-Modell.

2.7 Das Parton-Modell

2.7.1 Voraussetzungen

Das Parton-Modell wurde um 1970 als Beschreibung der inneren Struktur von relativistischen Hadronen eingeführt¹¹ und auf verschiedene harte Streuprozesse angewendet, wie DIS, e^+e^- -Vernichtung in Hadronen, Drell-Yan Prozeß und hoch-energetische Hadron-Hadron-Streuung. In diesem Modell stellt man sich ein sich schnell bewegendes Hadron als Partonen-Jet vor. Dessen Konstituenten bewegen sich alle in der gleichen Richtung wie das Hadron und teilen dessen Impuls unter sich auf. Die Streuung eines Leptons an dem Hadron wird dann bei genügend großen Energien zu einer Streuung der Leptonen an den Partonen. Diese Partonen sollen während der Wechselwirkung mit dem Lepton als frei angesehen werden, d.h. selbst nicht von den anderen Partonen im Nukleon beeinflußt werden.

Wegen dieser Forderungen müssen die Partonen des Nukleons in der Summe die Eigenschaften des Nukleons ergeben. Etwaige experimentelle Abweichungen sind in diesem Modell auf die Wechselwirkung der Partonen untereinander zurückzuführen, hängen also gerade mit der Dynamik der Partonen im Nukleon zusammen. Es wird sich zeigen, daß in einem kinematischen Grenzbereich — dem Bjorken-Limes — die Partonen als freie Teilchen gedacht werden können. Die endlichen Energien realer Streuexperimente erfordern jedoch die Berücksichtigung von Korrekturen zum Parton-Modell.

2.7.2 Lichtkegeldominanz im Bjorken-Limes

In der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung interessiert man sich für den kinematischen Bereich großer Impulsüberträge Q^2 . Führt man den Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ so durch, daß Bjorken- x dabei konstant ist, muß $p \cdot q = m\nu$ in der gleichen Weise wie Q^2 wachsen, also auch der Impuls des Hadrons bzw. der Energieübertrag ν gegen unendlich streben. Die Frage ist, welchen Abständen dieser kinematische Grenzbereich entspricht.

Um das zu verstehen, betrachte man den hadronischen Tensor (2.43). Einerseits folgt aus der Kausalitätsforderung, daß allein zeitartige Abstände relevant sind — also $x^2 > 0$ gelten muß. Andererseits folgt aus dem Faktor $\exp(iqx)$ im Integranden, daß der hadronische Tensor von nicht zu großen $q \cdot x$ dominiert wird, da für große

¹¹Feynman 1969, 1972; Bjorken, Paschos 1969.

Exponenten der Integrand wegen der schnellen Oszillation ausgemittelt wird. Es ist daher zu untersuchen, welches Verhalten der Exponent im Bjorken-Limes zeigt und welche Auswirkung dieses auf die Bedingung $q \cdot x < C$ hat.

Dazu wird die Kinematik des Streuprozesses im Ruhesystem des Nukleons untersucht. Der Viererimpuls des virtuellen Austauschteilchens ist dann durch (2.10) gegeben. Die Wurzel in der 3-Komponente kann im Bjorken-Limes in Q^2/ν^2 entwickelt werden:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\nu^2 + Q^2} &= -\nu\sqrt{1 + \frac{Q^2}{\nu^2}} = -\nu\sqrt{1 + \frac{2mx}{\nu}} = -\nu\left(1 + \frac{mx}{\nu}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ &= -\nu - mx + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad , \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei ausgenutzt wurde, daß x im Bjorken-Limes konstant ist. Unter Vernachlässigung der Terme, die mit $1/\nu$ unterdrückt sind, wird der Viererimpuls in Lichtkegelkoordinaten notiert:

$$\begin{aligned} q^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 + q_3) = -\frac{mx}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \\ q^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(q_0 - q_3) = \frac{2\nu + mx}{\sqrt{2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

sowie $\vec{q}_\perp = \vec{0}_\perp$. Man erkennt, daß q^+ im Bjorken-Limes endlich bleibt, während die q^- divergiert. Die zur Diskussion stehende Bedingung erhält in dieser Darstellung die Form:

$$q_\mu x^\mu = q^+ x^- + q^- x^+ - \vec{q}_\perp \vec{x}_\perp = -\frac{mx}{\sqrt{2}}x^- + \frac{2\nu + mx}{\sqrt{2}}x^+ < C \quad . \quad (2.67)$$

Um diese Forderung zu erfüllen, muß für die beiden Komponenten der Ortskoordinate

$$|x^-| < \frac{\sqrt{2}C}{mx} \quad , \quad |x^+| < \frac{\sqrt{2}C}{2\nu + mx} \quad (2.68)$$

gelten. Daraus folgt für den raum-zeitlichen Abstand:

$$0 \leq x_\mu x^\mu = 2x^+x^- - \vec{x}_\perp^2 < 2x^+x^- < \frac{4C^2}{2mx\nu} = \frac{4C^2}{Q^2} \quad . \quad (2.69)$$

Die untere Schranke für den Abstand ist Null, und die obere Schranke geht im Bjorken-Limes (bei $Q^2 \rightarrow \infty$) ebenfalls gegen Null. Der hadronische Tensor wird im Bjorken-Limes von kleinen Raum-Zeit-Abständen dominiert, so daß der Streuprozeß nahezu auf dem Lichtkegel stattfindet.¹²

¹²Die Lichtkegel-Dominanz ist Grundvoraussetzung für die später durchzuführende Lichtkegel-Entwicklung von Operatoren in in Kap. 2.11.

Interpretiert man x^+ als Quasi-Zeit, wird die Zeitskala, auf der die Wechselwirkung der Partonen untereinander stattfindet, im Ruhesystem des Nukleons von der Ordnung der inversen Masse — also $\sim 1/m$ — sein. Eine Lorentz-Transformation in ein System mit sehr schnellem Nukleon, wie dem Breit-System, dilatiert die Quasi-Zeit-Skala mit einem Faktor Q , so daß die resultierende Quasi-Zeit-Skala Q/m ist. Im Bjorken-Limes wird die typische Wechselwirkungs-Quasi-Zeit deshalb unendlich groß.

Die Zeitskala der Wechselwirkung des virtuellen Photons mit den Partonen im Nukleon ist im Vergleich zu der Wechselwirkungszeit der Partonen untereinander wesentlich kleiner, denn der Impuls des Photons ist im Ruhesystem proportional zu Q , so daß sich die dazu konjugierte Lichtkegel-Zeit x^+ wie $1/Q$ verhält. Während im Ruhesystem des Nukleons die Wechselwirkungszeit der Partonen untereinander konstant ist, geht die des Streuprozesses im Bjorken-Limes gegen Null. Im Breit-System entspricht das einer endlichen Wechselwirkungszeit der Streuung gegenüber einer divergenten Zeitskala für die Wechselwirkung der Partonen. In beiden Systemen kommt man zu dem Ergebnis, daß die Annahme der eingefrorenen, freien Partonen im Nukleon im Bjorken-Limes gerechtfertigt ist.

Betrachtet man den Streuprozess im Breitsystem mit Lichtkegelkoordinaten, spielt sich die Streuung auf den beiden Achsen des Lichtkegels ab: Das Hadron besteht zunächst aus Partonen, deren Wechselwirkungspunkte in x^+ -Richtung stark ausgeschmiert und in x^- -Richtung lokalisiert sind. Nach der Wechselwirkung des Austauschteilchens mit einem der quasi-freien Partonen, erhält das getroffene Parton eine große x^- -Komponente und hadronisiert.

2.8 Faktorisierung

Die Interpretation des Nukleons als Summe freier Partonen legt es nahe, den Wirkungsquerschnitt der Lepton-Nukleon-Streuung als inkohärente Summe der Wirkungsquerschnitte für alle Partonen darzustellen. Unter Vernachlässigung eines möglichen Transversalimpulses der Partonen, kann deren Viererimpuls p_μ^a als Anteil des Gesamtimpulses des Nukleons geschrieben werden: $p_\mu^a = \xi^a p_\mu$, wobei durch a die jeweilige Quarksorte bezeichnet wird. Im Ruhesystem des Nukleons bedeutet dies $m^a = \xi^a m$ — im Breit-System unter Vernachlässigung der Nukleon-Masse $p_3^a = \frac{\xi^a Q}{2x}$.

Die Streuung an einem Parton, ist dann die Streuung an einem Punktteilchen

mit dem Impuls $\xi^a p_\mu$. Der zugehörige Wirkungsquerschnitt kann völlig analog zu (2.30) notiert werden:

$$k'_0 \frac{d\sigma_{DIS}^{ea}}{d^3k'} = \frac{1}{\xi^a p \cdot k} \frac{\alpha_{em}^2}{Q^4} L^{\mu\nu}(k, k') w_{\mu\nu}^a(\xi^a p, q, s^a) \quad (2.70)$$

Dazu wurde lediglich der Nukleonimpuls durch den Impulsanteil des Partons ersetzt und ein hadronischer Tensor für das Parton $w_{\mu\nu}^a(\xi^a p_\mu, q, s^a)$ verwendet. Die Polarisation des Nukleons s muß sich natürlich als die Summe der Polarisation aller Partonen s^a ergeben.

Um den Wirkungsquerschnitt für die Streuung am Nukleon als inkohärente Summe über die Streuung an allen Partonen im Nukleon darzustellen, wird eine Verteilungsfunktion eingeführt, die die Wahrscheinlichkeit für die Streuung an einem Parton der Sorte a mit Impulsanteil ξ^a und Polarisation λ angibt. Die Verteilungsfunktion $f_{a/N}^\lambda(\xi^a)$ dient dann als Gewichtsfunktion in dem Integral über alle möglichen Impulsanteile der Partonen. Addiert man außerdem alle möglichen Partonarten a auf, erhält man als inkohärente Summe¹³

$$k'_0 \frac{d\sigma_{DIS}^{eN}}{d^3k'} = \sum_a \int_0^1 d\xi^a f_{a/N}^\lambda(\xi^a) \left(k'_0 \frac{d\sigma_{DIS}^{ea}}{d^3k'} \right) . \quad (2.71)$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an den Partonen wird rein störungstheoretisch berechnet und enthält ausschließlich Beiträge von Zeitskalen, die gegenüber der Wechselwirkungszeit der Partonen untereinander zu vernachlässigen sind. Das Nukleon selbst wird dann vollständig durch die Verteilungsfunktionen charakterisiert. Benutzt man die obige Faktorisierung über den Bjorken-Limes hinaus auch für Streuprozesse mit endlichen Energien, ist zu berücksichtigen, daß die Trennung in kleine und große Skalen an einer festen Faktorisierungsskala vorgenommen wird. Die Form der Faktorisierung wird dann von dieser Skala abhängen, so daß diese auch in die Verteilungsfunktion und die Parton-Wirkungsquerschnitte eingehen werden.

Ausgehend von der Form (2.71) des Wirkungsquerschnitts wird klar, daß man die Darstellung desselben als Summe über Partonen direkt auf den hadronischen Tensor übertragen kann, denn im hadronischen Teil der Streuung allein liegt der Unterschied von Streuung am Nukleon oder an Partonen. Unschwer liest man ab,

¹³Man beachte, daß in dieser Darstellung die Zahl der Partonen im Nukleon festgelegt wurde. Allgemeiner müßte zusätzlich eine Summe über die Gesamt-Partonenzahl im Nukleon mit einer weiteren Gewichtsfunktion hinzugefügt werden. Siehe z.B. die Erläuterungen in Muta 1987.

wie sich die hadronischen Tensoren $W_{\mu\nu}$ und $w_{\mu\nu}^a$ zueinander verhalten

$$W_{\mu\nu}(p, q, s) = \sum_a \int_0^1 \frac{d\xi^a}{\xi^a} f_{a/N}^\lambda(\xi^a) w_{\mu\nu}^a(\xi^a p, q, s^a) \quad . \quad (2.72)$$

Der partonische Tensor hat exakt die gleiche Lorentz-Struktur wie der entsprechende Tensor (2.64) mit Nukleonen-Zuständen.

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu}^{(a)}(\xi^a p, q, s) &= -F_1^a(x^a, Q^2) \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) \\ &+ F_2^a(x^a, Q^2) \frac{\xi^a}{p \cdot q} \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) \\ &+ i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho \frac{s^\lambda}{p \cdot q} \left(g_1^a(x^a, Q^2) + g_2^a(x^a, Q^2) \right) \\ &+ i\varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho \frac{p^\lambda}{p \cdot q} p^\lambda \frac{s \cdot q}{p \cdot q} g_2^a(x^a, Q^2) \quad , \end{aligned} \quad (2.73)$$

wobei die partonische Bjorken Variable $x^a = \frac{Q^2}{2\xi^a p q}$ eingeführt wurde. Aufgrund der Gleichheit der Lorentzstruktur überträgt sich die Faktorisierung von den Wirkungsquerschnitten über die hadronischen Tensoren bis zu den einzelnen Strukturfunktionen. Man erhält die entsprechenden Darstellungen der Strukturfunktionen, indem man (2.73) in (2.72) einsetzt und dann die Lorentzstrukturen mit (2.64) vergleicht. Dabei erhält man für die spinunabhängigen Terme die Summe und für die spinabhängigen Terme die Differenz der Verteilungsfunktionen zu verschiedenen Polarisationen, also

$$f_{a/N}(\xi^a) \equiv f_{a/N}^+(\xi^a) + f_{a/N}^-(\xi^a) \quad (2.74)$$

bzw.

$$\Delta f_{a/N}(\xi^a) \equiv f_{a/N}^+(\xi^a) - f_{a/N}^-(\xi^a) \quad . \quad (2.75)$$

Damit folgt:

$$F_1(x, Q^2) = \sum_a \int_0^1 \frac{d\xi^a}{\xi^a} f_{a/N}(\xi^a) F_1^a(x^a, Q^2) \quad , \quad (2.76)$$

$$F_2(x, Q^2) = \sum_a \int_0^1 d\xi^a f_{a/N}(\xi^a) F_2^a(x^a, Q^2) \quad , \quad (2.77)$$

$$g_1(x, Q^2) + g_2(x, Q^2) = \sum_a \int_0^1 \frac{d\xi^a}{\xi^a} \Delta f_{a/N}(\xi^a) \left(g_1^a(x^a, Q^2) + g_2^a(x^a, Q^2) \right) \quad (2.78)$$

$$g_2(x, Q^2) = \sum_a \int_0^1 \frac{d\xi^a}{\xi^a} \Delta f_{a/N}(\xi^a) g_2^a(x^a, Q^2) \quad . \quad (2.79)$$

Die Strukturfunktionen F_1^a, F_2^a, g_1^a und g_2^a werden rein störungstheoretisch im Rahmen der Lepton-Parton-Streuung berechnet und enthalten alle Effekte kurzer Abstände. Diese Näherung ist korrekt solange man sich auf das Parton-Modell beschränkt. Die Lichtkegelentwicklung wird jedoch zeigen, daß dies im größeren Rahmen der Feldtheorie lediglich die einfachste Näherung ist, und daß Korrekturen von der Ordnung $(m/Q)^n$ auftreten werden. Solche Beiträge zu den Nukleon-Strukturfunktionen verschwinden im Bjorken-Limes.

2.9 Born-Näherung

In diesem Abschnitt soll der hadronische Tensor der Elektron-Nukleon-Streuung und damit die Strukturfunktionen des Nukleons in der Born-Näherung bestimmt werden. Dies entspricht der Beschränkung auf den Austausch eines Photons zwischen dem streuenden Elektron und einem punktförmigen Parton des Nukleons — also die Beschränkung auf die Mott-Streuung.¹⁴

Der hadronischen Tensor (2.29) ist auf den speziellen Fall eines punktförmigen Fermions umzuschreiben. Der Endzustand X ist dabei das getroffene Parton selbst mit einem neuen Viererimpuls p' und Polarisation λ' . Die Berechnung wird von vorneherein für masselose Partonen in der Helizitätsbasis durchgeführt. Das Parton muß nach der Streuung auf der Massenschale liegen, da es sich um ein reales Teilchen handelt, so daß man eine Delta-Distribution $\delta(p'^a{}^2)$ als Massenschalenbedingung erhält. Mit dem Normierungsfaktor $1/(2\pi)^3$ der Quarkzustände lautet der partonische Tensor:

$$w_{\mu\nu}^a(p^a, q, s^a) = Q^{a2} \delta^4(p'^a - p^a - q) \delta(p'^a{}^2) \frac{1}{2} \sum_{\lambda'} (\bar{u}_{\lambda'}(p'^a) \gamma^\mu u_\lambda(p^a))^* (\bar{u}_{\lambda'}(p'^a) \gamma^\nu u_\lambda(p^a)) \quad , \quad (2.80)$$

wobei hier $u_\lambda(p^a)$ die Spinoren der Partonen und Q^a die elektrische Ladung des Partons der Sorte a darstellen. Der hadronische Tensor hat die gleiche Form wie der leptonische Tensor (2.37), so daß die Auswertung der Summen und Spuren nur zu übernehmen ist:

$$\begin{aligned} w_{\mu\nu}^a(p^a, q, s^a) &= Q^{a2} \delta^4(p'^a - p^a - q) \delta(p'^a{}^2) \\ &\quad \left[p^{a\mu} p'^{a\nu} + p^{a\nu} p'^{a\mu} - g^{\mu\nu} p^a \cdot p'^a - i \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} (p_\rho^a - p_\rho'^a) s_\lambda^a + \mathcal{O}(m^2) \right] \\ &= Q^{a2} \delta((p^a + q)^2) [p^{a\mu} (p^a + q)^\nu + p^{a\nu} (p^a + q)^\mu] \end{aligned}$$

¹⁴Vgl. Mott 1930.

$$\begin{aligned}
& -g^{\mu\nu} p^a \cdot (p^a + q) + i \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_\rho s_\lambda^a + \mathcal{O}(m^2)] \\
= & Q^{a2} \delta(2p^a \cdot q - Q^2) [2p^{a\mu} p^{a\nu} + p^{a\mu} q^\nu + p^{a\nu} q^\mu - g^{\mu\nu} p^a \cdot q \\
& + i \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_\rho s_\lambda^a + \mathcal{O}(m^2)] \\
= & Q^{a2} \delta(2p \cdot q (\xi^a - x)) \left[-g^{\mu\nu} p^a \cdot q - \frac{q^\mu q^\nu p^a \cdot q}{Q^2} + 2p^{a\mu} p^{a\nu} \right. \\
& + (p^{a\mu} q^\nu + p^{a\nu} q^\mu) - \frac{p^{a\mu} q^\nu + p^{a\nu} q^\mu}{x^a} + \frac{p^{a\mu} q^\nu + p^{a\nu} q^\mu}{x^a} \\
& \left. + \frac{q^\mu q^\nu}{2x^a} - \frac{q^\mu q^\nu}{2x^{a2}} + \frac{q^\mu q^\nu}{2x^{a2}} + i \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_\rho s_\lambda^a + \mathcal{O}(m^2) \right] \\
= & Q^{a2} \frac{1}{2p \cdot q} \delta(\xi^a - x) \left[2 \left(p^{a\mu} p^{a\nu} + \frac{p^{a\mu} q^\nu + p^{a\nu} q^\mu}{2x^a} + \frac{q^\mu q^\nu}{4x^{a2}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{Q^2}{2x^a} \left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) + i \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_\rho s_\lambda^a + \mathcal{O}(m^2) \right] \\
= & Q^{a2} \delta(\xi^a - x) \left[\frac{2\xi^a x^a}{Q^2} \left(p^{a\mu} + \frac{q^\mu}{2x^a} \right) \left(p^{a\nu} + \frac{q^\nu}{2x^a} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\xi^a}{2} \left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) + i \frac{\xi^a x^a}{Q^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_\rho s_\lambda^a + \mathcal{O}(m^2) \right] \\
= & Q^{a2} \delta(\xi^a - x) \left[\frac{2x \xi^{a2}}{Q^2} \left(p^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \left(p^\nu + \frac{q^\nu}{2x} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\xi^a}{2} \left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) + i \frac{x \xi^a}{Q^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} q_\rho s_\lambda + \mathcal{O}(m^2) \right]. \quad (2.81)
\end{aligned}$$

Bei der Umformung wurde verwendet, daß $1 - \frac{1}{x^a}$ von der Ordnung m_a^2 ist, um die Lorentzstruktur in (2.73) zu erhalten. Die partonischen Variablen wurden mittels $\xi^a x^a = x$ und $p^a = \xi^a p$ durch die nukleonischen Variablen und dem Impulsbruchteil des Partons ξ^a — der Integrationsvariablen in (2.76)–(2.78) — ersetzt.

Die Massenschalen-Bedingung hat in (2.81) die Form $\delta(\xi^a - x)$ erhalten. In Rahmen des Parton-Modells ohne QCD-Korrekturen ist daher die Bjorken-Variable x als Impulsbruchteil des getroffenen Partons ξ^a zu interpretieren. Fraglich bleibt, ob dieser Zusammenhang auch über das Parton-Modell hinaus — also unter Einbeziehung von QCD-Störungskorrekturen oder höheren Twist-Korrekturen in der Lichtkegelentwicklung — Gültigkeit behält.

Der Vergleich mit der Definition der allgemeinen Struktur des partonischen Tensors (2.73) ermöglicht die Bestimmung der partonischen Strukturfunktionen:

$$F_1^a(x^a, Q^2) = Q^{a2} \frac{\xi^a}{2} \delta(\xi^a - x) \quad , \quad (2.82)$$

$$F_2^a(x^a, Q^2) = Q^{a2} \xi^a \delta(\xi^a - x) \quad , \quad (2.83)$$

$$g_1^a(x^a, Q^2) + g_2^a(x^a, Q^2) = Q^{a2} \frac{\xi^a}{2} \delta(\xi^a - x) \quad . \quad (2.84)$$

Für g_2^a kann kein entsprechender Ausdruck angegeben werden, da die zugehörige Lorentzstruktur in (2.81) nicht auftaucht. Um schließlich die nukleonischen Strukturfunktionen im Parton-Modell zu bestimmen, werden die hier berechneten partonischen Strukturfunktionen in die Ausdrücke (2.76)–(2.78) eingesetzt. Die Integrationen werden mit Hilfe der Distributionen ausgeführt, so daß ein direkter Zusammenhang der Nukleon-Strukturfunktionen mit den Verteilungsfunktionen entsteht:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_a Q^{a2} f_{a/N}(x) \quad , \quad (2.85)$$

$$F_2(x) = \sum_a Q^{a2} x f_{a/N}(x) \quad , \quad (2.86)$$

$$[g_1 + g_2](x) = \frac{1}{2} \sum_a Q^{a2} \Delta f_{a/N}(x) \quad . \quad (2.87)$$

Die Strukturfunktionen hängen im Parton-Modell nicht mehr von dem Impulsübertrag Q^2 ab. Dies ist plausibel, da die Streuung an einem Punktteilchen nicht von der Auflösung abhängen sollte, mit der es untersucht wird. Diese Eigenschaft des Parton-Modells wird als Bjorken-Scaling bezeichnet. Sie wird verletzt werden, wenn Massen oder Transversalimpulse der Partonen im Nukleon in die Betrachtung einbezogen werden.

Der Vergleich von (2.85) und (2.86) stellt eine Relation der Strukturfunktionen F_1 und F_2 her — die Callan-Gross-Relation¹⁵

$$F_L(x) = F_2(x) - 2xF_1(x) = 0 \quad . \quad (2.88)$$

Diese Relation gilt nur im Parton-Modell exakt. Die experimentelle Bestimmung der longitudinalen Strukturfunktion F_L ¹⁶ ist daher ein direktes Maß für die Qualität der Beschreibung der Streuung durch das Parton-Modell. Es wird sich zeigen, daß die longitudinale Strukturfunktion bereits in erster Ordnung QCD-Störungstheorie einen Beitrag erhält.

¹⁵Vgl. Callan, Gross 1969.

¹⁶Die Bezeichnung *longitudinale Strukturfunktion* für F_L wird im nächsten Abschnitt (2.95) erklärt, wo diese mit dem Wirkungsquerschnitt für longitudinal polarisierte Photonen in Verbindung gebracht wird.

2.10 Transversale und longitudinale Photonen

Um den Strukturfunktionen des Nukleons eine physikalische Bedeutung zuordnen zu können, ist es hilfreich, zwischen den möglichen Polarisierungen des virtuellen Austauschteilchens zu unterscheiden. Ein virtuelles Photon muß nicht notwendigerweise transversal polarisiert sein, wie es für das reale masselose Photon der Fall ist. Es besteht daher die Möglichkeit einer auch longitudinalen Polarisation des virtuellen Photons. Es wird sich allerdings herausstellen, daß im Bjorken-Limes die longitudinalen Anteile des Wirkungsquerschnitts verschwinden, so daß auch bei realistischen Streuenergien bereits eine Dominanz der transversalen Photonen zu erwarten ist. Diese Erwartung muß auf kleinere Streuenergien nicht mehr zutreffen.

2.10.1 Polarisationsvektoren

Für die folgende Betrachtung werden longitudinale und transversale Polarisationsvektoren im Ruhesystem des Nukleons eingeführt:

$$\varepsilon_L^\mu = \frac{1}{Q} (q^3, \vec{0}_\perp, q^0) \quad , \quad (2.89)$$

$$\varepsilon_T^\mu = \frac{1}{Q} (0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, 0) \quad . \quad (2.90)$$

Der longitudinale Polarisationsvektor ist auf 1 normiert, d.h. es gilt

$$\varepsilon_L \cdot \varepsilon_L = \frac{1}{Q^2} (q_3^2 - q_0^2) = \frac{Q^2}{Q^2} = 1 \quad . \quad (2.91)$$

Hingegen ist der transversale Polarisationsvektor auf -1 normiert. Außerdem gelten im Ruhesystem die Beziehungen

$$\varepsilon_L \cdot q = \frac{1}{Q} (q_3 q_0 - q_0 q_3) = 0 \quad , \quad \varepsilon_T \cdot q = 0 \quad . \quad (2.92)$$

2.10.2 Unpolarisierte Nukleonen

Kontrahiert man den hadronischen Tensor (2.64) für unpolarisierte Nukleonen mit diesen Polarisationsvektoren, projiziert man jeweils die Anteile zu longitudinal und transversal polarisierten Austauschteilchen heraus. Da im Ruhesystem des Nukleons $\varepsilon_\mu^T p^\mu = 0$ gilt, folgt für den transversalen Teil

$$\varepsilon_\mu^{T*} W^{\mu\nu}(p, q, s) \varepsilon_\nu^T = -\varepsilon_\mu^{T*} F_1(x, Q^2) \left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) \varepsilon_\nu^T$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_\mu^{T*} F_2(x, Q^2) \frac{1}{p \cdot q} \left(p^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \left(p^\nu + \frac{q^\nu}{2x} \right) \varepsilon_\nu^T \\
& = -\varepsilon_\mu^{T*} F_1(x, Q^2) g^{\mu\nu} \varepsilon_\nu^T + \varepsilon_\mu^{T*} F_2(x, Q^2) \frac{1}{p \cdot q} p^\mu p^\nu \varepsilon_\nu^T \\
& = F_1(x, Q^2) \quad . \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Die Projektion auf den zu longitudinal polarisierten Photonen zugehörigen Teil ergibt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\mu^{L*} W^{\mu\nu}(p, q, s) \varepsilon_\nu^L & = -\varepsilon_\mu^{L*} F_1(x, Q^2) \left(g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{Q^2} \right) \varepsilon_\nu^L \\
& + \varepsilon_\mu^{L*} F_2(x, Q^2) \frac{1}{p \cdot q} \left(p^\mu + \frac{q^\mu}{2x} \right) \left(p^\nu + \frac{q^\nu}{2x} \right) \varepsilon_\nu^L \\
& = -\varepsilon_\mu^{L*} F_1(x, Q^2) g^{\mu\nu} \varepsilon_\nu^L + \varepsilon_\mu^{L*} F_2(x, Q^2) \frac{1}{p \cdot q} p^\mu p^\nu \varepsilon_\nu^L \\
& = -F_1(x, Q^2) + \frac{1}{Q} q_3 m F_2(x, Q^2) \frac{1}{m\nu} \frac{1}{Q} q_3 m \\
& = -F_1(x, Q^2) + \frac{m}{\nu} \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) F_2(x, Q^2) \\
& = -F_1(x, Q^2) + \left(2x \frac{m^2}{Q^2} + \frac{1}{2x} \right) F_2(x, Q^2) \quad . \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Wieder wurden die Eigenschaften des Nukleon-Ruhsystems ausgenutzt. Die Ergebnisse hängen jedoch nur noch von Lorentzinvarianten ab und sind vom Koordinatensystem unabhängig. Man sieht demnach, daß F_1 die Struktur des Nukleons bei Streuung durch transversal polarisierte Photonen mißt. Hingegen gehen longitudinal polarisierte Photonen in die Linearkombination (2.94) von F_1 und F_2 ein. Diese Kombination verschwindet im Bjorken-Limes, denn

$$-F_1(x, Q^2) + \left(2x \frac{m^2}{Q^2} + \frac{1}{2x} \right) F_2(x, Q^2) \longrightarrow \frac{1}{2x} F_2(x) - F_1(x) \equiv \frac{1}{2x} F_L(x) \quad . \quad (2.95)$$

Wie bereits mit einer Baum-Graphen-Rechnung gezeigt wurde, verschwindet die longitudinale Strukturfunktion im Bjorken-Limes im Rahmen des Parton-Modells identisch.¹⁷

In (2.95) tritt ein Term von der Ordnung m^2/Q^2 auf, der im Bjorken-Limes verschwindet. Dieser Term wird als Target-Massen-Korrektur bezeichnet und spielt

¹⁷Vgl. die Callan-Gross-Relation (2.88). Das Auftreten des Target-Massen-Terms hat dazu geführt, daß in einem Teil der Literatur dieser Term in die Definition der longitudinalen Strukturfunktion einbezogen wurde, also daß die linke Seite von (2.95) mit $F_L/2x$ zu identifizieren wäre. Siehe z.B. Duke, Kimel, Sowell 1982.

eine gewisse Sonderrolle, da er einerseits im Rahmen der Lichtkegelentwicklung bereits in niedrigster Ordnung auftreten wird — also ein Twist-2 Term ist — andererseits eben doch mit $1/Q^2$ unterdrückt ist, was sonst die Eigenschaft höherer Twist-Korrekturen ist. Hier wird exemplarisch der Unterschied von höheren Twist-Termen und $1/Q^2$ -Korrekturen — sogenannten Potenz-Korrekturen — deutlich.

Die Lorentz-Struktur des hadronischen Tensors (2.64) kann mit den beiden Strukturfunktionen F_1 und F_L ausgedrückt, wodurch die Anteile von longitudinalen und transversalen Photonen an der Streuung klar hervorgehoben werden. Dies geschieht, indem F_2 im hadronischen Tensor durch F_1 und F_L ausgedrückt und die Terme umsortiert werden:

$$W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) = -F_1(x, Q^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{p \cdot q} - \frac{Q^2}{(p \cdot q)^2} p_\mu p_\nu \right) + F_L(x, Q^2) \frac{1}{p \cdot q} \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right), \quad (2.96)$$

wobei über die Polarisation des Nukleons gemittelt wurde, so daß die polarisierten Strukturfunktionen g_1 und g_2 hier nicht auftreten. Äquivalent dazu ist auch die Notation

$$W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) = \frac{F_L(x, Q^2)}{2x} \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) + \frac{F_2(x, Q^2)}{2x} \left(\frac{Q^2 p_\mu p_\nu}{(p \cdot q)^2} + \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{p \cdot q} - g_{\mu\nu} \right) \quad (2.97)$$

mit F_2 und F_L möglich.

2.10.3 Der R -Faktor

Da der Anteil der Streuung mit longitudinal polarisierten Photonen als Maß für die Verletzung des Parton-Modells angesehen werden kann, ist es vorteilhaft, für das Verhältnis von longitudinalem und transversalem Anteil des Wirkungsquerschnitts eine eigene Größe einzuführen — den sogenannten R -Faktor. Unter Benutzung der longitudinalen und transversalen Projektionen des hadronischen Tensors (2.93) und (2.94) definiert man:

$$\begin{aligned} R(x, Q^2) &\equiv \frac{\varepsilon_\mu^{L*} W^{\mu\nu}(p, q, s) \varepsilon_\nu^L}{\varepsilon_\mu^{T*} W^{\mu\nu}(p, q, s) \varepsilon_\nu^T} \\ &= \frac{\left(2x \frac{m^2}{Q^2} + \frac{1}{2x} \right) F_2(x, Q^2) - F_1(x, Q^2)}{F_1(x, Q^2)} \\ &= \frac{\left(2x \frac{m^2}{Q^2} + \frac{1}{2x} \right) F_2(x, Q^2) - \frac{1}{2x} (F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2))}{\frac{1}{2x} (F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_L(x, Q^2) + \frac{4x^2 m^2}{Q^2} F_2(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2)} \\
&= \frac{F_2(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2)} \left(1 + \frac{4x^2 m^2}{Q^2} \right) - 1 \quad . \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Alternativ kann R auch in Abhängigkeit von den Strukturfunctionen F_1 und F_L dargestellt werden:

$$R(x, Q^2) = \frac{F_L(x, Q^2)}{2x F_1(x, Q^2)} + \frac{4x^2 m^2}{Q^2} \left(1 + \frac{F_L(x, Q^2)}{2x F_1(x, Q^2)} \right) \quad . \quad (2.99)$$

Diese Notation ist zwar in der Literatur nicht so verbreitet, hebt jedoch sehr deutlich hervor, daß der R -Faktor durch das Verhältnis von longitudinaler und transversaler Strukturfunction des Nukleons und durch Target-Massen-Korrekturen bestimmt wird. Im Bjorken-Limes verschwinden die letzteren, und es verbleibt

$$R(x, Q^2) \longrightarrow R(x) = \frac{F_L(x)}{2x F_1(x)} = 0 \quad . \quad (2.100)$$

Der R -Faktor verschwindet im Bjorken-Limes wegen der Callan-Gross-Relation (2.88). Dies entspricht natürlich der Konstruktion des R -Faktors, der ja gerade das Verhältnis von longitudinalem und transversalem Wirkungsquerschnitt darstellt.

2.10.4 Longitudinaler und transversaler Wirkungsquerschnitt

Den gesamten differentiellen inklusiven Wirkungsquerschnitt der Lepton-Nukleon-Streuung (2.32) berechnet man, indem die allgemeinen Strukturen des leptonischen (2.37) und hadronischen Tensors (2.64) kontrahiert werden. Die auftretenden Kontraktionen sind:

$$\begin{aligned}
L^{\mu\nu}(k, k') \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) &= -Q^2 \quad , \\
L^{\mu\nu}(k, k') \frac{1}{p \cdot q} \left(p_\mu + \frac{q_\mu}{2x} \right) \left(p_\nu + \frac{q_\nu}{2x} \right) &= \frac{m^2 Q^2}{2p \cdot q} \left[\frac{(s - m^2)(s - m^2 - 2p \cdot q)}{m^2 Q^2} - 1 \right] \quad , \\
L^{\mu\nu}(k, k') i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho s^\lambda \frac{1}{p \cdot q} &= \frac{2m^2 Q^2}{p \cdot q} \left[\frac{(s \cdot q)^2}{m^2 Q^2} - 1 \right] \quad , \\
L^{\mu\nu}(k, k') i \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} q^\rho p^\lambda \frac{s \cdot q}{(p \cdot q)^2} &= \frac{2(s \cdot q)^2}{p \cdot q} \quad , \quad (2.101)
\end{aligned}$$

wobei (B.32) und $p \cdot s = 0$ benutzt wurden. Die vier aufgeführten Terme sind jeweils die Koeffizienten der vier eingeführten Strukturfunctionen F_1 , F_2 , $g_1 + g_2$

und g_2 . Diese Koeffizienten gehen mit den zugehörigen Strukturfunktionen in den Wirkungsquerschnitt (2.32) ein:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{eN}}{d\nu dQ^2} &= \frac{4m\pi \alpha_{\text{em}}^2}{(s-m^2)^2 Q^2} \left[F_1(x, Q^2) + \frac{m^2}{2p \cdot q} \left(\frac{(s-m^2)(s-m^2-2p \cdot q)}{m^2 Q^2} - 1 \right) F_2(x, Q^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2m^2}{p \cdot q} \left(\frac{(s \cdot q)^2}{m^2 Q^2} - 1 \right) (g_1(x, Q^2) + g_2(x, Q^2)) + \frac{2Q^2 (s \cdot q)^2}{p \cdot q} g_2(x, Q^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Der Koeffizient von F_2 ist proportional zu dem Wirkungsquerschnitt für die Mott-Streuung im relativistischen Limes

$$\left. \frac{d\sigma}{dQ^2} \right|_{\text{Mott}} = \frac{4\pi \alpha_{\text{em}}^2 m^2}{(s-m^2)^2 Q^2} \left(\frac{(s-m^2)(s-m^2-2p \cdot q)}{m^2 Q^2} - 1 \right), \quad (2.103)$$

also für die Streuung eines Leptons im Coulomb-Feld eines Punktteilchens. Um dies explizit einzusehen, wird der unpolarisierte Teil des Wirkungsquerschnitts im Laborsystem des Nukleons notiert. Verwendet man $dQ^2 d\nu = \frac{EE'}{\pi} dE' d\Omega$ mit dem Raumwinkel Ω des auslaufenden Leptons, (2.2) und (2.13), erhält man den Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energien der ein- und auslaufenden Leptonen und dem Streuwinkel ϑ :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma^{eN}}{dE' d\Omega} \right|_{\text{Lab}} &= \frac{\alpha_{\text{em}}^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{4E^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}} \frac{1}{m} \left[F_1(x, Q^2) \tan^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{m}{2(E-E')} F_2(x, Q^2) \right] \\ &= \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} \frac{1}{m} \left[F_1(x, Q^2) \tan^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{m}{2(E-E')} F_2(x, Q^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.104)$$

2.10.5 Rück- und Ausblick

Die bisherigen Betrachtungen haben von den Eigenschaften der Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung keinen Gebrauch gemacht. Der Wirkungsquerschnitts für die tief-inelastische Lepton-Nukleon-Streuung (2.102) — oder durch den R -Faktor ausgedrückt (2.169) — ist allein auf die Kinematik der Streuung zurückzuführen. Die experimentelle Bestimmung des Wirkungsquerschnitts ermöglicht die Berechnung der Strukturfunktionen. Auf der anderen Seite wäre es wünschenswert, auch eine theoretische Vorhersage für die Strukturfunktionen zu liefern. Eine erstes Modell wurde dazu bereits erläutert — das Parton-Modell —, in dem die Strukturfunktionen als Parton-Verteilungsfunktionen interpretiert wurden. Im Rahmen einer feldtheoretischen Betrachtung treten Korrekturen zu diesem Modell auf. Neben den Störungskorrekturen werden insbesondere nichtperturbative Korrekturen

im Bereich kleiner und mittlerer Impulsüberträge wichtig. Diese werden im Formalismus der Operatorprodukt-Entwicklung eingeführt.

2.11 OPE Teil 1: freie Feldtheorie

Ausgehend von der Darstellung des hadronischen Tensors (2.43) mit Hilfe eines Stromkommutators, soll in diesem Abschnitt vom feldtheoretischen Standpunkt aus, derselbe in Operator-Matrixelemente entwickelt werden. Dabei werden sich zwei neue Türen öffnen, die Tür zu den störungstheoretischen QCD-Korrekturen und die zu den höheren Twist-Operatoren. Auf der anderen Seite wird sich erweisen, daß die Aussagen des Parton-Modells mit denen des feldtheoretischen Zugangs im Bjorken-Limes identisch sind, so daß sich jenes in einen größeren Zusammenhang nahtlos einordnet.

Hier ein Überblick über das Programm: Der Stromkommutator (2.43) kann durch die auf dem Lichtkegel singuläre Pauli-Jordan-Funktion und eine Reihe von bilokalen Operatoren ausgedrückt werden. Aufgrund der Lichtkegeldominanz ist es möglich, die bilokalen Operatoren auf dem Lichtkegel in lokale Operatoren zu entwickeln. Auf diese Weise wird der hadronische Tensor in zwei Teile zerlegt: den Matrixelementen von lokalen Operatoren, die ausschließlich von den Quantenzahlen des Nukleons abhängen, und einem störungstheoretischen Teil, der nur von dem Streuprozeß bestimmt wird. Die Verallgemeinerung der OPE von der freien Feldtheorie zur wechselwirkenden Feldtheorie erfolgt im nächsten Kapitel.

2.11.1 Der freie Stromkommutator

Der freie Strompropagator läßt sich durch nicht-gleichzeitige Antikommutatoren von Quarkfeldern ausdrücken. Um dies einzusehen, ist die folgende Identität wichtig:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\bar{\psi}(0)\psi(x)\gamma_\nu\psi(0) &= \left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\bar{\psi}(0)\psi(x)\gamma_\nu\psi(0)\right)^\dagger \\
 &= \psi(0)^\dagger\gamma_\nu^\dagger\psi(x)^\dagger\bar{\psi}^\dagger(0)\gamma_\mu^\dagger\bar{\psi}^\dagger(x) \\
 &= \bar{\psi}(0)\gamma_\nu\bar{\psi}(x)\psi(0)\gamma_\mu\psi(x) \quad . \quad (2.105)
 \end{aligned}$$

Daraus erhält man für den Strom-Kommutator:

$$[j_\mu(x), j_\nu(0)] = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\bar{\psi}(0)\gamma_\nu\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma_\nu\psi(0)\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\bar{\psi}(0)\psi(x)\gamma_\nu\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma_\nu\bar{\psi}(x)\psi(0)\gamma_\mu\psi(x) \\
= & \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\{\psi(x),\bar{\psi}(0)\}\gamma_\nu\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma_\nu\{\psi(0),\bar{\psi}(x)\}\gamma_\mu\psi(x),
\end{aligned} \tag{2.106}$$

wobei die Farbindizes hier nicht explizit notiert wurden. Der Antikommutator von Fermionfeldern hängt über den Dirac-Operator mit der Pauli-Jordan-Funktion $\Delta(x)$ zusammen, die durch den Kommutator skalarer Felder definiert ist¹⁸

$$\{\psi(x),\bar{\psi}(0)\} = (i\not{\partial} + m)i\Delta(x) \quad . \tag{2.107}$$

Die Pauli-Jordan-Funktion ist im Ortsraum durch (A.45) gegeben, hat auf dem Lichtkegel $x^2 = 0$ eine Singularität und verschwindet identisch außerhalb desselben, denn im masselosen Fall verschwindet die Bessel-Funktion in (A.45), und die Pauli-Jordan-Funktion wird allein durch die Singularität auf dem Lichtkegel bestimmt:

$$\{\psi(x),\bar{\psi}(0)\} = -\frac{1}{2\pi}\not{\partial}\epsilon(x_0)\delta(x^2) \quad . \tag{2.108}$$

$\epsilon(x_0)$ bedeutet das Vorzeichen der Zeit-Komponente x_0 . Setzt man dies in den Strom-Kommutator (2.106) ein, erhält man zwei Kombinationen von drei Gamma-Matrizen, die mit (B.36) in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil zerlegt werden können:

$$\begin{aligned}
[j_\mu(x),j_\nu(0)] &= -\frac{1}{2\pi}\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu\psi(x)\right)\partial^\alpha\epsilon(x_0)\delta(x^2) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\sigma_{\mu\alpha\nu\rho}\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma_\rho\psi(x)\right)\partial^\alpha\epsilon(x_0)\delta(x^2) \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho}\left(\bar{\psi}(x)\gamma_\rho\gamma_5\psi(0) + \bar{\psi}(0)\gamma_\rho\gamma_5\psi(x)\right)\partial^\alpha\epsilon(x_0)\delta(x^2) \quad .
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Mit den bilokalen Operatoren

$$O_V^\rho(x,0) = \bar{\psi}(x)\gamma^\rho\psi(0) - \bar{\psi}(0)\gamma^\rho\psi(x) \quad , \tag{2.110}$$

$$O_A^\rho(x,0) = \bar{\psi}(x)\gamma^\rho\gamma_5\psi(0) + \bar{\psi}(0)\gamma^\rho\gamma_5\psi(x) \tag{2.111}$$

und $\partial^\alpha\epsilon(x_0)\delta(x^2) = 2x^\alpha\epsilon(x_0)\delta^{(1)}(x^2)$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
[j_\mu^a(x),j_\nu^b(0)] &= -\frac{1}{\pi}\epsilon(x_0)\delta^{(1)}(x^2)\sigma_{\mu\alpha\nu\rho}x^\alpha O_V^{ab\rho}(x,0) \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\epsilon(x_0)\delta^{(1)}(x^2)i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho}x^\alpha O_A^{ab\rho}(x,0) \quad .
\end{aligned} \tag{2.112}$$

¹⁸Siehe dazu die Diskussion der Pauli-Jordan-Funktion im Anhang (A.45).

Die Farbindizes, die während der Herleitung unterdrückt wurden und mit den Quarkfeldern assoziiert werden und deshalb in den Operatoren auftreten müssen, wurden jetzt wieder notiert. Der Stromkommutator konnte im Fall masseloser Quarkfelder in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden, dem jeweils ein spezifischer Operator zugeordnet wurde. Außerdem wurde gezeigt, daß der Stromkommutator auf dem Lichtkegel singulär wird.

2.11.2 Lichtkegel-Entwicklung der bilokalen Operatoren

Die bilokalen Operatoren werden wegen der Lichtkegel-Dominanz von Abständen $x^2 = 0$ bestimmt, so daß man diese um $x = 0$ Taylor-entwickeln kann. Die Entwicklung der Feldoperatoren ist:

$$\psi(x) = \psi(0) + x^{\mu_1} (\partial_{\mu_1} \psi(x))_{x=0} + \frac{1}{2} x^{\mu_1} x^{\mu_2} (\partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \psi(x))_{x=0} + \dots, \quad (2.113)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}(0) + x^{\mu_1} (\bar{\psi}(x) \partial_{\mu_1}^\dagger)_{x=0} + \frac{1}{2} x^{\mu_1} x^{\mu_2} (\bar{\psi}(x) \partial_{\mu_1}^\dagger \partial_{\mu_2}^\dagger)_{x=0} + \dots, \quad (2.114)$$

wobei durch die adjungierten Ableitungen angedeutet wird, daß diese nach links wirken. Setzt man diese Entwicklung in die bilokalen Operatoren (2.110) und (2.111) ein, erhält man eine Reihe in lokalen Operatoren:

$$\begin{aligned} O_V^\rho(x, 0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} (\bar{\psi}(x) \partial_{\mu_1}^\dagger \dots \partial_{\mu_n}^\dagger)_{x=0} \gamma_\rho \psi(0) \\ &\quad - \bar{\psi}(0) \gamma_\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi(x))_{x=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} O_{V\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) \end{aligned} \quad (2.115)$$

mit den lokalen Operatoren

$$O_{V\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(x) = (\bar{\psi} \partial_{\mu_1}^\dagger \dots \partial_{\mu_n}^\dagger)(x) \gamma^\rho \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma^\rho (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi)(x). \quad (2.116)$$

Ebenso erhält man für die bilokalen axialen Operatoren:

$$O_A^\rho(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} O_{A\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) \quad (2.117)$$

mit

$$O_{A\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(x) = (\bar{\psi} \partial_{\mu_1}^\dagger \dots \partial_{\mu_n}^\dagger)(x) \gamma^\rho \gamma_5 \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma^\rho \gamma_5 (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \psi)(x). \quad (2.118)$$

Die lokalen Operatoren haben die Eigenschaft, mit wachsendem n auch höhere Massen-Dimension zu erhalten. Dies wird zu einer Klassifikation der Operatoren nach Twist führen.

2.11.3 Reduzierte Matrixelemente und Twist

Die lokalen Operatoren haben die Eigenschaft, mit wachsendem n auch höhere Massen-Dimension zu erhalten. Andererseits wächst in gleichem Maße auch der maximal mögliche Operator-Spin¹⁹, so daß die Differenz der beiden charakteristischen Werte konstant bleibt. Allgemeiner definiert man deshalb den Twist eines Operators als dessen Massen-Dimension minus seinem Operator-Spin. Man erhält den Teil mit dem kleinsten Twist — also den führenden Twist-Anteil — gerade durch den Anteil des Operators mit maximalem Operator-Spin. Dieser wiederum wird durch den Operator-Anteil erreicht, der in seinen Indizes total symmetrisch ist. Jeder Operator mit gegebener Massen-Dimension wird daher zerlegbar in die Anteile unterschiedlichen Operator-Spins und damit in seine Twist-Anteile.

Die dabei erscheinenden Projektionen der Operatoren auf ihre höheren Twist-Anteile werden mit Mehrteilchen-Korrelationen assoziiert. Betrachtet man beispielsweise einen Operator mit zwei kovarianten Ableitungen und je einem ein- und auslaufenden Quarkfeld, so kann man den antisymmetrischen Teil der beiden Ableitungen mit einem Gluonfeld identifizieren, so daß der Operator ein 2-Quark-1-Gluon-Operator wird. Es wird anschaulich sofort klar, daß solche Mehrteilchen-Korrelationen bei der Betrachtung größerer Abstände, also kleinerer Impulsüberträge Q^2 auftreten können, so daß sich höhere Twist-Korrekturen in genau diesem kinematischen Bereich als wichtig erweisen werden. Diese Aussage spiegelt sich auch in der allgemeinen — aber nicht exakten Regel —, höhere Twist-Korrekturen würden mit Potenzen von $1/Q^2$ unterdrückt. In diesem Kapitel wird lediglich der führende Twist untersucht, während der Überblick über die experimentelle Situation bereits eine Zerlegung in die Twist-Anteile diskutiert. Die Zerlegung von Operatoren nach ihren Twist-Anteilen wird in Kap. 3.2 erläutert, und die Abschätzung höherer Twist-Korrekturen sind das Hauptanliegen dieser Arbeit, das in den Kapiteln über die einzelnen Strukturfunktionen verfolgt wird.

In dem konkreten Fall der Operatoren (2.116) und (2.118) handelt es sich um Operatoren der Dimension $3 + n$ mit einem maximalen Operator-Spin im Fall von total symmetrischen Lorentz-Indizes von $1 + n$. Der führende Term der Twist-Entwicklung ist demnach der Twist-2-Anteil. Die Operatoren werden zwischen hadronischen Zuständen ausgewertet, so daß die für den Twist-2-Anteil vorgegebene Symmetrie der Lorentzindizes und die durch den hadronischen Zustand zur Verfügung stehenden Lorentz-Vektoren p_μ und s_μ dazu führen, die Lorentzstruktur

¹⁹Die Definition des Operator-Spins wird in Kap. 3.2 ausführlicher erläutert.

des Matrixelements direkt angeben zu können.

$$\langle ps | O_{V\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) | ps \rangle = a_{V,n} p^\rho p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} \quad , \quad (2.119)$$

$$\langle ps | O_{A\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) | ps \rangle = a_{A,n} (p^\rho s_{\mu_1} + p_{\mu_1} s^\rho) p_{\mu_2} \dots p_{\mu_n} \quad . \quad (2.120)$$

Betrachtet man ausschließlich longitudinal polarisierte Nukleonen, sind Spin- und Impulsvektor parallel oder antiparallel zueinander, so daß die Tensorstrukturen beider Operatoren bis auf einen Helizitätsfaktor λ identisch werden.

2.11.4 Der hadronische Tensor in Operatoren

Die Darstellung des Strom-Kommutators durch bilokale Operatoren (2.112) und deren Entwicklung nach lokalen Operatoren (2.115) und (2.117) können in den hadronischen Tensor (2.43) eingesetzt werden, der damit durch Hadron-Matrixelemente von lokalen Operatoren ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(p, q, s) &= \frac{-1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iqx} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha \langle ps | \sigma_{\mu\alpha\nu\rho} O_V^\rho(x, 0) - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} O_A^\rho(x, 0) | ps \rangle \\ &= \frac{-1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle ps | \sigma_{\mu\alpha\nu\rho} O_{V\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} O_{A\mu_1 \dots \mu_n}^\rho(0) | ps \rangle \\ &\quad \int d^4x e^{iqx} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \quad . \end{aligned} \quad (2.121)$$

Verwendet man außerdem die in ihrer Lorentzstruktur dargestellten Twist-2 Matrixelemente (2.119) und (2.120), können die Impulsvektoren mit den Ortsvektoren zu Lorentzskalaren kontrahiert werden.

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}(p, q, s) &= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x e^{iqx} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha (p \cdot x)^n \\ &\quad \left[\sigma_{\mu\alpha\nu\rho} a_n^V p^\rho - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} a_n^A \left(p^\rho \frac{s \cdot x}{p \cdot x} + s^\rho \right) \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.122)$$

Diese Lorentzskalare können als Argument von Funktionen aufgefaßt werden, die wie folgt definiert werden:

$$f(p \cdot x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p \cdot x)^n}{n!} a_{V,n} \quad , \quad (2.123)$$

$$g(p \cdot x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p \cdot x)^n}{n!} a_{A,n} \quad , \quad (2.124)$$

$$g'(p \cdot x, s \cdot x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p \cdot x)^{n-1} (s \cdot x)}{n!} a_{A,n} \quad . \quad (2.125)$$

Die Fourierintegrale dieser Funktionen werden in den hadronischen Tensor eingeführt. Dabei erhält man für f und g einfache Fourierintegrale und für g' doppelte, da sie von zwei unabhängigen Lorentzskalaren $p \cdot x$ und $s \cdot x$ abhängt. Im Fall von longitudinal polarisierten Nukleonen (mit $s_\mu = \lambda p_\mu$) hängt g' nur noch von einem Skalar ab, und es gilt $g' = \lambda g$.

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(p, q, s) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int d^4x e^{iqx} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha \\
&\quad [\sigma_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho f(p \cdot x) - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho g'(p \cdot x, s \cdot x) - i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho g(p \cdot x)] \\
&= -\frac{1}{2\pi^2} \int d\xi f(\xi) \int d^4x e^{i(q+\xi p)x} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha \sigma_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int d\xi \int d\eta g_2(\xi, \eta) \int d^4x e^{i(q+\xi p+\eta s)x} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho \\
&\quad + \frac{1}{2\pi^2} \int d\xi g_1(\xi) \int d^4x e^{i(q+\xi p)x} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) x^\alpha i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho. \quad (2.126)
\end{aligned}$$

Das Impulsintegral wird mit Hilfe der Beziehung

$$\int d^4x e^{i(q+y)x} \epsilon(x_0) \delta^{(1)}(x^2) = i\pi^2 \epsilon(q_0 + y_0) \Theta((q+y)^2) \quad (2.127)$$

gelöst. Dazu ist zuvor x^α in eine Differentiation nach q umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(p, q, s) &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \int d\xi f(\xi) \epsilon(q_0 + \xi p_0) \Theta((q + \xi p)^2) \sigma_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \int d\xi \int d\eta g_2(\xi, \eta) \epsilon(q_0 + \xi p_0 + \eta s_0) \Theta((q + \xi p + \eta s)^2) i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \int d\xi g_1(\xi) \epsilon(q_0 + \xi p_0) \Theta((q + \xi p)^2) i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho. \quad (2.128)
\end{aligned}$$

Die Differentiation wirkt in allen drei Termen allein auf die Heavyside-Funktion. Die Ableitung von ϵ ergibt eine unphysikalische Delta-Distribution und kann daher weggelassen werden. Aus

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} \Theta((q+y)^2) = 2(q+y)^\alpha \delta((q+y)^2) \quad (2.129)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
W_{\mu\nu}(p, q, s) &= - \int d\xi f(\xi) \delta((q + \xi p)^2) \sigma_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho (q + \xi p)^\alpha \\
&\quad + \int d\xi \int d\eta g_2(\xi, \eta) \delta((q + \xi p + \eta s)^2) i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho (q + \eta s)^\alpha \\
&\quad + \int d\xi g_1(\xi) \delta((q + \xi p)^2) i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho (q + \xi p)^\alpha. \quad (2.130)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle können bereits Aussagen über die auftretenden Tensorstrukturen machen, die mit denen der allgemeinen Entwicklung des hadronischen Tensors (2.64) kompatibel sein müssen. Für den symmetrischen Teil, der der unpolarisierten Streuung entspricht, ist:

$$\begin{aligned}
d_{\mu\nu} &:= \sigma_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho (q + \xi p)^\alpha \\
&= (g_{\mu\alpha} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\alpha\rho} + g_{\mu\rho} g_{\alpha\nu}) p^\rho (q + \xi p)^\alpha \\
&= p_\nu (q + \xi p)_\mu - g_{\mu\nu} p \cdot (q + \xi p) + p_\mu (q + \xi p)_\nu \\
&= 2\xi p_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - g_{\mu\nu} p \cdot q - g_{\mu\nu} \xi p^2 \\
&= 2\xi \left(p_\mu p_\nu + \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{2\xi} + \frac{q_\mu q_\nu}{4\xi^2} \right) - p \cdot q \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{2\xi p \cdot q} \right) - g_{\mu\nu} \xi m^2 .
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Die beiden Klammern stellen tatsächlich die Lorentzstruktur der Strukturfunktion F_2 und F_1 dar, wobei die Bjorken-Variable durch ξ ersetzt wird. ξ ist natürlich nicht exakt mit x identisch, denn die δ -Distribution in (2.130) enthält noch Terme, die von der Nukleonmasse abhängen. Dies ändert jedoch nichts an der Identität der Lorentzstrukturen. Es wird sich im nächsten Abschnitt erweisen, daß im Bjorken-Limes $\xi = x$ wird.

Die zu $g(\xi)$ gehörige Lorentzstruktur $i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho q^\alpha$ ist mit der der Strukturfunktion $g_1(x, Q^2) + g_2(x, Q^2)$ identisch. Allerdings tritt zusätzlich eine Struktur auf, die im Fall von longitudinal polarisierten Nukleonen verschwindet, in dem Spin und Impuls des Nukleons zueinander proportional sind, denn:

$$i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho \xi p^\alpha = i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} \lambda p^\rho \xi p^\alpha = 0 . \tag{2.132}$$

Die zweite Lorentzstruktur $i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho \xi p^\alpha$ ist daher mit der Streuung an transversal polarisierten Nukleonen — also mit der Strukturfunktion $g_2(x, Q^2)$ zu assoziieren.

Das gleiche gilt auch für die dritte Lorentzstruktur in (2.130): $i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} p^\rho (q + \eta s)^\alpha$. Der Term proportional zu $p^\rho q^\alpha$ ist paritätsverletzend und tritt daher nur in der schwachen Wechselwirkung auf, und der zweite Term ist mit dem zuvor diskutierten identisch.

Es ist lehrreich einzusehen, daß man auch in einer feldtheoretischen Beschreibung der Streuung — indem man von freien Feldern ausgeht — eine Art von Callan-Gross-Relation (2.88) wiederfindet. Der unpolarisierte hadronische Tensor hat in der Form (2.130) ein und dieselbe Funktion F vor beiden Lorentzstrukturen, die zwei unabhängigen Strukturfunktionen in (2.64) entsprechen. Das bedeutet, daß die

freie Feldtheorie eine Relation der beiden Strukturfunktionen F_1 und F_2 erzwingt. Diese Relation ist im Bjorken-Limes mit der Callan-Gross-Relation identisch.²⁰

In diesem Abschnitt wurde in der freien Feldtheorie ein Zusammenhang von Verteilungsfunktionen der Partonen im Nukleon mit lokalen Operatoren hergestellt. Tatsächlich ist es möglich, die Verteilungsfunktionen durch Operator-Matrixelemente zu definieren²¹, die durch die Wahl des Operators spezifischen Teilen der gesamten Amplitude zugeordnet werden können. Gleichzeitig führen die Symmetrieeigenschaften der Operatoren zu einer Klassifikation der Verteilungsfunktionen nach Twist.²²

2.11.5 Parton-Modell im Bjorken-Limes der Feldtheorie

Betrachtet man die freie Feldtheorie im Bjorken-Limes, findet man das gesamte Parton-Modell wieder. Um das zu sehen, ist lediglich die Integration über ξ in (2.130) mit Hilfe der δ -Funktion zu berechnen. Dazu ist das Argument derselben näher zu untersuchen und das Verhältnis von ξ und x zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
(q + \xi p)^2 &= q^2 + 2\xi p \cdot q + \xi^2 m^2 = m^2 \left(\xi^2 + 2\xi \frac{\nu}{m} - \frac{Q^2}{m^2} \right) \\
\iff \xi &= -\frac{\nu}{m} + \sqrt{\frac{\nu^2}{m^2} + \frac{Q^2}{m^2}} = \frac{\nu}{m} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{Q^2}{\nu^2}} \right) \\
&= \frac{\nu}{m} \left(\frac{Q^2}{2\nu^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{k!} \left(\frac{-Q^2}{2\nu^2} \right)^k \right) \\
&= x \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{k!} \left(\frac{-2x^2 m^2}{Q^2} \right)^{k-1} \right), \quad (2.133)
\end{aligned}$$

wobei (C.51) benutzt und die zweite Lösung für ξ der quadratischen Gleichung verworfen wurde, da sie die Positivität von ξ verletzt. Man sieht, daß ξ für große Q^2 mit dem Bjorken- x übereinstimmt. Die Korrekturen zu dieser Identität sind von der Ordnung m^2/Q^2 . Im Bjorken-Limes können alle Korrekturen dieser Art vernachlässigt werden, und es gilt $\xi = x$.

Bei Vernachlässigung der Massenterme gilt $\delta((q + \xi p)^2) = \frac{1}{2pq} \delta(\xi - x)$, so daß

²⁰Siehe dazu die Ausführungen im nächsten Abschnitt.

²¹Vgl. Collins 1980; Collins, Soper 1982, Collins, Soper, Sterman 1989.

²²Diese Klassifikation wird im Rahmen der praktisch durchgeführten OPE in Kap. 3 näher erläutert.

unter Einbeziehung der zuvor berechneten Lorentzstrukturen (2.131) folgt:

$$W_{\mu\nu}(p, q, s)|_{\text{Bjorken}} = \frac{1}{2p \cdot q} (-f(x) d_{\mu\nu} + g(x) i\varepsilon_{\mu\alpha\nu\rho} s^\rho q^\alpha) \quad . \quad (2.134)$$

Die Lorentzstruktur des unpolarisierten Anteils und auch die zu $g(x)$ gehörige Lorentzstruktur findet sich hier exakt wieder, und so können die hier eingeführten Funktionen mit den entsprechenden Strukturfunktionen identifiziert werden. Allerdings kann man keine solche Entsprechung für die Strukturfunktion g_2 angeben, deren Lorentzstruktur im Bjorken-Limes nicht mehr auftritt. Es gibt daher keine partonische Interpretation für diese Strukturfunktion. Sie wird mit transversal polarisierten Nukleonen assoziiert, da die zugehörige Lorentzstruktur im Fall longitudinal polarisierter Nukleonen verschwindet.

Unter der Voraussetzung, daß $\xi = x$ gesetzt wird, erhält man aus (2.131) und (2.134) die Callan-Gross-Relation zurück. Die Tatsache, daß in der freien Feldtheorie eine Beziehung zwischen den beiden unpolarisierten Strukturfunktionen F_1 und F_2 existieren muß, wurde bereits im vorigen Abschnitt diskutiert. Man erhält zwei unabhängige Bestimmungen — zu jeder Lorentzstruktur eine — der in der Feldtheorie auftretenden Funktion F in Form von Proportionalitäten: $F_2/p \cdot q = 2xF + \mathcal{O}(m^2/Q^2)$ und $F_1 = p \cdot qF + \mathcal{O}(m^2/Q^2)$, wobei die Proportionalitätskonstante in die Funktion F integriert wurde und in beiden Gleichungen identisch ist. Dies ergibt sofort die Relation

$$F_2(x, Q^2) = 2xF_1(x, Q^2) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{Q^2}\right) \quad (2.135)$$

Die Callan-Gross-Relation erscheint damit auch in der führenden Twist-Näherung der freien Feldtheorie, gilt allerdings exakt nur im Bjorken-Limes und wird bei endlichen Impulsüberträgen durch Potenzen von m/Q modifiziert. Die longitudinale Strukturfunktion erhält deshalb in der QCD frühestens durch die Einbeziehung entweder von der QCD-Wechselwirkung oder von Potenzkorrekturen der Form m^2/Q^2 oder von höheren Twist-Korrekturen einen Beitrag und verschwindet im Bjorken-Limes der Feldtheorie identisch.

2.12 OPE Teil 2: wechselwirkende Feldtheorie

Die Verallgemeinerung der obigen Betrachtung der freien Feldtheorie zur wechselwirkenden Feldtheorie erfolgt formal durch das Hinzufügen eines Wilson-Koeffizienten zu jedem der reduzierten Matrixelemente. Der Wilson-Koeffizient ist eine

singuläre Funktion, die alle perturbativen Effekte enthält und damit den Bereich der kleinen Skalen abdeckt. Dieser Schritt entspricht demnach der Faktorisierung des gesamten Streuprozesses in Bereiche unterschiedlicher Skalen — eine singuläre Funktion, die die kleinen Skalen abdeckt und einem reduzierten Matrixelement, das die Informationen der großen Skalen beinhaltet.

2.12.1 Der Faktorisierung zweiter Teil

Bevor die Vorwärtsstreuamplitude nach Operatoren entwickelt wird, ist zu klären, wie die Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts (2.71) bzw. des hadronischen Tensors (2.72) in einen harten Teil, der alle Effekte kurzer Skalen, und eine Verteilungsfunktion, die alle Effekte größerer Skalen beinhaltet, in einer wechselwirkenden Feldtheorie aufrechterhalten werden kann. In diesem Rahmen ist der Austausch von virtuellen Gluonen zu berücksichtigen, deren Impuls alle Skalen durchläuft — also Skalen von der Ordnung der Hadronen-Massen und auch von der Ordnung des virtuellen Photonimpulses Q enthält. Man kann daher den Austausch von Gluonen zwischen Partonen nicht naiv in den harten Streuquerschnitt integrieren, da Effekte großer Abstände, die eigentlich durch die Verteilungsfunktion berücksichtigt werden sollten, dann in diesen eingearbeitet würden.

Die fundamentale Aussage der Faktorisierungstheoreme²³ ist die Möglichkeit, durch das Einführen einer Faktorisierungsskala μ_F den durch den Austausch von Gluonen zwischen Partonen auftretenden weichen Anteil aus dem harten Wirkungsquerschnitt zurück in die Verteilungsfunktion zu verschieben. In der Folge werden natürlich beide Teile — der harte Streuquerschnitt und die Verteilungsfunktionen — von dieser neuen Skala abhängen. Im Rahmen der dimensional Regularisierung wird die Faktorisierungsskala so gewählt, daß die Abhängigkeit des harten Streuprozesses von weichen Gluonen eliminiert wird. Die Abhängigkeit erscheint als Logarithmus von μ_F/Q , der für eine feste Faktorisierungsskala und große Impulsüberträge Q große Beträge annehmen kann. Das Produkt dieser Logarithmen mit dem kleinen Kopplungsparameter a_s kann dann immer noch so große Werte annehmen, daß der Sinn einer störungstheoretischen Entwicklung in Frage gestellt werden muß. Wählt man die Faktorisierungsskala proportional zum Impulsübertrag — also meistens $\mu_F = Q$ — bleibt der Logarithmus endlich und damit das Produkt mit dem Kopplungsparameter klein. In der Praxis wird die Faktorisierungsskala mit der Renormierungsskala zusammengelegt: $\mu_F = \mu = Q$.

²³Siehe die Diskussion und Herleitung von Faktorisierungstheoremen für verschiedene Prozesse in Collins, Soper, Sterman 1989.

Da der gesamte Wirkungsquerschnitt von der Faktorisierungsskala nicht abhängen darf, gilt für diesen in Analogie zur Renormierungsgruppengleichung $d\sigma/d\mu_F = 0$. Diese muß jedoch nicht exakt erfüllt sein, wenn man den Wirkungsquerschnitt in einer Störungsreihe annähert. Die Abhängigkeit von μ_F ist dann nicht exakt Null, sondern von der nächst höheren Ordnung im Kopplungsparameter a_s .²⁴

2.12.2 Vorwärtsstreuamplitude

Um das Stromprodukt in der wechselwirkenden Feldtheorie in einen Satz von Operatoren zu entwickeln, kann man sich von den Erfahrungen, die man bei der Entwicklung der freien Felder im vorigen Abschnitt gemacht hat leiten lassen. Dabei ist die entscheidende Erweiterung, daß die für den hadronischen Tensor oder äquivalent für die Vorwärtsstreuamplitude gefundene Lorentzstruktur auch in der wechselwirkenden Feldtheorie erhalten bleibt. Diese Annahme ist sehr gut begründbar, da die Lorentzstruktur allein mit Hilfe von Lorentzinvarianz und Stromerhaltung hergeleitet wurde. Von dieser Übertragung ausgehend, kann man die Vorwärtsstreuamplitude (2.47) in eine Reihe von charakteristischen bilokalen Operatoren mit passender Lorentzstruktur entwickeln, die jeweils einer der allgemein gefundenen Strukturfunktionen entsprechen.

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(p, q, s) &= i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | T \{ j_\mu(x) j_\nu(0) \} | ps \rangle \\
&= (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | O_L(x, 0) | ps \rangle \\
&+ \left(g_{\mu\lambda} \frac{q_\nu q_\rho}{q^2} + g_{\nu\rho} \frac{q_\mu q_\lambda}{q^2} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} \frac{q_\lambda q_\rho}{q^2} \right) i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | O_2^{\lambda\rho}(x, 0) | ps \rangle \\
&+ i \left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\rho} \frac{q_\nu q^\alpha}{q^2} + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda\rho} \frac{q_\mu q^\alpha}{q^2} \right) i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | O_3^{\lambda\rho}(x, 0) | ps \rangle \\
&+ i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | O_A^\rho(x, 0) | ps \rangle \quad . \quad (2.136)
\end{aligned}$$

Die Lorentzstrukturen werden hier ausschließlich mit dem Vierervektor q_μ des Austauschteilchens konstruiert, da die gesamte Information über das Nukleon, an dem gestreut wird, in dem Operator-Matrixelement stecken soll. Außerdem wurde bei der Konstruktion der Lorentzstruktur darauf geachtet, daß einerseits die Stromerhaltung gewährleistet ist und andererseits diese zusammen mit der Lorentzstruktur der Operator-Matrixelemente die gesuchten Lorentzstrukturen ergeben. Diese Wahl ist nicht eindeutig, denn die Strukturen zu F_L sind durch die zu F_1 ersetzbar. Alle

²⁴Vgl. Collins, Soper, Sterman 1989, S.10ff.

diese Ansätze sind jedoch äquivalent, und die Zahl der notwendigen Operatoren ist durch die Zahl der Strukturfunktionen, die in der allgemeinen Zerlegung des hadronischen Tensors aufgetreten sind, und damit letztlich durch die Stromerhaltung und die Lorentzinvarianz eindeutig festgelegt. Die explizite Form der Operatoren ist jedoch hier noch nicht festgelegt. Vielmehr ist die Entwicklung in bilokale Operatoren hier rein formal geschehen. Die explizite Herleitung der Twist-2 und Twist-4 Operatoren wird für die ersten Momente der Strukturfunktionen in Kap. 3 durchgeführt.

Analog zu dem Vorgehen in der freien Feldtheorie werden die bilokalen Operatoren in lokale Operatoren entwickelt. Die Entwicklung um kleine Abstände wird durch die Lichtkegel-Dominanz gerechtfertigt. Anders als im Fall der freien Feldtheorie²⁵ wird die Wechselwirkung jetzt durch das Hinzufügen einer auf dem Lichtkegel singulären Funktion berücksichtigt, die den Streuprozess im Bereich kleiner Abstände beschreiben soll. Dieser sogenannte Wilson-Koeffizient²⁶ ist als vollständige QCD-Störungsreihe vorzustellen — er enthält damit die gesamte perturbative Information der QCD für das jeweils behandelte Problem. Für jeden lokalen Operator ist ein eigener Wilson-Koeffizient notwendig, der die Störungskorrekturen für die jeweilig assoziierte Strukturfunktion enthält. Auf der anderen Seite ist die gesamte Information von dem hadronischen Zustand, an dem gestreut wird, also der Anteil der Streuung von größeren Skalen in den Matrixelementen der lokalen Operatoren enthalten. Die Entwicklung lautet analog zu (2.115) für die vier oben eingeführten Operatoren

$$O_L(x, 0) = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n} C_{L,n}^{(i)}(x^2) O_{L\mu_1 \cdots \mu_n}^{(i)}(0) \quad , \quad (2.137)$$

$$O_2^{\lambda\rho}(x, 0) = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n} C_{2,n}^{(i)}(x^2) O_{2\mu_1 \cdots \mu_n}^{(i)\lambda\rho}(0) \quad , \quad (2.138)$$

$$O_A^\rho(x, 0) = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n} C_{A,n}^{(i)}(x^2) O_{A\mu_1 \cdots \mu_n}^{(i)\rho}(0) \quad , \quad (2.139)$$

$$O_3^{\lambda\rho}(x, 0) = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n} C_{3,n}^{(i)}(x^2) O_{3\mu_1 \cdots \mu_n}^{(i)\lambda\rho}(0) \quad . \quad (2.140)$$

Es ist möglich, daß mehrere lokale Operatoren existieren, die alle auf die gleiche Lorentzstruktur führen und damit zu ein und derselben Strukturfunktion gehören. Dies ist insbesondere bei Operatoren höheren Twists der Fall und wird durch den Index i berücksichtigt.²⁷

²⁵Man vergleiche hierzu die Entwicklung in (2.115) und (2.117).

²⁶Vgl. Wilson 1969.

²⁷Anders als in der freien Feldtheorie ist die explizite Form der lokalen Operatoren hier noch

In (2.136) gehen die Matrixelemente der bilokalen Operatoren ein, so daß man sich nach der Entwicklung derselben in lokale Operatoren für die Matrixelemente der letzteren zu interessieren hat. Diese haben ebenso wie in der freien Feldtheorie²⁸ eine wohldefinierte Lorentzstruktur, die charakteristisch für den Twist des Operators ist. Jede der möglichen Tensorstrukturen eines Operator-Matrixelements geht mit einer Proportionalitätskonstanten ein, die als reduziertes Matrixelement bezeichnet wird. Beschränkt man sich auf die führenden Twist-Anteile — also auf die Tensorstrukturen, die zu maximalem Operator-Spin gehören — lauten die Matrixelemente:

$$\langle ps | O_{L\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)}(0) | ps \rangle = a_{L,n}^{(i)} p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} \quad , \quad (2.141)$$

$$\langle ps | O_{2\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)\lambda\rho}(0) | ps \rangle = a_{2,n}^{(i)} p^\lambda p^\rho p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} \quad , \quad (2.142)$$

$$\langle ps | O_{A\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)\rho}(0) | ps \rangle = a_{A,n}^{(i)} s^{\{\rho} p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n\}} \quad , \quad (2.143)$$

$$\langle ps | O_{3\mu_1 \dots \mu_n}^{(i)\lambda\rho}(0) | ps \rangle = a_{3,n}^{(i)} (s^\lambda p^\rho - s^\rho p^\lambda) p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} \quad , \quad (2.144)$$

wobei die durch geschweifte Klammern eingeschlossenen Indizes total symmetrisiert sein sollen. Um den Anteil der Operatoren maximalen Spins zu erhalten, ist neben der Symmetrisierung die Spurlosigkeit zu fordern. Deshalb müssen auf der rechten Seite entsprechende Spurterme abgezogen werden, die hier nicht notiert wurden. Der Operator O_3 tritt im hadronischen Tensor zusammen mit dem in λ und ρ antisymmetrischen ε -Tensor auf, so daß die Lorentzstruktur mit total symmetrischen Indizes verschwindet. Deshalb gibt es keinen Twist-2-Anteil von $O_3^{\lambda\rho}$, der zur tief-inelastischen Streuung beiträgt, und der führende Beitrag hat den Twist-3.

Die Lichtkegel-Entwicklung und die Form der Matrixelemente in der führenden Twist-Näherung (2.137) bis (2.144) werden in die Vorwärtsstreuamplitude (2.136) eingesetzt. Die Ortsvektoren $x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n}$ aus der Lichtkegel-Entwicklung werden dabei jeweils mit den Nukleon-Impulsvektoren $p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n}$ zu Skalaren kontrahiert. Zu dem reduzierten axialen Matrixelement $a_{A,n}^{(i)}$ tritt dabei wegen der Symmetrisierung der Indizes eine Potenz von $p \cdot x$ weniger und dafür zusätzlich ein Skalar $s \cdot x$ auf

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(p, q, s) &= \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) i \int d^4 x e^{iqx} (p \cdot x)^n C_{L,n}^{(i)}(x^2) a_{L,n}^{(i)} \\ &+ \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_{\mu\lambda} \frac{q_\nu q_\rho}{q^2} + g_{\nu\rho} \frac{q_\mu q_\lambda}{q^2} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} \frac{q_\lambda q_\rho}{q^2} \right) p^\lambda p^\rho \\ & i \int d^4 x e^{iqx} (p \cdot x)^n C_{2,n}^{(i)}(x^2) a_{2,n}^{(i)} \end{aligned}$$

nicht offensichtlich und muß in einer gesonderten Untersuchung erst ermittelt werden. Siehe Kap. 3.

²⁸Vgl. dazu die Erläuterung zu (2.119).

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda i \int d^4x e^{iqx} (p \cdot x)^n \left(s^\rho + \frac{s \cdot x}{p \cdot x} p^\rho \right) C_{A,n}^{(i)}(x^2) a_{A,n}^{(i)} \\
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} i \left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\rho} \frac{q_\nu q^\alpha}{q^2} + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda\rho} \frac{q_\mu q^\alpha}{q^2} \right) (s^\lambda p^\rho - s^\rho p^\lambda) \\
& \quad i \int d^4x e^{iqx} (p \cdot x)^n C_{3,n}^{(i)}(x^2) a_{3,n}^{(i)} \quad . \quad (2.145)
\end{aligned}$$

Die Fourier-Transformierten der Wilson-Koeffizienten und der n Ortsvektoren können in allen 4 Termen durch eine neue Funktion C' ausgedrückt werden, die selbst nur von Q^2 abhängen kann. Die Tensorstruktur bedingt, daß diese von n Viererimpulsen q begleitet werden müssen.

$$i \int d^4x e^{iqx} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} C_{\bullet,n}^{(i)}(x^2) = 2q^{\mu_1} \dots q^{\mu_n} \tilde{C}_{\bullet,n}^{(i)}(Q^2) \left(\frac{2}{Q^2} \right)^{n+1}, \quad (2.146)$$

wobei der Faktor $(2/Q^2)^{n+1}$ dafür sorgt, daß die Fourier-transformierten Wilson-Koeffizienten dimensionslos definiert sind.²⁹ Durch diese Transformation werden die Skalarprodukte $p \cdot x$ und $s \cdot x$ in (2.145) in die Produkte $p \cdot q$ und $s \cdot q$ verwandelt und man erhält:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(p, q, s) & = - \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (g_{\mu\nu} q^2 - q_\mu q_\nu) (p \cdot q)^n \left(\frac{2}{Q^2} \right)^{n+1} \tilde{C}_{L,n}^{(i)}(Q^2) a_{L,n}^{(i)} \\
& - \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} 2 \left(g_{\mu\lambda} \frac{q_\nu q_\rho}{q^2} + g_{\nu\rho} \frac{q_\mu q_\lambda}{q^2} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} \frac{q_\lambda q_\rho}{q^2} \right) p^\lambda p^\rho \\
& \quad (p \cdot q)^n \left(\frac{2}{Q^2} \right)^{n+1} \tilde{C}_{2,n}^{(i)}(Q^2) a_{2,n}^{(i)} \\
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} 2i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda (p \cdot q)^n \left(\frac{2}{Q^2} \right)^{n+1} \left(s^\rho + \frac{s \cdot q}{p \cdot q} p^\rho \right) \tilde{C}_{A,n}^{(i)}(Q^2) a_{A,n}^{(i)} \\
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} 2i \left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} - \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\rho} \frac{q_\nu q^\alpha}{q^2} + \varepsilon_{\nu\alpha\lambda\rho} \frac{q_\mu q^\alpha}{q^2} \right) (s^\lambda p^\rho - s^\rho p^\lambda) \\
& \quad (p \cdot q)^n \left(\frac{2}{Q^2} \right)^{n+1} \tilde{C}_{3,n}^{(i)}(Q^2) a_{3,n}^{(i)} \quad . \quad (2.147)
\end{aligned}$$

Die Vorwärtsstreuamplitude hat die Form einer Reihe in ω , dem inversen Bjorken-

²⁹Man beachte, daß aus ästhetischen Gründen in die Wilson-Koeffizienten \tilde{C}_L und \tilde{C}_2 noch ein Faktor -4 bzw. -1 integriert wird, ohne daß dies die Allgemeinheit der Betrachtung einschränkt. Die zusätzlichen Faktoren wirken sich später auf die Definition der Momente der Strukturfunktionen aus und wurden so gewählt, daß die Momente gerade als Produkt von Wilson-Koeffizient und reduziertem Matrixelement erscheinen — ohne weitere Konstanten.

x , das durch $\omega = 2p \cdot q / Q^2$ definiert ist. Die Lorentzstrukturen können weiter zu

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(p, q, s) = & \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) \tilde{C}_{L,n}^{(i)}(Q^2) a_{L,n}^{(i)} \omega^n \\
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{p \cdot q} + p_\mu p_\nu \frac{Q^2}{(p \cdot q)^2} - g_{\mu\nu} \right) \tilde{C}_{2,n}^{(i)}(Q^2) a_{2,n}^{(i)} \omega^{n+2} \\
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} 2i \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \left(\frac{q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} + \frac{s \cdot q}{(p \cdot q)^2} q^\lambda p^\rho \right) \tilde{C}_{A,n}^{(i)}(Q^2) a_{A,n}^{(i)} \omega^{n+1} \\
& + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} 2i \left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} Q^2 + \varepsilon_{\mu\alpha\lambda\rho} q_\nu q^\alpha - \varepsilon_{\nu\alpha\lambda\rho} q_\mu q^\alpha \right) \frac{s^\lambda p^\rho}{2(p \cdot q)^2} \tilde{C}_{3,n}^{(i)}(Q^2) a_{3,n}^{(i)} \omega^{n+2}
\end{aligned} \tag{2.148}$$

vereinfacht werden. Die Abhängigkeit der Wilson-Koeffizienten und reduzierten Matrixelemente von der Renormierungs- und der Faktorisierungs-Skala sind nicht explizit notiert.

Wie es konstruktionsbedingt sein muß, entsprechen die aufgetretenen Lorentzstrukturen denen, die im hadronischen Tensor (2.97) bzw. (2.64) erschienen. Genauer entsprechen sich jeweils a_L und F_L sowie a_2 und F_2 . Schließlich gibt es zwei Strukturen, die mit dem reduzierten Matrixelement a_A auftreten, die gerade $g_1 + g_2$ und g_2 entsprechen. a_3 gehört zu einem Operator mit höherem Twist und tritt daher in der führenden Twist-Näherung nicht auf.

2.13 Momente der Strukturfunktionen

In (2.148) wurde die Vorwärtsstreuamplitude in eine Reihe in ω entwickelt. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Koeffizienten dieser Potenzreihe als Momente des hadronischen Tensors interpretiert werden müssen. Sei eine beliebige Potenzreihe vorgegeben:

$$T_{\mu\nu}(p, q, s) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} d_{\mu\nu} M_m \omega^{m+a} \quad , \tag{2.149}$$

wobei $d_{\mu\nu}$ die Lorentzstruktur beinhaltet und M_m die Koeffizienten sind, die sich als Momente herausstellen sollen. a ist eine ganze Zahl, die dafür sorgt, daß der erste Term der Entwicklung die richtige Potenz in ω erhält.

Der Konvergenzradius dieser Reihe legt den erlaubten Bereich für das inverse Bjorken- x gerade auf $\omega < 1$ fest, während der physikalisch relevante Bereich gerade $\omega > 1$ ist. Aus diesem Grund wird $T_{\mu\nu}$ in die komplexe Ebene analytisch fortgesetzt.

Das Konvergenzverhalten wird dabei dadurch verbessert, daß $T_{\mu\nu}$ durch eine feste Potenz von ω dividiert wird:

$$\frac{T_{\mu\nu}(p, \omega, s)}{\omega^{n+a+1}} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} d_{\mu\nu} M_m \omega^{m-n-1} \quad . \quad (2.150)$$

Die Funktion auf der linken Seite ist bei $\omega = 0$ singulär, so daß eine Integration über das komplexe ω auf einem Kreis C_1 um die Null mit einem Radius kleiner als 1 (siehe Abb. 2.2) gerade das Residuum ergibt

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} d\omega \frac{T_{\mu\nu}(p, \omega, s)}{\omega^{n+a+1}} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} d_{\mu\nu} M_m \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} d\omega \omega^{m-n-1} = 2d_{\mu\nu} M_n \quad , \quad (2.151)$$

das sich als der Koeffizient zu einer wohldefinierten Potenz von ω in (2.149) herausstellt.

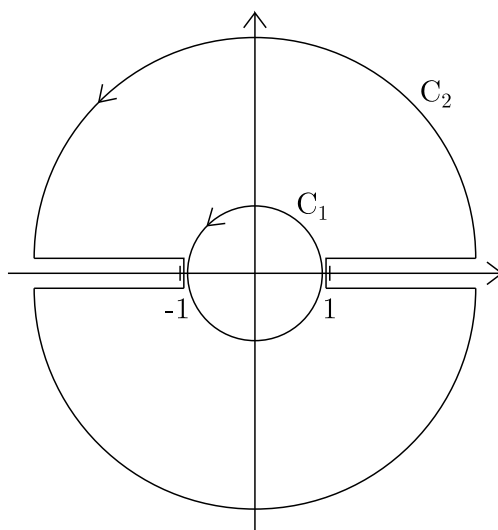


Abbildung 2.2: Die Integrationswege für die analytisch fortgesetzte Vorwärtsstreuamplitude. C_2 wird im Unendlichen geschlossen, so daß lediglich der Integrationsweg entlang der reellen Achsen zu berechnen ist.

Auf der anderen Seite kann man die gleiche Integration auch auf dem Integrationsweg C_2 durchführen (siehe Abb. 2.2), der jeweils auf der positiven und negativen reellen Achse entlanggeht und den Bereich für $|\omega| < 1$ umgeht. Der Integrationsweg wird im Unendlichen geschlossen. Davon ausgehend, daß der Integrand im Unendlichen schnell genug verschwindet, verbleiben nur 4 Integrationen entlang der reellen

Achse. Diese können durch Variablen-Substitution in eine analoge Form gebracht werden³⁰:

$$\begin{aligned}
2d_{\mu\nu} M_n &= \frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} d\omega \frac{T_{\mu\nu}(\omega)}{\omega^{n+a+1}} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_1^{+\infty} d\omega \frac{T_{\mu\nu}(\omega + i\varepsilon)}{(\omega + i\varepsilon)^{n+a+1}} + \int_{+\infty}^1 d\omega \frac{T_{\mu\nu}(\omega - i\varepsilon)}{(\omega - i\varepsilon)^{n+a+1}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{-1}^{-\infty} d\omega \frac{T_{\mu\nu}(\omega - i\varepsilon)}{(\omega - i\varepsilon)^{n+a+1}} + \int_{-\infty}^{-1} d\omega \frac{T_{\mu\nu}(\omega + i\varepsilon)}{(\omega + i\varepsilon)^{n+a+1}} \right\} \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_1^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+a+1}} \{T_{\mu\nu}(\omega + i\varepsilon) - T_{\mu\nu}(\omega - i\varepsilon) \\
&\quad + (-1)^{n+a} T_{\mu\nu}(-\omega - i\varepsilon) - (-1)^{n+a} T_{\mu\nu}(-\omega + i\varepsilon)\} . \quad (2.152)
\end{aligned}$$

wobei die Verschiebung von der reellen Achse für den Nenner ω^{n+a+1} nicht notwendig war, da der Integrationsweg nicht über den Pol bei $\omega = 0$ verläuft.

Die weitere Behandlung der Integrale hängt von dem Verhalten der Vorwärtsstreuamplitude gegenüber einer Vorzeichenänderung von ω oder äquivalent dazu von q_μ ab. Dieses Verhalten ist für polarisierte und unpolarisierte Streuung verschieden, so daß an dieser Stelle eine Unterscheidung der beiden Teile notwendig wird. Die Vorwärtsstreuamplitude als ganzes hat die Eigenschaft der Crossing-Symmetrie, d.h. es gilt $T_{\mu\nu}(\omega) = T_{\nu\mu}(-\omega)$. Die Crossing-Symmetrie ist leicht mit Hilfe von Feynman-Graphen einzusehen: Die Vertauschung des Vorzeichens von ω ist gleichbedeutend mit dem Umkehren der Richtung des Austauscheteilchens — das Austauscheteilchen, das am Vertex μ einlief, läuft nun an demselben aus und entsprechend am Vertex ν . Vertauscht man gleichzeitig noch die Vertizes, erhält man dieselben Verhältnisse wie zu Beginn. Nun sind auf der anderen Seite die beiden Anteile der Amplitude zu polarisierter und unpolarisierter Streuung gegenüber der Vertauschung von μ und ν antisymmetrisch bzw. symmetrisch — also $T_{\mu\nu}^{\text{pol}}(\omega) = -T_{\nu\mu}^{\text{pol}}(\omega)$ und $T_{\mu\nu}^{\text{unpol}}(\omega) = T_{\nu\mu}^{\text{unpol}}(\omega)$. Daraus folgt zusammen mit der für beide Teile gültigen Crossing-Symmetrie das Verhalten unter Vertauschung des Vorzeichens von ω , nämlich $T_{\mu\nu}^{\text{pol}}(\omega) = -T_{\mu\nu}^{\text{pol}}(-\omega)$ und $T_{\mu\nu}^{\text{unpol}}(\omega) = T_{\mu\nu}^{\text{unpol}}(-\omega)$.

Dementsprechend muß auch die weitere Umformung von (2.152) differenziert werden. Dazu wird eine Variable σ definiert, die für polarisierte Streuung den Wert -1 und für unpolarisierte $+1$ erhält. Dann folgt:

$$2d_{\mu\nu} M_n = \frac{1}{2i\pi} \int_1^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+a+1}} \{T_{\mu\nu}(\omega + i\varepsilon) - T_{\mu\nu}(\omega - i\varepsilon)\}$$

³⁰In der folgenden Umformung wird die Abhängigkeit der Vorwärtsstreuamplitude von den nukleonischen Quantenzahlen nicht notiert.

$$\begin{aligned}
& +(-1)^{n+a}\sigma T_{\mu\nu}(\omega+i\varepsilon) - (-1)^{n+a}\sigma T_{\mu\nu}(\omega-i\varepsilon)\} \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_1^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+a+1}} \left(1 + (-1)^{n+a}\sigma\right) \{T_{\mu\nu}(\omega+i\varepsilon) - T_{\mu\nu}(\omega-i\varepsilon)\} .
\end{aligned} \tag{2.153}$$

Unter Verwendung des Schwarzschen Spiegelungsprinzips³¹ kann man die letzte Klammer mit dem Imaginärteil der Amplitude in Verbindung bringen. Es gilt dann $T_{\mu\nu}(\omega-i\varepsilon) = T_{\mu\nu}^*(\omega+i\varepsilon)$, so daß folgt

$$T_{\mu\nu}(\omega+i\varepsilon) - T_{\mu\nu}(\omega-i\varepsilon) = 2i\text{Im} T_{\mu\nu}(\omega) = 2i\pi W_{\mu\nu}(\omega) . \tag{2.154}$$

Im letzten Schritt wurde der Zusammenhang von Amplitude und hadronischem Tensor über das optische Theorem (2.53) ausgenutzt. Damit erhält man für den Koeffizienten M_n :

$$2d_{\mu\nu} M_n = \int_1^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+a+1}} \left(1 + \sigma(-1)^{n+a}\right) W_{\mu\nu}(\omega) . \tag{2.155}$$

Mit der Substitution $\omega = 1/x$ erhält der Koeffizient explizit die Form des Moments des hadronischen Tensors:

$$2d_{\mu\nu} M_n = \int_0^1 dx x^{n+a-1} \left(1 + \sigma(-1)^{n+a}\right) W_{\mu\nu}(\omega) . \tag{2.156}$$

Nur die Hälfte der Momente ist ungleich Null. Es verschwinden entweder alle geraden oder alle ungeraden Momente, je nach dem, ob es sich um polarisierte oder unpolarisierte Streuung handelt und je nach erster Potenz von ω in der Entwicklung der Amplitude.

Da die Lorentzstrukturen in der Amplitude und im hadronischen Tensor identisch und unabhängig sind, kann man die Aussage, die für die ganze Amplitude und für den ganzen hadronischen Tensor gilt, auch auf die einzelnen Strukturfunktionen übertragen. Dazu vergleiche man (2.149) mit (2.148) und bestimme daraus die Konstanten a, σ entsprechend der Symmetrie gegen Austausch von μ und ν , die Lorentzstruktur $d_{\mu\nu}$ und den Koeffizienten $M_n(Q^2)$. Dabei kann man den letzteren immer gerade in der Form

$$M_{\bullet,n}(Q^2) = \sum_i \tilde{C}_{\bullet,n}^{(i)}(Q^2) a_{\bullet,n}^{(i)} \tag{2.157}$$

wählen. Die Vorfaktoren in (2.148) sind gerade so gewählt worden, daß die dann verbleibende Lorentzstruktur inklusive Vorfaktoren mit der im hadronischen Tensor

³¹Siehe Remmert 1984, S.254. Die Voraussetzungen für dieses Prinzip sind die Stetigkeit der Amplitude und die Forderung, daß dieselbe auf der reellen Achse nur reelle Werte annehmen darf — Voraussetzungen, die für physikalisch sinnvolle Amplituden erfüllt sind.

(2.64) bzw. (2.97) identisch ist. Setzt man den hadronischen Tensor in (2.156) ein, erhält man durch Vergleich die gesuchte Beziehung von Koeffizient M_n und dem Moment der einzelnen Strukturfunktionen.

Die Schritte werden für die longitudinale Strukturfunktion vorgeführt: Aus (2.149) und (2.148) folgt:

$$\begin{aligned} M_{L,n}(Q^2) &= \sum_i \tilde{C}_{L,n}^{(i)}(Q^2) a_{L,n}^{(i)} \\ d_{\mu\nu}^L &= \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) \quad a = 0 \quad \sigma = 1 \quad . \end{aligned} \quad (2.158)$$

Setzt man den hadronischen Tensor (2.97) in (2.156) ein, ergibt sich für den longitudinalen Teil:

$$\begin{aligned} 2d_{\mu\nu}^L M_n &= \int_0^1 dx x^{n-1} (1 + (-1)^n) W_{\mu\nu}(p, \omega, s) \\ &= 2 \frac{1}{2} \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) \int_0^1 dx x^{n-2} F_L(x, Q^2) \quad , \end{aligned} \quad (2.159)$$

woraus durch Vergleich

$$M_{L,n}(Q^2) = \sum_i \tilde{C}_{L,n}^{(i)}(Q^2) a_{L,n}^{(i)} = \int_0^1 dx x^{n-2} F_L(x, Q^2) \quad (2.160)$$

folgt. Alle Momente der longitudinalen Strukturfunktion mit ungeradem n verschwinden.

Auf die gleiche Weise erhält man für die anderen Strukturfunktionen analoge Beziehungen. Für F_2 ist $a = 2$ und $\sigma = 1$, und man erhält nur gerade Momente:

$$M_{2,n}(Q^2) = \sum_i \tilde{C}_{2,n}^{(i)}(Q^2) a_{2,n}^{(i)} = \int_0^1 dx x^n F_2(x, Q^2) \quad . \quad (2.161)$$

Für $g_1 + g_2$ hat man $a = 1$ und $\sigma = -1$, und erhält nur gerade Momente:

$$M_{A,n}(Q^2) = \sum_i \tilde{C}_{A,n}^{(i)}(Q^2) a_{A,n}^{(i)} = \int_0^1 dx x^n (g_1(x, Q^2) + g_2(x, Q^2)) \quad . \quad (2.162)$$

Alle Momente (2.160)–(2.162) wurden lediglich auf dem Twist-2-Level hergeleitet. Die Momente der Strukturfunktionen erhalten von Operatoren mit höherem Twist weitere Beiträge, die die obigen Gleichungen modifizieren. Ein Beispiel für solche Operatoren wurde ja bereits in (2.148) erwähnt, und es werden weitere folgen.

Die Momente der Strukturfunktionen testen unterschiedliche Bjorken- x Bereiche der Strukturfunktion. Die niedrigsten Momente erhalten Beiträge von allen x -Bereichen, während zu höheren Momenten hin der Bereich kleiner x immer stärker unterdrückt wird.

Aus der Kenntnis aller Momente geht die Kenntnis der Strukturfunktion selbst als Funktion von x hervor, denn die Momente einer Funktion bilden ein vollständiges System. Für die Rücktransformation der Strukturfunktionen in den Impulsraum sind im Anhang einige Beispiele gegeben.³²

2.14 Experimentelle Situation

2.14.1 Die Strukturfunktion F_2

Um die Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ experimentell zu bestimmen, ist der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt (2.102) bzw. im Laborsystem (2.104) zu messen. Dies kann in tief-inelastischer Elektron- oder Muon-Nukleon-Streuung geschehen. Um F_2 aus einem Experiment zu extrahieren, muß F_1 bzw. der R -Faktor bekannt sein. Diese können beispielsweise aus einer QCD-Rechnung entnommen werden.³³ Alternativ können die Daten anderer Experimente für $R(x, Q^2)$ oder die Parametrisierung aller bis 1990 bekannten Daten³⁴, die mit den heutigen Daten immer noch konsistent ist³⁵, verwendet werden.

Derzeit sind Daten für F_2 von vielen Experimenten verfügbar: BCDMS³⁶ und NMC³⁷ am Muonen-Strahl des SPS im CERN, von SLAC³⁸, vom H1³⁹- und vom ZEUS-Experiment am HERA⁴⁰, wo auch Daten im Bereich kleinerer Bjorken- x vorliegen.

Eine sehr gute Parametrisierung der Daten von SLAC, BCDMS und NMC für

³²Siehe Kap. A.3.

³³Vgl. Altarelli, Martinelli 1978. Hier wurde die erste Ordnung Störungskorrektur zu $R(x, Q^2)$ berechnet. Diese Werte wurden z.B. im H1-Experiment am HERA verwendet (siehe H1 Collaboration 1995).

³⁴Vgl. Whitlow et al. 1990.

³⁵Siehe dazu die Erläuterungen in Kap. 2.14.3.

³⁶Vgl. BCDMS Collaboration 1989, 1990.

³⁷Vgl. NMC Collaboration 1995, 1997a.

³⁸Vgl. Whitlow et al. 1992.

³⁹Vgl. H1 Collaboration 1995.

⁴⁰Vgl. ZEUS Collaboration 1996a, 1996b

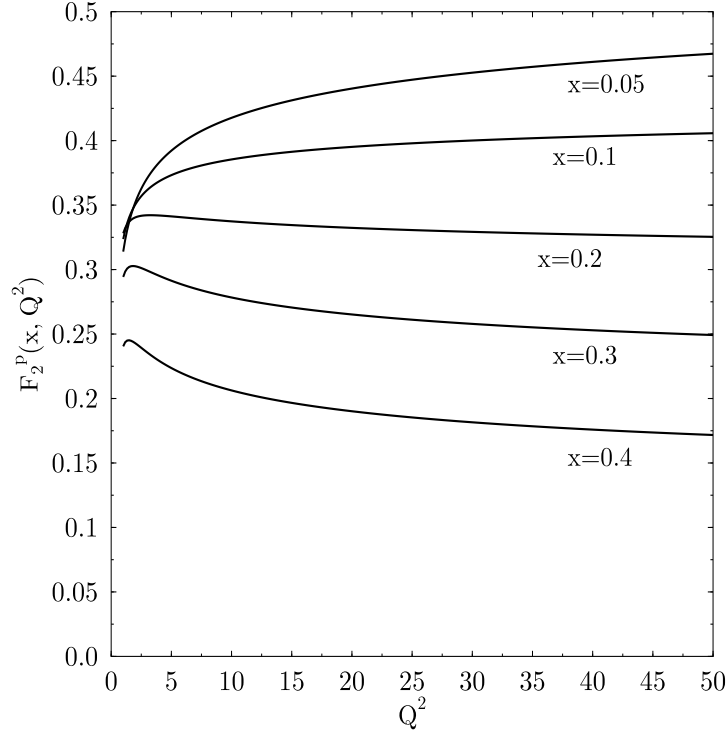


Abbildung 2.3: Die Proton-Strukturfunktion F_2 für feste Werte von x in Abhängigkeit von Q^2 .

die Strukturfunktion als Funktion von x und Q^2 hat die Form⁴¹

$$F_2(x, Q^2) = A(x) \left(\frac{\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\ln\left(\frac{Q_0^2}{\Lambda^2}\right)} \right)^{B(x)} \left(1 + \frac{C(x)}{Q^2} \right) \quad (2.163)$$

wobei $Q_0^2 = 20 \text{ GeV}^2$, $\Lambda = 0.250 \text{ GeV}$ und

$$\begin{aligned} A(x) &= x^{a_1}(1-x)^{a_2} \left(a_3 + a_4(1-x) + a_5(1-x)^2 + a_6(1-x)^3 + a_7(1-x)^4 \right) , \\ B(x) &= b_1 + b_2x + \frac{b_3}{x + b_4} , \\ C(x) &= c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 . \end{aligned} \quad (2.164)$$

Die Form der Parametrisierung spiegelt das logarithmischen Verhalten des führenden Twist-Beitrags zu F_2 wider und berücksichtigt mit der Gewichtsfunktion

⁴¹Vgl. NMC Collaboration 1995.

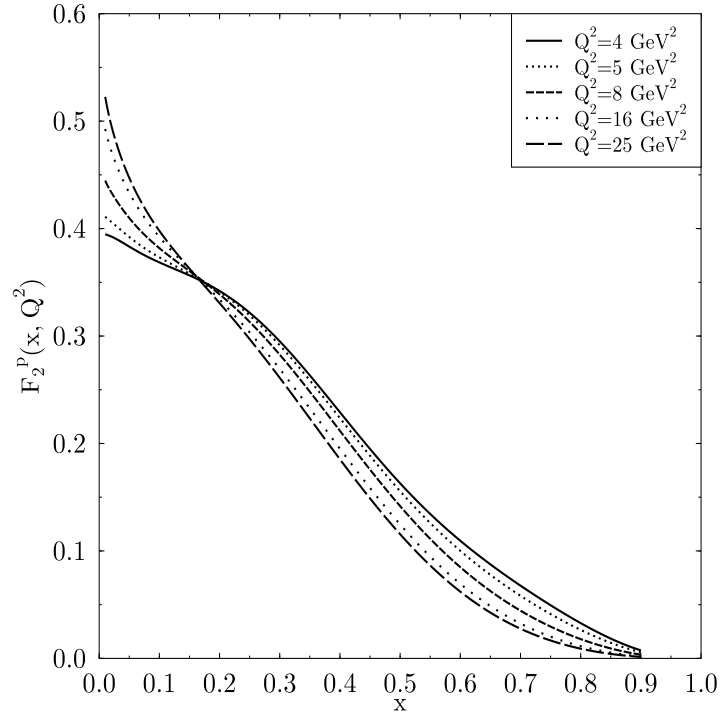


Abbildung 2.4: Die Proton-Strukturfunktion F_2 für feste Werte von Q^2 in Abhängigkeit von x .

$C(x)$ auch $1/Q^2$ unterdrückte Korrekturen. Die optimalen Parameter sind für die Proton- und die Deuteron- Strukturfunktion in dem Bereich $0.006 < x < 0.9$ bestimmt worden:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
F_2^p	-0.02778	2.926	1.0362	-1.840	8.123	-13.074	6.215
F_2^d	-0.04858	2.863	0.8367	-2.532	9.145	-12.504	5.473

	b_1	b_2	b_3	b_4	c_1	c_2	c_3	c_4
F_2^p	0.285	-2.694	0.0188	0.0274	-1.413	9.366	-37.79	47.10
F_2^d	-0.008	-2.227	0.0551	0.0570	-1.509	8.553	-31.20	39.98

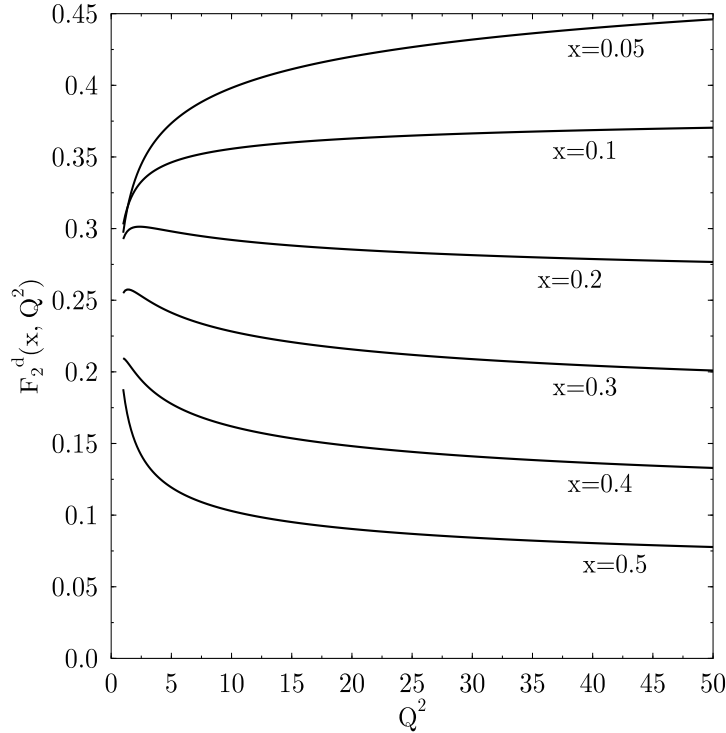


Abbildung 2.5: Die Deuteron-Strukturfunktion F_2 für feste Werte von x in Abhängigkeit von Q^2 .

Es ist auch jeweils eine Parametrisierung für die totale Fehlerfunktion verfügbar.⁴² Die Abhängigkeit der Proton-Strukturfunktion vom Bjorken- x und dem Impulsübertrag Q^2 ist für den mittleren x -Bereich in den Abb. 2.3 und 2.4 dargestellt, die mit Hilfe der obigen Parametrisierung erstellt wurden. Derselbe kinematische Bereich ist für die Deuteron-Strukturfunktion in den Abb. 2.5 und 2.6 abgebildet. Der Bereich mittlerer Bjorken- x ist in dieser Arbeit von besonderem Interesse, da die Renormalon-Vorhersagen in ihrer Gültigkeit auf genau diesen Bereich beschränkt sind. Insbesondere der Bereich kleiner x , in dem der Austausch vieler Gluonen relevant wird, wird von der Näherung großer N_f nicht abgedeckt.⁴³

Die Strukturfunktion für das Neutron erhält man aus der Differenz $2F_2^d - F_2^p$ unter der Voraussetzung, daß die nuklearen Effekte im Deuteron keine Rolle spielen.

⁴²Vgl. NMC Collaboration 1995, Tabelle 3.

⁴³Vgl. hierzu die Ausführungen in Kap. 4.4.1.

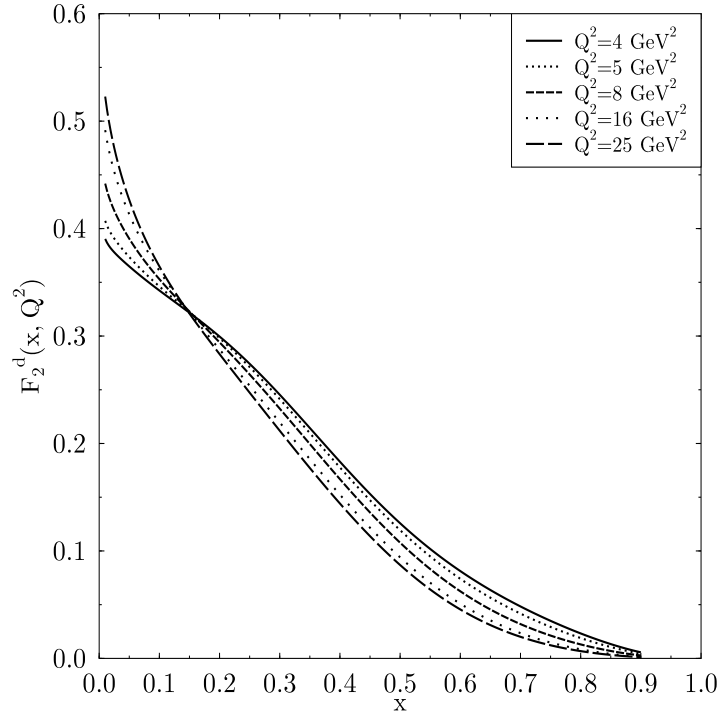


Abbildung 2.6: Die Deuteron-Strukturfunktion F_2 für feste Werte von Q^2 in Abhängigkeit von x .

In dieser Arbeit wird insbesondere die Isospin-nonsinglet Strukturfunktion wichtig werden, die durch die Kombination Proton minus Neutron gegeben ist. Mit Hilfe der Deuteron- und der Proton-Strukturfunktion erhält man diese aus der Kombination $F_2^{p-n} = 2(F_2^p - F_2^d)$ (siehe Abb. 2.7 bzw. 2.8).

Die Q^2 -Abhängigkeit der so gewonnenen Strukturfunktion macht deutlich, daß die Vorhersagen des Parton-Modells, die Strukturfunktionen seien Q^2 -unabhängig, zwar nicht völlig falsch sind, aber doch durch Korrekturen aus der QCD ergänzt werden müssen — sei es durch störungstheoretische oder höhere Twist-Korrekturen. Auf der anderen Seite kann die Analyse der Q^2 -Abhängigkeit verwendet werden, um daraus die QCD-Kopplungskonstante zu bestimmen, die über die Renormierungsgruppengleichungen ein wohldefiniertes Verhalten gegenüber einer Änderung des Impulsübertrags hat, das sich auf die QCD-Korrekturen zu $F_2(x, Q^2)$ überträgt. Die Präzision ist allerdings durch die Genauigkeit, mit der der R -Faktor

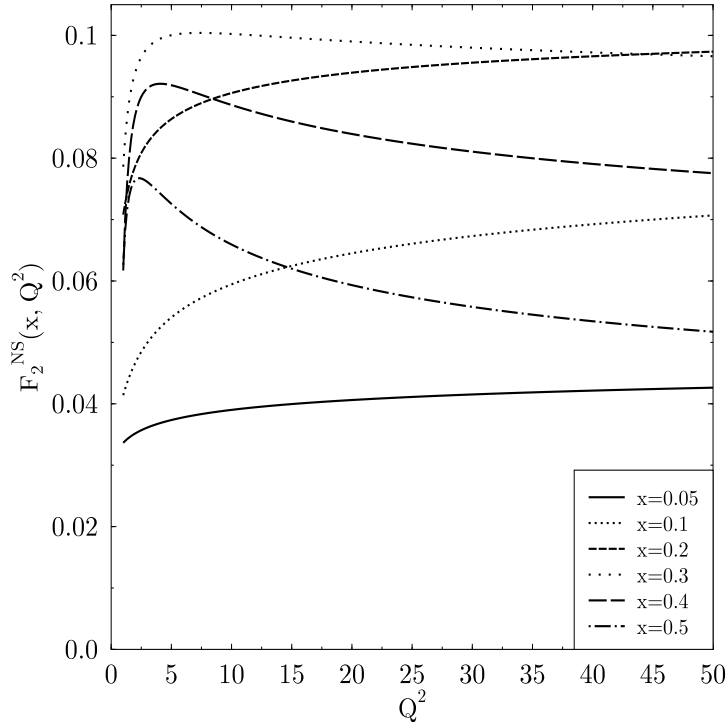


Abbildung 2.7: Die Nonsinglet-Strukturfunktion F_2 für feste Werte von x in Abhängigkeit von Q^2 .

bekannt ist, begrenzt.

2.14.2 Die polarisierte Strukturfunktion

Um polarisierte Strukturfunktionen messen zu können, müssen das streuende Lepton und das Nukleon polarisiert sein. Dann kann man aus den antisymmetrischen Teilen des leptonischen und hadronischen Tensors (2.37) und (2.64) einen nichtverschwindenden Beitrag zum differentiellen Wirkungsquerschnitt (2.32) erhalten. Dieser kann in einen longitudinalen und einen transversalen Teil aufgespalten werden. Der longitudinale Teil berücksichtigt Nukleon-Spins, die in der Richtung des longitudinal polarisierten einfallenden Leptons polarisiert sind, wobei die Differenz von parallel und antiparallel polarisierten Nukleonen gebildet wird. Entsprechend betrifft der transversale Teil Nukleonen mit Spin transversal zu dem Spin

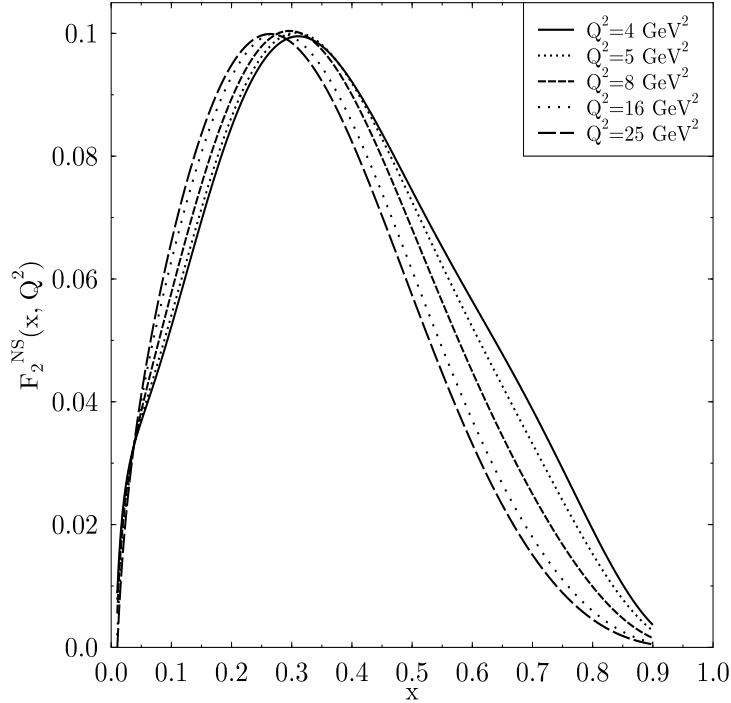


Abbildung 2.8: Die Nonsinglet-Strukturfunktion F_2 für feste Werte von Q^2 in Abhängigkeit von x .

der einfallenden Leptonen, wobei wieder die Differenz von positiver und negativer Spinpolarisation genommen wird. Die bereits erwähnte Interpretation von g_1 als longitudinaler und $g_1 + g_2$ als transversaler polarisierter Strukturfunktion wird in dieser Darstellung des Wirkungsquerschnitts bestätigt, da g_2 im longitudinalen Wirkungsquerschnitt mit der Energie der einfallenden Leptonen unterdrückt ist. Hingegen treten g_1 und g_2 im transversalen Wirkungsquerschnitt gleichberechtigt auf. Die Kenntnis von g_1 ermöglicht jedoch trotzdem eine Determination von g_2 .

In der praktischen Messung steht man vor dem Problem der unvollständigen Polarisierung von Streuteilchen und Target, so daß die Messung des relativ kleinen Wirkungsquerschnitts für polarisierte Teilchen durch den immer vorhandenen unpolarisierten Teil überlagert wird. Deshalb ist es oft vorteilhaft, die Asymmetrien $A_{||}$ und A_{\perp} zu messen, die das Verhältnis der polarisierten zu den unpolarisierten Wirkungsquerschnitten darstellen, so daß die unpolarisierten Anteile der Streuung

wegfallen.⁴⁴

Alternativ dazu können Linearkombinationen dieser Asymmetrien gebildet werden, die in der Theorie größere Verbreitung gefunden haben. Dazu betrachte man das System der Spins der transversal polarisierten Photonen und der Nukleonen, die sich je nach relativer Ausrichtung des Nukleonspins zum Gesamtspin $1/2$ oder $3/2$ kombinieren können. Die Differenz der Wirkungsquerschnitte für Gesamtspin $1/2$ und $3/2$ bildet die wichtigste Asymmetrie A_1 und bildet eine Linearkombination von longitudinalem und transversalem Wirkungsquerschnitt. Diese Differenz wird ins Verhältnis zur unpolarisierten Streuung, also der Summe beider Gesamtspins gesetzt.

$$A_1 = \frac{\sigma_{1/2} - \sigma_{3/2}}{\sigma_{1/2} + \sigma_{3/2}} = \frac{\nu^2 g_1 - Q^2 g_2}{\nu^2 F_1} . \quad (2.165)$$

Die zweite Asymmetrie, die es erlaubt auch g_2 experimentell zu bestimmen, wird mit der Möglichkeit von Spin-Flips in der Compton-Vorwärtsstreuung in Verbindung gebracht⁴⁵ und entspricht daher der Absorption eines longitudinalen virtuellen Photons durch das Nukleon:

$$A_2 = \frac{2\sigma_{Spin-Flip}}{\sigma_{1/2} + \sigma_{3/2}} = \frac{\sqrt{Q^2}(g_1 + g_2)}{\nu F_1} . \quad (2.166)$$

Vernachlässigt man diese zweite Asymmetrie, erhält man daraus $g_2 = -g_1$, so daß die erste Asymmetrie in dieser Näherung proportional zu dem Verhältnis von g_1 und F_1 wird:

$$A_1 \sim \left(1 + \frac{Q^2}{\nu^2}\right) \frac{g_1}{F_1} \quad (2.167)$$

Die so definierten Asymmetrien A_1 und A_2 sind als Linearkombination der zu messenden Asymmetrien $A_{||}$ und A_{\perp} darstellbar.⁴⁶

Die ersten polarisierten Elektron-Proton-Streu-Experimente wurden am SLAC durchgeführt.⁴⁷ Spätere Messungen wurden von EMC am CERN gemacht und gaben erste Hinweise auf die Verletzung der Ellis-Jaffe-Summenregel⁴⁸ — also dem ersten Moment der Proton-Strukturfunktion $\int_0^1 dx g_1^p(x, Q^2)$. Inzwischen liegen einige Experimente von SLAC und von der SMC am CERN mit deutlich besserer Statistik vor; die Präzision der Experimente bleibt allerdings weit hinter der für

⁴⁴Vgl. SMC Collaboration 1997a, II.C.

⁴⁵Vgl. Ioffe, Khoze, Lipatov 1984, S. 59.

⁴⁶Siehe dazu z.B. die Darstellung in Roberts 1990.

⁴⁷Vgl. SLAC 1976, 1978, 1983.

⁴⁸Vgl. EMC 1989.

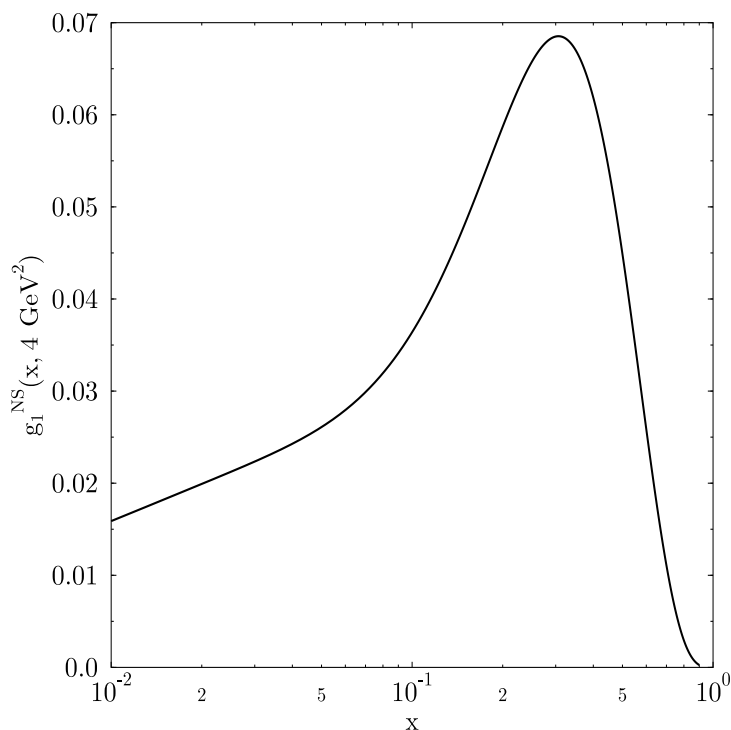


Abbildung 2.9: Die Nonsinglet-Strukturfunktion g_1^{NS} für $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ als Funktion von x .

die unpolarisierte Streuung zurück. Die Gruppen haben $g_1(x)$ für Proton-Targets⁴⁹ und für Deuteron-Targets⁵⁰ bestimmt und bestätigen alle die Verletzung der Ellis-Jaffe-Summenregel durch mehrere Standardabweichungen.

Außerdem wurde ebenfalls von der SMC-Gruppe die Asymmetrie für transversal polarisierte Targets gemessen⁵¹ und damit eine Verifikation für die Bestimmung von A_1 allein durch die Messung von $A_{||}$ geliefert, die auf der Vernachlässigung von A_2 beruht. Die Messung von A_{\perp} ist mit Null kompatibel und ergibt damit strenge obere Schranken für A_2 und damit auch für das Twist-3-Matrixelement zu g_2 . Die am SLAC gemessenen Werte für A_2 sind konsequent größer als Null⁵², ohne die

⁴⁹Vgl. SMC 1993, 1994a, 1994b, 1997a; SLAC E143 1995b.

⁵⁰Vgl. SMC 1993, 1995, 1997b; SLAC E143 1995a.

⁵¹Vgl. SMC 1994c, 1997b.

⁵²Vgl. SLAC E143 Collaboration 1996.

oberen Schranken zu verletzen.

In den meisten Experimenten wurde entweder Q^2 festgelegt oder über alle Q^2 gemittelt. Diese Methode setzt voraus, daß neben der Vernachlässigung der Spin-Flip-Asymmetrie A_2 auch die Evolution in Q^2 für die Strukturfunktionen $g_1(x, Q^2)$ und $F_1(x, Q^2)$ nahezu identisch sind. Die Qualität dieser Annahme wurde experimentell überprüft und im relevanten Bereich $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ bestätigt.⁵³ Dennoch ist bereits die leichte Q^2 -Abhängigkeit, die mit den Daten verträglich ist, als Fehlerquelle zu berücksichtigen. Außerdem ist dafür das Nichtverschwinden der transversalen Asymmetrie $A_2 > 0$ ⁵⁴ von Bedeutung. Da das erste Moment von g_2 für $Q^2 \rightarrow \infty$ verschwindet⁵⁵, ist dies als Hinweis für eine Q^2 -Abhängigkeit von A_2 bzw. dem ersten Moment von g_2 zu werten.

Die polarisierte Strukturfunktion als Funktion von Bjorken- x wurde für $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ parametrisiert⁵⁶ und an die verfügbaren experimentellen Werte angepaßt. Da eine Differenzierung der Flavours für die Polarisation des Quarksees bislang nicht möglich ist, wurden die Antiquark-Verteilungsfunktionen symmetrisch in der SU(3)-Flavor-Gruppe angenommen, so daß die Parametrisierung lediglich aus 4 Typen von Verteilungsfunktionen aufgebaut wird: up- und down-Valenz-Quark-, Gluonen- und Antiquark-Verteilungen. Der resultierende Verlauf für $g_1(x)$ ist in Abb. 2.9 für die Nonsinglet-Strukturfunktion dargestellt.

2.14.3 Zum R -Faktor

Um den R -Faktor experimentell zu bestimmen, ist der unpolarisierte Teil des Wirkungsquerschnitts (2.102) zu messen, und die Messung mit Hilfe einer Parametrisierung für die Strukturfunktion F_2 auszuwerten. Man erhält auf diese Weise eine Aussage über F_1 bzw. F_L und damit auch über den R -Faktor. Es ist zu diesem Zweck sinnvoll, den Wirkungsquerschnitt von vorneherein allein durch die Strukturfunktion F_2 und den R -Faktor auszudrücken und sich den Umweg über die anderen Strukturfunktionen zu ersparen. Dazu gehe man von (2.102) aus und ersetze darin mit (2.88) F_1 durch $F_2 - F_L$. Diese Differenz kann dann mit (2.98) durch R

⁵³Vgl. SLAC E143 Collaboration 1995c.

⁵⁴Vgl. SLAC E143 Collaboration 1996.

⁵⁵Dies ist die Aussage der Burkhardt Cottingham Summenregel; vgl. Burkhardt, Cottingham 1970.

⁵⁶Vgl. Gehrman, Stirling 1996.

ausgedrückt werden. Mit

$$K := \frac{(s-m^2)(s-m^2-2p \cdot q)}{m^2 Q^2} - 1 \quad (2.168)$$

und dem Mott-Wirkungsquerschnitt (2.103) erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{eN}}{d\nu dQ^2} &= \frac{2m\pi \alpha_{\text{em}}^2}{(s-m^2)^2 x Q^2} \left[F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2) + \frac{2x^2 m^2}{Q^2} K F_2(x, Q^2) \right] \\ &= \frac{2m\pi \alpha_{\text{em}}^2}{(s-m^2)^2 x Q^2} \left[\frac{F_2(x, Q^2)}{1+R(x, Q^2)} \left(1 + \frac{4m^2 x^2}{Q^2} \right) + \frac{2x^2 m^2}{Q^2} K F_2(x, Q^2) \right] \\ &= \frac{4m^3 x \pi \alpha_{\text{em}}^2}{(s-m^2)^2 Q^4} K \frac{F_2(x, Q^2)}{1+R(x, Q^2)} \left[\frac{2}{K} \left(1 + \frac{Q^2}{4m^2 x^2} \right) + 1 + R(x, Q^2) \right] \\ &= \frac{d\sigma}{dQ^2} \Big|_{\text{Mott}} \frac{m}{2p \cdot q} \frac{F_2(x, Q^2)}{1+R(x, Q^2)} \left[1 + R(x, Q^2) + \frac{2}{K} \left(1 + \frac{Q^2}{4m^2 x^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.169)$$

Der R -Faktor kann mit Hilfe dieser Gleichung aus den Wirkungsquerschnitten für Elektron-Nukleon-Streuung und einer Parametrisierung für die Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ extrahiert werden. Die neueste Messung dazu wurde am SLAC (Stanford Linear Accelerator Center)⁵⁷ mit Wasserstoff-, Deuterium- und Beryllium-Targets durchgeführt. In diesem Experiment wurde der kinematische Bereich $0.1 < x < 0.7$ und $0.5 < Q^2 < 7(\text{GeV}/c)^2$ abgedeckt. Die Daten sind mit früheren SLAC-Experimenten⁵⁸ ebenso wie mit der empirischen Parametrisierung⁵⁹ von R als Funktion von x und Q^2 unter Einbeziehung aller bis dahin vorhandenen experimentellen Daten konsistent (siehe Abb. 2.10 und 2.11). Weiterhin gehen die Daten stetig in die Daten anderer Experimente bei höheren Energien über.⁶⁰ Im kinematischen Bereich von $x < 0.1$ wurden Messungen von NMC (New Muon Collaboration)⁶¹ durchgeführt, die ebenfalls mit dem Whitlow-Fit konsistent sind und stetig in die Experimente für größeres x übergehen.

Da in niedrigster Ordnung der QCD — also im Parton-Modell — die Callan-Gross-Relation (2.88) gilt, erhält R seinen ersten Beitrag in erster Ordnung QCD-Störungstheorie. Da die Target-Massen-Korrekturen für großes Q^2 nicht wichtig

⁵⁷Vgl. SLAC E140X Collaboration 1996.

⁵⁸Vgl. Dasu et al. 1988, 1994.

⁵⁹Vgl. Whitlow et al. 1990.

⁶⁰Vgl. BCDMS 1989, 1990: diese Experimente basieren auf der Muon-Proton-Streuung am CERN-SPS; Yang et al. 1996: dieses Experiment am Fermilab basiert auf Neutrino-Nukleon-Streuung.

⁶¹Vgl. NMC Collaboration 1997a.

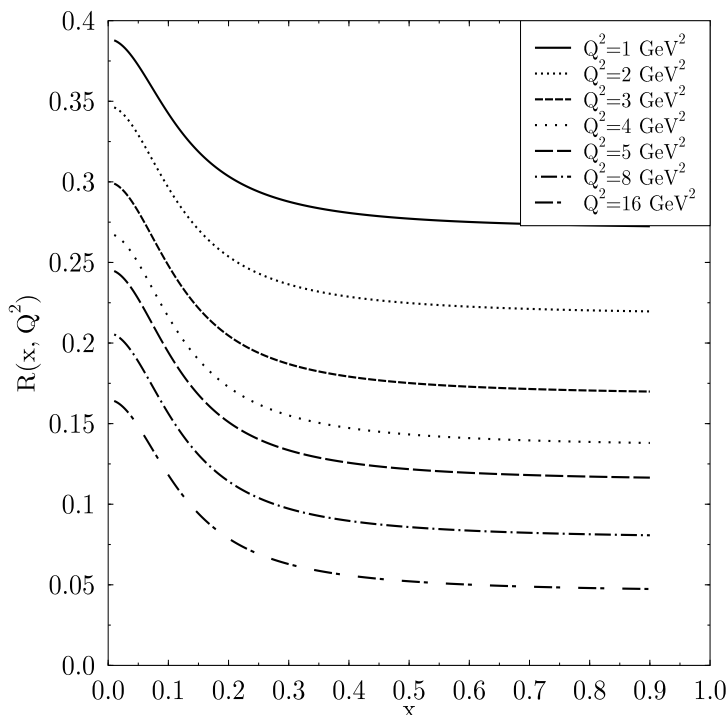


Abbildung 2.10: Der R -Faktor als Funktion von x für verschiedene Werte von Q^2 .

sind, erwartet man einen Logarithmischen Abfall von R mit wachsendem Impulsübertrag Q^2 , der in den Experimenten tatsächlich beobachtet wird. Für kleineres Q^2 von einigen GeV^2 erreicht R relevante Beträge, die allerdings durch die QCD-Störungstheorie nicht mehr vollständig beschrieben werden können, da neben den Target-Massen-Korrekturen auch höhere Twist-Korrekturen, die sich proportional zu $1/Q^2$ verhalten, wichtig werden. So ergibt sich in diesem kinematischen Bereich eine Diskrepanz⁶² von der rein störungstheoretischen Berechnung⁶³ von R und den Experimenten. Die Größe der $1/Q^2$ -Korrekturen wurde parametrisiert und durch einen Fit an die Daten abgeschätzt.⁶⁴ Die sich in dieser Analyse ergebende Korrektur, läßt eine relativ große höhere-Twist-Korrektur erwarten. In dieser Arbeit wird eine Abschätzung der Twist-4-Korrekturen zur longitudinalen Strukturfunktion und damit zu R von theoretischer Seite aus durchgeführt.

⁶²Vgl. Snchez Guilln et al. 1991.

⁶³Vgl. Duke, Kimel, Sowell 1982; Zijlstra, van Neerven 1992; Larin, Vermaseren 1993.

⁶⁴Vgl. Whitlow et al. 1990; Choi, Hatsuda, Koike, Lee 1993.

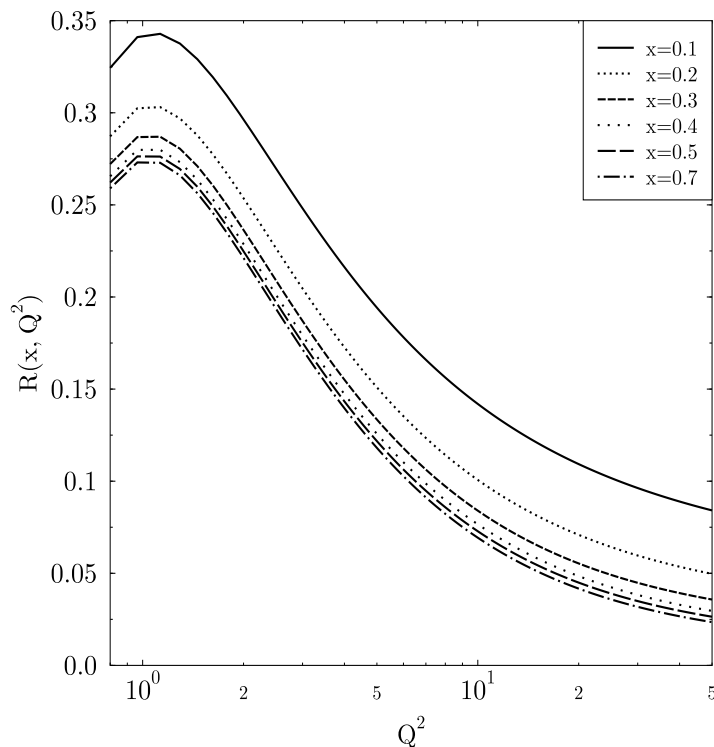


Abbildung 2.11: Der R -Faktor als Funktion von Q^2 für verschiedene Werte von Bjorken- x .

Die Abhängigkeit von R von der Nukleonenzahl des Targets erweist sich experimentell als sehr gering. Hierzu wurden die Daten von Wasserstoff- und Deuterium-Targets miteinander verglichen.⁶⁵ Die Differenz $R^d - R^p$ ist in allen Experimenten mit Null kompatibel — z.B. erhält man aus der Kombination aller SLAC-Daten $R^d - R^p = 0.005 \pm 0.010$.⁶⁶ Es wird deshalb in theoretischen und experimentellen Untersuchungen in der Regel eine Unabhängigkeit des R -Faktors von der Nukleonenzahl (solange diese klein ist) angenommen. Dennoch erwartet man theoretisch im Bereich kleiner Bjorken- x einen gewissen Anstieg der Differenz um einige Prozent.

⁶⁵Vgl. Dasu et al. 1994; SLAC E140X Collaboration 1996; NMC Collaboration 1997b.

⁶⁶Vgl. SLAC E140X Collaboration 1996.

Kapitel 3

Operatorprodukt-Entwicklung

Wie im Kapitel über die tief-inelastische Lepton-Nukleon-Streuung erläutert wurde, faktorisiert die Beschreibung des Streuprozesses in zwei Bereiche, die der großen und der kleinen Skalen. Letzterer kann perturbativ beschrieben werden, während der Bereich der großen Skalen von Mehrteilchen-Korrelationen im Nukleon dominiert wird und sich daher einer störungstheoretischen Beschreibung entzieht. Die Faktorisierung dieser beiden Bereiche ist die Grundlage für die Operatorprodukt-Entwicklung (OPE), in der die Amplitude für einen Prozeß in Matrixelemente von Operatoren, die den Bereich großer Skalen parametrisieren, und zugehörige Wilson-Koeffizienten zerlegt wird, die allein von den Bereichen kleiner Skalen bestimmt und daher rein perturbativ berechnet werden können.

Im folgenden wird die OPE der Vorwärtsstreuamplitude (2.136) durchgeführt und die dabei auftretenden Matrixelemente nach dem sogenannten Twist der Operatoren klassifiziert. Die Beschreibung des führenden Twist-Anteils der OPE ist bereits im letzten Kapitel geschehen: Die bilokalen Operatoren im zeitgeordneten Stromprodukt wurden in lokale Operatoren entwickelt (siehe (2.137)). Mit der Ordnung der Entwicklung wächst auch die Dimension der lokalen Operatoren, die in jeder Ordnung einen zusätzlichen Differential- bzw. im Ortsraum einen Impuls-Operator erhalten. Die Beschränkung auf den führenden Twist-Anteil bedeutet dann die Projektion dieser Operatoren auf den Anteil mit total symmetrischen Indizes, wie es in (2.141)–(2.144) geschehen ist.

Das gleiche Konzept kann auf Matrixelemente höheren Twists erweitert werden. Auch dabei wird die Vorwärtsstreuamplitude in lokale Operatoren entwickelt, wobei dazu eine Darstellung im Ortsraum verwendet wird. Die so gefundenen Operatoren werden in ihre Anteile unterschiedlichen Spins — und damit unterschied-

lichen Twists — zerlegt und durch Quark- und Gluonen- Feldoperatoren ausgedrückt. Die Vorwärtsstreuamplitude kann dann mit diesen Matrixelementen wohldefinierten Spins ausgedrückt werden. Schließlich ist es möglich, durch Vergleich des Resultats mit der Entwicklung (2.149) die OPE auch für einzelne Momente von Strukturfunctionen anzugeben. Insbesondere wird es darum gehen die OPE für das erste Moment der longitudinalen Strukturfunction herzuleiten, um später die Bloch-Nordsieck-Aufhebung von IR- und UV-Renormalonen zeigen zu können.

3.1 Entwicklung der Vorwärtsstreuamplitude

3.1.1 Entwicklung des Propagators nach Schwinger

Die Entwicklung der Vorwärtsstreuamplitude (2.136) ist:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(p, q, s) &= \sum_a q_a^2 i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | \bar{\psi}_a(0) \gamma_\nu iS(0, x) \gamma_\mu \psi_a(x) | ps \rangle \\
&+ \sum_a q_a^2 i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | \bar{\psi}_a(x) \gamma_\mu iS(x, 0) \gamma_\nu \psi_a(0) | ps \rangle \\
&+ \sum_{a,b} q_a q_b i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | \bar{\psi}_a(x) \gamma_\mu \psi_a(x) \bar{\psi}_b(0) \gamma_\nu \psi_b(0) | ps \rangle \quad , \quad (3.1)
\end{aligned}$$

wobei nur die Terme mit einem Propagator relevant sein werden. Der dritte Term ist der sogenannte Katzengraph — die graphische Darstellung dieses Terms ähnelt den aufmerksamen Ohren einer Katze —, der dem unkontrahierten Term der Wick-Entwicklung entspricht. Er ist von Dimension 6 und hat zwei freie Indizes, so daß er grundsätzlich einen Twist-4-Beitrag zur Vorwärtsstreuamplitude liefern könnte. Nicht notiert wurde der mit dem äußeren Nukleonenzustand unverbundene Loop-Graph.

Durch die Substitution $x \rightarrow -x$ und die Ausnutzung der Translationsinvarianz kann der erste Term als Austauschterm des zweiten geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}(p, q, s) &= \sum_a q_a^2 i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | \bar{\psi}_a(x) \gamma_\mu iS(x, 0) \gamma_\nu \psi_a(0) | ps \rangle \\
&+ (\mu \leftrightarrow \nu, \quad q \leftrightarrow -q) \\
&+ \sum_{a,b} q_a q_b i \int d^4x e^{iqx} \langle ps | \bar{\psi}_a(x) \gamma_\mu \psi_a(x) \bar{\psi}_b(0) \gamma_\nu \psi_b(0) | ps \rangle \quad . \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Die Auswertung dieses Ausdrucks wird im Schwinger-Formalismus¹, also im Orts-

¹Vgl. Schwinger 1970; 1973.

raum durchgeführt. Es ist

$$\hat{x}_\mu |x\rangle = x_\mu |x\rangle, \quad [\hat{P}_\mu, \hat{x}_\nu] = ig_{\mu\nu} \quad . \quad (3.3)$$

Die Operatoren wurden vorübergehend durch Hüte gekennzeichnet. Für den Impulsoperator gilt

$$\langle x | \hat{P}_\mu | x' \rangle = \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} + g A_\mu(x) \right) \delta(x - x') \quad (3.4)$$

und der masselose Quarkpropagator ist

$$iS(x, 0) = \langle x | \frac{i}{\hat{P}} | 0 \rangle \quad (3.5)$$

mit der Dirac-Gleichung

$$\hat{P} S(x, x') = \langle x | x' \rangle = \delta^4(x - x') \quad . \quad (3.6)$$

Der Dirac-Spinor ist

$$\hat{\psi} |x\rangle = |x\rangle \hat{\psi}(x) \quad , \quad \langle x | \hat{\bar{\psi}} = \hat{\bar{\psi}}(x) \langle x | \quad . \quad (3.7)$$

Schließlich erhält man für den Translationsoperator die Beziehung

$$\langle x | e^{\pm iqx} \hat{P}_\mu | 0 \rangle = \langle x | \left(\hat{P}_\mu \pm \hat{q}_\mu \right) e^{\pm iqx} | 0 \rangle \quad . \quad (3.8)$$

Nachdem der Formalismus im Ortsraum definiert ist können die Hüte wieder weggelassen werden. Für den Impulsoperator P gibt es die Möglichkeit von Verwechslungen, so daß der Operator durch einen Großbuchstaben und der normale Viererimpuls durch einen Kleinbuchstaben gekennzeichnet wird.

Die Vorwärtsstreuamplitude (3.2) erhält dadurch die Gestalt:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(p, q, s) &= \sum_a q_a^2 i \int d^4x \langle ps | \langle x | \bar{\psi}_a \gamma_\mu \frac{i}{\hat{P} + \not{q}} \gamma_\nu \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle + (\mu \leftrightarrow \nu, q \leftrightarrow -q) \\ &= \sum_a q_a^2 i \int d^4x \langle ps | \langle x | \bar{\psi}_a \left(\gamma_\mu \frac{i}{\hat{P} + \not{q}} \gamma_\nu + \gamma_\nu \frac{i}{\hat{P} - \not{q}} \gamma_\mu \right) \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \quad , \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei der Katzensgraph nicht mehr notiert wurde.² Die Propagatoren werden formal in eine Reihe entwickelt:

$$\frac{1}{\hat{P} \pm \not{q}} = \pm \frac{1}{\not{q}} - \frac{1}{\not{q}} \hat{P} \frac{1}{\not{q}} \pm \frac{1}{\not{q}} \hat{P} \frac{1}{\not{q}} \hat{P} \frac{1}{\not{q}} - \frac{1}{\not{q}} \hat{P} \frac{1}{\not{q}} \hat{P} \frac{1}{\not{q}} \hat{P} \frac{1}{\not{q}} \pm \dots \quad . \quad (3.10)$$

²Der Katzensgraph führt zwar auf eine Twist-4-Korrektur, ist allerdings von der Ordnung $m^3/(Q^2)^{3/2}$ und damit gegenüber den m^2/Q^2 Termen der übrigen Twist-4-Beiträge unterdrückt. Vgl. dazu Ehrnsperger 1995.

Die Entwicklung der Propagatoren geht aus der Lichtkegelentwicklung der Quarkfelder (2.115) durch eine Fourier-Transformation hervor³. In beiden Fällen ist das Resultat eine Entwicklung der bilokalen Operatoren in eine Reihe von lokalen Operatoren. Das Einsetzen der Entwicklung in (3.9) ergibt:

$$\begin{aligned}
& T_{\mu\nu}(p, q, s) \\
&= \sum_a q_a^2 \int d^4x \langle ps | \langle x | \frac{1}{Q^2} \bar{\psi}_a (\gamma_\mu \not{x} \gamma_\nu - \gamma_\nu \not{x} \gamma_\mu) \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \\
&+ \sum_a q_a^2 \int d^4x \langle ps | \langle x | \frac{1}{Q^4} \bar{\psi}_a (\gamma_\mu \not{x} \not{P} \not{x} \gamma_\nu + \gamma_\nu \not{x} \not{P} \not{x} \gamma_\mu) \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \\
&+ \sum_a q_a^2 \int d^4x \langle ps | \langle x | \frac{1}{Q^6} \bar{\psi}_a (\gamma_\mu \not{x} \not{P} \not{x} \not{P} \not{x} \gamma_\nu - \gamma_\nu \not{x} \not{P} \not{x} \not{P} \not{x} \gamma_\mu) \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \\
&+ \sum_a q_a^2 \int d^4x \langle ps | \langle x | \frac{1}{Q^8} \bar{\psi}_a (\gamma_\mu \not{x} \not{P} \not{x} \not{P} \not{x} \not{P} \not{x} \gamma_\nu + \gamma_\nu \not{x} \not{P} \not{x} \not{P} \not{x} \not{P} \not{x} \gamma_\mu) \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \\
&+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^6}\right) \\
&\equiv T_{\mu\nu}^{(1)}(p, q, s) + T_{\mu\nu}^{(2)}(p, q, s) + T_{\mu\nu}^{(3)}(p, q, s) + T_{\mu\nu}^{(4)}(p, q, s) + \dots \quad . \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Die Terme dieser Entwicklung sind im Wechsel symmetrisch und antisymmetrisch gegenüber der Vertauschung der Indizes μ und ν , so daß nur jeder zweite Term zur polarisierten bzw. unpolarisierten Lepton-Nukleon-Streuung beiträgt. Mit jeder Ordnung kommt ein weiterer Faktor $1/Q^2$ hinzu. Deshalb genügt es bei hinreichend großen Impulsüberträgen, sich auf die jeweils ersten Terme zu beschränken. Da jedoch hier gerade das Interesse den Korrekturen zu diesen führenden Termen gilt, wird es notwendig sein, auch diese in die Betrachtung miteinzubeziehen.

Dabei ist zu beachten, daß eine naive Identifikation der höheren Ordnungen in der Entwicklung mit den Beiträgen zu höherem Twist nicht korrekt ist. Der Twist ist über die Symmetrieeigenschaften der Operatoren und nicht über die Potenz der Unterdrückung durch $1/Q^2$ definiert. Deshalb wird in jeder Ordnung der entsprechende Operator in seine Anteile unterschiedlichen Operator-Spins zu zerlegen sein, um die tatsächlichen Beiträge zu höherem Twist zu lokalisieren. Dazu werden zunächst die 4 Terme in (3.11) auf jeweils einen für den Term charakteristischen Operator zurückgeführt, der im wesentlichen durch eine γ -Matrix und eine wachsende Zahl von Impulsoperatoren gegeben sein wird, die den kovarianten Differentialoperatoren der Lichtkegelentwicklung entsprechen.

³In Gleichung (2.115), die für freie Quarkfelder gilt, sind dazu die eichkovarianten Ableitungen einzusetzen.

3.1.2 Führender Twist-Operator zu g_1

Für den ersten antisymmetrischen Teil ist der Operator offensichtlich. Mit (B.38) folgt

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)}(p, q, s) &= 2i\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho} q^\lambda \frac{1}{Q^2} \sum_a q_a^2 \int d^4x \langle ps | \langle x | \bar{\psi}_a \gamma_5 \gamma^\rho \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \\ &= i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\lambda}{p \cdot q} \omega \sum_a q_a^2 \langle ps | \bar{\psi}_a(0) \gamma^\rho \gamma_5 \psi_a(0) | ps \rangle . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dieser Operator ist ein reiner Twist-2-Operator. Der Vergleich von (3.12) mit der allgemeinen Zerlegung von $T_{\mu\nu}$ in seine Lorentzstrukturen (2.148) zeigt, daß es sich hierbei um den Twist-2-Operator zu dem reduzierten Matrixelement $a_{A,0}^{(a)}$ handelt, also um das Matrixelement, das mit dem ersten Moment der polarisierten Strukturfunktion g_1 assoziiert wird:

$$q_a^2 \langle ps | \bar{\psi}_a(0) \gamma^\rho \gamma_5 \psi_a(0) | ps \rangle = s^\rho a_{A,0}^{(a)} \quad (3.13)$$

Für das Moment folgt daher:

$$\int_0^1 dx g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} a_{A,0} \quad , \quad (3.14)$$

wobei über die Quarksorten summiert wurde.

3.1.3 Führender Twist-Operator zu $F_{1,2,L}$

Für den zweiten Term in (3.11) stellt sich die Analyse etwas komplizierter aber noch übersichtlich dar. Die Lorentzstruktur wird vereinfacht:

$$q^\alpha P^\beta q^\lambda \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\nu = 4P \cdot q q_\mu \gamma_\nu - 2P \cdot q \not{q} \gamma_\mu \gamma_\nu - 2q^2 P_\mu \gamma_\nu + \mathcal{O}(\mathcal{P}) \quad , \quad (3.15)$$

wobei die Symmetrie des Anfangsausdrucks unter der Vertauschung von α und λ ausgenutzt wurde und die Terme mit einem äußeren $P^\mu \gamma_\mu$ im Hinblick auf die Bewegungsgleichung vernachlässigt wurden. Durch die Addition des Terms, in dem μ und ν ausgetauscht werden, folgt:

$$q^\alpha P^\beta q^\lambda \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\nu = 4P \cdot q (q_\mu \gamma_\nu + q_\nu \gamma_\mu - \not{q} g_{\mu\nu}) - 2q^2 (P_\mu \gamma_\nu + P_\nu \gamma_\mu) + \mathcal{O}(\mathcal{P}) . \quad (3.16)$$

Das entscheidende Matrixelement für $T_{\mu\nu}^{(2)}$ ist daher

$$M_a^{\alpha\beta} = q_a^2 \langle p | \bar{\psi}_a(0) P^\alpha \gamma^\beta \psi_a(0) | ps \rangle \equiv q_a^2 \langle ps | \bar{\psi}_a(0) O^{\alpha\beta} \psi_a(0) | p \rangle . \quad (3.17)$$

Um zu sehen welchen Twist der Operator $O^{\alpha\beta}$ hat, sind die Anteile unterschiedlichen Operator-Spins zu untersuchen⁴:

$$O^{\alpha\beta} \equiv O_2^{\alpha\beta} + O_1^{\alpha\beta} + O_0^{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

Der Index an den Operatoren O_i ($i = 1, 2, 3$) gibt den Operator-Spin an. Den Spin-2-Anteil erhält man durch Symmetrisierung der Lorentzindizes und die Forderung nach Spurlosigkeit. Daher folgt:

$$O_2^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (P^\alpha \gamma^\beta + P^\beta \gamma^\alpha) \quad (3.19)$$

Spuren müssen nicht abgezogen werden, da die Spurterme von der Ordnung der Bewegungsgleichung sind und deshalb vernachlässigt werden. Aus dem gleichen Grund verschwindet auch der Spin-0-Anteil, den man durch symmetrische Kontraktion der beiden Lorentzindizes gewinnt und der deshalb mit den Spurtermen identisch ist. Aber auch der Spin-1-Anteil, den man durch antisymmetrische Kopplung der Lorentzindizes gewinnt, ist von der Ordnung der Bewegungsgleichung, denn

$$\begin{aligned} \bar{\psi} P_\mu \gamma_\nu \psi &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\alpha + \gamma_\alpha \gamma_\mu) P^\alpha \gamma_\nu \psi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\alpha P^\alpha \gamma_\nu \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} g_{\alpha\nu} \gamma_\mu P^\alpha \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} P_\nu \gamma_\mu \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Das bedeutet, daß auch die antisymmetrische Kombination

$$P^\alpha \gamma^\beta - P^\beta \gamma^\alpha \quad (3.21)$$

von der Ordnung der Bewegungsgleichung ist, so daß der Operator $O^{\alpha\beta}$ ausschließlich einen Spin-2-Anteil besitzt, der zu dem Matrixelement (3.17) beiträgt:

$$M_a^{\alpha\beta} = q_a^2 \langle p | \bar{\psi}_a(0) O_2^{\alpha\beta} \psi_a(0) | p \rangle + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (3.22)$$

Damit ist $M^{\alpha\beta}$ ein reines Twist-2-Matrixelement. Der zweite Term der Vorwärtsstreuamplitude in (3.11) wird mit (3.16) und durch dieses Matrixelement ausgedrückt:

$$T_{\mu\nu}^{(2)}(p, q) = \sum_a \frac{q_a^2}{Q^4} \langle p | \bar{\psi}_a(0) (4P \cdot q q_\mu \gamma_\nu + 4P \cdot q q_\nu \gamma_\mu - 4P \cdot q \not{q} g_{\mu\nu})$$

⁴Genauere Erläuterungen zu dem Operator-Spin und der Art, wie dieser zu ermitteln ist, können dem Kap. 3.2 entnommen werden. Für den hier betrachteten Operator ist eine wirkliche Zerlegung in Spin-Anteile noch nicht notwendig.

$$\begin{aligned}
& -2q^2 P_\mu \gamma_\nu - 2q^2 P_\nu \gamma_\mu) \psi_a(0)|p\rangle \\
= & \sum_a \frac{4}{Q^2} \left(\frac{q^\alpha q_\mu}{Q^2} M_{\alpha\nu}^a + \frac{q^\alpha q_\nu}{Q^2} M_{\alpha\mu}^a - \frac{q^\alpha q^\beta}{Q^2} g_{\mu\nu} M_{\alpha\beta}^a + M_{\mu\nu}^a \right). \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lorentzstruktur des Twist-2-Matrixelements kann direkt angegeben werden. Sie hat ausschließlich einen symmetrischen Anteil und kann nur aus dem Impuls p^μ aufgebaut werden:

$$M_{\mu\nu}^a = p_\mu p_\nu a_{2,0}^a \quad (3.24)$$

mit dem reduzierten Matrixelement $a_{2,0}^a$, das seine Bezeichnung im Hinblick auf die zu erwartende Identität mit dem reduzierten Matrixelement in (2.148) erhalten hat. Setzt man dies in (3.23) ein, kann der resultierende Ausdruck auf die Form des unpolarisierten Anteils der allgemeinen Zerlegung des Vorwärtsstreuamplitude (2.148) gebracht werden:

$$T_{\mu\nu}^{(2)}(p, q, s) = \sum_a a_{2,0}^a \omega^2 \left(\frac{p_\nu q_\mu + p_\mu q_\nu}{p \cdot q} - g_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu \frac{Q^2}{(p \cdot q)^2} \right). \quad (3.25)$$

Die Lorentzstruktur ist mit der in (2.148) identisch und die Potenz von ω ist die erste in der Reihe, so daß das Matrixelement $M_{\mu\nu}$ als führender Twist-Beitrag zum erstem Moment von F_2 angesehen werden muß. Auf der anderen Seite sieht man, daß dieser Operator keinen Beitrag zur longitudinalen Strukturfunktion liefert, da deren Lorentzstruktur in der Analyse des Operators nicht vorgekommen ist. Um dies explizit zu sehen, wird (3.25) noch einmal anders notiert:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(2)}(p, q, s) = & 2 \sum_a a_{2,0}^a \omega \frac{1}{p \cdot q} \left(p_\mu + q_\mu \frac{p \cdot q}{Q^2} \right) \left(p_\nu + q_\nu \frac{p \cdot q}{Q^2} \right) \\
& - \sum_a a_{2,0}^a \omega^2 \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right). \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Die Lorentzstrukturen sind mit denen zu den Strukturfunktionen F_2 und F_1 identisch. Das Matrixelement für F_1 und F_2 ist demnach im führenden Twist identisch. Man kann außerdem durch den Vergleich mit der in die gleiche Form gebrachte Vorwärtsstreuamplitude (2.148) die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx x F_1(x, Q^2) &= \frac{1}{2} \sum_a a_{2,0}^a, \\
\int_0^1 dx F_2(x, Q^2) &= \sum_a a_{2,0}^a \quad (3.27)
\end{aligned}$$

für die jeweils ersten Momente ablesen. Aus diesen beiden Beziehungen folgt die Callan-Gross-Relation (2.88), wodurch die Aussage bestätigt wird, der führende Twist-Operator liefere keinen Beitrag zur longitudinalen Strukturfunktion. Gleichzeitig wird die Callan-Gross-Relation aus der feldtheoretischen Perspektive noch einmal hergeleitet.

Vergleicht man (3.27) mit der Notation der Strukturfunktionen mit Hilfe von Verteilungsfunktionen im Parton-Modell (2.85) und (2.86), eröffnet sich die Möglichkeit einer feldtheoretischen Definition von Verteilungsfunktionen mit Hilfe von Matrixelementen.⁵

3.1.4 Höherdimensionale Operatoren: Teil 1

Die Bestimmung der höheren Twist-Operatoren in der OPE geschieht zwar nach dem gleichen Schema wie für die führenden Twist-Terme, muß jedoch wegen des wesentlich größeren Aufwands in zwei Teile zerlegt werden. Der erste Teil beinhaltet die Rückführung von $T_{\mu\nu}^{(3,4)}$ auf jeweils einen Operator-Typ. Diese Operatoren werden in Kap. 3.2 in ihre Operator-Spin-Anteile zerlegt. Die daraus hervorgehenden Operatoren haben einen wohldefinierten Operator-Spin und damit einen wohldefinierten Twist und können dann wieder in die Vorwärtsstreuamplitude eingesetzt werden.

Höherdimensionale Operatoren für g_1

Für die höheren Twist-Matrixelemente in der polarisierten Streuung ist der zweite in μ und ν antisymmetrische Term $T_{\mu\nu}^{(3)}$

$$T_{\mu\nu}^{(3)}(p, q, s) = \sum_a \frac{q_a^2}{Q^6} \int d^4x \langle ps | \langle x | \bar{\psi}_a (\gamma_\mu \not{P} \not{q} \not{P} \not{q} \gamma_\nu - \gamma_\nu \not{P} \not{q} \not{P} \not{q} \gamma_\mu) \psi_a | 0 \rangle | ps \rangle \quad (3.28)$$

zu betrachten. Der relevante Operator, auf den alle Terme zurückgeführt werden können ist

$$O^{\alpha\beta\lambda} = P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda \quad . \quad (3.29)$$

Für das Produkt von sieben γ -Matrizen in (3.28) gilt:

$$\gamma_\mu \not{P} \not{q} \not{P} \not{q} \gamma_\nu = q^{\mu_1} P^{\mu_2} q^{\mu_3} P^{\mu_4} q^{\mu_5} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_\nu$$

⁵Diese Definition von Verteilungsfunktionen geht auf Collins 1980; Collins, Soper 1982 zurück.

$$\begin{aligned}
&= 2P \cdot q q^{\mu_1} P^{\mu_4} q^{\mu_5} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_\nu - q^2 P^{\mu_2} P^{\mu_4} q^{\mu_5} \gamma_\mu \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_\nu \\
&= 4(P \cdot q)^2 q^{\mu_1} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_\nu - 2q^2 P \cdot q P^{\mu_4} \gamma_\mu \gamma_{\mu_4} \gamma_\nu \\
&\quad - 2q^2 P^{\mu_2} P \cdot q \gamma_\mu \gamma_{\mu_2} \gamma_\nu + q^2 P^{\mu_2} P^{\mu_4} q^{\mu_5} \gamma_\mu \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\mu_4} \gamma_\nu \\
&= 2 \left(2(P \cdot q)^2 q^\rho - q^2 P \cdot q P^\rho - q^2 P^\rho P \cdot q \right) \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \\
&\quad + 2q^2 q^\lambda P_\mu P^\rho q^\lambda \gamma_\lambda \gamma_\rho \gamma_\nu + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Die Addition des Austauschterms liefert:

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \gamma_\nu - \gamma_\nu \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \gamma_\mu \\
&= 4i \varepsilon_{\mu\rho\nu\lambda} \gamma_5 \left(2q_\alpha q_\beta q^\rho - q^2 q_\alpha g_\beta^\rho - q^2 g_\alpha^\rho q_\beta \right) P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda \\
&\quad + 2i q^2 q^\eta (\varepsilon_{\eta\beta\nu\lambda} g_{\mu\alpha} - \varepsilon_{\eta\beta\mu\lambda} g_{\nu\alpha}) \gamma_5 P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda \\
&\quad + 2q^2 q^\eta (\sigma_{\eta\beta\nu\lambda} g_{\mu\alpha} - \sigma_{\eta\beta\mu\lambda} g_{\nu\alpha}) P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Da der Operator (3.29) in allen Termen auftritt, kann die Vorwärtsstreuamplitude (3.28) durch das zu (3.17) analog definierte Matrixelement

$$M_a^{\alpha\beta\lambda} = q_a^2 \langle ps | \bar{\psi}_a(0) O^{\alpha\beta\lambda} \psi_a(0) | ps \rangle \quad (3.32)$$

ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(3)}(p, q, s) &= \sum_a \left\{ 8i \varepsilon_{\mu\rho\nu\lambda} \gamma_5 \frac{q_\alpha q_\beta q^\rho}{Q^6} + 4i \varepsilon_{\mu\beta\nu\lambda} \gamma_5 \frac{q_\alpha}{Q^4} + 4i \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \gamma_5 \frac{q_\beta}{Q^4} \right. \\
&\quad - 2i \varepsilon_{\eta\beta\nu\lambda} \gamma_5 g_{\mu\alpha} \frac{q^\eta}{Q^4} + 2i \varepsilon_{\eta\beta\mu\lambda} \gamma_5 g_{\nu\alpha} \frac{q^\eta}{Q^4} \\
&\quad \left. - 2\sigma_{\eta\beta\nu\lambda} g_{\mu\alpha} \frac{q^\eta}{Q^4} + 2\sigma_{\eta\beta\mu\lambda} g_{\nu\alpha} \frac{q^\eta}{Q^4} \right\} M_a^{\alpha\beta\lambda} \quad . \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Das Matrixelement des Operators $O^{\alpha\beta\lambda}$ wurde noch nicht in seine Spin-Anteile — und damit Twist-Anteile — zerlegt, so daß vor der Bestimmung der Twist-4-Matrixelemente zunächst die Spin-Zerlegung des Operators erfolgen muß.

Höherdimensionale Operatoren für $F_{1,2,L}$

Für die unpolarisierten Streuung enthält der zweite symmetrische Term in (3.11)

$$T_{\mu\nu}^{(4)}(p, q) = \sum_a \frac{q_a^2}{Q^8} \int d^4 x \langle p | \langle x | \bar{\psi}_a (\gamma_\mu \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \gamma_\nu + (\mu \leftrightarrow \nu)) \psi_a | 0 \rangle | p \rangle \quad (3.34)$$

die höheren Twist-Korrekturen. Der Term in der Klammer kann durch den Operator

$$O^{\alpha\beta\lambda\rho} = P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho \quad (3.35)$$

ausgedrückt werden. Dazu wird das Produkt von 9 γ -Matrizen unter Verwendung der Bewegungsgleichung auf eine Summe von Produkten von 3 γ -Matrizen zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
& \gamma_\mu \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \not{P} \gamma_\nu = q^{\mu_1} P^{\mu_2} q^{\mu_3} P^{\mu_4} q^{\mu_5} P^{\mu_6} q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu \\
& = 2P \cdot q q^{\mu_1} P^{\mu_4} q^{\mu_5} P^{\mu_6} q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu \\
& \quad - q^2 P^{\mu_2} P^{\mu_4} q^{\mu_5} P^{\mu_6} q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_5} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu \\
& = 4(P \cdot q)^2 q^{\mu_1} P^{\mu_6} q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu - 2q^2 P \cdot q P^{\mu_4} P^{\mu_6} q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_6} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu \\
& \quad - 2q^2 P^{\mu_2} P^{\mu_4} P \cdot q q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu + q^4 P^{\mu_2} P^{\mu_4} P^{\mu_6} \gamma_\mu \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_6} \gamma_\nu \\
& = 8(P \cdot q)^3 q^{\mu_1} \gamma_\mu \gamma_{\mu_1} \gamma_\nu - 4q^2 (P \cdot q)^2 P^{\mu_6} \gamma_\mu \gamma_{\mu_6} \gamma_\nu - 4q^2 P \cdot q P^{\mu_4} P \cdot q \gamma_\mu \gamma_{\mu_4} \gamma_\nu \\
& \quad + 2q^2 P \cdot q P^{\mu_4} P^{\mu_6} q^{\mu_7} \gamma_\mu \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_7} \gamma_{\mu_6} \gamma_\nu - 4q^2 P_\mu P^{\mu_4} P \cdot q q^{\mu_7} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_7} \gamma_\nu \\
& \quad + 2q^4 P_\mu P^{\mu_4} P^{\mu_6} \gamma_{\mu_4} \gamma_{\mu_6} \gamma_\nu \\
& = 8(P \cdot q)^3 q^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu - 4q^2 (P \cdot q)^2 P^\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu - 4q^2 P \cdot q P^\rho P \cdot q \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\nu \\
& \quad + 4q^2 P \cdot q P^\beta P_\nu q^\rho \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\rho - 4q^2 P_\mu P^\beta P \cdot q q^\rho \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\nu + 2q^4 P_\mu P^\beta P^\rho \gamma_\beta \gamma_\rho \gamma_\nu . \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Durch die Addition des Terms, in dem μ und ν vertauscht sind, erhält man von den ersten drei Summanden $\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}$ -Terme, während in den letzten drei Summanden zusätzlich auch $\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}$ -Terme auftreten. In allen Termen ist der Operator (3.35) enthalten. Dessen Matrixelement wird analog zu (3.17) definiert:

$$M_a^{\alpha\beta\lambda\rho} = q_a^2 \langle p | \bar{\psi}_a(0) O^{\alpha\beta\lambda\rho} \psi_a(0) | p \rangle \quad (3.37)$$

Der symmetrisierte Ausdruck (3.36) wird in die Vorwärtsstreuamplitude (3.34) eingesetzt und durch die Matrixelemente (3.37) ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(4)}(p, q, s) = & \sum_a \left\{ 16 \frac{q^\eta q_\alpha q_\beta q_\lambda}{q^8} \sigma_{\mu\eta\nu\rho} - 8 \frac{q_\alpha q_\beta}{q^6} \sigma_{\mu\lambda\nu\rho} - 8 \frac{q_\alpha q_\lambda}{q^6} \sigma_{\mu\beta\nu\rho} \right. \\
& + 4 \frac{q_\alpha q^\eta}{q^6} (\sigma_{\mu\beta\eta\rho} + i\varepsilon_{\mu\beta\eta\rho} \gamma_5) g_{\nu\lambda} - 4 \frac{q_\lambda q^\eta}{q^6} (\sigma_{\beta\eta\mu\rho} + i\varepsilon_{\beta\eta\mu\rho} \gamma_5) g_{\nu\alpha} \\
& + 4 \frac{q_\alpha q^\eta}{q^6} (\sigma_{\nu\beta\eta\rho} + i\varepsilon_{\nu\beta\eta\rho} \gamma_5) g_{\mu\lambda} - 4 \frac{q_\lambda q^\eta}{q^6} (\sigma_{\beta\eta\nu\rho} + i\varepsilon_{\beta\eta\nu\rho} \gamma_5) g_{\mu\alpha} \\
& \left. + 2 \frac{1}{q^4} (\sigma_{\beta\lambda\nu\rho} + i\varepsilon_{\beta\lambda\nu\rho} \gamma_5) g_{\mu\alpha} + 2 \frac{1}{q^4} (\sigma_{\beta\lambda\mu\rho} + i\varepsilon_{\beta\lambda\mu\rho} \gamma_5) g_{\nu\alpha} \right\} M_a^{\alpha\beta\lambda\rho} . \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Die Matrixelemente enthalten nach wie vor Anteile unterschiedlichen Spins zwischen 0 und 4. Ihre Dimension ist 6, so daß man den Spin-2-Anteil benötigt, um den Twist-4-Beitrag zur Vorwärtsstreuamplitude zu erhalten. Der total symmetrische Spin-4-Anteil ist ein Twist-2-Operator, der zu dem nächsthöheren Moment der

unpolarisierten Strukturfunktionen beitragen wird. Durch die Betrachtung höherdimensionaler Operatoren erhält man daher einerseits höhere Momente mit führenden Twist-Operatoren und andererseits höhere Twist-Operatoren zum ersten Moment.

3.2 Spin-Zerlegung von Operatoren

Die lokalen Operatoren, die in ihre Anteile unterschiedlichen Operator-Spins zu zerlegen sind, haben die Form:

$$\bar{\psi}(x)O^{\mu_1 \dots \mu_n}\psi(x) = \bar{\psi}(x)P^{\mu_1} \dots P^{\mu_{n-1}}\gamma^{\mu_n}\psi(x) \quad , \quad (3.39)$$

wobei die Impulsoperatoren durch die kovarianten Ableitungen gegeben sind: $P^\mu = iD^\mu$. Diese Struktur hat sich zwingend aus der Entwicklung der bilokalen Operatoren in lokale Operatoren im letzten Abschnitt ergeben.

Die Zerlegung solcher Operatoren in Anteile mit unterschiedlichem Operator-Spin hat nichts mit dem physikalischen Spin gemeinsam. Es handelt sich um eine Klassifikation der Operatoren nach Symmetrieeigenschaften, die lediglich analog zu der Kopplung mehrerer Drehimpulse funktioniert. So erhält man den Anteil mit maximalem Spin durch die Forderung nach total symmetrischen Indizes und Spurlosigkeit. Die symmetrische Kontraktion von zwei Indizes führt zu Verringerung des Operator-Spins um 2.

3.2.1 Zerlegung des Operators $P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda$

Der Operator

$$O^{\alpha\beta\lambda} = P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda \quad (3.40)$$

hat maximalen Operator-Spin 3 und ist daher in die folgenden Anteile zu zerlegen:

$$O^{\alpha\beta\lambda} = O_3^{\alpha\beta\lambda} + O_2^{\alpha\beta\lambda} + O_1^{\alpha\beta\lambda} + O_0^{\alpha\beta\lambda} \quad , \quad (3.41)$$

wobei der Index den Operator-Spin angibt. Der Operator kann allgemein als Linearkombination von allen möglichen Lorentzstrukturen notiert werden:

$$\begin{aligned} O^{\alpha\beta\lambda} = & a_1 P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda + a_2 P^\alpha P^\lambda \gamma^\beta + a_3 P^\beta P^\lambda \gamma^\alpha + a_4 P^\beta P^\alpha \gamma^\lambda + a_5 P^\lambda P^\alpha \gamma^\beta \\ & + a_6 P^\lambda P^\beta \gamma^\alpha + a_7 g^{\alpha\beta} P^2 \gamma^\lambda + a_8 g^{\alpha\lambda} P^2 \gamma^\beta + a_9 g^{\beta\lambda} P^2 \gamma^\alpha \\ & + a_{10} g^{\alpha\beta} \not{P} P^\lambda + a_{11} g^{\alpha\beta} P^\lambda \not{P} + a_{12} g^{\alpha\lambda} \not{P} P^\beta + a_{13} g^{\beta\lambda} P^\alpha \not{P} \\ & + a_{14} g^{\alpha\lambda} P^\beta \not{P} + a_{15} g^{\beta\lambda} \not{P} P^\alpha + a_{16} \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} A_\rho \quad . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Den Spin-3-Anteil erhält man durch die Forderung nach Spurlosigkeit und totaler Symmetrie der Indizes. Bildet man die Spur des Operators mit $g_{\alpha\beta}$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 = g_{\alpha\beta} O_3^{\alpha\beta\lambda} &= P^2 \gamma^\lambda (a_1 + a_4 + 4a_7 + a_8 + a_9) \\ &+ \mathcal{P} P^\lambda (a_2 + a_3 + 4a_{10} + a_{12} + a_{15}) \\ &+ P^\lambda \mathcal{P} (a_5 + a_6 + 4a_{11} + a_{13} + a_{14}) \quad , \end{aligned} \quad (3.43)$$

so daß wegen der Unabhängigkeit der Operatoren drei Bedingungen für die Koeffizienten folgen. Für die anderen beiden Spuren folgen jeweils drei weitere Bedingungen, die jedoch überflüssig sind, wenn man zusätzlich die Symmetrieforderungen

$$O_3^{\alpha\beta\lambda} = O_3^{\beta\alpha\lambda} \quad , \quad O_3^{\alpha\beta\lambda} = O_3^{\lambda\beta\alpha} \quad , \quad O_3^{\alpha\beta\lambda} = O_3^{\alpha\lambda\beta} \quad (3.44)$$

berücksichtigt, die auf weitere Bedingungen an die Koeffizienten führen, nämlich

$$\begin{aligned} a_1 = a_4, \quad a_2 = a_3, \quad a_5 = a_6, \quad a_8 = a_9, \quad a_{12} = a_{15}, \quad a_{13} = a_{14}, \\ a_1 = a_6, \quad a_2 = a_5, \quad a_3 = a_4, \quad a_7 = a_9, \quad a_{10} = a_{15}, \quad a_{11} = a_{13}, \\ a_1 = a_2, \quad a_3 = a_6, \quad a_4 = a_5, \quad a_7 = a_8, \quad a_{10} = a_{12}, \quad a_{11} = a_{14}, \\ a_{16} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Setzt man diese Beziehungen zwischen den Koeffizienten in (3.43) ein, verbleiben drei Gleichungen für 4 Koeffizienten:

$$a_1 + 3a_7 = 0 \quad , \quad a_1 + 3a_{10} = 0 \quad , \quad a_1 + 3a_{11} = 0 \quad (3.46)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 \quad , \quad a_{16} = 0 \\ a_7 = a_8 = a_9 \quad , \quad a_{10} = a_{12} = a_{15} \quad , \quad a_{11} = a_{13} = a_{14} \quad . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Das System (3.46) ist noch unterbestimmt. Ein Koeffizient wird festgelegt, um die Linearkombination richtig zu normieren: $a_1 := 1/6$. Dann folgt:

$$a_7 = a_{10} = a_{11} = -\frac{1}{18} \quad , \quad (3.48)$$

so daß der Spin-3 Anteil des Operators feststeht:

$$\begin{aligned} O_3^{\alpha\beta\lambda} &= \frac{1}{6} \left(P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda + P^\alpha P^\lambda \gamma^\beta + P^\beta P^\lambda \gamma^\alpha + P^\beta P^\alpha \gamma^\lambda + P^\lambda P^\alpha \gamma^\beta + P^\lambda P^\beta \gamma^\alpha \right) \\ &- \frac{1}{18} \left(g^{\alpha\beta} \mathcal{P} P^\lambda + g^{\alpha\beta} P^\lambda \mathcal{P} + g^{\alpha\lambda} \mathcal{P} P^\beta + g^{\beta\lambda} P^\alpha \mathcal{P} + g^{\alpha\lambda} P^\beta \mathcal{P} + g^{\beta\lambda} \mathcal{P} P^\alpha \right. \\ &\quad \left. + g^{\alpha\beta} P^2 \gamma^\lambda + g^{\alpha\lambda} P^2 \gamma^\beta + g^{\beta\lambda} P^2 \gamma^\alpha \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Auf ganz analoge Weise erhält man den Spin-2-Anteil, der in zwei Indizes antisymmetrisch ist. Der verbleibende Index ist zu den übrigen gegenüber Vertauschungen symmetrisch. Es folgt:

$$\begin{aligned} O_2^{\alpha\beta\lambda} &= \frac{1}{6} \left(2P^{\{\alpha P\beta\}}\gamma^\lambda - P^{\{\alpha P\lambda\}}\gamma^\beta - P^{\{\beta P\lambda\}}\gamma^\alpha \right) \\ &\quad - \frac{1}{9} \left(2g^{\alpha\beta}P^2\gamma^\lambda - g^{\alpha\lambda}P^2\gamma^\beta - g^{\beta\lambda}P^2\gamma^\alpha \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Der Spin-1-Anteil führt auf Twist-4-Matrixelemente und ist daher für die spätere Abschätzung dieser Matrixelemente von besonderer Bedeutung. Diesen erhält man entweder durch die symmetrische Kontraktion zweier Indizes mit $g^{\alpha\beta}$ oder durch die antisymmetrische Kontraktion dreier Indizes mit $\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}A_\rho$. Die allgemeine Struktur des Spin-1-Anteils lautet daher:

$$\begin{aligned} O_1^{\alpha\beta\lambda} &= +b_1g^{\alpha\beta}P^2\gamma^\lambda + b_2g^{\alpha\lambda}P^2\gamma^\beta + b_3g^{\beta\lambda}P^2\gamma^\alpha + b_4g^{\beta\lambda}P^\alpha P \\ &\quad + b_5g^{\alpha\beta}P^\lambda P + b_6g^{\alpha\lambda}P^\beta P + b_7g^{\alpha\lambda}P P^\beta + b_8g^{\alpha\beta}P P^\lambda \\ &\quad + b_9g^{\beta\lambda}P P^\alpha + b_{10}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}A_\rho \quad . \end{aligned} \quad (3.51)$$

Die Spurbedingungen lauten für den Spin-1-Anteil

$$g_{\alpha\beta}O_1^{\alpha\beta\lambda} = P^2\gamma^\lambda, \quad g_{\beta\lambda}O_1^{\alpha\beta\lambda} = P^\alpha P, \quad g_{\alpha\lambda}O_1^{\alpha\beta\lambda} = P P^\beta \quad . \quad (3.52)$$

Die Kontraktion von (3.51) mit den drei metrischen Tensoren liefert daher je drei Bedingungen an die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} 4b_1 + b_2 + b_3 &= 1, & b_4 + 4b_5 + a_6 &= 0, & b_7 + 4b_8 + b_9 &= 0 \\ b_1 + b_2 + 4b_3 &= 0, & 4b_4 + b_5 + a_6 &= 1, & b_7 + b_8 + 4b_9 &= 0 \\ b_1 + 4b_2 + b_3 &= 0, & b_4 + b_5 + 4a_6 &= 0, & 4b_7 + b_8 + b_9 &= 1 \quad . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dieses lineare Gleichungssystem mit 9 Gleichungen und 9 Unbekannten hat die Lösung:

$$b_1 = b_4 = b_7 = \frac{5}{18}, \quad b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = b_8 = b_9 = -\frac{1}{18} \quad . \quad (3.54)$$

Es verbleibt die Bestimmung des Koeffizienten b_{10} , der aus der Kontraktion mit dem ε -Tensor folgt:

$$A_\rho = \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}O_1^{\alpha\beta\lambda} = b_{10}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma}A_\sigma = -6b_{10}A_\rho \quad . \quad (3.55)$$

Damit ist auch der Spin-1-Anteil des Operators bestimmt:

$$O_1^{\alpha\beta\lambda} = \frac{5}{18} \left(g^{\alpha\beta} P^2 \gamma^\lambda + g^{\beta\lambda} P^\alpha \not{P} + g^{\alpha\lambda} \not{P} P^\beta \right) - \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} A_\rho \\ - \frac{1}{18} (g^{\alpha\lambda} P^2 \gamma^\beta + g^{\beta\lambda} P^2 \gamma^\alpha + g^{\alpha\beta} P^\lambda \not{P} + g^{\alpha\lambda} P^\beta \not{P} + g^{\alpha\beta} \not{P} P^\lambda + g^{\beta\lambda} \not{P} P^\alpha), \quad (3.56)$$

wobei der antisymmetrische Term durch

$$-\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} A_\rho = P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda - P^\alpha P^\lambda \gamma^\beta + P^\beta P^\lambda \gamma^\alpha - P^\beta P^\alpha \gamma^\lambda + P^\lambda P^\alpha \gamma^\beta - P^\lambda P^\beta \gamma^\alpha \quad (3.57)$$

definiert ist. Da für die hier relevante Problemstellung ausschließlich die Twist-2 und Twist-4 Operatoren wesentlich sind, genügt es, die Anteile mit Operator-Spin 1 und 3 herauszuprojizieren. Auf die Projektion der übrigen Teile in (3.41) wird verzichtet.

Der gefundene Spin-1-Anteil des Operators tritt bei der Berechnung von Matrixelementen zwischen Quarkzuständen auf, so daß in der masselosen Theorie Terme mit einem $P^\mu \gamma_\mu$ am Rand vernachlässigt werden können. Es verbleibt:

$$\bar{\psi} O_1^{\alpha\beta\lambda} \psi = \frac{5}{18} g^{\alpha\beta} P^2 \gamma^\lambda - \frac{1}{18} g^{\alpha\lambda} P^2 \gamma^\beta - \frac{1}{18} g^{\beta\lambda} P^2 \gamma^\alpha - \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} A_\rho \quad . \quad (3.58)$$

Diese Operatoren können unter Verwendung der Bewegungsgleichung und den Definitionen (A.63) und (A.64) auf einen einzigen Operator

$$W^\lambda \equiv \bar{\psi} g \tilde{G}^{\lambda\rho} \gamma_\rho \psi \quad (3.59)$$

zurückgeführt werden:

$$\bar{\psi} P^2 i \gamma_5 \gamma^\lambda \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} [P_\mu, P_\nu] \gamma^\nu \gamma^\mu i \gamma_5 \gamma^\lambda \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} i g G_{\mu\nu} i \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \gamma_5 i \gamma_5 \gamma_\rho \psi = -i W^\lambda \quad (3.60)$$

und mit (3.55)

$$\bar{\psi} A_\rho \psi = \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda \psi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} [P^\alpha, P^\beta] \gamma^\lambda \psi \\ = \frac{1}{2} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} i g G^{\alpha\beta} \gamma^\lambda \psi = -i W_\rho \quad . \quad (3.61)$$

Der Spin-1-Anteil von $O^{\alpha\beta\lambda}$ (3.56) ist daher zwischen Quarkzuständen:

$$\bar{\psi} O_1^{\alpha\beta\lambda} \psi = \frac{5}{18} g^{\alpha\beta} W^\lambda \gamma_5 - \frac{1}{18} g^{\alpha\lambda} W^\beta \gamma_5 - \frac{1}{18} g^{\beta\lambda} W^\alpha \gamma_5 + \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} i W_\rho \quad . \quad (3.62)$$

3.2.2 Zerlegung des Operators $P^\alpha P^\beta P^\lambda P^\rho$

Die Zerlegung des Operators

$$O^{\alpha\beta\lambda\rho} = P^\alpha P^\beta P^\lambda P^\rho \quad (3.63)$$

in Anteile verschiedenen Operator-Spins

$$O^{\alpha\beta\lambda\rho} = O_4^{\alpha\beta\lambda\rho} + O_3^{\alpha\beta\lambda\rho} + O_2^{\alpha\beta\lambda\rho} + O_1^{\alpha\beta\lambda\rho} + O_0^{\alpha\beta\lambda\rho} \quad (3.64)$$

gestaltet sich wesentlich komplexer als für den Operator $O^{\alpha\beta\lambda}$ des vorigen Abschnitts. Allein die Notation aller möglichen Lorentzstrukturen umfaßt 24 unkontrahierte, 72 einfach symmetrisch kontrahierte, 9 doppelt kontrahierte, 36 antisymmetrisch kontrahierte und 1 total antisymmetrischen Term, also insgesamt 142 Terme. Deshalb wird die Zerlegung auf die benötigten Spin-2- und Spin-4-Anteile beschränkt und durch allgemeine Überlegungen vereinfacht.

Der Spin-4-Anteil

Der Spin-4-Anteil ist der Anteil zu maximalem Spin, so daß für diesen Teil des Operators die Forderung der totalen Symmetrie und der Spurlosigkeit Anwendung finden. Allgemein muß er die Form

$$O_4^{\alpha\beta\lambda\rho} = \frac{1}{24} P^{\{\alpha} P^\beta P^\lambda P^{\rho\}} + G^{\alpha\beta\lambda\rho} \quad (3.65)$$

besitzen, wobei die geschweiften Klammern alle Permutationen der nicht summierten eingeschlossenen Indizes und G alle notwendigen Spurterme bezeichnen. Da es 24 solcher Permutationen gibt, wird dieser total symmetrische Ausdruck mit dem Faktor $1/24$ normiert. Für die Spurterme kommen auch ausschließlich symmetrische Kombinationen in Frage:

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta\lambda\rho} = & c_1 \frac{1}{8} g^{\{\alpha\beta} g^{\lambda\rho\}} P^2 P + c_2 \frac{1}{8} g^{\{\alpha\beta} g^{\lambda\rho\}} P^\sigma P P_\sigma + c_3 \frac{1}{8} g^{\{\alpha\beta} g^{\lambda\rho\}} P P^2 \\ & + b_1 \frac{1}{2} g^{\{\alpha\beta} P^2 P^\lambda P^\rho\} + b_2 \frac{1}{2} g^{\{\alpha\beta} P^\sigma P^\lambda P_\sigma P^\rho\} + b_3 \frac{1}{2} g^{\{\alpha\beta} P P^\lambda P^\rho\} \\ & + b_4 \frac{1}{2} g^{\{\alpha\beta} P^\lambda P^2 P^\rho\} + b_5 \frac{1}{2} g^{\{\alpha\beta} P^\lambda P P^\rho\} + b_6 \frac{1}{2} g^{\{\alpha\beta} P^\lambda P^\rho\} P \quad . \quad (3.66) \end{aligned}$$

Aus der Kontraktion von (3.65) mit dem metrischen Tensor $g_{\alpha\beta}$ folgen mit der Forderung nach Spurlosigkeit 9 Bedingungen an die Koeffizienten:

$$3c_1 + b_1 + b_6 = 0, \quad 3c_2 + b_2 + b_5 = 0, \quad 3c_3 + b_3 + b_4 = 0, \quad b_{1,\dots,6} = -\frac{1}{4}, \quad (3.67)$$

woraus $c_{1,2,3} = \frac{1}{6}$ folgt. Der Spin-4-Teil des Operators lautet daher:

$$\begin{aligned}
O_4^{\alpha\beta\lambda\rho} &= \frac{1}{24} P^{\{\alpha} P^\beta P^\lambda \gamma^{\rho\}} + \frac{1}{48} g^{\{\alpha\beta} g^{\lambda\rho\}} (P^2 \not{P} + P^\sigma \not{P} P_\sigma + \not{P} P^2) \\
&\quad - \frac{1}{8} g^{\{\alpha\beta} (P^2 P^\lambda \gamma^{\rho\}} + P^\sigma P^\lambda P_\sigma \gamma^{\rho\}} + \not{P} P^\lambda P^\rho\} \\
&\quad + P^\lambda P^2 \gamma^{\rho\}} + P^\lambda \not{P} P^\rho\} + P^\lambda P^\rho\} \not{P} \quad . \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Der symmetrisch kontrahierte Spin-2-Anteil

Die Projektion auf den Anteil des Operators mit Spin-2 ist durch symmetrische oder antisymmetrische Kontraktion möglich. Ein Weg für die Bestimmung des Spin-2-Anteils ist die Notation der allgemeinsten Linearkombination aller Lorentzstrukturen, deren Koeffizienten durch allgemeine Forderungen an die Spuren bestimmt werden. Das Resultat ist ein lineares Gleichungssystem für 72 Koeffizienten, das eine eindeutige Lösung besitzt. Ein nicht ganz so aufwendiger Weg, der auf das gleiche Ergebnis führt, ist die Zerlegung in eine Zahl von Spin-2-Operatoren:

$$\begin{aligned}
O_2^{\alpha\beta\lambda\rho} &= g^{\alpha\beta} B_1^{\lambda\rho} + g^{\alpha\lambda} B_2^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} B_3^{\beta\lambda} + g^{\beta\lambda} B_4^{\alpha\rho} + g^{\beta\rho} B_5^{\alpha\lambda} + g^{\lambda\rho} B_6^{\alpha\beta} \\
&\quad + \varepsilon^{\mu\beta\lambda\rho} D_{1,\mu}^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\rho} D_{2,\mu}^\lambda + \varepsilon^{\alpha\mu\lambda\rho} D_{3,\mu}^\beta \\
&\quad + g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} C_1 + g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} C_2 + g^{\beta\lambda} g^{\alpha\rho} C_3 + \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} C_4 \quad . \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Die Operatoren $B^{\mu\nu}$ und $D^{\mu\nu}$ sind symmetrische spurlose Spin-2-Operatoren. Die ersten sind durch symmetrische Kontraktion zweier Indizes in $O^{\alpha\beta\lambda\rho}$ zu Spin Null, die zweiten durch antisymmetrische Kopplung dreier Indizes zu Spin 1 entstanden. Die skalaren Operatoren $C_{1,\dots,4}$ dienen dazu, die Spurlosigkeit des Operators bei Kontraktion aller Indizes zu gewährleisten.

Die Lorentzstrukturen in (3.69) sind in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen aufteilbar, die sich nicht gegenseitig stören

$$O_2^{\alpha\beta\lambda\rho} = O_{S,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} + i\gamma_5 O_{A,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} \quad (3.70)$$

und die deshalb übersichtlicher getrennt voneinander behandelt werden. Für den symmetrischen Teil folgen aus der Kontraktion mit metrischen Tensoren 6 Bedingungsgleichung (es gibt 6 mögliche Kontraktionen) für die Operatoren $B^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
(4B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5)^{\lambda\rho} &= P^2 P^\lambda \gamma^{\rho} - g^{\lambda\rho} (4C_1 + C_2 + C_3) \equiv A_1^{\lambda\rho} \\
(B_1 + 4B_2 + B_3 + B_4 + B_6)^{\beta\rho} &= P^\sigma P^\beta P_\sigma \gamma^{\rho} - g^{\beta\rho} (C_1 + 4C_2 + C_3) \equiv A_2^{\beta\rho} \\
(B_1 + B_2 + 4B_3 + B_5 + B_6)^{\beta\lambda} &= \not{P} P^\beta P^\lambda - g^{\beta\lambda} (C_1 + C_2 + 4C_3) \equiv A_3^{\beta\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B_1 + B_2 + 4B_4 + B_5 + B_6)^{\alpha\rho} &= P^\alpha P^2 \gamma^\rho - g^{\alpha\rho} (C_1 + C_2 + 4C_3) \equiv A_4^{\alpha\rho} \\
(B_1 + B_3 + B_4 + 4B_5 + B_6)^{\alpha\lambda} &= P^\alpha \mathcal{P} P^\lambda - g^{\alpha\lambda} (C_1 + 4C_2 + C_3) \equiv A_5^{\alpha\lambda} \\
(B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + 4B_6)^{\alpha\beta} &= P^\alpha P^\beta \mathcal{P} - g^{\alpha\beta} (4C_1 + C_2 + C_3) \equiv A_6^{\alpha\beta} .
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned}
B_1^{\lambda\rho} &= \frac{1}{16} (+5A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + A_6)^{\lambda\rho} \\
B_2^{\lambda\rho} &= \frac{1}{16} (-A_1 + 5A_2 - A_3 - A_4 + A_5 - A_6)^{\lambda\rho} \\
B_3^{\lambda\rho} &= \frac{1}{16} (-A_1 - A_2 + 5A_3 + A_4 - A_5 - A_6)^{\lambda\rho} \\
B_4^{\lambda\rho} &= \frac{1}{16} (-A_1 - A_2 + A_3 + 5A_4 - A_5 - A_6)^{\lambda\rho} \\
B_5^{\lambda\rho} &= \frac{1}{16} (-A_1 + A_2 - A_3 - A_4 + 5A_5 - A_6)^{\lambda\rho} \\
B_6^{\lambda\rho} &= \frac{1}{16} (+A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_5 + 5A_6)^{\lambda\rho} .
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Da die Spin-2-Operatoren $B_n^{\lambda\rho}$ spurlos sind, müssen es auch die Kombinationen der Operatoren $A_n^{\lambda\rho}$ sein. Aus der Kontraktion der rechten Seiten folgen mit den Definitionen der $A_n^{\lambda\rho}$ in (3.71) deshalb Bedingungsgleichungen für die skalaren Operatoren $C_{1,2,3}$:

$$\begin{aligned}
-5C_1 + C_2 + C_3 &= -\frac{3}{8} P^2 \mathcal{P} + \frac{1}{8} P^\sigma \mathcal{P} P^\sigma + \frac{1}{8} \mathcal{P} P^2 \\
C_1 - 5C_2 + C_3 &= +\frac{1}{8} P^2 \mathcal{P} - \frac{3}{8} P^\sigma \mathcal{P} P^\sigma + \frac{1}{8} \mathcal{P} P^2 \\
C_1 + C_2 - 5C_3 &= +\frac{1}{8} P^2 \mathcal{P} + \frac{1}{8} P^\sigma \mathcal{P} P^\sigma - \frac{3}{8} \mathcal{P} P^2 .
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung:

$$\begin{aligned}
C_1 &= +\frac{5}{72} P^2 \mathcal{P} - \frac{1}{72} P^\sigma \mathcal{P} P^\sigma - \frac{1}{72} \mathcal{P} P^2 \\
C_2 &= -\frac{1}{72} P^2 \mathcal{P} + \frac{5}{72} P^\sigma \mathcal{P} P^\sigma - \frac{1}{72} \mathcal{P} P^2 \\
C_3 &= -\frac{1}{72} P^2 \mathcal{P} - \frac{1}{72} P^\sigma \mathcal{P} P^\sigma + \frac{5}{72} \mathcal{P} P^2 .
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Damit ist die der symmetrisch kontrahierte Spin-2-Teil des Operators vollständig bestimmt. Mit den $C_{1,2,3}$ aus (3.74) werden die $A_{1,\dots,6}^{\lambda\rho}$ in (3.71) bestimmt, die wiederum in die Lösung (3.72) für die gesuchten Spin-2-Operatoren $B_{1,\dots,6}^{\lambda\rho}$ eingesetzt

werden. Die letzteren lauten dann:

$$\begin{aligned}
B_1^{\lambda\rho} &= \frac{1}{32} \left(+5P^2 P^{\{\lambda\gamma\rho\}} - P^\sigma P^{\{\lambda P_\sigma\gamma\rho\}} - \not{P} P^{\{\lambda P\rho\}} - P^{\{\lambda P^2\gamma\rho\}} - P^{\{\lambda \not{P} P\rho\}} \right. \\
&\quad \left. + P^{\{\lambda P\rho\}} \not{P} - g^{\lambda\rho} \left(+3P^2 \not{P} - P^\sigma \not{P} P_\sigma - \not{P} P^2 \right) \right) \\
B_2^{\lambda\rho} &= \frac{1}{32} \left(-P^2 P^{\{\lambda\gamma\rho\}} + 5P^\sigma P^{\{\lambda P_\sigma\gamma\rho\}} - \not{P} P^{\{\lambda P\rho\}} - P^{\{\lambda P^2\gamma\rho\}} + P^{\{\lambda \not{P} P\rho\}} \right. \\
&\quad \left. - P^{\{\lambda P\rho\}} \not{P} - g^{\lambda\rho} \left(-P^2 \not{P} + 3P^\sigma \not{P} P_\sigma - \not{P} P^2 \right) \right) \\
B_3^{\lambda\rho} &= \frac{1}{32} \left(-P^2 P^{\{\lambda\gamma\rho\}} - P^\sigma P^{\{\lambda P_\sigma\gamma\rho\}} + 5 \not{P} P^{\{\lambda P\rho\}} + P^{\{\lambda P^2\gamma\rho\}} - P^{\{\lambda \not{P} P\rho\}} \right. \\
&\quad \left. - P^{\{\lambda P\rho\}} \not{P} - g^{\lambda\rho} \left(-P^2 \not{P} - P^\sigma \not{P} P_\sigma + 3 \not{P} P^2 \right) \right) \\
B_4^{\lambda\rho} &= \frac{1}{32} \left(-P^2 P^{\{\lambda\gamma\rho\}} - P^\sigma P^{\{\lambda P_\sigma\gamma\rho\}} + \not{P} P^{\{\lambda P\rho\}} + 5P^{\{\lambda P^2\gamma\rho\}} - P^{\{\lambda \not{P} P\rho\}} \right. \\
&\quad \left. - P^{\{\lambda P\rho\}} \not{P} - g^{\lambda\rho} \left(-P^2 \not{P} - P^\sigma \not{P} P_\sigma + 3 \not{P} P^2 \right) \right) \\
B_5^{\lambda\rho} &= \frac{1}{32} \left(-P^2 P^{\{\lambda\gamma\rho\}} + P^\sigma P^{\{\lambda P_\sigma\gamma\rho\}} - \not{P} P^{\{\lambda P\rho\}} - P^{\{\lambda P^2\gamma\rho\}} + 5P^{\{\lambda \not{P} P\rho\}} \right. \\
&\quad \left. - P^{\{\lambda P\rho\}} \not{P} - g^{\lambda\rho} \left(-P^2 \not{P} + 3P^\sigma \not{P} P_\sigma - \not{P} P^2 \right) \right) \\
B_6^{\lambda\rho} &= \frac{1}{32} \left(+P^2 P^{\{\lambda\gamma\rho\}} - P^\sigma P^{\{\lambda P_\sigma\gamma\rho\}} - \not{P} P^{\{\lambda P\rho\}} - P^{\{\lambda P^2\gamma\rho\}} - P^{\{\lambda \not{P} P\rho\}} \right. \\
&\quad \left. + 5P^{\{\lambda P\rho\}} \not{P} - g^{\lambda\rho} \left(+3P^2 \not{P} - P^\sigma \not{P} P_\sigma - \not{P} P^2 \right) \right) \quad . \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Mit (3.74) und (3.75) sind alle Spin-2- und Spur-Operatoren im symmetrischen Teil von $O_2^{\alpha\beta\lambda\rho}$ in (3.69) bestimmt.

Die Operatoren in (3.75) treten immer zwischen Quarkzuständen auf und können daher mit Hilfe der Operator-Identitäten in Kap. A.6 durch drei Operatoren mit Gluonfeld-Tensoren (A.88) ausgedrückt werden. Die entsprechenden Zusammenhänge sind (A.89)–(A.93). Die so reformulierten Spin-2-Operatoren werden in (3.69) eingesetzt⁶:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} O_{S,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} \psi &= \frac{1}{64} g^{\alpha\beta} (4Z - 6Y + X)^{\{\lambda\rho\}} + \frac{1}{64} g^{\alpha\lambda} (8Z - 6Y - 5X)^{\{\beta\rho\}} \\
&\quad + \frac{1}{64} g^{\alpha\rho} (-4Z + 2Y + X)^{\{\beta\lambda\}} + \frac{1}{64} g^{\beta\lambda} (4Z - 6Y + X)^{\{\alpha\rho\}} \\
&\quad + \frac{1}{64} g^{\beta\rho} (8Z + 2Y - X)^{\{\alpha\lambda\}} + \frac{1}{64} g^{\lambda\rho} (-4Z + 2Y + X)^{\{\alpha\beta\}} \\
&\quad + \frac{1}{16} \left(g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} - 3g^{\alpha\lambda} g^{\beta\rho} + g^{\alpha\rho} g^{\beta\lambda} \right) Z_\eta^\eta \quad . \quad (3.76)
\end{aligned}$$

⁶Das hier gefundene Ergebnis stimmt mit dem Resultat in Shuryak, Vainshtein 1982, Gl. (2.15) nicht überein. Die Vorfaktoren sind zwar identisch, aber die Definition der Operatoren weicht für $Y_{\mu\nu}$ um einen Faktor 2 ab. Hingegen stimmt es mit Lee 1993, Gl. (B.1) überein.

Der antisymmetrisch kontrahierte Spin-2-Anteil

Es verbleibt, die Operatoren des antisymmetrisch kontrahierten Teils $O_{A,2}^{\alpha\beta\lambda\rho}$ herzuleiten. Zunächst ist zu fragen, warum in (3.69)

$$O_{A,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} = \varepsilon^{\mu\beta\lambda\rho} D_{1,\mu}^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\rho} D_{2,\mu}^\lambda + \varepsilon^{\alpha\mu\lambda\rho} D_{3,\mu}^\beta + \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} C_4 \quad (3.77)$$

nur 3 ε -Tensoren auftauchen, wo es doch im Prinzip 4 Möglichkeiten gibt, einen unkontrahierten Index zu behalten. Es fehlt die Kombination $\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\mu} D_{4,\mu}^\rho$. Der Grund dafür ist die Jacobi-Identität (B.33), die garantiert, daß der weggelassene Term immer durch eine Linearkombination der 3 berücksichtigten Terme ausgedrückt werden kann. Für die Determination der spurlosen symmetrischen Spin-2-Operatoren $D_{1,2,3}$ werden nach dem gleichen Schema wie für den symmetrisch kontrahierten Teil Kontraktionen von (3.77) durchgeführt, nur diesmal mit dem ε -Tensor. Unter Verwendung von (B.31) und (B.32) folgt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu\beta\lambda\rho} P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho + 6g_\nu^\alpha C_4 &= -6D_{1,\nu}^\alpha + 2D_{2,\nu}^\alpha + 2D_{3,\nu}^\alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta\nu\rho} P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho + 6g_\nu^\lambda C_4 &= +2D_{1,\nu}^\lambda - 6D_{2,\nu}^\lambda + 2D_{3,\nu}^\lambda \\ \varepsilon_{\alpha\nu\lambda\rho} P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho + 6g_\nu^\beta C_4 &= +2D_{1,\nu}^\beta + 2D_{2,\nu}^\beta - 6D_{3,\nu}^\beta \quad . \end{aligned} \quad (3.78)$$

Die Summationsindizes werden umbenannt und das lineare Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{aligned} D_{1,\nu}^\rho &= \frac{1}{8} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu} \left(2P^\rho P^\beta P^\lambda \gamma^\alpha + P^\alpha P^\beta P^\rho \gamma^\lambda + P^\alpha P^\rho P^\lambda \gamma^\beta \right) - 3g_\nu^\rho C_4 \\ D_{2,\nu}^\rho &= \frac{1}{8} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu} \left(P^\rho P^\beta P^\lambda \gamma^\alpha + 2P^\alpha P^\beta P^\rho \gamma^\lambda + P^\alpha P^\rho P^\lambda \gamma^\beta \right) - 3g_\nu^\rho C_4 \\ D_{3,\nu}^\rho &= \frac{1}{8} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\nu} \left(P^\rho P^\beta P^\lambda \gamma^\alpha + P^\alpha P^\beta P^\rho \gamma^\lambda + 2P^\alpha P^\rho P^\lambda \gamma^\beta \right) - 3g_\nu^\rho C_4 \quad . \end{aligned} \quad (3.79)$$

Da die Spin-2-Operatoren $D_{1,2,3}^{\nu\rho}$ nach Voraussetzung spurlos sind, kann durch Kontraktion von (3.79) mit dem metrischen Tensor g_ρ^ν der skalare Operator berechnet werden:

$$0 = g_\rho^\nu D_{1,\nu}^\rho = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho - 12C_4 \quad , \quad (3.80)$$

woraus folgt

$$C_4 = -\frac{1}{24} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho \quad . \quad (3.81)$$

Durch diesen skalaren Operator ist die Spurlosigkeit der beiden anderen Spin-2-Operatoren $D_{1,2}^{\nu\rho}$ automatisch gewährleistet. Dieses Resultat kann zusammen mit (3.79) in (3.77) eingesetzt werden, so daß der Spin-2-Anteil des Operators $O^{\alpha\beta\lambda\rho}$

vollständig bekannt ist. Mit Hilfe von (A.94)–(A.97) kann das Resultat mit den Operatoren (A.88) ausgedrückt werden⁷:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} i \gamma_5 O_{A,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} \psi &= \varepsilon^{\mu\beta\lambda\rho} \left(\frac{1}{16} X_\mu^\alpha - \frac{1}{4} Y_\mu^\alpha - \frac{1}{8} Z_\mu^\alpha + \frac{1}{8} g_\mu^\alpha Y_\rho^\rho \right) \\ &+ \varepsilon^{\alpha\beta\mu\rho} \left(\frac{1}{16} X_\mu^\lambda - \frac{1}{4} Y_\mu^\lambda - \frac{1}{8} Z_\mu^\lambda + \frac{1}{8} g_\mu^\lambda Y_\rho^\rho \right) \\ &+ \varepsilon^{\alpha\mu\lambda\rho} \left(\frac{1}{8} X_\mu^\beta - \frac{1}{4} Z_\mu^\beta + \frac{1}{8} g_\mu^\beta Y_\rho^\rho \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.82)$$

Es ist darauf zu achten, daß immer der symmetrische Teil der Operatoren $\frac{1}{2} D_{1,2,3}^{\{\nu\rho\}}$ genommen wird, da es sich sonst nicht um reine Spin-2-Operatoren handelt.

3.3 Höherdimensionale Operatoren: Teil 2

Nachdem die Operatoren $O^{\alpha\beta\lambda}$ und $O^{\alpha\beta\lambda\rho}$ in ihre Anteile unterschiedlichen Operator-Spins zerlegt wurden, können die entsprechenden Anteile verwendet werden, um den Beitrag wohldefinierten Twists aus der Vorwärtsstreuamplitude (3.11) herauszuprojizieren.

3.3.1 Höhere Twist-Operatoren für g_1

In der polarisierten Streuung ist der erste Term in (3.11), der auf einen höheren Twist-Beitrag führen kann $T_{\mu\nu}^{(3)}$. Dieser wurde in (3.33) durch die Matrixelemente (3.32) eines einzigen Operators $O^{\alpha\beta\lambda}$ ausgedrückt, der in seine Anteile unterschiedlichen Spins zerlegt wurde. Der Operator $\bar{\psi} O^{\alpha\beta\lambda} \psi$ hat die Dimension 5, so daß allein der Spin-1-Anteil auf einen Twist-4-Beitrag zur Vorwärtsstreuamplitude führt. Die bei der Spin-Zerlegung gewonnene Spin-1-Projektion (3.62) wird in die Vorwärtsstreuamplitude (3.33) eingesetzt. Dabei ist zu beachten, daß die Kontraktion des ε -Tensor in (3.62) mit allen ε -Tensoren in (3.33) Null ergibt. Ebenso verschwinden alle Kontraktionen der metrischen Tensoren in (3.62) mit denen in (3.33) aus Symmetriegründen. Es bleiben also nur die gemischten Kontraktionen zu berechnen:

$$\begin{aligned} &T_{\mu\nu}^{(3)}(p, q, s) \Big|_{\text{Spin-1}} \\ &= - \sum_a q_a^2 \langle ps | \left\{ 8i \varepsilon_{\mu\rho\nu\lambda} \frac{q_\alpha q_\beta q^\rho}{Q^6} + 4i \varepsilon_{\mu\beta\nu\lambda} \frac{q_\alpha}{Q^4} + 4i \varepsilon_{\mu\alpha\nu\lambda} \frac{q_\beta}{Q^4} \right. \end{aligned}$$

⁷Dieses Resultat steht im Widerspruch zu dem Ergebnis von Shuryak, Vainshtein 1982, Gl. (2.15); hingegen stimmt es mit Lee 1993, Gl. (B.2) überein.

$$\begin{aligned}
& \left. -2i\varepsilon_{\eta\beta\nu\lambda}g_{\mu\alpha}\frac{q^\eta}{Q^4} + 2i\varepsilon_{\eta\beta\mu\lambda}g_{\nu\alpha}\frac{q^\eta}{Q^4} \right\} \\
& \times \left[\frac{5}{18}g^{\alpha\beta}W_a^\lambda - \frac{1}{18}g^{\alpha\lambda}W_a^\beta - \frac{1}{18}g^{\beta\lambda}W_a^\alpha \right] |ps\rangle \\
& - \sum_a q_a^2 \langle ps | 2i\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho}W_\rho^a \left\{ \sigma_{\eta\beta\nu\lambda}g_{\mu\alpha}\frac{q^\eta}{Q^4} - \sigma_{\eta\beta\mu\lambda}g_{\nu\alpha}\frac{q^\eta}{Q^4} \right\} |ps\rangle . \quad (3.83)
\end{aligned}$$

Auch hier fallen noch die meisten Terme bei der Kontraktion der Lorentzindizes weg. Z.B. addieren sich die drei ersten Terme der ersten Klammer bei der Kontraktion mit dem ersten Term der zweiten Klammer zu Null. Der $1/Q^6$ Term in der ersten Klammer ergibt mit den zweiten und dritten Termen der zweiten Klammer kontrahiert das Produkt eines in ρ und λ symmetrischen und eines antisymmetrischen Terms, das ebenfalls verschwindet. Führt man alle Kontraktionen mit Sorgfalt durch, so verbleibt:

$$T_{\mu\nu}^{(3)}(p, q, s) \Big|_{\text{Spin-1}} = \sum_a q_a^2 \langle ps | \frac{16}{9} i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\lambda W_a^\rho}{Q^4} |ps\rangle . \quad (3.84)$$

Der Operator W^ρ in (3.61) hat die Dimension 5 und den Spin 1. Mit dieser Information ist die Lorentzstruktur des zugehörigen Matricelements festgelegt:

$$\langle ps | q_a^2 W_a^\rho |ps\rangle = m^2 s^\rho f_A^{(a)} , \quad (3.85)$$

wobei m die hadronische Masse ist. Daraus folgt für den Twist-4-Teil der Vorwärtsstreuamplitude

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(3)}(p, q, s) \Big|_{\text{Spin-1}} &= \sum_a \frac{16}{9} i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\lambda s^\rho}{Q^2} \frac{m^2}{Q^2} f_A^{(a)} \\
&= \sum_a \frac{8}{9} i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \omega \frac{m^2}{Q^2} f_A^{(a)} . \quad (3.86)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Form der Vorwärtsstreuamplitude in (2.148) hergestellt. Das hier hergeleitete Twist-4-Matricelement trägt demnach zu dem ersten Moment ($n = 1$) der polarisierten Strukturfunktion g_1 bei. Auf völlig analoge Weise erhält man aus den Spurtermen der Spin-3 und Spin-2-Anteile des Operators $P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda$ in (3.49) und (3.50) die mit m^2/Q^2 unterdrückten Twist-2 und Twist-3 Matricelemente $a_{A,2}$ und d_A . Diese sind durch

$$q_a^2 \langle ps | \bar{\psi}_a O_3^{\alpha\beta\lambda} \psi_a |ps\rangle = a_{A,2}^{(a)} \left[\frac{1}{6} p^{\{\alpha} p^\beta s^{\lambda\}} - \frac{m^2}{18} g^{\{\alpha\beta} s^{\lambda\}} \right] \quad (3.87)$$

und

$$\begin{aligned}
q_a^2 \langle ps | \bar{\psi}_a O_2^{\alpha\beta\lambda} \psi_a |ps\rangle &= d_A^{(a)} \left[\frac{1}{6} \left(2p^{\{\alpha} p^\beta\} s^\lambda - p^{\{\alpha} p^\lambda\} s^\beta - p^{\{\beta} p^\lambda\} s^\alpha \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2}{9} \left(2g^{\alpha\beta} s^\lambda - g^{\alpha\lambda} s^\beta - g^{\beta\lambda} s^\alpha \right) \right] . \quad (3.88)
\end{aligned}$$

definiert. Insgesamt erhält man daraus zusammen mit dem Twist-2-Matrixelement (3.13) für die Bjorken-Summenregel:

$$\int_0^1 dx g_1^{NS}(x, Q^2) = \frac{1}{2} a_{A,0} + \frac{1}{9} \frac{m^2}{Q^2} a_{A,2} + \frac{4}{9} \frac{m^2}{Q^2} d_A + \frac{4}{9} \frac{m^2}{Q^2} f_A \quad , \quad (3.89)$$

wobei wieder über die Quarksorten summiert wurde. Dies ist die feldtheoretische Definition der Bjorken-Summenregel. Durch die rechte Seite wird eigentlich das Moment der Summe der Strukturfunktionen g_1 und g_2 definiert, was jedoch aufgrund der Burkhardt-Cottingham-Summenregel mit (3.89) identisch ist.

Die Spin-3 und Spin-2-Anteile (3.49) und (3.50) enthalten neben den Spurtermen noch weitere Terme, die nicht zur Bjorken-Summenregel beitragen. Setzt man diese Terme in die Vorwärtsstreuamplitude (3.33) ein erhält man Beiträge zum dritten Moment von g_1 bzw. g_2 :

$$\int_0^1 dx x^2 g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} a_{A,2} \quad , \quad (3.90)$$

$$\int_0^1 dx x^2 g_2(x, Q^2) = -\frac{1}{3} a_{A,2} + \frac{1}{3} d_A \quad . \quad (3.91)$$

Twist-4-Matrixelemente zu den dritten Momenten von g_1 treten erst mit dem Operator $P^\alpha P^\beta P^\lambda P^\rho \gamma^e t_a$ auf.⁸

3.3.2 Höhere Twist-Operatoren für $F_{1,2,L}$

Der erste Term in (3.11), der auf einen Twist-4-Beitrag zur unpolarisierten Vorwärtsstreuamplitude führen kann, ist $T_{\mu\nu}^{(4)}$. Dieser wurde durch das Matrixelement (3.37) ausgedrückt, das in Kombination mit 15 unterschiedlichen Lorentzstrukturen auftritt (siehe (3.38)). Der Spin-2-Anteil des Operators (3.35) mit Massendimension 6 führt auf den gesuchten Twist-4-Anteil für die unpolarisierte Vorwärtsstreuamplitude und wurde im vorigen Abschnitt durch eine Spin-Zerlegung bestimmt. Der Operator wurde dabei in zwei Teile — einen symmetrischen und einen antisymmetrischen — unterteilt (siehe (3.70)). Eine entsprechende Unterteilung des Matrixelements erweist sich als hilfreich:

$$\begin{aligned} M_{S,2,a}^{\alpha\beta\lambda\rho} &= q_a^2 \langle p | \bar{\psi}_a O_{S,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} \psi_a | p \rangle \quad , \\ M_{A,2,a}^{\alpha\beta\lambda\rho} &= q_a^2 \langle p | \bar{\psi}_a i\gamma_5 O_{A,2}^{\alpha\beta\lambda\rho} \psi_a | p \rangle \quad , \\ M_{2,a}^{\alpha\beta\lambda\rho} &= M_{S,2,a}^{\alpha\beta\lambda\rho} + M_{A,2,a}^{\alpha\beta\lambda\rho} \quad . \end{aligned} \quad (3.92)$$

⁸Die Ergebnisse dieses Abschnitts stimmen mit Ehrnsperger, Mankiewicz, Schäfer 1994 überein.

Der Index 2 deutet an, daß das Matrixelement nicht vom gesamten Operator genommen wird, sondern nur von dessen Spin-2-Projektion.

Der symmetrische Spin-2-Anteil (3.76) und der antisymmetrische (3.82) werden in die Vorwärtsstreuamplitude (3.38) eingesetzt. Die Einteilung (3.92) hat den Vorzug, daß die Terme mit σ -Tensoren in (3.38) bei der Kontraktion mit $O_{A,2}^{\alpha\beta\lambda\rho}$ ebenso wie die Terme mit ε -Tensoren bei der Kontraktion mit $O_{S,2}^{\alpha\beta\lambda\rho}$ verschwinden. Die ohnehin große Zahl von Termen wird dadurch immerhin halbiert. Nach längeren algebraischen Umformungen folgt⁹:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(4)}(p, q)|_{\text{Spin-2}} &= \sum_a q_a^2 \frac{q_\mu q_\nu q_\alpha q_\beta}{q^8} \langle p | \left(\frac{1}{2} X^{\{\alpha\beta\}} + 3 Y^{\{\alpha\beta\}} \right) | p \rangle_a \\
&+ \sum_a q_a^2 \frac{q_\mu q_\alpha}{q^6} \langle p | \left(-\frac{5}{4} X^{\{\alpha}_{\nu\}} + \frac{1}{2} Y^{\{\alpha}_{\nu\}} \right) | p \rangle_a \\
&+ \sum_a q_a^2 \frac{q_\nu q_\alpha}{q^6} \langle p | \left(-\frac{5}{4} X^{\{\alpha}_{\mu\}} + \frac{1}{2} Y^{\{\alpha}_{\mu\}} \right) | p \rangle_a \\
&+ \sum_a q_a^2 \frac{g_{\mu\nu} q_\alpha q_\beta}{q^6} \langle p | \left(\frac{3}{4} X^{\{\alpha\beta\}} - \frac{7}{2} Y^{\{\alpha\beta\}} \right) | p \rangle_a \\
&+ \sum_a q_a^2 \frac{1}{q^4} \langle p | \left(\frac{5}{4} X_{\{\mu\nu\}} - \frac{1}{2} Y_{\{\mu\nu\}} \right) | p \rangle_a \quad . \quad (3.93)
\end{aligned}$$

Der Index a am Matrixelement deutet an, daß der Operator jeweils mit den Quark-Operatoren einer Quarksorte zu lesen ist. Da hier die Spin-2-Projektion der Operatoren eingesetzt wurde, handelt es sich um den Twist-4-Anteil der Vorwärtsstreuamplitude, zu dem nur 2 der ursprünglich 3 Operatoren (3.27) beitragen. Nicht nur die Vorwärtsstreuamplitude als Ganzes, sondern auch die einzelnen Twist-Anteile sollten eichinvariant sein. Dies ist tatsächlich der Fall, wie man durch die Kontraktion mit q^μ oder q^ν nachprüfen kann. Auch die Symmetrie gegenüber der Vertauschung der Lorentzindizes μ und ν ist explizit sichtbar und muß auch erscheinen, da die Untersuchung auch mit einem symmetrischen Ausdruck in (3.11) begonnen hat. Die bei der Spin-Zerlegung des Operators zwischendurch aufgetretenen antisymmetrischen Ausdrücke verletzen daher die $\mu \leftrightarrow \nu$ -Symmetrie nicht, sondern sind lediglich Ausdruck der unterschiedlichen Möglichkeiten gewesen, wie man vier Spin-1-Operatoren zu einem Spin-2-Operator koppeln kann.

Die Lorentzstruktur der Matrixelemente zu den Operatoren $X^{\alpha\beta}$ und $Y^{\alpha\beta}$ sind eindeutig bestimmbar, denn es handelt sich in beiden Fällen um reine Spin-2-Operatoren, die 2 freie Lorentzindizes haben und die deshalb symmetrisch und

⁹Die Differenz gegenüber Shuryak, Vainshtein 1982, die bereits bei (3.76) aufgetreten ist (Faktor 2 in der Definition von $Y_{\mu\nu}$), taucht in gleicher Weise auch bei diesem Ergebnis auf. Die übrigen Differenzen zu (3.82) treten jetzt nicht mehr auf.

spurlos sein müssen (die Spurterme werden nicht notiert):

$$q_a^2 \langle p | X^{\{\alpha\beta\}} | p \rangle_a = \langle p | 2q_a^2 \bar{\psi}_a P_\eta i g G^{\eta\{\alpha} \gamma^{\beta\}} \psi_a | p \rangle = 2p^\alpha p^\beta a_X^a, \quad (3.94)$$

$$q_a^2 \langle p | Y^{\{\alpha\beta\}} | p \rangle_a = \langle p | \frac{1}{2} q_a^2 \bar{\psi}_a \{ i g G^{\eta\{\alpha} , P^{\beta\}} \} \gamma_\eta i \gamma_5 \psi_a | p \rangle = 2p^\alpha p^\beta a_Y^a. \quad (3.95)$$

a_X^a und a_Y^a sind die entsprechenden reduzierten Matrixelemente zu jedem Flavor inklusive dem zugehörigen Ladungsquadrat q_a^2 . Die Matrixelemente werden in (3.93) eingesetzt und die resultierenden Terme so sortiert, daß sie die Form der Lorentzstrukturen zu den Strukturfunktionen F_2 und F_L (2.148) erhalten:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(4)}(p, q) \Big|_{\text{Tw-4}} &= \sum_a q_\mu q_\nu \frac{(p \cdot q)^2}{q^8} (a_X^a + 6a_Y^a) - \sum_a (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \frac{p \cdot q}{q^6} \left(\frac{5}{2} a_X^a - a_Y^a \right) \\ &\quad + \sum_a g_{\mu\nu} \frac{(p \cdot q)^2}{q^6} \left(\frac{3}{2} a_X^a - 7a_Y^a \right) + \sum_a p_\mu p_\nu \frac{1}{q^4} \left(\frac{5}{2} a_X^a - a_Y^a \right) \\ &= \frac{\omega^2}{Q^2} \left(p_\mu p_\nu \frac{Q^2}{(p \cdot q)^2} - \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{p \cdot q} - g_{\mu\nu} \right) \sum_a \left(\frac{5}{8} a_X^a - \frac{1}{4} a_Y^a \right) \\ &\quad + \frac{\omega^2}{Q^2} \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{Q^2} \right) \sum_a \left(\frac{1}{4} a_X^a + \frac{3}{2} a_Y^a \right). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Die Lorentzstrukturen in den Klammern sind tatsächlich mit denen der Strukturfunktionen F_2 und F_L in (2.148) identisch. Dies ist gleichzeitig ein Test für die Korrektheit der Rechnung, da andere Gewichte zu den Matrixelementen nach dem ersten Gleichheitszeichen nicht unbedingt zu einem eichinvarianten Ausdruck des Twist-4-Anteils der Vorwärtsstreuamplitude geführt hätten. Wie zu erwarten war, sind die Twist-4-Matrixelemente durch $1/Q^2$ unterdrückt und spielen daher in erster Linie bei kleinen und mittleren Impulsüberträgen eine Rolle.

Da in (3.96) nur zwei reduzierte Twist-4-Matrixelemente auftauchen, läuft die Summe über die Operator-Arten in (2.148) über $i = X, Y$. Die Operatoren sind für F_L und F_2 identisch, gehen aber mit unterschiedlichen Gewichten ein. Die Potenz von ω determiniert die Momente, in die diese Twist-4-Matrixelemente eingehen. Der Vergleich mit (2.148) zeigt, daß es sich um die Momente $M_{L,n=2}$ und $M_{2,n=0}$ handelt, also jeweils um die ersten Momente der beiden Strukturfunktionen, die in (2.160) und (2.161) definiert wurden:

$$\int_0^1 dx F_2(x, Q^2) = \sum_a \left[a_{2,0}^a + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{5}{8} a_X^a - \frac{1}{4} a_Y^a \right) \right], \quad (3.97)$$

$$\int_0^1 dx F_L(x, Q^2) = \sum_a \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{4} a_X^a + \frac{3}{2} a_Y^a \right), \quad (3.98)$$

wobei das Twist-2-Matrixelement aus (3.27) für das Moment von F_2 eingesetzt wurde. Wie gesehen tritt dieses Matrixelement für die longitudinale Strukturfunktion nicht auf, so daß unter Vernachlässigung von Störungskorrekturen F_L ihren führenden Beitrag von einem Twist-4-Matrixelement erhält. Die Beziehungen (3.89), (3.97) und (3.98) bilden die feldtheoretische Definition der Momente der Strukturfunktionen g_1 , F_2 und F_L .

Kapitel 4

Die Renormalon-Methode

4.1 Problemstellung

Die Operatorprodukt-Entwicklung (OPE) ist eine Entwicklung in zwei Parametern, wie im letzten Kapitel deutlich gemacht wurde. Einerseits hat man die Entwicklung in dem Kopplungsparameter der QCD α_s , andererseits werden die den Bereich großer Skalen repräsentierenden Operatoren nach Twist klassifiziert, was grob gesprochen einer Entwicklung in Potenzen von $1/Q^2$ entspricht, wenn $Q^2 = -q^2$ das im jeweiligen Streuprozess übertragene Viererimpulsquadrat darstellt.

Beschränkt man sich auf Twist-2-Operatoren finden Faktorisierungstheoreme Anwendung, die z.B. für tief-inelastische-Streuung (DIS) und den Drell-Yan-Prozess (DY) mit unpolarisierten und polarisierten Targets in allen Ordnungen der Störungstheorie bewiesen wurden.¹ Auf diese Weise ist die Trennung der Skalen in der OPE auf eine feste Basis gestellt, und es wird nun darum gehen, Wilson-Koeffizienten und Operatormatrixelemente zu bestimmen. Es bleibt lediglich die Willkür der Festlegung einer Faktorisierungsskala, die das Verhältnis der beiden Teile zueinander verändern kann, ohne auf das Produkt Einfluß zu haben.

Die Situation ist im Fall von höheren Twist-Operatoren nicht so befriedigend. Die Faktorisierungstheoreme werden in diesem Zusammenhang zwar diskutiert², ein letztendlicher Beweis ist jedoch ausgeblieben. Die Erwartungswerte der Operatoren

¹Für DIS vgl. Collins, Soper, Sterman 1989. Die Faktorisierung für Drell-Yan ist in Bodwin 1985; 1986; Collins, Soper, Sterman 1985; 1988 bewiesen. Vgl. Collins 1993 für polarisierte Teilchenstrahlen.

²Ich danke J.C. Collins für entsprechende Hinweise.

mit höherem Twist stellen Vielteilchen-Korrelationen im Target dar. Die Streuung etwa eines Positrons an den Quarks in einem Nukleon über den Austausch eines virtuellen Photons findet nicht mehr an eingefrorenen Quarks statt, sondern die Bewegung und Wechselwirkung der Quarks im Nukleon erhält Einfluß auf die Streuung. Das Nukleon erscheint dem Positron nicht mehr als ein statisches System mit drei Valenzquarks, sondern als ein dynamisches System, in dem Quark-Antiquark-Paare erzeugt und vernichtet werden und untereinander Gluonen austauschen. Ein Operator höheren Twists kann dabei als das Gewicht interpretiert werden, mit dem eine bestimmte Korrelation von Quarks und Gluonen in die Streuung eingeht.

Es erscheint sofort plausibel, daß diese Vielteilchen-Korrelationen umso wichtiger werden, je größer die in der Streuung getestete Skala ist, also je kleiner die Auflösung des Positronen-Mikroskops ist. Für eine harte Streuung sieht das Positron lediglich ein Quark für einen kurzen Moment. Je weicher die Streuung desto mehr Zeit hat dieses Quark während der Streuung mit anderen Teilchen in Wechselwirkung zu treten. Die höheren Twist-Operatoren werden deshalb umso wichtiger, je kleiner der Impulsübertrag in der Reaktion ist, so daß auch der Zusammenhang von Twist-Entwicklung und $1/Q^2$ -Entwicklung anschaulich wird.³

Auf der anderen Seite wird deutlich, daß die Berechnung von Vielteilchen-Korrelatoren um ein Vielfaches schwieriger sein wird, als dies für die Twist-2 Operatoren der Fall ist. Nicht nur nimmt die Vielfalt der möglichen Korrelationen mit höherem Twist rapide zu, auch wird es immer schwieriger, den Einfluß eines Operators in Experiment oder Theorie zu isolieren. Die für die Berechnung solcher Korrelatoren in Frage kommenden Verfahren sind die QCD-Summenregeln⁴ und Gitterrechnungen. Die QCD-Summenregeln sind ein sehr aufwendiges Verfahren. Aus dem kinematischen Bereich heraus, in dem reine Störungstheorie eine gute Beschreibung liefert, wird eine Aussage über den nichtperturbativen Bereich getroffen. Es ist ein Balanceakt auf einem Grat zwischen großen und kleinen Skalen. Die Fehler der mit dieser Methode produzierten Ergebnisse werden mit 30-100% angegeben. Auf der anderen Seite steht die Berechnung von Vielteilchen-Korrelatoren auf dem Gitter vor noch ungelösten Problemen, die mit der sauberen Trennung der Matrixelemente höheren Twists von denen niederen Twists zusammenhängen.⁵

Die Renormalon-Methode ist ein alternativer Ansatz, mit dem eine Aussage

³Dieser Zusammenhang von Twist und Potenz-Korrektur ist nicht exakt, da auch Twist-2-Operatoren mit $1/Q^2$ unterdrückt werden können, wie an dem Beispiel der Target-Massen-Korrekturen deutlich wird, und muß daher mehr als Regel denn als Gesetz aufgefaßt werden.

⁴Vgl. Shifman, Vainshtein, Zakharov 1979a; 1979b.

⁵Vgl. Maiani, Martinelli, Sachrajda 1992; Martinelli, Sachrajda 1995; Gökeler et al. 1997.

über höhere Twist-Korrekturen gemacht wird, ohne die Ebene des führenden Twists zu verlassen. Man macht sich allgemeine Eigenschaften der QCD-Störungsreihe zunutze, um eine Abschätzung der nächsten Twist-Korrekturen zu erreichen. Dabei ist von vorneherein klar, daß diese Abschätzung grob bleiben wird und selbst eine verlässliche Angabe des Fehlers nicht möglich sein wird. Der Ansatz kann nur durch die damit verbundene Anschaulichkeit und durch seinen Erfolg gerechtfertigt werden. Die apriorischen Grenzen von Fehlerabschätzungen werden an späterer Stelle noch einmal aufgegriffen.

4.2 Über die QCD-Kopplung

4.2.1 Skalenabhängigkeit der Kopplung

In der QED ist die gesamte Skalenabhängigkeit der Kopplung auf die Vakuum-Polarisation zurückzuführen.⁶ Daher kann man eine beliebige Zahl von Fermionen-Loops in einen Photon-Propagator einsetzen und zu einem effektiven Propagator resumieren, indem man die Skalenabhängigkeit der QED-Kopplung exakt berücksichtigt. Die nicht-abelsche Struktur der QCD-Eichtheorie und die damit verbundenen

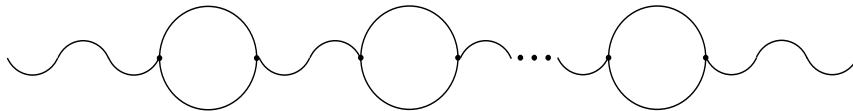


Abbildung 4.1: Die Skalenabhängigkeit der QED-Kopplung führt auf einen effektiven Photon-Propagator mit resummierten Fermionen-Loops.

Mehr-Gluonen-Vertizes führen dazu, daß die Skalenabhängigkeit der Kopplung in der QCD einer Resummation des Gluon-Propagators mit beliebiger Zahl eingesetzter Fermion- und Gluon-Loops entspricht.

Die Skalenabhängigkeit der jeweiligen Kopplung wird in Bezug auf eine Renormierungsskala μ definiert. Um die Lagrangedichte einer Feldtheorie zu renormieren, sind Felder, Kopplung und Massen zu renormieren. Die dimensionslos definierte

⁶Vgl. Brodsky, Lepage, Mackenzie 1983.

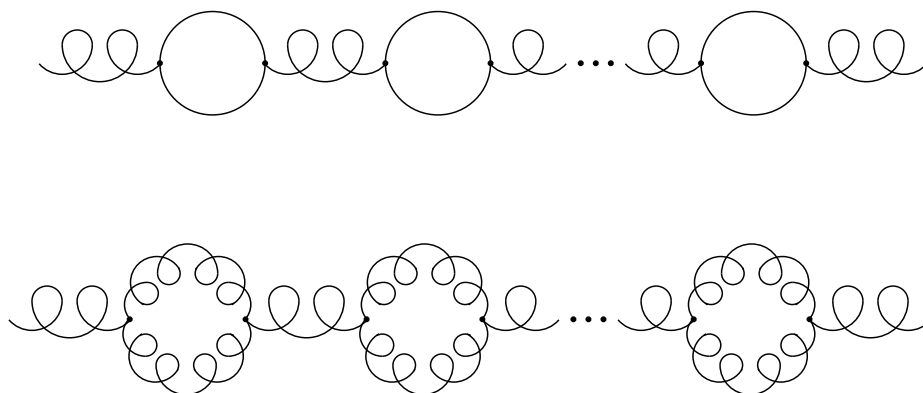


Abbildung 4.2: Die Skalenabhängigkeit der QCD-Kopplung führt auf einen effektiven Gluon-Propagator, in dem alle Zahlen von Fermionen- und Gluonen-Loops resummiert sind. Natürlich sind auch gemischte Graphen enthalten.

Kopplung an der Skala μ' hat die allgemeine funktionale Abhängigkeit

$$g_{\mu'} = f\left(g_{\mu}, \frac{\mu'}{\mu}, \frac{m}{\mu}\right) . \quad (4.1)$$

Geht man von masselosen Feldern aus — der Grenzwert $m \rightarrow 0$ ist ohne Singularitäten definiert⁷ — erhält man formal durch Differentiation an der Stelle $z = \mu'/\mu = 1$

$$\mu \frac{dg_{\mu}}{d\mu} = \beta(g_{\mu}) \equiv \left(\frac{\partial f(g_{\mu}, z)}{\partial z} \right)_{z=1} \quad (4.2)$$

die Callan-Symanzik-Gleichung.⁸ Die Skalenabhängigkeit der Kopplung kann demnach durch die Beta-Funktion beschrieben werden, die einen für die jeweils betrachtete Feldtheorie charakteristischen Verlauf erhält.

4.2.2 Charakterisierung von Theorien mit $\beta(g)$

Formal hat die Callan-Symanzik-Gleichung die Lösung

$$\ln\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) = \int_{g_{\mu}}^{g_{\mu'}} dg \frac{1}{\beta(g)} , \quad (4.3)$$

⁷Vgl. Weinberg 1996, S. 120.

⁸Vgl. Callan 1970; Symanzik 1970.

wobei $\beta(g) \neq 0$ vorausgesetzt wurde, wie man leicht durch die Substitution $g \rightarrow \mu$ einsieht.

Wenn die Beta-Funktion ein Potenzverhalten aufweist und negativ definit ist ($\beta(g) = -bg^n$ mit n aus den natürlichen Zahlen), erhält man:

$$\ln\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) = -\int_{g_\mu}^{g_{\mu'}} dg \frac{1}{bg^n} = \frac{1}{b(n-1)} \left(\frac{1}{g_\mu^{n-1}} - \frac{1}{g_{\mu'}^{n-1}} \right) . \quad (4.4)$$

Diese Gleichung kann nach $g(\mu')$ aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} g(\mu')^2 &= g(\mu)^2 \left(1 + b(n-1)g_\mu^{n-1} \ln\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) \right)^{-\frac{2}{n-1}} \\ &\stackrel{n=3}{\rightarrow} \frac{g(\mu)^2}{\left(1 + 2bg(\mu)^2 \ln\left(\frac{\mu'}{\mu}\right) \right)} . \end{aligned} \quad (4.5)$$

Allgemein sieht man, daß die Negativität der Beta-Funktion für $n > 1$ eine asymptotisch freie Theorie beschreibt, denn für große μ' geht die Kopplung stetig gegen Null. Der Begriff asymptotisch frei rechtfertigt sich durch die Identifikation großer Renormierungsskalen, die die Dimension einer Masse tragen, mit großen Impulsen. Prozesse mit großen Impulsüberträgen können in einer solchen Theorie durch die dann kleine Kopplungskonstante mit hoher Genauigkeit störungstheoretisch behandelt werden. Der in (4.5) schon gesondert betrachtete Fall $n = 3$ stimmt in der 1-Loop-Näherung mit der QCD überein, die damit eine asymptotisch freie Quantenfeldtheorie ist.

Für eine positiv definite Beta-Funktion wird die Kopplung mit der Skala μ' divergieren. Dabei sind die Fälle zu unterscheiden, in denen das Integral in (4.3) endlich ist — also wenn die Beta-Funktion schnell genug wächst — und in denen das Integral trotz wachsender Beta-Funktion divergiert. Im letzten Fall wird die Kopplung erst für unendliche Energien divergieren, während im ersten Fall die Kopplung bereits bei einer endlichen Energieskala unendlich wird. Um das einzusehen, wird (4.3) an der Stelle $g_{\mu'} = g_E = \infty$ ausgewertet. Man erhält

$$E = \mu \exp\left(\int_{g_\mu}^{g_E} \frac{dg}{\beta(g)}\right) = \mu \exp\left(\int_{g_\mu}^{\infty} \frac{dg}{\beta(g)}\right) . \quad (4.6)$$

Die Energieskala, an der die Kopplung unendlich wird, ist endlich, wenn das Integral endlich ist. Der hier geschilderte Fall einer positiven Beta-Funktion findet seine Realisierung in der QED. Unabhängig davon, ob die Divergenz der Kopplung bei endlicher oder unendlicher Energieskala auftritt, erscheint dieser Fall aus physikalischer Sicht problematisch, da eine divergierende Kopplung nicht interpretierbar ist.

Unter einem praktischen Gesichtspunkt gesehen, ist dieses Problem jedoch nicht relevant, da die Energien, an der die Kopplung divergieren könnte, weit oberhalb der heute zugänglichen Energieskalen liegen und sogar oberhalb der Skalen, die eine Einbeziehung von Gravitationseffekten erfordern würde. In niedrigster Ordnung erhält man die Divergenz bei $E \approx e^{646.6} m_e$ ⁹, wobei m_e die Masse des Elektrons darstellt. Dennoch muß man in der QED einen Zusammenbruch der Störungstheorie bereits unterhalb dieser Energien erwarten.

Eine weitere Möglichkeit für das Verhalten der Beta-Funktion sind nichttriviale Nullstellen — eine triviale Nullstelle ist für $g = 0$ zu erwarten. Solche Nullstellen g_N der Beta-Funktion werden Fixpunkte genannt, da sich die Kopplung bei großen Skalen von beiden Seiten an g_N asymptotisch annähert, d.h. für $g_E > g_N$ wird die Kopplung asymptotisch kleiner, während sie für $g_E < g_N$ asymptotisch wächst. Im Bereich um den Fixpunkt hat die Beta-Funktion dann die allgemeine Form $\beta(g) \sim (g_E - g_N)^n$. Man kann zwei Arten von Fixpunkten je nach Vorzeichen der Steigung der Beta-Funktion am Nullpunkt unterscheiden: Angenommen $\beta(g)$ sei positiv zwischen $0 < g_E < g_N$ und negativ für $g > g_N$. Wegen der Callan-Symanzik-Gleichung steigt die Kopplung mit der Energieskala wie $dg_E/dE \sim 1/E$ für $g_E < g_N$ und fällt wie $dg_E/dE \sim -1/E$ für $g_E > g_N$. Der Grenzwert $g_E = g_N$ wird für $E \rightarrow \infty$ erreicht und dementsprechend der Fixpunkt ein UV-Fixpunkt genannt. Analog dazu erhält man den IR-Fixpunkt, wenn die Kopplung g_N für kleine Energieskalen erreicht, was genau dem umgekehrten Verhalten der Beta-Funktion entspricht.

4.2.3 Berechnung der Beta-Funktion

Wenn die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}$ einer Feldtheorie vorgegeben ist und falls die Renormierbarkeit der Theorie gewährleistet ist, kann die gleiche Lagrangedichte mit renormierten Größen und zusätzlichen Countertermen notiert werden:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{0R} + \mathcal{L}_{intR} + \mathcal{L}_C \quad . \quad (4.7)$$

Dabei sind die renormierten Lagrangedichten zu den unrenormierten forminvariant. Es wurden lediglich Felder, Kopplung und Massen durch die entsprechenden renormierten Größen ersetzt. Die auftretenden Zusatzterme werden in \mathcal{L}_C gesammelt.

⁹Vgl. Weinberg 1996, S. 132.

Im speziellen Fall der QCD ist die Renormierbarkeit der Theorie in vier Dimensionen gewährleistet.¹⁰ Die Lagrangedichte der QCD lautet in der Lorentzzeichnung:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 + i(\partial^\mu \chi_1^a)D_\mu^{ab}\chi_2^b + \bar{\psi}^i(i\gamma^\mu D_\mu^{ij} - m\delta^{ij})\psi^j \quad , \quad (4.8)$$

wobei der Feldtensor durch

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.9)$$

definiert ist. A_μ^a sind die Eichfelder der QCD, α ist der Eichparameter und $(\partial^\mu A_\mu^a)^2$ der eichfixierende Term, ψ^i sind die Fermion-Felder mit Dirac-Index, $\chi_{1,2}$ sind Geistfelder, die durch $\chi^a = (\chi_1^a + i\chi_2^a)/\sqrt{2}$ definiert sind, $D_\mu = \partial_\mu - igT^c A_\mu^c$ ist die eichkovariante Ableitung der SU(3) Farbgruppe, wobei D_μ^{ij} die fundamentale und D_μ^{ab} die adjungierte Darstellung bezeichnet, f^{abc} sind die Strukturkonstanten der SU(3) Farbgruppe und T^c die zugehörigen Generatoren und g die QCD-Kopplungskonstante.

Die Aufteilung in den freien Teil und den Wechselwirkungsteil der Lagrangedichte ergibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) - \frac{1}{2\alpha}(\partial^\mu A_\mu^a)^2 \\ &\quad + i(\partial^\mu \chi_1^a)(\partial_\mu \chi_2^a) + \bar{\psi}^i(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^i \\ \mathcal{L}_{int} &= -\frac{1}{2}g(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)f^{abc}A^{b,\mu}A^{c,\nu} - \frac{1}{4}g^2 f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A^{d,\mu}A^{e,\nu} \\ &\quad - ig(\partial^\mu \chi_1^a)\chi_2^b f^{abc}A_\mu^c + g\bar{\psi}^i \gamma^\mu (T^c)^{ij} A_\mu^c \psi^j \quad , \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei benutzt wurde, daß in der adjungierten Darstellung $(T^a)^{kl} = -if^{akl}$ ist.¹¹

Um die Lagrangedichte mit renormierten Größen zu schreiben, sind Fermion-Felder, Geist-Felder, Kopplung, Masse und Eichparameter durch ihre renormierten Größen zu ersetzen:

$$A_\mu^a = \sqrt{Z_3}A_{R\mu}^a \quad \chi_{1,2}^a = \sqrt{Z'_3}\chi_{R1,2}^a \quad \psi^i = \sqrt{Z_2}\psi_R^i \quad g = Z_g g_R \quad m = Z_m m_R \quad . \quad (4.11)$$

Der Eichparameter α benötigt keine eigene Renormierungskonstante, da dieser immer zusammen mit zwei Eichfeldern A_μ^a auftritt, so daß $\alpha = Z_3\alpha_R$ erzwungen wird. Die Counterterm für den ersten Term der freien Lagrangedichte ist dann beispielsweise

$$\mathcal{L}_C = -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)(\partial_\mu A_{R\nu}^a - \partial_\nu A_{R\mu}^a)(\partial^\mu A_R^{a\nu} - \partial^\nu A_R^{a\mu}) \quad . \quad (4.12)$$

¹⁰Vgl. t'Hooft 1972b; Taylor 1976; Collins 1985.

¹¹Für die Darstellungstheorie der SU(3) wird auf Lichtenberg 1970 verwiesen.

Die gesamte Lagrangedichte hängt dann nur noch von den renormierten Größen ab.

Für die Berechnung der Beta-Funktion ist speziell die Renormierung der QCD-Kopplung $g_R = Z_g^{-1}g$ relevant. Die Renormierungskonstante Z_g kann von allen Termen bestimmt werden, die in $\mathcal{L}_{int,R}$ vorkommen. Zur Bestimmung der Koeffizienten der führenden Divergenzen, ist ein Regularisierungsverfahren zu wählen, durch das diese isoliert werden. Wählt man die dimensionale Regularisierung, ist die Kopplung g in $d = 4 - \varepsilon$ Dimensionen zu notieren, wobei die Kopplung eine Massendimension erhält, die isoliert wird:

$$g_R \longrightarrow \mu'^\varepsilon g_{\mu'} = Z_g^{-1}(\mu')g \longrightarrow Z_g^{-1}(\mu')\mu'^\varepsilon g_\mu \quad , \quad (4.13)$$

wobei die Kopplung am Renormierungspunkt μ fest definiert wird und an der Stelle μ' renormiert wird. Daraus folgt

$$g_{\mu'} = \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^\varepsilon Z_g^{-1}(\mu')g_\mu \quad . \quad (4.14)$$

Durch Differentiation und Multiplikation mit μ' und mit Hilfe der Callan-Symanzik-Gleichung (4.2) folgt:

$$\begin{aligned} \beta(g_{\mu'}) &= \mu' \frac{dg_{\mu'}}{d\mu'} = \mu' \frac{-\varepsilon}{\mu'} \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^\varepsilon Z_g^{-1}(\mu')g_\mu + \mu' \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^\varepsilon \frac{dZ_g^{-1}}{d\mu'}(\mu')g_\mu \\ &= -\varepsilon g_{\mu'} - \mu' \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)^\varepsilon Z_g^{-2}(\mu') \frac{dZ_g(\mu')}{d\mu'} g_\mu \\ &= -\varepsilon g_{\mu'} - \mu' Z_g^{-1}(\mu') \frac{dZ_g(\mu')}{d\mu'} g_{\mu'} \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aus der letzten Gleichheit wird deutlich, daß die Beta-Funktion allein durch die Kenntnis der Renormierungskonstanten Z_g berechnet werden kann. Nun geht Z_g in alle Wechselwirkungsterme in (4.10) ein, so daß man mehrere Möglichkeiten hat, Z_g tatsächlich zu bestimmen. Beispielsweise erhält man aus der Quark-Selbstenergie und der Gluon-Selbstenergie Z_2 und Z_3 . Dann kann man den Counterterm für den Quark-Gluon-Vertex berechnen, aus dem man die Kombination $Z_g Z_2 Z_3^{1/2}$ und damit auch Z_g selbst erhält. Alternativ könnte man den Counterterm des 3-Gluon-Vertex berechnen, der auf die Kombination $Z_g Z_3^{3/2}$ führt und unter Kenntnis der Gluon-Selbstenergie ebenfalls Z_g isoliert. Es gibt vier a priori unabhängige Möglichkeiten Z_g zu bestimmen, die allerdings alle auf das gleiche Ergebnis führen müssen. Dies ist gleichzeitig ein Konsistenztest für die Reduktion der vier möglichen prinzipiell unterschiedlichen Kopplungen auf eine einzige Kopplung in der gesamten Theorie.

Im Rahmen der Störungstheorie kann der notwendige Counterterm $Z_g - 1$ in erster Ordnung nach dem oben beschriebenen Weg berechnet werden. Das Ergebnis ist (mit $d = 4 - 2\varepsilon$):

$$Z_g(\mu') = 1 - \frac{g_{\mu'}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{6} (11C_G - 4T_R N_f) + \mathcal{O}(g_{\mu'}^4) \quad . \quad (4.16)$$

Dabei sind in der Gruppe $SU(N)$ $C_G = N$ die Zahl der Farben, und $T_R = 1/2$ ist die Spur über die Generatoren in der fundamentalen Darstellung mit $N \times N$ -Matrizen. Die Zahl der Quark-Sorten (flavors) ist mit N_f bezeichnet und wird hier noch nicht festgelegt. Dieses Ergebnis ist für alle Eichtheorien $SU(N)$ richtig.

Wie gesehen, werden im Rahmen der Störungstheorie die Renormierungskonstanten jeweils bis zu einer bestimmten Ordnung in der Kopplung $a_s = g^2/(4\pi)^2$ berechnet. Damit erhält man auch die Beta-Funktion in der Form einer Störungsreihe. Da die Renormierungskonstanten in nullter Ordnung konstant sind (identisch 1), verschwindet die Ableitung in (4.15), so daß die Beta-Funktion keinen Term proportional zu $g_{\mu'}$ enthält. Der erste Beitrag stammt von der 1-Loop-Korrektur und führt zu einem Term der Ordnung $\mathcal{O}(g^3)$: In diesem Sinne kann man die Störungsreihe der Beta-Funktion als

$$\beta(g_{\mu'}) = -\beta_0 g_{\mu'}^3 - \beta_1 g_{\mu'}^5 + \mathcal{O}(g_{\mu'}^7) \quad (4.17)$$

schreiben. β_0 wird 1-Loop-Beta-Funktion genannt und kann mit Hilfe des 1-Loop Ergebnisses für die Renormierungskonstante Z_g in (4.16) berechnet werden. Dazu wird die Ableitung von Z_g nach μ' benötigt:

$$\mu' \frac{dZ_g(\mu')}{d\mu'} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{g_{\mu'} \beta(g_{\mu'})}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} (11C_G - 4T_R N_f) + \mathcal{O}(g_{\mu'}^4) \quad . \quad (4.18)$$

Dies wird zusammen mit (4.16) in (4.15) eingesetzt. Dabei ist zu beachten, daß $1/Z_g = 1 + \mathcal{O}(g_{\mu'}^2)$.

$$\begin{aligned} \beta(g_{\mu'}) &= -\varepsilon g_{\mu'} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{g_{\mu'}^2 \beta(g_{\mu'})}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} (11C_G - 4T_R N_f) + \mathcal{O}(g_{\mu'}^5) \\ &= \frac{-\varepsilon g_{\mu'}}{1 - \frac{1}{\varepsilon} \frac{g_{\mu'}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} (11C_G - 4T_R N_f)} + \mathcal{O}(g_{\mu'}^5) \\ &= -\varepsilon g_{\mu'} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{g_{\mu'}^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} (11C_G - 4T_R N_f) + \mathcal{O}(g_{\mu'}^4) \right) + \mathcal{O}(g_{\mu'}^5) \\ &= -\frac{g_{\mu'}^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} (11C_G - 4T_R N_f) + \mathcal{O}(g_{\mu'}^5, \varepsilon) \quad . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Damit erhält man durch Koeffizientenvergleich für die 1-Loop-Beta-Funktion in (4.17):

$$\beta_0 = \frac{1}{3(4\pi)^2}(11C_G - 4T_R N_f) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3}N_f\right) \quad , \quad (4.20)$$

wobei die letzte Gleichheit nur in der QCD gilt. Man erkennt, daß die QCD entsprechend den Ausführungen zu (4.5) asymptotisch frei ist, solange $N_f < 33/2$ ist, was für die anerkannten 6 Quarksorten bei weitem erfüllt ist.

Das Ergebnis für die 2-Loop-Beta-Funktion, das auf dem gleichen Weg aber mit einem erheblich größeren Aufwand gewonnen wird¹², lautet:

$$\beta_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(\frac{34}{3}C_G^2 - 4 \left(\frac{5}{3}C_G + C_F \right) T_R N_f \right) = \frac{1}{(4\pi)^4} \left(102 - \frac{38}{3}N_f \right) \quad , \quad (4.21)$$

wobei die letzte Gleichheit wieder für die QCD gilt — in der SU(N) ist $C_F = (N^2 - 1)/2N$ also $4/3$ in der QCD.

4.2.4 Die Lösung der Callan-Symanzik-Gleichung

1-Loop-Näherung

Die Beta-Funktion (4.2) ist in der 1-Loop-Näherung (4.20) proportional zu $-g^3$, d.h. zeigt für $N_f < 33/2$ die asymptotische Freiheit der QCD an. In dieser Näherung wurde die Callan-Symanzik-Gleichung bereits in (4.5) gelöst.¹³ Die Skalenabhängigkeit der QCD-Kopplung wird in erster Näherung durch genau diese Beziehung beschrieben. Aus der Kenntnis der Kopplung an der Renormierungsskala μ erhält man die Kopplung an einer beliebigen Skala Q durch

$$g(Q)^2 = \frac{g(\mu)^2}{1 + \beta_0 g(\mu)^2 \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)} \quad (4.22)$$

oder durch $a_s := g^2/(4\pi)^2$ ausgedrückt:

$$a_s(Q) = \frac{a_s(\mu)}{1 + (4\pi)^2 \beta_0 a_s(\mu) \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)} \quad . \quad (4.23)$$

Die 1-Loop-Beta-Funktion β_0 führt daher auf eine Lösung der Callan-Symanzik-Gleichung, die bereits alle Zahlen von Fermion- oder Gluon-Loop-Einschüben in

¹²Vgl. Jones 1974.

¹³Das dortige b ist hier mit β_0 zu identifizieren.

einen Gluon-Propagator enthält, denn die Kopplung $a_s(Q)$ hat die Form einer geometrischen Reihe:

$$a_s(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(4\pi)^2 \beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right]^n a_s(\mu)^{n+1} \quad . \quad (4.24)$$

Die laufende Kopplung (4.23) enthält also alle führenden Potenzen des charakteristischen Logarithmus $\ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right)$ in der jeweiligen Ordnung der Kopplung $a_s(\mu)$.

Landau-Pol

Im infraroten Bereich von Q^2 enthält die QCD-Kopplung (4.23) einen möglichen Pol, denn der Logarithmus wird dann negativ und β_0 ist positiv definit. Der sogenannte Landau-Pol liegt bei

$$Q^2 = \mu^2 \exp \left[-\frac{1}{\beta_0 g(\mu^2)} \right] \equiv \Lambda^2 \quad . \quad (4.25)$$

Die Skala, an der der Landau-Pol auftritt, kann als charakteristische Skala der QCD verwendet werden, denn in dem Bereich dieser Skala wird die Ströungsreihe gezwungenermaßen zusammenbrechen, so daß man Λ als die QCD-Skala interpretieren kann, an der der Übergang vom asymptotisch freien UV-Bereich in den nichtperturbativen IR-Bereich der Theorie stattfindet.

Die in (4.25) definierte QCD-Skala Λ^2 ist offensichtlich von der Renormierungsskala μ und damit von dem Renormierungs-Schema abhängig. Um eine Schema-unabhängige Skala zu definieren, wird eine Konstante e^{-C} eingeführt, die gerade den Konstanten Term, um den sich die Schemata unterscheiden, kompensiert

$$\Lambda^2 e^{-C} = \mu^2 \exp \left[-\frac{1}{\beta_0 g(\mu^2)} \right] \quad . \quad (4.26)$$

Die Größe $\Lambda^2 e^{-C}$ ist dann Schema-unabhängig, wobei $C_{\overline{\text{MS}}} = -5/3$.

Die QCD-Skala ist der einzige freie Parameter der QCD, der an Experimente anzupassen ist. Durch (4.25) wird über die QCD-Skala die Kopplung am Renormierungspunkt definiert, die dann entsprechend der Callan-Symanzik-Gleichung evolviert. Letztlich wird der dimensionslose Parameter der Theorie g durch einen dimensionsbehafteten Parameter Λ ersetzt, wie es in masselosen Theorien immer geschieht.¹⁴

¹⁴Vgl. Coleman 1973; Muta 1987, S. 216; Weinberg 1996, S. 156.

Reformuliert man die laufende Kopplung mit der charakteristischen QCD-Skala Λ , erhält man:

$$\begin{aligned}
a_s(Q) &= \frac{a_s(\mu)}{1 + (4\pi)^2 \beta_0 a_s(\mu) \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2 \exp[-C] \exp[1/(\beta_0 g(\mu^2))]} \right)} \\
&= \frac{a_s(\mu)}{1 + (4\pi)^2 \beta_0 a_s(\mu) \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2 e^{-C}} \right) - 1} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2 \beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2 e^{-C}} \right)} .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.3 Die QCD-Störungsreihe

4.3.1 Das asymptotische Verhalten der QCD-Störungsreihe

Um sich ein Bild davon zu machen, welches Verhalten die QCD-Störungsreihe mit zunehmender Ordnung in der Kopplungskonstanten zeigt, ist es hilfreich, einen bestimmten Typus von Beiträgen zu einer beliebigen Amplitude zu isolieren. Dazu betrachte man im Impulsraum einen beliebigen Graphen n -ter Ordnung. Die allgemeine Struktur einer Feynman-Amplitude mit n ausgetauschten Gluonen ist

$$\int d^4 k_1 \cdots \int d^4 k_n \frac{\{p, q, k_1, \dots, k_n\}_{\mu_1 \dots \mu_{2n+1}}}{[(k_1 + q)^2]^3 \cdots [(k_n + q)^2]^{2n+1} [k_1^2 \cdots k_n^2]} . \tag{4.28}$$

Für jeden Loop erhält man eine Integration, für jedes Gluon einen Propagator (hier in der Feynman-Eichung) und eine mit n ansteigende Zahl von Fermionen-Propagatoren, die Kombinationen der Gluonimpulse und eines äußeren Impulses q enthalten. Die obige Notation meint, daß im Zähler alle Kombinationen der n Gluon-Impulse k_i mit insgesamt $2n + 1$ Lorentzindizes auftreten.

Im UV-Bereich der Gluonimpulse $k_i^2 \gg q^2$ wird das Divergenzverhalten der Integrale durch die Potenz der Gluonimpulse im Nenner bestimmt. Die Potenz $2n + 1$ kann sich je nach Amplitude um eine endliche Konstante verschieben. So würde z.B. für die Selbstenergie eines Quarks der Nenner $(k_1^2)^1 \cdots (k_n^2)^{2n-1}$ lauten. Dies könnte das Verhalten für kleine n verändern, nicht jedoch das asymptotische Gesamtverhalten der Amplitude bei hohen Ordnungen, wie sich zeigen wird.

Unter Berücksichtigung von (C.12) erkennt man, daß ab einer Ordnung n_0 im-

mer ein Integral der Art

$$\int_Q^\infty d^4 k \frac{a_s(k)}{(k^2)^3} \sim \int_{Q^2}^\infty d(-k^2) \frac{a_s(k)}{(k^2)^2} \quad (4.29)$$

auftritt, wobei die Zahl der Ordnungen in denen dieses Integral nicht auftreten könnte, endlich ist. Im folgenden sollen in allen Ordnungen dieser spezielle Typus von Beiträgen zur Amplitude getrennt untersucht werden.

Das obige Integral geht immer zusammen mit der laufenden QCD-Kopplungskonstanten $a_s(k)$ in die Amplitude ein, die bereits in (4.23) hergeleitet wurde. Sie hat die Form einer geometrischen Reihe mit alternierendem Vorzeichen:

$$\begin{aligned} a_s(\sqrt{-k^2}) &= \frac{a_s(\mu)}{1 + b_0 a_s(\mu) \ln\left(\frac{-k^2}{\mu^2}\right)} \\ &= a_s(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-b_0 a_s(\mu) \ln\left(\frac{-k^2}{\mu^2}\right) \right)^n, \end{aligned} \quad (4.30)$$

wobei $b_0 = (4\pi)^2 \beta_0$ die ein-Loop Beta-Funktion, μ die Renormierungsskala und $a_s = (g/(4\pi))^2$ sind. In der QCD gilt $b_0 > 0$ (d.h. $\beta(g) < 0$), also asymptotische Freiheit, so daß das Vorzeichen der Terme in der Reihe tatsächlich alternierend ist, falls $|k_i^2| > |\mu^2|$, also solange man den UV-Bereich des Integrals betrachtet. Ersetzt man nun die Kopplung $a_s(k)$ der Gluonimpulse durch die Kopplung am äußeren Impuls $a_s(Q)$, erhält das Integral (4.29) die Form

$$\begin{aligned} \int_{Q^2}^\infty d(-k^2) \frac{a_s(k)}{(k^2)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{Q^2}^\infty d(-k^2) \frac{a_s(Q)}{(k^2)^2} \left(-b_0 a_s(Q) \ln\left(\frac{-k^2}{Q^2}\right) \right)^n \\ &= \frac{a_s(Q)}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^\infty d(-k^2) \frac{1}{(k^2)^2} \left(-b_0 a_s(Q) \ln(-k^2) \right)^n \\ &= \frac{a_s(Q)}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-b_0 a_s(Q))^n n! \quad . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dabei wurde die Integral-Darstellung der Gamma-Funktion (C.53) verwendet. Man sieht, daß im UV-Bereich der betrachtete Beitrag zur Feynman-Amplitude wie eine alternierende Reihe $n!(-b_0)^n$ divergiert.

Analog dazu kann das Integral (4.28) im IR-Bereich der Gluonen $k_i^2 \ll q^2$ ausgewertet werden. Hier können im Nenner die Gluonimpulse gegenüber dem äußeren Impuls q vernachlässigt werden, so daß die führenden Integrale im IR-Bereich der Gluonen

$$\frac{1}{(Q^2)^m} \int_0^Q d^4 k \frac{a_s(k)}{k^2} (k^2)^l \sim \frac{1}{(Q^2)^m} \int_0^{Q^2} d(-k^2) (k^2)^l a_s(k) =: I^{IR} \quad (4.32)$$

sind. Auch hier wird die Kopplung durch die laufende Kopplung $a_s(Q)$ ersetzt:

$$\begin{aligned}
I^{IR} &= \frac{1}{(Q^2)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{Q^2} d(-k^2) (k^2)^l a_s(Q) \left(-b_0 a_s(Q) \ln \left(\frac{-k^2}{Q^2} \right) \right)^n \\
&= \frac{a_s(Q)}{(Q^2)^m} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{Q^2} d(-k^2) (k^2)^l \left(b_0 a_s(Q) \ln \left(\frac{Q^2}{-k^2} \right) \right)^n \\
&= \frac{a_s(Q)}{(Q^2)^{m-l-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{\infty} d(-k^2) \frac{1}{(k^2)^{2+l}} \left(b_0 a_s(Q) \ln(-k^2) \right)^n \\
&= \frac{a_s(Q)}{(Q^2)^{m-l-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^{\infty} d(-k^2) \frac{1}{(k^2)^2} \frac{1}{1+l} \left(\frac{b_0 a_s(Q)}{1+l} \ln(-k^2) \right)^n \\
&= \frac{a_s(Q)}{(Q^2)^{m-l-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+l} \left(\frac{b_0 a_s(Q)}{1+l} \right)^n n! \quad , \tag{4.33}
\end{aligned}$$

wobei zwei Substitutionen durchgeführt wurden. Ähnlich wie im UV-Bereich des Integrals erhält man asymptotisch ein Integral, das wie $n!$ divergiert. Der wesentliche Unterschied liegt im Vorzeichen der Reihenglieder, das nicht mehr alternierend ist. Die 1-Loop-Beta-Funktion ist zwar nach wie vor negativ definit (d.h. $b_0 > 0$), aber der Logarithmus hat ein zusätzliches Vorzeichen $(-)^n$ geliefert. $l = 0, 1, \dots$ ist ein von der jeweilig betrachteten Amplitude abhängiger Parameter. Der niedrigste mögliche Wert liegt bei $l = 0$, es können jedoch die ersten l wegfallen. So erhält man im Fall der Photon-Zwei-Punkte-Funktion z.B. $l = 1$ als führende Divergenz.¹⁵

Das sich daraus ergebende qualitative Verhalten der QCD-Störungsreihe

$$R(a_s) := \sum_{n=0}^{\infty} B^{(n)} a_s^n \tag{4.34}$$

auf der Twist-2 Ebene ist in die Abb. 4.3 dargestellt. Die Größe der Beiträge zur Störungsreihe nimmt nur bis zu einer endlichen Ordnung n_0 ab und divergiert danach wie n -Fakultät, so daß diese Reihe maximal bis zur Ordnung n_0 interpretierbar bleibt und als asymptotische Reihe aufgefaßt werden muß. Mindestens ein Teil der QCD-Störungsreihe ist daher eine asymptotische Reihe.¹⁶ Die Störungsreihe der QCD kann deshalb unter praktischen Gesichtspunkten nur bis zur Ordnung n_0 sinnvoll berechnet werden, und es verbleibt dann eine Unsicherheit in der störungstheoretischen Bestimmung einer Amplitude von der Ordnung des kleinsten Beitrags — also von der Ordnung $B^{(n_0)} a_s^{n_0}$:

$$R(a_s) = \sum_{n=0}^{n_0-1} B^{(n)} a_s^n + \mathcal{O} \left(B^{(n_0)} a_s^{n_0} \right) \quad . \tag{4.35}$$

¹⁵Vgl. Mueller 1985, S.337f.; Zakharov 1992, S.455ff.

¹⁶Eine entsprechende Aussage über die gesamte QCD-Störungsreihe ist wesentlich schwieriger zu begründen.

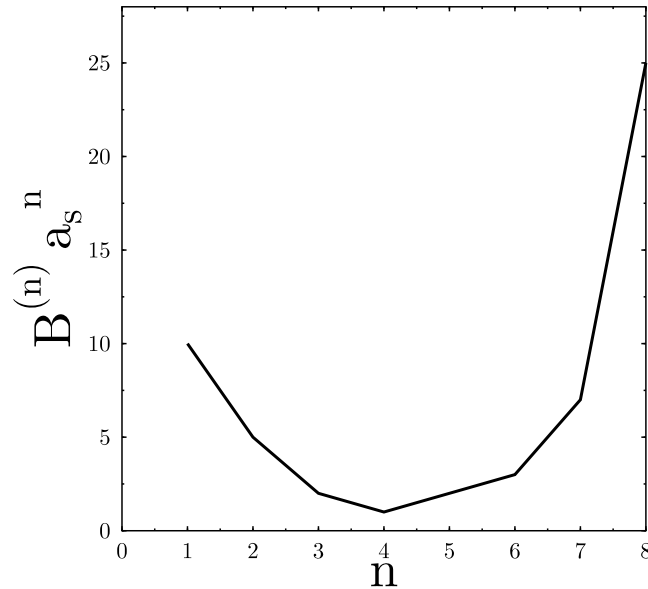


Abbildung 4.3: Das qualitative Verhalten der QCD-Störungsreihe. Die Größe der Koeffizienten ist beliebig skaliert.

Von dem asymptotischen Verhalten der Störungsreihe ist daher auf eine prinzipielle Grenze der Genauigkeit der rein störungstheoretischen Annäherung an eine Amplitude zu schließen. Die daraus resultierende prinzipielle Unsicherheit in der Störungstheorie wird im folgenden untersucht.

4.3.2 Borel-Summierbarkeit der Störungsreihe

Das dargestellte asymptotische Verhalten der QCD-Störungsreihe legt es nahe, in die Borel-Ebene zu wechseln, in der die Divergenz in den hohen Ordnungen gerade kompensiert wird (t ist Borel-Parameter):

$$\mathcal{B}_{1/a_s}(R(a_s) - R_0)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} B^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^{(n+1)} \quad , \quad (4.36)$$

wobei (A.12) benutzt und der erste Term der Störungsreihe, der dem Baum-Beitrag entspricht, vor der Transformation abgezogen wurde. Durch diese Resummation der Störungsreihe erhält diese einen größeren Konvergenzradius. Die entscheidende Frage ist jedoch, ob sie Borel-summierbar ist. Dazu dürfen keine Pole auf der reellen positiven Achse des Borel-Parameters existieren, die die eindeutige Rekonstruktion

der Störungsreihe durch die inverse Transformation verhindern könnte. Die inverse Boreltransformation ist die Laplacetransformation (A.11)

$$R(a_s) - R_0 = \int_0^\infty dt \mathcal{B}_{1/a_s}(R(a_s) - R_0)(t) e^{-t/a_s} \quad . \quad (4.37)$$

Eine Schwierigkeit liegt in dem Verhalten des Integranden für $t \rightarrow \infty$, wo die Konvergenz des Integrals nicht gewährleistet ist.¹⁷ Dieses Problem tritt ausschließlich in dem Bereich der Störungsreihe auf, in dem diese für kleine Kopplungen $a_s(Q)$ oder für große Impulsüberträge Q^2 sehr schnell abfällt:

$$\exp(-t/a_s(Q)) \sim \exp\left(-tb_0 \ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2 e^{-C}}\right)\right) \sim \left(\frac{Q^2}{\Lambda^2 e^{-C}}\right)^{-tb_0} \sim \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2}\right)^{tb_0} \quad , \quad (4.38)$$

wobei die laufende Kopplungskonstante (4.27) eingesetzt wurde. Wenn man sich ausschließlich für die ersten $1/Q^2$ -Korrekturen interessiert — also nicht für die gesamte Reihe aller $1/(Q^2)^n$ -Korrekturen — ist das Problem bei unendlichem Borel-Parameter $t \rightarrow \infty$ in praktischer Hinsicht nicht von primärem Interesse.¹⁸

Eine weitere Schwierigkeit entsteht durch mögliche Pole auf der reellen t -Achse. Deren Herkunft ist auf (4.31) und (4.33) zurückzuführen. Dort hatte man gesehen, daß die Koeffizienten der Störungsreihe für genügend hohe Ordnungen wie $B^{(n+1)} \sim \pm n! (b_0/(1+l))^n$ divergieren. Dabei hängt das Vorzeichen der Koeffizienten davon ab, welchen Bereich der Loopimpulse k_i man betrachtet. Im UV-Bereich — also für $-k_i^2 > Q^2$ — ist das Vorzeichen alternierend, während es das im IR-Bereich ($-k_i^2 < Q^2$) nicht ist. Dementsprechend finden sich die zu der alternierend und nicht alternierend divergenten Reihe zugehörigen Pole, die Renormalonen genannt werden¹⁹, in der Borel-Ebene an unterschiedlichen Stellen wieder. Um das einzusehen, betrachte man die Borel-transformierte Störungsreihe (4.36) und setze die Koeffizienten $B^{(n+1)}$ ein:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1/a_s}(R(a_s) - R_0)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^{(n+1)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{\pm b_0}{1+l}\right)^n n! \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\pm \frac{b_0 t}{1+l}\right)^n = \frac{1}{1 \mp \frac{b_0 t}{1+l}} \quad . \quad (4.39) \end{aligned}$$

Dabei entspricht das jeweils obere Vorzeichen dem UV-Bereich und das untere dem IR-Bereich der Impulsintegration. Man sieht, daß Renormalon-Pole vom UV-Bereich bei $t = -(1+l)/b_0$ und vom IR-Bereich bei $t = (1+l)/b_0$ erscheinen. Die

¹⁷Vgl. t'Hooft 1977.

¹⁸Vgl. Mueller 1993, S.164; auch für die Diskussion der Instanton-Antinstanton-Pole, die hier nicht weiter betrachtet werden.

¹⁹Vgl. t'Hooft 1977; Parisi 1978; 1979.

jeweils führenden Pole — d.h. die dem Ursprung in der Borelebene am nächsten liegenden Pole — erhält man für $l = 0$. Es ist jedoch zu beachten, daß weder die führenden Pole bei $l = 0$ auftreten müssen noch die Zahl der Pole endlich sein muß.²⁰

Die Pole auf der negativen reellen Achse des Borel-Parameters t werden dementsprechend UV-Renormalonen genannt. Sie stellen in Bezug auf die Borel-Summierbarkeit der Störungsreihe kein Problem dar, da die Laplace-Integration (4.37) lediglich über der positiven reellen Achse durchgeführt wird. Die Schwierigkeiten entstehen durch die Pole mit $t > 0$ — den IR-Renormalonen. Es folgt die Form der Borel-Darstellung des asymptotischen Verhaltens der Störungsreihe, indem man die IR-Renormalon-Pole (4.39) in das Laplace-Integral (4.37) einsetzt:

$$\begin{aligned} R(a_s) - R_0 &\sim \int_0^\infty dt \frac{e^{-t/a_s(Q)}}{1 \mp \frac{b_0 t}{1+l}} \\ &= \frac{a_s(Q)(l+1)}{b_0} \int_0^\infty da' \frac{e^{-\frac{l+1}{b_0 a'}}}{a'(a' - a_s(Q))} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

Hier wurde die Borel-Darstellung durch eine Substitution in die Form einer Dispersionsdarstellung gebracht.²¹

Die IR-Renormalonen haben sich als Singularitäten der QCD-Störungsreihe herausgestellt, die die Borel-Summierbarkeit derselben zerstören und damit eine eindeutige Rücktransformation der Störungsreihe mit (4.37) verhindern.

4.3.3 Rekonstruktion der Störungskoeffizienten

Auch wenn die Rekonstruktion der Störungsreihe mittels (4.37) prinzipiell mit einer Unsicherheit durch Renormalon-Pole verbunden ist, so betrifft diese Aussage lediglich die Störungsreihe als Ganzes. Die einzelnen Koeffizienten $B^{(n)}$ der Störungsreihe können natürlich aus dem Borel-transformierten Wilson-Koeffizienten isoliert werden. Dazu ist derselbe nach dem Borel-Parameter t zu differenzieren und am Punkt $t = 0$ auszuwerten:

$$B^{(m+1)} = \left(\frac{d}{dt} \right)^m \mathcal{B}_{1/a_s} (R(a_s) - R_0)(t) \Big|_{t=0} . \quad (4.41)$$

²⁰Mündliche Mitteilung von B.R. Webber.

²¹Vgl. Zakharov 1992, S.460.

Die Richtigkeit dieser Gleichung folgt durch Einsetzen der Borel-transformierten Störungsreihe (4.36):

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt}\right)^m \mathcal{B}_{1/a_s}(R(a_s) - R_0)(t) \Big|_{t=0} &= \left(\frac{d}{dt}\right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^{(n+1)} \Big|_{t=0} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n-m} m!}{n!} B^{(n+1)} \Big|_{t=0} \\
 &= B^{(m+1)} \quad .
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Wenn der Twist-2-Wilson-Koeffizient in der Borel-Ebene bekannt ist, können die Störungs-Koeffizienten auf diese Weise Ordnung für Ordnung rekonstruiert werden. Allerdings gibt es zwei Einschränkungen: auf der einen Seite können nur die Störungs-Koeffizienten berechnet werden, die von niedrigerer Ordnung sind, als der kleinste Term der Störungsreihe. Dies entspricht gerade der Beschränkung der Genauigkeit durch die IR-Renormalonen, mit der die Twist-2-Störungsreihe bekannt ist. Auf der anderen Seite müssen die gefundenen Koeffizienten renormiert werden. Die Schwierigkeit liegt darin, z.B. das $\overline{\text{MS}}$ -Schema in die analytische Regularisierung zu übertragen und dadurch die endliche Konstante zu bestimmen, die durch das gewählte Renormierungsschema festgelegt wird.²² Dieses Problem tritt natürlich nur dann auf, wenn die anomale Dimension nicht verschwindet — also der Borel-transformierte Wilson-Koeffizient für $s \rightarrow 0$ divergent ist, so daß man im Fall der longitudinalen Strukturfunktion oder der Bjorken-Summenregel ohne weitere Bedenken die richtigen Koeffizienten erhält. Wenn jedoch der Wilson-Koeffizient bei $s = 0$ divergiert, muß ein wohldefiniertes Verfahren gefunden werden, mit dem die Renormierungskonstante bestimmt wird. Deshalb werden alle Berechnungen von Wilson-Koeffizienten, in denen dieses Problem virulent wird, simultan analytisch und dimensional regularisiert werden. Aus der analytischen Regularisierung erhält man die Aussagen über die IR-Renormalon-Pole, während die dimensionale Regularisierung ein wohldefiniertes Renormierungsschema ermöglicht.

In der späteren Anwendung dieser Rekonstruktions-Gleichung wird eine äquivalente Darstellung mit $s = b_0 t$ bevorzugt:

$$B^{(m+1)} = b_0^m \left(\frac{d}{ds}\right)^m \mathcal{B}_{1/a_s}(R(a_s) - R_0)(s) \Big|_{s=0} \quad . \tag{4.43}$$

²²Die Übertragung eines Renormierungsschemas auf die analytische Regularisierung in der Borel-Ebene wird in Beneke 1994 im Anhang diskutiert.

4.3.4 IR-Renormalonen als nichtperturbative Korrektur

Wie gesehen zerstören die IR-Renormalonen die Borel-Summierbarkeit der QCD-Störungsreihe. Die Pole auf der positiven reellen Achse des Borel-Parameters können durch die Wahl verschiedener Integrationspfade — nämlich über die obere oder die untere komplexe Halbebene — umgangen werden, so daß bei der Rücktransformation das Ergebnis nicht eindeutig definiert ist. Die Folge ist eine prinzipielle Unsicherheit der Störungsreihe, die mit der Unsicherheit der asymptotischen QCD-Störungsreihe identifiziert werden kann.²³ Der Ursprung beider Unsicherheiten liegt im Landau-Pol der laufenden Kopplung, der bei asymptotischer Freiheit im IR-Bereich $-k^2 < \mu^2$ bei $a_s(\mu) \ln(-k^2/\mu^2) = -1/b_0$ auftritt. Einerseits zeigt der Landau-Pol an, daß die asymptotisch divergente QCD-Störungsreihe nicht eindeutig definierbar ist. Andererseits spiegelt sich der Landau-Pol in der Borel-Ebene in den Renormalonen.²⁴

Die Störungsreihe ist bis zur Ordnung n_0 wohldefiniert, so daß man hier problemlos die inverse Boreltransformation (4.37) durchführen kann, was in der Borel-Ebene gerade der Integration bis zum ersten Pol entspricht. Die durch das führende IR-Renormalon bestimmte Unsicherheit ist dann (hier wird die Nummerierung der Renormalonen $l + 1 = k$ wobei $k = 1, \dots$ verschoben):

$$\begin{aligned}
B^{(n_0)} a_s^{n_0}(Q) &\approx R(a_s(Q)) - \sum_{n=0}^{n_0-1} B^{(n)} a_s^n(Q) \\
&\approx \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \mathcal{B}_{1/a_s} \left(B^{(n_0)} a_s^{n_0}(Q) \right) (t) e^{-t/a_s(Q)} \delta \left(t - \frac{k}{b_0} \right) \\
&\sim \int_0^{\infty} dt \mathcal{B}_{1/a_s} \left(B^{(n_0)} a_s^{n_0}(Q) \right) (t) \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^{tb_0} \delta \left(t - \frac{k}{b_0} \right) \\
&= \mathcal{B}_{1/a_s} \left(B^{(n_0)} a_s^{n_0}(Q) \right) \left(\frac{k}{b_0} \right) \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k \\
&\sim \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k, \tag{4.44}
\end{aligned}$$

wobei hier die Proportionalität (4.38) verwendet wurde. Man sieht hier, daß durch

²³Vgl. Mueller 1993, S.167. Das Verhalten der gesamten QCD-Störungsreihe wird hier mit dem asymptotischen Verhalten des im vergangenen Kapitel analysierten Teils der Störungsreihe gleichgesetzt.

²⁴Auch in der alternativen Formulierung durch Dispersionsrelationen erscheint der gleiche Pol bei $a' = a_s(Q)$. Vgl. dazu Zakharov 1992, S.460. Die Verbindung von Landau-Pol und IR-Renormalonen ist in der Literatur umstritten. Die Eigenschaft der Renormalonen, auf einer rein perturbativen Ebene zu erscheinen, ist das Hauptgegenargument. Vgl. Dokshitzer, Uraltsev 1996.

diese Identifikation die Unsicherheit der QCD-Störungsreihe an der Stelle eines IR-Renormalons $t = k/b_0$ die Form $1/(Q^2)^k$ erhält — also die Form einer nicht-perturbative Korrektur erhält. Der führende IR-Renormalon-Pol liegt im Allgemeinen bei $k = 1$, so daß die führende nichtstörungstheoretische Korrektur proportional zu $1/Q^2$ wird. Ergänzt man die nicht führenden Korrekturen auf analoge Weise, erhält die abgebrochene QCD-Störungsreihe die allgemeine Form:

$$R(a_s) = \sum_{n=0}^{n_0-1} B^{(n)} a_s^n + \sum_{k=1}^{\infty} C^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k . \quad (4.45)$$

Es ist zu beachten, daß das führende IR-Renormalon durchaus auch bei $k = 2$ liegen kann, so daß die führende nichtperturbative Korrektur wie $1/Q^4$ geht. Dies ist bei der Betrachtung der Photon-Zwei-Punkte-Funktion der Fall.²⁵ Andererseits kann die Zahl der IR-Renormalon-Pole endlich sein, so daß die Summe in (4.45) vorzeitig abgebrochen wird, wie dies in der hier interessierenden tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung der Fall ist. In der Elektron-Positron-Streuung erweist sich die Zahl der IR-Renormalonen als unendlich, so daß hier die Summe nicht abbricht.²⁶ Es wäre interessant, die Systematik der Zahl der Renormalon-Pole allgemein zu untersuchen.

Die allgemeine Form der in den IR-Renormalonen gespiegelten Unsicherheit der asymptotisch aufgefaßten QCD-Störungsreihe legt es nahe, die IR-Renormalonen mit nicht-perturbativen Korrekturen zur Störungsreihe zu identifizieren. Neben dem aufgeführten formalen Argument, daß der Unsicherheitsterm dafür die richtige Form hat, kommt hinzu, daß der Ursprung der Unsicherheit im IR-Verhalten der Amplitude zu finden ist — also Effekte größerer Skalen beinhaltet. Die Tatsache, daß der Bereich großer Skalen auf eine Unsicherheit der reinen Störungstheorie führt, zeigt die Notwendigkeit an, höherdimensionale Korrelatoren in die Theorie einzubeziehen, also eine Operatorprodukt-Entwicklung durchzuführen. Dann sind die Renormalon-Unsicherheiten mit den Beiträgen dieser Korrelatoren zur Feynman-Amplitude zu identifizieren, die aus dimensional Gründen mit $1/(Q^2)^{\frac{d}{2}}$ in die Amplitude eingehen. Dabei ist d die Dimension des Operators und kann mit $2k$ in (4.44) identifiziert werden. Die IR-Renormalonen bei $t = k/b_0$ entsprechen damit jeweils dem Beitrag eines Korrelators mit einem $2k$ -dimensionalen Operators.

Die IR-Renormalonen erscheinen hier als Hinweis für die Notwendigkeit, höherdimensionale Operatoren in die Berechnung von Feynman-Amplituden einzubeziehen. Daraus resultiert die Frage, welchen Einfluß die Renormalonen letztlich auf

²⁵Vgl. Zakharov 1992, S. 456.

²⁶Mündliche Mitteilung von B.R. Webber.

die Amplitude haben werden, ob sie lediglich ein Reparaturinstrument für die divergente Störungsreihe darstellen oder tatsächlich zu einem relevanten Element der Theorie werden. Es hat sich in der Praxis herausgestellt, daß die Bedeutung der Renormalonen streng genommen nicht über die eines Reparaturinstruments hinausgeht: In einer Klassifikation der Operatoren nach Twist addieren sich die IR-Renormalonen der Twist-2-Operatoren und die UV-Renormalonen der Twist-4-Operatoren zu Null²⁷, so daß kein tatsächlicher Beitrag der Renormalonen zur Amplitude existiert. Die Existenz von Renormalonen in einer Theorie kann deshalb als Hinweis auf eine ungeschickte Definition der Entwicklungsparameter aufgefaßt werden.

Dennoch kann man sich die Renormalonen zunutze machen, um eine Abschätzung von höheren Twist-Beiträgen zu einer Amplitude zu erhalten. Der leitende Gedanke ist, die UV-Renormalonen der Twist-4-Operatoren als Maß für den gesamten Twist-4 Beitrag zu benutzen. Da die IR-Renormalonen der Twist-2-Operatoren den gleichen Betrag haben wie die UV-Renormalonen der Twist-4-Operatoren, genügt es sogar, die ersteren zu berechnen. Die IR-Renormalonen werden dadurch zu einer Abschätzung der Beiträge des nächsthöheren Twists zu der betrachteten Feynman-Amplitude. Der besondere Vorteil dieser Methode ist die Möglichkeit, Twist-4-Operatoren, die in der Praxis schwer zu bestimmen sind, durch eine reine Twist-2-Rechnung abzuschätzen. Man macht sich die strukturellen Eigenschaften der Twist-2-Störungsreihe zunutze, um eine Aussage über höhere Twist-Korrekturen zu treffen. Natürlich ist der Fehler dieses Verfahrens ausgesprochen schwierig zu bestimmen, da man sehr schwer eine definitive Aussage über das Verhältnis von UV-Twist4-Renormalonen und tatsächlichem Beitrag zur Amplitude der Twist-4-Operatoren treffen kann. Diese Idee muß sich demnach durch die Praxis rechtfertigen.²⁸

4.4 N_f -Entwicklung

Bislang wurde immer die vollständige Störungsreihe betrachtet, mit allen Feynman-Graphen in jeder Ordnung. Es kann sich in der Praxis als sinnvoll erweisen, eine Feynman-Amplitude zwar in hohen Ordnung der QCD-Kopplung aber nicht jede

²⁷Der tiefere Grund für dieses Wegheben ist auf das Bloch-Nordsieck-Theorem zurückzuführen. Vgl. dazu Beneke, Braun, Zakharov 1994.

²⁸Die in der Literatur auch verwendete Methode der massiven Gluonen (vgl. z.B. Dokshitzer, Marchesini, Webber 1995; Dasgupta, Webber 1996) ist zu der hier verwendeten äquivalent (vgl. Beneke, Braun, Zakharov 1994).

Ordnung vollständig zu berechnen. Dies entspricht dann einer Entwicklung des vollständigen Koeffizienten einer gegebenen Ordnung nach einem neuen Parameter. In führender Ordnung erhält man so eine wohldefinierte Auswahl von Graphen. Der dabei gemachte Fehler muß allerdings sorgfältig berücksichtigt werden. Ein solcher Parameter kann die Zahl der Farben N_c sein. Die daraus resultierenden Teilamplituden sind dann im sogenannten large- N_c -limit²⁹ exakt. Hier soll eine Entwicklung nach N_f untersucht werden³⁰ — also nach der Zahl der Quarksorten.

4.4.1 Der Limes großer N_f

N_f bezeichnet die Zahl der Quarksorten. Eine Feynman-Amplitude erhält für jeden Fermionen-Loop einen zusätzlichen Faktor N_f , so daß die Potenz, mit der N_f in einen Feynmangraphen eingeht, die Zahl der Fermionen-Loops mißt. Angenommen man betrachte den Beitrag der n -ten Ordnung der Störungsreihe zu einer Amplitude. Dann ist die maximale Potenz, mit der N_f auftauchen kann, gerade $n - 1$: Ein ausgetauschtes Gluon führt immer auf ein a_s . Für jeden Fermionen-Loop erhält man dann eine weitere Kopplung mit a_s und einen zusätzlichen Faktor N_f . Damit wird deutlich, daß die Potenz von N_f in jedem Feynmangraphen immer mindestens um eins niedriger ist als die Ordnung in der Kopplung des Graphen. Deshalb kann jeder Koeffizient zu gegebener Ordnung in a_s zusätzlich in eine endliche Reihe nach Potenzen von N_f für $n > 0$ entwickelt werden:

$$B^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} B^{(nk)} N_f^k, \quad (4.46)$$

so daß die Störungsreihe (4.34) nun

$$R(a_s) - R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B^{(nk)} N_f^k a_s^n \quad (4.47)$$

lautet. Der Baum-Graph wurde isoliert geschrieben, da diesem keine N_f -Entwicklung zuzuordnen ist. Ganz analog erhält die abgebrochene Störungsreihe (4.45) die Form:

$$R(a_s) - R_0 = \sum_{n=1}^{n_0-1} \sum_{m=0}^{n-1} B^{(nm)} N_f^m a_s^n + \sum_{k=1}^{\infty} C^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k. \quad (4.48)$$

²⁹Vgl. t'Hooft 1974; Witten 1979.

³⁰Vgl. Vasiliev et al. 1981a;b, wo die N_f -Entwicklung erstmals diskutiert wird; Ausarbeitung und Anwendung der Entwicklung auf die QED in Gracey 1992; 1993a;b; und auf die QCD in Broadhurst 1993; Broadhurst, Kataev 1993; Gracey 1993c; 1995; 1996a;b;c; Beneke, Braun 1994; Neubert 1995; Lovett-Turner, Maxwell 1995.

Der Grenzfall großer N_f bedeutet, nur die führende Potenz in N_f zu berücksichtigen und die übrigen Terme zu vernachlässigen:

$$R(a_s) - R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B^{(n,n-1)} N_f^{n-1} a_s^n + \mathcal{O}(N_f^{n-2}) \quad . \quad (4.49)$$

Es ist von vorneherein in keiner Weise klar, daß die nicht führenden N_f -Terme bei endlichen Werten für N_f tatsächlich kleiner sind als die führenden. Um sich klar zu machen, welche Graphen weggelassen werden, kann man als Beispiel einige Graphen dritter Ordnung in a_s in der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung untersuchen (siehe Abb. 4.4). Der Graph (a) mit einem ausgetauschten Gluon und zwei

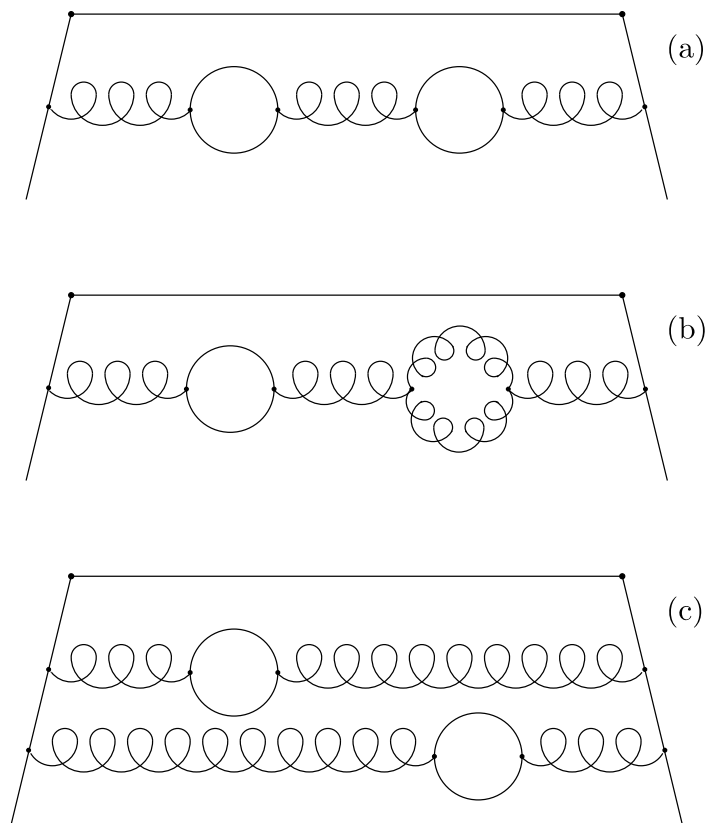


Abbildung 4.4: Einige Graphen dritter Ordnung in a_s mit unterschiedlichen Potenzen in N_f .

eingesetzten Fermionen-Loops ist proportional zu N_f^2 und deshalb von führender Ordnung in der N_f -Entwicklung. Ersetzt man einen der Fermionen-Loops durch

ein Gluon-Bubble (b) bleibt die Ordnung des Graphen in a_s identisch, dagegen erhält man einen Faktor N_f weniger. Schließlich kann ein Fermion-Loop auch durch ein weiteres ausgetauschtes Gluon ersetzt werden (c), ohne die Ordnung in a_s zu verändern. Doch auch hier sinkt die Potenz von N_f gegenüber dem Graphen (a) um eins. Beschränkt man sich auf die führende Ordnung in N_f , erhält man daher nur noch die Graphen mit einer minimalen Zahl ausgetauschter Gluonen, einer minimalen Zahl von Gluonen-Loops und einer maximalen Zahl von Fermionen-Loops.

In dem Grenzfall großer N_f wird gerade die für die nicht-abelsche QCD charakteristische Eigenschaft der asymptotischen Freiheit zerstört, wie man auf zweierlei Weise einsehen kann: Einerseits hat man, wie gesehen, die für die nichtabelschen Theorien charakteristischen Selbstwechselwirkungen der Eichbosonen aus den Amplituden eliminiert. Es sind nur noch die Feynman-Graphen übrig geblieben, die für abelschen Eichtheorien ohne asymptotische Freiheit typisch sind — die Vakuumpolarisation der Eichbosonen durch Fermionen-Loops (siehe Abb. 4.1). Andererseits ist die Reduktion der Koeffizienten der Störungsreihe auf den führenden N_f -Term nur im Grenzfall $N_f \rightarrow \infty$ korrekt. In (4.20) wurde jedoch hergeleitet, daß aus der 1-Loop-Beta-Funktion eine obere Schranke (nämlich $33/2$) für die Zahl der Quarksorten existiert, oberhalb der die asymptotische Freiheit der Theorie verloren geht. Diese obere Schranke wird in dem Grenzfall großer N_f überschritten.

4.4.2 Naive-Non-Abelianization (NNA)

Neuer Entwicklungsparameter β_0

Im vorigen Abschnitt wurde die Entwicklung in der Zahl der Quarksorten N_f zunächst allgemein durchgeführt und dann der führende Term dieser Entwicklung betrachtet. Die Beschränkung auf diesen führenden Term in N_f entspricht der Reduktion der nicht-abelschen Eichtheorie auf eine abelsche Eichtheorie, verbunden mit dem Verlust der asymptotischen Freiheit der Theorie. In diesem Abschnitt wird ein nicht nur dem Namen nach naives Verfahren erläutert, um den nächst-führenden Term in N_f zu berücksichtigen und damit die asymptotische Freiheit wieder zu restaurieren.

Aufgrund der Form der 1-Loop-Beta-Funktion (4.20) ist die Entwicklung der Störungsreihe in N_f formal in eine Entwicklung in $b_0 := (4\pi)^2\beta_0$ überführbar:

$$R(a_s) - R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{b_0}^{(nk)} (-b_0)^k a_s^n \quad . \quad (4.50)$$

Diese Entwicklungen ist zu der in N_f (4.47) äquivalent.³¹ Die Koeffizienten der jeweils führenden Terme in N_f und b_0 sind dabei bis auf einen konstanten Faktor identisch: $B^{(n,n-1)} = \frac{2}{3}B_{b_0}^{(n,n-1)}$. Deshalb sind auch die beiden Entwicklungen in der abelschen Näherung (4.49) identisch.

Die Beschränkung auf den führenden Term in b_0 lautet dann:

$$R(a_s) - R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{b_0}^{(n,n-1)} (-b_0)^{n-1} a_s^n + \mathcal{O}(b_0^{n-2}) \quad . \quad (4.51)$$

Resummation in der 1-Loop-Näherung

Wenn man sich von vorneherein auf Ein-Gluon-Austausch beschränkt — also Graphen des Typs (c) in Abb. 4.4 nicht betrachtet — ist die QCD-Beta-Funktion (4.17) durch die 1-Loop-Näherung (4.20) gegeben. Wie bereits in (4.23) gesehen, bestimmt die 1-Loop-Beta-Funktion die Form der laufenden QCD-Kopplung als Lösung der Callan-Symanzik-Gleichung. Die Kopplung hat die Form einer geometrischen Reihe (4.24), deren Summanden allen möglichen Zahlen von Gluon- und Fermion-Loop-Einschüben entsprechen.

Die Einschränkung auf den Austausch eines Gluons bedeutet für die Störungsreihe (4.34) die Berücksichtigung allein des Terms linear in a_s . Die Ersetzung der Kopplung a_s durch die laufende Kopplung (4.24) bedeutet dann die Resummation aller Fermion- und Gluon-Loop Einschübe in dem einen ausgetauschten Gluon:

$$\begin{aligned} R - R_0 &= B^{(1)} a_s(Q) + \mathcal{O}(a_s(Q)^2) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B^{(1)} \left[-(4\pi)^2 \beta_0 \ln \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) \right]^n a_s(\mu)^{n+1} + \mathcal{O}(a_s(Q)^2, b_0^{n-1}) \\ &= B^{(1)} a_s(\mu) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n (-b_0 a_s(\mu))^n + \mathcal{O}(b_0^{n-1}) \right) + \mathcal{O}(a_s(Q)^2) \quad . \quad (4.52) \end{aligned}$$

Der Vergleich der resultierenden Reihe mit der allgemeinen Entwicklung der Störungsreihe in b_0 (4.50) macht deutlich, daß es sich hier um den jeweils führenden Term in b_0 handelt — also um eine Approximation wie in (4.51), die den führenden Term in N_f exakt beschreibt. Die Terme nächst-führender Ordnung in b_0 wurden in dieser Näherung vernachlässigt. Es handelt sich damit um die maximale Information, die man aus der 1-Gluon-Näherung ziehen kann, was durch die symbolische Notation der Graphen genuin höherer Ordnung in a_s angedeutet wird. Die Graphen des Typs (c) in Abb. 4.4 werden aufgrund des gemachten Ansatzes vollständig vernachlässigt.

³¹Vgl. Neubert 1995, S.5925.

Allerdings werden durch die Ersetzung $\frac{2}{3}N_f \rightarrow -b_0$ gegenüber der N_f Entwicklung auch nicht führende Terme in der N_f -Entwicklung mitberücksichtigt, ohne allerdings eine Vollständigkeit zu erwarten. Genauer gesagt werden alle nicht-führenden Ordnungen in N_f durch die Potenz der 1-Loop-Beta-Funktion approximiert. Alle Ordnungen in N_f erhalten damit bis auf einen Faktor von der Binomialentwicklung den gleichen Koeffizienten. Gluonen-Loop-Einschübe — also Graphen des Typs (b) in Abb. 4.4 — werden dadurch berücksichtigt, nicht jedoch die entsprechenden Graphen von der gleichen Ordnung in N_f mit Mehr-Gluonen-Austausch.

Diese erweiterte Näherung auf dem 1-Gluon-Austausch-Niveau ist eine Entwicklung in dem Parameter $b_0 a_s$, weshalb man hier auch von $(b_0 a_s)^n$ -Resummation spricht.³² Durch die naive Ersetzung von N_f durch b_0 wird die zuvor rein abelsche Näherung um einen Teil seines nichtabelschen Charakters ergänzt: Die Gluonen-Loops werden in der 1-Loop-Näherung der Störungstheorie wieder eingeführt. Die NNA (naive-non-abelianization)³³ kann daher als effektive Restaurierung der asymptotischen Freiheit aufgefaßt werden, die auf dem 1-Loop-Niveau zu einem exakten Ergebnis führt.

4.5 Definition des IR-Renormalon Verfahrens

4.5.1 IR-Renormalon-Pol und höherer Twist

In den letzten Abschnitten wurden die notwendigen Gedanken für die Definition des IR-Renormalon Verfahrens zur Abschätzung höherer Twist-Beiträge zu einer Amplitude zusammengetragen. Gegeben sei eine beliebige Vorwärts-Streu-Amplitude T zu einem nicht spezifizierten Prozeß. Diese wird eine bestimmte Lorentz-Struktur besitzen, die durch L symbolisiert werden soll. Aufgrund der Faktorisierungstheoreme können die Twist-2 Beiträge zur Amplitude von verschiedenen Skalen voneinander getrennt werden und die höheren Twist Anteile gesondert notiert werden:

$$TL = L \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, a_s(Q) \right) A_n^{tw-2}(\mu^2) \omega^{n+1} + \mathcal{O}(tw - 3, 4) \quad . \quad (4.53)$$

Der Twist-2 Anteil wurde hier als Reihe im inversen Bjorken- x ($\omega = 1/x$) dargestellt. A_n^{tw-2} bilden die Twist-2 Operatoren und C_n sind die Wilson-Koeffizienten,

³²Vgl. Beneke, Braun 1995; Ball, Beneke, Braun 1995.

³³Vgl. Brodsky, Lepage, Mackenzie 1983; Beneke, Braun 1995.

die von einem charakteristischen Impuls des betrachteten Prozesses abhängen und die die Form einer Störungsreihe wie in (4.34) besitzen.

Das allgemeine Verhalten der Störungsreihe (siehe Abb. 4.3) führt auf eine prinzipielle Unsicherheit in der Definition derselben, die in der Form der abgebrochenen Störungsreihe (4.45) darstellbar ist:

$$C_n \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, a_s(Q) \right) = \sum_{m=0}^{m_0-1} B_n^{(m)} a_s^m(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} C_n^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k . \quad (4.54)$$

Nach einer Boreltransformation äußert sich die Unsicherheit als Pol auf der reellen Achse in der komplexen Borel-Ebene, die eine eindeutige Rücktransformation verhindert. Die Vorwärts-Streu-Amplitude (4.53) hat in der Borel-Ebene die Form:

$$\mathcal{B}_{1/a_s}[TL](t) = L \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_{1/a_s} \left[C_n \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, a_s(Q) \right) \right] (t) A_n^{tw-2}(\mu^2) \omega^{n+1} + \mathcal{O}(tw - 3, 4) . \quad (4.55)$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß allein die Wilson-Koeffizienten C_n von der QCD-Kopplung abhängen und deshalb die Borel-Transformation ausschließlich auf diese wirkt.

Die Unsicherheit kann deshalb entsprechend (4.37) als Imaginärteil der Rücktransformation von C_n berechnet werden, der gerade den Beitrag von den Polen mißt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_n^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \int_0^{\infty} dt \mathcal{B}_{1/a_s} \left[C_n \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, a_s(Q) \right) \right] (t) e^{-t/a_s(Q)} \right\} . \quad (4.56)$$

Wie in Kap. 4.3.4 ausführlicher erläutert wurde, ist die prinzipielle Unsicherheit der Störungsreihe als Indiz für die Notwendigkeit zu interpretieren, höherdimensionale Operatoren in (4.53) zu berücksichtigen. Die allgemeine Struktur der Unsicherheit (4.54) bestätigt diese Interpretation, so daß man (4.56) als Abschätzung für höhere Twist-Anteile der Amplitude verwenden kann.

4.5.2 Resummation von Loops in einem Gluon

In der praktischen Anwendung dieses Ansatzes zur Abschätzung höherer Twist-Anteile einer Amplitude ist die Kenntnis des Wilson-Koeffizienten Bedingung. Die genauesten QCD-Rechnungen geben diesen bis zur dritten Ordnung der Kopplungs-

konstanten an.³⁴ Das ist sicherlich nicht ausreichend, um den minimalen Term der Störungsreihe zu erhalten, so daß eine Näherung notwendig ist, die es erlaubt, eine Aussage über das Verhalten der QCD-Störungsreihe in hohen Ordnungen der Kopplung zu machen. Eine mögliche Näherung ist die Resummation von Fermionen- und Gluonen-Loops in einem einzigen ausgetauschten Gluon³⁵ — also die Beschränkung auf die erste Ordnung Störungstheorie kombiniert mit der Ersetzung der QCD-Kopplung durch die laufende Kopplung (4.23), wie es in Kap. 4.2.4 beschrieben wurde. Diese Näherung ist im Limes großer N_f exakt³⁶, da die führenden N_f -Terme durch die maximale Zahl von Fermion-Loops in einem ausgetauschten Gluon bestimmt werden, wobei durch die NNA³⁷ — also durch die Benutzung der 1-Loop-Beta-Funktion statt des führenden N_f -Terms — die nicht-führenden Terme in der N_f -Entwicklung (4.47) auf *naive* aber in der 1-Loop-Näherung exakte Weise approximiert werden.

Auf diese Weise erhält man einen Teil des gesamten Wilson-Koeffizienten, der allerdings in der Regel bereits das typische asymptotische Verhalten der QCD-Störungsreihe aufweist und daher auch in der Borel-Ebene IR-Renormalon-Pole hat. Dadurch wird ein Teil der prinzipiellen Unsicherheit der QCD-Störungsreihe bestimmbar.

4.5.3 Der effektive Gluon-Propagator

Um den Borel-transformierten Wilson-Koeffizienten C_n zu berechnen, ist es notwendig die laufende QCD-Kopplung (4.24) in die Borel-Ebene zu transformieren:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{1/a_s} [a_s(K)](t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(4\pi)^2 \beta_0 \ln \left(\frac{K^2}{\mu^2} \right) \right]^n \mathcal{B}_{1/a_s} [a_s(\mu)^{n+1}](t) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[-(4\pi)^2 \beta_0 \ln \left(\frac{K^2}{\mu^2} \right) \right]^n \frac{t^n}{n!} \\
 &= \exp \left\{ -(4\pi)^2 \beta_0 t \ln \left(\frac{K^2}{\mu^2} \right) \right\} \\
 &= \left(\frac{K^2}{\mu^2} \right)^{-(4\pi)^2 \beta_0 t} = \left(\frac{\mu^2}{K^2} \right)^{b_0 t}, \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

³⁴Siehe z.B. für die gut etablierte Bjorken-Summenregel Larin, Tkachov, Vermaseren 1991; Larin, Vermaseren 1991.

³⁵Vgl. dazu Kap. 4.4.2.

³⁶Vgl. dazu Kap. 4.4.1.

³⁷Vgl. Kap. 4.4.2.

wobei $K^2 = -k^2$ und erneut $b_0 = (4\pi)^2\beta_0$ eingeführt und (A.12) benutzt wurde. Die laufende Kopplung hat in der Borel-Ebene die Struktur einer Potenz des Gluon-Impulses.

Der effektive Gluon-Propagator, der alle Fermion- und Gluon-Loops resumiert, erhält dadurch in der Borel-Ebene eine sehr einfache Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1/a_s} [a_s(k) D_{\mu\nu}^{ab}(k, \alpha)](t) &= \frac{\delta^{ab} d_{\mu\nu}(k, \alpha)}{k^2} \mathcal{B}_{1/a_s} [a_s(k)](t) \\ &= \frac{\delta^{ab} d_{\mu\nu}(k, \alpha)}{k^2} \left(\frac{\mu^2}{K^2} \right)^{b_0 t}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Der einfache Gluon-Propagator ist durch

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k, \alpha) = \frac{\delta^{ab}}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (4.59)$$

gegeben und α ist ein Eichparameter, der für die Feynman-Eichung 1 und für die Landau-Eichung 0 ist.

Damit reduziert sich die Berechnung der Wilson-Koeffizienten in der angegebenen Näherung auf die Berechnung der ersten Ordnungs-Störungskorrektur mit dem Borel-transformierten effektiven Gluon-Propagator (4.58). Die auf der positiven reellen Achse in der Borel-Ebene auftretenden IR-Renormalon Pole des Wilson-Koeffizienten führen dann mit (4.56) auf die gesuchte prinzipielle Unsicherheit der Twist-2-Störungsreihe, die als Abschätzung für den höheren Twist-Anteil der jeweiligen Amplitude dienen kann.

4.5.4 Stellenwert der Methode

Bei der Anwendung der Renormalon-Methode zur Abschätzung höherer Twist-Korrekturen sollte der Stellenwert der Methode immer präsent bleiben. Es handelt sich um eine rein perturbative Rechnung, die ausschließlich die Information nutzt, die auf der Ebene des führenden Twists in der Operatorprodukt-Entwicklung zur Verfügung steht. Lediglich die in diesem störungstheoretischen Rahmen zur Verfügung stehenden Hinweise auf die Notwendigkeit der Einbeziehung höherer Twist-Korrekturen dienen als Grundlage für die Abschätzung derselben. Diese Hinweise werden der strukturell bedingten Unsicherheit entnommen, mit der die QCD-Störungsreihe auf der Twist-2-Ebene definiert ist, und daher mit dem Landau-Pol der QCD-Kopplung in Verbindung gebracht.

Die Frage, die sich stellt, ist, inwieweit eine quantitative Aussage über höhere Twist-Korrekturen allein aus der Kenntnis der Twist-2-Unbestimmtheit möglich ist. Sicherlich ist diese Unbestimmtheit von der richtigen Form, denn sie ist mit $1/Q^2$ unterdrückt und hat damit die für höhere Twist-Korrekturen typische Struktur. Wären jedoch die höheren Twist-Korrekturen vollständig durch die Unbestimmtheit der Twist-2-Störungsreihe bestimmt, so verlöre der Begriff der nichtstörungstheoretischen Korrekturen seinen Sinn — dann wären diese Korrekturen eben doch perturbativ. Die Unbestimmtheit kann demnach maximal einen Teil der höheren Twist-Korrekturen betreffen, während die gesamte höhere Twist-Korrektur davon zunächst völlig unabhängig bleibt.

Ein solches Verhältnis von Twist-2-Unbestimmtheit zum Betrag der tatsächlichen höheren Twist-Korrektur könnte nur dann etabliert werden, wenn man einen Zusammenhang der Renormalon-Pole zu den letzteren beweisen könnte. Dazu wäre es hinreichend, die Renormalon-Pole mit dem Landau-Pol in Verbindung zu bringen, was auch diskutiert, jedoch mehrheitlich abgelehnt wird.³⁸ Vielversprechender ist hier das Verschwinden der Renormalon-Pole in der Summe von Twist-2- und Twist-4-Beiträgen zu einer Amplitude. Die IR-Renormalonen der Twist-2-Störungsreihe haben den gleichen Betrag wie die UV-Renormalonen der Twist-4-Korrekturen und heben sich zu Null weg — eine Eigenschaft, die letztlich auf das Bloch-Nordsieck-Theorem zurückzuführen ist.³⁹ Hier zeigt sich einerseits das Dilemma, daß die Berechnung der IR-Renormalonen sinnlos erscheint, da sie in der Summe aller Beiträge zur Amplitude keine Rolle spielen werden. Andererseits eröffnet sich gleichzeitig die Brücke zu einer realen Verbindung der berechneten Twist-2-Unbestimmtheit mit höheren Twist-Korrekturen. In der Hoffnung — die allerdings einer fundamentalen Begründung ermangelt — die Twist-4-UV-Renormalonen stünden zu den tatsächlichen Twist-4-Korrekturen in einem spektakulären Verhältnis, träfe dies auch auf die IR-Renormalonen der Twist-2-Störungsreihe zu.

Eine realer Zusammenhang mit den höheren Twist-Korrekturen ist also unabhängig von der Lösung der Frage nach einer Verbindung der IR-Renormalonen zum Landau-Pol tatsächlich vorhanden — allerdings bleibt die Unsicherheit über den quantitativen Anteil der führenden Renormalon-Unsicherheit zu der tatsächlichen Twist-4-Korrektur. Dementsprechend kann auch keine Aussage über den Fehler der Renormalon-Methode gemacht werden, der lediglich durch Erfahrungswerte

³⁸Vgl. Dokshitzer, Uraltsev 1996; Grunberg 1996.

³⁹Vgl. Beneke, Braun, Zakharov 1994; diese Eigenschaft wird später exemplarisch für die longitudinale Strukturfunktion überprüft.

abgeschätzt werden kann, ohne das dadurch eine verlässliche Fehlerangabe jemals möglich werden könnte.

Die aus der Erfahrung gewonnene Fehlerangabe muß sich mit den Fehlerangaben alternativer Methoden vergleichen lassen. Während die Abschätzung von höheren Twist-Matrixelementen im Rahmen von Gitter-Eichtheorien noch vor fundamentalen Problemen steht, bietet das Verfahren der QCD-Summenregeln den wesentlichen Vorteil eines besser begründbaren Ansatzes.⁴⁰ Man bewegt sich hier von vorneherein in einem Zwischenfeld von störungstheoretischen und nichtstörungstheoretischen Effekten, die dadurch auf theoretisch saubere Weise in die Betrachtung eingehen. Der große Nachteil dieser Methode ist neben dem immensen Aufwand der ebenfalls sehr große Fehler, der in der Praxis mit 30-100% angegeben wird.

Während die QCD-Summenregeln die Korrekturen nach Betrag und Vorzeichen bestimmen, enthält die Renormalon-Methode keine Handhabe, das Vorzeichen der Korrektur festzulegen. Dies äußert sich bei der Rücktransformation der IR-Renormalonen aus der Borel-Ebene, bei der die Pole in der komplexen Ebene auf verschieden Weise umgangen werden können, so daß das Vorzeichen unbestimmt bleibt.

Aus dieser Perspektive stellt sich die Renormalon-Methode als günstige Möglichkeit dar, die Bedeutung einer höheren Twist-Korrektur betragsmäßig abzuschätzen, während die QCD-Summenregeln in den relevanten Fällen eine quantitativ sicherere Aussage machen können, in der das Vorzeichen der Korrektur festgelegt ist.

Eine weitere Einschränkung der Gültigkeit der Renormalon-Methode betrifft den kinematischen Bereich. Die Näherung großer N_f ist nur für den Austausch eines virtuellen Gluons exakt und wird umso schlechter, je mehr Gluonen in einem Prozeß relevant sind. Im kinematischen Bereich kleiner Bjorken- x ist der Mehr-Gluonen-Austausch dominant, so daß die gemachte Näherung dort sicherlich keine Gültigkeit mehr besitzt. Der Interpretation von Abschätzungen höherer Twist-Korrekturen, die als Funktion von x dargestellt werden, ist folglich eine untere Schranke für x gesetzt. Entsprechend sollte die Abschätzung der Korrekturen zu den Momenten mit höheren Momenten zunehmen, da diese auf den Bereich kleiner x weniger sensitiv sind. Diese Erwartung läßt sich insbesondere anhand der rekonstruierten Störungskoeffizienten bestätigen.

Der Impulsübertrag Q^2 durch das virtuelle Austauschteilchens ist einerseits so niedrig zu wählen, daß die höheren Twist-Korrekturen eine gewisse Bedeutung

⁴⁰Vgl. Shifman, Vainshtein, Zakharov 1979a,b.

haben, andererseits so groß zu wählen, daß die Störungstheorie, die ja der Ausgangspunkt der Methode ist, noch sinnvoll bleibt. Hier deutet sich ein zu den QCD-Summenregeln vergleichbarer Balanceakt zwischen den Domänen der Störungstheorie und der großen Skalen an. Der kinematische Bereich, in dem die Renormalon-Methode sinnvoll angewendet werden kann, ist folglich der mittlerer Bjorken- x und mittlerer Impulsüberträge Q^2 .

Kapitel 5

Über die polarisierte Strukturfunktion g_1

Nachdem die Grundlagen der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung und der Renormalon-Methode erläutert wurden, kann diese für die Analyse der Strukturfunktionen des Nukleons verwendet werden. Dabei werden zwei Hauptziele verfolgt: die Berechnung höherer Twist- sowie von Störungs-Korrekturen in der QCD-Kopplung. Die letzteren erhält man gewissermaßen als Abfallprodukt der ersteren, mit der Einschränkung, daß diese lediglich in der ersten Ordnung der QCD-Kopplung exakt berechnet sind, während die höheren Korrekturen in diesem Rahmen nur im Limes großer Flavor-Zahlen¹ korrekt sind.

In diesem Kapitel werden die Aussagen der Renormalon-Methode speziell für die nonsinglet polarisierte Strukturfunktion g_1^{NS} hergeleitet.² Während über die Störungskorrekturen zu g_1^{NS} sehr genaue Aussagen gemacht werden konnten, ist es wesentlich schwieriger, die allgemein als klein angenommenen höheren Twist-Korrekturen zu berechnen. Deren genaue Kenntnis ist jedoch für die experimentelle Bestimmung vieler Größen wesentlich, wie z.B. für die QCD-Kopplungskonstante.

Die Bestimmung der QCD-Kopplung durch die Messung der Bjorken-Summenregel wird durch höhere Twist-Korrekturen zur Bjorken-Summenregel affiziert. Auch wenn diese für klein gehalten werden, so könnte dies auf ein sich Wegheben der an sich größeren Korrekturen zurückzuführen sein, die in verschiedenen Bereichen von Bjorken- x mit vertauschtem Vorzeichen eingehen. Es wird daher zu untersuchen

¹Siehe Kap. 4.4.1.

²Die polarisierte Strukturfunktion g_1 ist in (2.64) definiert, und die experimentelle Information über die nonsinglet-Kombination ist in Abb. 2.9 gezeigt.

sein, ob und inwieweit eine solche Auslöschung der Korrekturen in der Bjorken-Summenregel stattfindet. Die Twist-4-Korrekturen beeinträchtigen auch die Genauigkeit, mit der der Twist-2-Beitrag zum dritten Moment von g_1^{NS} bestimmt wird, der einerseits ebenfalls in die Bjorken-Summenregel als $1/Q^2$ -Korrektur eingeht und andererseits in die Bestimmung des Twist-3-Matrixelements durch die Messung des dritten Moments der transversalen Strukturfunktion g_2 eingeht.

Im folgenden werden zunächst die Vorwärtsstreuamplitude (2.47) in erster Ordnung der QCD-Kopplung ausgearbeitet und daraus die Feynman-Graphen und die zugehörigen Gewichte bestimmt, die für die entsprechende Lorentzstruktur relevant sind. Die so gefundenen Graphen werden mit dem effektiven Gluon-Propagator (4.58) in der Borel-Ebene simultan analytisch und dimensional regularisiert. Daraus erhält man einerseits die anomale Dimension γ^{qq} bzw. die Splittingfunktion $P^{qq}(x)$, aus denen die zugehörige Renormierungskonstante bestimmt werden kann und damit eine Aussage über die perturbativen Korrekturen möglich wird. Dabei ist besonders auf die Rolle der γ_5 -Matrix zu achten, die im Rahmen der dimensional Regularisierung die Ward-Identität für den Axialvektor-Strom verletzen kann und daher eine zusätzliche Renormierung notwendig macht.³ Die erhaltenen Störungskorrekturen werden mit den aus der Literatur bekannten Werten verglichen. Daraus erhält man einen Test für die Richtigkeit der Rechnung und eine Überprüfung der Qualität der NNA-Näherung für große Flavor-Zahlen.⁴ Andererseits erlauben die gefundenen Renormalon-Pole die Abschätzung der höheren Twist-Korrekturen.⁵ Die Betrachtung wird durch eine phänomenologische Betrachtung der erhaltenen Vorhersagen für das Twist-4-Matrixelement (3.59) bzw. (3.85) abgeschlossen, die einerseits einzelne Momente der polarisierten Strukturfunktionen g_1 und g_2 und andererseits g_1^{NS} als Funktion von Bjorken- x beinhaltet.

5.1 Entwicklung des zeitgeordneten Stromprodukts

Wenn man sich für die störungstheoretischen Korrekturen in der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung interessiert, wird es notwendig sein ein Produkt von vier Fermion-Strömen nach Wick⁶ zu entwickeln. Der hadronische Teil des Streuprozesses beinhaltet in der Sprache der Vorwärtsstreuung ein ein- und ein auslaufendes

³Diese Problematik ist in Kap. B.1.9 dargestellt. Zu der Renormierung der Ward-Identität in diesem Zusammenhang finden sich Kommentare in Collins 1985 und Larin, Vermaseren 1991.

⁴Vgl. zur N_f -Entwicklung Kap. 4.4.1.

⁵Vgl. dazu die Begründung in den methodischen Kapiteln 4.3.4 und 4.5.1.

⁶Vgl. zum Wickschen Theorem: Wick 1950.

Photon, sowie ein ein- und ein auslaufendes Quark aus dem Nukleon. In erster Ordnung der QCD-Kopplung wird es weiterhin zwei Vertizes geben, zwischen denen ein Gluon propagiert. Damit erhält man insgesamt je zwei elektromagnetische und zwei Farb-Vertizes, so daß das maßgebliche Matrixelement

$$g^2 \langle ps | T \left\{ j^\rho(x_1) A_\rho(x_1) j^\lambda(x_2) A_\lambda(x_2) j_I(x_3) j_J(x_4) \right\} | ps \rangle \quad (5.1)$$

lautet, wobei die A -Felder das Gluonenfeld bezeichnen und die Photonfelder nicht notiert wurden, da sie mit dem leptonischen Tensor kontrahiert im Wirkungsquerschnitt erscheinen und deshalb im hadronischen Teil der Streuung lediglich den Typ des Vertex bestimmen, an dem sie ankoppeln. Die Fermionen-Ströme, die durch die Gluonenfelder kontrahiert werden, sind Vektor-Ströme und wurden als solche notiert. Hingegen wird die Struktur der beiden übrigen Ströme zunächst offengelassen, was durch die Indizes I und J angedeutet wird. Man kann also an pseudoskalare, vektorielle oder pseudovekterielle Ströme denken, wodurch die hier durchgeführte Entwicklung auch für andere Lorentzstrukturen bzw. Strukturfunktionen gültig bleibt.

Da die Gluonenfelder und die Fermionenströme kommutieren, zerfällt das zeitgeordnete Produkt in zwei Produkte — eines mit Gluonenfeldern und eines mit Fermionströmen. Das erste wird nach Wick zerlegt in einen Gluonpropagator und ein normalgeordnetes Produkt, das einem Gluonkondensat entspricht und daher für die Berechnung von Störungskorrekturen nicht relevant ist. Es verbleibt daher das Produkt eines Gluon-Propagators von x_1 nach x_2 und ein zeitgeordnetes Produkt von vier Fermion-Strömen, das ausgeschrieben lautet:

$$T \left\{ \bar{\psi}(x_1) \gamma^\rho \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \Gamma_3 \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \Gamma_4 \psi(x_4) \right\} . \quad (5.2)$$

Da man sich in der inklusiven Lepton-Nukleon-Streuung für Zustände mit einem ein- und einem auslaufenden Quark interessiert, werden bei der Entwicklung dieses Produkt nach Wick genau diese Terme herausgefiltert. Alle übrigen Quarkfelder werden zu Quark-Propagatoren $iS(y-x)$ kontrahiert. Die resultierenden Terme lauten:

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}(x_3) \Gamma_3 iS(x_3-x_2) \gamma^\lambda iS(x_2-x_1) \gamma^\rho iS(x_1-x_4) \Gamma_4 \psi(x_4) \\ & + \bar{\psi}(x_3) \Gamma_3 iS(x_3-x_1) \gamma^\rho iS(x_1-x_2) \gamma^\lambda iS(x_2-x_4) \Gamma_4 \psi(x_4) \\ & + \bar{\psi}(x_4) \Gamma_4 iS(x_4-x_2) \gamma^\lambda iS(x_2-x_1) \gamma^\rho iS(x_1-x_3) \Gamma_3 \psi(x_3) \\ & + \bar{\psi}(x_4) \Gamma_4 iS(x_4-x_1) \gamma^\rho iS(x_1-x_2) \gamma^\lambda iS(x_2-x_3) \Gamma_3 \psi(x_3) \\ & + \bar{\psi}(x_3) \Gamma_3 iS(x_3-x_1) \gamma^\rho iS(x_1-x_4) \Gamma_4 iS(x_4-x_2) \gamma^\lambda \psi(x_2) \\ & + \bar{\psi}(x_3) \Gamma_3 iS(x_3-x_2) \gamma^\lambda iS(x_2-x_4) \Gamma_4 iS(x_4-x_1) \gamma^\rho \psi(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{\psi}(x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_2)\gamma^\lambda\psi(x_2) \\
& +\bar{\psi}(x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_1)\gamma^\rho\psi(x_1) \\
& +\bar{\psi}(x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_4)\Gamma_4\psi(x_4) \\
& +\bar{\psi}(x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_3)\Gamma_3\psi(x_3) \\
& +\bar{\psi}(x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_4)\Gamma_4\psi(x_4) \\
& +\bar{\psi}(x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_3)\Gamma_3\psi(x_3) \\
& +\bar{\psi}(x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_2)\gamma^\lambda\psi(x_2) \\
& +\bar{\psi}(x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_2)\gamma^\lambda\psi(x_2) \\
& +\bar{\psi}(x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_1)\gamma^\rho\psi(x_1) \\
& +\bar{\psi}(x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_4)\Gamma_4 iS(x_4-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_1)\gamma^\rho\psi(x_1) \quad . \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Es gibt noch weitere Terme in der Wickschen Entwicklung die mehr oder weniger äußere Quarkfelder besitzen, so daß diese hier nicht relevant werden. Mit genau drei Quarkpropagatoren und einem ein- sowie einem auslaufenden Quarkfeld treten noch drei weitere Typen von Termen auf:

$$\bar{\psi}(x_1)\gamma^\rho iS(x_2-x_1)\gamma^\lambda\psi(x_2)iS(x_3-x_4)\Gamma_3 iS(x_4-x_3)\Gamma_4 \quad (5.4)$$

$$\bar{\psi}(x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_3)\Gamma_3 iS(x_3-x_4)\Gamma_4\psi(x_4) \quad (5.5)$$

$$\bar{\psi}(x_2)\gamma^\lambda iS(x_2-x_3)\Gamma_3\psi(x_3)iS(x_4-x_1)\gamma^\rho iS(x_1-x_4)\Gamma_4 \quad . \quad (5.6)$$

Der erste Typ enthält einen unverbundenen Quarkloop und verschwindet deshalb identisch. Der zweite entspricht der Selbstenergie eines äußeren Quarks und ist daher bereits in der Quark-Verteilungsfunktion des Nukleons enthalten. Schließlich verschwindet auch der dritte Typ, der den Tadpol-Diagrammen entspricht. Diese verschwinden aufgrund der Wahl einer Renormierungsbedingung, die Ordnung für Ordnung gewährleistet werden muß.⁷

Von den 16 Termen in (5.3) sind jeweils zwei identisch, nämlich genau die, in denen die Kontraktionen identisch sind und lediglich das Gluon in der anderen Richtung läuft, also statt von x_2 nach x_1 von x_1 nach x_2 . Dies ist eine direkte Folge von der Tatsache, daß der Gluon-Propagator ebenso wie das Volumenelement der Loopintegration gegenüber der Transformation $k \rightarrow -k$ invariant sind. Man kann also die Zahl der Terme halbieren und durch einen Faktor 2 ersetzen. Damit verbleiben genau die acht Graphen in Abb. 5.1, wobei jeweils beim Vertex Γ_3 ein Teilchen (Photon) einläuft und bei Γ_4 ausläuft.

Bis hierhin ist die Betrachtung unabhängig von den Vertizes $\Gamma_{3,4}$ geblieben. Diese werden nun für den Fall der polarisierten Strukturfunktion g_1 festgelegt. Im

⁷Siehe dazu Muta 1987, S. 133; Itzykson, Zuber 1980, S. 542.

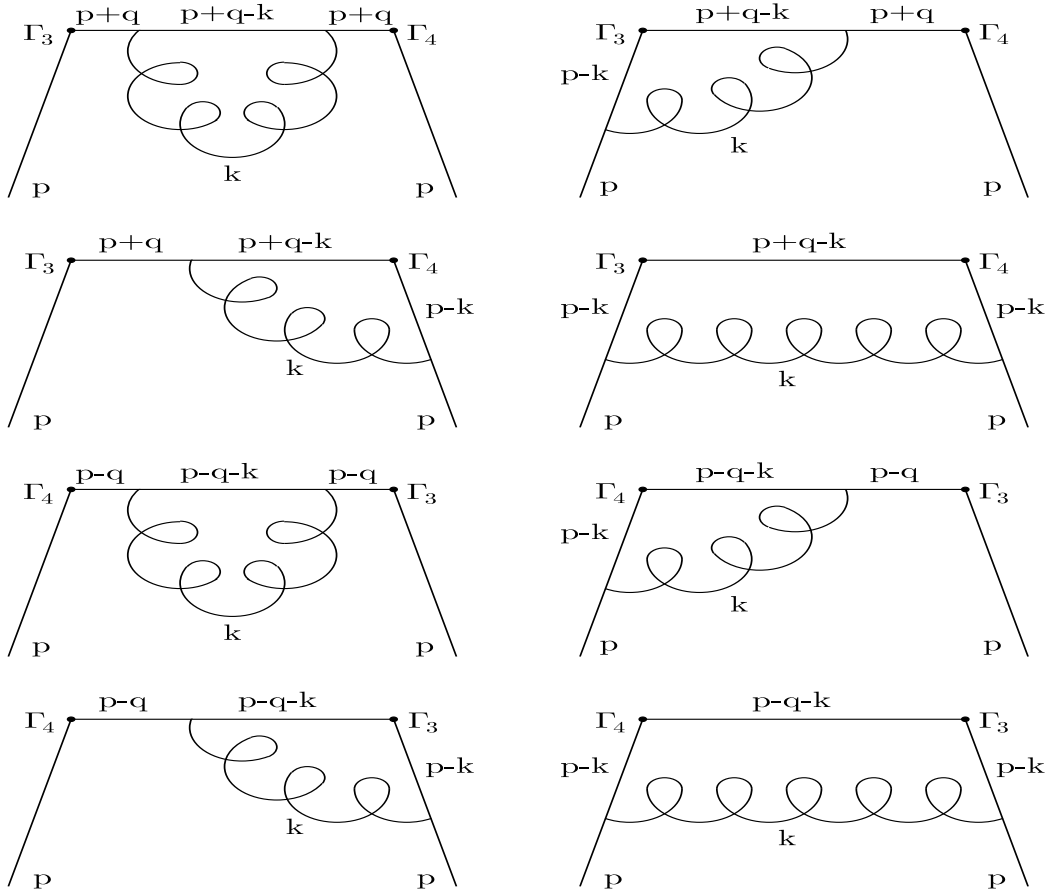


Abbildung 5.1: Alle Feynman-Diagramme, die für beliebige Vertizes $\Gamma_{3,4}$ in die Feynman-Amplitude der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung in erster Ordnung Störungstheorie eingehen.

Prinzip hat man hier die Vertizes für virtuelle Photonen zu wählen — also eine vektorielle Ankopplung. Da man sich jedoch für polarisierte äußere Quarks interessiert, wird man mit der Beziehung in der Helizitätsbasis für masselose Quarkfelder

$$\bar{u}(p)Ou(p) = \text{Tr} \left\{ \not{p} \left(1 + \frac{\sigma}{2} \gamma_5 \right) O \right\} \quad (5.7)$$

— O steht für einen beliebigen Operator — eine Spur erhalten, die ausschließlich mit dem γ_5 -Term auf die Lorentzstruktur von g_1 (siehe (2.64)) führen kann. Daher kann man ebensogut γ_5 in einen der Vertizes miteinbeziehen und stattdessen den Term proportional zu \not{p} in (5.7) verwenden, wobei dadurch ein zusätzliches Vorzeichen in allen Termen auftritt. Dieser Schritt wird bei der Behandlung von γ_5 in d -Dimensionen immense Vorteile mit sich bringen, da die Behandlung eines Axialvektorstroms in diesem Zusammenhang wohl definiert ist.

Setzt man also $\Gamma_3 = \gamma^\mu \gamma_5$ und $\Gamma_4 = \gamma^\nu$, erkennt man in Abb. 5.1, daß die Austauschgraphen in dieser Notation durch simultane Vertauschung von $\gamma^\mu \gamma_5$ mit γ^ν und q mit $-q$ (q ist der Impulsübertrag) erhalten werden. Diese Regel unterscheidet sich von der sonst üblichen durch das Mitschleppen der γ_5 -Matrix. Da die Zahl der Antivertauschungen, die notwendig ist, um γ_5 von einem Vertex zum anderen herüberzutragen, gerade ist, kann man die Austauschgraphen auch nach der üblichen Regel notieren, so daß lediglich die vier Graphen der Abb. 5.2 zu regularisieren

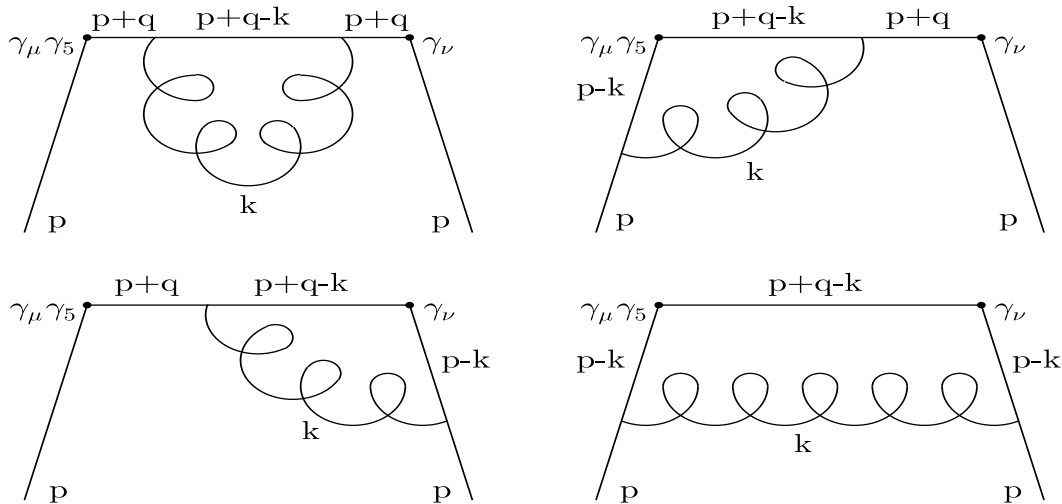


Abbildung 5.2: Die Feynman-Diagramme für die Störungs-Korrekturen zu g_1 . Die Austauschsterme erhält man durch Vertauschung von μ und ν sowie q und $-q$.

bleiben, zu denen die Austauschgraphen (mit $\mu \leftrightarrow \nu$ und $q \leftrightarrow -q$) zu addieren sind. Sollte man Bedenken haben, ob die hier zur Begründung herangezogene Antivertauschung von γ_5 mit den übrigen γ -Matrizen in Anbetracht der späteren Notation in d -Dimensionen verwendet werden darf, so kann man sich durch das explizite regularisieren aller Graphen davon überzeugen, daß die Summe aller Graphen davon nicht berührt wird.⁸

5.2 Regularisierung der Graphen

Die für die polarisierte Strukturfunktion g_1^{NS} relevanten Graphen in Abb. 5.2 werden in zweifacher Hinsicht regularisiert. Um allein den Renormalon-Beitrag zu g_1 zu berechnen, wäre es ausreichend, den resummierten Gluon-Propagator (4.58) zu

⁸Vgl. hierzu die Diskussion des einzigen problematischen Terms nach (5.50).

verwenden und eine analytische Regularisierung in der Borel-Ebene vorzunehmen. Dabei ist der Borel-Parameter s gleichzeitig Regularisierungs-Parameter. Der Pol bei $s = 0$ entspricht der anomalen Dimension $\gamma_{g_1}^{qq}$, während die Pole bei ganzem $s > 0$ Potenz-Korrekturen der Form $1/(Q^2)^s$ liefern, die gemäß der Renormalon-Philosophie als höhere Twist-Unsicherheit interpretiert werden.

Prinzipiell ist es auch möglich, die störungstheoretischen Korrekturen aus dem Ergebnis der analytischen Regularisierung zu ermitteln. Dazu ist (4.43) zur Rekonstruktion derselben zu verwenden. Da jedoch der Wilson-Koeffizient für den Twist-2 Operator der polarisierten Strukturfunktion lediglich im Fall des niedrigsten Moments — also der Bjorken-Summenregel — für $s \rightarrow 0$ endlich ist, ist die Renormierungskonstante für das hier verwendete \overline{MS} -Schema um einen endlichen Wert unbestimmt. Aus diesem Grund werden die Graphen simultan zu der analytischen Regularisierung auch dimensional⁹ regularisiert. Die Unbestimmtheit der Renormierungskonstanten im Rahmen der analytischen Regularisierung wird sich in der Nicht-Vertauschbarkeit der Grenzprozesse $s \rightarrow 0$ und $\varepsilon \rightarrow 0$ widerspiegeln.

Durch die Verwendung der dimensional Regularisierung entsteht allerdings ein neues Problem, das mit der Verwendung des Axialvektor-Stroms bzw. der Notwendigkeit einer γ_5 -Matrix für die Erstellung der richtigen Lorentzstruktur zusammenhängt. γ_5 kann nicht in d -Dimensionen analytisch fortgesetzt werden, ohne die Antivertauschungseigenschaft mit den übrigen γ -Matrizen zu verletzen¹⁰. Um γ_5 in d -Dimensionen zu definieren, wird deshalb eine Kombination von Vertauschungs- und Antivertauschungs-Relationen verwendet, die von der Dimension abhängt. Die Folge dieser Erweiterung sind zusätzliche Terme, die dazu führen können, daß die Ward-Identitäten verletzt werden, so daß eine Renormierung derselben notwendig wird, um diese Verletzung zu kompensieren.¹¹ Für die dimensionale Regularisierung der Feynman-Graphen bedeutet dies zunächst lediglich das Hinzufügen einer zweiten Renormierungskonstante Z_5 , die für die Erhaltung der Ward-Identitäten sorgen soll. Dies entspricht der Renormierung der axialen Ladung des Axialvektor-Stroms $j_{A,R}^\mu(x) = Z_5 j_A^\mu(x)$. Hier wird deutlich, weshalb im vorigen Abschnitt der Einbeziehung von γ_5 in den Vektorstrom der Vorzug gegeben wurde: man hat dadurch eine direkte Handhabe, um die Ward-Identität für den Axialvektor-Strom und die Auswirkungen der dimensional Fortsetzung von γ_5 in d -Dimensionen zu kontrollieren.

⁹Vgl. t'Hooft, Veltman 1972a, 1972b; Ashmore 1972; Bollini, Gambiagi 1972; ein pädagogisch gut aufbereitete Darstellung findet sich in Leibbrandt 1975.

¹⁰Vgl. Kap. B.1.9; t'Hooft, Veltman 1972a.

¹¹Eine ausführliche Darstellung dieser Zusammenhänge befindet sich in Kap. 5.4.3.

Die Berechnung der Graphen wird in der Feynman-Eichung durchgeführt, in der der effektive Gluon-Propagator ausschließlich aus dem Term mit dem metrischen Tensor besteht. In dem Formalismus der dimensional Regularisierung ist die Eichinvarianz erhalten¹², so daß diese Wahl unproblematisch ist. Im Formalismus der analytischen Regularisierung ist dies nicht klar¹³, so daß die Eichinvarianz in den hier relevanten Fällen explizit nachgewiesen wurde. Dazu wurden die in der Landau-Eichung zusätzlich auftretenden Terme ebenfalls regularisiert und verifiziert, daß die Summe aller zusätzlichen Terme verschwindet.

5.2.1 Selbstenergie-Graph

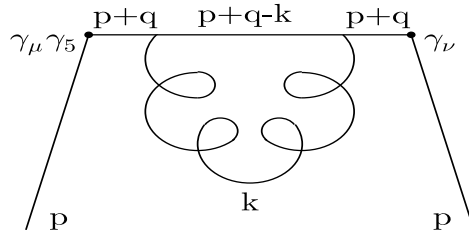


Abbildung 5.3: Der Selbstenergiegraph mit resummierten Loops im ausgetauschten Gluon.

Der Selbstenergiegraph Abb. 5.3 wird in der Borel-Ebene mit dem resummierten Gluon-Propagator in d -Dimensionen in der Feynman-Eichung berechnet. Der analytische Ausdruck für den Graphen lautet¹⁴:

$$\mathcal{B}_{1/a_s} [S_{\mu\nu}^l](s) = -C_F \bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) (-\mu^2 e^{-C})^s \\ i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+q-k)^\beta}{(p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (5.8)$$

Dabei wurde der für die Feynman-Eichung relevante Teil des resummierten Gluon-Propagators (4.58) eingesetzt und die analytische Fortsetzung zu d -Dimensionen mittels (C.8) durchgeführt. Ein Kopplungsparameter $a_s = g^2/(4\pi)^2$ tritt nicht auf, da dieser Borel-transformiert wurde, so daß stattdessen ein zusätzlicher Faktor $(4\pi)^2$ erscheint. Die überquerten γ -Matrizen sind in 4 Dimensionen definiert,

¹²Vgl. t'Hooft, Veltman 1972a, 1972b; Ashmore 1972.

¹³Vgl. Bogoliubov, Shirkov 1959.

¹⁴Die Feynman-Regeln werden nach den Konventionen von Muta 1987 verwendet.

während die nicht überquerten in d -Dimensionen zu lesen sind.¹⁵ Der Index l deutet an, daß es sich um den Graphen in Abb. 5.3 ohne den zugehörigen Austauschgraphen $S_{\mu\nu}^r$ handelt. $u(p)$ sind die Spinoren masseloser Valenz-Quarks im Nukleon. Mit γ_5 treten hier keine Probleme auf, da das d -dimensionale Integral davon unabhängig ist.

Die Divergenzen des hier auftretenden Integrals

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \gamma^\rho}{(p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (5.9)$$

wurden in (C.132) isoliert, so daß man das Ergebnis von dort übernehmen kann, wobei für \not{p} hier durch $\not{p} + \not{q}$ zu ersetzen ist. Dieses wird mit einem benachbarten $\not{p} + \not{q}$ in (5.8) zu $(p+q)^2$ und kann gekürzt werden. Es verbleibt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1/\alpha_s} [S_{\mu\nu}^l] (s) &= -C_F \bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) \left(\frac{-\mu^2 e^{-C}}{(p+q)^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{-(p+q)^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\quad (d-2) \frac{\Gamma(2+s-\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-1)}{\Gamma(1+s) \Gamma(d-s-1)} . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die Nenner $(p+q)^2$ können im Fall masseloser Quarks durch Q^2 und $\omega = 1/x$ ausgedrückt werden:

$$(p+q)^2 = p^2 + 2p \cdot q - Q^2 = p^2 + Q^2 \left(\frac{2p \cdot q}{Q^2} - 1 \right) = -Q^2(1-\omega) + \mathcal{O}(p^2) . \quad (5.11)$$

Setzt man dies unter Vernachlässigung des Massenterms ein, werden alle $(p+q)^2$ durch $-Q^2$ ersetzt und man erhält zusätzlich $1/(1-\omega)$ mit der Potenz $3+s-\frac{d}{2}$. Da man das Ergebnis der Regularisierung des Selbstenergie-Graphen später mit der allgemeinen Entwicklung der Vorwärtsstreuamplitude in ω in (2.148) vergleichen möchte, wird dieser letzte Term in ω mit (C.50) entwickelt:

$$\frac{1}{(1-\omega)^{3+s-\frac{d}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(3+s+n-\frac{d}{2})}{\Gamma(1+n) \Gamma(3+s-\frac{d}{2})} \omega^n . \quad (5.12)$$

Dann verbleibt in (5.10) noch ein $1/Q^2$, das durch $\omega/(2p \cdot q)$ ersetzt wird, wodurch die Potenz von ω in der Reihe um eins erhöht wird und die Tensorstruktur mit der für die polarisierte Strukturfunktion in (2.64) identisch wird. Dabei ist zu beachten, daß der Term proportional zu \not{p} identisch verschwindet, denn

$$\bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) \sim \text{Tr} \{ \not{p} \bar{\gamma}_\nu \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \} = 4i \varepsilon_{\alpha\nu\beta\mu} p^\alpha p^\beta = 0 . \quad (5.13)$$

¹⁵Siehe dazu die in Kap. B.1.9 eingeführte Notation.

Um zu sehen, daß der zweite Term der Tensorstruktur proportional zu \not{q} mit der für g_1 identisch ist, muß dieser in eine Spur umgeschrieben werden und der Vierervektor p^β gemäß der Helizitätsbasis durch s^β ausgedrückt werden:

$$\bar{u}(p)\bar{\gamma}_\nu \not{q}\bar{\gamma}_\mu\gamma_5 u(p) \longrightarrow -2i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}q^\lambda s^\rho \quad . \quad (5.14)$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1/a_s} [S_{\mu\nu}^l](s) &= -C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} (d-2) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1)} \omega^{n+1} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Hierzu muß noch der Austauschterm addiert werden, den man durch simultanes Vertauschen von μ und ν sowie q und $-q$ erhält. Daraus resultiert ein Vorzeichen von dem Levi-Civita-Tensor und ein $(-1)^{n+1}$ von ω^{n+1} . Die Terme mit geraden Potenzen von ω werden aus der Reihe eliminiert und die mit ungeraden Potenzen mit einem Faktor 2 versehen:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [S_{\mu\nu}](s) &= -C_F \frac{2i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} (d-2) \\ &\quad \sum_{\substack{n=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1)} \omega^{n+1} . \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.2.2 Vertex-Graphen

Der Vertex-Graph Abb. 5.4 mit einem resummierten Gluon-Propagator wird auf völlig analoge Weise zu dem Selbstenergie-Graphen regularisiert. Da hier die Loopintegration den axialvektoriellen Vertex beinhaltet, treten in diesem Fall zusätzliche Schwierigkeiten durch die Notation von γ_5 in d -Dimensionen auf, die an entsprechender Stelle diskutiert werden. In der Feynman-Eichung lautet der analytische Ausdruck¹⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_{\mu\nu}^{AI}](s) &= -C_F \bar{u}(p)\bar{\gamma}_\nu \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\beta \gamma^\rho u(p) \left(-\mu^2 e^{-C}\right)^s \\ &\quad i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+q-k)^\alpha (p-k)^\beta}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} . \end{aligned} \quad (5.17)$$

¹⁶Die Notation ist bei (5.8) erläutert.

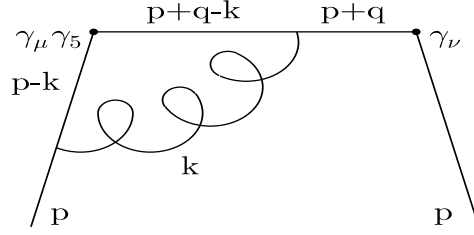


Abbildung 5.4: Der Vertex-Graph mit einem resummierten Gluon am axialvektoriellen Vertex.

Der Index A bezeichnet den Vertex-Graphen, in dem die Loopintegration den axialvektoriellen Vertex beinhaltet, im Unterschied zu dem Graphen mit einer Loopintegration über den vektoriellen Vertex, der mit V bezeichnet wird. Der Austauschgraph $V_{\mu\nu}^{Ar}$ wird später addiert.

Die Divergenzen des Integrals in der zweiten Zeile wurde im Anhang reguliert, so daß hier lediglich das Ergebnis (C.187) einzusetzen ist. Von den fünf dort auftretenden Tensorstrukturen verschwindet $p^\alpha p^\beta$ in der masselosen Theorie, da dieser Term von der Ordnung p^2 bzw. proportional zur Bewegungsgleichung — der Dirac-Gleichung — ist¹⁷

$$\begin{aligned}
& \bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma^\rho u(p) \\
&= 2\bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{p} \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) - \bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho \not{p} u(p) \\
&= \mathcal{O}(\text{EM}) \quad .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Es verbleibt, die übrigen vier Strukturen zu analysieren, wobei die äußeren Zustände mitgedacht aber nicht notiert werden und die d -dimensionalen Beziehungen aus Anhang B.1.9 verwendet werden. Für den $q^\alpha p^\beta$ -Term ist:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma^\rho &= 2\bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= 4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - 2q^2 \bar{\gamma}_\nu \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= 4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Hier wurde (B.41) verwendet und ausgenutzt, daß $\bar{\gamma}_\nu \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5$ von der Ordnung der Bewegungsgleichung ist, denn eine Vertauschung von $\bar{\gamma}_\nu$ und \not{p} liefert einen Term $\bar{\not{p}} \not{p}$ und einen Term $p_\nu \bar{\gamma}_\mu \gamma_5$. Der erste ist von der Ordnung der Quarkmasse, der zweite ist wegen (B.105) identisch Null.

¹⁷Dieser Term wird durch EM gekennzeichnet.

Der $p^\alpha q^\beta$ -Term lautet:

$$\begin{aligned}
& \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho \\
&= -\bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -2\bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho \not{q} + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + (6-d) \bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 (\bar{\not{q}} + \hat{\not{q}}) + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - (6-d) \bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu (\bar{\not{q}} - \hat{\not{q}}) \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Der letzte Term benötigt eine sorgfältige Behandlung:

$$\begin{aligned}
& \bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu (\bar{\not{q}} - \hat{\not{q}}) \gamma_5 \\
&= 2p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu (\bar{\not{q}} - \hat{\not{q}}) \gamma_5 - \bar{\gamma}_\nu \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu (\bar{\not{q}} - \hat{\not{q}}) \gamma_5 \\
&= -2p \cdot q \bar{\gamma}_\nu (\bar{\not{q}} - \hat{\not{q}}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + 2p_\nu \not{q} (\bar{\not{q}} - \hat{\not{q}}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -2p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \bar{\not{q}} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + 4p_\nu \hat{\not{q}} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -2p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \bar{\not{q}} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Die Terme proportional zu $\hat{\not{q}}$ verschwinden wegen (B.77). Aus dem gleichen Grund kann man in dem Ergebnis den Querbalken über \not{q} weglassen, so daß für (5.20) folgt:

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho &= -4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + 2(6-d)p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= 2(4-d)p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.22)
\end{aligned}$$

Für den $q^\alpha q^\beta$ -Term folgt:

$$\begin{aligned}
& \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho \\
&= 2q^2 \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{q} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho \\
&= 2q^2 \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - 2q[2\bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{q} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho \not{q}] \\
&= (6-d) \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \\
&= (6-d)q^2 \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} + 2(6-d)p_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= (6-d)q^2 \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.23)
\end{aligned}$$

Wieder wurde (B.77) verwendet. Schließlich folgt für den $g^{\alpha\beta}$ -Term mit (B.62):

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho &= (6-d)^2 \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\
&= (6-d)^2 \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Die gefundenen Lorentzstrukturen haben die Form des Baum-Graphen, wie es zu erwarten war. Diese allen Termen gemeinsame Form wird gemeinsam mit dem regularisierten Integral (C.187) in (5.17) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_{\mu\nu}^{Al}] (s) &= C_F \frac{\bar{u}(p)\bar{\gamma}_\nu \not{q}\bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p)}{q^2(p+q)^2} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
&\left\{ 4p \cdot q \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \right. \\
&- 2(4-d)p \cdot q \frac{(1+s+n)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \\
&+ \frac{1}{2}q^2(6-d)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\left(2+s+n-\frac{d}{2}\right)\Gamma(d-s-1)\Gamma(2+s+n)} \\
&\left. - (6-d)q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(2+s+n)} \right\} . \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Der Faktor $1/(p+q)^2$ wird mit (5.11) durch $1/(1-\omega)$ ausgedrückt, was wiederum durch die Reihendarstellung (C.50) ersetzt wird. Daraus erhält man eine Doppelsumme in ω . Die Lorentzstruktur wird mit (5.14) in die für g_1 relevante Form gebracht. Dazu wird außerdem ein $1/Q^2$ in $\omega/(2p \cdot q)$ umgeschrieben, wodurch die Potenz von ω in der Reihe um eins erhöht wird.

Die Terme in der großen geschweiften Klammer enthalten implizit noch weitere Faktoren ω , die durch die Ersetzung $2p \cdot q = -q^2\omega$ explizit gemacht werden. Dann enthalten alle Terme in der Klammer ein q^2 , das gekürzt werden kann. Das zusätzliche ω , das nun in zweien der vier Terme auftritt, wird in die Reihe einbezogen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\omega^n \omega = \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)\omega^n = -f(-1) + \sum_{n=0}^{\infty} f(n-1)\omega^n . \quad (5.26)$$

Wenn $f(-1) = 0$ ist, kann das ω einfach dadurch in die Reihe eingegliedert werden, daß die Funktion bei einem um 1 kleineren Argument ausgewertet wird. In den hier relevanten Fällen ist

$$\begin{aligned}
f(n) &= \frac{\Gamma(1+s+n)\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)(1+s+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(3+s+n)} \\
&\rightarrow \frac{n\Gamma(1+s+n)\Gamma\left(2+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+n)\Gamma(2+s+n)} . \quad (5.27)
\end{aligned}$$

Die Forderung $f(-1) = 0$ ist also erfüllt, und die Umbenennung ist gerade von der Art, daß die ausgeklammerten Gamma-Funktionen wieder auftauchen. Die so umgeschriebenen Terme ergeben dann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{as}} [V_{\mu\nu}^{AI}] (s) &= C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\
&\sum_{m=0}^{\infty} \omega^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma(2+s+n-\frac{d}{2})}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n)} \omega^n \\
&\left\{ -\frac{2n\Gamma(1+\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-2)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} + \frac{(4-d)n\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-1)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \right. \\
&+ \frac{1}{2}(6-d)^2 \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-1)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \\
&\left. - (6-d) \frac{(2+s+n-\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-1)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \right\} . \quad (5.28)
\end{aligned}$$

Die doppelte Reihe kann mit Hilfe von (C.52) in eine Reihe von endlichen Summen umgeformt werden. Die jetzt nahezu identischen Gamma-Funktionen in den vier Termen werden ausgeklammert und die Unterschiede mit (C.57) berücksichtigt. Die dann in der geschweiften Klammer verbleibenden Terme können wie folgt vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
\left\{ \dots \right\} &= \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) \left[-\frac{kd}{\frac{d}{2} - s - 2} + (4-d)k + \frac{1}{2}(6-d)^2 \right. \\
&\quad \left. - (6-d) \left(2 + s + k - \frac{d}{2} \right) \right] \\
&= (6-d)(1-s) \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - 2k \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - kd . \quad (5.29)
\end{aligned}$$

Damit lautet der Vertex-Graph insgesamt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{as}} [V_{\mu\nu}^{AI}] (s) &= C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \\
&\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma(2+s+k-\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-2)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \\
&\left\{ (6-d)(1-s) \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - 2k \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - kd \right\} . \quad (5.30)
\end{aligned}$$

Hierzu muß noch der Austauschterm addiert werden, der auf die gleiche Weise wie beim Selbstenergie-Graphen die Terme mit geraden Potenzen aus der Reihe

eliminiert und die mit ungeraden Potenzen mit einem Faktor 2 versieht.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{as}} [V_{\mu\nu}^A] (s) &= 2C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{\substack{n=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \omega^{n+1} \\ &\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma(2+s+k-\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2}-s-2)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \\ &\left\{ (6-d)(1-s) \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - 2k \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - kd \right\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Es ist zu beachten, daß der so gewonnene Ausdruck für den Vertex-Graphen unter Berücksichtigung der auf d -Dimensionen verallgemeinerten Vertauschungsrelationen für γ_5 entstanden ist. Dies wird zu einer Verletzung der Ward-Identität um einen konstanten Term führen, der eine weitere Renormierung notwendig macht.

Der Vertex-Graph, bei dem das Gluon am vektoriellen Vertex ausgetauscht wird (siehe Abb. 5.5), enthält die γ_5 -Problematik nicht, da das Loop-Integral γ_5 nicht beinhaltet, so daß keine Vertauschungen mit γ_5 erfolgen müssen, die Zusatzterme nach sich ziehen könnten. Der analytische Ausdruck für diesen Graphen lautet in

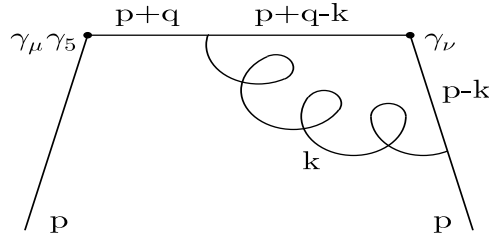


Abbildung 5.5: Der Vertex-Graph mit einem resummierten Gluon am vektoriellen Vertex.

der Feynman-Eichung¹⁸

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{as}} [V_{\mu\nu}^{Vl}] (s) &= -C_F \bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\beta \bar{\gamma}_\nu \gamma_\alpha \gamma^\rho \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) (-\mu^2 e^{-C})^s \\ &i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+q-k)^\alpha (p-k)^\beta}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Durch den Index V wird angedeutet, daß die Loopintegration den vektoriellen Vertex beinhaltet. Der Austauschgraph $V_{\mu\nu}^{Vr}$ wird zum Schluß addiert.

¹⁸Die Notation ist nach (5.8) erläutert.

Die Divergenzen des Integrals in der zweiten Zeile werden im Anhang isoliert, so daß (C.187) einzusetzen ist. Auch hier müssen die fünf dort auftretenden Tensorstrukturen auf die Terme hin untersucht werden, die für g_1 relevant sind. Dabei werden die gleichen Methoden verwendet wie für den zuvor behandelten Vertex-Graphen. Ohne die äußeren Zustände zu notieren, erhält man für den $p^\alpha p^\beta$ -Term:

$$\gamma_\rho \not{p} \bar{\gamma}_\nu \not{p} \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 = \bar{\gamma}_\nu \not{p} \not{p} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) = \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.33)$$

Für den $p^\alpha q^\beta$ -Term folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \not{q} \bar{\gamma}_\nu \not{p} \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 &= -\gamma_\rho \not{q} \bar{\gamma}_\nu \gamma^\rho \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= -2\bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + (2-d) \not{q} \bar{\gamma}_\nu \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= -4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - (2-d) \not{q} \bar{\gamma}_\nu \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= -4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - 2(2-d)p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= -2(4-d)p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.34) \end{aligned}$$

Für den $q^\alpha p^\beta$ -Term folgt:

$$\gamma_\rho \not{p} \bar{\gamma}_\nu \not{q} \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 = 2\bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) = 4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.35)$$

Für den $q^\alpha q^\beta$ -Term folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \not{q} \bar{\gamma}_\nu \not{q} \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 &= 2q^2 \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - \not{q} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \not{q} \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\ &= \not{q} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \gamma^\rho \not{q} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\ &= (2-d) \not{q} \bar{\gamma}_\nu \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + (2-d) q^2 \not{q} \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\ &= 2(2-d) q_\nu \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - (2-d) q^2 \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= -(2-d) q^2 \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.36) \end{aligned}$$

Für den $g^{\alpha\beta}$ -Term folgt:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \gamma^\alpha \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 &= (2-d)^2 \bar{\gamma}_\nu (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\ &= (2-d)^2 \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.37) \end{aligned}$$

Es ist aufschlußreich, daß die Lorentzstrukturen für $V_{\mu\nu}^V$ im wesentlichen aus denen für $V_{\mu\nu}^A$ hervorgehen, indem man $6-d$ durch $2-d$ ersetzt. Dies entspricht gerade der Differenz von (B.47) und (B.62), also der Differenz von Loop-Integration mit und ohne γ_5 .

Die gefundenen Lorentzstrukturen sind mit (C.187) zusammen in (5.32) einzusetzen:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[V_{\mu\nu}^{VI} \right] (s) = C_F \frac{\bar{u}(p) \bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p)}{q^4 (1-\omega)} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n)} \\
& \left\{ 4p \cdot q \frac{(1+s+n) \Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(3+s+n)} \right. \\
& + 2(4-d)p \cdot q \frac{(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(3+s+n)} \\
& + \frac{1}{2} q^2 (2-d)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\left(2+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \\
& \left. + (2-d) q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \right\} . \quad (5.38)
\end{aligned}$$

Es werden die gleichen Manipulationen notwendig wie für $V_{\mu\nu}^{Al}$: Entwicklung von $1/(1-\omega)$ in eine Reihe; Ersetzen der Faktoren $2p \cdot q$ durch $-\omega q^2$; Ausklammern der gemeinsamen Faktoren q^2 und Kürzen; Herstellen der expliziten Lorentzstruktur für g_1 mittels (5.14); Umnummerieren der Summe wie in (5.27), um die zusätzlichen ω Faktoren zu integrieren; Umwandlung der doppelten Reihe mit (C.52); in allen Termen gemeinsame Gamma-Funktionen konstruieren und ausklammern. Das Ergebnis all dieser Umformungen ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{as}} [V_{\mu\nu}^{VI}] (s) &= C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2}\right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \\
& \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \\
& \left\{ (2-d)(3+s-d) \left(\frac{d}{2}-s-2\right) - 2k \left(\frac{d}{2}-s-2\right) - kd \right\} . \quad (5.39)
\end{aligned}$$

Durch die Addition des Austauschgraphen fallen die Terme mit ungeradem n weg, während die übrigen einen Faktor 2 erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{as}} [V_{\mu\nu}^V] (s) &= 2C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2}\right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{\substack{n=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \omega^{n+1} \\
& \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \\
& \left\{ (2-d)(3+s-d) \left(\frac{d}{2}-s-2\right) - 2k \left(\frac{d}{2}-s-2\right) - kd \right\} . \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hat die völlig identische Struktur wie (5.31), dem Ausdruck für den Vertex-Graphen mit einem Gluon am axialvektoriellen Vertex. Es bietet sich an, von vorneherein die Summe beider Graphen zu betrachten, die hier mit $V_{\mu\nu} = V_{\mu\nu}^A + V_{\mu\nu}^V$ bezeichnet wird. Diese erhält man als Summe der jeweiligen geschweiften Klammern:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{\frac{1}{d_s}}[V_{\mu\nu}](s) &= 2C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{\substack{n=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \omega^{n+1} \\
 &\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \\
 &\left\{ ((2-d)(3+s-d) + (6-d)(1-s)) \left(\frac{d}{2}-s-2\right) \right. \\
 &\quad \left. -4k \left(\frac{d}{2}-s-2\right) - 2kd \right\} . \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

5.2.3 Box-Graph

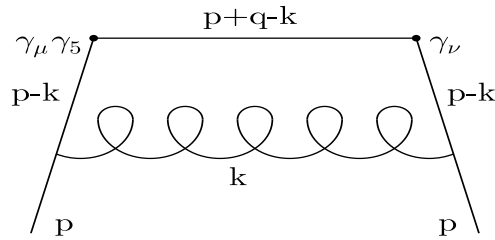


Abbildung 5.6: Der Box-Graph mit einem resummierten Gluon-Propagator.

Der Box-Graph Abb.5.6 mit einem resummierten Gluon-Propagator, enthält eine Loop-Integration, die beide, den vektoriellen und den axialvektoriellen Vertex umfaßt, so daß hier wie im Fall von $V_{\mu\nu}^{Al}$ sorgfältig auf die γ_5 -Matrix acht zu geben ist. In der Feynman-Eichung lautet der analytische Ausdruck¹⁹

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_{\frac{1}{d_s}}[B_{\mu\nu}^l](s) &= -C_F \bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho u(p) \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s \\
 &i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{(p+q-k)^2 (p-k)^4 (k^2)^{1+s}} . \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

¹⁹Die Notation ist bei (5.8) erläutert.

Der Austauschgraph $B_{\mu\nu}^r$ wird zum Schluß addiert. Das für den Box-Graphen charakteristische Integral ist im Anhang regularisiert (siehe (C.202)), und das Ergebnis enthält viele Lorentzstrukturen, die es im folgenden zu analysieren gilt.

Ohne die äußeren Zustände zu notieren, gilt für die obige Lorentzstruktur:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho &= 2 \bar{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho \\ &= 2 \gamma_\lambda \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho \gamma_\lambda \quad . \end{aligned} \quad (5.43)$$

Man sieht an dieser Notation der Lorentzstruktur, daß alle Terme in (C.202), die p^α oder p^λ enthalten, proportional zur Bewegungsgleichung sind und deshalb in der masselosen Theorie vernachlässigt werden.

Für die spätere Auswertung wird der Box-Graph in zweierlei Hinsicht verwendet. Einerseits um die Störungskorrekturen, andererseits um das führende IR-Renormalon zu bestimmen. Für das erstere benötigt man einen dimensional regularisierten Ausdruck bei $s = 0$, für das zweite einen analytisch regularisierten Ausdruck mit $d = 4$, wobei die Pole bei $s = 0, 1, 2, \dots$ interessieren. Für beide Anwendungen ist es nicht notwendig, alle Terme aus (C.202) in d -Dimensionen weiterzubearbeiten. Lediglich die bei $s = 0$ und $d = 4$ divergenten Terme, sind in d -Dimensionen zu rechnen, da diese mit einem Faktor $d - 4$ auf konstante Korrekturen führen können. Alle Terme, die keine divergente Gamma-Funktion enthalten, werden deshalb direkt in 4 Dimensionen berechnet.

Diese Vereinfachung gerät auch nicht mit der Berechnung höherer Störungskorrekturen in Konflikt, die durch Differentiation nach s an der Stelle $s = 0$ erhalten werden, da die Differentiation endlicher Gamma-Funktionen endlich läßt. Der fragliche Ausdruck ist:

$$\frac{d}{ds} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1)} = -\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1)} \left[\psi\left(\frac{d}{2} - s - 1\right) - \psi(d - s - 1) \right] \quad . \quad (5.44)$$

Beide Ausdrücke — vor und nach der Differentiation — sind endlich bei $s = 0$ und $d = 4$.

Auf der anderen Seite ist zu beachten, daß an der Stelle $s = 1$, die für die führende IR-Renormalon-Unsicherheit maßgeblich ist, andere Terme bei $d = 4$ divergent sind, so daß man mit der obigen Vereinfachung an der Stelle $s = 1$ keine Aussage mehr über das Verhalten bei $d \rightarrow 4$ möglich ist. Das stört jedoch nicht, da man die Renormalon-Pole in der analytischen Regularisierung bei $d = 4$ erhält.

Die einzigen bei $s = 0$ und $d = 4$ divergenten Terme in (C.202) sind die proportional zu $g^{\alpha\lambda} p^\beta$ und $g^{\alpha\lambda} q^\beta$. Außerdem erhält man endliche Terme proportional zu

$q^\alpha p^\beta q^\lambda$, $q^\alpha q^\beta q^\lambda$, $g^{\alpha\beta} q^\lambda$ und $g^{\beta\lambda} q^\alpha$. Die mit den γ -Matrizen aus (5.42) kontrahierten Strukturen werden jetzt berechnet. Für $q^\alpha p^\beta q^\lambda$ folgt in 4 Dimensionen mit (B.49):

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho &= \not\!{\gamma}_\rho \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho \\
&= -2 \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d) \\
&= 2\bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d, \text{EM}) \\
&= 4p \cdot q \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_5 - 4p_\mu \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d, \text{EM}) \\
&= 4p \cdot q \bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d, \text{EM}) \quad .
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Für den $q^\alpha q^\beta q^\lambda$ -Term erhält man in 4 Dimensionen:

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho &= \not\!{\gamma}_\rho \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho \\
&= -2 \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_5 \mathcal{O}(4-d) \\
&= -4q_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 + 2q^2 \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d) \\
&= 2q^2 \bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d) \quad .
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Für den $g^{\alpha\beta} q^\lambda$ -Term folgt in 4 Dimensionen mit (B.48):

$$\gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \gamma^\alpha \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho = 4\bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d) \quad . \tag{5.47}$$

Für den $g^{\beta\lambda} q^\alpha$ -Term folgt in 4 Dimensionen mit (B.49):

$$\gamma_\rho \not\!{\gamma}_\nu \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\beta \not\!{\gamma}^\rho = 4\bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 + \mathcal{O}(4-d) \quad . \tag{5.48}$$

Für den $g^{\alpha\lambda} p^\beta$ -Term folgt in d -Dimensionen mit (B.62):

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho &= 2p_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho - \gamma_\rho \gamma_\alpha \not\!{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho \\
&= -2\gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho + \gamma_\rho \not\!{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho \\
&= \mathcal{O}(\text{EM}) \quad .
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Für den $g^{\alpha\lambda} q^\beta$ -Term folgt in d -Dimensionen mit (B.62) und (B.75):

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho &= 2q_\nu \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho - \gamma_\rho \gamma_\alpha \not\!{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho \\
&= -2\gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho + \gamma_\rho \not\!{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \gamma^\alpha \not\!{\gamma}^\rho \\
&= -4 \not\!{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 + 2(d-4) \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho \\
&\quad + 2(d-4) \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \not\!{\gamma}^\rho - (d-4)^2 \not\!{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \\
&= (4 + 4(d-4) + (d-4)^2) \bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \\
&= (d-2)^2 \bar{\gamma}_\nu \not\!{\gamma}_\mu \not\!{\gamma}_5 \quad .
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man von der Lorentzstruktur ausgeht, in der der vektorielle und der axialvektorielle Vertex vertauscht sind. Dies rechtfertigt im nachhinein noch einmal die Beschränkung auf die Graphen, in denen der axialvektorielle Vertex links angeordnet ist.²⁰ Dabei ist der hier untersuchte Term des Box-Graphen der einzige, bei dem dies eine Rolle spielen könnte, denn für die Selbstenergie steht γ_5 sowieso außerhalb des Loop-Integrals und bei den Vertex-Korrekturen existieren immer zwei paarweise identische Graphen. Alle anderen Terme des Box-Graphen wurden ohnehin in 4 Dimensionen ausgerechnet, so daß eine Vertauschung von γ_5 unproblematisch ist. Nachdem also bei dem einzigen Term, bei dem eine Korrektur proportional zu $(d-4)$ auftreten könnte, klar ist, daß dies nicht der Fall ist, sollten alle Zweifel ausgeräumt sein, die Rechnung auf die Hälfte der Graphen zu beschränken.

Diese Lorentzstrukturen werden zusammen mit (C.202) in (5.42) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [B_{\mu\nu}^l] (s) &= C_F \frac{\bar{u}(p)\bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p)}{q^4} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\ &\left\{ (d-2)^2 \frac{q^2}{2} \frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \right. \\ &+ 2q^2 \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(2+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(3+s+n)} - 4q^2 \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(3+s+n)} \\ &\left. + 4p \cdot q \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(2+s+n)(1+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(4+s+n)} + \mathcal{O}(4-d) \right\}. \quad (5.51) \end{aligned}$$

Genau wie in dem Fall der Vertex-Korrektur wird die Lorentzstruktur mit (5.14) auf die für g_1 relevante Form gebracht, die $p \cdot q$ -Terme in der Klammer in ω -Terme umgeschrieben, die Summe entsprechend mit (5.27) unnummeriert und die Faktoren q^2 aus dem Ausdruck eliminiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [B_{\mu\nu}^l] (s) &= C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)\Gamma(3+s+n)} \omega^{n+1} \\ &\left\{ \frac{d(d-2)^2}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)} - 2 \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(3-s)} + \mathcal{O}(4-d) \right\}. \quad (5.52) \end{aligned}$$

²⁰Siehe die Diskussion zu Beginn dieses Kapitels S. 138.

Das Ergebnis wurde auf die Form des Selbstenergie-Graphen (5.16) gebracht. Der Term von der Ordnung $(4-d)$ in der Klammer symbolisiert, daß bei der Berechnung Terme von dieser Ordnung weggelassen wurden. Man sieht für $s = 2$ einen Pol in dem zweiten Term der Klammer, der durch die jetzt vereinfachte Rechnung nicht mehr dimensional regularisiert ist. Für die spätere Auswertung ist dies allerdings auch nicht notwendig.

Die Addition des Austauschterms entfernt die Terme mit ungeradem n , während die geraden n mit einem Faktor 2 multipliziert werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[B_{\mu\nu}](s) &= C_F \frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\quad \sum_{\substack{n=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(3+s+n)} \omega^{n+1} \\ &\quad \left\{ \frac{d(d-2)^2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)} - 4 \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(3-s)} + \mathcal{O}(4-d) \right\}. \quad (5.53) \end{aligned}$$

5.3 Der Wilson-Koeffizient

Den zu dem Twist-2-Operator zugehörigen Wilson-Koeffizienten erhält man durch Vergleich der Summe aller berechneten Feynman-Graphen mit dem g_1 -Term der Reihendarstellung der Vorwärtsstreuamplitude (2.148). Genauer erhält man auf diese Weise zunächst einmal die Momente der Strukturfunktion, wobei das reduzierte Matrixelement unabhängig zu bestimmen ist. Der Wilson-Koeffizient wird die Basisgröße für alle weiteren Analysen werden — der Bestimmung der Störungskoeffizienten und der IR-Renormalon-Unsicherheit.

Für die Bestimmung des Wilson-Koeffizienten ergibt sich damit das folgende Programm: Zunächst wird der Baum-Graph berechnet und daraus das reduzierte Twist-2-Matrixelement bestimmt. Dann werden die im vorigen Kapitel regulierten Graphen zur Vorwärtsstreuamplitude aufaddiert und durch Koeffizientenvergleich mit (2.148) unter Berücksichtigung des inzwischen bekannten reduzierten Matrixelements der Wilson-Koeffizient bestimmt. Dabei werden die beiden Grenzfälle der dimensional und der analytischen Regularisierung unterschieden. Der Wilson-Koeffizient wird demnach allgemein mit beiden Regularisierungsparametern s und d bestimmt und dann für $s = 0$, für die erste Ableitung nach s an der Stelle $s = 0$ und für $d = 4$ ausgewertet. Diese drei Grenzfälle entsprechen

den ersten beiden Ordnungen der Störungskorrekturen im Limes großer N_f (mit NNA-Approximation) und dem IR-Renormalon-Pol.

5.3.1 Die Born-Näherung

Der analytische Ausdruck für den Baum-Graphen ist

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{\text{Baum}^{-1}}(p, q) &= \bar{u}(p)\bar{\gamma}_\nu \frac{\not{p} + \not{q}}{q^2(1-\omega)} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) \\
&= \bar{u}(p)\bar{\gamma}_\nu \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) \frac{1}{q^2(1-\omega)} + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho \frac{1}{p \cdot q} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad , \quad (5.54)
\end{aligned}$$

wobei (5.14) verwendet wurde. Durch die Addition des Austauschgraphen verbleiben nur die Terme mit geradem n und einem Faktor 2:

$$T_{\mu\nu}^{\text{Baum}}(p, q) = 2i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} q^\lambda s^\rho \frac{1}{p \cdot q} \sum_{\substack{n=0 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \omega^{n+1} + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.55)$$

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit (2.148) ergibt mit der Festlegung des Wilson-Koeffizienten als $C_{A,n}^{(i)} = 1 + \mathcal{O}(a_s)$ für das reduzierte Matricelement:

$$a_{A,n} \equiv \sum_i a_{A,n}^{(i)} = 1 \quad . \quad (5.56)$$

Die Matricelemente

$$a_{A,n}^{(i)} = \langle ps | Q_i^2 \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 p^{\mu_1} \cdots p^{\mu_n} \psi_i | ps \rangle \quad (5.57)$$

gehen mit der quadratischen elektrischen Ladung der unterschiedlichen Quarksorten i in die Amplitude ein. Ausgedrückt durch die Verteilungsfunktionen im Impulsraum (2.87) erhält man für Proton-Streuung, für das erste Moment $n = 0$ und für 3 Flavors u, d, s

$$\begin{aligned}
a_{A,0}^{\text{Proton}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{4}{9} \Delta u + \frac{1}{9} \Delta d + \frac{1}{9} \Delta s \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{6} (\Delta u - \Delta d) + \frac{1}{18} (\Delta u + \Delta d - 2\Delta s) + \frac{2}{9} (\Delta u + \Delta d + \Delta s) \right] \quad . \quad (5.58)
\end{aligned}$$

Das Matrixelement kann daher als Summe von Flavor-Triplet, Oktet und Singulett notiert werden. Wegen der Isospin-Symmetrie erhält man den entsprechenden Ausdruck für das Neutron durch die Vertauschung von $u(x)$ und $d(x)$, so daß in der Differenz (Proton – Neutron) nur der Triplet-Anteil mit einem Faktor 2 übrig bleibt:

$$a_{A,0}^{p-n} = \frac{1}{6} \langle ps | T_3 \bar{\psi}_i \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i | ps \rangle \quad , \quad (5.59)$$

wobei T_3 der entsprechende Generator aus der Flavor-Gruppe ist. Dieses Matrixelement ist aus der schwachen Wechselwirkung — genauer aus dem Beta-Zerfall des Neutrons — unabhängig bestimmbar. Es folgt die Bjorken-Summenregel²¹

$$a_{A,0}^{p-n} = \int_0^1 dx g_1^{p-n}(x) = \frac{1}{6} \frac{g_A}{g_V} \quad . \quad (5.60)$$

g_A und g_V sind die Stärke der axialvektoriellen und der vektoriellen Kopplung im Neutron-Beta-Zerfall.

5.3.2 Koeffizienten-Vergleich

Die Borel-Transformierte der Vorwärtsstreuamplitude ist die Summe der berechneten Graphen mit den zugehörigen Austauschgraphen (5.16), (5.41) und (5.53):

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [T_{\mu\nu}] (s) = \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [S_{\mu\nu}] (s) + \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_{\mu\nu}] (s) + \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [B_{\mu\nu}] (s) \quad . \quad (5.61)$$

Der Borel-Transformierte Wilson-Koeffizient $\tilde{C}_{A,n}(Q^2)$ ergibt sich in erster Ordnung der Störungstheorie durch Vergleich mit (2.148) und (5.56):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1] (s) &= C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\left\{ \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(3+s+n)} \right. \\ &\times \left[\frac{d(d-2)^2}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)} - 2 \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(3-s)} + \mathcal{O}(4-d) \right] \\ &- (d-2) \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1)} \\ &\left. + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \right\} \end{aligned}$$

²¹Vgl. Bjorken 1966; 1970.

$$\times \left[\left((2-d)(3+s-d) + (6-d)(1-s) \right) \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - 4k \left(\frac{d}{2} - s - 2 \right) - 2kd \right] \}, \quad (5.62)$$

wobei hier lediglich die geraden n bzw. die geraden Momente gemeint sind, da man über die ungeraden Momente nach der Addition der Austauschsterme keine Aussage mehr machen kann. Der Wilson-Koeffizient in niedrigster Ordnung der Störungstheorie wurde auf der linken Seite subtrahiert. Es ist zu beachten, daß die Divergenzen in diesem Ausdruck bereits isoliert wurden, eine Renormierung jedoch noch nicht durchgeführt ist. Es wird deshalb einerseits der Counterterm zu bestimmen sein, der sich als Koeffizient des Pols in dimensionaler Regularisierung ergibt, und eine Renormierung der Ward-Identität durchzuführen sein, die in Kap. 5.4.3 begründet wird.

5.4 Störungskorrekturen

5.4.1 Erste Ordnung a_s : der Fall $s = 0$

In diesem Abschnitt wird der Fall $s = 0$ untersucht, der die erste Ordnung der Störungstheorie beinhaltet. Diese sollte nach den entsprechenden Renormierungen exakt mit den Ergebnissen der Literatur übereinstimmen, da die gemachte Näherung großer N_f in der ersten Ordnung noch exakte Ergebnisse liefert.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1](0) &= C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3+n)} \left[\frac{d(d-2)^2 \Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right)}{4 \Gamma(d-1)} - 1 \right] \right. \\ &- (d-2) \frac{\Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+n) \Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-1)} \\ &+ \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(2+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right)}{\Gamma(2+k) \Gamma(d-1)} \\ &\left. \times \left[\left((2-d)(3-d) + (6-d) - 4k \right) \left(\frac{d}{2} - 2 \right) - 2kd \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Dieser Ausdruck wird im folgenden nicht mehr in der Borel-Ebene notiert, da hier die Störungs-Korrekturen allein von Interesse sind. Dadurch erhält man einen zusätzlichen Faktor a_s . Mit $d = 4 - \varepsilon$ wird eine Entwicklung in ε durchgeführt, wobei die Reihenfolge der Terme beibehalten wird, um die Herkunft der Beiträge verfolgen zu können. Mit (C.60), (C.62), (C.65), (C.66), (C.71), (A.19) und (A.22) folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{A,n}(Q^2) = & 1 - \frac{2C_F a_s}{(1+n)(2+n)} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \\ & - C_F a_s \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] \\ & + 2C_F a_s \left[\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) \right) \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{2}{1+n} - 1 \right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{1+n} - 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \frac{1}{1+n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} \right], \end{aligned} \quad (5.64)$$

wobei die Terme in der Reihenfolge Box, Selbstenergie, Vertex-Korrektur notiert sind. Dieses Ergebnis wird nach Potenzen von ε sortiert:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{A,n}(Q^2) = & 1 + C_F a_s \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right) \right) \right. \\ & \times \left[4S_n - 3 + \frac{4}{1+n} - \frac{2}{(1+n)(2+n)} \right] \\ & + 3S_n - 5 + \frac{6}{1+n} + \frac{4}{1+n} S_n - \frac{2}{(1+n)(2+n)} S_n \\ & \left. + 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} S_{k-1} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} + \mathcal{O}(a_s^2), \end{aligned} \quad (5.65)$$

wobei $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ in (A.17) definiert wurde. In den eckigen Klammern findet man die bekannte anomale Dimension des Quark-Quark-Operators in der polarisierten Lepton-Nukleon-Streuung wieder²²:

$$\gamma_{A,n}^{qq} = \frac{C_F}{16\pi^2} \left[4S_n - 3 + \frac{4}{1+n} - \frac{2}{(1+n)(2+n)} \right]. \quad (5.66)$$

Die Rück-Transformation in den Impulsraum mit Hilfe von (A.17) liefert die entsprechende Splitting-Funktion:

$$P_A^{qq}(x) = \frac{C_F}{16\pi^2} \left[4 - 2(1-x) - 4 \frac{1}{(1-x)_+} - 3\delta(x-1) \right]. \quad (5.67)$$

²²Altarelli, Parisi 1977; Craigie et al. 1983, S. 128.

Der Counterterm im $\overline{\text{MS}}$ -Schema und für die Renormierungs-Skala $\mu^2 = Q^2$ lautet damit in erster Ordnung Störungstheorie

$$Z_{A,n} = 1 - a_s C_F \frac{2}{\varepsilon} \left[4S_n - 3 + \frac{4}{1+n} - \frac{2}{(1+n)(2+n)} \right] + \mathcal{O}(a_s^2) \quad . \quad (5.68)$$

Für das niedrigste Moment, also für die Bjorken-Summenregel, erhält man eine verschwindende anomale Dimension, denn für $n = 0$ ist der Counterterm der Ordnung a_s Null. Um allerdings die erste Ordnungs Störungs-Korrektur zur Bjorken-Summenregel zu bestimmen, ist noch die Renormierung des Axialvektor-Stroms zur Restaurierung der Ward-Identitäten notwendig, die im nächsten Kapitel vorgenommen wird.

5.4.2 Zweite Ordnung a_s : die erste Ableitung bei $s = 0$

Um den Counterterm in der nächsten Ordnung in a_s zu bestimmen, ist gemäß (4.43) der Ausdruck für die Vorwärtsstreuamplitude (5.62) nach s an der Stelle $s = 0$ zu differenzieren. Da dieser Ausdruck jedoch lediglich in führender Ordnung in N_f exakt ist, wird dies natürlich auch für die damit berechnete zweite Ordnungs-Korrektur der Fall sein. Die Differenziation nach s läßt sich am übersichtlichsten mit Hilfe von (C.100) durchführen, und das Ergebnis gleich an der Stelle $s = 0$ notiert:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[\tilde{C}_{A,n} - 1 \right] (0) \\ &= C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right) d(d-2)^2}{\Gamma(3+n) \Gamma(d-1) 4} \\ & \quad \times \left(\ln\left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2}\right) + \psi(1+n) + \psi\left(3+n-\frac{d}{2}\right) - \psi\left(\frac{d}{2}-2\right) \right. \\ & \quad \left. - \psi(1) - \psi(3+n) + \psi(d-1) \right) \\ & - C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3+n)} \\ & \quad \times \left(\ln\left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2}\right) + \psi(1+n) + \psi\left(3+n-\frac{d}{2}\right) - \psi(2) \right. \\ & \quad \left. - \psi(1) - \psi(3+n) + \psi(3) \right) \\ & - C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} (d-2) \frac{\Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+n) \Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \psi \left(3 + n - \frac{d}{2} \right) + \psi \left(2 - \frac{d}{2} \right) - \psi \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \right. \\
& \quad \left. - \psi(1) - \psi \left(3 - \frac{d}{2} \right) + \psi(d-1) \right) \\
& + C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma \left(2 + k - \frac{d}{2} \right) \Gamma \left(\frac{d}{2} \right) \Gamma \left(\frac{d}{2} - 2 \right)}{\Gamma(2+k) \Gamma(d-1)} \\
& \times \left\{ \left(\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \psi(1+k) + \psi \left(2 + k - \frac{d}{2} \right) - \psi \left(\frac{d}{2} - 2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \psi(1) - \psi(2+k) + \psi(d-1) \right) \left[(12 - 6d + d^2 - 4k) \left(\frac{d}{2} - 2 \right) - 2kd \right] \right. \\
& \quad \left. + 4k - (2-d)^2 \right\} \\
& + \mathcal{O}(4-d) \quad . \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme stammen vom Box-Graphen, dann folgen die Terme vom Selbstenergie- und dem Vertex-Graphen. Durch die Ableitung sind die ohnehin schon divergenten Terme doppelt divergent geworden, d.h. von der Ordnung $1/\varepsilon^2$. Andererseits sind die endlichen Terme endlich geblieben. Diese letzte Eigenschaft war es, die eine vereinfachte Berechnung des Box-Graphen möglich gemacht hatte, in der die nicht divergenten Terme von vorneherein in 4 Dimensionen berechnet wurden. Die dabei vernachlässigten Korrekturen sind durch $\mathcal{O}(4-d)$ angedeutet.

Um den Counterterm zu bestimmen, ist eine Entwicklung in $\varepsilon = 4-d$ durchzuführen, wobei darauf zu achten ist, daß die Terme, die in ε quadratisch divergent sind, eine Ordnung weiter — also bis zur Ordnung ε^2 entwickelt werden, da ein Faktor ε^2 in diesen Termen zu einem endlichen Beitrag führt. Die Entwicklung wird mit (C.66), (C.60), (C.71), (C.77), (C.81) (C.84), (C.85), (C.96) und (C.97) durchgeführt, und das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds} \mathcal{B}_{\frac{1}{s}} \left[\tilde{C}_{A,n} - 1 \right] (0) \\
& = -C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{2}{(1+n)(2+n)} \\
& \quad \times \left\{ -\frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n} + \gamma + 2 \right] \right. \\
& \quad \left. + \left(\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n} \right) (S_n - \gamma) \right. \\
& \quad \left. + 1 + \frac{1}{2} \zeta(2) - \frac{7}{4} \gamma - \gamma^2 + 2S_n + S_n^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left\{ \frac{4}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \frac{1}{2} + \gamma \right] - \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) (S_n + 1 - \gamma) \right. \\
& \quad \left. - 2 - \frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{4}\gamma + \gamma^2 - \frac{3}{2}S_n - S_n^2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} \right\} \\
& +2C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left\{ -\frac{4}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) - \frac{3}{2} + \gamma \right] \right. \\
& \quad \left. + \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) (1 - \gamma) - 2 + \frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{7}{4}\gamma - \gamma^2 \right\} \\
& +C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_{k=1}^n \frac{4}{1+k} \left\{ -\frac{4}{\epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) - \frac{1}{1+k} + \gamma \right] \right. \\
& \quad \left. + \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \left(S_{k-1} + 1 - \gamma + \frac{1}{2k} \right) \right. \\
& \quad \left. + 1 + \frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{4}\gamma - \gamma^2 + \frac{1}{4k} - \frac{1-\gamma}{1+k} - \frac{1}{2k(1+k)} \right. \\
& \quad \left. + S_{k-1} + S_{k-1}^2 + \frac{S_{k-1}}{2k} - \frac{S_{k-1}}{1+k} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^2} - \sum_{m=2}^{k-1} \frac{1}{m} \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l} \right\} \\
& +\mathcal{O}(4-d) \quad . \tag{5.70}
\end{aligned}$$

Die einzelnen Terme entsprechen dem Box-, dem Selbstenergie und dem Vertex-Korrektur-Graphen, wobei der letztere in einen Term für $k = 0$ und einen für $k > 0$ unterteilt wurde, da die Struktur der Divergenzen in diesen beiden Fällen völlig unterschiedlich ist.

Nach (4.43) handelt es sich bei der ersten Ableitung nach s an der Stelle $s = 0$ bis auf die 1-Loop-Beta-Funktion um den Koeffizienten $B_n^{(2)}$ von a_2^2 in der Störungsreihe (4.54). Prinzipiell können die Counterterme in zweiter Ordnung der Störungstheorie für alle Momente n bestimmt werden. Um dies für die ersten drei Momente $n = 0, 2, 4$ durchzuführen, werden die Terme nach Potenzen von ϵ sortiert. Für $n = 0$ erhält man:

$$B_0^{(2)}(Q^2) = -4C_F b_0 \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right\} \quad . \tag{5.71}$$

Man sieht, daß die anomale Dimension für die Bjorken-Summenregel in der zweiten Ordnung nicht mehr verschwindet und ein Beitrag zum Counterterm erscheint. Für $n = 2$ folgt:²³

$$B_2^{(2)}(Q^2) = -\frac{25}{6} C_F b_0 \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left\{ \frac{4}{\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \gamma - \frac{373}{300} \right] \right.$$

²³Hier wurde die Riemannsche Zeta-Funktion verwendet. Vgl. (C.55).

$$-\ln\left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2}\right) \left[\frac{63}{50} - \gamma \right] + \frac{297}{200} - \frac{1}{2} \zeta(2) - \frac{112}{75} \gamma + \gamma^2 \Big\} . \quad (5.72)$$

5.4.3 Restaurierung der Ward-Identität

Wie bereits häufiger erwähnt wurde, kann die Fortsetzung von γ_5 zu d -Dimensionen zu Inkonsistenzen führen.²⁴ Die aus diesen Inkonsistenzen notwendige Mischung von Vertauschung und Antivertauschung-Relationen mit anderen γ -Matrizen führt zu der Möglichkeit der Verletzung der Ward-Identität für den axialvektoriellen Strom. In der masselosen Theorie verschwindet die Divergenz des axialvektoriellen Stroms im Fall des nonsinglet Strom und liefert einen Beitrag von der ersten Ordnung in a_s für den singlet Strom.²⁵

Im folgenden wird zunächst gezeigt, wie in der Divergenz des axialvektoriellen Stroms neue Terme auftreten können. Bei der Betrachtung von Störungskorrekturen sind diese zusätzlichen Terme zu renormieren, um die Ward-Identität in ihrer ursprünglichen Form zu restaurieren. Aus diesem Grund wird eine neue Renormierungskonstante Z_5 eingeführt. In einem dritten Schritt werden die entsprechenden Counterterme in der zweiten Ordnung in a_s bestimmt.

Zusätzliche Terme in der Ward-Identität

Der axialvektorielle Strom lautet in explizit hermitescher Form

$$j_A^\mu(x) = \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) [\gamma^\mu, \gamma_5] \psi(x) \quad , \quad (5.73)$$

was in 4 Dimensionen wegen der Antivertauschungseigenschaft (B.14) mit der üblichen Definition identisch ist. Da der Strom jedoch in diesem Abschnitt in d -Dimensionen untersucht wird, wird die Form (5.73) vorgezogen.

Für den d -dimensionalen Strom gilt dann²⁶ mit (B.56)

$$\begin{aligned} j_A^\mu(x) &= \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) (\gamma^\mu \gamma_5 - \gamma_5 \gamma^\mu) \psi(x) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) (\gamma^\mu \gamma_5 + \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 - \hat{\gamma}^\mu \gamma_5) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi(x) - \bar{\psi}(x) \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \psi(x) \quad . \end{aligned} \quad (5.74)$$

²⁴Vgl. die Erläuterung in Kap. B.1.9.

²⁵Collins 1985.

²⁶Die Notation wird aus B.55 übernommen. Der Querstrich symbolisiert eine Projektion auf 4 Dimensionen der Hut auf $d - 4$ Dimensionen.

Neben dem d -dimensionalen Strom tritt demnach ein $d - 4$ -dimensionaler Term auf, der potentiell auf einen Beitrag zur Divergenz des Stroms führen kann:

$$\partial_\mu j_A^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \not{\partial} \gamma_5 \psi(x) - \bar{\psi}(x) \hat{\not{\partial}} \gamma_5 \psi(x) = -\bar{\psi}(x) \hat{\not{\partial}} \gamma_5 \psi(x) + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (5.75)$$

Die masselose QCD-Lagrangedichte ist in 4 Dimensionen gegenüber chiralen Transformationen invariant. Daraus folgt nach dem Noetherschen Theorem die Erhaltung des Axialvektor-Stroms. Hier jedoch erhält sie in d -Dimensionen einen zusätzlichen Term, der möglicherweise auf eine axiale Anomalie — also auf eine Verletzung der Ward-Identität für den Axialvektor-Strom führen könnte.

Renormierung des Axialvektor-Stroms

Aus der obigen Überlegung wird deutlich, daß die mögliche Verletzung der Ward-Identität durch eine zusätzliche Renormierung ausgeglichen werden muß, da eine solche Verletzung nicht physikalisch sinnvoll ist, sondern als Artefakt der Fortsetzung von γ_5 zu d Dimensionen aufgefaßt werden muß. Die Renormierung erfolgt durch eine zusätzliche Renormierungskonstante Z_5 , die gerade den Counterterm für die die Ward-Identität verletzenden Terme enthält. Der renormierte Axialvektor-Strom $j_{A,R}^\mu$ lautet daher

$$j_{A,R}^\mu(x) = Z_5 Z_A j_A^\mu(x) \quad . \quad (5.76)$$

Die Renormierungskonstante Z_A wurde bereits in den vergangenen Abschnitten für die polarisierte Strukturfunktion berechnet.

Zwei-Punkte-Greensfunktion: Baum-Graph

Die Zwei-Punkte Greensfunktion mit einem axialvektoriellen Vertex G_2^μ ist gerade durch

$$G_2^{\mu(0)} = -\frac{\not{p}'}{p'^2} \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \frac{\not{p}}{p^2} \quad (5.77)$$

gegeben, wobei die Farbmatriizen nicht notiert werden. Die zugehörige Ward-Identität erhält man durch die Kontraktion mit $i(p'_\mu - p_\mu)$:

$$\begin{aligned} i(p'_\mu - p_\mu) G_2^{\mu(0)} &= -i \frac{\not{p}'}{p'^2} (\bar{\not{p}}' - \bar{\not{p}}) \gamma_5 \frac{\not{p}}{p^2} \\ &= -i \frac{\not{p}'}{p'^2} [(\not{p}' - \hat{\not{p}}') \gamma_5 + \gamma_5 (\not{p} - \hat{\not{p}})] \frac{\not{p}}{p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -i\gamma_5 \frac{\not{p}}{p^2} - i\frac{\not{p}'}{p'^2}\gamma_5 + i\frac{\not{p}'}{p'^2}\hat{p}'\gamma_5 \frac{\not{p}}{p^2} + i\frac{\not{p}'}{p'^2}\gamma_5\hat{p}\frac{\not{p}}{p^2} \\
&= -i\gamma_5 \frac{\not{p}}{p^2} - i\frac{\not{p}'}{p'^2}\gamma_5 + i\frac{\not{p}'}{p'^2}(\hat{p}' + \hat{p})\gamma_5 \frac{\not{p}}{p^2} \quad . \quad (5.78)
\end{aligned}$$

Der zusätzliche Term in der Ward-Identität entspricht einer neuen Klasse von Feynman-Graphen, die den Vertex $\hat{\gamma}^\mu$ enthalten und in die Regularisierung integriert werden müssen.

Zwei-Punkte-Greensfunktion: Erste Ordnung a_s

Nachdem die Form des Propagators in d Dimensionen auf dem Baum-Level bekannt ist, kann man diesen verwenden, um die erste Ordnungskorrektur zu berechnen. Die Ward-Identität lautet in dieser Ordnung und in der Feynman-Eichung

$$\begin{aligned}
i(p'_\mu - p_\mu)G_2^{\mu(1)} &= ig^2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2} \gamma_\rho i(p'_\mu - p_\mu)G_2^{\mu(0)} \gamma^\rho \\
&= g^2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\frac{\gamma_\rho \gamma_5 (\not{p} + \not{k}) \gamma^\rho}{k^2 (p+k)^2} + \frac{\gamma_\rho (\not{p}' + \not{k}) \gamma_5 \gamma^\rho}{k^2 (p'+k)^2} \right] \\
&\quad - g^2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p}' + \not{k}) (\hat{p}' + \hat{p} + 2\hat{k}) \gamma_5 (\not{p} + \not{k}) \gamma^\rho}{k^2 (p'+k)^2 (p+k)^2} \quad . \quad (5.79)
\end{aligned}$$

Neben den beiden für die erste Ordnungs-Vertex-Korrektur üblichen Graphen tritt hier ein weiterer Graph auf, der ebenfalls Divergenzen enthalten könnte, die im Grenzfall $d \rightarrow 4$ auf eine zusätzliche Konstante führen.

Die drei aufgetretenen Graphen (sie werden in der Reihenfolge ihres Erscheinens nummeriert und mit W_i bezeichnet) werden im folgenden auf ihre Polstruktur und auf die konstanten Beiträge zur Ward-Identität hin untersucht. Unter Verwendung von (C.132) für $s = 0$, $d = 4 - \varepsilon$, (C.60), (C.96) und (B.76) findet man für den ersten Graphen W_1

$$\begin{aligned}
W_1 &= g^2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho \gamma_5 (\not{p} + \not{k}) \gamma^\rho}{k^2 (p+k)^2} \\
&= g^2 C_F \gamma_\rho \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma^\rho \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^\alpha - k^\alpha}{k^2 (p-k)^2} \\
&= ia_s C_F \gamma_\rho \gamma_5 \not{p} \gamma^\rho \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(d-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} i a_s C_F \gamma_\rho \gamma_5 \not{p} \gamma^\rho \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + 2 \right] \\
&= -\frac{1}{2} i a_s C_F \left((2 + \varepsilon) \overline{\not{p}} \gamma_5 - 6 \hat{\not{p}} \gamma_5 \right) \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + 2 \right] \\
&= -i a_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + 3 \right] \overline{\not{p}} \gamma_5 \\
&\quad + 3 i a_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + \frac{7}{3} \right] \hat{\not{p}} \gamma_5 \quad . \quad (5.80)
\end{aligned}$$

Der zweite Graph ist bis auf die Lorentzstruktur und die Ersetzung von p durch p' mit dem ersten identisch, so daß man bis auf den letzten Schritt die Rechnung übernehmen kann:

$$\begin{aligned}
W_2 &= g^2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p}' + \not{k}) \gamma_5 \gamma^\rho}{k^2 (p' + k)^2} \\
&= \frac{1}{2} i a_s C_F \left((2 + \varepsilon) \overline{\not{p}'} \gamma_5 + 6 \hat{\not{p}'} \gamma_5 \right) \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p'^2} \right) + 2 \right] \\
&= i a_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p'^2} \right) + 3 \right] \overline{\not{p}'} \gamma_5 \\
&\quad + 3 i a_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p'^2} \right) + \frac{7}{3} \right] \hat{\not{p}'} \gamma_5 \quad . \quad (5.81)
\end{aligned}$$

Betrachtet man die Summe dieser ersten beiden Graphen, erhält man

$$W_{1+2} = i a_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + 3 \right] (\overline{\not{p}'} - \overline{\not{p}}) \gamma_5 + i a_s C_F \frac{6}{\varepsilon} (\hat{\not{p}'} + \hat{\not{p}}) \gamma_5 \quad . \quad (5.82)$$

Die Konstanten, die mit $\hat{\not{p}}$ multipliziert werden, sind von der Ordnung ε und können weggelassen werden. Der divergente $\hat{\not{p}}$ -Term jedoch ergibt einen Konstanten Beitrag, der in einer naiven Rechnung nicht berücksichtigt worden wäre.

Schließlich ist noch der dritte Graph in (5.79) zu regularisieren, wobei man sich hier von vorneherein auf die divergenten Teile beschränken kann, da ein endlicher Beitrag zu W_3 im Grenzfall $\hat{\not{p}} = 0$ von höherer Ordnung in ε wäre.

$$\begin{aligned}
W_3 &= -g^2 C_F \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p}' + \not{k}) (\hat{\not{p}'} + \hat{\not{p}} + 2\hat{\not{k}}) \gamma_5 (\not{p} + \not{k}) \gamma^\rho}{k^2 (p' + k)^2 (p + k)^2} \\
&= -g^2 C_F \gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p' - k)^\alpha (p' + p - 2k)^\beta (p - k)^\lambda}{k^2 (p' - k)^2 (p - k)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ia_s C_F \gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho \\
&\quad \times \frac{2}{\varepsilon} \left[g^{\alpha\beta} \left(\frac{p^\lambda}{3} - \frac{p'^\lambda}{6} \right) + \frac{1}{12} g^{\alpha\lambda} (p^\beta + p'^\beta) + g^{\beta\lambda} \left(\frac{p'^\alpha}{3} - \frac{p^\alpha}{6} \right) \right], \quad (5.83)
\end{aligned}$$

wobei (C.208) verwendet wurde. Die Lorentzstruktur läßt sich mit (B.65), (B.66), (B.67) und (B.76) in die Form $\hat{\not{p}} \gamma_5$ und entsprechende Terme bringen, wobei Terme der Art $(4-d)\hat{\gamma}^\lambda$ von vorneherein weggelassen werden, da diese selbst mit dem divergenten Faktor $1/(d-4)$ von der Ordnung ε bleiben. Die drei Lorentzstrukturen sind:

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta} \gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho &= -(d-4)(6-d) \bar{\gamma}_\lambda \gamma_5 \\
g^{\beta\lambda} \gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho &= (d-4)(6-d) \bar{\gamma}_\alpha \gamma_5 \\
g^{\alpha\lambda} \gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho &= (10-d)^2 \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 = 36 \hat{\gamma}_\beta \gamma_5, \quad (5.84)
\end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned}
W_3 &= -ia_s C_F \frac{2}{\varepsilon} \left[-(d-4)(6-d) \bar{\gamma}_\lambda \gamma_5 \left(\frac{p^\lambda}{3} - \frac{p'^\lambda}{6} \right) + 3 \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 (p^\beta + p'^\beta) \right. \\
&\quad \left. + (d-4)(6-d) \bar{\gamma}_\alpha \gamma_5 \left(\frac{p'^\alpha}{3} - \frac{p^\alpha}{6} \right) \right] \\
&= ia_s C_F 2 (\bar{\not{p}}' - \bar{\not{p}}) \gamma_5 - ia_s C_F \frac{6}{\varepsilon} (\hat{\not{p}}' + \hat{\not{p}}) \gamma_5. \quad (5.85)
\end{aligned}$$

Damit sind alle Beiträge zur Ward-Identität (5.79) bestimmt. Die Summe von (5.82) und (5.85) ist

$$i(p'_\mu - p_\mu) G_2^\mu(1) = ia_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + 5 \right] (\bar{\not{p}}' - \bar{\not{p}}) \gamma_5. \quad (5.86)$$

Die Terme proportional zu $(\hat{\not{p}}' + \hat{\not{p}}) \gamma_5$ heben sich gerade weg, so daß durch diese keine Verletzung der Ward-Identität entsteht und deshalb auch keine weitere Renormierung notwendig ist. Der divergente Term wird gerade durch die Standard-Renormierungskonstante Z_A eliminiert, so daß lediglich die Konstante 5 renormiert werden muß.

Bestimmung der Renormierungskonstanten Z_5

Der Counterterm zur Restauration der Ward-Identität kann durch Vergleich von (5.86) mit dem Ergebnis für die Vertex-Korrektur mit einem vektoriellem Vertex, der die Ward-Identität wegen des fehlenden γ_5 automatisch respektiert, ermittelt

werden. Der entscheidende Unterschied entsteht in (5.80), wo das Streichen von γ_5 dazu führt, daß in der drittletzten Zeile $2+\varepsilon$ durch $2-\varepsilon$ ersetzt wird. Das bedeutet, daß die resultierende Konstante 3 in dem Graphen W_1 bzw. ebenso in W_2 durch eine 1 zu ersetzen ist. Die Terme proportional zu \hat{p} und der Graph W_3 treten beim vektoriellen Vertex ohnehin nicht auf. Der divergente Term ist mit dem für den axialvektoriellen Vertex identisch, so daß gilt

$$i(p'_{\mu} - p_{\mu})G_{V,2}^{\mu(1)} = ia_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + 1 \right] (\bar{p}' - \bar{p}) \quad . \quad (5.87)$$

Der Vergleich mit (5.86) ergibt die gesuchte Renormierungskonstante zur Restaurierung der Ward-Identität in der ersten Ordnung in a_s :

$$Z_5 = 1 - 4a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2) \quad . \quad (5.88)$$

Man kann der Literatur diese Renormierungskonstante in der nächsten Ordnung in a_s entnehmen²⁷:

$$Z_5 = 1 - 4a_s C_F + a_s^2 \left(44C_F^2 - \frac{214}{3}C_F + \frac{4}{9}C_F N_f \right) + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.89)$$

Dieses Resultat wird verwendet, um die Renormierung der Ergebnisse für die Störungskoeffizienten von g_1 zu bestimmen.

5.4.4 Allgemeines zur Renormierung

Gegeben sei ein Wilson-Koeffizient in der Form

$$\tilde{C}(Q^2) = 1 + a_s C_F \left[\frac{2}{\varepsilon} \gamma_0 + c_0 \right] + a_s^2 C_F b_0 \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \gamma_0 + \frac{2}{\varepsilon} \gamma_1 + c_1 \right] + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.90)$$

Die Renormierungskonstante, die die Divergenzen behebt, lautet dann:

$$Z = 1 - a_s C_F \frac{2}{\varepsilon} \gamma_0 - a_s^2 C_F \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \gamma_0 (b_0 - C_F \gamma_0) + \frac{2}{\varepsilon} (b_0 \gamma_1 - C_F c_0 \gamma_0) \right] + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.91)$$

Damit folgt für das Produkt ein divergenzfreier Ausdruck:

$$Z\tilde{C}(Q^2) = 1 + a_s C_F c_0 + a_s^2 C_F b_0 c_1 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.92)$$

Zusätzlich muß die die Renormierung zur Restaurierung der Ward-Identität mit (5.89) durchgeführt werden. Mit

$$Z_5 = 1 + a_s C_F z_0 + a_s^2 C_F z_1 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad (5.93)$$

²⁷Larin, Vermaseren 1991; man beachte die Unterschiede in den Konventionen für a_s und ε .

folgt der renormierte Wilson-Koeffizient:

$$\begin{aligned}\tilde{C}^R(Q^2) &= Z_5 Z \tilde{C}(Q^2) \\ &= 1 + a_s C_F (c_0 + z_0) + a_s^2 C_F (b_0 c_1 + z_1 + C_F c_0 z_0) + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.94)\end{aligned}$$

5.4.5 Renormierung der Bjorken-Summenregel

Nachdem die Renormierungskonstanten für den Wilson-Koeffizienten zu g_1^{NS} bekannt sind, können die Störungskorrekturen zu der Bjorken-Summenregel²⁸ in der NNA-Näherung angegeben werden. Der Wilson-Koeffizient setzt sich vor der Renormierung aus (5.65) und (5.71) zusammen:

$$\tilde{C}_{A,0}(Q^2) = 1 + C_F a_s - 4C_F b_0 a_s^2 \left[\frac{2}{\varepsilon} + \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \right] + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.95)$$

Die Bjorken-Summenregel hat in der ersten Ordnung Störungstheorie keine Divergenz, was der verschwindenden anomalen Dimension (5.66) entspricht. Dennoch wird eine Renormierung des endlichen Beitrags zur Restaurierung der Ward-Identität mit (5.89) auch in dieser Ordnung notwendig. Die Renormierungskonstante $Z_{A,0}$ kann in (5.71) abgelesen werden:

$$Z_{A,0} = 1 + 4C_F b_0 a_s^2 \frac{2}{\varepsilon} + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.96)$$

Damit lautet der renormierte Wilson-Koeffizient mit der Renormierungsskala $\mu^2 = Q^2$ und im $\overline{\text{MS}}$ -Schema mit $C = -\frac{5}{3}$ und der 1-Loop-Beta-Funktion (4.20):

$$Z_{A,0} \tilde{C}_{A,0}(\mu^2) = 1 + C_F a_s - \frac{16}{3} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right) C_F a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.97)$$

Die Restaurierung der Ward-Identität mit (5.89) liefert schließlich:

$$\begin{aligned}Z_5 Z_{A,0} \tilde{C}_{A,0}(\mu^2) &= 1 - 3C_F a_s - 4C_F^2 a_s^2 - \frac{16}{3} \left(11 - \frac{2}{3} N_f \right) C_F a_s^2 \\ &\quad + \left(44C_F^2 - \frac{214}{3} C_F + \frac{4}{9} C_F N_f \right) a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \\ &= 1 - 3C_F a_s + C_F \left(40C_F - \frac{385}{3} + 4N_f \right) a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.98)\end{aligned}$$

Dieses Resultat ist lediglich in dem Limes großer Flavor-Zahlen exakt, so daß man zunächst die Korrektheit der Rechnung dadurch überprüfen kann, daß man den

²⁸Bjorken 1966; 1970.

führenden N_f -Term in jeder Ordnung von a_s mit dem exakt berechneten Wilson-Koeffizienten vergleicht, der lautet²⁹:

$$\tilde{C}_{A,0}^R(\mu^2) = 1 - 3C_F a_s + C_F \left(\frac{21}{2} C_F - 69 + 4N_f \right) a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.99)$$

Der führende N_f -Term ist also tatsächlich in den beiden berechneten Ordnungen von a_s exakt. Allerdings wird auch deutlich, daß die nichtführenden N_f -Ordnungen, die effektiv in der NNA-Näherung berechnet wurden, Abweichungen von dem exakten Ergebnis aufweisen. Um diese quantitativ vergleichen zu können, werden der Wert des Casimir-Operators $C_F = \frac{4}{3}$ und die Flavorzahl $N_f = 4$ gesetzt. Man erhält auf diese Weise das NNA-Ergebnis

$$Z_5 Z_{A,0} \tilde{C}_{A,0}(\mu^2) = 1 - 4a_s - \frac{236}{3} a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad (5.100)$$

gegenüber dem exakten Ergebnis

$$\tilde{C}_{A,0}^R(\mu^2) = 1 - 4a_s - 52a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad . \quad (5.101)$$

Man erhält demnach eine Abweichung der NNA-Näherung für die Störungskorrekturen zweiter Ordnung zur Bjorken-Summenregel von ca. 50% gegenüber dem exakten Ergebnis, während die erste Ordnungs-Korrektur erwartungsgemäß exakt ist.

5.4.6 Renormierung des dritten Moments von g_1^{NS}

Die Renormierung der Störungskoeffizienten des dritten Moments von g_1^{NS} geht von der allgemeinen Form des Wilson-Koeffizienten (5.65) aus. Die Renormierungskonstante in erster Ordnung ist (5.68) zu entnehmen. Es folgt:

$$Z_{A,2} \tilde{C}_{A,2}(Q^2) = 1 + \frac{21}{4} a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2) \quad . \quad (5.102)$$

Durch die Restaurierung der Ward-Identität mit (5.89) folgt³⁰:

$$Z_5 Z_{A,2} \tilde{C}_{A,2}(Q^2) = 1 + \frac{5}{4} a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2) \quad . \quad (5.103)$$

²⁹Larin, Vermaseren 1991; der Index R deutet an, daß es sich um den renormierten Wilson-Koeffizienten handelt.

³⁰Dieses Ergebnis stimmt mit Kodaira et al. 1979 überein.

Für die zweite Ordnungskorrektur lauten die Koeffizienten in (5.94) mit (5.72) für $\mu^2 = Q^2$ im $\overline{\text{MS}}$ -Schema:

$$\begin{aligned}
(c_{A,2})_0 &= \frac{5}{4} \\
(c_{A,2})_1 &= \frac{41}{16} + \frac{25}{12}\zeta(2) \\
(z_{5,2})_0 &= -4 \\
(z_{5,2})_1 &= 44C_F - \frac{214}{3} + \frac{4}{9}N_f \\
b_0 &= 11 - \frac{2}{3}N_f \quad .
\end{aligned} \tag{5.104}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
Z_5 Z_{A,2} \tilde{C}_{A,2} &= 1 + \frac{5}{4}a_s C_F \\
&\quad - \frac{25}{6}a_s^2 C_F \left[\frac{2071}{200} - \frac{11}{2}\zeta(2) - \frac{234}{25}C_F + N_f \left(\frac{91}{300} + \frac{1}{3}\zeta(2) \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(a_s^3) \\
&\approx 1 + 1.25 a_s C_F + a_s^2 C_F [-3.55 N_f + 39 C_F - 5.45] + \mathcal{O}(a_s^3) \\
&\approx 1 + 1.67 a_s + 43.13 a_s^2 + \mathcal{O}(a_s^3) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.105}$$

wobei zuletzt $C_F = 4/3$, $N_f = 4$ und (C.55) benutzt wurde.

5.5 Höhere Twist-Korrekturen zu g_1^{NS}

Nachdem der Wilson-Koeffizient in erster Ordnung der Störungstheorie exakt und in höheren Ordnungen im Limes großer Flavor-Zahlen N_f in Verbindung mit NNA berechnet wurde, kann man diesen dazu verwenden, um mit dieser reinen Twist-2-Rechnung eine Abschätzung für die höheren Twist-Korrekturen zur polarisierten nonsinglet Strukturfunktion g_1^{NS} zu geben. Durch die Verwendung des Borel-transformierten resummierten Gluon-Propagators treten in der Borel-Ebene IR-Renormalon-Pole auf, die auf eine prinzipielle Unsicherheit der QCD-Störungsreihe auf dem Twist-2-Level hinweisen. Die Ursache dieser Unsicherheit wird in den höheren Twist-Korrekturen gesucht, so daß sie als Abschätzung für dieselben interpretiert werden kann.³¹

³¹Vgl. die ausführliche Erläuterung dieser Zusammenhänge in dem einführenden Kapitel über die Renormalon-Methode.

Die explizite Berechnung dieser Unsicherheit ist vom schematischen Ablauf her in Kap. 4.5.1 geschildert. Es werden die IR-Renormalon-Pole zu bestimmen sein. Bei der Rücktransformation aus der Borel-Ebene tritt die Unsicherheit als Imaginärteil an diesen Polen auf und hat die Form einer $1/Q^2$ Korrektur.

Damit erhält man einerseits die Möglichkeit, die Twist-4 Matrixelement zu den Momenten der polarisierten Strukturfunktion und systematische Fehlerabschätzungen in der Bestimmung von Twist-2 und Twist-3-Matrixelementen anzugeben. Andererseits ist es möglich, aus der Kenntnis aller Momente auch die Twist-4 und die Twist-2 Strukturfunktion als Funktionen von Bjorken- x in einem Faltungsintegral zueinander in Beziehung zu setzen, wobei die in den Impulsraum transformierte Renormalon-Unsicherheit das Gewicht dieses Faltung bildet.

5.5.1 Die IR-Renormalon-Pole

Für die Berechnung der Renormalon-Unsicherheit der Störungsreihe sind die IR-Renormalon-Pole auf der positiven reellen Achse der Borel-Ebene zu isolieren. Dazu ist (5.62) für $d = 4$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1](s) = & 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left\{ - \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma(s) \Gamma(1-s)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(1+s) \Gamma(3-s)} \right. \\ & + \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(3+s+n)} \left[2 \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(3-s)} - \frac{\Gamma(2-s)}{\Gamma(3-s)} \right] \\ & \left. - 2 \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma(s+k) \Gamma(-s) [s(1-s) + k(2-s)]}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(3-s)} \right\} \end{aligned} \quad (5.106)$$

also in der rein analytischen Regularisierung zu untersuchen. In den hier noch nach Feynman-Graphen sortierten Termen (Selbstenergie, Box, Vertex) treten die IR-Renormalon-Pole vermischt auf und müssen durch eine Partialbruchzerlegung voneinander getrennt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1](s) = & 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \\ & \left\{ - \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n)} \left[\frac{1}{2s} + \frac{1}{1-s} - \frac{1}{2(2-s)} \right] \right. \\ & - \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) (1+s+n)(2+s+n)} \left[\frac{1}{s} + \frac{2}{1-s} \right] \\ & \left. + \frac{1}{1+s} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{2-s} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(k)(1+s+k)} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s} \right] \\
& +2 \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+k)(1+s+k)} \frac{1}{2-s} \Bigg\} \\
= & 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \\
& \left\{ \frac{1}{s} \left[-\frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{(1+s+n)(2+s+n)} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{1+s} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(k)(1+s+k)} \right] \right. \\
& + \frac{1}{1-s} \left[-\frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \left(1 + \frac{2}{(1+s+n)(2+s+n)} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(k)(1+s+k)} \right] \\
& + \frac{1}{2-s} \left[\frac{1}{2} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} + \frac{1}{1+s} \right. \\
& \quad \left. + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+k)(1+s+k)} \right] \Bigg\} . \quad (5.107)
\end{aligned}$$

Die UV-Renormalonen wurden in diesem Ausdruck nicht explizit isoliert. Betrachtet man den $s = 0$ -Pol, findet man die anomale Dimension wieder, die bereits in (5.66) hergeleitet wurde:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1](s) \Big|_{s=0} &= 2C_F \frac{1}{s} \left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(1+n)(2+n)} \right) + 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \right] \\
&= C_F \frac{1}{s} \left[-3 - \frac{2}{(1+n)(2+n)} + 4S_{1+n} \right] . \quad (5.108)
\end{aligned}$$

Die beiden IR-Renormalon-Pole können in (5.107) abgelesen werden. Für das führende IR-Renormalon bei $s = 1$ erhält man mit (A.19):

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1](s) \Big|_{s=1} &= 2C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{1}{1-s} \left[2 \sum_{k=1}^n \frac{k}{2+k} - 1 - n - \frac{2(1+n)}{(2+n)(3+n)} \right] \\
&= 2C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{1}{1-s} \left[5 + n - \frac{2(1+n)}{(2+n)(3+n)} - 4S_{2+n} \right] \\
&= 2C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{1}{1-s} \left[7 + n - \frac{2(1+n)}{2+n} - 4S_{3+n} \right] . \quad (5.109)
\end{aligned}$$

Das nächstführende IR-Renormalon lautet mit (A.19):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{A,n} - 1](s) \Big|_{s=2} &= 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \frac{1}{2-s} \left[\frac{1}{4}(1+n)(2+n) + \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{1+k}{3+k} \right] \\ &= 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \frac{1}{2-s} \left[3 + \frac{5}{4}(1+n) + \frac{1}{4}(1+n)^2 - 2S_{3+n} \right]. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Die hier aufgeführten IR-Renormalon-Pole sind die Grundlage für die Berechnung der IR-Renormalon-Unsicherheit der QCD-Störungsreihe, die gemäß der im methodischen Kapitel 4.5.1 dargestellten Philosophie eine Abschätzung der höheren Twist-Korrekturen zu g_1 darstellen.

5.5.2 Renormalon-Unsicherheit

Die Renormalon-Unsicherheit des Twist-2-Wilson-Koeffizienten in (4.54) erhält man nach (4.56) als Imaginärteil der IR-Renormalon-Pole bei der Rücktransformation aus der Borel-Ebene. Da die beiden IR-Renormalon-Pole im vorigen Abschnitt berechnet wurden, müssen sie nur noch eingesetzt werden. Für das führende IR-Renormalon (5.109) lautet demnach die Unsicherheit:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{A,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) &= \frac{1}{\pi b_0} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \mathcal{B}_{1/a_s} [\tilde{C}_{A,n}(Q^2)](s) \Big|_{s=1} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\ &= \frac{2C_F}{\pi b_0} \left[7 + n - \frac{2(1+n)}{2+n} - 4S_{3+n} \right] \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \\ &\quad \times \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \frac{1}{1-s} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\ &= \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[7 + n - \frac{2(1+n)}{2+n} - 4S_{3+n} \right] \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) e^{\frac{-1}{b_0 a_s}}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Die Integration um den Pol bei $s = 1$ auf der positiven reellen Achse der imaginären Borel-Ebene ist im Vorzeichen unbestimmt, und daher als Unsicherheit der Twist-2-Rechnung explizit gekennzeichnet. Mit der Definition von Λ^2 als Landau-Pol der QCD-Kopplung (4.25) folgt schließlich:

$$\tilde{C}_{A,n}^{(1)} = \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[7 + n - \frac{2(1+n)}{2+n} - 4S_{3+n} \right]. \quad (5.112)$$

Das zweite IR-Renormalon (5.110) führt auf eine Unsicherheit der Form $1/Q^4$ und lautet:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{A,n}^{(2)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 &= \frac{1}{\pi b_0} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \mathcal{B}_{1/a_s} \left[\tilde{C}_{A,n}(Q^2) \right] (s) \Big|_{s=2} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\
&= \frac{2C_F}{\pi b_0} \left[3 + \frac{5}{4}(1+n) + \frac{1}{4}(1+n)^2 - 2S_{3+n} \right] \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \\
&\quad \times \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \frac{1}{2-s} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\
&= \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[3 + \frac{5}{4}(1+n) + \frac{1}{4}(1+n)^2 - 2S_{3+n} \right] \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 e^{\frac{-2}{b_0 a_s}},
\end{aligned} \tag{5.113}$$

so daß mit (4.25) folgt:

$$\tilde{C}_{A,n}^{(2)} = \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[3 + \frac{5}{4}(1+n) + \frac{1}{4}(1+n)^2 - 2S_{3+n} \right]. \tag{5.114}$$

Diese IR-Renormalon-Unsicherheiten werden in den folgenden Abschnitten verwendet um die Twist-4-Korrekturen zur Bjorken-Summenregel und zum dritten Moment von g_1^{NS} abzuschätzen. Außerdem wird eine systematische Unsicherheit in der experimentellen Bestimmung des Twist-3-Matrixelements für das zweite Moment von g_2^{NS} angegeben. Zunächst jedoch wird die allgemeine Vorhersage für die Twist-4-Korrektur zu g_1^{NS} als Funktion von Bjorken- x — also im Impulsraum angegeben.

5.5.3 $g_1^{\text{Tw}-4}$ im Impulsraum

Der Wilson-Koeffizient für den Twist-2-Operator der polarisierten Strukturfunktion hat die allgemeine Form (4.54), besteht also aus einem perturbativen Teil und einer Potenzkorrektur. Der erstere ist aus der Literatur bis zu einer gewissen Ordnung bekannt und wurde auch in dieser Arbeit noch einmal hergeleitet. Die Potenzkorrekturen gehen auf die hier berechneten IR-Renormalon Unsicherheiten zurück und dienen als Abschätzung für höhere Twist-Korrekturen. Man kann daher gemäß (2.157) den führenden Twist-Anteil der Momente von g_1^{NS} allgemein durch den Wilson-Koeffizienten und das zugehörige Matrixelement angeben:

$$M_{A,n}^{\text{Tw}-2} = \tilde{C}_{A,n} \left(Q^2, a_s(Q) \right) a_{A,n}^{NS,\text{Tw}-2}, \tag{5.115}$$

wobei der Wilson-Koeffizient die allgemeine Form (4.54)

$$C_{A,n}(Q^2, a_s(Q)) = \sum_{m=0}^{m_0-1} B_n^{(m)} a_s^m(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_{A,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k \quad (5.116)$$

hat. Die Potenzkorrekturen sind (5.112) und (5.114) zu entnehmen, während die expliziten Ausdrücke für die Störungskoeffizienten $B_n^{(m)}$ hier nicht benötigt werden.

Entsprechend kann man auch für den Twist-4-Anteil eine analoge Definition der Momente angeben, die jedoch durch die Abschätzung mittels der Renormalon-Methode ersetzt wird. In dieser Interpretation wird die führende IR-Renormalon-Unsicherheit mit dem Twist-4-Anteil identifiziert, so daß gilt:

$$M_{A,n}^{\text{Tw-4}} = \tilde{C}_{A,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) a_{A,n}^{\text{NS,Tw-2}} + \mathcal{O} \left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right) \quad (5.117)$$

Es entspricht gerade der Renormalon-Philosophie, daß das reduzierte Matrixelement erneut vom Twist-2-Operator stammt, obwohl es hier um den Twist-4-Anteil des Moments geht. Störungskorrekturen zu der Twist-4-Abschätzung liegen außerhalb des Genauigkeitsbereichs und werden vernachlässigt. Das gleiche gilt für die nicht führenden IR-Renormalon-Pole der Ordnung $1/Q^4$. Bildet man das Verhältnis von Twist-4 und Twist-2 Moment und entwickelt den Nenner, erhält man in dieser Näherung eine direkte Beziehung von Twist-4 und Twist-2 Anteile am Moment über die Renormalon-Unsicherheit. Die Twist-2 reduzierten Matrixelemente kürzen sich dabei weg:

$$\begin{aligned} \frac{M_{A,n}^{\text{Tw-4}}}{M_{A,n}^{\text{Tw-2}}} &= \frac{\tilde{C}_{A,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right)}{B_n^{(0)} + B_n^{(1)} a_s + \tilde{C}_{A,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right)} \\ &\approx \left[\frac{\tilde{C}_{A,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right)}{B_n^{(0)}} \right] \\ &\quad \left[1 - \frac{B_n^{(1)}}{B_n^{(0)}} a_s + \frac{\tilde{C}_{A,n}^{(1)}}{B_n^{(0)}} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right) \right] \\ &= \frac{\tilde{C}_{A,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right)}{B_n^{(0)}} \quad (5.118) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $B_n^{(0)} = 1$ folgt also die Relation:

$$M_{A,n}^{\text{Tw-4}} = \left[\tilde{C}_{A,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right) \right] M_{A,n}^{\text{Tw-2,Exp}} \quad (5.119)$$

Da die Differenz von Twist-2-Anteil der Momente und experimenteller Vorhersage ebenfalls von der Ordnung $1/Q^2$ ist, ist es in der gemachten Näherung irrelevant, ob man rechts Experiment oder Twist-2-Anteil liest.

Im folgenden wird diese Beziehung genutzt, um die Twist-4-Abschätzung von g_1^{NS} als Funktion von Bjorken- x zu bestimmen. Entsprechend (2.162) gilt für das experimentell bestimmte Moment

$$M_{A,n}^{\text{Exp}}(Q^2) = \int_0^1 dx x^n g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \quad , \quad (5.120)$$

wobei die Potenz von x passend zu den gemachten Konventionen gewählt wurde. Für den Twist-4-Anteil gilt die völlig analoge Gleichung. Andererseits kann man die letztere auch als Produkt der Momente zweier Funktionen auffassen, wie es in (5.119) geschehen ist. Die in den Impulsraum transformierten Funktionen sind $C_{A,n}^{(k)}(x)$ und $g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2)$. Das daraus resultierende Produkt von zwei Momenten-Integralen kann mittels (A.25) in ein Faltungsintegral übergeführt werden:

$$\begin{aligned} M_{A,n}^{\text{Tw-4}}(Q^2) &= \int_0^1 dx x^n g_1^{\text{Tw-4}}(x, Q^2) \\ &= \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \tilde{C}_{A,n}^{(1)} M_{A,n}^{\text{Exp}} \\ &= \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \int_0^1 dx x^n C_A^{(1)}(x) \int_0^1 dy y^n g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \\ &= \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \int_0^1 dx x^n \int_0^1 \frac{dy}{y} C_A^{(1)}(x) g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \quad . \quad (5.121) \end{aligned}$$

Der Vergleich der ersten mit der letzten Zeile liefert aufgrund der Vollständigkeit der Basis der Momente das gesuchte Faltungsintegral für den Twist-4-Anteil der polarisierten nonsinglet Strukturfunktion im Impulsraum:

$$g_1^{\text{Tw-4}}(x, Q^2) = \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \int_x^1 \frac{dy}{y} C_A^{(1)}(y) g_1^{\text{Exp}}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) \quad . \quad (5.122)$$

Das Gewicht in dem Faltungsintegral ist gerade die in den Impulsraum transformierte führende IR-Renormalon-Unsicherheit (5.112). Diese Transformation muß noch mit Hilfe der Beziehungen (A.17) und (A.18) durchgeführt werden:

$$C_A^{(1)}(x) = \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[5\delta(x-1) - \delta^{(1)}(x-1) - 4 - 2x - 4x^2 + 4 \frac{1}{(1-x)_+} \right] \quad . \quad (5.123)$$

Durch die letzten beiden Gleichungen ist die Vorhersage der Twist-4-Korrektur zu g_1^{NS} vollständig bestimmt. Das nicht führende IR-Renormalon (5.114) lautet im

Impulsraum

$$C_A^{(2)}(x) = \pm \frac{4C_F}{b_0} \left[\frac{9}{4} \delta(x-1) - \delta^{(1)}(x-1) + \frac{1}{8} \delta^{(2)}(x-1) - 1 - x - x^2 + \frac{1}{(1-x)_+} \right] \quad (5.124)$$

und geht nicht in diese Abschätzung ein.

Die numerische Auswertung des Integrals (5.122) wird durch die Integration der Integranden mit Distributions-Charakter vorbereitet:

$$\int_x^1 \frac{dy}{y} \delta(y-1) g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right) = g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \quad , \quad (5.125)$$

$$\begin{aligned} & \int_x^1 \frac{dy}{y} \delta^{(1)}(y-1) g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right) \\ &= - \int_0^1 dy \delta(y-1) \left(\frac{g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right)}{y} \right)' \\ &= \int_0^1 dy \delta(y-1) \left(\frac{g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right)}{y^2} + \frac{x g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right)}{y^3} \right) \\ &= g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) + x g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \quad . \end{aligned} \quad (5.126)$$

Die Betrachtung der + Distribution ist etwas subtiler. Unter mehrmaliger Verwendung von (A.25) und (A.18) folgt für die Momente des Faltungsintegrals:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx x^n \int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{1}{(1-y)_+} g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right) \\ &= \int_0^1 dx x^n \frac{1}{(1-x)_+} \int_0^1 dy y^n g_1^{\text{Exp}}(y, Q^2) \\ &= \int_0^1 dx \frac{x^n - 1}{1-x} \int_0^1 dy y^n g_1^{\text{Exp}}(y, Q^2) \\ &= \int_0^1 dx x^n \frac{1}{1-x} \int_0^1 dy y^n g_1^{\text{Exp}}(y, Q^2) - \int_0^1 dx \frac{1}{1-x} \int_0^1 dy y^n g_1^{\text{Exp}}(y, Q^2) \\ &= \int_0^1 dx x^n \int_x^1 \frac{dy}{y} g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right) \frac{1}{1-y} - \int_0^1 dx x^n g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \int_0^1 dy \frac{1}{1-y} \quad . \end{aligned} \quad (5.127)$$

so daß man für das Faltungsintegral selbst erhält:

$$\int_x^1 \frac{dy}{y} \frac{1}{(1-y)_+} g_1^{\text{Exp}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^1 \frac{dy}{y} g_1^{\text{Exp}}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) \frac{1}{1-y} - g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \int_0^1 dy \frac{1}{1-y} \\
&= \int_x^1 dy \left[\frac{1}{y} g_1^{\text{Exp}}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) - g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \right] \frac{1}{1-y} - g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \int_0^x dy \frac{1}{1-y} \\
&= \int_x^1 dy \left[\frac{1}{y} g_1^{\text{Exp}}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) - g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \right] \frac{1}{1-y} + g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \ln(1-x).
\end{aligned} \tag{5.128}$$

Eine naive Anwendung von (A.18) auf das Faltungsintegral führt wegen der falschen unteren Integrationsgrenze, die nicht Null sondern x ist, zu einem um den logarithmischen Term falschen Ergebnis.³² Insgesamt lautet damit das numerisch auszuwertende Integral

$$\begin{aligned}
g_1^{\text{Tw-4}}(x, Q^2) &= \pm \frac{2C_F \Lambda^2 e^{-C}}{b_0 Q^2} \left[x g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) - 4g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) (1 + \ln(1-x)) \right. \\
&\quad \left. - 4 \int_x^1 dy \left[\frac{1}{y} g_1^{\text{Exp}}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) - g_1^{\text{Exp}}(x, Q^2) \right] \frac{1}{1-y} \right. \\
&\quad \left. + \int_x^1 \frac{dy}{y} (4 + 2y + 4y^2) g_1^{\text{Exp}}\left(\frac{x}{y}, Q^2\right) \right]. \tag{5.129}
\end{aligned}$$

Für die numerische Auswertung sind weiterhin die enthaltenen Konstanten zu wählen: Der SU(3) Casimir-Operator ist $C_F = 4/3$. Die QCD-Skala wird auf $\Lambda = 200 \text{ MeV}$ festgelegt, und die Renormierungs-Korrektur ist im $\overline{\text{MS}}$ -Schema $C = -5/3$. Die 1-Loop-Beta-Funktion $b_0 = 11 - 2N_f/3$ ist aus (4.20) bekannt, wobei die Zahl der Flavor $N_f = 4$ gewählt wird, so daß $b_0 = 25/3$ wird.

Neben dieser üblichen Wahl der Parameter und Konstanten ist der Wert des Impulsübertrags festzulegen, an dem die Twist-4-Korrektur untersucht wird. Das qualitative Verhalten der erwarteten Twist-4-Korrektur wird durch (5.122) bestätigt. Setzt man ein logarithmisches Verhalten mit Q^2 für die experimentell bestimmte Strukturfunktion im Integranden ein, so wird die Unterdrückung der Twist-4-Korrektur durch den Faktor $1/Q^2$ für große Impulsüberträge die Oberhand gewinnen und die Twist-4-Korrektur bedeutungslos werden lassen. Da man die höheren Twist-Korrekturen allgemein mit Effekten großer Skalen, also mit kleinen Impulsüberträgen assoziiert, entspricht dies den Erwartungen. Andererseits sollte der Impulsübertrag auch nicht zu klein gewählt werden, da es sich bei der Renormalon-Methode um eine rein perturbative Twist-2-Rechnung handelt, deren Gültigkeit im Bereich der Resonanzen $Q^2 \sim \text{GeV}^2$ mehr als zweifelhaft ist. Ähnlich wie bei dem

³²Ich danke an dieser Stelle der hilfreichen Diskussion mit Herrn Martin Maul.

Verfahren der QCD-Summenregeln³³ ist also ein Balanceakt zwischen den Polen des Verschwindens der Twist-4-Korrektur bei großen und des Verschwindens der Gültigkeit der Rechnung bei kleinen Impulsüberträgen zu bewerkstelligen. Deshalb wird die Skala knapp oberhalb des Resonanzbereichs mit $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ festgelegt, eine Wahl, die mit der gewählten Flavor-Zahl $N_f = 4$ konsistent ist, da die Resonanzen der leichtesten 4 Quarksorten weitgehend unterhalb dieser Skala liegen.

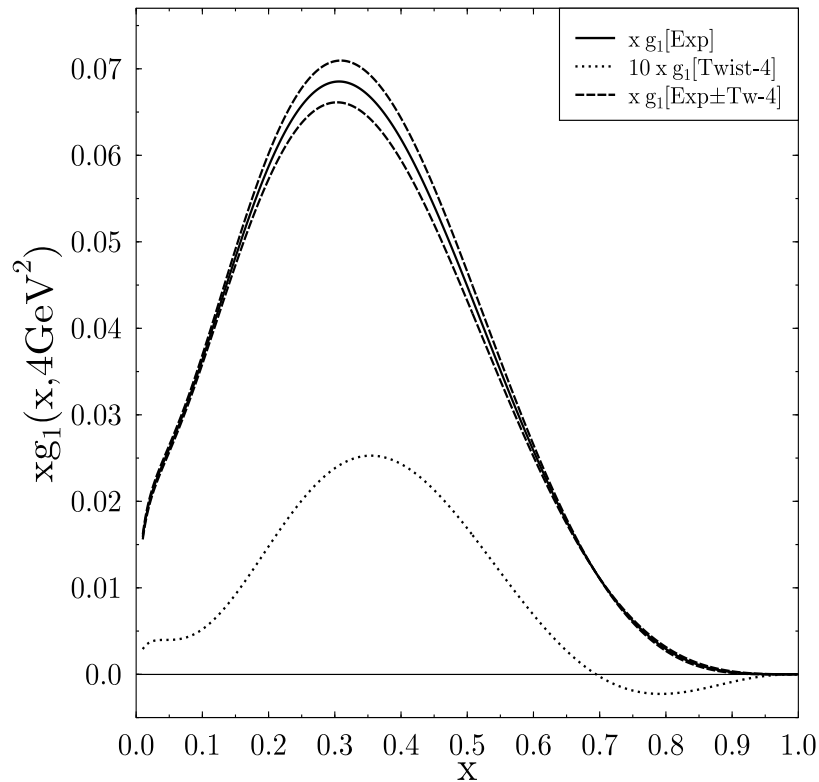


Abbildung 5.7: Die Twist-4-Korrektur (mit einem Faktor 10, gepunktete Linie) zu g_1^{NS} und die Addition bzw. Subtraktion derselben vom experimentellen Fit (gestrichelte Linie). Hierdurch wird der Bereich markiert, in dem der Twist-2-Anteil von g_1^{NS} liegen muß. Die Korrektur zeigt einen Vorzeichenwechsel bei $x \approx 0.69$. ($\Lambda_{\overline{MS}} = 200 \text{ MeV}$, $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ and $N_f = 4$).

Der experimentelle Verlauf von $g_1^{NS}(x)$ wird durch die Parametrisierung³⁴ von Valenz-Quark-Verteilungsfunktionen dargestellt, die auch schon im allgemeinen Ka-

³³Vgl. Shifman, Vainshtein, Zakharov 1979a; b.

³⁴Vgl. Gehrman, Stirling 1996.

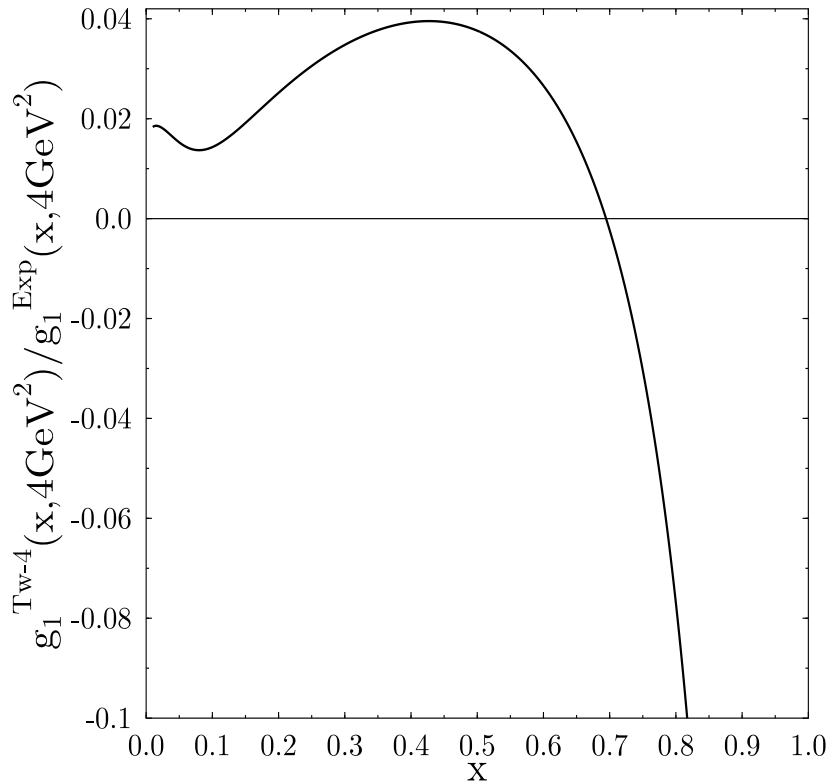


Abbildung 5.8: Der relative Anteil des vorhergesagten Twist-4-Beitrags an der experimentellen Strukturfunktion g_1 . $\Lambda_{\overline{MS}} = 200$ MeV, $Q^2 = 4$ GeV² and $N_f = 4$.

pitel über die tief-inelastische Streuung verwendet wurde (siehe Abb. 2.9). Es ist zu beachten, daß die Beiträge des Quarksees zu g_1^{NS} nicht beitragen, da sie für die Proton- und die Neutron-Strukturfunktion identisch sind und deshalb beim bilden der Differenz wegfallen. Die nonsinglet Strukturfunktion wird dementsprechend allein durch die Differenz der up- und down-Valenz-Quarkverteilungen gebildet.

Das Ergebnis der numerischen Integration von (5.122) ist in Abb. 5.7 graphisch dargestellt.³⁵ Die abgeschätzte Twist-4-Korrektur ist durch die gepunktete Linie dargestellt (sie wurde wegen ihrer Kleinheit mit einem Faktor 10 aufgeblasen) und (ohne Faktor 10) von der Parametrisierung der Experimente abgezogen und addiert. Der Twist-2-Anteil an der polarisierten nonsinglet Strukturfunktion muß daher innerhalb der gestrichelten Linien liegen. Diese Aussage ist natürlich von der Qualität der Experimente abhängig, die bei weitem nicht so groß ist wie für die unpolari-

³⁵Vgl. Meyer-Hermann et al. 1996; 1997.

sierten Strukturfunktionen, so daß eine eindeutige Aussage über einen Effekt von wenigen Prozent noch nicht möglich ist.

Auf der anderen Seite kann man sagen, daß die Renormalon-Methode keine großen Twist-4-Korrekturen im Bereich mittlerer Q^2 erwarten läßt. Die Abhängigkeit der relativen Größe des erwarteten Twist-4 Anteils am experimentellen Wert ist in Abb. 5.8 dargestellt und läßt im mittleren Bjorken- x -Bereich auf maximal eine 4%-Korrektur bei $x = 0.43$ schließen.³⁶

Der Vorzeichenwechsel bei $x \approx 0.69$ deutet darauf hin, daß sich ein Teil der Twist-4-Korrekturen in der Bjorken-Summenregel wegheben wird, der allerdings vom Betrag her gegenüber der Gesamtkorrektur nicht ins Gewicht fällt. Hingegen wird sich der Vorzeichenwechsel bei höheren Momenten deutlicher auswirken, wo die Gewichtung durch den Faktor x^n mit $n = 2, \dots$ die Differenz im Betrag der Korrektur mit positivem und negativem Vorzeichen reduziert. Eine grobe Abschätzung läßt für das dritte Moment bereits eine Verringerung der höheren Twist-Korrektur um 25% erwarten.

Nachdem die Twist-4-Korrekturen in Abhängigkeit von Bjorken- x diskutiert wurde, werden nun einige speziellere Untersuchungen für die niedrigsten nonsinglet Momente der polarisierten Strukturfunktion gemacht, die unterschiedliche Bereiche des Bjorken- x testen.

5.5.4 Twist-4-Matrixelemente zur Bjorken-Summenregel

Die Zerlegung des antisymmetrischen Teils des hadronischen Tensors in die Komponenten unterschiedlichen Twists wurde in (3.89) hergeleitet³⁷

$$\int_0^1 dx g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} a_{A,0}^{(a)} + \frac{1}{9} \frac{m^2}{Q^2} \left(a_{A,2}^{(a)} + 4d_A^{(a)} + 4f_A^{(a)} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{m^3}{(Q^2)^{3/2}} \right) \quad . \quad (5.130)$$

Die in dieser Notation verwendeten reduzierten Matrixelemente sind in (3.13), (3.87), (3.88) und (3.85) definiert. $a_{A,0}^{(a)}$ ist das führende Twist-2-Matrixelement zur Bjorken-Summenregel. Durch die Zerlegung höherdimensionaler Operatoren in

³⁶Dem Resultat ist bei sehr kleinem und sehr großem Bjorken- x wegen der gemachten Näherung großer N_f bzw. wegen hadronischer Resonanzen nicht zu trauen. Siehe dazu auch die allgemeine Diskussion des Gültigkeitsbereichs des Renormalon-Zugangs im methodischen Kapitel 4.5.4.

³⁷Siehe auch Jaffe, Soldate 1981; Shuryak, Vainshtein 1982; Balitsky, Braun, Kolesnichenko 1990; 1993; Lee 1993; Ehrnsperger, Mankiewicz, Schäfer 1994; die Inkonsistenz der Ergebnisse wurde inzwischen beseitigt. Das hier notierte und in (3.89) noch einmal hergeleitete Resultat entspricht dem allgemeinen Konsenz.

ihre Anteile unterschiedlichen Twists folgt die Form der mit $1/Q^2$ unterdrückten Matrixelemente. $a_{A,2}^{(a)}$ hat dabei Twist-2, $d_A^{(a)}$ hat Twist-3 und $f_A^{(a)}$ Twist-4.

(5.130) ist einerseits für die Proton-Strukturfunktion — also als Ellis-Jaffe-Summenregel³⁸ — und andererseits für die nonsinglet Strukturfunktion zu lesen. Im letzteren Fall ist (5.130) die Twist-Zerlegung der Bjorken-Summenregel³⁹, und man muß die reduzierten Matrixelemente in der Flavor-Kombination $u - d$ auswerten.

Aus der zuvor durchgeführten Analyse der Renormalon-Pole erhält man eine Vorhersage für das Twist-4-Matrixelement $f_A^{(u-d)}$ zur Bjorken-Summenregel. Diese kann man entweder durch die Auswertung von (5.112) bei $n = 0$ und Einsetzen des Ergebnisses in (5.119) oder durch die direkte Integration von (5.129) über Bjorken- x erhalten. Beide Wege führen auf das gleiche Resultat⁴⁰:

$$\int_0^1 dx g_1^{NS, Tw-4}(x, Q^2) = \pm \frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{4}{25} C_F a_{u-d}^{(0)} \approx \pm \frac{0.017 \text{ GeV}^2}{Q^2} \quad (5.131)$$

oder für das reduzierte Matrixelement selbst:

$$f_A^{(u-d)} \approx \pm 0.038 \quad . \quad (5.132)$$

Die Abschätzung (5.131) ist im guten Einklang mit den bisherigen Berechnungen, die man aus QCD-Summenregeln⁴¹ erhalten hat:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx g_1^{NS, Tw-4}(x, Q^2) &\approx \pm \frac{0.0094 \text{ GeV}^2}{Q^2} \\ &\approx + \frac{(0.02 \pm 0.015) \text{ GeV}^2}{Q^2} \quad , \end{aligned} \quad (5.133)$$

wobei in den beiden QCD-Summenregeln-Rechnungen verschiedene Ströme verwendet wurden. Eine Abschätzung unter Verwendung von Pad-Approximanden⁴² ergab

$$\int_0^1 dx g_1^{NS, Tw-4}(x, Q^2) \approx \pm \frac{(0.04 \pm 0.016) \text{ GeV}^2}{Q^2} \quad . \quad (5.134)$$

Eine systematische Bestimmung des Fehlers in (5.131) ist prinzipiell nicht möglich, da die verwandte Methode keine Handhabe bietet, das Verhältnis der Renormalon-Abschätzung und dem tatsächlichen Twist-4-Beitrag zur Bjorken-Summenregel zu

³⁸Vgl. Ellis, Jaffe 1974a; b.

³⁹Vgl. Bjorken 1966; 1970.

⁴⁰Vgl. Meyer-Hermann et al. 1996; 1997.

⁴¹Vgl. Balitsky, Braun, Kolesnichenko 1990; 1993; Stein et al. 1995.

⁴²Vgl. Ellis et al. 1996.

bestimmen. Die Erfahrung allerdings läßt eine um einen Faktor 2 größere Korrektur erwarten. Über das Vorzeichen der Korrektur ist ebenfalls keine Aussage möglich⁴³.

Will man die Bjorken-Summenregel zur Grundlage einer Messung der QCD-Kopplung machen, sind die Fehlerquellen, die durch die Vernachlässigung der höheren Twist-Korrekturen entstehen, zu beachten. Durch die Messung der Asymmetrie A_1 kann g_1 unter Vernachlässigung von A_2 über

$$g_1(x, Q^2) = \frac{A_1(x, Q^2) F_2(x, Q^2)}{2x(1 + R(x, Q^2))} \quad (5.135)$$

bestimmt werden. Die genaue Kenntnis der Störungskoeffizienten zur Bjorken-Summenregel

$$\int_0^1 dx g_1^{NS}(x, Q^2) = \frac{1}{6} \frac{g_A}{g_V} \left[1 - \frac{\alpha_s}{\pi} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \left(-4.58 + \frac{1}{3} N_f \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^3) \right] \quad (5.136)$$

erlaubt dann Rückschlüsse auf die QCD-Kopplung. Die Liste möglicher Fehlerquellen ist lang: Die transversale Asymmetrie A_2 könnte ungleich Null sein, ist aber sicherlich sehr klein. Die unpolarisierte Strukturfunktion F_2 ist inzwischen sehr genau ausgemessen, die Restungenauigkeit trägt aber auch zu dem Gesamtfehler bei. Die höheren Twist-Korrekturen zur Bjorken-Summenregel werden in (5.136) nicht berücksichtigt und führen zu einem weiteren aber wie gesehen kleinen Fehler. Die Hauptfehlerquelle hängt mit der Genauigkeit zusammen, mit der der R -Faktor bekannt ist. Insbesondere werden für diesen sehr große höhere Twist-Korrekturen erwartet, die im nächsten Kapitel Gegenstand der Untersuchung sein werden.

5.5.5 Twist-4-Matrixelemente zum dritten Moment

Das Twist-2-Matrixelement zum dritten Moment von g_1 erhält man durch den Anteil maximalen Spins des Operators mit Massendimension 5 in (3.49). Das entsprechende reduzierte Matrixelement $a_{A,2}^{(a)}$ ist durch (3.87) definiert und liefert die feldtheoretische Definition (3.90) des dritten Moments:

$$\int_0^1 dx x^2 g_1(x, Q^2) = \frac{1}{2} a_{A,2} + \text{HT} \quad . \quad (5.137)$$

Die Twist-4-Korrekturen zu dem dritten Moment der nonsinglet Strukturfunktion können mit der Renormalon-Unsicherheit (5.112) für $n = 2$ abgeschätzt werden:

$$C_{A,2}^{(1)} = \pm \frac{2C_f}{b_0} \frac{49}{30} \quad , \quad (5.138)$$

⁴³Vgl. dazu die allgemeinen Aussagen über den Geltungsbereich der Methode in Kap. 4.5.4.

woraus mit (5.119) und (5.137) für das dritte Moment des Twist-4-Anteils der Strukturfunktion

$$\int_0^1 dx x^2 g_1^{NS, \text{Tw-4}}(x, Q^2) = \pm \frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{2C_f}{b_0} \frac{49}{30} \frac{1}{2} a_{A,2}^{(u-d)} \approx \pm \frac{1}{2} a_{A,2}^{(u-d)} \frac{0.11 \text{ GeV}^2}{Q^2} \quad (5.139)$$

folgt.⁴⁴ Die numerische Integration des experimentellen Fits g_1^{NS} mit dem Gewicht x^2 erlaubt es, einen Zahlenwert für diese Abschätzung des Twist-4-Beitrags zu g_1^{NS} bei z.B. $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ anzugeben:

$$\int_0^1 dx x^2 g_1^{NS, \text{Tw-4}}(x, 4 \text{ GeV}^2) \approx \pm 0.0006 \quad . \quad (5.140)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit einer direkten numerischen Integration von (5.129) überein.

Eine Messung des dritten Moments von g_1^{NS} , die nicht zwischen den unterschiedlichen Twist-Beiträgen unterscheiden kann⁴⁵, würde demnach reduzierte Matrixelement $a_{A,2}^{(u-d)}$ des Twist-2-Operators mit einem Fehler

$$\int_0^1 dx x^2 g_1^{NS, \text{Tw-2}} = \frac{1}{2} a_{A,2}^{(u-d)} \left[1 \pm \frac{0.11 \text{ GeV}^2}{Q^2} \right] \quad (5.141)$$

ermitteln, der sich bei $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ auf ca. 2.7% beläuft und mit $1/Q^2$ bei größeren Energieüberträgen unterdrückt wird.

5.5.6 Twist-3-Korrektur zur Bjorken-Summenregel

Der an sich kleine Fehler bei der Bestimmung von $a_{A,2}^{(u-d)}$ durch die Messung des dritten Moments von g_1^{NS} wirkt sich wesentlich deutlicher auf die experimentelle Bestimmung des Twist-3-Matrixelements $d_A^{(u-d)}$ in (5.130) aus. Dieses wird durch die Messung der dritten Momente von g_1^{NS} (3.90) und g_2^{NS} (3.91)

$$\int_0^1 dx x^2 g_2(x, Q^2) = -\frac{1}{3} a^{(2)} + \frac{1}{3} d^{(2)} + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{Q^2}\right) \quad (5.142)$$

bestimmt. Aus der Kombination der beiden Messungen kann das Twist-3-Matrixelement $d_A^{(u-d)}$ extrahiert werden, wobei dies neben den experimentellen Unsicher-

⁴⁴Für die numerische Abschätzung wurden die in diesem Kapitel konsequent verwendeten Werte für die Parameter eingesetzt, die nach (5.129) definiert sind.

⁴⁵Die experimentelle Situation für die longitudinale polarisierte Strukturfunktion ist in Kap. 2.14.2 zusammengefaßt.

heiten durch den systematischen Fehler des unberücksichtigt gebliebenen Twist-4-Anteils (5.139) in der Messung von $a_{A,2}^{(u-d)}$ verfälscht wird:

$$\begin{aligned}
d_A^{(u-d), \text{Exp}} &= 3 \int_0^1 dx x^2 g_2^{NS}(x, Q^2) + 2 \int_0^1 dx x^2 g_1^{NS}(x, Q^2) \\
&\approx -a_{A,2}^{(u-d)} + d_A^{(u-d)} + a_{A,2}^{(u-d)} \pm 2 \int_0^1 dx x^2 g_1^{NS, \text{Tw-4}}(x, Q^2) \\
&\approx d_A^{(u-d)} \pm a_{A,2}^{(u-d)} \frac{0.11 \text{ GeV}^2}{Q^2} \\
&\approx d_A^{(u-d)} \left[1 \pm \frac{a_{A,2}^{(u-d)} 0.11 \text{ GeV}^2}{d_A^{(u-d)} Q^2} \right] .
\end{aligned} \tag{5.143}$$

Der Fehler in der Bestimmung von $a_{A,2}^{(u-d)}$ geht daher mit dem zusätzlichen Gewicht $a_{A,2}^{(u-d)}/d_A^{(u-d)}$ als Fehler in die experimentelle Bestimmung von $d_A^{(u-d)}$ ein, einem Verhältnis, das nach dem jetzigen Stand der Erkenntnis ungefähr von der Ordnung 10 ist. Bei einem Impulsübertrag von $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ entspricht dies beispielsweise einem Fehler für $d_A^{(u-d)}$ von gut 25% — einem Fehler der innerhalb der Fehlerbalken der jetzt verfügbaren Daten⁴⁶ liegt, jedoch bei genaueren Messungen durchaus nicht zu vernachlässigen sein wird.

Die bisherigen theoretischen Bestimmungen von $d_A^{(u-d)}$, die mit Hilfe von QCD-Summenregeln gemacht wurden⁴⁷, sind mit den ersten Daten von SLAC E143 nicht kompatibel.

⁴⁶Vgl. SLAC E143 1996; die Fehler werden hier mit über 100% angegeben.

⁴⁷Vgl. Balitsky, Braun, Kolesnichenko 1990; 1993; Stein et al. 1995. Es existiert eine Bag-Modell-Rechnung von Stratmann 1993, die die Daten gut beschreibt.

Kapitel 6

Über die longitudinale Strukturfunktion F_L

Die Untersuchung der höheren Twist-Korrekturen zur unpolarisierten longitudinalen Strukturfunktion F_L ist in mehrfacher Hinsicht interessant. Einerseits werden durch die Abschätzung der Twist-4-Beiträge zu F_L^{NS} gleichzeitig die Twist-4-Korrekturen zu dem R -Faktor abgeschätzt, der das Verhältnis von longitudinal und transversal polarisierten virtuellen ausgetauschten Photonen in der Lepton-Hadron-Streuung mißt. Für diese Korrekturen werden aufgrund der vorhandenen experimentellen Daten sehr große Werte erwartet¹, die für mittlere Impulsüberträge von $Q^2 = 5 \text{ GeV}^2$ von der gleichen Größenordnung wie die Target-Massen-Korrekturen und die wesentlich größer als die Störungskorrekturen sind.

Da der R -Faktor in allen wichtigen Wirkungsquerschnitten der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung erscheint, ist die Kenntnis der höheren Twist-Korrekturen zu demselben eine unerläßliche Notwendigkeit für nahezu jede Auswertung der Experimente. Als populäres Beispiel ist die Bestimmung der QCD-Kopplung a_s aus der Bjorken-Summenregel anzuführen. Die polarisierte Strukturfunktion wird über die Messung der Spin-Asymmetrie A_1 bestimmt, wobei der Zusammenhang durch (5.135) gegeben ist. Darin geht die Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$ ein, die zu kleinen Q^2 hin evolviert werden muß, wofür wiederum die genaue theoretische und experimentelle Kenntnis von $R(x, Q^2)$ mit seinen höheren Twist-Korrekturen wesentlich ist. Letztlich wird demnach die Genauigkeit, mit der a_s bestimmt wird, durch die Genauigkeit, mit der der R -Faktor bekannt ist, begrenzt.

¹Vgl. Whitlow et al. 1990; und Kap. 2.14.3.

Der genaue Zusammenhang des R -Faktors mit der longitudinalen Strukturfunktion ist (2.98):

$$\begin{aligned} R(x, Q^2) &\equiv \frac{\varepsilon_\mu^{L*} W^{\mu\nu}(p, q, s) \varepsilon_\nu^L}{\varepsilon_\mu^{T*} W^{\mu\nu}(p, q, s) \varepsilon_\nu^T} \\ &= \frac{F_2(x, Q^2)}{F_2(x, Q^2) - F_L(x, Q^2)} \left(1 + \frac{4x^2 m^2}{Q^2} \right) - 1 \quad , \end{aligned} \quad (6.1)$$

wobei diese Größe — wie auch die longitudinale Strukturfunktion selbst — wegen (2.100) im Bjorken-Limes verschwindet.

Die Tatsache, daß F_L wie R im Bjorken-Limes verschwinden, ist von besonderem Interesse. Der Twist-2-Beitrag zu anderen Strukturfunktionen in niedrigster Ordnung der QCD-Kopplung ist in der Regel der führende Term. Wenn dieser für die longitudinale Strukturfunktion wegfällt, erhält der führende Beitrag von höheren Twist-Korrekturen ein viel größeres relatives Gewicht, da er mit dem Twist-2-Term in erster Ordnung a_s zu vergleichen ist. Damit wird von vorneherein klar, daß man mit einer massiven Veränderung der Vorhersagen zu F_L durch die Einbeziehung von höheren Twist-Korrekturen rechnen muß — wie es ja auch von den Experimenten bereits suggeriert wird.

Schließlich eröffnet sich eine wesentliche technische Vereinfachung bei der Berechnung der Renormalon-Korrekturen zur longitudinalen Strukturfunktion. Einerseits fällt die gesamte Problematik der Restaurierung der Ward-Identitäten weg, da für die unpolarisierte Elektron-Nukleon-Streuung keine axial-vektoriellen Vertizes erscheinen. Andererseits bewirkt die Projektion des unpolarisierten Teils des hadronischen Tensors (2.96) auf F_L mit $p^\mu p^\nu$:

$$p^\mu p^\nu W_{\mu\nu}^{(eN)}(p, q) = \frac{p \cdot q}{4x^2} F_L(x, Q^2) \quad , \quad (6.2)$$

daß in der Feynman-Eichung lediglich ein einziger Graph zu berechnen bleibt.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst dieser relevante Graph bestimmt und regularisiert. Es folgt die Auswertung des Ergebnisses zur Determination der Störungskoeffizienten in der Näherung großer Flavorzahlen N_f für die ersten Momente von F_L und der Vergleich mit den bekannten Koeffizienten. Schließlich werden die IR-Renormalon-Pole untersucht und die daraus resultierende Unsicherheit der Störungsreihe zur Abschätzung der Twist-4-Korrekturen verwendet. Das Kapitel wird mit einer phänomenologischen Betrachtung abgeschlossen.

6.1 Berechnung der Vorwärtsstreuamplitude

6.1.1 Bestimmung des relevanten Graphen

Die 8 relevanten Feynman-Graphen sind bereits in Abb. 5.1 unabhängig von den Vertizes $\Gamma_{3,4}$ hergeleitet worden. Um diese auf den Fall der longitudinalen Strukturfunktion anzuwenden, sind zwei vektorielle Vertizes einzusetzen, d.h. $\Gamma_3 = \gamma^\mu$ und $\Gamma_4 = \gamma^\nu$. Alle Graphen, in denen eine äußere Quarklinie direkt in einen der beiden Vertizes mündet, verschwinden in der masselosen Theorie nach der Projektion mit $p^\mu p^\nu$ auf die longitudinale Strukturfunktion (6.2). Um dies einzusehen, betrachte man die Lorentzstruktur solcher Graphen:

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\mu \text{Operator}_\nu \} \quad \text{oder} \quad \text{Tr} \{ \not{p} \text{Operator}_\mu \gamma_\nu \} \quad . \quad (6.3)$$

Nach der Projektion erhalten diese Spuren die Form

$$\text{Tr} \{ \not{p} \not{p} p^\nu \text{Operator}_\nu \} \quad \text{bzw.} \quad \text{Tr} \{ \not{p} p^\mu \text{Operator}_\mu \not{p} \} \quad . \quad (6.4)$$

Beide Terme sind von der Ordnung p^2 und verschwinden daher im Fall masseloser Quarks. Daher verbleiben nur noch der Box-Graph (siehe Abb. 6.1) und sein Austauschgraph, die für einen Beitrag zu F_L^{NS} in Frage kommen. Den Austausch-

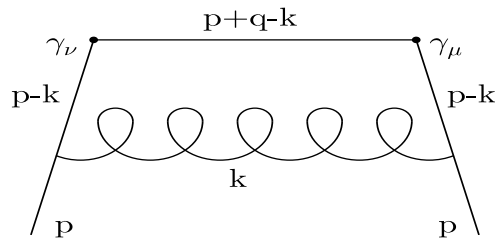


Abbildung 6.1: Der einzige Feynman-Graph, der einen Beitrag zur longitudinalen Strukturfunktion liefert.

graphen erhält man in diesem Fall durch die simultane Vertauschung von μ und ν sowie q und $-q$.

6.1.2 Analytische Regularisierung

Der analytische Ausdruck für den Borel-transformierten Box-Graphen in Abb. 6.1 lautet in der Feynman-Eichung²:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[B_{\mu\nu}^l \right] (s) = C_F \bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\rho u(p) \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s \\ i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{(p+q-k)^2 (p-k)^4 (k^2)^{1+s}} \quad . \quad (6.5)$$

Hier wurde der in der Feynman-Eichung relevante Teil des resummierten Gluon-Propagators (4.58) eingesetzt. Bei der Borel-Transformation wird der Kopplungsparameter a_s durch einen zusätzlichen Faktor $(4\pi)^2$ ersetzt. Eine Unterscheidung von 4 und $4-d$ -dimensionalen γ -Matrizen ist in diesem Ausdruck nicht notwendig, da hier keine γ_5 -Matrix nach d Dimensionen fortgesetzt werden muß. Der Index l deutet an, daß in diesem Ausdruck der Austauschgraph noch nicht addiert wurde, was erst am Ende der Regularisierung geschieht.

Man kann durch einfaches Abzählen der Potenzen des Loopimpulses k feststellen, daß dieser Graph nicht UV-divergent ist und daher auch keine Renormierung bei $d = 4$ bzw. $s = 0$ notwendig sein wird. Daher ist es auch nicht notwendig, eine simultane dimensionale und analytische Regularisierung durchzuführen. Vielmehr kann man sich von vorneherein auf die für die Renormalon-Unsicherheiten relevante analytische Regularisierung beschränken und bereits den Anfangsausdruck in 4 Dimensionen notieren. Außerdem ist es vorteilhaft, die Projektion auf F_L zu Beginn durchzuführen, da man dadurch die meisten Terme in der Lorentzstruktur eliminiert:

$$p^\mu p^\nu \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[B_{\mu\nu}^l \right] (s) = C_F \bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{p} \gamma_\lambda \gamma^\rho u(p) \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s I^{\alpha\beta\lambda} \quad , \quad (6.6)$$

wobei das Integral $I^{\alpha\beta\lambda}$ aus (C.202) bekannt ist. Es wird sofort klar, daß alle Terme in (C.202), die ein p^α , p^β oder p^λ enthalten, von der Ordnung p^2 sind und deshalb in der masselosen Theorie vernachlässigt werden können. Das gleiche trifft auf die Terme zu, die $g^{\beta\lambda}$ oder $g^{\alpha\beta}$ enthalten. Von der langen Liste der Lorentzstrukturen in (C.202) verbleiben nur noch zwei, die für die longitudinale Strukturfunktion wichtig sind: $g^{\alpha\lambda} q^\beta$ und $q^\alpha q^\beta q^\lambda$. Die Auswertung der ersten Lorentzstruktur ergibt in 4 Dimensionen (die äußeren Quarks werden nicht notiert):

$$g^{\alpha\lambda} q^\beta \gamma_\rho \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{p} \gamma_\lambda \gamma^\rho = \gamma_\rho \gamma_\alpha \not{p} \not{q} \not{p} \gamma_\alpha \gamma^\rho = 4 \not{p} \not{q} \not{p} = \mathcal{O}(\text{EM}) \quad , \quad (6.7)$$

²Im Wesentlichen entspricht die verwendete Notation der, die in dem Kapitel über die polarisierte Strukturfunktion g_1 verwendet wurde und die nach (5.8) erläutert ist.

wobei (B.49) verwendet wurde. Die Lorentzstruktur $g^{\alpha\lambda}q^\beta$ ist daher in der masselosen Theorie ebenfalls für F_L irrelevant. Für $q^\alpha q^\beta q^\lambda$ erhält man mit (B.44), (B.47) und (B.49):

$$\begin{aligned}
q^\alpha q^\beta q^\lambda \gamma_\rho \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{p} \gamma_\lambda \gamma^\rho &= \gamma_\rho \not{p} \not{p} \not{p} \not{p} \gamma^\rho \\
&= \gamma_\rho \left(4(p \cdot q)^2 \not{p} + 4Q^2 p \cdot q \not{p} - Q^2 \not{p} \not{p} \not{p} \right) \gamma^\rho \\
&= -8(p \cdot q)^2 \not{p} - 8Q^2 p \cdot q \not{p} + 2Q^2 \not{p} \not{p} \not{p} \\
&= -8(p \cdot q)^2 \not{p} + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Dies ist also der einzige Term, der zu F_L beiträgt. Der entsprechende Term aus (C.202) wird in (6.6) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[B_{\mu\nu}^l \right] (s) &= 8C_F \bar{u}(p) \not{p} u(p) \frac{(p \cdot q)^2}{Q^4} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \\
&\quad \frac{\Gamma(1-s) \Gamma(2+s+n) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(3-s) \Gamma(3+s+n) \Gamma(1+s) \Gamma(1+n)} \quad , \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Die beiden Spinoren werden als Spur geschrieben, die ausgeführt wird, so daß die Ersetzung $\bar{u}(p) \not{p} u(p) \rightarrow 2p \cdot q$ zu machen ist:

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[B_{\mu\nu}^l \right] (s) &= 8C_F \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \\
&\quad \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n)} \frac{1}{(1-s)(2-s)(2+s+n)} \quad . \quad (6.10)
\end{aligned}$$

Schließlich liefert die Addition des Austauschterms einen Faktor 2 für die ungeraden n , während die Terme mit geradem n verschwinden. Da der berechnete Box-Graph der einzige ist, der zu F_L beiträgt, kann man für $B_{\mu\nu}$ auch gleich die Bezeichnung der Vorwärtsstreuamplitude $T_{\mu\nu}$ schreiben. Betrachtet man dabei die Potenzen von ω in (2.148) und (6.10), ist die Umnummerierung $n \rightarrow n-1$ notwendig:

$$\begin{aligned}
p^\mu p^\nu \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[T_{\mu\nu} \right] (s) &= 16C_F \frac{(p \cdot q)^2}{Q^2} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \sum_{\substack{n=2 \\ \text{gerade}}}^{\infty} \omega^n \\
&\quad \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(1+s) \Gamma(n)} \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s+n)} \quad . \quad (6.11)
\end{aligned}$$

Wie zu Beginn der Diskussion dieses Graphen erwartet, tritt keine Divergenz bei $s=0$ — also keine anomale Dimension auf —, so daß sich eine Renormierung des Ergebnisses erübrigt. Hingegen treten zwei IR-Renormalon-Pole bei $s=1, 2$

und ein UV-Renormalon-Pol bei $s = -(1 + n)$ auf. Die ersteren werden entsprechend der Philosophie der Renormalon-Methode verwendet werden, um die Twist-4-Korrekturen zu F_L bzw. zu einigen Momenten derselben abzuschätzen. Auf der anderen Seite können die Störungskorrekturen zu den Momenten von F_L^{NS} in der Näherung großer Flavorzahlen angegeben und mit den exakten Ergebnissen verglichen werden.

6.1.3 Der Wilson-Koeffizient

Ausgangspunkt beider Untersuchungen ist der Wilson-Koeffizient, der sich durch Vergleich von (6.11) mit der Operator-Produkt-Entwicklung der Vorwärtsstreuamplitude (2.148) bestimmen läßt. Deren unpolarisierter Teil lautet in auf F_L projizierter Form:

$$p^{\{\mu} p^{\nu\}} T_{\mu\nu}(p, q, s) = \frac{2(p \cdot q)^2}{Q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_{L,n}(Q^2) a_{L,n} \omega^n \quad . \quad (6.12)$$

Die Summe über die Operatoren i entfällt auf dem Twist-2-Level. Der Vergleich liefert den gesuchten Wilson-Koeffizienten für $n = 2, 4, \dots$

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{L,n}(Q^2)](s) = 8C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(n)} \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s+n)} \quad , \quad (6.13)$$

der in den folgenden Abschnitten ausgewertet wird.³ Um die Pole zu isolieren wird eine Partialbruchzerlegung durchgeführt, die

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{L,n}(Q^2)](s) \\ &= 8C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(n)} \\ & \quad \left[\frac{1}{(2+n)(1-s)} - \frac{1}{(3+n)(2-s)} + \frac{1}{(2+n)(3+n)(1+s+n)} \right] \quad (6.14) \end{aligned}$$

ergibt.

³Vgl. Stein et al. 1996.

6.2 Die Störungskoeffizienten

6.2.1 Der Baumgraph

Wie bereits erwähnt verschwindet der Twist-2-Beitrag zur longitudinalen Strukturfunktion in nullter Ordnung der Störungstheorie. Dies ist leicht einzusehen, wenn man den analytischen Ausdruck des Baumgraphen mit $p^\mu p^\nu$ projiziert:

$$p^\mu p^\nu \text{Tree} \sim \bar{u}(p) \not{p} \frac{\not{p} + \not{q}}{q^2(1-\omega)} \not{p} u(p) = \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (6.15)$$

Für die Entwicklung des Wilson-Koeffizienten in der Form (4.54) verschwindet daher der erste Koeffizient $\tilde{B}_{L,n}^{(0)} = 0$, und es verbleibt:

$$C_{L,n}(Q^2) = \sum_{m=1}^{m_0-1} \tilde{B}_{L,n}^{(m)} a_s^m(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_{L,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2}{Q^2} \right)^k \quad (6.16)$$

6.2.2 Erste Ordnung Störungstheorie

Entsprechend (4.43) erhält man den Koeffizienten der ersten Ordnungs-Korrektur in a_s , indem man den Wilson-Koeffizienten (6.13) in der Borel-Ebene an der Stelle $s = 0$ auswertet. Da bei $s = 0$ keine Divergenzen auftreten, erhält man den Koeffizienten ohne weitere Renormierung:

$$\tilde{B}_{L,n}^{(1)} = \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (s) \Big|_{s=0} = \frac{4C_F}{1+n} \quad . \quad (6.17)$$

Dieses Resultat besteht ausschließlich aus dem führenden N_f -Term und stimmt deshalb mit dem exakten Koeffizienten überein.⁴

6.2.3 Zweite Ordnung Störungstheorie

Für die Bestimmung der Koeffizienten der zweiten Ordnung Störungskorrektur in der Näherung der NNA ist die erste Ableitung des Wilson-Koeffizienten (6.14) an der Stelle $s = 0$ zu berechnen. Es gilt mit (C.100)

$$\frac{d}{ds} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (s)$$

⁴Vgl. Yndurain 1993.

$$\begin{aligned}
 &= 8C_F \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d}{ds} \left\{ \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(1+s)} \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(2+n)(1-s)} - \frac{1}{(3+n)(2-s)} + \frac{1}{(2+n)(3+n)(1+s+n)} \right] \left. \right\} \\
 &= 8C_F \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(1+s)} \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \psi(s+n) - \psi(1+s) \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(2+n)(1-s)} - \frac{1}{(3+n)(2-s)} + \frac{1}{(2+n)(3+n)(1+s+n)} \right] \\
 &\quad + 8C_F \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \frac{\Gamma(s+n)}{\Gamma(1+s)} \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(2+n)(1-s)^2} - \frac{1}{(3+n)(2-s)^2} - \frac{1}{(2+n)(3+n)(1+s+n)^2} \right] .
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Damit erhält man für den Störungs-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{L,n}^{(2)} &= b_0 \frac{d}{ds} \mathcal{B}_{\frac{1}{s}} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (0) \\
 &= 8b_0 C_F \left\{ \left[\ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \psi(n) - \psi(1) \right] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{(2+n)} - \frac{1}{2(3+n)} + \frac{1}{(1+n)(2+n)(3+n)} \right] \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(2+n)} - \frac{1}{4(3+n)} - \frac{1}{(1+n)^2(2+n)(3+n)} \right\} .
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Dieses Ergebnis wird für einige Momente explizit angegeben und für das $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei $\mu^2 = Q^2$ ausgewertet:

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{L,2}^{(2)} &= \frac{4}{3} b_0 C_F \left\{ \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \frac{13}{6} \right\} \\
 &\rightarrow \frac{2024}{27} - \frac{368}{81} N_f \approx 74.96 - 4.543 N_f \quad .
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{L,4}^{(2)} &= \frac{4}{5} b_0 C_F \left\{ \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \frac{47}{15} \right\} \\
 &\rightarrow \frac{1408}{25} - \frac{256}{75} N_f \approx 56.32 - 3.413 N_f \quad .
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{L,6}^{(2)} &= \frac{4}{7} b_0 C_F \left\{ \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \frac{1529}{420} \right\} \\
 &\rightarrow \frac{32692}{735} - \frac{5944}{2205} N_f \approx 44.48 - 2.696 N_f \quad .
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{L,8}^{(2)} &= \frac{4}{9}b_0C_F \left\{ \ln \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \frac{5017}{1260} \right\} \\ &\rightarrow \frac{313148}{8505} - \frac{56936}{25515}N_f \approx 36.82 - 2.231N_f \quad .\end{aligned}\quad (6.23)$$

6.2.4 Dritte Ordnung Störungstheorie

Den Koeffizienten für die dritte Ordnung Störungs-Korrektur erhält man auf genau dieselbe Weise wie die beiden Koeffizienten niedrigerer Ordnung:

$$\tilde{B}_{L,n}^{(3)} = b_0^2 \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{B}_{\perp_{a_s}} [\tilde{C}_{L,n}(Q^2)](0) \quad .\quad (6.24)$$

Die NNA-Näherung äußert sich im Quadrat der 1-Loop-Beta-Funktion, die nach einer binomischen Entwicklung die nichtführenden Terme in N_f approximiert:

$$b_0^2 = 121 - \frac{44}{3}N_f + \frac{4}{9}N_f^2 \quad .\quad (6.25)$$

Die Auswertung von (6.24) ist sehr langwierig und wurde daher dem Computer übergeben. Die NNA-genäherten Koeffizienten lauten im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei $\mu^2 = Q^2$ für die ersten 4 Momente von F_L^{NS} :

$$\tilde{B}_{L,2}^{(3)} \approx 3239. - 392.6N_f + 11.90N_f^2 \quad (6.26)$$

$$\tilde{B}_{L,4}^{(3)} \approx 2965. - 359.3N_f + 10.89N_f^2 \quad (6.27)$$

$$\tilde{B}_{L,6}^{(3)} \approx 2579. - 312.6N_f + 9.472N_f^2 \quad (6.28)$$

$$\tilde{B}_{L,8}^{(3)} \approx 2270. - 275.1N_f + 8.337N_f^2 \quad .\quad (6.29)$$

6.2.5 Vergleich von exakten und NNA-Koeffizienten

Man erkennt an den in den vorangegangenen Abschnitten hergeleiteten Störungskoeffizienten, wie gewagt die NNA-Näherung mit zunehmender Ordnung in a_s ist. Denn setzt man einen vernünftigen Wert für die Flavorzahl an ($N_f = 3, 4$), so ist der führende N_f -Term nicht nur nicht dominant, sondern er ist sogar gegenüber dem konstanten Wert in zweiter Ordnung a_s um einen Faktor 4 und in der dritten Ordnung a_s um mehr als eine Größenordnung unterdrückt. Um die tatsächliche Qualität der NNA-Koeffizienten zu testen, werden sie mit den bis zur dritten Ordnung in a_s im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei $\mu^2 = Q^2$ exakt berechneten Koeffizienten verglichen⁵,

⁵Vgl. Larin, Ritbergen, Vermaseren 1994.

die durch einen Index „ex“ gekennzeichnet werden. Unter Vernachlässigung der nicht führenden Twist-Anteile gilt für die ersten Momente von F_L^{NS} :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{L,2} &= a_s \cdot 1.778 + a_s^2(74.96 - 4.543N_f) + a_s^3(3239. - 392.6N_f + 11.9N_f^2) \\ \tilde{C}_{L,2}^{\text{ex}} &= a_s \cdot 1.778 + a_s^2(56.76 - 4.543N_f) + a_s^3\left(2545. - 421.7N_f + 11.9N_f^2\right. \\ &\quad \left. - 23.21 \sum_{f=1}^{N_f} q_f\right)\end{aligned}\quad (6.30)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{L,4} &= a_s \cdot 1.067 + a_s^2(56.32 - 3.413N_f) + a_s^3(2965. - 359.3N_f + 10.89N_f^2) \\ \tilde{C}_{L,4}^{\text{ex}} &= a_s \cdot 1.067 + a_s^2(47.99 - 3.413N_f) + a_s^3\left(2524. - 383.1N_f + 10.89N_f^2\right. \\ &\quad \left. - 15.18 \sum_{f=1}^{N_f} q_f\right)\end{aligned}\quad (6.31)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{L,6} &= a_s \cdot 0.7619 + a_s^2(44.48 - 2.696N_f) + a_s^3(2579. - 312.6N_f + 9.472N_f^2) \\ \tilde{C}_{L,6}^{\text{ex}} &= a_s \cdot 0.7619 + a_s^2(41.00 - 2.696N_f) + a_s^3\left(2368. - 340.1N_f + 9.472N_f^2\right. \\ &\quad \left. - 11.12 \sum_{f=1}^{N_f} q_f\right)\end{aligned}\quad (6.32)$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{L,8} &= a_s \cdot 0.5926 + a_s^2(36.82 - 2.231N_f) + a_s^3(2270. - 275.1N_f + 8.337N_f^2) \\ \tilde{C}_{L,8}^{\text{ex}} &= a_s \cdot 0.5926 + a_s^2(35.88 - 2.231N_f) + a_s^3\left(2215. - 305.5N_f + 8.337N_f^2\right. \\ &\quad \left. - 8.74 \sum_{f=1}^{N_f} q_f\right) .\end{aligned}\quad (6.33)$$

In der dritten Ordnung a_s treten in der exakten Berechnung Summen über die Flavor-Ladungen auf, die durch die Näherung für große N_f bzw. durch NNA nicht berücksichtigt werden. Die Koeffizienten der führenden N_f -Terme sind in der NNA-Näherung und in der exakten Rechnung identisch, wie es durch den Ansatz bedingt ist. In den nichtführenden N_f -Termen treten zwar Abweichungen auf, diese sind jedoch erstaunlich gering. Eine Auswertung der Koeffizienten für bestimmte Werte von N_f ergeben für das niedrigste Moment eine Abweichung von 50%, die bei höheren Momenten immer kleiner wird (siehe Tab. 6.1). Die Qualität der NNA-Koeffizienten hängt direkt mit der Bedeutung des Mehr-Gluonen-Austauschs zusammen, der im Limes großer N_f vernachlässigt wird. Deshalb erwartet man eine schlechte Übereinstimmung im Bereich kleiner Bjorken- x , wo die Bedeutung von Mehr-Gluonen-Austausch groß ist, während die Übereinstimmung für größere x besser werden sollte. Da höhere Momente auf den Bereich kleiner Bjorken- x immer weniger sensitiv sind, wird die Abnahme des Fehlers bei höheren Momenten

		Exakte Werte	NNA-Näherung
$n = 2$	$N_f = 3$	$43.13 a_s^2 + 1387. a_s^3$	$61.33 a_s^2 + 2168. a_s^3$
	$N_f = 4$	$38.58 a_s^2 + 1033. a_s^3$	$56.79 a_s^2 + 1859. a_s^3$
$n = 4$	$N_f = 3$	$37.75 a_s^2 + 1473. a_s^3$	$46.08 a_s^2 + 1985. a_s^3$
	$N_f = 4$	$34.34 a_s^2 + 1156. a_s^3$	$42.67 a_s^2 + 1701. a_s^3$
$n = 6$	$N_f = 3$	$32.91 a_s^2 + 1433. a_s^3$	$36.39 a_s^2 + 1726. a_s^3$
	$N_f = 4$	$30.21 a_s^2 + 1152. a_s^3$	$33.70 a_s^2 + 1480. a_s^3$
$n = 8$	$N_f = 3$	$29.18 a_s^2 + 1374. a_s^3$	$30.12 a_s^2 + 1519. a_s^3$
	$N_f = 4$	$26.95 a_s^2 + 1118. a_s^3$	$27.89 a_s^2 + 1303. a_s^3$

Tabelle 6.1: Vergleich von NNA-Koeffizienten für F_L^{NS} mit den exakten für $N_f = 3, 4$. Die NNA-Koeffizienten sind auf dem 1-Loop-Level exakt und werden deshalb in der Tabelle nicht aufgeführt.

verständlich.

Diese Interpretation wird auch durch die entsprechende Tabelle⁶ für die Momente der Strukturfunktion F_2^{NS} bestätigt (siehe Tab. 6.2). Allerdings muß man feststellen, daß die NNA-Näherung insgesamt bereits in zweiter Ordnung in a_s sehr viel schlechtere Ergebnisse liefert als im Fall der longitudinalen Strukturfunktion. Zieht man noch die Ergebnisse für die polarisierte Strukturfunktion g_1^{NS} aus (5.100) gegenüber (5.101) hinzu, hängt die Qualität der NNA-Näherung offensichtlich stark von der betrachteten Strukturfunktion ab, ohne daß sich eine systematische Begründung dafür angeben ließe.

6.3 Die Twist-4-Abschätzung

Die möglicherweise große Bedeutung höherer Twist-Korrekturen zum R -Faktor bzw. zu der longitudinalen Strukturfunktion wurde im Rahmen der Diskussion der Experimente in Kap. 2.14.3 bereits erwähnt. Fits an die Daten ergeben im Bereich moderater Impulsüberträge eine deutliche Diskrepanz zu den rein störungstheoretisch berechneten Erwartungen und erfordern die Einbeziehung von $1/Q^2$ -Korrekturen. Diese Notwendigkeit wird als Hinweis für die Größe der zu erwartenden

⁶Die exakten Koeffizienten stammen aus Larin, Vermaseren 1993.

		Exakte Werte	NNA-Näherung
$n = 2$	$N_f = 3$	$1.694 a_s^2$	$72. a_s^2$
	$N_f = 4$	$-3.640 a_s^2$	$66.67 a_s^2$
$n = 4$	$N_f = 3$	$91.38 a_s^2$	$229.3 a_s^2$
	$N_f = 4$	$74.39 a_s^2$	$212.3 a_s^2$
$n = 6$	$N_f = 3$	$218.4 a_s^2$	$378.2 a_s^2$
	$N_f = 4$	$190.3 a_s^2$	$350.2 a_s^2$
$n = 8$	$N_f = 3$	$357.0 a_s^2$	$512. a_s^2$
	$N_f = 4$	$319.1 a_s^2$	$474.1 a_s^2$
$n = 10$	$N_f = 3$	$498.6 a_s^2$	$632.6 a_s^2$
	$N_f = 4$	$451.8 a_s^2$	$585.8 a_s^2$

Tabelle 6.2: Vergleich von NNA-Koeffizienten für F_2^{NS} mit den exakten für $N_f = 3, 4$. Die NNA-Koeffizienten sind auf dem 1-Loop-Level exakt und werden deshalb in der Tabelle nicht aufgeführt.

den höheren Twist-Korrekturen gewertet. In diesem Kapitel wird untersucht, ob die Renormalon-Methode eine Twist-4-Korrektur vorhersagt, die mit diesen Erwartungen kompatibel ist. Alternative Untersuchungen etwa auf dem Gitter oder mit QCD-Summenregeln stehen im Moment für diese höherdimensionalen Operatoren nicht zur Verfügung.

6.3.1 Operatorprodukt-Entwicklung

Beschränkt man sich auf Twist-2-Operatoren, sind die Operatoren für die Strukturfunktionen F_L^{NS} und F_2^{NS} identisch und durch (2.116) und (2.141) gegeben. Für die Momente von F_L^{NS} ist dies:

$$p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_n} \int_0^1 dx x^{n-2} F_L^{NS, \text{Tw}-2}(x, Q^2) = C_{L,n}(Q^2, a_s) \langle p | \bar{\psi} \gamma_{\{\mu_1} i D_{\mu_2} \cdots i D_{\mu_n\}} \psi | p \rangle . \quad (6.34)$$

Hier wurde durch die totale Symmetrisierung der Operatoren der Anteil maximalen Spins herausprojiziert. Für die Bestimmung der Twist-4-Operatoren sind entsprechend die Anteile mit nicht maximalem Spin — genauer die Anteile mit einem gegenüber dem maximalen Spin um 2 verminderten Spin — herauszufinden. Die

Spinzerlegung⁷ in Kap. 3.2 ergibt mit den Operatoren aus (A.88) für das niedrigste Moment von F_L^{NS} :

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu \int_0^1 dx F_L^{NS, Tw-4}(x, Q^2) &= \frac{1}{4} \frac{1}{Q^2} C_{L,2}^{(X)}(Q^2, a_s) \langle p | X^{\mu\nu} | p \rangle \\ &+ \frac{3}{2} \frac{1}{Q^2} C_{L,2}^{(Y)}(Q^2, a_s) \langle p | Y^{\mu\nu} | p \rangle \quad . \end{aligned} \quad (6.35)$$

Target-Massen-Korrekturen (2.95) sind zwar ebenfalls von der Ordnung $1/Q^2$, sind jedoch genuin Twist-2-Effekte und wurden deshalb in dieser Gleichung nicht notiert. An dieser Stelle wird noch einmal der Unterschied von Potenz- und höheren Twist-Korrekturen deutlich. Die Matrixelemente der obigen Twist-4-Operatoren sollen im folgenden abgeschätzt werden.

6.3.2 Renormalon-Pole

Die beiden führenden und einzigen IR-Renormalon-Pole können in (6.14) abgelesen werden:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (s) \Big|_{s \rightarrow 1} = 8C_F \frac{1}{1-s} \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{n}{2+n} \quad (6.36)$$

und

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (s) \Big|_{s \rightarrow 2} = -4C_F \frac{1}{2-s} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \frac{n(1+n)}{3+n} \quad . \quad (6.37)$$

Daraus erhält man die Renormalon-Unsicherheit in (4.54) durch die inverse Borel-Transformation (4.56). Die Unsicherheit durch das führende IR-Renormalon (6.36) ist:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{L,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) &= \frac{1}{\pi b_0} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \mathcal{B}_{1/a_s} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (s) \Big|_{s \rightarrow 1} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\ &= \frac{8C_F}{\pi b_0} \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{n}{2+n} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \frac{1}{1-s} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\ &= \pm \frac{8C_F}{b_0} \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{n}{2+n} e^{\frac{-1}{b_0 a_s}} \end{aligned} \quad (6.38)$$

und die des nächstführenden Renormalon-Pols (6.37):

$$\tilde{C}_{L,n}^{(2)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 = \frac{1}{\pi b_0} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \mathcal{B}_{1/a_s} \left[\tilde{C}_{L,n}(Q^2) \right] (s) \Big|_{s \rightarrow 2} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\}$$

⁷Diese wurde erstmals, aber fehlerhaft in Shuryak, Vainshtein 1982 durchgeführt.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{4C_F}{\pi b_0} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \frac{n(1+n)}{3+n} \operatorname{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \frac{1}{2-s} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\} \\
 &= \pm \frac{4C_F}{b_0} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \frac{n(1+n)}{3+n} e^{\frac{-2}{b_0 a_s}} \quad . \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Die Definition von Λ am Landau-Pol (4.25) liefert die endgültige Form der Koeffizienten der Renormalon-Potenzkorrekturen:

$$\tilde{C}_{L,n}^{(1)} = \pm \frac{8C_F}{b_0} \frac{n}{2+n} \quad (6.40)$$

und

$$\tilde{C}_{L,n}^{(2)} = \pm \frac{4C_F}{b_0} \frac{n(1+n)}{3+n} \quad . \quad (6.41)$$

Daraus können einerseits die Twist-4-Korrekturen zu den Momenten und andererseits die zu der longitudinalen Strukturfunktion im Impulsraum dem Betrag nach abgeschätzt werden, wie es im nächsten Abschnitt geschieht.

6.3.3 $F_L^{NS, \text{Tw-4}}$ im Impulsraum

Die bereits erwähnte Identität der Twist-2-Operatoren für die Strukturfunktionen F_L^{NS} und F_2^{NS} ermöglicht es, die Momente der beiden Strukturfunktionen zueinander in Beziehung zu setzen, wobei sich die reduzierten Matrixelemente kürzen:

$$M_{L,n}(Q^2) = \frac{\tilde{C}_{L,n}(Q^2)}{\tilde{C}_{2,n}(Q^2)} M_{2,n}(Q^2) \quad . \quad (6.42)$$

Beide Wilson-Koeffizienten haben die Form (4.54), wobei entsprechend (6.16) kein Beitrag vom Baumgraphen zu $\tilde{C}_{L,n}$ existiert. Für das Verhältnis der Wilson-Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned}
 M_{L,n}(Q^2) &= \frac{\sum_{m=1}^{m_0-1} \tilde{B}_{L,n}^{(m)} a_s^m(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_{L,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k}{\sum_{m=0}^{m_0-1} \tilde{B}_{2,n}^{(m)} a_s^m(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{C}_{2,n}^{(k)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^k} M_{2,n}(Q^2) \\
 &= \frac{\tilde{B}_{L,n}^{(1)} a_s(Q) + \mathcal{O}(a_s^2) + \tilde{C}_{L,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{m^4}{Q^4}\right)}{\tilde{B}_{2,n}^{(0)} + \mathcal{O}\left(a_s, \frac{m^2}{Q^2}\right)} M_{2,n}(Q^2) \\
 &= \left[\frac{\tilde{B}_{L,n}^{(1)}}{\tilde{B}_{2,n}^{(0)}} a_s(Q) + \frac{\tilde{C}_{L,n}^{(1)}}{\tilde{B}_{2,n}^{(0)}} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O}\left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \right] M_{2,n}(Q^2) \quad . \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

Die Entwicklung des Nenners führt bis auf den Beitrag vom Baumgraphen $\tilde{B}_{2,n}^{(0)} = 1$ zu Termen der Ordnung a_s^2 , a_s/Q^2 oder $1/Q^4$. Das Einsetzen der zuvor hergeleiteten Koeffizienten (6.17) und (6.40) liefert

$$M_{L,n}(Q^2) = 4C_F \left[\frac{a_s(Q)}{1+n} \pm \frac{2}{b_0} \frac{n}{2+n} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right) \right] M_{2,n}(Q^2) \quad . \quad (6.44)$$

Ebenso wie für die polarisierte Strukturfunktion g_1^{NS} kann die Vollständigkeit der Momente genutzt werden, um die Funktionen F_L^{NS} und F_2^{NS} selbst zueinander in Beziehung zu setzen. Dazu ist der Ausdruck in der eckigen Klammer in (6.43) als Moment einer Funktion im Impulsraum zu lesen und das daraus entstehende Produkt von Momenten mit (A.25) in ein Faltungsintegral umzuschreiben:

$$\begin{aligned} M_{L,n}(Q^2) &= \left\{ M[B_L^{(1)}(x)](Q^2) a_s(Q) + M[C_L^{(1)}(x)](Q^2) \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \right\} M_{2,n}(Q^2) \\ &= M \left[\int_x^1 \frac{dy}{y} F_2^{NS}(y, Q^2) \left(B_L^{(1)} \left(\frac{x}{y} \right) a_s(Q) + C_L^{(1)} \left(\frac{x}{y} \right) \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (6.45)$$

woraus zusammen mit den Target-Massen-Korrekturen (2.95)⁸, die für die konsistente Betrachtung aller $1/Q^2$ -Korrekturen berücksichtigt werden müssen, für die longitudinale Strukturfunktion im Impulsraum

$$\begin{aligned} F_L^{NS}(x, Q^2) &= a_s(Q) \int_x^1 \frac{dy}{y} F_2^{NS}(y, Q^2) B_L^{(1)} \left(\frac{x}{y} \right) + \mathcal{O} \left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \int_x^1 \frac{dy}{y} F_2^{NS}(y, Q^2) C_L^{(1)} \left(\frac{x}{y} \right) \\ &\quad + \frac{4x^3 m^2}{Q^2} \int_x^1 \frac{dy}{y^2} F_2^{NS}(y, Q^2) - \frac{4x^2 m^2}{Q^2} F_2^{NS}(x, Q^2) \end{aligned} \quad (6.46)$$

folgt. Die Koeffizienten im Impulsraum sind aus den Transformationsgleichungen (A.17) herzuleiten. Für den perturbativen Koeffizienten ist

$$B_L^{(1)}(x) = 4C_F x^2 \quad (6.47)$$

und für das führende IR-Renormalon

$$C_L^{(1)}(x) = \pm \frac{8C_F}{b_0} \left(\delta(x-1) - 2x^3 \right) \quad . \quad (6.48)$$

⁸Vgl. Snchez Guilln et al. 1991 für die integrale Darstellung der Target-Massen-Korrekturen, die Terme der Ordnung $1/Q^4$ vernachlässigt, die hier ohnehin nicht betrachtet werden. Man beachte den Druckfehler in Stein et al. 1996, wo eine Potenz von y im Nenner fehlt.

Für das zweite IR-Renormalon, das in die phänomenologische Interpretation nicht eingeht, gilt entsprechend

$$C_L^{(2)}(x) = \pm \frac{4C_F}{b_0} (6x^4 - \delta'(x-1)) \quad . \quad (6.49)$$

Damit erhält (6.46) die explizite Form:

$$\begin{aligned} F_L'^{NS}(x, Q^2) &= 4C_F a_s(Q) \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^2 F_2'^{NS}(y, Q^2) \\ &\pm \frac{8C_F}{b_0} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2}\right) \left[F_2'^{NS}(x, Q^2) - 2 \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^3 F_2'^{NS}(y, Q^2) \right] \\ &+ \frac{4x^3 m^2}{Q^2} \int_x^1 \frac{dy}{y^2} F_2'^{NS}(y, Q^2) + \mathcal{O}\left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \quad , \quad (6.50) \end{aligned}$$

wobei die modifizierte longitudinale Strukturfunktion $F_L'(x, Q^2)$ eingeführt wurde:

$$F_L'^{NS}(x, Q^2) \equiv F_L^{NS}(x, Q^2) + \frac{4x^2 m^2}{Q^2} F_2'^{NS}(x, Q^2) \quad . \quad (6.51)$$

Für die numerische Auswertung der Integrale sind die auftretenden Parameter festzulegen, die völlig analog zu denen für $g_1^N S$ gewählt werden: Im $\overline{\text{MS}}$ -Renormierungs-Schema ist $C = -5/3$, $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 0.25 \text{ MeV}$, $C_F = 4/3$, $b_0 = 11 - \frac{2}{3}N_f$, $N_f = 4$, $m = 0.938 \text{ GeV}$, die Kopplung a_s aus (4.27) und $Q^2 = 5 \text{ GeV}^2$. Der Impulsübertrag wird in einem mittleren Bereich gewählt, in dem höhere Twist-Korrekturen bereits spürbar sein sollten, die Störungsreihe allerdings ihre Gültigkeit noch nicht verloren hat. Für die Strukturfunktion $F_2'^{NS}(x, Q^2)$ wird die Parametrisierung der NMC-Gruppe⁹ verwendet, die Daten von SLAC, BCDMS und NMC für die Streuung an Protonen und an Deuteronen kombiniert. Die nonsinglet-Kombination wird durch $2(F_2^p - F_2^d)$ angenähert.

Um die longitudinale Strukturfunktion in Abhängigkeit von F_2 auszuwerten, muß entweder noch F_1 oder der R -Faktor bekannt sein. Mit dem letzten und (2.98) ist F_L' durch

$$F_L'(x, Q^2) = \frac{R(x, Q^2)}{1 + R(x, Q^2)} \left(1 + \frac{4x^2 m^2}{Q^2}\right) \quad (6.52)$$

gegeben. Für den R -Faktor, der von dem Target weitgehend unabhängig ist¹⁰, wird die Parametrisierung von Whitlow¹¹ benutzt. In Abb. 6.2 werden ausschließlich die

⁹Vgl. NMC Collaboration 1995.

¹⁰Vgl. SLAC E140X Collaboration 1996; NMC 1997b.

¹¹Vgl. Whitlow et al. 1990.

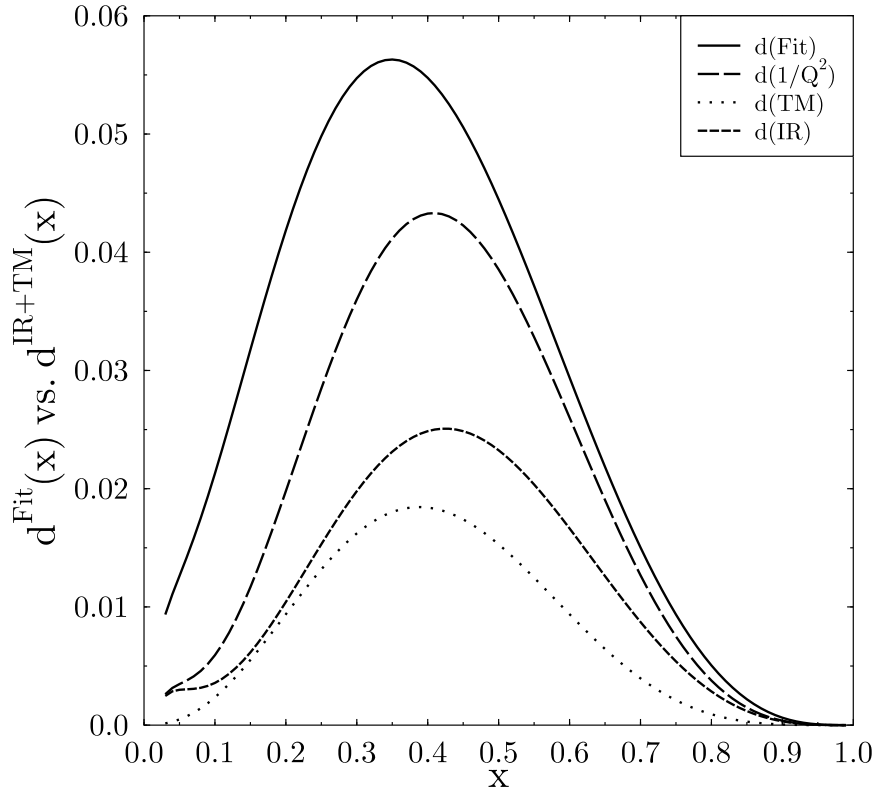


Abbildung 6.2: Die IR-Renormalon-Abschätzung (IR) der Twist-4-Korrektur zu F_L^{NS} , die Target-Massen-Korrekturen (TM) und die Summe aller $1/Q^2$ -Korrekturen wird mit der Erwartung durch den experimentellen Fit verglichen. ($\Lambda_{\overline{MS}} = 250$ MeV, $Q^2 = 5$ GeV² and $N_f = 4$).

mit $1/Q^2$ unterdrückten Beiträgen zu F_L^{NS} verglichen¹²:

$$F_L^{NS}(x, Q^2) = F_L^{NS, Tw-2}(x, Q^2) + \frac{d(x, Q^2)}{Q^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Q^4}\right) \quad . \quad (6.53)$$

Die Target-Massen-Korrekturen (gepunktete Linie) reichen nicht aus, um die durch den Fit an die experimentellen Daten (durchgezogene Linie) erwartete Größe der $1/Q^2$ -Korrekturen zu reproduzieren. Hingegen kommt man dem Fit durch die Addition der Abschätzung der Twist-4-Korrekturen durch die IR-Renormalon-Unsicherheit (kurz gestrichelte Linie, bzw. die Summe lang gestrichelt) wesentlich näher. Es deutet damit einiges darauf hin, daß die Renormalon-Methode in diesem Fall eine sehr vernünftige mit den Experimenten verträgliche Abschätzung des

¹²Vgl. Stein et al. 1996.

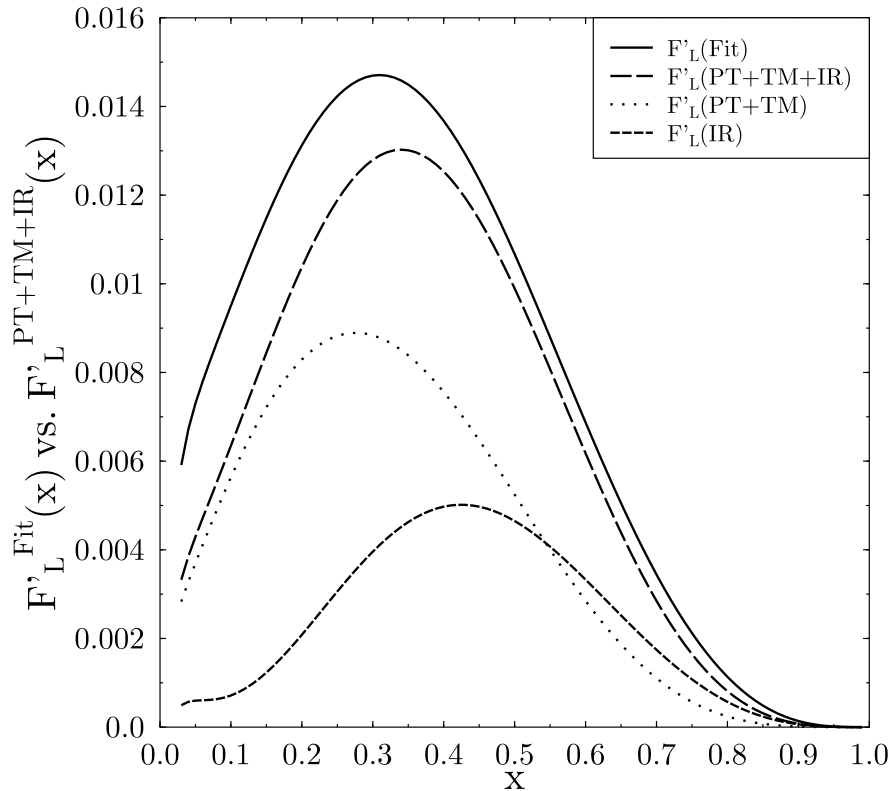


Abbildung 6.3: Die Bestandteile der Vorhersagen für die nonsinglet Strukturfunktion F_L^{NS} . Die Renormalon-Vorhersage (IR), die bisherige theoretische Twist-2 Vorhersage (PT+TM) bestehend aus perturbativen und Target-Massen-Korrekturen und die Summe aller Vorhersagen wird mit experimentellen Fit verglichen. $\Lambda_{\overline{MS}} = 250$ MeV, $Q^2 = 5$ GeV² and $N_f = 4$.

Betrags der Twist-4-Korrektur geliefert hat. Jedoch ist das Vorzeichen der Korrektur im Rahmen der Methode unbestimmt und wurde hier gerade so gewählt, daß die große Diskrepanz von Theorie und Experiment verkleinert wird. Außerdem ist die abgeschätzte Korrektur auch dem Betrage nach immer noch zu klein, um mit den Experimenten wirklich zur Deckung zu kommen. Man kann dies als Hinweis darauf werten, daß die Renormalon-Methode nur einen Bruchteil der tatsächlichen Twist-4-Korrekturen erfassen kann.¹³

Die vollständige Strukturfunktion F_L^{NS} ist in Abb.6.3 abgebildet und in ihre

¹³Siehe dazu die allgemeinen Überlegungen in Kap. 4.5.4.

Bestandteile zerlegt. Die gepunktete Linie zeigt die Summe von perturbativen¹⁴ und Target-Massen-Korrekturen — also die bisherige Vorhersage der Theorie im Rahmen des führenden Twist. In dieser Darstellung wird noch einmal deutlich, wie nahe an die Vorhersage durch die Addition der IR-Renormalon-Vorhersage an die Experimente herangebracht wird.

6.3.4 Twist-4-Beiträge zu Momenten von F_L^{NS}

Bei der Operatorprodukt-Entwicklung wurde gezeigt, daß unter Vernachlässigung von Störungskorrekturen das für F_2 und F_L gemeinsame Twist-2-Matrixelement $a_{2,n}^a$ für die longitudinale Strukturfunktionen keinen Beitrag liefert. Eine Verletzung der Callan-Gross-Relation entsteht daher einerseits durch die Berücksichtigung der Störungskorrekturen und andererseits durch höhere Twist-Korrekturen. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie groß diese beiden Anteile in den Momenten von F_L relativ zueinander sind.

Der Koeffizient $\tilde{B}_{L,n}^{(1)}$ für die erste Ordnung Störungskorrektur ist in (6.17) berechnet, und der Koeffizient der abgeschätzten Twist-4-Korrektur ist (6.40). Die Momente der nonsinglet Strukturfunktion hängen mit diesen Koeffizienten über die Beziehung

$$\int_0^1 dx x^{n-2} F_L^{NS}(x, Q^2) = a_s \tilde{B}_{L,n}^{(1)} a_{2,n-2}^{p-n} + \frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \tilde{C}_{L,n}^{(1)} a_{2,n-2}^{p-n} + \mathcal{O}\left(a_s^2, \frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \quad (6.54)$$

zusammen. Dabei ist das Twist-2-Matrixelement $a_{2,n-2}$ der Strukturfunktion F_2 bei $n-2$ auszuwerten, da die beiden Strukturfunktion F_2 und F_L mit einem relativen Faktor ω^2 in die Vorwärtstreuamplitude (2.148) eingehen.

Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema und bei $\Lambda = 200$ MeV und $N_f = 4$ folgt:

$$\int_0^1 dx x^{n-2} F_L^{NS}(x, Q^2) \approx 4C_F \left(a_s(Q^2) \frac{1}{1+n} \pm \frac{0.05 \text{ GeV}^2}{Q^2} \frac{n}{2+n} \right) a_{2,n-2}^{p-n} \quad (6.55)$$

für $n = 2, 4, \dots$. Die Kopplung an der Stelle Q^2 ist durch (4.27) gegeben. Die Größe der Korrekturen ist für die ersten Momente bei einem mittleren Impulsübertrag $Q^2 = 5 \text{ GeV}^2$ und $C_F = 4/3$:

$$\int_0^1 dx F_L^{NS}(x, Q^2) \approx 4C_F \left(\frac{1}{3} a_s(Q^2) \pm \frac{0.025 \text{ GeV}^2}{Q^2} \right) a_{2,0}^{p-n}$$

¹⁴Vgl. für eine perturbative Analyse der longitudinalen Strukturfunktion in zweiter Ordnung in a_s : Zijlstra, van Neerven 1992.

$$\begin{aligned}
& \approx (0.07 \pm 0.03) a_{2,0}^{p-n} \quad , \\
\int_0^1 dx x^2 F_L^{NS}(x, Q^2) & \approx 4C_F \left(\frac{1}{5} a_s(Q^2) \pm \frac{0.03 \text{ GeV}^2}{Q^2} \right) a_{2,2}^{p-n} \\
& \approx (0.04 \pm 0.04) a_{2,2}^{p-n} \quad , \\
\int_0^1 dx x^4 F_L^{NS}(x, Q^2) & \approx 4C_F \left(\frac{1}{7} a_s(Q^2) \pm \frac{0.04 \text{ GeV}^2}{Q^2} \frac{n}{2+n} \right) a_{2,4}^{p-n} \\
& \approx (0.03 \pm 0.04) a_{2,4}^{p-n} \quad . \tag{6.56}
\end{aligned}$$

Für höhere Momente wird die perturbative Korrektur wie $1/n$ stetig kleiner, während die Twist-4-Korrektur gegen einen festen Wert um die $0.05 a_{2,n}^{p-n}$ konvergiert. Die Twist-4-Korrektur erhält daher für höhere Momente eine immer größere relative Bedeutung, wobei bereits für das zweite Moment ($n = 4$) die perturbative Korrektur und die Twist-4-Korrektur von der gleichen Ordnung sind. Sowohl die Experimente als auch die Renormalon-Abschätzung lassen demnach höhere Twist-Korrekturen erwarten, die im mittleren Bereich der Impulsüberträge Q^2 gegenüber den perturbativen Korrekturen nicht zu vernachlässigen sind. Vielmehr sind beide Korrekturen für die ersten Momente von ähnlicher Größenordnung. Betrachtet man entweder höhere Momente — also größere Bjorken- x — oder kleinere Impulsüberträge $Q^2 < 5 \text{ GeV}^2$, werden die höheren Twist-Korrekturen sogar dominant.

6.4 Bloch-Nordsieck-Aufhebung der Renormalonen

Allgemeine Überlegungen, die auf das Bloch-Nordsieck-Theorem zurückgehen, ergeben, daß sich die Twist-2-Renormalonen mit den genuinen Twist-4-Renormalonen zu Null ergänzen, so daß die Störungsreihe Twist-übergreifend von den Renormalonen keine Unsicherheit erhält.¹⁵ Wie in Kap. 4.5.4 erläutert, ist gerade diese Eigenschaft der Renormalonen gleichzeitig fundamental für die Begründung der Methode und für die Grenzen derselben. In diesem Kapitel wird exemplarisch gezeigt, daß die Twist-4-Renormalonen tatsächlich die berechneten IR-Renormalonen kompensieren. Die dazu notwendige genuine Twist-4-Rechnung basiert auf der Zerlegung von höherdimensionalen Operatoren in ihre Spin-Anteile. Aus dieser Zerlegung können die Gewichte gewonnen werden, mit denen die Twist-4-Operatoren in die Momente von F_L^{NS} eingehen (siehe (3.98)).

¹⁵Vgl. Beneke, Braun, Zakharov 1994.

6.4.1 Twist-4-Renormalonen zu F_L^{NS}

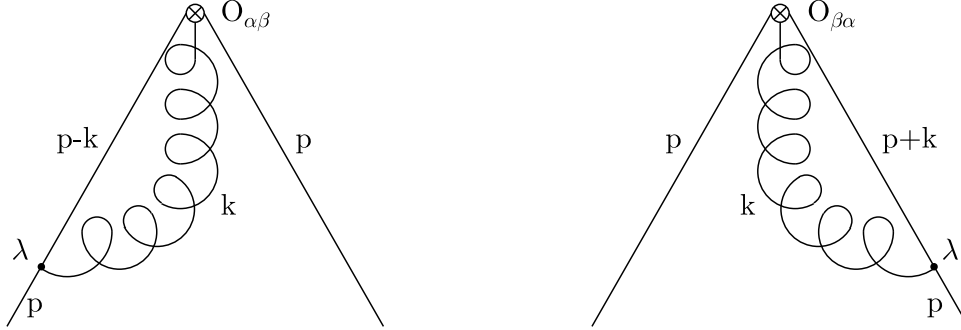


Abbildung 6.4: Zwei Graphen $G_{1,2}$ mit den Twist-4-Operatoren $X_{\alpha\beta}$ oder $Y_{\alpha\beta}$ am Vertex. Durch die Betrachtung der Twist-4-Operatoren im UV-Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ schrumpft der Quarkpropagator zu einem Punkt zusammen.

Die UV-Renormalonen der Twist-4-Operatoren $X_{\mu\nu}$ und $Y_{\mu\nu}$ in (A.88), die in das erste Moment der longitudinalen Strukturfunktion eingehen, erhält man als Pol bei $s = 1$ der Graphen in Abb. 6.4. Für den Vertex sind die beiden Twist-4-Operatoren einzusetzen. Diese Graphen werden mit dem UV-Limes $Q^2 \rightarrow \infty$ assoziiert, in dem die Wechselwirkungszeit gegen Null geht. Deshalb schrumpft die Quarklinie, die diesen Impuls enthält zu einem Punkt zusammen. Die Graphen der Abb. 6.4 entsprechen daher den Vertex-Korrektur-Graphen für endliche Impulsüberträge. Da hier nur ein Teil aller Graphen betrachtet wird, ist die Eichinvarianz nicht gewährleistet. Deshalb wird die Berechnung in der Landau-Eichung durchgeführt, in der der Gluon-Propagator explizit transversal ist.

Für den Operator $X_{\alpha\beta}$ am Vertex gilt:

$$\begin{aligned}
 X_{\alpha\beta} &= -2g\bar{\psi}(D^\eta G_{\eta\beta})\gamma_\alpha\psi = -2g\bar{\psi}D^\eta\partial_\eta B_\beta\gamma_\alpha\psi \\
 &= -2g\bar{\psi}\partial^\eta\partial_\eta B_\beta\gamma_\alpha\psi \\
 &\rightarrow 2g\bar{\psi}(k^2 B_\beta - k^\eta k_\beta B_\eta)\gamma_\alpha\psi \\
 &= 2g\bar{\psi}k^2 B_\beta\gamma_\alpha\psi
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

mit dem Farb-Magnetfeld B . Dieses wird später zusammen mit einem zweiten Feld B_λ vom Punktvertex λ zu einem Gluon-Propagator kontrahiert. Da dieser in der Landau-Eichung transversal ist, können die Terme mit einem k^η von vorneherein weggelassen werden. Allerdings ist dieser Graph von der Eichung unabhängig, da der wegen der Transversalität weggelassene Term mit dem zusätzlichen Term im

Propagator identisch ist. In der Feynman-Eichung könnte man diesen Term in (6.57) nicht weglassen, dafür träte er beim Einsetzen des Propagators nicht mehr auf. Die kovarianten Ableitungen sind mit den normalen Ableitungen identisch, da die dabei vernachlässigten Terme von höherer Ordnung in g sind.

Um den Twist-4-Operator durch den Twist-2-Operator (3.19) auszudrücken, wird der Operator mit einem beliebigen Lichkegelvektor n_μ kontrahiert, also der symmetrisch kontrahierte Operator

$$n^\alpha n^\beta X_{\alpha\beta} = 2g\bar{\psi}n^\beta(k^2 B_\beta - k^\eta k_\beta B_\eta) \not{n} \psi \quad (6.58)$$

betrachtet. Dies ist gewissermaßen die Feynmanregel für den Punktvertex mit einem höherdimensionalen Operator. In der Landau-Eichung lautet der vollständige analytische Ausdruck für den Graphen mit einem Borel-transformierten Gluon an der linken Quarklinie G_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{1,X}](s) &= 2C_F(\mu^2 e^{-C})^s i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \bar{\psi} \not{n} \\ &\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2(\not{p} - \not{k}) \not{n} - k_\beta n^\beta (\not{p} - \not{k}) \not{k}}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \psi \quad . \end{aligned} \quad (6.59)$$

Dieser Graph setzt sich aus den drei Integralen (C.132), (C.128) und (C.120) zusammen, die an dem Renormalon-Pol $s = 1$ ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{1,X}](s) &= 2C_F \mu^2 e^{-C} \bar{\psi} \not{n} \frac{1}{1-s} \left\{ \frac{1}{2} \not{p} \not{n} - \frac{1}{4} \not{p} \not{n} + \frac{1}{2} p \cdot n \right\} \psi \\ &= C_F \mu^2 e^{-C} \frac{1}{1-s} \bar{\psi} \not{n} p \cdot n \psi \quad , \end{aligned} \quad (6.60)$$

wobei $n^2 = 0$ augenutzt wurde.

Für den Graphen G_2 in Abb. 6.4, bei dem das Gluon an der rechten Quarklinie angreift, folgt entsprechend:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{2,X}](s) &= -2C_F(-\mu^2 e^{-C})^s i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \bar{\psi} \\ &\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2 \not{n} (\not{p} - \not{k}) - \not{k} (\not{p} - \not{k}) k_\beta n^\beta}{(p-k)^2 (-k^2)^{1+s}} \not{n} \psi \quad . \end{aligned} \quad (6.61)$$

Dieser Graph ist mit G_1 identisch, wie man sofort mit Hilfe der gleichen Integrale (C.132), (C.128) und (C.120) einsieht:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{2,X}](s) \Big|_{s=1} = \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{1,X}](s) \Big|_{s=1} \quad , \quad (6.62)$$

Der Vertex zu dem Operator $Y_{\alpha\beta}$ folgt auf zu (6.57) analoge Weise:

$$\begin{aligned}
Y_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}g\bar{\psi}\{\tilde{G}_{\alpha\eta}, P_\beta\}\gamma^\eta\gamma_5\psi \\
&= \frac{1}{4}g\bar{\psi}\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}(G^{\sigma\rho}P_\beta + P_\beta G^{\sigma\rho})\gamma^\eta\gamma_5\psi \\
&= \frac{1}{4}g\bar{\psi}\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}(\partial^\sigma B^\rho P_\beta - \partial^\rho B^\sigma P_\beta + P_\beta\partial^\sigma B^\rho - P_\beta\partial^\rho B^\sigma)\gamma^\eta\gamma_5\psi \\
&\rightarrow \frac{1}{4}ig\bar{\psi}\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}(k^\sigma B^\rho P_\beta - k^\rho B^\sigma P_\beta + P_\beta k^\sigma B^\rho - P_\beta k^\rho B^\sigma)\gamma^\eta\gamma_5\psi \\
&= \frac{1}{2}ig\bar{\psi}\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}(k^\sigma B^\rho P_\beta - k^\rho B^\sigma P_\beta)\gamma^\eta\gamma_5\psi \quad . \quad (6.63)
\end{aligned}$$

Die Projektion mit dem Lichtkegelvektor n^α ergibt:

$$n^\alpha n^\beta Y_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}ig\bar{\psi}\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha(k^\sigma B^\rho - k^\rho B^\sigma)p \cdot n\gamma^\eta\gamma_5\psi \quad . \quad (6.64)$$

Der erste Graph in Abb. 6.4 mit diesem Operator lautet mit $d_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ in der Landau-Eichung mit Borel-transformiertem Gluon-Propagator:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{s}}[G_{1,Y}](s) &= \frac{1}{2}C_F(\mu^2 e^{-C})^s i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \\
&\quad \times \bar{\psi}i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha(k^\sigma d^{\rho\lambda} - k^\rho d^{\sigma\lambda})p \cdot n\gamma^\eta\gamma_5 \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2(k^2)^{1+s}}\gamma_\lambda\psi \\
&\equiv -C_F(\mu^2 e^{-C})^s i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\bar{\psi}L(p, n, k)\psi}{(p-k)^2(k^2)^{1+s}} \quad . \quad (6.65)
\end{aligned}$$

Die komplizierte Lorentzstruktur $L(p, n, k)$ kann mit (B.14), (B.32) und (B.36) wesentlich vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
L(p, n, k) &= -\frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha(k^\sigma d^{\rho\lambda} - k^\rho d^{\sigma\lambda})p \cdot n\gamma^\eta\gamma_5(\not{p} - \not{k})\gamma_\lambda \\
&= -\frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha(k^\sigma g^{\rho\lambda} - k^\rho g^{\sigma\lambda})p \cdot n\gamma^\eta(\not{p} - \not{k})\gamma_\lambda\gamma_5 \\
&\quad + \frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha\left(k^\sigma \frac{k^\rho k^\lambda}{k^2} - k^\rho \frac{k^\sigma k^\lambda}{k^2}\right)p \cdot n\gamma^\eta(\not{p} - \not{k})\gamma_\lambda\gamma_5 \\
&= -\frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha(-k^\rho g^{\sigma\lambda} - k^\rho g^{\sigma\lambda})p \cdot n\gamma^\eta(\not{p} - \not{k})\gamma_\lambda\gamma_5 \\
&= i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}n^\alpha k^\rho p \cdot n\gamma^\eta(\not{p} - \not{k})\gamma^\sigma\gamma_5 \\
&= n^\alpha k^\rho (p-k)_\beta p \cdot n i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}\gamma^\eta\gamma^\beta\gamma^\sigma\gamma_5 \\
&= n^\alpha k^\rho (p-k)_\beta p \cdot n i\varepsilon_{\alpha\eta\sigma\rho}i\varepsilon^{\eta\beta\sigma\lambda}\gamma_5\gamma_\lambda\gamma_5 \\
&= -n^\alpha k^\rho (p-k)_\beta p \cdot n \varepsilon_{\eta\sigma\alpha\rho}\varepsilon^{\eta\beta\sigma\lambda}\gamma_\lambda \\
&= 2n^\alpha k^\rho (p-k)_\beta p \cdot n (g_\alpha^\beta g_\rho^\lambda - g_\alpha^\lambda g_\rho^\beta)\gamma_\lambda \\
&= 2n_\beta k^\rho (p-k)^\beta p \cdot n\gamma_\rho - 2g_{\rho\beta}k^\rho (p-k)^\beta p \cdot n \not{p} \quad . \quad (6.66)
\end{aligned}$$

Der Landau-Term fällt in der zweiten Zeile identisch weg, so daß auch dieser Graph von der Eichung unabhängig ist, da der verbleibende Teil mit dem Ausdruck identisch ist, den man auch in der Feynman-Eichung erhalten hätte. Setzt man die Lorentzstruktur in (6.65) ein, verbleibt ein Integral

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{1,Y}](s) &= -2C_F(\mu^2 e^{-C})^s \bar{\psi}(n_\beta p \cdot n \gamma_\rho - g_{\rho\beta} p \cdot n \not{n}) \psi \\ &\quad i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\rho (p-k)^\beta}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad , \end{aligned} \quad (6.67)$$

das aus (C.120) und (C.128) bekannt ist und an dem Pol $s = 1$ ausgewertet wird.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{1,Y}](s) \Big|_{s=1} &= -C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{1-s} \bar{\psi}(n_\beta p \cdot n \gamma_\rho - g_{\rho\beta} p \cdot n \not{n}) \psi \left(p^\rho p^\beta - \frac{1}{2} g^{\rho\beta} \right) \\ &= -\frac{3}{2} C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{1-s} \bar{\psi} p \cdot n \not{n} \psi \quad . \end{aligned} \quad (6.68)$$

Der zweite Graph in Abb.6.4 unterscheidet sich von $G_{1,Y}$ durch ein Gesamtvorzeichen und eine vertauschte Reihenfolge der drei γ -Matrizen. Diese können durch die Umbenennung der Summationsindizes wieder in die gleiche Reihenfolge gebracht werden, wobei wegen des ε -Tensors ein weiteres Vorzeichen entsteht. Insgesamt sind damit die beiden Graphen identisch:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{2,Y}](s) \Big|_{s=1} = \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[G_{1,Y}](s) \Big|_{s=1} \quad . \quad (6.69)$$

Damit sind alle UV-Renormalon-Beiträge der Twist-4-Operatoren auf den Twist-2-Operator $P^\alpha \gamma^\beta$ zurückgeführt worden.

6.4.2 Aufhebung der Renormalonen im ersten Moment

Durch eine Operator-Produkt-Entwicklung wurden die Gewichte berechnet, mit denen die Twist-4-Operatoren in das erste Moment der longitudinalen Strukturfunktion eingehen (siehe (3.98)):

$$\int_0^1 dx F_L(x, Q^2) = \sum_a \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{4} a_X^a + \frac{3}{2} a_Y^a \right) \quad (6.70)$$

Die $s = 1$ Renormalon-Beiträge dieser Operatoren wurden auf den Twist-2-Operator $a_{2,0}$ in (3.19) bzw. (3.24) zurückgeführt. Addiert man alle Renormalon-Beiträge (siehe (6.60), (6.62), (6.68) und (6.69)) mit den Gewichten aus (6.70) auf, folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx F_L(x, Q^2) &= \sum_a 2C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{4} (1) + \frac{3}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) \right) \\ &= \sum_a -4C_F \frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{1}{1-s} a_{2,0}^a \quad . \end{aligned} \quad (6.71)$$

Die UV-Renormalonen der Twist-4-Operatoren sind daher vom Betrag her identisch mit den Twist-2 IR-Renormalonen (6.36) für das Moment $n = 2$ und unterscheiden sich im Vorzeichen, so daß die Summe der Twist-2 und der Twist-4 Renormalonen bei $s = 1$ verschwindet. Dieses Resultat ist nicht zufällig, sondern Ausdruck eines allgemeinen Zusammenhangs der Twist-2 und Twist-4 Renormalonen.¹⁶ Einerseits vermittelt dies einen realen Zusammenhang der Twist-2 Renormalon-Unsicherheit der QCD-Störungsreihe mit höheren Twist-Korrekturen. Andererseits zeigt sich, daß diese Unsicherheit in einer vollständigen Betrachtung gar nicht mehr erscheinen würde. Hierin liegt die ganze Ambivalenz der Renormalon-Methode.

¹⁶Vgl. Beneke, Braun, Zakharov 1994.

Kapitel 7

Über die chiral ungerade Verteilungsfunktion h_1

In der total inklusiven tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung für masselose Quarks treten chiral ungerade Strukturfunktionen nicht auf, da an den Quark-Gluon- und den Quark-Photon-Vertizes die Chiralität erhalten bleibt. Hingegen ist ein Chiralitäts-Flip im Drell-Yan Prozeß durchaus denkbar, wo sich Quarks wohldefinierter Chiralität in ein virtuelles Eichboson vernichten, das wiederum in Quarks anderer Chiralität zerfallen kann.

In den folgenden Kapiteln werden zunächst die Kinematik und die Struktur des hadronischen Tensors erläutert, wobei ein besonderes Augenmerk auf die Struktur gelegt wird, die von ungerader Chiralität ist und daher für die feldtheoretische Definition von h_1 über Matrixelemente von bilokalen Operatoren verwendet wird. Die Eigenschaften von h_1 werden diskutiert und die Momente der Verteilungsfunktion definiert. Mit Hilfe einer Definition von h_1 über eine Vorwärtsstreuamplitude kann die Renormalon-Methode auf h_1 angewendet werden. Die Äquivalenz dieser Definition¹ zu der Operator-Definition wird unter Vernachlässigung höherer Twist-Korrekturen bewiesen. Diese Vorwärtsstreuamplitude wird dann zur Grundlage einer Renormalon-Rechnung gemacht, mit der neben einer Abschätzung der Twist-4-Korrekturen zu $h_1^{\text{NS, Tw-2}}$ die anomale Dimension zu h_1 und die Störungskorrekturen zu den ersten Momenten berechnet werden.

¹Vgl. Ioffe, Khodjamirian 1995.

7.1 Der Drell-Yan-Prozeß

Die Produktion von Leptonen in harten Stößen von Hadronen wird als Drell-Yan-Produktion bezeichnet.² Da die Leptonen-Paare nicht direkt aus der Wechselwirkung mit den Hadronen entstehen können, müssen diese aus der Produktion eines virtuellen Eichbosons stammen, das seinerseits in das Leptonen-Paar zerfällt. In der Sprache des Parton-Modells wird das virtuelle Eichboson in der Vernichtung eines Quark-Antiquark-Paares entstehen. Dabei ist es wesentlich, daß die Quantenzahlen erhalten werden. Das sich vernichtende Quark-Antiquark-Paar muß farbneutral sein, aber es ist nicht zwingend, daß sie den gleichen Flavor tragen. So kann sich ein jeweils rotes up und antidown zu einem farbneutralen W^+ -Boson der schwachen Wechselwirkung vernichten. Das ausgetauschte virtuelle Eichboson muß also keineswegs ausschließlich das elektrisch neutrale Photon sein, vielmehr sind auch alle Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung W^\pm und Z möglich.

Der Wirkungsquerschnitt des Drell-Yan-Prozesses ist inklusiv, da man ausschließlich das produzierte Leptonen-Paar mißt und über alle entstandenen Hadronen des Endzustands summiert. Von der gemessenen Energie des Leptonen-Paars kann man direkt auf die invariante Masse des Eichbosons zurückschließen. Die invariante Masse des virtuellen Photons ist $q^2 = (k + k')^2 \equiv Q^2 > 0$, und damit zeitartig — anders als im Fall des raumartigen Impulsübertrags $q^2 = -Q^2 < 0$ in der tief-inelastischen-Lepton-Nukleon-Streuung (DIS), wobei k und k' die Viererimpulse des entstehenden Leptonen-Paares sind. Ähnlich wie in der DIS kann man eine Skalenvariable $\tau = q^2/s$ definieren, die durch das Verhältnis von invarianter Masse und Schwerpunktsenergie des Hadronenstoßes definiert ist.

7.1.1 Faktorisierung

Ganz analog zur DIS (2.71) kann man ein Faktorisierungstheorem beweisen, das allerdings im Drell-Yan-Prozeß etwas komplizierter ausfällt, da zwei Partonen an dem Streuprozess beteiligt sind. Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Lepton-Paars in einem Stoß der Hadronen A und B mittels eines virtuellen Photons γ setzt sich aus den Verteilungsfunktionen $f_{a/A}(\xi_a)$ und $f_{b/B}(\xi_b)$ der beiden sich vernichtenden Partonen und einem harten Streuquerschnitt der beiden beteiligten

²Vgl. Drell, Yan 1970; 1971.

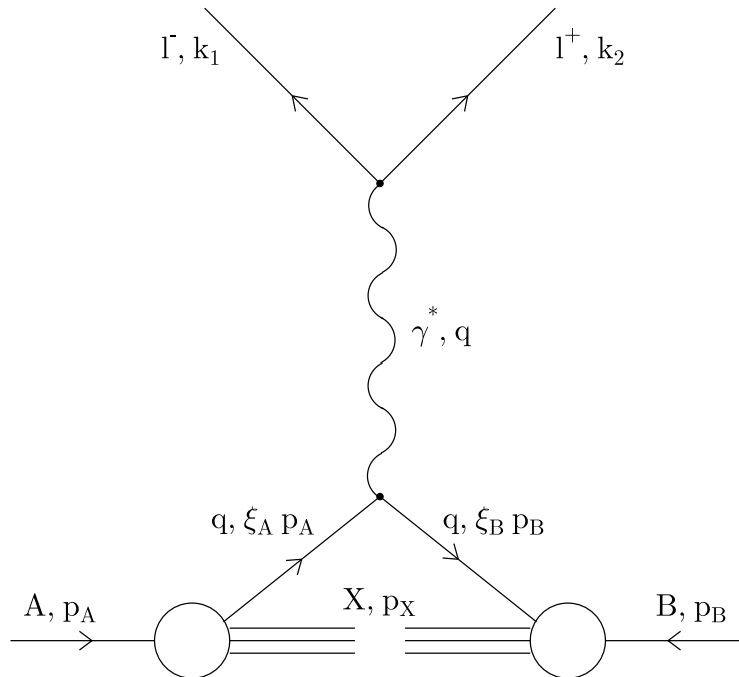


Abbildung 7.1: Der Drell-Yan-Prozess: Bei einem Hadron-Hadron-Stoß vernichtet sich ein Quark-Antiquark-Paar zu einem virtuellen Photon, das in ein Lepton-Antilepton-Paar zerfällt. Dieses Bild veranschaulicht die Born-Näherung für die Lepton-Paar-Erzeugung.

Partonen zusammen³:

$$\frac{d\sigma_{AB,\gamma}(p_A, p_B, q)}{dQ^2} = \sum_{a,b} \delta_{b\bar{a}} \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_b f_{a/A}(\xi_a) \frac{d\sigma_{ab,\gamma}(\xi_a p_A, \xi_b p_B, q)}{dQ^2} f_{b/B}(\xi_b) \quad . \quad (7.1)$$

Eine fundamentale Annahme in der Betrachtung des Drell-Yan-Prozesses ist die Universalität der Verteilungsfunktionen für die Quarks in Hadronen, also die Identität der Verteilungsfunktionen mit denen aus der DIS.

³Vgl. Collins, Soper, Stermann 1985; 1988; 1989.

7.1.2 Born-Näherung

Der harte partonische Streuquerschnitt kann in der Born-Näherung berechnet werden⁴:

$$\frac{d\sigma_{ab,\gamma}(\xi_a p_A, \xi_b p_B, q)}{dQ^2} \delta_{b\bar{a}} = \frac{4\pi\alpha_s^2 Q_a^2}{3N_C q^2} \delta(Q^2 - (\xi_a p_a + \xi_{\bar{a}} p_{\bar{a}})^2) \quad (7.2)$$

Die Struktur dieses Resultats ist im Wesentlichen aus Abb.7.1 abzulesen. Der zusätzliche Faktor $1/N_C$ erklärt sich durch die Mittelung über die möglichen Farbkombinationen des Quark-Antiquark-Paars: Quark und Antiquark können jeweils N_C Farben haben, so daß N_C^2 -Kombinationen entstehen. Da jedoch für die Vernichtung in ein Photon nur farbneutrale Kombinationen zugelassen sind, bleiben nur N_C der N_C^2 Kombinationen übrig. Die Summation über alle Farben liefert daher gerade den gesuchten Faktor $1/N_C$.

Einsetzen des partonischen Wirkungsquerschnitts in den hadronischen ergibt zusammen mit der Skalenvariablen $\tau = Q^2/s$:

$$\frac{d\sigma_{AB,\gamma}(p_A, p_B, q)}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{3N_C q^2 s} \sum_a Q_a^2 \int_0^1 d\xi_a \int_0^1 d\xi_{\bar{a}} f_{a/A}(\xi_a) \delta(\tau - \xi_a \xi_{\bar{a}}) f_{\bar{a}/B}(\xi_{\bar{a}}) \quad (7.3)$$

Bereits frühe Hadron-Hadron-Stoß-Experimente haben das Skalenverhalten und damit die Universalität des Parton-Modells in der Hochenergiephysik mit guter Genauigkeit nachweisen können.⁵ Auch die neueren Experimente der E605-Collaboration am Fermilab bestätigen das Skalenverhalten bei wesentlich höheren Stoß-Energien mit einer eindrucksvollen Präzision.⁶

7.1.3 Der hadronische Tensor

Der allgemeine Ausdruck des totalen Wirkungsquerschnitts für die Lepton-Paar-Erzeugung in einem harten Stoß von Hadronen ist entsprechend (2.24):

$$\sigma_{\text{DY}} = \frac{1}{2\sqrt{s(s-4m^2)}} \sum_X \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{20}} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + p_X - p_A - p_B) |\langle k_1 \eta_1 k_2 \eta_2 X | T | p_A s_A p_B s_B \rangle|^2 \quad (7.4)$$

Da im Drell-Yan-Prozeß zwei auslaufende Leptonen $|k_1 \eta_1\rangle$ und $|k_2 \eta_2\rangle$ existieren, entstehen hier zwei Impulsintegrationen. Die Energie-Impuls-Erhaltung wird durch

⁴Vgl. Sterman 1994.

⁵Vgl. BFS-Collaboration, Yoh et al. 1978 am Fermilab; CERN ISR, Breakstone et al. 1984.

⁶Vgl. E605 Fermilab, Brown et al. 1989; E710, Amos et al. 1990.

die Distribution garantiert; s ist die Schwerpunktsenergie des hadronischen Stoßes; $\sqrt{s(s-4m^2)}$ der inverse Flußfaktor mit der m Masse der Hadronen. Wird die Polarisation der Leptonen nicht betrachtet, erhält man eine zusätzliche Mittelung $\frac{1}{4} \sum_{\eta_1, \eta_2}$. Das Übergangsmatrixelement kann ähnlich wie in der DIS in einen hadronischen und einen leptonischen Teil zerlegt werden, da das Leptonen-Paar allein durch das virtuelle Photon produziert wird. Es ist:

$$\langle k_1 \eta_1 k_2 \eta_2 X | T | p_A s_A p_B s_B \rangle = \bar{u}_{\eta_2}(k_2) \gamma^\rho u_{\eta_1}(k_1) \frac{e^2}{Q^2} \langle X | j_\rho(0) | p_A s_A p_B s_B \rangle \quad , \quad (7.5)$$

wobei j_ρ der elektromagnetische Strom ist. Das Einsetzen des Übergangsmatrixelements in den totalen Wirkungsquerschnitt zeigt, daß der leptonische Teil der Drell-Yan-Produktion mit dem der DIS (2.28) identisch ist. Lediglich der hadronische Tensor ist zu modifizieren:

$$\sigma_{\text{DY}} = \alpha_s^2 \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^2 k_{10}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^2 k_{20}} \frac{L_{\mu\nu}(k_1, \eta_1, k_2, \eta_2) W^{\mu\nu}(p_A, s_A, p_B, s_B, Q)}{2Q^4 \sqrt{s(s-4m^2)}} \quad , \quad (7.6)$$

mit dem hadronischen Tensor

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu}(p_A, s_A, p_B, s_B, Q) &= \sum_X (2\pi)^4 \delta^4(Q + p_X - p_A - p_B) \\ &\quad \langle p_A s_A p_B s_B | j_\mu(0) | X \rangle \langle X | j_\nu(0) | p_A s_A p_B s_B \rangle \\ &= \int d^4 x e^{-iqx} \langle p_A s_A p_B s_B | j_\mu(x) j_\nu(0) | p_A s_A p_B s_B \rangle . \end{aligned} \quad (7.7)$$

Die letzte Identität folgt mit Hilfe der Integraldarstellung der δ -Distribution entsprechend zu (2.40). Der entscheidende Unterschied zum hadronischen Tensor in der DIS ist die Ersetzung des Ein-Nukleon-Zustands durch einen Zwei-Nukleonen-Zustand. Das Stromprodukt kann im Rahmen der Operatorprodukt-Entwicklung entsprechend der für Twist-2-Operatoren bewiesenen Faktorisierung in einen harten und einen weichen Teil zerlegt werden.⁷

7.1.4 Operator-Definition der Verteilungsfunktionen

Um eine Zerlegung des Stromprodukts in seiner Lorentzstrukturen vorzunehmen, ist es notwendig, genau auf die Zugehörigkeit der Quarkoperatoren zu den beiden Nukleonen des äußeren Zustands zu achten. Der Quarkoperator wirkt auf das Nukleon A , während der Antiquarkoperator auf das Nukleon B gleicher Sorte wirkt

⁷Vgl. Gupta, Mueller 1979.

Mit Farb- (lateinisch) und Lorentz-Indizes lautet der in μ, ν symmetrische Teil des Stromprodukts:

$$\begin{aligned} j_\mu(x)j_\nu(0) &= \bar{\psi}_i(x)(\mathbf{1}\gamma_\mu)_{il}\psi_l(x)\bar{\psi}_k(0)(\mathbf{1}\gamma_\nu)_{kj}\psi_j(0) \\ &= -\bar{\psi}_i(x)\bar{\psi}_k(0)\psi_l(x)\psi_j(0)(\mathbf{1}\gamma_\mu)_{il}(\mathbf{1}\gamma_\nu)_{kj} \quad . \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die Felder mit Index l, k gehören zu Nukleon B und die mit Index i, j zu Nukleon A . Eine Fierz-Zerlegung⁸ der Farbmatriizen ergibt einen diagonalen Teil und einen Term mit nichtdiagonalen Darstellungen der Generatoren der Farbgruppe. Da sich jedoch die beiden Quarks in ein farbneutrales Photon vernichten, geht nur der diagonale Term mit einem Faktor $1/N_C$ in die Betrachtung ein, also

$$(\mathbf{1})_{il}(\mathbf{1})_{kj} = \frac{1}{N_C}(\mathbf{1})_{kl}(\mathbf{1})_{ij} \quad . \quad (7.9)$$

Für die Dirac-Matrizen lautet der in μ, ν symmetrische Teil der Fierz-Zerlegung mit der Basis $\mathbf{1}, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5, i\sigma_{\mu\nu}\gamma_5$:

$$\begin{aligned} (\gamma_{\{\mu}i)(\gamma_{\nu\})_{kj} &= \frac{1}{2} \left[(\gamma_{\{\mu}kl)(\gamma_{\nu\})_{ij} + (\gamma_{\{\mu}\gamma_5)kl(\gamma_{\nu\})_{ij} + (\sigma_{\alpha\{\mu}i\gamma_5)kl(\sigma_{\nu\}^\alpha i\gamma_5)_{ij} \right] \\ &\quad + \frac{1}{4}g_{\mu\nu} \left[-(\gamma_\alpha)kl(\gamma^\alpha)_{ij} - (\gamma_\alpha\gamma_5)kl(\gamma^\alpha\gamma_5)_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\sigma_{\alpha\{\mu}i\gamma_5)kl(\sigma_{\nu\}^\alpha i\gamma_5)_{ij} + (1)_{kl}(1)_{ij} \right] \quad . \end{aligned} \quad (7.10)$$

Durch die Fierz-Transformation wurde das Zwei-Nukleon-Matrixelement in mehrere Produkte von Ein-Nukleon-Matrixelementen des Typus

$$\langle ps|\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(0)|ps\rangle \quad (7.11)$$

umgewandelt, wobei die für die Zustände $|ps\rangle$ jeweils das Nukleon A oder B zu denken ist und Γ für eine der Lorentzstrukturen in (7.10) steht. Man kann sich im folgenden daher auf die Betrachtung der aus der DIS bereits bekannten Ein-Nukleon-Matrixelemente beschränken.⁹

Diese Ein-Nukleon-Matrixelemente werden verwendet, um Verteilungsfunktionen in der Feldtheorie zu definieren. Jeder der obigen Lorentzstrukturen ist eine Kombination von Verteilungsfunktion zuzuordnen, die von unterschiedlichem Twist sein können. Betrachtet man nur führende Twist-Beiträge, verbleiben die

⁸Vgl. Nachtmann 1990, Anhang F.

⁹Vgl. Jaffe, Ji 1992.

drei Lorentzstrukturen $\Gamma = \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, i\sigma_{\mu\nu} \gamma_5$, denen jeweils eine Verteilungsfunktion zugeordnet wird¹⁰:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{2\pi} \langle ps | \bar{\psi}(0) \gamma_\mu \psi(\lambda n) | ps \rangle &= 2f_1(x) p_\mu + \text{HT} \quad , \\ \int \frac{d\lambda}{2\pi} \langle ps | \bar{\psi}(0) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(\lambda n) | ps \rangle &= 2g_1(x) p_\mu s \cdot n + \text{HT} \quad , \\ \int \frac{d\lambda}{2\pi} \langle ps | \bar{\psi}(0) \sigma_{\mu\nu} i\gamma_5 \psi(\lambda n) | ps \rangle &= 2h_1(x) (s_\mu p_\nu - s_\nu p_\mu) + \text{HT} \quad . \end{aligned} \quad (7.12)$$

Es wurde die Notation auf dem Lichtkegel verwendet mit dem Lichtkegel-Vektor n mit inverser Massendimension, $p \cdot n = 1$, $n^+ = 0$ und $n^2 = 0$. Die unpolarisierte transversale Verteilungsfunktion $f_1(x)$ und die polarisierte longitudinale Verteilungsfunktion $g_1(x)$ sind mit den entsprechenden Strukturfunktionen aus der DIS identisch. Neu ist die chiral-ungerade Verteilungsfunktion $h_1(x)$, die in der DIS nicht auftritt, da die Chiralität an Quark-Photon- und Quark-Gluon-Vertizes erhalten ist. Diese neue Verteilungsfunktion wird im folgenden untersucht.¹¹

7.2 Interpretation von h_1

7.2.1 Der Zusammenhang zum transversalen Spin

Eine chirale Transformation des Operators

$$\bar{\psi}(0) \sigma_{\mu\nu} i\gamma_5 \psi(\lambda n) \quad (7.13)$$

liefert in der masselosen Theorie eine ungerade Zahl von Vorzeichen: γ_5 antivertauscht mit γ_0 und vertauscht mit $\sigma_{\mu\nu}$ (B.21) und sich selbst. Deshalb ist h_1 in der DIS nicht meßbar, allerdings gilt diese Aussage nicht für massive Quarks. In diesem Fall erhält der Wirkungsquerschnitt einen Beitrag¹² von h_1 der Ordnung m^a/Q . Der Drell-Yan-Prozeß bietet dagegen eine Möglichkeit für einen Chiralitäts-Wechsel: Das Quadrat der Übergangsamplitude erlaubt es, daß rechtshändige Quarks sich zu einem Photon vernichten, das in linkshändige Quarks zerfällt (siehe Abb. 7.2).

¹⁰Vgl. Jaffe, Ji 1991; die Lorentzstruktur für h_1 wurde erstmals in Ralston, Soper 1979 diskutiert.

¹¹Die Definition von h_1 über die Lorentzstruktur $\sigma_{\mu\nu} i\gamma_5$ statt durch $\sigma_{\mu\nu}$ ist eine direkte Folge der Forderung nach Zeitumkehrinvarianz des hadronischen Tensors. Eine Zerlegung desselben in seine Lorentzstrukturen würde nur die erste Struktur zulassen. Vgl. Tangerman, Mulders 1995.

¹²Vgl. Jaffe 1996.

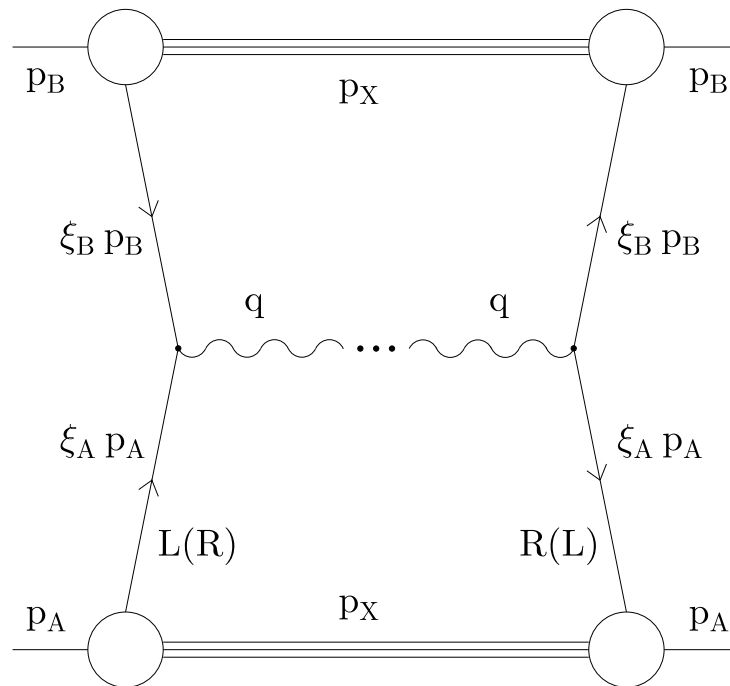


Abbildung 7.2: Das Quadrat der Amplitude für den Drell-Yan-Prozess. Ein Flip der Chiralität der Quarks ist hier prinzipiell möglich.

Dieser Prozeß ist von führendem Twist und daher nicht für große Q^2 unterdrückt, wie es in der DIS der Fall ist.

Eine partonische Interpretation wie sie für g_1 oder f_1 möglich ist, stellt sich für h_1 als unsinnig heraus. Eine Projektion auf die Basiszustände der Helizitätsbasis soll dies verdeutlichen.¹³ Wenn ϕ_{\pm} die Komponenten des Dirac-Spinors mit positiver (negativer) Helizität sind, folgt:

$$2h_1(x) = \int \frac{d\lambda}{4\pi} \left[\langle p + | \phi_+^\dagger(0) \phi_-(\lambda n) | p - \rangle + \langle p - | \phi_-^\dagger(0) \phi_+(\lambda n) | p + \rangle \right] \quad . \quad (7.14)$$

Die Helizitätsbasis bildet daher kein Eigensystem zu dem chiral ungeraden Operator und läßt eine partonische Interpretation von h_1 nicht zu. Hingegen sind die Operatoren γ_μ und $\gamma_\mu \gamma_5$, die die Verteilungsfunktionen f_1 und g_1 definieren, in dieser Basis diagonal.

¹³Vgl. Goldstein, Jaffe, Ji 1995.

Genau andersherum verhält es sich in der sogenannten Transversitäts-Basis.¹⁴ Die Projektionsoperatoren auf die Zustände dieser Basis sind:

$$Q_{\pm} \equiv \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5 \not{k}_{\perp}) \quad . \quad (7.15)$$

$\not{k}_{\perp} \gamma_5$ ist der transversale Teil des Pauli-Lubanski-Operators, der daher mit dem Energie-Impuls-Operator vertauscht und damit eine Erhaltungsgröße darstellt. In dieser Basis ist g_1 nicht mehr diagonal, dafür ist h_1 diagonal¹⁵, so daß die partonische Interpretation naheliegt: h_1 gibt die Wahrscheinlichkeit an, ein Quark in einem Eigenzustand des transversalen Teils des Pauli-Lubanski-Vektors in einem transversal polarisierten Nukleon zu finden minus dasselbe mit entgegengesetzter Polarisation. Dieser Zusammenhang suggeriert die Interpretation, h_1 könnte den Anteil der transversal polarisierten Quarks im transversal polarisierten Hadron messen, also eine Transversalimpulsverteilung der Quarks sein. Das ist jedoch falsch, da nicht der Pauli-Lubanski-Operator, sondern dessen Quadrat der Casimir-Operator der Poincar-Gruppe ist, der mit dem Spin identifiziert wird. Daraus resultiert die Bezeichnung von h_1 als Transversitäts-Verteilung im Gegensatz zur Transversalitäts-Verteilung, aus der klar wird, daß ein Zusammenhang zum transversalen Spin der Quarks im Hadron besteht, dieser aber nicht eindeutig hervortritt.

7.2.2 Die Ähnlichkeit von g_1 und h_1

Unterschlägt man diese Nuance, ergibt sich eine interessante Symmetrie von g_1 und h_1 : So wie g_1 die longitudinale Polarisierung der Quarks in einem longitudinal polarisierten Hadron mißt, mißt h_1 die transversale Polarisierung der Quarks in einem transversal polarisierten Hadron. Daraus kann man auf eine große Ähnlichkeit der beiden Verteilungsfunktionen schließen.

Tatsächlich sind beide Verteilungsfunktionen in nicht-relativistischen Quark-Modellen identisch. Die Differenz von g_1 und h_1 ist demnach in relativistischen Effekten zu suchen. Schon das relativistische Bag-Modell ergibt eine zwar nicht qualitative aber doch quantitative Unterscheidung.¹⁶

Die Forderung nach Positivität der Parton-Verteilungsfunktionen führt auf die-

¹⁴Dieser Begriff ist bewußt von Transversalität unterschieden und übernimmt den Unterschied von transversity und transversality aus dem Englischen. Die Transversitäts-Basis wird in Goldstein 1976; 1982; Goldstein, Moravcsik 1989 eingeführt.

¹⁵Vgl. Jaffe, Ji 1991; Jaffe 1996.

¹⁶Vgl. Jaffe, Ji 1992.

selben Ungleichungen für jede Quarksorte a :

$$\left|g_1^a(x, Q^2)\right| \leq f_1^a(x, Q^2) \quad , \quad \left|h_1^a(x, Q^2)\right| \leq f_1^a(x, Q^2) \quad . \quad (7.16)$$

Die erste Gleichung wird in der chiralen Basis klar, in der f_1 durch die Summe zweier Matrixelemente von Anzahloperatoren für rechts- bzw. links-händige Quarks gegeben ist, während g_1 durch die Differenz derselben Größen gegeben ist. Völlig analog ist das Verhältnis von f_1 und h_1 in der Transversitäts-Basis, in der f_1 die Summe zweier Matrixelemente von Anzahloperatoren für Quarks mit positiver (negativer) Transversität ist, und h_1 deren Differenz.

Unter Vernachlässigung von QCD-Störungskorrekturen gilt die Soffersche Ungleichung¹⁷

$$f_1^a(x, Q^2) + g_1^a(x, Q^2) \geq 2 \left|h_1^a(x, Q^2)\right| \quad , \quad (7.17)$$

die die Symmetrie von g_1 und h_1 relativiert.

7.2.3 Momente

Der Operator der Transversitäts-Verteilung erhält keine Beiträge von Gluon-Operatoren, da diese keinen Chiralitäts-Wechsel erlauben. Deshalb gibt es auch keine Mischung der Operatoren für die Singulet-Verteilung, wie es bei anderen Verteilungsfunktionen geschieht. Vielmehr ist die Transversitäts-Verteilung von vornherin eine nonsinglet Verteilung, so daß im folgenden auch ausschließlich nonsinglet Momente betrachtet werden müssen.

Unter Verwendung der Operatordefinition (7.12) können die Momente der chiral ungeraden nonsinglet Verteilungsfunktion konsistent definiert werden. Der bilokale Operator¹⁸

$$O^{\mu\nu}(\lambda, 0) = \bar{\psi}(0)\sigma^{\mu\nu}i\gamma_5\psi(\lambda n) \quad (7.18)$$

wird mit eichkovarianten Ableitungen in die lokale Operatoren

$$O_{\perp}^{\lambda\rho\mu_1\dots\mu_n} = \bar{\psi}\sigma^{\lambda\rho}i\gamma_5iD^{\mu_1}\dots iD^{\mu_n}\psi \quad (7.19)$$

($n = 0, 1, \dots$) entwickelt. Diese Operatoren sind als Twist-2-Operatoren zu lesen, d.h. sie sind spurlos und alle eingeklammerten Indizes sind untereinander symmetrisch gegen Austausch. Der Operator zu $n = 0$ ist von der Dimension 3 und hat

¹⁷Vgl. Soffer 1995; Goldstein, Jaffe, Ji 1995.

¹⁸Die Eichinvarianz des Operators wird durch ein Pfadgeordnetes Exponential gewährleistet, das hier nicht explizit notiert ist. Dieses Exponential generiert die eichkovarianten Ableitungen in der Entwicklung nach lokalen Operatoren.

zwei freie Lorentzindizes, die antisymmetrisch zu Spin 1 gekoppelt werden. Daraus ergibt sich ein Twist = Dimension - Spin von 2. Durch jede eichkovariante Ableitung wird die Dimension um eins erhöht, so daß auch der Operator-Spin um eins größer werden muß. Dazu muß der neue freie Index symmetrisch mit den bisherigen verbunden werden, was durch die geschweifte Klammer in (7.19) angezeigt wird.

Die reduzierten Matrixelemente dieser Operatoren haben durch die Symmetriebedingungen eine festgelegte Lorentzstruktur:

$$\langle ps | O_{\perp}^{\lambda\rho\mu_1\cdots\mu_n} | ps \rangle = 2a_{\perp,n}(p^{\rho}s^{\lambda} - p^{\lambda}s^{\rho})p^{\mu_1}\cdots p^{\mu_n} \quad . \quad (7.20)$$

Entwickelt man die bilokalen Operatoren in (7.12) in die lokalen Operatoren (7.19) und ersetzt diese durch ihre reduzierten Matrixelemente (7.20)

$$2h_1(x)(s_{\lambda}p_{\rho} - s_{\rho}p_{\lambda}) = 2i(s_{\lambda}p_{\rho} - s_{\rho}p_{\lambda}) \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda x} (p \cdot \lambda n)^m C_{\perp,m}(\lambda) a_{\perp,m} \quad (7.21)$$

und führt die Fourier-Transformierte der Entwicklungskoeffizienten ein, folgt für h_1 durch Vergleich der identischen Lorentzstrukturen¹⁹:

$$h_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_m \tilde{C}_{\perp,m}(Q^2) a_{\perp,m} \omega^{m+1} \quad . \quad (7.22)$$

Die Reihe für h_1 kann analog zu Gleichung (2.159) umgeformt werden, die den Ausgangspunkt der Definition der Momente für die Strukturfunktionen der DIS bildet. Anders als dort, wo ein spezifisches Verhalten des hadronischen Tensors gegenüber der Transformation $\omega \rightarrow -\omega$ für polarisierte und unpolarisierte Streuung unterschieden wurde, wird hier das Transformationsverhalten offengelassen. Das Contourintegral liefert auf der rechten Seite von (7.22) entsprechend zu (2.151):

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} \frac{d\omega}{\omega^{n+2}} h_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \tilde{C}_{\perp,n}(Q^2) a_{\perp,n} \quad (7.23)$$

und auf der linken Seite entsprechend (2.152):

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_2} \frac{d\omega}{\omega^{n+2}} h_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^{n+2}} [\text{Im} h_1(\omega) + (-)^n \text{Im} h_1(-\omega)] \quad , \quad (7.24)$$

wobei $h_1 = 0$ für $|x| \geq 1$ angenommen wurde. Die Rücksubstitution $x = 1/\omega$ ergibt mit (7.23) die gesuchte Definition der Momente $n = 0, 1, \dots$ der chiral ungeraden

¹⁹Diese Notation macht deutlich, daß die linke Seite vom hadronischen Tensor stammt, während die rechte Seite die entwickelte Form einer Vorwärtsstreuamplitude hat. Entsprechend hat auch die Gleichung die Form des optischen Theorems (2.53).

Verteilungsfunktion²⁰:

$$\int_0^1 dx x^n [h_1(x) + (-)^n h_1(-x)] = \tilde{C}_{\perp,n}(Q^2) a_{\perp,n} + \mathcal{O}(\text{HT}) \quad . \quad (7.25)$$

Die Verteilungsfunktion $\bar{h}_1 = -h_1(-x)$ wird als die Anitquark-Verteilung interpretiert. Da die Symmetrie-Eigenschaften der Matrixelemente der lokalen Operatoren bei der Herleitung verwendet wurden, ist (7.25) nur im führenden Twist korrekt und wird durch höhere Twist-Operatoren modifiziert.

7.2.4 Über den Einfluß der See-Quarks

Der Beitrag von See-Quarks zur chiral ungeraden Verteilungsfunktion h_1 verschwindet, wenn der erzeugende Operator ungerade unter Ladungskonjugation ist. Das Verhalten der lokalen Operatoren (7.19) unter Ladungskonjugation ist in (B.131) bestimmt²¹

$$\mathcal{C} O^{\lambda\rho\mu_1\cdots\mu_n} \mathcal{C}^{-1} = (-)^{n+1} O^{\lambda\rho\mu_1\cdots\mu_n} \quad (7.26)$$

Ungerade unter Ladungskonjugation sind daher nur die geraden Momente von h_1 , so daß auch nur diese keinen Beitrag von den See-Quarks erhalten. Hingegen werden die Momente mit ungeradem n durchaus von den See-Quarks beeinflusst.

7.2.5 Experimente

Aus der bisherigen Untersuchung der chiral ungeraden Twist-2 Verteilungsfunktion h_1 geht hervor, daß diese nicht in der total inklusiven tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung, prinzipiell aber bei der Lepton-Paar-Erzeugung im Drell-Yan-Prozeß beobachtet werden kann. Dazu müssen beide am Stoß beteiligten Hadronen transversal polarisiert sein. Dann kann man eine Transversitäts-Asymmetrie definieren²²:

$$A_{TT} \equiv \frac{\sin^2 \Theta \cos(2\phi)}{1 + \cos^2 \Theta} \frac{\sum_a q_a^2 h_1^a(x) h_1^{\bar{a}}(y)}{\sum_a q_a^2 f_1^a(x) f_1^{\bar{a}}(y)} \quad . \quad (7.27)$$

Die Winkel Θ und ϕ sind Polarwinkelkoordinaten eines Leptons im Schwerpunktsystem des erzeugten Leptonen-Paars. Der Wirkungsquerschnitt enthält daher einen Anteil proportional zu h_1 , der Leptonen-Paare parallel oder antiparallel zur

²⁰Diese Definition wurde erstmals in Jaffe, Ji 1991 für den führenden Term der Störungsreihe — also für $\tilde{C}_{\perp,n} = 1$ — angegeben.

²¹Siehe die Herleitung im Anhang.

²²Vgl. Ralston, Soper 1979.

Polarisationsrichtung der Hadronen bevorzugt. Es ist bislang nicht gelungen, diese Asymmetrie zu isolieren.

Ein Vorschlag für die Messung von h_1 baut auf der Kombination der chiral ungeraden Verteilungsfunktion mit einer chiral ungeraden Fragmentationsfunktion auf. Das Produkt dieser Funktionen ist dann wieder chiral gerade, so daß eine Beobachtung auch in der nicht total inklusiven tief-inelastischen Streuung möglich ist. Dazu muß das von dem virtuellen Photon getroffene Parton in ein Pion und weitere Hadronen fragmentieren. Das Quadrat der zugehörigen Amplitude enthält dann einen Anteil von der chiralen ungeraden Verteilungsfunktion h_1 kombiniert mit der chiral ungeraden Fragmentationsfunktion $e(z, Q^2)$. Allerdings ist dieser Anteil gegenüber anderen Beiträgen zum Wirkungsquerschnitt mit $1/Q$ unterdrückt, da die $e(z, Q^2)$ eine Twist-3 Fragmentationsfunktion ist.²³

7.3 Vorwärtsstreuamplitude

Es ist möglich, eine Vorwärtsstreuamplitude mit einem spezifischen Stromprodukt zu definieren, die in einer gewissen Näherung mit der Operatordefinition der chiral ungeraden Verteilungsfunktion (7.12) identisch ist. Dieser Zusammenhang wird im folgenden etabliert.

7.3.1 Äquivalente Definition für $h_1^{\text{NS, Tw-2}}$

Die durch das zeitgeordnete Produkt eines axialvektoriellen und eines skalaren Stroms definierte Vorwärtsstreuamplitude führt auf eine Lorentzstruktur, die der der chiral ungeraden Verteilungsfunktion entspricht²⁴:

$$T^\mu(p, q, s) = \frac{i}{2} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | T \{ j_A^\mu(x) j(0) + j(x) j_A^\mu(0) \} | ps \rangle \quad . \quad (7.28)$$

Unter der Voraussetzung der Erhaltung des Axialvektorstroms kann T_μ in seine Lorentzstrukturen zerlegt werden, die ausschließlich mit den Impulsen p_μ , q_μ und s_μ gebildet werden. Durch die Beschränkung auf spinabhängige Terme — nur diese können mit der Operatordefinition von h_1 zusammenhängen — verbleiben noch die

²³Weitere Details dieses Vorschlags finden sich in Jaffe 1996.

²⁴Vgl. Ioffe, Khodjamirian 1995; der dort fehlerhaft geführte Beweis wird hier korrigiert. Die Idee für diese Definition von h_1 geht auf Jaffe zurück.

Strukturen

$$T_\mu(p, q, s) = a_1 s_\mu + a_2 q_\mu \frac{q \cdot s}{p \cdot q} + a_3 p_\mu \frac{q \cdot s}{p \cdot q} + a_4 \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu q^\lambda s^\rho \frac{q \cdot s}{(p \cdot q)^2} \quad , \quad (7.29)$$

die mit den Koeffizienten $a_{1,\dots,4}(x, Q^2)$ kombiniert werden. Aus der Erhaltung des Axialvektorstroms folgt eine Bedingung für die Koeffizienten:

$$q^\mu T_\mu(p, q, s) = a_1 q \cdot s + a_2 q^2 \frac{q \cdot s}{p \cdot q} + a_3 q \cdot s = 0 \quad (7.30)$$

also

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2\omega} \quad . \quad (7.31)$$

Daraus resultiert die allgemeine Form

$$\begin{aligned} T_\mu(p, q, s) = & a_1(x, Q^2) \left[s_\mu + q_\mu \frac{q \cdot s}{q^2} \right] + a_3(x, Q^2) \left[p_\mu + q_\mu \frac{1}{2\omega} \right] \frac{q \cdot s}{p \cdot q} \\ & + a_4(x, Q^2) \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} p^\nu q^\lambda s^\rho \frac{q \cdot s}{(p \cdot q)^2} \end{aligned} \quad (7.32)$$

für die Vorwärtsstreuamplitude. Ioffe und Khodjamirian bemerken, daß die Elimination eines Koeffizienten nur unter der Maßgabe der Erhaltung des Axialvektorstroms gewährleistet ist, also lediglich für die Verwendung von nonsinglet-Strömen korrekt ist und bei singlet Strömen auf einen Fehler der Ordnung α_s führt.²⁵ Dieser Fehler der obigen Zerlegung ist jedoch ein Artefakt. Ebenso gut hätte man mit dem zeitgeordneten Stromprodukt eines vektoriellen und eines pseudoskalaren Stroms starten können:

$$T^\mu(p, q, s) = \frac{i}{2} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | T \{ j_V^\mu(x) j_5(0) + j_5(x) j_V^\mu(0) \} | ps \rangle \quad , \quad (7.33)$$

das in 4-Dimensionen zu (7.28) äquivalent ist. In diesem Fall wäre nicht die Erhaltung des Axialvektorstroms sondern des Vektorstroms zu fordern, um die Zerlegung (7.32) zu erhalten, so daß hier kein Fehler der Ordnung α_s auftritt — unabhängig davon, ob man singlet oder nonsinglet Ströme verwendet.

Im folgenden wird der Zusammenhang von $a_1(x, Q^2)$ zu h_1 etabliert. Dazu wird das zeitgeordnete Produkt in (7.28) nach Wick²⁶ entwickelt und nur die Terme mit zwei äußeren Quarkoperatoren beibehalten:

$$\begin{aligned} T \{ j_A^\mu(x) j(0) + j(x) j_A^\mu(0) \} = & : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 i S(x) \psi(0) : + : \bar{\psi}(0) i S(-x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) : \\ & + : \bar{\psi}(x) i S(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(0) : + : \bar{\psi}(0) \gamma_\mu \gamma_5 i S(-x) \psi(x) : , \end{aligned} \quad (7.34)$$

²⁵Vgl. Ioffe, Khodjamirian: die Diskussion von Gl. (3).

²⁶Vgl. Wick 1950.

mit dem Quark-Propagator $S(x) = i \not{\partial} \Delta(x)$ und der Pauli-Jordan-Funktion $\Delta(x)$, die wegen der Lichtkegeldominanz durch den auf dem Lichtkegel singulären Term in (A.45) ausgedrückt wird:

$$iS(x) = \frac{i}{2\pi^2} \frac{\not{x}}{(x^2 - i\varepsilon)^2} . \quad (7.35)$$

Im Hinblick auf das optische Theorem, das den Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude mit dem hadronischen Tensor in Beziehung setzt, wird auch hier der Imaginärteil von T_μ bzw. $a_1(x, Q^2)$ mit h_1 zusammenhängen. Dementsprechend wird im folgenden nur noch der Pol-Term, den man mit Hilfe der Dirac-Identität (C.16) isoliert, weiterbehandelt:

$$i\text{Im}\{S(x)\} = \frac{i \not{\partial}}{4\pi} \delta(x^2) = \frac{i \not{x}}{2\pi} \delta'(x^2) . \quad (7.36)$$

Die Propagatoren masseloser Quarks werden zusammen mit der Wick-Entwicklung (7.34) in den Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude (7.28) eingesetzt. Dabei treten 4 Terme mit je 2 γ -Matrizen und einer γ_5 -Matrix auf, die durch geeignete Rekombination durch 2 Kommutatoren (B.18) ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} \text{Im} T^\mu(p, q, s) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | : \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \not{x} \delta'(x^2) \psi(0) : | ps \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | : \bar{\psi}(0) \not{x} \delta'(x^2) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(x) : | ps \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | : \bar{\psi}(x) \not{x} \delta'(x^2) \gamma_\mu \gamma_5 \psi(0) : | ps \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | : \bar{\psi}(0) \gamma_\mu \gamma_5 \not{x} \delta'(x^2) \psi(x) : | ps \rangle \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | : \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} x^\nu i \gamma_5 \psi(0) : | ps \rangle \delta'(x^2) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int d^4x e^{iqx} \langle ps | : \bar{\psi}(0) \sigma_{\mu\nu} x^\nu i \gamma_5 \psi(x) : | ps \rangle \delta'(x^2) . \quad (7.37) \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck auf die Form von (7.28) zu bringen, ist es notwendig, Lichtkegelkoordinaten einzuführen. Mit $\tau = t - z$ und $2\lambda = t + z$ folgt $x^2 = 2\lambda\tau - x_\perp^2$. Für die Differentiale folgt: $d\tau = dt$, $dz = d\lambda$ und für die transversalen Koordinaten in polarer Form

$$dx dy = \frac{1}{2} d(x_\perp^2) d\phi = -\frac{1}{2} d(x^2) d\phi \Theta(2\lambda\tau - x^2) . \quad (7.38)$$

Damit wird das Volumenelement in den neuen Koordinaten

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{2\lambda\tau} d(x^2) \Theta(2\lambda\tau - x^2) . \quad (7.39)$$

Die Umformung des Integrals in Lichtkegelkoordinaten wird nur für den ersten Teil von (7.37) vorgeführt. Im Schwerpunktsystem (2.14) gilt für den Exponenten:

$$q \cdot x = \frac{1}{2}\tau(q_0 + E) + \lambda(q_0 - E) \quad , \quad (7.40)$$

woraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Im } T^\mu(p, q, s)|_1 &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{2\lambda\tau} d(x^2) e^{iqx} \\ &\quad \Theta(2\lambda\tau - x^2) \langle ps | \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} x^\nu i\gamma_5 \psi(0) | ps \rangle \delta'(x^2) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2}\tau(q_0 + E) + \lambda(q_0 - E) \right) \right\} \\ &\quad \delta(2\lambda\tau) \langle ps | \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} x^\nu i\gamma_5 \psi(0) | ps \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\lambda} e^{i\lambda(q_0 - E)} \langle ps | \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} x^\nu i\gamma_5 \psi(0) | ps \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda'}{2\lambda'} e^{i\lambda'\xi} \langle ps | \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} x^\nu i\gamma_5 \psi(0) | ps \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda\xi} \langle ps | \bar{\psi}(\lambda n) \sigma_{\mu\nu} n^\nu i\gamma_5 \psi(0) | ps \rangle \end{aligned} \quad (7.41)$$

mit der Substitution $\lambda' = \frac{2m\nu}{q_0 + E} \lambda$, der Lichtkegelvariable $x^\nu = \lambda n^\nu$ und der Bjorken-Variable im Schwerpunktsystem $\xi = \frac{Q^2}{2m\nu}$. Das Ergebnis für das zweite Integral in (7.37) unterscheidet sich durch die vertauschten Argumente der Quarkfelder und ein Gesamtvorzeichen. Durch die Substitution $\lambda \rightarrow -\lambda$ und eine Translation werden beide Terme in die gleiche Form gebracht:

$$\begin{aligned} \text{Im } T^\mu(p, q, s) &= -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-i\lambda\xi} \langle ps | \bar{\psi}(0) \sigma_{\mu\nu} n^\nu i\gamma_5 \psi(\lambda n) | ps \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda\xi} \langle ps | \bar{\psi}(0) \sigma_{\mu\nu} n^\nu i\gamma_5 \psi(\lambda n) | ps \rangle \quad . \end{aligned} \quad (7.42)$$

Die beiden Terme unterscheiden sich nur noch im Vorzeichen der Bjorken-Variable ξ , so daß sie als Term und Austauschterm betrachtet werden können.

Kombiniert man das Resultat (7.42) mit dem Imaginärteil der Zerlegung der Vorwärtsstreuamplitude (7.32) und vergleicht dies mit der mit dem Lichtkegelvektor n^ν kontrahierten Definition der chiral ungeraden Verteilungsfunktion (7.12), folgt:

$$\frac{1}{\pi} \text{Im } a_1(x) = h_1(x) - h_1(-x) \quad , \quad (7.43)$$

was der in diesem Abschnitt gesuchte Zusammenhang ist. Der Vergleich mit der Definition der Momente (7.25) zeigt, daß man durch die Betrachtung der vollen

Vorwärtsstreuamplitude lediglich über die Kombination der Verteilungsfunktion h_1 Aussagen machen kann, die den Momenten mit ungeradem n entsprechen. Wenn hingegen die Austauschgraphen unberücksichtigt bleiben, sind Aussagen über alle Momente möglich, ohne daß die Resultate für die ungeraden Momente dadurch verfälscht würden. Dann gilt:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} a_1(x) \Big|_{\text{OA}} = h_1(x) \quad , \quad (7.44)$$

wobei der Index OA die Unterschlagung der Austauschgraphen bezeichnet.

Es ist nach den Ergebnissen dieses Abschnitts möglich, die Vorwärtsstreuamplitude (7.28) zur Grundlage einer Twist-2-Berechnung der chiral ungeraden Verteilungsfunktion h_1^{NS} zu machen. In den folgenden Kapiteln werden die anomale Dimension, Störungskorrekturen zu den Momenten und eine Abschätzung höherer Twist-Korrekturen mit der IR-Renormalon-Methode hergeleitet.

7.4 Regularisierung der Graphen

In den folgenden Abschnitten werden entsprechend der Definition von h_1 über die Vorwärtsstreuamplitude (7.28) die relevanten Feynman-Graphen mit einem ausgetauschten effektiven Borel-transformierten Gluon bestimmt regularisiert. Wie im Fall der polarisierten Strukturfunktion g_1 ist davon auszugehen, daß die Feynman-Amplitude divergent ist, so daß eine Renormierung durchgeführt werden muß. Es genügt also nicht — wie im Fall der longitudinalen Strukturfunktion F_L eine analytische Regularisierung durchzuführen, aus deren Resultat sowohl die perturbativen Korrekturen als auch die IR-Renormalon-Abschätzung der Twist-4-Korrekturen rekonstruiert werden konnten, sondern die Regularisierung muß simultan dimensional und analytisch gemacht werden. Wegen der Fortsetzung der γ_5 -Matrix aus dem axialvektoriellen Strom in d -Dimensionen muß wie für g_1 eine Renormierung der Ward-Identität vorgenommen werden.²⁷

7.4.1 Bestimmung der Graphen

Die für die chiral ungerade Verteilungsfunktion h_1^{NS} relevanten Feynman-Graphen sind der Abb. 5.1 zu entnehmen, wobei für die Vertizes $\Gamma_3 = \gamma_m u \gamma_5$ und $\Gamma_4 = 1$ einzusetzen ist. Allerdings gehen in die Definition von h_1^{NS} (7.28) auch die Graphen

²⁷Siehe dazu die Erläuterungen in Kap. 5.4.3.

mit vertauschten Vertizes ein, also $\Gamma_3 = 1$ und $\Gamma_4 = \gamma_\mu \gamma_5$, so daß sich die Zahl der Feynman-Graphen auf die 8 Graphen in Abb. 7.3 verdoppelt. Es wird sich

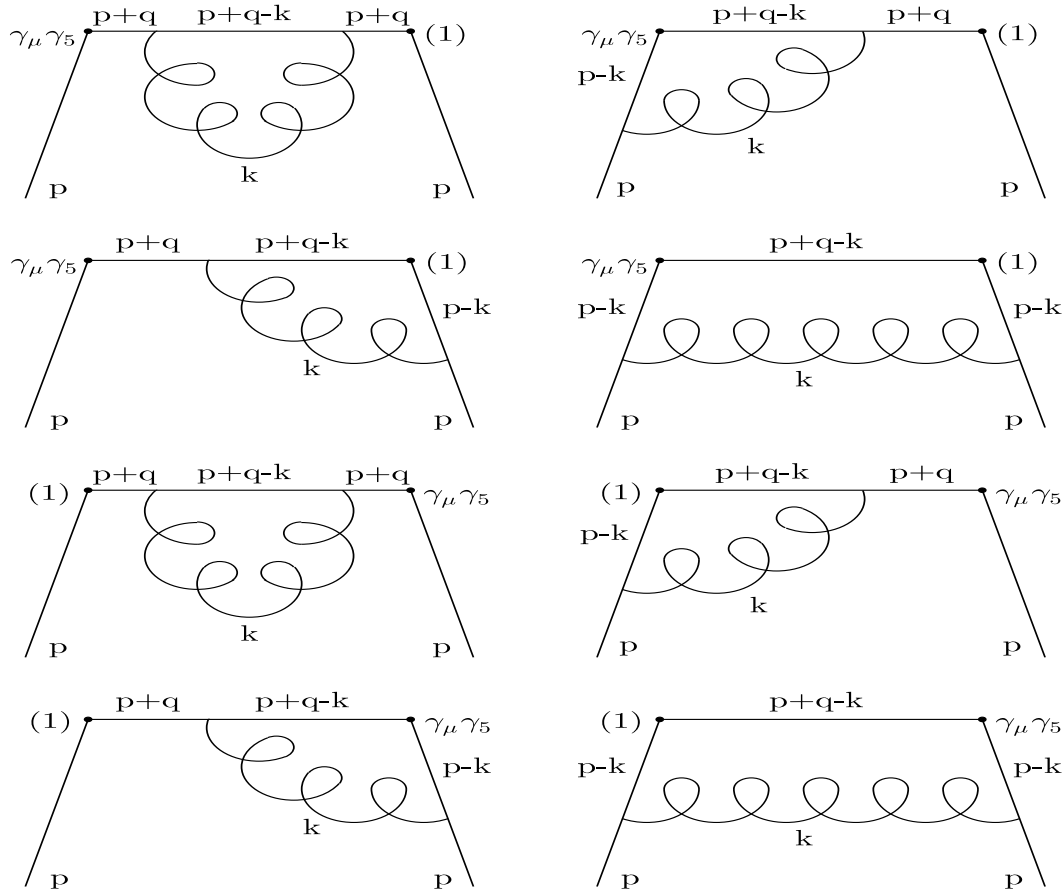


Abbildung 7.3: Alle Feynman-Diagramme, die für die chirale ungerade nonsinglet Verteilungsfunktion h_1 relevant sind. Die Austauschgraphen sind nicht gezeigt.

herausstellen, daß die 8 Graphen paarweise identisch sind, was allerdings nicht für alle Graphen sofort einsichtig ist.

Die zugehörigen Austauschgraphen werden gemäß der Diskussion, die auf (7.44) führte, nicht berücksichtigt. Prinzipiell erhält man die Austauschgraphen durch die simultane Ersetzung $q \rightarrow -q$ und die Vertauschung der Vertizes. Allerdings führt die Summe der beiden Stromprodukte in (7.28) dazu, daß der axialvektorielle Strom ohnehin bei 4 Graphen am linken und bei den übrigen am rechten Vertex erscheint. Deshalb werden auch alle Austauschgraphen berücksichtigt, wenn man nur die Ersetzung $q \rightarrow -q$ vornimmt und die Vertizes unverändert läßt. Die Summe aller Graphen bleibt von dieser Abwandlung unberührt.

7.4.2 Der Baumgraph

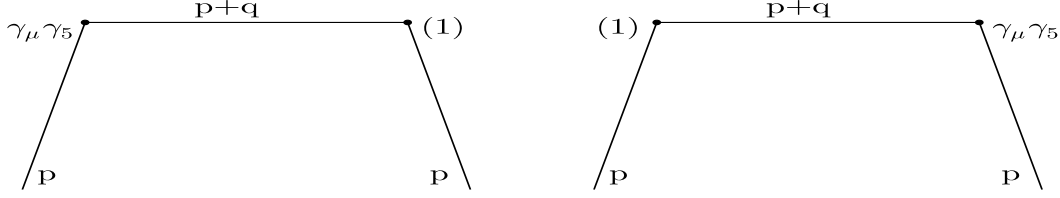


Abbildung 7.4: Die Baumgraphen für h_1 .

Der analytische Ausdruck für die beiden Baum-Graphen in Abb. 7.4 lautet

$$T_\mu^0 = -\frac{1}{2} \left[\bar{u}(p) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + \not{q}}{q^2(1-\omega)} u(p) + \bar{u}(p) \frac{\not{p} + \not{q}}{q^2(1-\omega)} \gamma_\mu \gamma_5 u(p) \right] \quad (7.45)$$

Für die Lorentzstruktur gilt

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \not{p} \gamma_5 \not{q} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \right\} \\ &= 2p \cdot q s_\mu - 2q \cdot s p_\mu + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \end{aligned} \quad (7.46)$$

Wenn alle Graphen auf diese Spur zurückgeführt werden können, erhält man neben der Lorentzstruktur zu h_1 auch die Lorentzstruktur des Koeffizienten $a_3(x, Q^2)$ in (7.32), ohne daß klar wäre, welcher Verteilungsfunktion a_3 entspricht. Unter Beachtung von

$$\text{Tr} \left\{ \not{p} \gamma_5 \not{q} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \right\} = \text{Tr} \left\{ \not{p} \gamma_5 \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 (\not{p} + \not{q}) \right\} \quad (7.47)$$

folgt für (7.45):

$$T_\mu^0(p, q, s) \Big|_{h_1} = s_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad , \quad (7.48)$$

wobei $1/(1-\omega)$ entwickelt und die Lorentzstruktur, die nicht mit h_1 zusammenhängt, nicht notiert wurde. Dieses Ergebnis enthält keine Beiträge von Austauschgraphen, die auch bei der Berechnung der übrigen Graphen mit dem Austausch eines effektiven Gluons in der Borel-Ebene nicht berücksichtigt werden.

7.4.3 Die Selbstenergie

Die Selbstenergie-Graphen in Abb. 7.5 unterscheiden sich vom Selbstenergie-Graphen in Abb. 5.3 für g_1 nur durch ihre Lorentzstruktur. Deshalb kann das Ergebnis der

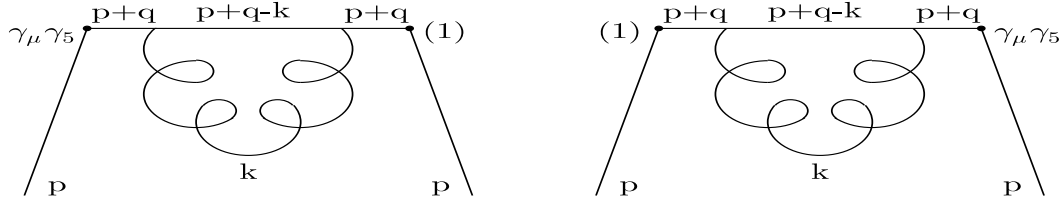


Abbildung 7.5: Die beiden Selbstenergie-Graphen S_μ^1 und S_μ^2 für h_1 mit einem effektiven Gluon.

Regularisierung (5.15) übernommen werden, wenn man die für h_1 richtige Lorentzstruktur einsetzt:

$$\frac{i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}q^\lambda s^\rho}{p \cdot q} \longrightarrow s_\mu \quad , \quad (7.49)$$

so daß für den ersten Graphen folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{s}} \left[S_\mu^1 \right] (s) &= -C_F s_\mu \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} (d-2) \\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1)} \omega^{n+1} \end{aligned} \quad (7.50)$$

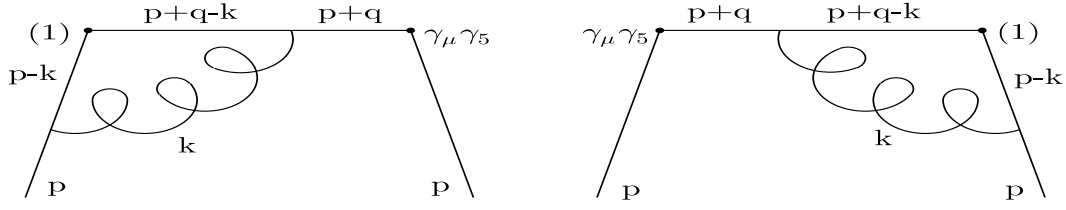
Der zweite Graph in Abb. 7.5 ist mit dem ersten identisch, da unter der Spur $\bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q}$ statt $\not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5$ erscheint, was in der Spur identisch ist, wie in der Berechnung des Baum-Graphen in (7.45) gesehen. Deshalb gilt:

$$S_\mu \equiv \frac{1}{2} (S_\mu^1 + S_\mu^2) = S_\mu^1 \quad , \quad (7.51)$$

so daß (7.50) gleichzeitig das Ergebnis für die Summe der beiden Selbstenergie-Graphen ist.

7.4.4 Die Vertex-Korrektur

Für die beiden Vertex-Korrektur-Graphen, bei denen das effektive Gluon am skalaren Vertex ausgetauscht wird, gibt es bei g_1 kein entsprechenden Graphen, so daß keine Referenz zur Verfügung steht. Der analytische Ausdruck in der Feynman-Eichung lautet für den linken Graphen V_μ^{R1} mit resummiertem Gluon-Propagator



Abbildungung 7.6: Die Vertex-Korrektur-Graphen für h_1 mit einem effektiven Gluon am skalaren Vertex.

(4.58) in der Borel-Ebene²⁸:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{d_s}} [V_{\mu}^{R1}] (s) = C_F \bar{u}(p) \gamma_{\rho} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma^{\rho} \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 u(p) \left(-\mu^2 e^{-C}\right)^s \\ i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^{\alpha} (p+q-k)^{\beta}}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (7.52)$$

Das Integral ist aus (C.187) bekannt, wobei die Indizes α und β zu vertauschen sind. Von den dort auftretenden Lorentzstrukturen ist $p^{\alpha} p^{\beta}$ von der Ordnung $p^2 = m_a^2$ und wird daher vernachlässigt. Es bleiben die Strukturen $g^{\alpha\beta} q^2$, $q^{\alpha} q^{\beta}$, $p^{\beta} q^{\alpha}$ und $q^{\beta} p^{\alpha}$ zu untersuchen. Mit

$$T_{\alpha\beta\mu} \equiv \gamma_{\rho} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \gamma^{\rho} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 \quad (7.53)$$

folgt:

$$g^{\alpha\beta} q^2 T_{\alpha\beta\mu} = d^2 q^2 \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ q^{\alpha} q^{\beta} T_{\alpha\beta\mu} = d q^2 \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ p^{\beta} q^{\alpha} T_{\alpha\beta\mu} = \gamma_{\rho} \not{p} \not{q} \gamma^{\rho} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 = -(2-d) \not{p} \not{q} \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ = -2(2-d) p \cdot q \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ p^{\alpha} q^{\beta} T_{\alpha\beta\mu} = \gamma_{\rho} \not{p} \not{q} \gamma^{\rho} (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 = 2 \not{p} \not{q} \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ = 4 p \cdot q \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \quad (7.54)$$

Die Tensorstrukturen werden zusammen mit (C.187) in (7.52) eingesetzt:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{d_s}} [V_{\mu}^{R1}] (s) = -C_F \frac{\bar{u}(p) \not{q} \bar{\gamma}_{\mu} \gamma_5 u(p)}{Q^4 (1-\omega)} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2}\right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}}$$

²⁸Für die Details der Notation sei auf die Erläuterungen nach (5.8) verwiesen. Die Bezeichnung der Vertex-Graphen mit V_{μ}^{R1} bedeutet, daß das Gluon rechts ausgetauscht wird, während die 1 (im Gegensatz zu 2) den Graphen mit dem axialvektoriellen Vertex auf der linken Seite bezeichnet. Der zweite Graph in Abb. 7.6 ist daher V_{μ}^{L2} .

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(d-s-1)} \\
& \left\{ 2dp \cdot q \frac{(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3+s+n)} \right. \\
& + 2(2-d)p \cdot q \frac{(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3+s+n)} \\
& - dq^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s+n)} \\
& \left. + \frac{1}{2} d^2 q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right) \Gamma\left(2+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s+n)} \right\} . \quad (7.55)
\end{aligned}$$

Die Terme mit einem extra $p \cdot q$ werden durch ω ausgedrückt, das in die Reihe durch Ummummern einbezogen wird. Gemeinsame Faktoren q^2 und Gamma-Funktionen werden ausgeklammert:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_\mu^{R1}] (s) &= -C_F \frac{\bar{u}(p) \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p)}{Q^2(1-\omega)} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \\
& \left\{ \frac{dn}{\frac{d}{2}-s-2} + (2-d)n + d \left(2+s+n-\frac{d}{2} \right) - \frac{1}{2} d^2 \right\} . \quad (7.56)
\end{aligned}$$

Die geschweifte Klammer wird vereinfacht, $1/(1-\omega)$ entwickelt und die entstehende Doppelsumme mit (C.52) umsortiert sowie die Lorentzstruktur mit (7.46) umgeschrieben.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_\mu^{R1}] (s) &= C_F s_\mu \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{k=0}^n \left\{ d - \frac{2k}{\frac{d}{2}-s-2} \right\} \\
& \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(d-s-2) \Gamma(2+s+k)} . \quad (7.57)
\end{aligned}$$

Die Berechnung des zweiten Graphen in Abb. 7.6 V_μ^{L2} ergibt exakt das gleiche Ergebnis. Dies muß auch so sein, da sowohl das zu regularisierende Integral, als auch die Lorentzstrukturen innerhalb des Loops identisch sind, wie an dem analytischen Ausdruck

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_\mu^{L2}] (s) = C_F \bar{u}(p) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \frac{\not{p} + \not{q}}{(p+q)^2} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\rho u(p) \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+q-k)^\alpha (p-k)^\beta}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (7.58)$$

im Vergleich zu (7.52) deutlich wird. Der Unterschied besteht in der Vertauschung

$$\bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p) \longrightarrow \bar{u}(p) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^\rho u(p) \quad . \quad (7.59)$$

Für die in α und β symmetrischen Terme in (C.187) ist die Identität wegen (7.47) klar. In beiden Fällen führt aber auch die Kontraktion mit p^β oder p^α zu Termen identischer Struktur, da die Position des entstehenden \not{p} relativ zu einem äußeren Quarkzustand identisch ist, so daß wieder aus (7.47) die Identität beider Lorentzstrukturen folgt. Daher gilt:

$$\frac{1}{2} (V_\mu^{R1} + V_\mu^{L2}) = V_\mu^{R1} \quad . \quad (7.60)$$

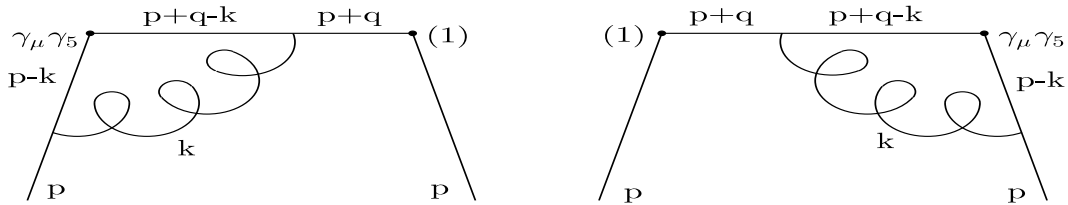


Abbildung 7.7: Die Vertex-Korrektur-Graphen für h_1 mit einem effektiven Gluon am axialvektoriellen Vertex.

Durch das gleiche Argument wie in (7.59) kann die Identität der beiden Vertex-Korrektur-Graphen V_μ^{L1} und V_μ^{R2} in Abb. 7.7 gezeigt werden. In diesem Fall ist die Identität der beiden Lorentzstrukturen

$$\bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma^\rho (\not{p} + \not{q}) u(p) \longrightarrow \bar{u}(p) (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\beta \gamma^\rho u(p) \quad (7.61)$$

gewährleistet, so daß

$$\frac{1}{2} (V_\mu^{R2} + V_\mu^{L1}) = V_\mu^{R1} \quad (7.62)$$

gilt. Es genügt also, V_μ^{L1} zu regularisieren. Dieser Graph wurde jedoch bereits bei der Betrachtung von g_1 regularisiert, so daß man auf die gleiche Weise wie für den Selbstenergie-Graphen lediglich im Resultat (5.30) die entsprechende Lorentzstruktur mit (7.49) ersetzen muß:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_\mu^{L1}] (s) = C_F s_\mu \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi \mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(2+s+k) \Gamma(d-s-1)} \left\{ (6-d)(1-s) - \frac{2k(d-s-2)}{\frac{d}{2}-s-2} \right\} . \quad (7.63)$$

Die gesamte Vertex-Korrektur erhält man aus der Summe aller vier Graphen in Abb. 7.6 und Abb. 7.7:

$$V_\mu = \frac{1}{2} \left(V_\mu^{R1} + V_\mu^{R2} + V_\mu^{L1} + V_\mu^{L2} \right) = V_\mu^{R1} + V_\mu^{L1} , \quad (7.64)$$

also aus der Summe von (7.57) und (7.63):

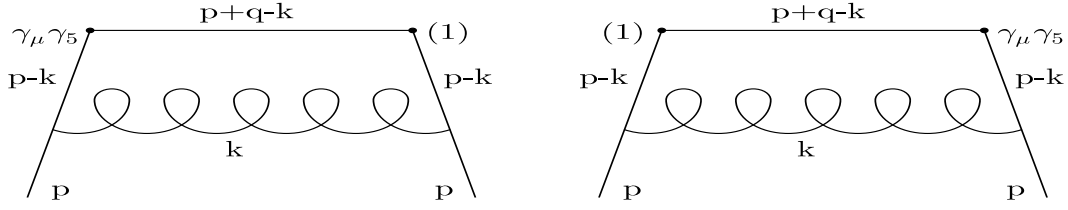
$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_\mu](s) = C_F s_\mu \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+k)} \left\{ (6-d)(1-s) + d(d-s-2) - \frac{4k(d-s-2)}{\frac{d}{2}-s-2} \right\} . \quad (7.65)$$

Unter dem Aspekt der nahen Verwandtschaft von g_1 und h_1 gesehen, ergibt die Berechnung der Vertex-Korrektur-Graphen für h_1 ein geteiltes Bild. Einerseits sind die Graphen der axialvektoriellen Vertex-Korrektur für g_1 und h_1 identisch. Andererseits führen die skalare Vertex-Korrektur für h_1 und die vektorielle Vertex-Korrektur für g_1 zu unterschiedlichen Ergebnissen. Dieser Unterschied tritt auch im Koeffizienten des divergenten Terms auf, also im Koeffizienten von $1/s$ bei $d=4$ oder im Koeffizienten von $2/\varepsilon$ bei $s=0$. Sollte diese Differenz nicht durch den Box-Graphen wieder ausgeglichen werden, läßt dies auf eine unterschiedliche anomale Dimension für g_1 und h_1 schließen, was im Widerspruch zur in der Literatur vertretenen Ansicht steht.²⁹

7.4.5 Box-Graph

Die Loop-Integration über einen axialvektoriellen und einen skalaren Vertex, wie sie in den Box-Graphen der Abb. 7.8 auftreten, haben keine Entsprechung in der polarisierten Strukturfunktion, so daß die Regularisierung neu durchgeführt werden

²⁹Vgl. Artru, Mekhfi 1990. Dieser Punkt wird noch eingehender thematisiert werden.

Abbildung 7.8: Die Box-Graphen B_μ^1 und B_μ^2 für h_1 mit einem effektiven Gluon.

muß. Der analytische Ausdruck für B_μ^1 lautet in der Feynman-Eichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{\perp}{\alpha s}} [B_\mu^1] (s) &= C_F \bar{u}(p) \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho u(p) \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s \\ & i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{(p+q-k)^2 (p-k)^4 (k^2)^{1+s}} . \end{aligned} \quad (7.66)$$

Das Integral ist aus (C.202) bekannt. Die Lorentzstrukturen in (C.202), die p^α oder p^λ enthalten, sind von der Ordnung der Bewegungsgleichung, denn

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\mu\lambda} &\equiv \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho \\ &= 2\gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\alpha - \gamma_\alpha \gamma_\rho \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma_\lambda \gamma^\rho \\ &= 2\gamma_\lambda \gamma_\alpha \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\beta \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho \gamma_\lambda . \end{aligned} \quad (7.67)$$

Die Kontraktion von $T_{\alpha\beta\mu\lambda}$ mit den Strukturen

$$q^\alpha p^\beta q^\lambda, \quad q^\alpha q^\beta q^\lambda, \quad g^{\alpha\lambda} p^\beta, \quad g^{\alpha\lambda} q^\beta, \quad g^{\alpha\beta} q^\lambda, \quad g^{\beta\lambda} q^\alpha \quad (7.68)$$

bleibt zu untersuchen. Unter Verwendung der Beziehungen aus Kap. B.1.9 für γ_5 in d -Dimensionen und unter Berücksichtigung der Identität $\not{A} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 = \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{A}$, die wegen der späteren Spurbildung gilt (siehe (7.47)), folgt:

$$\begin{aligned} q^\alpha p^\beta q^\lambda T_{\alpha\beta\mu\lambda} &= \gamma_\rho \not{q} \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho = \not{q} \not{p} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= 2p \cdot q \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= 4p \cdot q \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - 2(6-d)p \cdot q \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= -2(4-d)p \cdot q + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ q^\alpha q^\beta q^\lambda T_{\alpha\beta\mu\lambda} &= q^2 \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho = 2q^2 \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - (6-d)q^2 \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \\ &= -(4-d)q^2 \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\ g^{\alpha\lambda} p^\beta T_{\alpha\beta\mu\lambda} &= \gamma_\rho \gamma_\alpha \not{p} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho = 2\gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma^\rho - \gamma_\rho \not{p} \gamma_\alpha \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho \\ &= \mathcal{O}(\text{EM}) \\ g^{\alpha\lambda} q^\beta T_{\alpha\beta\mu\lambda} &= \gamma_\rho \gamma_\alpha \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho = 2\gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma^\rho - (6-d)\gamma_\rho \not{q} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - 2(6-d) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{d} - 2(6-d) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{d} + (6-d)^2 \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\
&= (4-d)^2 \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\
g^{\alpha\beta} q^\lambda T_{\alpha\beta\mu\lambda} &= d \gamma_\rho \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{d} \gamma^\rho = 2d \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 - d(6-d) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{d} \\
&= -d(4-d) \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\
g^{\beta\lambda} q^\alpha T_{\alpha\beta\mu\lambda} &= (6-d) \gamma_\rho \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho = 2(6-d) \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \not{d} - (6-d)^2 \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \\
&= -(4-d)(6-d) \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \quad . \quad (7.69)
\end{aligned}$$

Diese Kontraktionen werden zusammen mit (C.202) in (7.66) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [B_\mu^1](s) &= C_F \frac{\bar{u}(p) \not{d} \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 u(p)}{Q^2} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} (4-d) \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(d-s-1)} \\
&\quad \left\{ \omega \frac{\Gamma\left(4+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(2+s+n)}{\Gamma(4+s+n)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma\left(4+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(3+s+n)} \right. \\
&\quad \left. + 3 \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(3+s+n)} \right. \\
&\quad \left. + (4-d) \frac{d \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(1+s+n)}{4 \Gamma(3+s+n) \left(\frac{d}{2} - s - 2\right)} \right\} \quad . \quad (7.70)
\end{aligned}$$

Bereits in dieser Form ist zu erkennen, daß von dem Box-Graphen kein Beitrag zur anomalen Dimension stammen kann, da ein $(4-d)$ vor einem bei $s=0$ oder $d=4$ endlichen Ausdruck faktorisiert. Konkreter wird der Box-Graph bei $s=0$ von der Ordnung $(4-d)$ sein und daher weder einen Beitrag zur anomalen Dimension noch eine Konstante liefern. Bei $d=4$ verschwindet der Ausdruck identisch, so daß weder ein Beitrag zum Pol bei $s=0$ noch zu den IR-Renormalon-Polen zu erwarten ist.

Im Prinzip erübrigt sich daher eine weitere Betrachtung dieses Graphen. Nur der Vollständigkeit halber wird das Resultat in der Form der anderen Graphen notiert. Nach den üblichen Manipulationen folgt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [B_\mu^1](s) &= -C_F s_\mu \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{s(4-d)(d-s-2)}{\frac{d}{2} - s - 2} \\
&\quad \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma(3+s+n) \Gamma(d-s-1)} \quad . \quad (7.71)
\end{aligned}$$

Die Berechnung des Graphen B_μ^2 in Abb. 7.8 führt auf exakt das gleiche Ergebnis. Dies wird sofort klar, wenn man die Lorentzstrukturen von B_μ^1 und B_μ^2 miteinander vergleicht:

$$\bar{u}(p)\gamma_\rho\gamma_\alpha\gamma_\beta\bar{\gamma}_\mu\gamma_5\gamma_\lambda\gamma^\rho u(p) \longrightarrow \bar{u}(p)\gamma_\rho\gamma_\alpha\bar{\gamma}_\mu\gamma_5\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma^\rho u(p) \quad . \quad (7.72)$$

Terme mit p^α oder p^λ sind wieder von der Ordnung der Bewegungsgleichung. Die Terme mit p^β sind wegen (7.47) identisch, da sie die gleiche relative Position zu einem äußeren Quarkzustand haben — nur einmal zu $\bar{u}(p)$ und einmal zu $u(p)$. Der Term $g^{\alpha\lambda}q^\beta$ ist ebenfalls wegen (7.47) in beiden Lorentzstrukturen identisch. Lediglich die beiden Kontraktionen $g^{\alpha\beta}q^\lambda$ und $g^{\beta\lambda}q^\alpha$ vertauschen ihre Rollen in den beiden Termen von (7.72). Das verändert jedoch das Ergebnis nicht, da sie in (C.202) auf die gleiche Weise eingehen, so die Vertauschung wirkungslos ist.³⁰ Daraus folgt

$$B_\mu \equiv \frac{1}{2} (B_\mu^1 + B_\mu^2) = B_\mu^1 = \mathcal{O}(4-d) \quad . \quad (7.73)$$

7.4.6 Die gesamte Vorwärtsstreuamplitude

Die Vorwärtsstreuamplitude (7.28) setzt sich aus den acht Graphen in den Abb. 7.5, 7.6, 7.7 und 7.8 zusammen — also aus der Summe von (7.50) und (7.65):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [T_\mu] (s) &= \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [S_\mu] (s) + \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [V_\mu] (s) \\ &= C_F s_\mu \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \\ &\quad \left\{ - (d-2) \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+k)} \right. \\ &\quad \left. \times \left[(6-d)(1-s) + d(d-s-2) - \frac{4k(d-s-2)}{\frac{d}{2}-s-2} \right] \right\} \quad . \quad (7.74) \end{aligned}$$

Der Box-Graph wurde nicht notiert, da er für die Auswertung irrelevant ist. Austauschgraphen sind in diesem Resultat nicht enthalten.

³⁰Diese Argumentationfolge ist durch eine explizite Rechnung verifiziert worden.

7.4.7 Wilson-Koeffizient

Den Wilson-Koeffizienten des führenden Twist-Operators zu h_1 erhält man durch Koeffizientenvergleich von der berechneten Vorwärtsstreuamplitude (7.74) mit ihrer Reihenentwicklung in die Momente³¹:

$$T_\mu(p, q, s)|_{h_1} = s_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{C}_{\perp, n}(Q^2) a_{\perp, n} \omega^{n+1} \quad . \quad (7.75)$$

Unter Hinzunahme des reduzierten Matrixelements von dem Resultat des Baum-Graphen (7.48) mit der Festlegung $\tilde{C}_{\perp, n} = 1 + \mathcal{O}(a_s)$ folgt für den Borel-transformierten Wilson-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{a_s}[\tilde{C}_{\perp, n} - 1](s) &= -C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \\ &\quad \left\{ (d-2) \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n) \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma(d-s-1)} \right. \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+s+k) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2+s+k-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+k) \Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+k)} \\ &\quad \left. \times \left[(6-d)(1-s) + d(d-s-2) - \frac{4k(d-s-2)}{\frac{d}{2}-s-2} \right] \right\} . \quad (7.76) \end{aligned}$$

Dies ist der Wilson-Koeffizient des reduzierten Matrixelements des Twist-2-Operators, der die chiral ungerade Verteilungsfunktion h_1 generiert. Er ist in der ersten Ordnung in a_s exakt berechnet und enthält die höheren Ordnungen der Störungstheorie in der führenden Ordnung in N_f ebenfalls exakt. Die nicht führenden Terme in N_f sind durch NNA genähert worden. Die Divergenzen des Resultats für $s=0$ müssen durch einen Counterterm eliminiert werden, wobei zusätzlich zu der Standard $\overline{\text{MS}}$ -Schema Renormierung die Restaurierung der Ward-Identität mit (5.89) durchzuführen ist. Die IR-Renormalon-Pole in der Borel-Ebene bei $s > 0$ werden ausgenutzt, um eine Abschätzung der Twist-4-Korrekturen zu h_1 zu machen.

7.5 Störungskorrekturen

Die Grundlage für die Auswertung perturbativer Korrekturen zu h_1 ist der Borel-transformierte Wilson-Koeffizient (7.76) bei $s=0$. Nach einer Renormierung dieses

³¹Die Konsistenz der Vorfaktoren ist durch (7.22), (7.32) und (7.44) gewährleistet.

Ausdrucks kann daraus die anomale Dimension für h_1 bestimmt werden. Führt man außerdem die Restaurierung der Ward-Identität durch, sind Aussagen über die Störungs-Korrekturen zu den Momenten von h_1 möglich.

7.5.1 Der Wilson-Koeffizient bei $s = 0$

Für die Auswertung der perturbativen Korrekturen zu h_1 muß nicht mehr der Borel-transformierte Wilson-Koeffizient (7.76) betrachtet werden. Man erhält den Wilson-Koeffizienten selbst bis auf Renormalon-Pole, indem er bei $s = 0$ ausgewertet und mit der QCD-Kopplung a_s multipliziert wird:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\perp,n}(Q^2) &= 1 - 2a_s C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\Gamma(d-1)} \left\{ \frac{\Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+n)\Gamma\left(3-\frac{d}{2}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(2+k-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+k)} \left[\frac{6-d}{d-2} + d - \frac{4k}{\frac{d}{2}-2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Für die Bestimmung des Counterterms wird dieser Ausdruck in $d = 4 - \varepsilon$ entwickelt, wobei darauf zu achten ist, daß der $k = 0$ -Term ein anderes Divergenz-Verhalten aufweist als die übrigen Terme³²:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{\perp,n}(Q^2) &= 1 - 2a_s C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{\Gamma(3-\varepsilon)} \left\{ \frac{\Gamma\left(1+n+\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(1+n)\Gamma\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma\left(k+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(2+k)} \left[\frac{2+\varepsilon}{2-\varepsilon} + 4 - \varepsilon + \frac{8k}{\varepsilon} \right] \right\} \\ &= 1 - a_s C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right) \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} + S_n - \gamma \right) \right. \\ &\quad \left. - 5 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1+k)} \left[\frac{8k}{\varepsilon} + 5 + 4k(S_{k-1} - \gamma) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \\ &= 1 - a_s C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} + S_n - \gamma + 1 \right) - 5 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1+k)} \left[\frac{8k}{\varepsilon} + 5 + 4k(S_{k-1} - \gamma + 1) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} \\ &= 1 + 4a_s C_F \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right) \left(S_n + \frac{1}{1+n} \right) \right. \end{aligned}$$

³²Hierzu werden die Entwicklungen (C.60), (C.62), (C.65), (C.71), (A.21) und (A.22) verwendet.

$$\left. + \frac{3}{4}S_n + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+n}S_n + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}S_{k-1} + \mathcal{O}(\varepsilon) \right\} . \quad (7.78)$$

Nach dem zweiten Gleichheitszeichen ist ein Zwischenschritt aufgeführt, der es erlaubt, das Endresultat nach der Herkunft von den Graphen aufzuschlüsseln.

7.5.2 Die anomale Dimension für h_1

Die anomale Dimension kann als Koeffizient der Divergenz in (7.78) abgelesen werden:

$$\gamma_{\perp,n}^{qq} = \frac{C_F}{16\pi^2} \left(4S_n + \frac{4}{1+n} \right) . \quad (7.79)$$

Der Vergleich mit der nonsinglet anomalen Dimension für g_1 in (5.66) zeigt, daß die anomalen Dimensionen zwar verwandt aber nicht identisch sind. Die Wahrscheinlichkeit für einen Transversitäts-Flip ist jedoch proportional zu $1-x$ zu erwarten, so daß die anomalen Dimensionen bei $x=1$ übereinstimmen sollten. Um das Verhalten von (7.79) bei $x \rightarrow 1$ zu untersuchen, wird die entsprechende Splitting-Funktion mit Hilfe von (A.17) berechnet:

$$P_{\perp}^{qq}(x) = \frac{C_F}{16\pi^2} \left(4 - \frac{4}{(1-x)_+} \right) , \quad (7.80)$$

was mit (5.67) zu vergleichen ist. Im Bereich um $x=1$ hat man in P_A^{qq} einen zusätzlichen Term proportional zu $1-x$, der von dem Box-Graphen für g_1 stammt (siehe Abb. 5.6). Dieser Term ist unproblematisch, da er für $x \rightarrow 1$ verschwindet. Jedoch führt die zusätzliche δ -Distribution in (5.67) zu einer Differenz der Splitting-Funktionen von g_1 und h_1 bei $x=1$.

In diesem Zusammenhang ist auf die Rechnung von Artru und Mekhfi³³ zu verweisen, die die Splitting-Funktion zu h_1 für $x < 1$ und $x \neq 1$ berechnet haben. Deren Resultat ist in der hier verwendeten Notation

$$P_{\perp,AM}^{qq}(x) = \frac{C_F}{16\pi^2} \left(4 - \frac{4}{1-x} \right) , \quad (7.81)$$

also bei $x=1$ divergent. Diese Divergenz — so argumentieren Artru und Mekhfi — wird durch die Renormierung des Quark-Propagators kompensiert, wobei die Kompensation gerade so zu wählen ist, daß $P_{\perp}^{qq}(x \rightarrow 1) = P_A^{qq}(x \rightarrow 1)$ gilt. Die Kompensation wird prinzipiell ebensogut durch das hier gewonnene Resultat (7.80) erreicht, ohne weitere Argumente, die die Relation von h_1 und g_1 betreffen.

³³Vgl. Artru, Mekhfi 1990, Gl. (A.7).

Der Unterschied in der Festlegung des Verhaltens bei $x = 1$ steht prinzipiell nicht im Widerspruch zu der Erwartung, die Differenz der beiden anomalen Dimensionen sollte sich für $x \rightarrow 1$ wie $(1 - x)$ verhalten. Es würde bedeuten, daß die Transversität für x nahe bei aber ungleich 1 erhalten ist, während ein Flip der Transversität für $x = 1$ möglich bliebe. Physikalisch entspricht dies der Möglichkeit für einen Transversitäts-Flip eines Quarks bei Emission eines virtuellen Gluons mit Impuls Null. (7.80) steht daher nicht im Widerspruch zu der Untersuchung von Artru und Mekhfi, die keine Aussage über den Grenzwert bei $x = 1$ gemacht haben.³⁴

Nachdem die Verträglichkeit des Resultats mit den bisherigen Argumenten geklärt ist, muß die Verlässlichkeit von (7.80) geprüft werden. Eine Analyse der Beiträge der verschiedenen Graphen zu den anomalen Dimensionen (5.66) und (7.79) ergibt folgendes Bild: Die Selbstenergie-Graphen sind für g_1 und h_1 identisch.³⁵ Der Box-Graph verschwindet für h_1 und ist für g_1 proportional zu $1 - x$, so daß im Grenzwert $x \rightarrow 1$ auch hier kein Unterschied besteht.³⁶ Die Vertex-Korrektur-Graphen, in denen das Gluon am axialvektoriellen Vertex ausgetauscht wird, sind ebenfalls identisch.³⁷ Der Unterschied der anomalen Dimensionen bei $x = 1$ läßt sich daher auf genau einen Graphen lokalisieren. Die Vertex-Korrektur mit Gluon am vektoriellen Vertex liefert für g_1 genau die Distribution $\delta(x - 1)$, die bei dem entsprechenden Graphen mit skalarem Vertex für h_1 fehlt.³⁸ Damit ist die Differenz direkt auf die Eigenschaften des Operators, der den Ausgangspunkt für die Berechnung von h_1 bildete, zurückgeführt, und es stellt sich die Frage, ob die Darstellung von h_1 durch die Vorwärtsstreuamplitude (7.28) möglicherweise fehlerhaft sein könnte.

In der Herleitung des Zusammenhangs von (7.28) mit h_1 werden lediglich zwei Voraussetzungen gemacht. Die Identität mit h_1 ist nur im führenden Twist nachgewiesen. Diese Einschränkung tangiert die hier gemachte Twist-2-Rechnung nicht. Es wurde die Erhaltung des Axialvektorstroms gefordert³⁹, um die Lorentzstruktur der Vorwärtsstreuamplitude allgemein bestimmen zu können. Die tatsächliche Verletzung der Axialvektorstrom-Erhaltung ist von der Ordnung a_s , so daß hier ei-

³⁴Ich berufe mich hier auf eine mündliche Mitteilung von Prof. Dr. Xavier Artru.

³⁵Vgl. die Berechnung der Graphen in Abb. 7.5.

³⁶Vgl. die Graphen in Abb. 5.6 für g_1 und Abb. 7.8 für h_1 . Entsprechend (7.73) ist der Beitrag zu h_1 Null und mit (5.64) zu g_1 proportional zu $1/(1+n)(2+n)$, was im Impulsraum wie $1 - x$ geht.

³⁷Vgl. die Graphen in Abb. 5.4 für g_1 und Abb. 7.7 für h_1 .

³⁸Vgl. die Graphen in Abb. 5.5 für g_1 und Abb. 7.6 für h_1 . Die bei der Rechnung entstandene Differenz zu g_1 wurde bereits nach (7.65) thematisiert.

³⁹Vgl. Ioffe, Khodjamirian 1995.

ne Fehlerquelle für eine Berechnung der anomalen Dimension mit (7.28) existieren könnte. Diese stellt sich jedoch als scheinbar heraus, denn einerseits ist die Erhaltung von Axialvektorströmen für nonsinglet Ströme gewährleistet, und in (7.79) wurde die nonsinglet anomale Dimension hergeleitet, so daß eine Unsicherheit der Ordnung a_s hier nicht auftreten sollte. Andererseits ist die Verwendung des Axialvektorstroms in (7.28) überhaupt nicht notwendig, da h_1 ebensogut durch einen vektoriellen und einen pseudoskalaren Strom definiert werden könnte. In diesem Fall träte die Problematik der Axialvektorstrom-Erhaltung gar nicht auf, und die Zerlegung (7.32) von T_μ wäre allein mit der Forderung nach der Erhaltung des Vektorstroms möglich. Mit diesen alternativen Strömen wird allerdings das Ergebnis (7.79) für die anomale Dimension exakt reproduziert, so daß die Forderung nach Axialvektorstrom-Erhaltung nicht als Grund eines Fehlers in Frage kommt. Aus dieser Perspektive muß die Möglichkeit eines Fehlers der Ordnung a_s als Artefakt der Wahl der Ströme in (7.28) ohne realen Bestand angesehen werden.

Da kein offensichtlicher Grund für einen Zweifel an der Richtigkeit der Darstellung von h_1 über die Vorwärtsstreuamplitude (7.28) in führendem Twist existiert und andererseits das Resultat (7.79) zwar von den Erwartungen abweicht, aber doch mit bisherigen Überlegungen kompatibel ist, wird im folgenden davon ausgegangen, daß (7.79) tatsächlich die anomale Dimension zu h_1 ist und damit die Möglichkeit eines Transversität-Flips bei Emission impulsloser Gluonen existiert.⁴⁰

7.5.3 Renormierung

Die Renormierung des Wilson-Koeffizienten geschieht einerseits durch die Beseitigung der Divergenz in (7.78) mittels eines entsprechenden Counterterms, der in erster Ordnung in a_s

$$Z_\perp = 1 - 4a_s C_F \left(S_n + \frac{1}{1+n} \right) + \mathcal{O}(a_s^2) \quad (7.82)$$

ist. Andererseits ist auch in dieser Rechnung γ_5 in d -Dimensionen fortgesetzt worden, so daß wie für g_1 eine Restaurierung der Ward-Identität mit (5.89) durch-

⁴⁰Sollte doch ein Grund existieren, weshalb (7.28) nicht auf die anomale Dimension von h_1 führt, hätte dies die folgenden Konsequenzen: die Abschätzung höherer Twist-Korrekturen durch die Analyse der IR-Renormalon-Pole würde davon nicht tangiert, da die Gültigkeit der Abschätzung ohnehin nur im mittleren Bereich von Bjorken- x gewährleistet ist. Eine Abweichung für $x = 1$ bliebe hier ohne Auswirkung. Hingegen müßte die Interpretation der perturbativen Korrekturen modifiziert werden, da man nicht mehr davon ausgehen könnte, daß es sich um Korrekturen zu h_1 handelt. Vielmehr wären die Störungskorrekturen der unbekanntenen Verteilungsfunktion zuzuordnen, die (7.28) tatsächlich entspräche.

zuführen ist. Der renormierte Wilson-Koeffizient lautet im $\overline{\text{MS}}$ -Schema bei der Renormierungsskala $\mu^2 = Q^2$:

$$\begin{aligned} Z_5 Z_\perp \tilde{C}_{\perp,n}(Q^2) &= Z_5 \left\{ 1 + 4a_s C_F \left[\frac{3}{4} S_n + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+n} S_n + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} S_{k-1} \right] \right\} \\ &= 1 + 4a_s C_F \left[\frac{3}{4} S_n - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1+n} S_n + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} S_{k-1} \right]. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Die Renormierung der Ward-Identität hätte vermieden werden können, wenn man die Spuren vor der dimensional Regularisierung ausgeführt hätte, anstatt erst danach. Dann wären die in d -Dimensionen fortzusetzenden Ausdrücke γ_5 -frei gewesen, so daß die Fortsetzung unproblematisch gewesen wäre. Daß der hier verwendete Weg eingeschlagen wurde, diente der besseren Vergleichsmöglichkeit von h_1 und g_1 , die dadurch eine explizite Analogie gezeigt haben. Die anomale Dimension ist in beiden Zugängen identisch, da für diese lediglich eine divergente Gamma-Funktion in d Dimensionen notiert werden muß, während alle anderen Faktoren von vornherein in 4 Dimensionen ausgewertet werden können. Deshalb ist die anomale Dimension auch von der γ_5 -Problematik unabhängig. Die Differenz der beiden Zugänge liegt in einer additiven Konstanten, die gerade durch die Renormierung mit Z_5 kompensiert wurde.

7.5.4 Störungskorrekturen zu Momenten von h_1

Aus dem renormierten Wilson-Koeffizienten (7.83) können die Störungskorrekturen zu Momenten von h_1 (7.25) angegeben werden. Die renormierten Wilson-Koeffizienten werden für spezifische Werte von n berechnet, so daß für die Momente folgt⁴¹:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx [h_1(x) + h_1(-x)] &= \tilde{C}_{\perp,0}(Q^2) = 1 + \mathcal{O}(a_s^2) \quad , \\ \int_0^1 dx x [h_1(x) - h_1(-x)] &= \tilde{C}_{\perp,1}(Q^2) = 1 + \frac{7}{2} a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2) \quad , \\ \int_0^1 dx x^2 [h_1(x) + h_1(-x)] &= \tilde{C}_{\perp,2}(Q^2) = 1 + \frac{13}{2} a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2) \quad , \\ \int_0^1 dx x^3 [h_1(x) - h_1(-x)] &= \tilde{C}_{\perp,3}(Q^2) = 1 + \frac{109}{12} a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2) \quad , \\ \int_0^1 dx x^4 [h_1(x) + h_1(-x)] &= \tilde{C}_{\perp,4}(Q^2) = 1 + \frac{227}{20} a_s C_F + \mathcal{O}(a_s^2). \end{aligned} \quad (7.84)$$

⁴¹Vgl. Meyer-Hermann, Schäfer 1997.

Bemerkenswert ist, daß die erste Ordnung Störungstheorie für das erste Moment verschwindet. Diese Störungskorrekturen sind bislang nicht bekannt gewesen. Es ist jedoch zu beachten, daß die Interpretation der Koeffizienten als Störungskorrekturen zu den Momenten von h_1 in direkter Abhängigkeit von der Gültigkeit des Zusammenhangs von (7.28) mit der chiral ungeraden Verteilungsfunktion h_1 abhängt, der auf die unerwartete anomale Dimension (7.79) geführt hat.

Die Korrekturen in zweiter Ordnung in a_s lassen sich prinzipiell auch aus dem Borel-transformierten Wilson-Koeffizienten durch Differentiation an der Stelle $s = 0$ bestimmen. Diese sind jedoch lediglich in führender Ordnung in N_f exakt, während die erste Ordnungs-Korrektur (7.84) unabhängig von der gemachten Näherung großer Flavor-Zahlen richtig ist.

7.6 Abschätzung von Twist-4-Korrekturen

Der Weg, wie mit Hilfe des Borel-transformierten Wilson-Koeffizienten (7.76) die IR-Renormalon-Pole extrahiert werden, um die aus diesen resultierende Unsicherheit der Twist-2-Störungsreihe zu bestimmen, die wiederum als Abschätzung für Twist-4-Korrekturen interpretiert werden, ist methodisch in Kap. 4.5.1 erläutert und für zwei Strukturfunktionen erprobt worden. Die Abschätzung der Twist-4-Korrekturen zu h_1 stellt sich in kompletter Analogie zu g_1 dar, so daß der dort beschrittene Weg lediglich mit der neuen generierenden Funktion auszuführen ist. Auf eine detaillierte Erläuterung der einzelnen Schritte wird daher verzichtet.

Es ist hingegen wichtig, die Anwendbarkeit der Renormalon-Methode auf die chiral ungerade Verteilungsfunktion zu klären, wenn sie über die Vorwärtsstreuamplitude (7.28) definiert wird. Die Übereinstimmung dieser Definition mit der Operatordefinition von h_1 in (7.12) ist nur im führenden Twist bewiesen worden, so daß man sich fragen kann, ob eine Abschätzung höherer Twist-Korrekturen mit (7.28) überhaupt möglich ist. Um das einzusehen, ist der Grundgedanke der Renormalon-Methode noch einmal zu vergegenwärtigen. Allein aus der in der Störungsreihe des führenden Twists enthaltenen Information sollen Aussagen über höhere Twist-Korrekturen gewonnen werden. Jede Renormalon-Rechnung ist also genuin eine reine Twist-2-Rechnung, so daß auch die Definition von h_1 über (7.28) nur für den führenden Twist mit h_1 übereinstimmen muß, um die Renormalon-Methode sinnvoll anwenden zu können.

7.6.1 IR-Renormalon-Pole

Für die Bestimmung der IR-Renormalon-Pole wird der Borel-transformierte Wilson-Koeffizient (7.76) bei $d = 4$ ausgewertet und eine Partialbruchzerlegung durchgeführt, die die einzelnen Pole auf der positiven reellen Achse der Borel-Ebene isoliert:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{\perp, n} - 1] (s) &= C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^s \\ &\left\{ \frac{1}{s} \left[\frac{5}{1+s} - \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} + \sum_{k=1}^n \frac{4k\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+k)(1+s+k)} \right] \right. \\ &+ \frac{1}{1-s} \left[\frac{4}{1+s} - \frac{2\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} + \sum_{k=1}^n \frac{4(1+k)\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+k)(1+s+k)} \right] \\ &\left. + \frac{1}{2-s} \left[\frac{1}{1+s} + \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} + \sum_{k=1}^n \frac{2\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+k)(1+s+k)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Die UV-Renormalonen wurden nicht isoliert. Der Pol bei $s = 0$ reproduziert die anomale Dimension (7.79)

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{\perp, n} - 1] (s) \Big|_{s=0} = 4C_F \frac{1}{s} \left[1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \right] \quad (7.86)$$

bis auf ein a_s , das in der Borel-Transformation steckt.

Die IR-Renormalonen sind⁴²:

$$\mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{\perp, n} - 1] (s) \Big|_{s=1} = 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \frac{1}{1-s} \left[n - 2S_n - \frac{2}{1+n} - \frac{2}{2+n} + 3 \right] \quad (7.87)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [\tilde{C}_{\perp, n} - 1] (s) \Big|_{s=2} &= C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right)^2 \frac{1}{2-s} \left[3 + \frac{1}{2}(1+n)(4+n) - 2S_n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n} - \frac{1}{3+n} \right]. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Die Renormalon-Ambiguität erhält man durch die Rücktransformation des Wilson-Koeffizienten aus der Borel-Ebene entsprechend (4.56):

$$\tilde{C}_{\perp, n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) = \frac{1}{\pi b_0} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty ds \mathcal{B}_{1/a_s} [\tilde{C}_{\perp, n}(Q^2)] (s) \Big|_{s=1} e^{\frac{-s}{b_0 a_s}} \right\}$$

⁴²Es werden die Gleichungen (A.19) und (A.20) verwendet.

$$= \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[n - 2S_n - \frac{2}{1+n} - \frac{2}{2+n} + 3 \right] \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{Q^2} \right) e^{\frac{-1}{b_0 a_s}} . \quad (7.89)$$

Mit der Definition des Landau-Pols (4.25) erhält man für die durch (4.54) definierten Koeffizienten⁴³:

$$\tilde{C}_{\perp,n}^{(1)} = \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[n - 2S_n - \frac{2}{1+n} - \frac{2}{2+n} + 3 \right] . \quad (7.90)$$

Ebenso folgt für das zweite IR-Renormalon:

$$\tilde{C}_{\perp,n}^{(2)} = \pm \frac{C_F}{b_0} \left[3 + \frac{1}{2}(1+n)(4+n) - \frac{2}{1+n} - \frac{2}{2+n} - \frac{2}{3+n} - 2S_n \right] . \quad (7.91)$$

Für die spätere Auswertung werden die Renormalon-Ambiguitäten der Twist-2-Störungsreihe im Impulsraum benötigt. Mit Hilfe von (A.17) folgt:

$$\tilde{C}_{\perp}^{(1)}(x) = \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[\frac{2}{(1-x)_+} + 3\delta(x-1) - \delta'(x-1) - 2 - 2x \right] \quad (7.92)$$

und

$$\tilde{C}_{\perp}^{(2)}(x) = \pm \frac{2C_F}{b_0} \left[\frac{1}{(1-x)_+} + \frac{5}{2}\delta(x-1) - \delta'(x-1) + \frac{x}{4}\delta''(x-1) - 1 - x - x^2 \right] . \quad (7.93)$$

7.6.2 Twist-4 zu h_1 im Impulsraum

Um aus der allgemeinen Form des Wilson-Koeffizienten (4.54) eine Beziehung zwischen dem Twist-4 und dem Twist-2-Anteil von h_1^{NS} herzuleiten, wird völlig analog zu g_1 das Verhältnis der Momente gebildet. Das Ergebnis (5.119) gilt für g_1 ebenso wie für h_1 .

$$M_{\perp,n}^{\text{Tw-4}} = \left[\tilde{C}_{\perp,n}^{(1)} \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4} \right) \right] M_{\perp,n}^{\text{Exp,Tw-2}} \quad (7.94)$$

Für die Valenzquark-Kombination der chiral ungeraden Verteilungsfunktion $h_1(x) + h_1(-x) = h_1(x) - \bar{h}_1(x)$ folgt daher die zu (5.122) analoge Darstellung des Twist-4-Anteils von h_1 als Faltungsintegral:

$$(h_1 - \bar{h}_1)^{\text{Tw-4}}(x, Q^2) = \left(\frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \right) \int_x^1 \frac{dy}{y} C_{\perp}^{(1)}(y) (h_1 - \bar{h}_1)^{\text{Bag}} \left(\frac{x}{y}, Q^2 \right) . \quad (7.95)$$

⁴³Vgl. Meyer-Hermann, Schäfer 1997.

Da bislang keine experimentellen Informationen über h_1 vorliegen, ist es notwendig, eine Modell für h_1 im Integranden zu verwenden. Dazu wird eine Bag-Modell-Rechnung⁴⁴ herangezogen. Für die numerische Auswertung ist die führende IR-

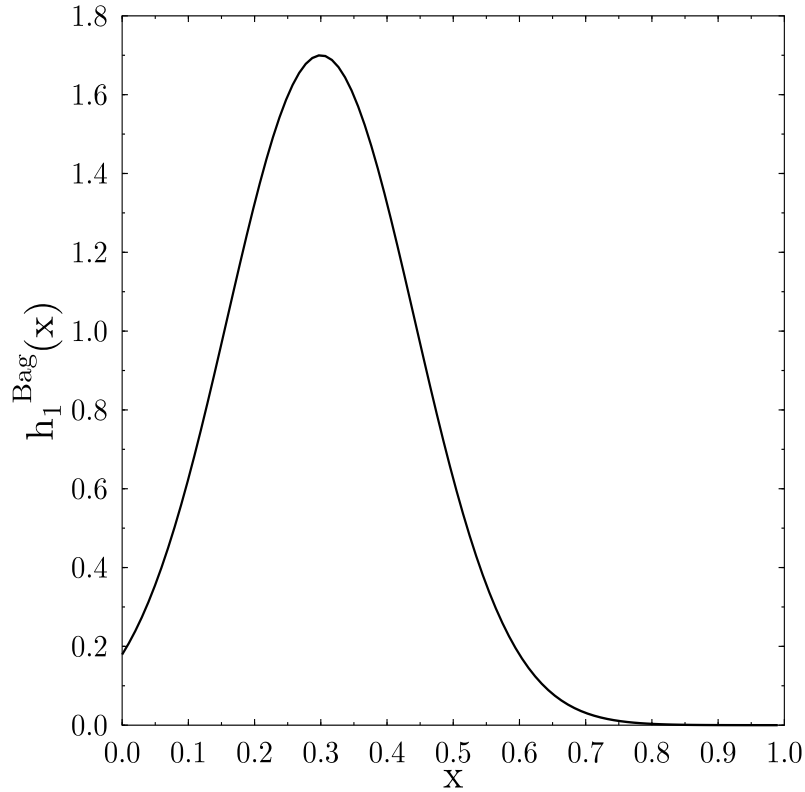


Abbildung 7.9: Die Bag-Modell-Vorhersage für die chiral ungerade Verteilungsfunktion $h_1(x)$.

Renormalon-Unsicherheit (7.92) in (7.95) einzusetzen, für $h_1(x)$ die Parametrisierung des Bag-Modell-Resultats

$$h_1^{\text{Bag}} = 1.7 \exp \left\{ -\frac{(x - 0.3)^2}{0.04} \right\} \quad (7.96)$$

einzusetzen und die Integration numerisch auszuführen. Dabei werden die gleichen Parameter wie für g_1 verwendet: die QCD-Skala $\Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 200 \text{ MeV}$, die Zahl der Quark-Flavor $N_f = 4$, die Renormierungsanpassung für das $\overline{\text{MS}}$ -Schema $C_{\overline{\text{MS}}} = -5/3$ und der Impulsübertrag $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$.

⁴⁴Vgl. Jaffe, Ji 1992; und Abb. 7.9.

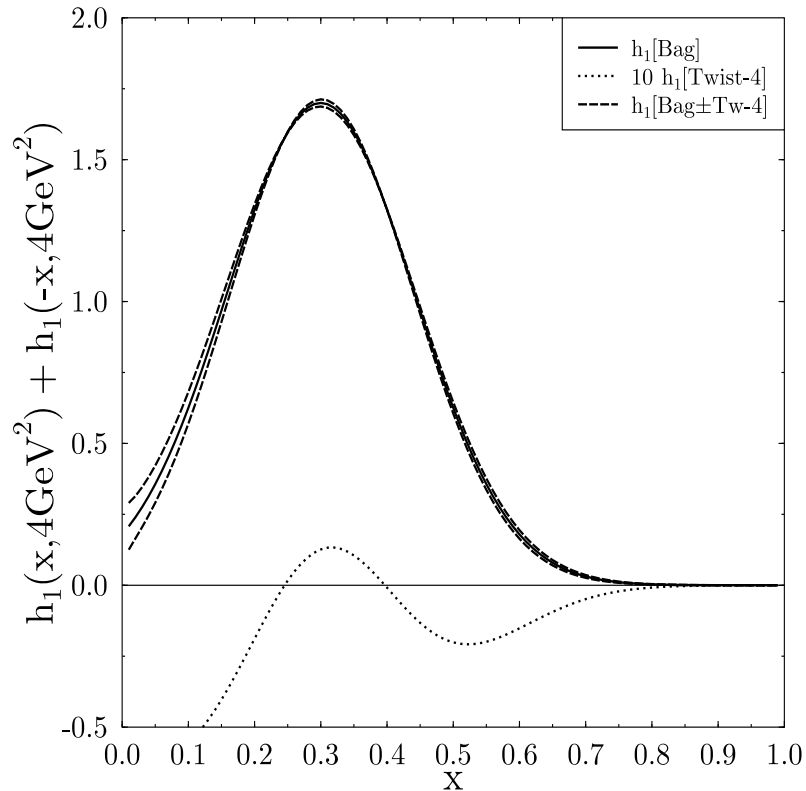


Abbildung 7.10: Die Twist-4-Korrektur (mit einem Faktor 10, gepunktete Linie) zu $h_1^{NS} - \bar{h}_1^{NS}$ und die Addition bzw. Subtraktion derselben von der Bag-Modell-Rechnung (gestrichelte Linie). Hierdurch wird der Bereich markiert, in dem der Twist-2-Anteil von $h_1^{NS} - \bar{h}_1^{NS}$ liegen muß. Die Korrektur zeigt zwei Vorzeichenwechsel bei $x \approx 0.24$ und $x \approx 0.4$. ($\Lambda_{\overline{MS}} = 200 \text{ MeV}$, $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ and $N_f = 4$).

Das Ergebnis in Abb. 7.10 zeigt eine minimale erwartete Twist-4-Korrektur⁴⁵, die sich im mittleren Bjorken- x -Bereich wegen zweier Vorzeichenwechsel sogar noch im ersten Moment mindestens teilweise weghebt, so daß die Twist-4-Korrektur dort noch kleiner sein wird. Die relative Größe der erwarteten Twist-4-Anteile sind in Abb. 7.11 gezeigt und übersteigen im Bereich $0.2 < x < 0.45$ nicht 1%. Lediglich im Bereich $0.5 < x < 0.6$ erhält man eine größere Korrektur von bis zu 10%, in einem Bereich, wo die Verlässlichkeit der Renormalon-Methode zwar noch gut sein sollte, aber bereits zunehmend schlechter wird.

⁴⁵Vgl. Meyer-Hermann, Schäfer 1997.

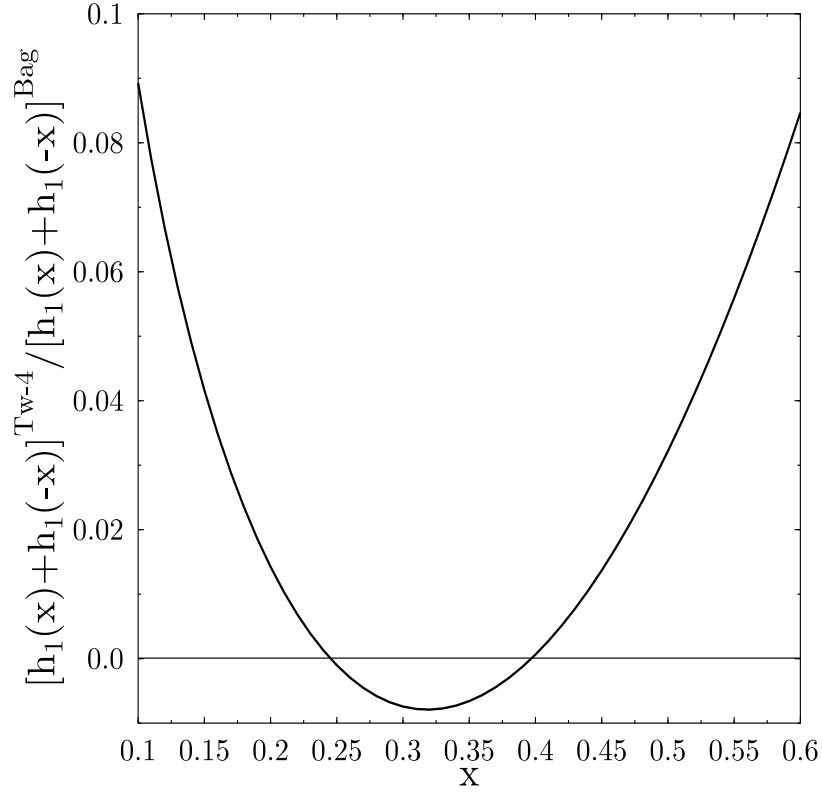


Abbildung 7.11: Der relative Anteil des vorhergesagten Twist-4-Beitrags an der Valenzquarkverteilung $h_1^{NS} - \bar{h}_1^{NS}$ aus dem Bag-Modell. $\Lambda_{\overline{MS}} = 200$ MeV, $Q^2 = 4$ GeV² and $N_f = 4$.

7.6.3 Twist-4-Korrekturen zu Momenten von h_1

Ausgehend von der IR-Renormalon-Unsicherheit im Momenten-Raum (7.90) können die Twist-4-Korrekturen zu den einzelnen Momenten der Verteilungsfunktion h_1 bestimmt werden. Definiert man

$$\int_0^1 dx x^n \left[h_1^{\text{Tw}-2}(x) + (-)^n h_1^{\text{Tw}-2}(-x) \right] = a_n^{(0)} + \mathcal{O}(a_s) \quad (7.97)$$

und

$$\int_0^1 dx x^n \left[h_1^{\text{Tw}-4}(x) + (-)^n h_1^{\text{Tw}-4}(-x) \right] = f_n^{(0)} + \mathcal{O}(a_s) \quad , \quad (7.98)$$

so ist im Rahmen der Renormalon-Abschätzung das Twist-4-Matrixelement $f_n^{(0)}$ mit (7.94) in der Form

$$\begin{aligned}
f_n^{(0)} &= \frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \int_0^1 dx x^n C_{\perp}^{(1)}(x) a_n^{(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \\
&= \frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} C_{\perp, n}^{(1)} a_n^{(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \\
&= \pm \frac{\Lambda^2 e^{-C}}{Q^2} \frac{2C_F}{b_0} \left[n - 2S_n - \frac{2}{1+n} - \frac{2}{2+n} + 3 \right] a_n^{(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \\
&\approx \pm 0.017 \left[n - 2S_n - \frac{2}{1+n} - \frac{2}{2+n} + 3 \right] a_n^{(0)} + \mathcal{O}\left(\frac{a_s}{Q^2}, \frac{1}{Q^4}\right) \quad (7.99)
\end{aligned}$$

darstellbar, wobei im letzten Schritt die im vorigen Abschnitt verwendeten Werte für die Parameter eingesetzt wurden. Daraus folgt für die einzelnen Momente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx [h_1(x) + h_1(-x)] &= a_0^{(0)}(1 \pm 0) + \mathcal{O}(a_s) \quad , \\
\int_0^1 dx x [h_1(x) - h_1(-x)] &= a_1^{(0)}(1 \pm 0.0057) + \mathcal{O}(a_s) \quad , \\
\int_0^1 dx x^2 [h_1(x) + h_1(-x)] &= a_2^{(0)}(1 \pm 0.014) + \mathcal{O}(a_s) \quad , \\
\int_0^1 dx x^3 [h_1(x) - h_1(-x)] &= a_3^{(0)}(1 \pm 0.024) + \mathcal{O}(a_s) \quad , \\
\int_0^1 dx x^4 [h_1(x) + h_1(-x)] &= a_4^{(0)}(1 \pm 0.036) + \mathcal{O}(a_s) \quad . \quad (7.100)
\end{aligned}$$

Twist-3-Matrixelemente können prinzipiell existieren, werden jedoch durch die Renormalon-Methode nicht erfaßt, da keine Pole in der Borel-Ebene bei halbzahligen Werten von s auftreten. Die erwarteten Twist-4-Korrekturen wachsen bei größeren Momenten. Dies ist konform mit der Analyse von Abb. 7.10, daß größere Korrekturen im Bereich $x > 0.5$ existieren könnten. Es ist bemerkenswert, daß für das erste Moment weder eine Störungskorrektur⁴⁶ noch eine Twist-4-Korrektur vorausgesagt wird.

⁴⁶Vgl. dazu (7.84).

Kapitel 8

Zusammenfassung

Im Zentrum dieser Arbeit standen die Vielteilchen-Korrelationen, also die höheren Twist-Korrekturen zu den Strukturfunktionen des Nukleons, die in der Lepton-Nukleon-Streuung bei mittleren Impulsüberträgen von einigen GeV eine zunehmende Bedeutung bekommen. Nach einem Resumé der theoretischen und experimentellen Behandlung der tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung wurden im Rahmen der Operatorprodukt-Entwicklung die führenden und die Twist-4-Matrixelemente zu den ersten Momenten der Strukturfunktionen $F_{2,L}$ und g_1 bestimmt. Die Abschätzung der Größe dieser Twist-4-Matrixelemente war das Hauptanliegen dieser Arbeit.

Nach einer kritischen Aufarbeitung der Renormalon-Methode zur Abschätzung höherer Twist-Korrekturen wurde diese auf die Nukleon-Strukturfunktionen in der total inklusiven tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung angewendet. Die durch die Renormalon-Unsicherheit vorhergesagten höheren Twist-Korrekturen zur Bjorken-Summenregel stimmen vom Betrag her mit QCD-Summenregel-Rechnungen überein. Aber auch allgemeiner für die polarisierte Strukturfunktion als Funktion von Bjorken- x werden durch Renormalonen kleine Korrekturen vorhergesagt, die den bisherigen Erwartungen entsprechen. Allerdings führt auch diese kleine Korrektur zu einer Unsicherheit von 25% bei der Bestimmung des Twist-3-Matrixelements der Bjorken-Summenregel, was im Moment allerdings noch innerhalb des experimentellen Fehlers liegt.

Die Anwendung der Renormalon-Methode auf die unpolarisierte longitudinale Strukturfunktion F_L ergibt eine deutlich größere Twist-4-Korrektur. Die Betrachtung der Twist-4-Korrekturen zu den einzelnen Momenten zeigt, daß die Twist-4-Korrektur für mittlere Impulsüberträge Q^2 von der gleichen Ordnung zu erwar-

ten ist wie der führende Beitrag von der Störungsreihe. Die deutliche Diskrepanz zwischen den Messungen und den bisherigen Twist-2-Vorhersagen für die longitudinale Strukturfunktion konnte durch die vorhergesagten Twist-4-Korrekturen größtenteils aufgehoben werden. Das Resultat entspricht damit den Parametrisierungen der experimentellen Daten, die eine große $1/Q^2$ -Korrektur benötigten, um die Daten gut zu reproduzieren.

Neben der Vorhersage von Twist-4-Korrekturen hat die Untersuchung gezeigt, daß die Renormalon-Methode durchaus Ergebnisse liefert, die mit den bisherigen theoretischen und experimentellen Erwartungen übereinstimmen. Deshalb kann man einen empirischen Erfolg dieser Methode verzeichnen, der ein gutes Argument für die Qualität der Renormalon-Methode darstellt. Jedoch wurde auch versucht, die theoretischen Grenzen der Methode herauszuarbeiten. Es ist zwar möglich, eine reale Verbindung der Unsicherheit der reinen Twist-2-Störungsreihe mit einem Teil der höheren Twist-Beiträge herzustellen. Die relative Größe dieses Anteils zur tatsächlichen Twist-4-Korrektur ist jedoch völlig unbestimmt. Die Vorhersagen der Renormalon-Methode dürfen daher nicht überinterpretiert werden.

Da die Renormalon-Methode auf der Resummation aller Störungskorrekturen im Limes großer Flavor-Zahlen N_f beruht, sind auch Aussagen über die Koeffizienten der Störungsreihe in dieser Näherung möglich. Die nicht führenden Terme in N_f werden durch die NNA (naive nonabelianization) angenähert. Für die Rekonstruktion der ersten Störungskoeffizienten mußte die Renormalon-Rechnung gleichzeitig in d -Dimensionen durchgeführt werden, um das Resultat renormieren zu können. Dabei traten im Fall der polarisierten Strukturfunktion g_1 Verletzungen der Ward-Identität auf, die mit der Fortsetzung der γ_5 -Matrix zu d -Dimensionen zusammenhängen. Deshalb mußte zusätzlich eine Renormierung der Ward-Identitäten durchgeführt werden.

Die ermittelten NNA-Störungskoeffizienten sind konstruktionsbedingt in erster Ordnung mit den exakten Koeffizienten identisch. Für die longitudinale Strukturfunktion F_L reproduziert die Näherung der zweiten Ordnung die exakten Koeffizienten im niedrigsten Moment bis auf 30% und wird erwartungsgemäß für höhere Momente besser. Ähnlich verhält es sich für die polarisierte Strukturfunktion g_1 . Die Qualität der NNA-Näherung kann allerdings wesentlich schlechter sein, wie für die Strukturfunktion F_2 gezeigt wurde. Eine Systematik für die schwankende Qualität der NNA-Näherung konnte nicht ermittelt werden.

Durch die Erfolge der Renormalon-Methode ermutigt, wurde sie auf die chiral ungeraden Verteilungsfunktion h_1 angewendet, die in der total inklusiven Lepton-

Nukleon-Streuung wegen der Chiralitätserhaltung an den Vertizes nicht auftritt. Sie erhält lediglich im Drell-Yan-Prozeß oder in der nicht inklusiven Lepton-Nukleon-Streuung eine Bedeutung. Da die Kenntnisse über h_1 immer noch sehr beschränkt sind, wurde deren feldtheoretische Definition und physikalische Interpretation ausgearbeitet. Außerdem wurde die äquivalente Twist-2-Definition von h_1 durch ein zeitgeordnetes Produkt eines axialvektoriellen und eines skalaren Stromprodukts bewiesen. Von der letzteren Definition ausgehend, konnten die Renormalon-Vorhersage für die Twist-4-Korrekturen ermittelt werden, die sich als außerordentlich klein erwiesen hat. Auf der anderen Seite konnten erstmals die Störungskorrekturen zu den Momenten von h_1 in erster Ordnung a_s angegeben werden.

Anhang A

A.1 Die Boreltransformation

Die Boreltransformation einer Funktion $f(Q^2)$ ist als

$$\mathcal{B}(f(Q^2))(t) \equiv \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz f(z) e^{zt} \quad (\text{A.1})$$

definiert. Im folgenden werden einige Boreltransformierte hergeleitet. Mit der Substitution $z' = -iz$ und unter Benutzung der Cauchyschen Integralformel für auf einem Bereich D holomorphe Funktionen f :¹

$$\text{ind}_\gamma(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma dz' \frac{f(z')}{z' - z} \quad (\text{A.2})$$

($\text{ind}_\gamma(z)$ ist die Windungszahl des nullhomologen Weges γ in dem Bereich D um den Punkt z) folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \frac{1}{s + Q^2} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dz \frac{e^{zt}}{z + s} \\ &= \frac{i}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{e^{iz't}}{iz' + s} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{e^{iz't}}{z' - is} \\ &= e^{iz't} \Big|_{z'=is} = e^{-st} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

also

$$\mathcal{B} \frac{1}{s + Q^2} = e^{-st} \quad . \quad (\text{A.4})$$

¹Vgl. Remmert 1984.

Außerdem folgt mit der gleichen Substitution und der Definition der δ -Funktion:

$$\mathcal{B}1 = \delta(t) \quad , \quad (\text{A.5})$$

denn

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{iz't} = \delta(t) \quad . \quad (\text{A.6})$$

Für Polynome n -ten Grades folgt ganz analog:

$$\mathcal{B}(Q^2)^n = \delta^{(n)}(t) \quad , \quad (\text{A.7})$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} z^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{iz't} (iz')^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dz' e^{iz't} = \delta^{(n)}(t) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Allgemeiner gilt für beliebige Funktionen, die mit $(Q^2)^n$ multipliziert werden

$$\mathcal{B} \left((Q^2)^n f(Q^2) \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \mathcal{B}f(Q^2) \quad . \quad (\text{A.9})$$

denn

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} z^n f(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n \int_{-i\infty}^{+i\infty} dz e^{zt} f(z) \quad . \quad (\text{A.10})$$

A.2 Die Laplacetransformation

Die Umkehrung der Boreltransformation ist die Laplacetransformation

$$\mathcal{L}(f(t))(t) = \int_0^\infty ds f(s) e^{-st} \quad . \quad (\text{A.11})$$

Durch vollständige Induktion beweist man für $n \geq 0$

$$\int_0^\infty ds s^n e^{-st} = \frac{n!}{t^{n+1}} \quad . \quad (\text{A.12})$$

Für $n = 0$ gilt tatsächlich

$$\int_0^\infty ds e^{-st} = -\frac{1}{t} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{t} \quad . \quad (\text{A.13})$$

Setzt man die Behauptung für n voraus, folgt für $n + 1$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_0^\infty ds s^{n+1} e^{-st} &= -\frac{s^{n+1}}{t} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{n+1}{t} \int_0^\infty ds s^n e^{-st} \\ &= \frac{n+1}{t} \frac{n!}{t^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{t^{n+2}} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

was zu beweisen war.

Für Funktionen, die eine Potenz von s und einen Logarithmus enthalten, gilt²:

$$\int_0^\infty ds s^{\nu-1} \ln(s) e^{-st} = \frac{\Gamma(\nu)}{t^\nu} (\psi(\nu) - \ln(t)) \quad . \quad (\text{A.15})$$

Daraus folgt nach einer Skalentransformation

$$\int_0^\infty ds s^{\nu-1} \ln\left(\frac{s}{b}\right) e^{-st} = \frac{\Gamma(\nu)}{t^\nu} (\psi(\nu) - \ln(bt)) \quad . \quad (\text{A.16})$$

Den Wert der ψ -Funktion erhält man aus (C.76) und (C.77).

A.3 Momente

Wenn man einen allgemeinen Ausdruck für die Momente einer Funktion kennt, also alle Momente einer Funktion kennt, kann man daraus die Funktion im Impulsraum rekonstruieren. Dazu sind die folgenden Formeln hilfreich:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx x^n \{x^k\} &= \frac{1}{1+k+n} \quad , \\ \int_0^1 dx x^n \{x^l \delta^{(k)}(x-1)\} &= (-)^k \frac{(n+l)!}{(n+l-k)!} \quad , \\ \int_0^1 dx x^n \left\{ \frac{-1}{(1-x)_+} \right\} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \equiv S_n \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

wobei die letzte Funktion $1/(1-x)_+$ eine Distribution ist, die durch

$$\int_0^1 dx f(x) \left\{ \frac{1}{(1-x)_+} \right\} = \int_0^1 dx \frac{f(x) - f(1)}{1-x} \quad (\text{A.18})$$

definiert ist.

²Vgl. Gradstein, Ryshik 1981: 4.352.

Die Summe S_n in (A.17) tritt meistens in komplizierterer Form auf und muß erst auf die obige Form gebracht werden. Für a, b aus den ganzen Zahlen gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a+k} &= S_n - S_a + \sum_{k=n+1}^{n+a} \frac{1}{k} = S_{n+a} - S_a \quad , \\ \sum_{k=1}^n \frac{k}{a+k} &= n - a \sum_{k=1}^n \frac{1}{a+k} = n - a(S_{n+a} - S_a) \quad , \\ \sum_{k=1}^n \frac{b+k}{a+k} &= n + (b-a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a+k} = n + (b-a)(S_{n+a} - S_a) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Spezieller ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} &= S_n + \frac{1}{1+n} - 1 \quad , \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2+k} &= S_n + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} - \frac{3}{2} \quad , \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{3+k} &= S_n + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} - \frac{11}{6} \quad , \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{4+k} &= S_n + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \frac{1}{4+n} - \frac{25}{12} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Für ein Produkt im Nenner folgt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(1+k)} = 1 - \frac{1}{1+n} \quad . \quad (\text{A.21})$$

Für eine Doppelsumme gilt die Beziehung:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} = \frac{1}{1+n} - 1 + \frac{1}{1+n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=2(1)}^n \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} \quad . \quad (\text{A.22})$$

Die auftretende Summe S_n hat die folgenden Werte:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{280}$

(A.23)

Bei der Rücktransformation von Momenten in den Impulsraum ist das Produkt von Momenten zweier Funktionen in ein Faltungsintegral umzuschreiben:

$$\int_0^1 dx x^n f(x) \int_0^1 dy y^n g(y) = \int_0^1 dx x^n f(x) \int_0^x \frac{dz}{x} \left(\frac{z}{x}\right)^n g\left(\frac{z}{x}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{dx}{x} f(x) \int_0^x dz z^n g\left(\frac{z}{x}\right) \\
&= \int_0^1 dz z^n \int_z^1 \frac{dx}{x} f(x) g\left(\frac{z}{x}\right) \quad , \quad (\text{A.24})
\end{aligned}$$

dabei wurde im ersten Schritt die Substitution $xy = z$ durchgeführt. Das doppelte Integral wird über einem Dreieck in der $z - x$ -Ebene berechnet. Die Vertauschung der Integrale dreht lediglich die Richtung der Integration auf diesem Dreieck um 90 Grad, so daß eine Integration von $x = 0, 1$ und $z = 0, x$ in eine von $z = 0, 1$ und $x = z, 1$ umgewandelt wird. Die resultierende Beziehung, daß das Produkt von Momenten zweier Funktionen als Moment der Faltung der Funktionen geschrieben werden kann, ist unabhängig von der Definition der Momente, die ebensogut als $\int_0^1 dx x^{n-1} f(x)$ definiert werden können. Außerdem kann das Faltungsprodukt verdreht werden, ohne daß die Beziehung ihre Gültigkeit verliert. Es gilt also auch

$$\int_0^1 dx x^n f(x) \int_0^1 dy y^n g(y) = \int_0^1 dz z^n \int_z^1 \frac{dx}{x} g(x) f\left(\frac{z}{x}\right) \quad . \quad (\text{A.25})$$

A.4 Die Pauli-Jordan-Funktion

Die Pauli-Jordan-Funktion ist als Kommutator von skalaren Feldoperatoren definiert:

$$i\Delta(x - y) = [\phi(x), \phi(y)] \quad . \quad (\text{A.26})$$

Die Entwicklung der Felder in ebene Wellen ist:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \left(a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{ikx} \right) \quad , \quad (\text{A.27})$$

wobei $a(k)$ und $a^+(k)$ die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren für ein Teilchen mit Impuls k sind, für die die Vertauschungsrelation

$$[a(k), a^+(k')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (\text{A.28})$$

gelten und $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ mit $k^2 = m^2$. Die Pauli-Jordan-Funktion kann in ebene Wellen entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
i\Delta(x - y) &= \int \frac{d^3k d^3k'}{\sqrt{4\omega_k\omega_{k'}(2\pi)^6}} [a(k)e^{-ikx} + a^+(k)e^{ikx}, a(k')e^{-ik'y} + a^+(k')e^{ik'y}] \\
&= \int \frac{d^3k d^3k'}{\sqrt{4\omega_k\omega_{k'}(2\pi)^6}} \left(e^{i(k'y - kx)} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') - e^{i(kx - k'y)} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}) \right) \\
&= \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \right) \quad . \quad (\text{A.29})
\end{aligned}$$

Dieses Resultat kann auch in kovarianter Form notiert werden:

$$\begin{aligned}
i\Delta(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k_0) e^{-ikx} \\
&= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) (\Theta(k_0) - \Theta(-k_0)) e^{-ikx} \\
&= \int \frac{d^4k}{2k_0(2\pi)^3} (\delta(k_0 - \omega_k) + \delta(k_0 + \omega_k)) e^{-ikx} \\
&= \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} (e^{-i(\omega_k x - \vec{k}\vec{x})} + e^{-i(-\omega_k x - \vec{k}\vec{x})}) \\
&= \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} (e^{-ikx} - e^{ikx}) \quad , \tag{A.30}
\end{aligned}$$

was mit (A.29) identisch ist. Die Pauli-Jordan-Funktion ist daher aus zwei Teilen zusammengesetzt, einem positiver und einem negativer Frequenzen:

$$i\Delta(x) = i\Delta^+(x) + i\Delta^-(x) \quad . \tag{A.31}$$

Um die Impulsintegration zu lösen, wird $i\Delta^+(x)$ wie folgt umgeformt ($K^2 = \vec{k}^2$ und $R^2 = \vec{x}^2$):

$$\begin{aligned}
i\Delta^+(x) &= \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} e^{ikx} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dK \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{K^2}{2k_0} e^{-i(k_0 x_0 - KR \cos\theta)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dK K^2}{2k_0} e^{-ik_0 x_0} \int_{-1}^1 du e^{iKRu} \\
&= \frac{-i}{R(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dK K}{2k_0} (e^{-i(k_0 x_0 - KR)} - e^{-i(k_0 x_0 + KR)}) \\
&= \frac{-i}{R(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dK K}{2k_0} e^{-i(k_0 x_0 - KR)} \\
&= \frac{i}{4\pi R} \frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\infty}^\infty \frac{dK}{k_0} e^{-i(k_0 x_0 - KR)} \quad . \tag{A.32}
\end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise kann auch der Teil negativer Frequenzen umgeformt werden. Er unterscheidet sich lediglich um ein Gesamtvorzeichen und ein Vorzeichen im Exponenten:

$$\begin{aligned}
i\Delta^-(x) &= - \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} e^{ikx} \\
&= \frac{i}{R(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dK K}{2k_0} e^{i(k_0 x_0 - KR)} \\
&= \frac{i}{4\pi R} \frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial R} \int_{-\infty}^\infty \frac{dK}{k_0} e^{i(k_0 x_0 - KR)} \quad . \tag{A.33}
\end{aligned}$$

Beide Teile können somit durch die gleiche Funktion

$$f(x_0, R) \equiv \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dK}{\sqrt{K^2 + m^2}} e^{-i(\sqrt{K^2 + m^2}x_0 - KR)} \quad (\text{A.34})$$

ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} i\Delta^+(x) &= \frac{i}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial R} f(x_0, R) \\ i\Delta^-(x) &= \frac{i}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial R} f^*(x_0, R) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Um einen expliziten Ausdruck für die Pauli-Jordan-Funktion zu erhalten, ist daher das Integral (A.34) zu lösen. Dazu wird die Substitution $k_0 = m \cosh \alpha$ und $K = m \sinh \alpha$ durchgeführt, wobei $dK = k_0 d\alpha$ ist und m die Dimension einer Masse hat:

$$f(x_0, R) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp(-im(\cosh \alpha x_0 - \sinh \alpha R)) \quad . \quad (\text{A.36})$$

In diesem Integral sind vier Fälle zu unterscheiden:

$$\begin{aligned} x_0 > 0 \quad x_0 > R &\implies x^2 > 0 & x_0 = \sqrt{x^2} \cosh \beta & R = \sqrt{x^2} \sinh \beta \\ x_0 > 0 \quad x_0 < R &\implies x^2 < 0 & x_0 = \sqrt{-x^2} \sinh \beta & R = \sqrt{-x^2} \cosh \beta \\ x_0 < 0 \quad |x_0| > R &\implies x^2 > 0 & x_0 = -\sqrt{x^2} \cosh \beta & R = \sqrt{x^2} \sinh \beta \\ x_0 < 0 \quad |x_0| < R &\implies x^2 < 0 & x_0 = -\sqrt{-x^2} \sinh \beta & R = \sqrt{-x^2} \cosh \beta \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Für den ersten Fall erhält man:

$$\begin{aligned} f_1(x_0, R) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[-im\sqrt{x^2}(\cosh \alpha \cosh \beta - \sinh \alpha \sinh \beta)] \Theta(x^2)\Theta(x_0) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[-im\sqrt{x^2} \cosh(\alpha - \beta)] \Theta(x^2)\Theta(x_0) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[-im\sqrt{x^2} \cosh \alpha] \Theta(x^2)\Theta(x_0) \\ &= \frac{1}{2} \Theta(x^2)\Theta(x_0) [J_0(m\sqrt{x^2}) - iY_0(m\sqrt{x^2})] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Hier wurden die Bessel-Funktionen J_0 und Y_0 eingeführt³. Ähnlich folgt für den Fall 2 in (A.37):

$$\begin{aligned} f_2(x_0, R) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[-im\sqrt{-x^2}(\cosh \alpha \sinh \beta - \sinh \alpha \cosh \beta)] \Theta(-x^2)\Theta(x_0) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp[im\sqrt{-x^2} \sinh(\alpha - \beta)] \Theta(-x^2)\Theta(x_0) \\ &= \frac{i}{\pi} \Theta(-x^2)\Theta(x_0) K_0(m\sqrt{-x^2}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

³Vgl. Abramowitz, Stegun 1972: Kapitel 9.

Im Fall 3 ist

$$\begin{aligned}
f_3(x_0, R) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp \left[im\sqrt{x^2} (\cosh \alpha \cosh \beta + \sinh \alpha \sinh \beta) \right] \Theta(x^2) \Theta(-x_0) \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp \left[im\sqrt{x^2} \cosh(\alpha + \beta) \right] \Theta(x^2) \Theta(-x_0) \\
&= -\frac{1}{2} \Theta(x^2) \Theta(-x_0) \left[J_0(m\sqrt{x^2}) + iY_0(m\sqrt{x^2}) \right] \quad . \quad (A.40)
\end{aligned}$$

Im Fall 4 folgt:

$$\begin{aligned}
f_4(x_0, R) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp \left[im\sqrt{-x^2} (\cosh \alpha \sinh \beta + \sinh \alpha \cosh \beta) \right] \Theta(-x^2) \Theta(-x_0) \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \exp \left[im\sqrt{-x^2} \sinh(\alpha + \beta) \right] \Theta(-x^2) \Theta(-x_0) \\
&= \frac{i}{\pi} \Theta(-x^2) \Theta(-x_0) K_0(m\sqrt{-x^2}) \quad . \quad (A.41)
\end{aligned}$$

Aus der Summe der 4 Fälle erhält man die gesamte Funktion (A.36):

$$\begin{aligned}
f(x_0, R) &= \frac{1}{2} \Theta(x^2) \epsilon(x_0) J_0(m\sqrt{x^2}) - \frac{i}{2} \Theta(x^2) Y_0(m\sqrt{x^2}) \\
&\quad + \frac{i}{\pi} \Theta(-x^2) K_0(m\sqrt{-x^2}) \quad . \quad (A.42)
\end{aligned}$$

In die Pauli-Jordan-Funktion (A.35) gehen die Ableitung nach R dieser Funktion und der komplex konjugierten Funktion ein. Die dafür notwendigen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} K_0(m\sqrt{-x^2}) &= \frac{1}{\sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \\
\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} J_0(m\sqrt{x^2}) &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \\
\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} Y_0(m\sqrt{x^2}) &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} Y_1(m\sqrt{x^2}) \\
\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \Theta(\pm x^2) &= -2\delta(x^2) \quad . \quad (A.43)
\end{aligned}$$

Setzt man (A.42) in (A.35) unter Verwendung der Ableitungen (A.43) ein, erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
i\Delta^+ &= \frac{i}{4\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2) + \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \Theta(-x^2) \\
&\quad - \frac{m}{8\pi \sqrt{x^2}} Y_1(m\sqrt{x^2}) \Theta(x^2) - \frac{im\epsilon(x_0)}{8\pi \sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \Theta(x^2) \\
i\Delta^- &= \frac{i}{4\pi} \epsilon(x_0) \delta(x^2) - \frac{m}{4\pi^2 \sqrt{-x^2}} K_1(m\sqrt{-x^2}) \Theta(-x^2) \\
&\quad + \frac{m}{8\pi \sqrt{x^2}} Y_1(m\sqrt{x^2}) \Theta(x^2) - \frac{im\epsilon(x_0)}{8\pi \sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \Theta(x^2) \quad . \quad (A.44)
\end{aligned}$$

Mit (A.31) folgt damit für die gesamte Pauli-Jordan-Funktion

$$i\Delta(x) = \frac{i}{2\pi} \epsilon(x_0)\delta(x^2) - \frac{im}{4\pi\sqrt{x^2}} J_1(m\sqrt{x^2}) \epsilon(x_0)\Theta(x^2) \quad . \quad (\text{A.45})$$

Diese Funktion ist für kleine Massen auf dem Lichtkegel dominant. Verwendet man die Reihendarstellung

$$J_1(m\sqrt{x^2}) = \frac{m\sqrt{x^2}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{m^2x^2}{4}\right)^k \quad (\text{A.46})$$

der Besselfunktion J_1 , wird deutlich, daß die Pauli-Jordan-Funktion für kleine Massen die Form

$$i\Delta(x) = \frac{i}{2\pi} \epsilon(x_0)\delta(x^2) - \frac{im^2}{8\pi} \epsilon(x_0)\Theta(x^2) + \frac{im^4x^2}{64\pi} \epsilon(x_0)\Theta(x^2) + \mathcal{O}(x^4m^6) \quad (\text{A.47})$$

erhält.

A.5 Hypergeometrische Funktion

Integraldarstellung:

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dt \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-xt)^a} \quad . \quad (\text{A.48})$$

Reihendarstellung:

$${}_2F_1(a, b, c, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\Gamma(1+n)} x^n \quad . \quad (\text{A.49})$$

Zusammenhänge von speziellen hypergeometrischen Funktionen⁴:

$$\begin{aligned} & 4\omega {}_2F_1(1+s, 1+s, 4+s, \omega) \\ &= (2+s)(3+s)(1-\omega) {}_2F_1(1+s, 1+s, 2+s, \omega) \\ & - (3+s)(2+s-3\omega) {}_2F_1(1+s, 1+s, 3+s, \omega) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$\begin{aligned} & 4\omega {}_2F_1(1+s, 1+s, 4+s, \omega) \\ &= (1+s)(3+s)(1-\omega) {}_2F_1(2+s, 1+s, 3+s, \omega) \\ & - (3+s)(1+s-2\omega) {}_2F_1(1+s, 1+s, 3+s, \omega) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

$$2\omega {}_2F_1(1+s, 1+s, 4+s, \omega)$$

⁴Vgl. Abramowitz, Stegun 1972.

$$\begin{aligned}
&= (3+s) {}_2F_1(s, 1+s, 3+s, \omega) \\
&- (3+s)(1-\omega) {}_2F_1(1+s, 1+s, 3+s, \omega) \quad , \quad (A.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}_2F_1(1+s, 1+s, 3+s, \omega) \\
&= (2+s) {}_2F_1(1+s, 1+s, 2+s, \omega) \\
&- (1+s) {}_2F_1(2+s, 1+s, 3+s, \omega) \quad , \quad (A.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\omega {}_2F_1(1+s, 1+s, 3+s, \omega) \\
&= (1+s)(2+s)(1-\omega) {}_2F_1(2+s, 1+s, 2+s, \omega) \\
&- (2+s)(1+s-\omega) {}_2F_1(1+s, 1+s, 2+s, \omega) \quad , \quad (A.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\omega {}_2F_1(1+s, 1+s, 3+s, \omega) \\
&= (2+s) {}_2F_1(s, 1+s, 2+s, \omega) \\
&- (2+s)(1-\omega) {}_2F_1(1+s, 1+s, 2+s, \omega) \quad . \quad (A.55)
\end{aligned}$$

Für Ableitungen von hypergeometrischen Funktionen gilt:

$${}_2F_1(a+n, b+n, c+n, \omega) = \frac{\Gamma(c+n)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)} \frac{d^n}{d\omega^n} {}_2F_1(a, b, c, \omega) . \quad (A.56)$$

$$\begin{aligned}
{}_2F_1(a, b, c+n, \omega) &= \frac{\Gamma(c+n)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)\Gamma(c-a+n)\Gamma(c-b+n)} (1-\omega)^{c-a-b+n} \\
&\frac{d^n}{d\omega^n} \left((1-\omega)^{a+b-c} {}_2F_1(a, b, c, \omega) \right) \quad . \quad (A.57)
\end{aligned}$$

Einige spezielle hypergeometrische Funktionen sind:

$${}_2F_1(1, 1, 2, \omega) = -\frac{1}{\omega} \ln(1-\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n} \omega^n \quad , \quad (A.58)$$

$${}_2F_1(2, 2, 3, \omega) = \frac{2}{\omega^2} \ln(1-\omega) + \frac{2}{\omega(1-\omega)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{2+n} \omega^n \quad , \quad (A.59)$$

$${}_2F_1(2, 2, 4, \omega) = \frac{6(\omega-2)}{\omega^3} \ln(1-\omega) - \frac{12}{\omega^2} = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{(2+n)(3+n)} \omega^n \quad , \quad (A.60)$$

$${}_2F_1(2, 3, 4, \omega) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{3+n} \omega^n \quad , \quad (A.61)$$

$${}_2F_1(2, 2, 3, \omega) - \frac{1}{3} {}_2F_1(2, 2, 4, \omega) = \frac{4}{\omega^2} \ln(1-\omega) + \frac{2(2-\omega)}{\omega^2(1-\omega)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{3+n} \omega^n . \quad (A.62)$$

A.6 Operator-Identitäten

Die Untersuchung des dritten und vierten Terms in (3.11) erfordert einige Vorbereitungen. Bei der Zerlegung von höherdimensionalen Operatoren in ihre Operator-Spin-Anteile treten neue Operatoren auf, die im folgenden durch Gluon-Feldstärke-Tensor ausgedrückt werden. Dazu sind einige Operator-Identitäten notwendig. Der Gluon-Feldstärke-Tensor kann durch die Impulsoperatoren ausgedrückt werden:

$$igG_{\mu\nu} \equiv igG_{\mu\nu}^a t^a = [P_\mu, P_\nu] \quad , \quad (\text{A.63})$$

wobei t^a die Generatoren der Farbgruppe sind und a ein Farbindex. Der duale Feldtensor wird durch

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\beta\rho} G^{\beta\rho,a} \quad (\text{A.64})$$

definiert. Bei der Herleitung der Operator-Identitäten wird die Bewegungsgleichung für masselose Quark-Felder

$$\not{P} \psi = 0 = \overline{\psi} \not{P} \quad (\text{A.65})$$

verwendet.

Aus der Hermitizität von Strom- und Impuls-Operator sowie aus $t^{a\dagger} = t^{a,-1} = t^a$ für die Generatoren der SU(3) folgt

$$\{P^\alpha, G_{\alpha\beta}^a\} = 0 \quad , \quad (\text{A.66})$$

denn

$$(igG_{\alpha\beta}^a)^\dagger = [P_\beta, P_\alpha] t^{a,-1} = -igG_{\alpha\beta}^a \implies (D^\alpha G_{\alpha\beta}^a)^\dagger = -G_{\alpha\beta}^a D^\alpha \quad . \quad (\text{A.67})$$

Da andererseits

$$(D^\alpha G_{\alpha\beta}^a)^\dagger = \left(-\frac{1}{2} g \overline{\psi} \gamma_\beta t^a \psi \right)^\dagger = D^\alpha G_{\alpha\beta}^a \quad , \quad (\text{A.68})$$

woraus die Behauptung (A.66) folgt.

Es gilt eine Jacobi-Identität für die Kommutatoren von Impuls- und Gluonfeld-Operator, denn

$$\begin{aligned} [P_\rho, igG_{\mu\nu}] &= igP_\rho G_{\mu\nu} - igG_{\mu\nu} P_\rho \\ &= P_\rho [P_\mu, P_\nu] - [P_\mu, P_\nu] P_\rho \\ &= [P_\rho, P_\mu P_\nu] - [P_\rho, P_\nu P_\mu] \\ &= [P_\rho, P_\mu] P_\nu + P_\mu [P_\rho, P_\nu] - [P_\rho, P_\nu] P_\mu - P_\nu [P_\rho, P_\mu] \\ &= [P_\mu, igG_{\rho\nu}] - [P_\nu, igG_{\rho\mu}] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Ein total antisymmetrischer Ausdruck, aus dem durch Kontraktion mit γ^μ unter Verwendung der Bewegungsgleichung die Identität

$$\bar{\psi} [P_\rho, igG_{\mu\nu}] \gamma^\mu \psi = \bar{\psi} [P_\nu, igG_{\mu\rho}] \gamma^\mu \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad (\text{A.70})$$

oder nur mit Impulsoperatoren

$$\bar{\psi} P_\rho \not{P} P_\nu \psi = \bar{\psi} P_\nu \not{P} P_\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad (\text{A.71})$$

folgt.

Außerdem gilt wegen der Bewegungsgleichung die Identität

$$\begin{aligned} \bar{\psi} igG_{\alpha\rho} P_\beta \gamma^\rho \psi &= \bar{\psi} [P_\alpha, P_\rho] P_\beta \gamma^\rho \psi \\ &= \bar{\psi} P_\alpha P_\rho P_\beta \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} P_\alpha [P_\rho, P_\beta] \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} P_\alpha igG_{\rho\beta} \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Wegen (A.71) gilt die gleiche Identität mit Vertauschung von α und β , so daß insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} igG_{\alpha\rho} P_\beta \gamma^\rho \psi &= \bar{\psi} P_\alpha igG_{\rho\beta} \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} igG_{\beta\rho} P_\alpha \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} P_\beta igG_{\rho\alpha} \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Für Operatoren mit Kombinationen von drei Impulsoperatoren und einer γ -Matrix folgen Zusammenhänge zu Operatoren mit Gluonfeld-Operatoren:

$$\bar{\psi} P_\alpha \not{P} P_\beta \psi = \bar{\psi} P_\alpha [P_\rho, P_\beta] \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) = \bar{\psi} P_\alpha igG_{\rho\beta} \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad (\text{A.74})$$

$$\bar{\psi} P^\beta \not{P} P_\beta \psi = \bar{\psi} P^\beta igG_{\rho\beta} \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad (\text{A.75})$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} P^2 P_\alpha \gamma_\beta \psi &= \bar{\psi} g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu P_\alpha \gamma_\beta \psi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} P^\mu P^\nu P_\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} [P^\mu, P^\nu] P_\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} igG^{\mu\nu} P_\alpha (\sigma_{\nu\mu\beta\rho} + i\varepsilon_{\nu\mu\beta\rho} \gamma_5) \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\ &= \bar{\psi} igG_{\beta\rho} P_\alpha \gamma^\rho \psi - \bar{\psi} ig\tilde{G}_{\beta\rho} P_\alpha i\gamma_5 \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \quad (\text{A.76}) \\ \bar{\psi} P_\alpha P^2 \gamma_\beta \psi &= \frac{1}{2} \bar{\psi} P_\alpha \not{P} \not{P} \gamma_\beta \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} P_\alpha P^\mu P^\nu \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta \psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\psi} P_\alpha P P \gamma_\beta \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} P_\alpha [P^\mu, P^\nu] \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\beta \psi \\
&= \bar{\psi} [P_\alpha, P_\rho] P^\lambda \gamma^\rho \gamma_\lambda \gamma_\beta \psi \\
&\quad + \frac{1}{2} \bar{\psi} P_\alpha i g G^{\mu\nu} (\sigma_{\nu\mu\beta\rho} + i \varepsilon_{\nu\mu\beta\rho} \gamma_5) \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= 2 \bar{\psi} i g G_{\alpha\rho} P^\lambda \gamma^\rho \psi + \bar{\psi} P_\alpha i g G_{\beta\rho} \gamma^\rho \psi - \bar{\psi} P_\alpha i g \tilde{G}_{\beta\rho} i \gamma_5 \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -\bar{\psi} P_\alpha i g G_{\beta\rho} \gamma^\rho \psi - \bar{\psi} P_\alpha i g \tilde{G}_{\beta\rho} i \gamma_5 \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} P^\lambda P_\alpha P_\lambda \gamma_\beta \psi &= \bar{\psi} P^2 P_\alpha \gamma_\beta \psi + \bar{\psi} P^\lambda [P_\alpha, P_\lambda] \gamma_\beta \psi \\
&= \bar{\psi} i g G_{\beta\rho} P_\alpha \gamma^\rho \psi + \bar{\psi} P^\rho i g G_{\alpha\rho} \gamma_\beta \psi \\
&\quad - \bar{\psi} i g \tilde{G}_{\beta\rho} P_\alpha i \gamma_5 \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} P^\lambda P_\alpha P_\lambda \gamma_\beta \psi &= \bar{\psi} P_\alpha P^2 \gamma_\beta \psi + \bar{\psi} [P^\lambda, P_\alpha] P_\lambda \gamma_\beta \psi \\
&= -\bar{\psi} P_\alpha i g G_{\beta\rho} \gamma^\rho \psi + \bar{\psi} i g G_{\rho\alpha} P^\rho \gamma_\beta \psi \\
&\quad - \bar{\psi} P_\alpha i g \tilde{G}_{\beta\rho} i \gamma_5 \gamma^\rho \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) . \tag{A.79}
\end{aligned}$$

Es wurden (B.36) und die Identitäten aus diesem Abschnitt verwendet.

Für die Operatoren mit ε -Tensoren ist:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} P^\alpha P^\beta P^\rho \gamma^\lambda \psi &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} [P^\alpha, P^\beta] P^\rho \gamma^\lambda \psi \\
&= \frac{1}{2} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda} i g G^{\alpha\beta} P^\rho \gamma^\lambda \psi \\
&= \bar{\psi} i g \tilde{G}_{\mu\lambda} P^\rho \gamma^\lambda \psi \tag{A.80}
\end{aligned}$$

$$\bar{\psi} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} P^\rho P^\alpha P^\beta \gamma^\lambda \psi = \bar{\psi} P^\rho i g \tilde{G}_{\mu\lambda} \gamma^\lambda \psi \tag{A.81}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} P^\alpha [P^\rho, P^\beta] \gamma^\lambda \psi &= -i \gamma_5 \bar{\psi} P^\alpha [P^\rho, P^\beta] i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} \gamma_5 \gamma^\lambda \psi \\
&= i \gamma_5 \bar{\psi} P^\alpha [P^\rho, P^\beta] \sigma_{\alpha\mu\beta\lambda} \gamma^\lambda \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= i \gamma_5 \bar{\psi} (P_\mu [P^\rho, P^\eta] \gamma_\eta - P_\eta [P^\rho, P^\eta] \gamma_\mu) \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= -\bar{\psi} P_\mu g G^{\rho\eta} \gamma_5 \gamma_\eta \psi + \bar{\psi} P_\eta g G^{\rho\eta} \gamma_5 \gamma_\mu \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.82}
\end{aligned}$$

$$\bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} [P^\alpha, P^\rho] P^\beta \gamma^\lambda \psi = -\bar{\psi} g G^{\eta\rho} P_\mu \gamma_5 \gamma_\eta \psi + \bar{\psi} g G^{\eta\rho} P_\eta \gamma_5 \gamma_\mu \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.83}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} P^\alpha P^\rho P^\beta \gamma^\lambda \psi &= \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} P^\alpha [P^\rho, P^\beta] \gamma^\lambda \psi + \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} P^\alpha P^\beta P^\rho \gamma^\lambda \psi \\
&= -\bar{\psi} P_\mu g G^{\rho\eta} \gamma_5 \gamma_\eta \psi + \bar{\psi} P_\eta g G^{\rho\eta} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \\
&\quad - \bar{\psi} i g \tilde{G}_{\mu\lambda} P^\rho \gamma^\lambda \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda} P^\alpha P^\rho P^\beta \gamma^\lambda \psi &= -\bar{\psi} g G^{\eta\rho} P_\mu \gamma_5 \gamma_\eta \psi + \bar{\psi} g G^{\eta\rho} P_\eta \gamma_5 \gamma_\mu \psi \\
&\quad - \bar{\psi} P^\rho i g \tilde{G}_{\mu\lambda} \gamma^\lambda \psi + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.85}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} P^\alpha P^\beta P^\lambda \gamma^\rho \psi &= \frac{1}{4} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} [P^\alpha, P^\beta] P^\lambda \gamma^\rho \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} P^\alpha [P^\beta, P^\lambda] \gamma^\rho \psi \\
&= \frac{1}{4} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} i g G^{\alpha\beta} P^\lambda \gamma^\rho \psi + \frac{1}{4} \bar{\psi} \varepsilon_{\alpha\beta\lambda\mu} P^\alpha i g G^{\beta\lambda} \gamma^\rho \psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}ig\tilde{G}_{\lambda\mu}P^\lambda\gamma^\rho\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}P^\alpha ig\tilde{G}_{\alpha\mu}\gamma^\rho\psi \\
&= \frac{1}{2}\bar{\psi}ig\{\tilde{G}_{\lambda\mu}, P^\lambda\}\gamma^\rho\psi
\end{aligned} \tag{A.86}$$

$$\bar{\psi}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}P^\alpha P^\beta P^\lambda\gamma^\rho\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}ig\{\tilde{G}_{\lambda\rho}, P^\lambda\}\gamma^\rho\psi \quad . \tag{A.87}$$

Alle hier untersuchten Operatoren können durch die vier Operatoren

$$\begin{aligned}
X_{\lambda\rho} &= 2\bar{\psi}P^n igG_{\eta\rho}\gamma_\lambda\psi \\
Y_{1,\lambda\rho} &= -\bar{\psi}ig\tilde{G}_{\lambda\eta}P_\rho\gamma^\eta i\gamma_5\psi \\
Y_{2,\lambda\rho} &= -\bar{\psi}P_\rho ig\tilde{G}_{\lambda\eta}\gamma^\eta i\gamma_5\psi \\
Y_{\lambda\rho} &= \frac{1}{2}(Y_{1,\lambda\rho} + Y_{2,\lambda\rho}) \\
Z_{\lambda\rho} &= \bar{\psi}P_\lambda igG_{\eta\rho}\gamma^\eta\psi
\end{aligned} \tag{A.88}$$

ausgedrückt werden⁵:

$$\bar{\psi}P_\alpha \not{P} P_\beta\psi = Z_{\alpha\beta} + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.89}$$

$$\bar{\psi}P^\beta \not{P} P_\beta\psi = Z^\alpha_\alpha + \mathcal{O}(\text{EM}) = \frac{1}{2}X^\alpha_\alpha + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.90}$$

$$\bar{\psi}P^2 P_\alpha\gamma_\beta\psi = Z_{\alpha\beta} - Y_{1,\beta\alpha} + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.91}$$

$$\bar{\psi}P_\alpha P^2\gamma_\beta\psi = Z_{\alpha\beta} - Y_{2,\beta\alpha} + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.92}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}P^\lambda P_\alpha P_\lambda\gamma_\beta\psi &= Z_{\alpha\beta} - Y_{1,\beta\alpha} - \frac{1}{2}X_{\beta\alpha} + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= Z_{\alpha\beta} - Y_{2,\beta\alpha} - \frac{1}{2}X_{\beta\alpha} + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= Z_{\alpha\beta} - Y_{\beta\alpha} - \frac{1}{2}X_{\beta\alpha} + \mathcal{O}(\text{EM})
\end{aligned} \tag{A.93}$$

$$\bar{\psi}i\varepsilon_{\alpha\beta\mu\lambda}P^\alpha P^\beta P^\rho\gamma_5\gamma^\lambda\psi = Y_{1,\mu}^\rho \tag{A.94}$$

$$\bar{\psi}i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda}P^\rho P^\alpha P^\beta\gamma_5\gamma^\lambda\psi = Y_{2,\mu}^\rho \tag{A.95}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}i\varepsilon_{\alpha\mu\beta\lambda}P^\alpha P^\rho P^\beta\gamma_5\gamma^\lambda\psi &= Z_\mu^\rho - \frac{1}{2}X_\mu^\rho - Y_{1,\mu}^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= Z_\mu^\rho - \frac{1}{2}X_\mu^\rho - Y_{2,\mu}^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) \\
&= Z_\mu^\rho - \frac{1}{2}X_\mu^\rho - Y_\mu^\rho + \mathcal{O}(\text{EM})
\end{aligned} \tag{A.96}$$

$$\bar{\psi}i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}P^\alpha P^\beta P^\lambda\gamma_5\gamma^\rho\psi = Y_\mu^\mu \quad . \tag{A.97}$$

Aus (A.93) und (A.96) folgt die Relation

$$Y_\mu^\rho = Y_{1,\mu}^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) = Y_{2,\mu}^\rho + \mathcal{O}(\text{EM}) \tag{A.98}$$

⁵Entsprechende Operatoren werden in Shuryak, Vainshtein 1982 in (2.16) verwendet.

oder mit der Definition (A.88)

$$\bar{\psi}ig\tilde{G}_{\lambda\eta}P_{\rho}\gamma^n i\gamma_5\psi = \bar{\psi}P_{\rho}ig\tilde{G}_{\lambda\eta}\gamma^n i\gamma_5\psi \quad . \quad (\text{A.99})$$

Anhang B

γ -Algebra

B.1 Definition und Darstellung der γ -Algebra

Die Clifford-Algebra ist durch

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

definiert, wobei g der metrische Tensor ist und $\mu, \nu = 0..3$. Man kann die Clifford-Algebra mit Hilfe von Pauli-Matrizen darstellen:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

wobei die Pauli-Matrizen durch

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

gegeben sind. Die komplexe Konjugation ergibt:

$$\left(\gamma^{0,1,3}\right)^* = \gamma^{0,1,3}, \quad \left(\gamma^2\right)^* = -\gamma^2. \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 Produkte von zwei γ -Matrizen

Die Produkte von gleichen Matrizen ergeben jeweils die Einheitsmatrix:

$$\gamma^0 \gamma^0 = \mathbf{1}, \quad \gamma^i \gamma^i = -\mathbf{1}, \quad (\text{B.5})$$

wobei über i nicht summiert wird. Die Produkte unterschiedlicher Matrizen lauten:

$$\begin{aligned} \gamma^0 \gamma^i &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma^i \\ \sigma^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, & i \gamma^2 \gamma^3 &= \begin{pmatrix} \sigma^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^1 \end{pmatrix}, \\ -i \gamma^1 \gamma^3 &= \begin{pmatrix} \sigma^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \end{pmatrix}, & i \gamma^1 \gamma^2 &= \begin{pmatrix} \sigma^3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.1.2 Hermitesche Konjugation

Die Transponierten der γ -Matrizen sind:

$$\gamma^{0\text{T}} = \gamma^0, \quad \gamma^{1\text{T}} = -\gamma^1, \quad \gamma^{2\text{T}} = \gamma^2, \quad \gamma^{3\text{T}} = -\gamma^3. \quad (\text{B.7})$$

Daraus kann auch die folgende nützliche Beziehung abgeleitet werden ($i = 1, 3$):

$$\gamma_0 \gamma_\mu^* \gamma_0 = \begin{cases} \gamma_0 \gamma_0 \gamma_0 = \gamma_0 = \gamma_0^{\text{T}} \\ \gamma_0 \gamma_i \gamma_0 = -\gamma_i = \gamma_i^{\text{T}} \\ \gamma_0 \gamma_2 \gamma_0 = \gamma_2 = \gamma_2^{\text{T}} \end{cases} = \gamma_\mu^{\text{T}}. \quad (\text{B.8})$$

Die hermitesche Konjugation von γ -Matrizen ergibt:

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i. \quad (\text{B.9})$$

Das Produkt einer Matrix mit ihrer hermitesch Konjugierten ist:

$$\gamma^0 \gamma^{0\dagger} = \gamma^i \gamma^{i\dagger} = \mathbf{1}. \quad (\text{B.10})$$

Die Konjugation von Produkten von γ -Matrizen ist:

$$\begin{aligned} (\gamma^\mu \gamma^\mu)^\dagger &= \mathbf{1}, \\ (\gamma^0 \gamma^i)^\dagger &= \gamma^0 \gamma^i, \\ (i \gamma^i \gamma^j)^\dagger &= i \gamma^i \gamma^j. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

B.1.3 Die γ_5 Matrix

Die Definition der γ_5 -Matrix ist

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 \quad . \quad (\text{B.12})$$

In der obigen Darstellung gilt damit

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{B.13})$$

γ_5 antikommutiert mit den übrigen Matrizen:

$$\gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = 0 \quad . \quad (\text{B.14})$$

Das Produkt von γ_5 mit sich selbst ist die Einheitsmatrix:

$$\gamma_5\gamma_5 = \mathbf{1} \quad (\text{B.15})$$

und γ_5 ist hermitesch

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.16})$$

woraus mit $i = 1, 2, 3$

$$(i\gamma_5\gamma_0)^\dagger = i\gamma_5\gamma_0 \quad , \quad (i\gamma_5\gamma_j)^\dagger = -i\gamma_5\gamma_j \quad (\text{B.17})$$

folgt.

B.1.4 Der Kommutator von γ -Matrizen

Der Kommutator von zwei γ -Matrizen erhält eine eigene Bezeichnung:

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad . \quad (\text{B.18})$$

Spezieller ist

$$\sigma_{0i} = -\sigma_{i0} = i\gamma_0\gamma_i$$

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ +i\gamma_i\gamma_j & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad . \quad (\text{B.19})$$

Für die hermitesche Konjugation folgt:

$$\sigma_{0i}^\dagger = -\sigma_{0i} \quad , \quad \sigma_{ij}^\dagger = \sigma_{ij} \quad . \quad (\text{B.20})$$

Außerdem gilt

$$[\gamma_5, \sigma_{\mu\nu}] = 0 \quad . \quad (\text{B.21})$$

B.1.5 *Sigma-Tensor*

σ ist als¹

$$\sigma_{1234} = g_{12}g_{34} - g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23} \quad (\text{B.22})$$

definiert. Die Indizes von σ sind zyklisch vertauschbar. σ hat darüber hinaus die folgenden Symmetrieeigenschaften:

$$\sigma_{1234} = \sigma_{3214} = \sigma_{1432} = \sigma_{3412} \quad . \quad (\text{B.23})$$

σ verhält sich unter Kontraktion mit dem metrischen Tensor wie folgt:

$$\begin{aligned} g^{12}\sigma_{1234} &= 4g_{34} \quad , \\ g^{13}\sigma_{1234} &= -2g_{24} \quad , \\ g^{14}\sigma_{1234} &= 4g_{23} \quad , \\ g^{23}\sigma_{1234} &= 4g_{14} \quad , \\ g^{24}\sigma_{1234} &= -2g_{13} \quad , \\ g^{34}\sigma_{1234} &= 4g_{12} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Eine nützliche Abkürzung für die Berechnung von Spuren über γ -Matrizen ist

$$\Sigma_{23456}^1 = g_{12}\sigma_{3456} - g_{13}\sigma_{2456} + g_{14}\sigma_{2356} - g_{15}\sigma_{2346} + g_{16}\sigma_{2345} \quad . \quad (\text{B.25})$$

Unter Kontraktion mit dem metrischen Tensor ergibt sich:

$$\begin{aligned} g^{14}\Sigma_{23456}^1 &= 4g_{23}g_{56} \quad , \\ g^{15}\Sigma_{23456}^1 &= -2\sigma_{2346} \quad , \\ g^{24}\Sigma_{23456}^1 &= -2\sigma_{1356} \quad , \\ g^{25}\Sigma_{23456}^1 &= 4g_{16}g_{34} \quad , \\ g^{26}\Sigma_{23456}^1 &= -2\sigma_{1345} \quad , \\ g^{36}\Sigma_{23456}^1 &= 4g_{12}g_{45} \quad , \\ g^{46}\Sigma_{23456}^1 &= -2\sigma_{1235} \quad , \\ g^{56}\Sigma_{23456}^1 &= 4\sigma_{1234} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Die Kontraktion eines Tensors zweiter Stufe mit σ ergibt:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu\alpha\beta}B^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}B_{\alpha}^{\alpha} - B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu} \quad , \\ \sigma_{\mu\alpha\nu\beta}B^{\alpha\beta} &= -g_{\mu\nu}B_{\alpha}^{\alpha} + B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu} \quad , \\ \sigma_{\mu\alpha\beta\nu}B^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}B_{\alpha}^{\alpha} + B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

¹Die Lorentzindizes werden in diesem Kapitel hin und wieder als einfache Zahlen geschrieben, also $\gamma_{\mu_1} = \gamma_1$.

Für ein gegenüber Vertauschung der Indizes symmetrischen Tensor zweiter Stufe $A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\alpha\nu\beta}A^{\alpha\beta} &= -g_{\mu\nu}A_{\alpha}^{\alpha} + 2A_{\mu\nu} \quad , \\ \sigma_{\alpha\mu\nu\beta}A^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}A_{\alpha}^{\alpha} \quad , \\ \sigma_{\alpha\beta\mu\nu}A^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}A_{\alpha}^{\alpha} \quad , \\ \sigma_{\mu\alpha\beta\nu}A^{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu}A_{\alpha}^{\alpha} \quad .\end{aligned}\tag{B.28}$$

B.1.6 ε -Tensor

Für die Definition des ε -Tensors gibt es verschiedene Konventionen. Hier wird $\varepsilon_{0123} = 1$ gewählt, wobei hier tatsächlich die Komponenten und keine Indizes gemeint sind. Der ε -Tensor ist total antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes. Es gelten die Symmetriebeziehung:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} &= -\varepsilon_{\beta\alpha\lambda\sigma} \quad , \\ \varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} &= -\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma} \quad .\end{aligned}\tag{B.29}$$

Für Kontraktionen des total antisymmetrischen Tensors gilt:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} = -24 \quad ,\tag{B.30}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\sigma} = -6g_{\rho}^{\sigma} \quad ,\tag{B.31}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} = 2g_{\mu}^{\rho}g_{\nu}^{\lambda} - 2g_{\mu}^{\lambda}g_{\nu}^{\rho} \quad .\tag{B.32}$$

Die Jacobi-Identität lautet:

$$g_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} = g_{\alpha\nu}\varepsilon_{\mu\beta\lambda\rho} - g_{\beta\nu}\varepsilon_{\mu\lambda\rho\alpha} + g_{\lambda\nu}\varepsilon_{\mu\rho\alpha\beta} - g_{\rho\nu}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\lambda} \quad .\tag{B.33}$$

Das Produkt von zwei ε -Tensoren mit nur einem kontrahierten Index kann durch die Determinante

$$\varepsilon_{\alpha'\beta'\lambda'\rho}\varepsilon^{\alpha\beta\lambda\rho} = - \begin{vmatrix} g_{\alpha'}^{\alpha} & g_{\beta'}^{\alpha} & g_{\lambda'}^{\alpha} \\ g_{\alpha'}^{\beta} & g_{\beta'}^{\beta} & g_{\lambda'}^{\beta} \\ g_{\alpha'}^{\lambda} & g_{\beta'}^{\lambda} & g_{\lambda'}^{\lambda} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &+ g_{\alpha'}^{\alpha}g_{\lambda'}^{\beta}g_{\beta'}^{\lambda} + g_{\lambda'}^{\alpha}g_{\beta'}^{\beta}g_{\alpha'}^{\lambda} + g_{\beta'}^{\alpha}g_{\alpha'}^{\beta}g_{\lambda'}^{\lambda} \\ &- g_{\alpha'}^{\alpha}g_{\beta'}^{\beta}g_{\lambda'}^{\lambda} - g_{\beta'}^{\alpha}g_{\lambda'}^{\beta}g_{\alpha'}^{\lambda} - g_{\lambda'}^{\alpha}g_{\alpha'}^{\beta}g_{\beta'}^{\lambda} \end{aligned}\tag{B.34}$$

ausgedrückt werden. Die Kontraktion des total antisymmetrischen Tensors mit σ ergibt:

$$\sigma_{\alpha\eta\mu\rho}\varepsilon_{\nu}^{\alpha\lambda\sigma} = g_{\mu\rho}\varepsilon_{\nu\eta}^{\lambda\sigma} + g_{\mu\eta}\varepsilon_{\nu\rho}^{\lambda\sigma} - g_{\eta\rho}\varepsilon_{\nu\mu}^{\lambda\sigma} \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\lambda\mu\rho}\varepsilon_{\nu}^{\alpha\lambda\sigma} &= 2\varepsilon_{\nu\mu\rho}^{\sigma} \quad , \\
\sigma_{\alpha\sigma\mu\rho}\varepsilon_{\nu}^{\alpha\lambda\sigma} &= -2\varepsilon_{\nu\mu}^{\lambda\rho} \quad , \\
\sigma_{\alpha\eta\lambda\rho}\varepsilon_{\nu}^{\alpha\lambda\sigma} &= 0 \quad , \\
\sigma_{\alpha\eta\mu\rho}\varepsilon_{\nu}^{\alpha\lambda\sigma} &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{B.35}$$

B.1.7 Produkte von γ -Matrizen in 4-Dimensionen

Die Dirac-Algebra hat nur in 4-Dimensionen eine vollständig konsistente Form. Eine Erweiterung auf d -Dimensionen, wie sie im Rahmen von z.B. dimensionaler Regularisierung von Feynman-Amplituden auftritt, bringt Probleme im Zusammenhang mit γ_5 zum Vorschein, die im nächsten Abschnitt besprochen werden.

Die Kombination von 3 Gamma-Matrizen ist in 4 Dimensionen:

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\nu} = (\sigma_{\mu\lambda\nu\rho} + i\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\gamma_5)\gamma^{\rho} \quad . \tag{B.36}$$

Damit erhält man in d Dimensionen den symmetrischen bzw. in 4 Dimensionen den antisymmetrischen Anteil eines Produkts von 3 Gamma-Matrizen durch σ bzw. ε :

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\nu} + \gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu} = 2\sigma_{\mu\lambda\nu\rho}\gamma^{\rho} \quad , \tag{B.37}$$

$$\gamma_{\mu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\nu} - \gamma_{\nu}\gamma_{\lambda}\gamma_{\mu} = 2i\varepsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\gamma_5\gamma^{\rho} \quad . \tag{B.38}$$

Ausschließlich unter Benutzung der Definition der Clifford-Algebra (B.1), die in d Dimensionen identisch bleibt, erhält man die folgenden Beziehungen bei der Kontraktion mit Vierervektoren, durch die Produkte von Matrizen sukzessive auf kleinere Produkte zurückgeführt werden können. Will man diese Beziehungen in d Dimensionen benutzen, ist lediglich zu beachten, daß die Skalarprodukte auch d -dimensional zu lesen sind:

$$\not{q}\gamma_{\mu} = 2q_{\mu} - \gamma_{\mu}\not{q} \quad , \tag{B.39}$$

$$\not{p}\not{q} = 2(p \cdot q) - \not{q}\not{p} \quad , \tag{B.40}$$

$$\not{q}\gamma_{\mu}\not{q} = 2q_{\mu}\not{q} - \gamma_{\mu}q^2 \quad , \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}
\not{p}\gamma_{\mu}\not{q} &= 2p_{\mu}\not{q} - \gamma_{\mu}\not{p}\not{q} = 2q_{\mu}\not{p} - \not{p}\not{q}\gamma_{\mu} = 2p_{\mu}\not{q} - 2(p \cdot q)\gamma_{\mu} + \gamma_{\mu}\not{q}\not{p} \\
&= 2p_{\mu}\not{q} + 2q_{\mu}\not{p} - 2(p \cdot q)\gamma_{\mu} - \not{q}\gamma_{\mu}\not{p} \quad ,
\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}
\not{q}\gamma_{\mu}\not{p} &= 2q_{\mu}\not{p} - \gamma_{\mu}\not{q}\not{p} = 2p_{\mu}\not{q} - \not{q}\not{p}\gamma_{\mu} \\
&= 2p_{\mu}\not{q} + 2q_{\mu}\not{p} - 2(p \cdot q)\gamma_{\mu} - \not{p}\gamma_{\mu}\not{q} \quad ,
\end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\not{q}\gamma_{\nu}\not{q}\gamma_{\mu}\not{q} = 4q_{\mu}q_{\nu}\not{q} - 2q^2(q_{\mu}\gamma_{\nu} + q_{\nu}\gamma_{\mu}) + q^2\gamma_{\nu}\not{q}\gamma_{\mu} \quad , \tag{B.44}$$

$$\begin{aligned}
\not{q}\gamma_{\nu}\not{p}\gamma_{\mu}\not{q} &= -4q_{\mu}q_{\nu}\not{p} - q^2\gamma_{\nu}\not{p}\gamma_{\mu} + 2(p \cdot q)\gamma_{\nu}\not{q}\gamma_{\mu} + 2q_{\mu}\not{q}\gamma_{\nu}\not{p} + 2q_{\nu}\not{p}\gamma_{\mu}\not{q} \quad .
\end{aligned} \tag{B.45}$$

B.1.8 Produkte von γ -Matrizen in d -Dimensionen

Die Erweiterung der Dirac-Algebra auf d -Dimensionen kann so durchgeführt werden, daß die γ -Matrizen weiterhin in 4-Dimensionen dargestellt werden, jedoch die Zahl der Elemente der Clifford-Algebra d wird, d.h. die Elemente $\gamma^0, \dots, \gamma^{d-1}$ existieren. Die Folge ist ein d -dimensionaler metrischer Tensor²:

$$g_\mu^\mu = 4 \quad \longrightarrow \quad g_\mu^\mu = \gamma_\mu \gamma^\mu = d \quad . \quad (\text{B.46})$$

In d Dimensionen gilt für die Kontraktion von äußeren γ -Matrizen:

$$\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho = (2 - d) \gamma_\mu \quad , \quad (\text{B.47})$$

$$\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\rho = 4g_{\mu\nu} - (4 - d) \gamma_\mu \gamma_\nu \quad (\text{B.48})$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\rho &= -2\gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha + (4 - d) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \\ &= (2 - d) \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha + (8 - 2d) i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\rho} \gamma_5 \gamma^\rho \\ &= (2 - d) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta + 4i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\rho} \gamma_5 \gamma^\rho \\ &= 4g_{\alpha\beta} \gamma_\mu - 4g_{\alpha\mu} \gamma_\beta - 4g_{\beta\mu} \gamma_\alpha + (6 - d) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \\ &= ((2 - d) \sigma_{\alpha\mu\beta\rho} + (6 - d) i \varepsilon_{\alpha\mu\beta\rho} \gamma_5) \gamma^\rho \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Die Formulierungen mit ε sind ausschließlich in 4 Dimensionen richtig, da (B.36) in d Dimensionen falsch ist, wie weiter unten erläutert wird. Für 4 Matrizen erhält man:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma^\rho &= 8\sigma_{\alpha\mu\nu\beta} - 2\gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha - (6 - d) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta \\ &= -(8 - d) \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\beta + 4g_{\alpha\mu} \gamma_\nu \gamma_\beta - 4g_{\alpha\nu} \gamma_\mu \gamma_\beta + 4g_{\alpha\beta} \gamma_\mu \gamma_\nu \\ &\quad + 4g_{\nu\beta} \gamma_\alpha \gamma_\mu - 4g_{\mu\beta} \gamma_\alpha \gamma_\nu + 4g_{\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

Die äußere Kontraktion von 5 Gamma-Matrizen ergibt:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\rho &= (10 - d) \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\lambda - 4g_{\alpha\nu} \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\lambda + 4g_{\alpha\beta} \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\lambda \\ &\quad - 4g_{\alpha\mu} \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda + 4g_{\lambda\alpha} \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu - 4g_{\nu\beta} \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\lambda + 4g_{\nu\mu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\lambda \\ &\quad - 4g_{\lambda\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu - 4g_{\beta\mu} \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\lambda + 4g_{\lambda\beta} \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu - 4g_{\lambda\mu} \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \\ &= 8\Sigma_{\alpha\nu\beta\mu\rho}^\lambda \gamma^\rho + (8 - d) \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\lambda + 2\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\alpha \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

wobei die Notation aus (B.25) verwendet wurde.

²Vgl. Yndurain 1993.

B.1.9 γ_5 in d -Dimensionen

Wenn man γ_5 in d Dimensionen darstellen möchte, können nicht alle Eigenschaften von γ_5 aufrechterhalten werden — es treten Inkonsistenzen auf. Die Beziehung $\gamma_5^2 = \mathbf{1}$ ist auch in d -Dimensionen unproblematisch, jedoch ist die Beziehung $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ nur in 4 Dimensionen richtig und darf in einer Rechnung in d Dimensionen nicht benutzt werden. Um das einzusehen, betrachte man die Spur von γ_5 und formt diese unter Benutzung der Standard-Antikommutationsrelation um:

$$\begin{aligned} d \operatorname{Tr}\{\gamma_5\} &= \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma^\mu \gamma_\mu\} = \operatorname{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_5 \gamma^\mu\} = -\operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma^\mu\} \\ &= -d \operatorname{Tr}\{\gamma_5\} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

d.h. die Spur von γ_5 verschwindet — wie es sein muß — für alle $d \neq 0$. Allerdings benötigt man diese Beziehung im Rahmen der dimensional Regularisierung für alle d , also auch für $d = 0$.

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned} d \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} &= \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\lambda \gamma_\lambda\} = \operatorname{Tr}\{\gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\lambda\} \\ &= -\operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\lambda\} \\ &= -4g_{\mu\nu} \operatorname{Tr}\{\gamma_5\} + (4-d) \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} \\ \implies (2-d) \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu\} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.53})$$

wobei (B.48) und (B.52) benutzt wurden. Auch hier erhält man die gewünschte Beziehung für alle d außer bei $d = 2$, wo eine Spur ungleich Null möglich ist.

Das Problem wird unausweichlich, wenn man die Spur von 4 γ -Matrizen und γ_5 betrachtet, denn dann tritt die Unbestimmtheit im physikalischen Grenzfall $d = 4$ auf:

$$\begin{aligned} d \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda\} &= \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma^\eta \gamma_\eta\} \\ &= \operatorname{Tr}\{\gamma_\eta \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma^\eta\} \\ &= -\operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\eta \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda \gamma^\eta\} \\ &= (8-d) \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda\} \\ \implies (4-d) \operatorname{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\lambda\} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

wobei (B.50) und (B.53) benutzt wurden. Hier sieht man, daß für $d \neq 4$ die Spur verschwindet und im physikalischen Grenzwert $d = 4$ ungleich Null sein darf, wie es auch (B.106) entspricht. Allerdings müssen alle Spuren im Rahmen der analytischen Fortsetzung zu d Dimensionen meromorphe Funktionen, also holomorphe

Funktionen mit einer diskreten Menge von Polen in d sein. Dies erzwingt, daß die obige Spur auch für $d = 4$ verschwindet, so daß die Benutzung der Antikommutationsrelation $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ zu einer Inkonsistenz geführt hat.

Aus dieser Problematik heraus werden neue Vertauschungsrelationen notwendig, die die Inkonsistenz bei der naiven Erweiterung der Antivertauschungs-Eigenschaft umgeht und doch ein wohldefiniertes Vertauschen von γ_5 mit anderen γ -Matrizen ermöglicht. Dazu wird eine Aufteilung der γ -Matrizen in einen Teil $\bar{\gamma}_\mu$, der rein vierdimensional, und einen Teil $\hat{\gamma}_\mu$, der auf einem $d - 4$ -dimensionalen Raum definiert ist. Ist also γ_μ ein d -dimensionales Objekt, so ist:

$$\gamma_\mu \equiv \bar{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu \quad . \quad (\text{B.55})$$

Mit dieser Definition erhält man für die beiden Teile der d -dimensionalen Matrix γ_μ wohldefinierte Vertauschungsrelationen. Der vierdimensionale Teil erhält seine übliche Relation, während $d - 4$ -dimensionale Teil mit anderem Vorzeichen vertauscht:

$$\begin{aligned} \{\gamma_5, \bar{\gamma}_\mu\} &= 0 \quad , \\ [\gamma_5, \hat{\gamma}_\mu] &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Durch diese Definition werden die obigen Inkonsistenzen beseitigt.

Die Folgen dieser Aufteilung auf den metrischen Tensor sind offensichtlich. Auch dieser wird in zwei Teile zerlegt, und seine Spur lautet:

$$g_\mu^\mu = \bar{g}_\mu^\mu + \hat{g}_\mu^\mu = 4 + (d - 4) = d \quad , \quad (\text{B.57})$$

was mit der bisherigen Definition des d -dimensionalen metrischen Tensors (B.46) vereinbar ist.

Im folgenden werden einige nützliche Relationen mit den $d - 4$ -dimensionalen γ -Matrizen nachgewiesen:

$$\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}_\mu = \hat{\gamma}^\mu (2\hat{g}_\mu^\nu - \hat{\gamma}_\mu \hat{\gamma}^\nu) = (2 - (d - 4))\hat{\gamma}^\nu = (6 - d)\hat{\gamma}^\nu \quad , \quad (\text{B.58})$$

$$\hat{\gamma}^\mu \bar{\gamma}^\nu \hat{\gamma}_\mu = -\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}_\mu \bar{\gamma}^\nu = (d - 4)\bar{\gamma}^\nu \quad , \quad (\text{B.59})$$

$$\bar{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \bar{\gamma}_\mu = -\bar{\gamma}^\mu \bar{\gamma}_\mu \hat{\gamma}^\nu = -4\hat{\gamma}^\nu \quad , \quad (\text{B.60})$$

$$\bar{\gamma}^\mu \bar{\gamma}^\nu \bar{\gamma}_\mu = \bar{\gamma}^\mu (2\bar{g}_\mu^\nu - \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}^\nu) = -2\bar{\gamma}^\nu \quad . \quad (\text{B.61})$$

Ähnliche Beziehungen, die γ_5 enthalten sind:

$$\gamma_\rho \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\rho = (\bar{\gamma}_\rho + \hat{\gamma}_\rho) \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 (\bar{\gamma}^\rho + \hat{\gamma}^\rho) = \bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \bar{\gamma}^\rho + \hat{\gamma}_\rho \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \hat{\gamma}^\rho$$

$$= 2\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 - (d-4)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 = (6-d)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\rho &= (\bar{\gamma}_\rho + \hat{\gamma}_\rho) \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 (\bar{\gamma}^\rho + \hat{\gamma}^\rho) = \bar{\gamma}_\rho \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \bar{\gamma}^\rho + \hat{\gamma}_\rho \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \hat{\gamma}^\rho \\ &= 4\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 + (6-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 = (10-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

$$\gamma_\rho \gamma_\alpha \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho = (6-d)^2 \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.64})$$

$$\gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho = (10-d)^2 \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.65})$$

$$\gamma_\rho \gamma_\alpha \hat{\gamma}^\alpha \gamma_5 \gamma^\lambda \gamma^\rho = -(d-4)(6-d)\bar{\gamma}^\lambda \gamma_5 + (d-4)(10-d)\hat{\gamma}^\lambda \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.66})$$

$$\gamma_\rho \gamma^\lambda \hat{\gamma}^\alpha \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma^\rho = (d-4)(6-d)\bar{\gamma}^\lambda \gamma_5 + (d-4)(10-d)\hat{\gamma}^\lambda \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.67})$$

$$\gamma_\rho \gamma^\beta \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma^\rho = 2\gamma_\alpha \gamma_\beta \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 - 2\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\beta \gamma_\alpha + (6-d)\gamma^\beta \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma_\alpha \quad , \quad (\text{B.68})$$

$$\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma^\rho \hat{\gamma}_\lambda \gamma_5 \gamma^\lambda = (2-d)(d-4)\gamma^\mu \gamma_5 \quad , \quad (\text{B.69})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\alpha \hat{\gamma}^\rho \gamma_5 \gamma^\alpha &= (10-d) \left(2g_\rho^\mu - \gamma^\mu \gamma_\rho \right) \hat{\gamma}^\rho \gamma_5 \\ &= 2(10-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 - (10-d)(d-4)\gamma^\mu \gamma_5 \\ &= (10-d)(6-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 - (10-d)(d-4)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

$$\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\alpha \hat{\gamma}^\alpha \gamma_5 \gamma^\rho = (d-4)(6-d)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 + (d-4)(10-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad . \quad (\text{B.71})$$

Terme mit acht Matrizen lauten:

$$\gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma^\alpha \hat{\gamma}_\lambda \gamma_5 \gamma^\lambda \gamma^\rho = (2-d)(d-4)(6-d)\bar{\gamma}^\mu + (2-d)(d-4)(10-d)\hat{\gamma}^\mu \quad , (\text{B.72})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \hat{\gamma}_\alpha \gamma_5 \gamma^\beta \gamma^\rho &= (10-d)(6-d)\gamma_\rho \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\rho - (10-d)(d-4)\gamma_\rho \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\rho \\ &= (10-d)^2(6-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 - (10-d)(6-d)(d-4)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma^\mu \gamma_\beta \hat{\gamma}_\beta \gamma_5 \gamma^\alpha \gamma^\rho &= (6-d)(d-4)\gamma_\rho \bar{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\rho + (10-d)(d-4)\gamma_\rho \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \gamma^\rho \\ &= (6-d)^2(d-4)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 + (10-d)^2(d-4)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.74})$$

Wenn zwei der Indizes unkontrahiert bleiben, gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \gamma^\rho &= \gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 (\bar{\gamma}^\rho + \hat{\gamma}^\rho) \\ &= -\gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}^\rho \gamma_5 + \gamma_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \hat{\gamma}^\rho \gamma_5 \\ &= -\bar{\gamma}_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}^\rho \gamma_5 + \hat{\gamma}_\rho \bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \hat{\gamma}^\rho \gamma_5 \\ &= -4\bar{g}_{\mu\nu} \gamma_5 + (d-4)\bar{\gamma}_\nu \bar{\gamma}_\mu \gamma_5 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.75})$$

Schließlich wird noch angegeben, wie die Kontraktion von d -dimensionalen Matrizen in dieser Schreibweise aussieht. Aus (B.62) und (B.63) erhält man:

$$\gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_5 \gamma^\rho = (6-d)\bar{\gamma}^\mu \gamma_5 + (10-d)\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad . \quad (\text{B.76})$$

Bei der Berechnung von Spuren in d Dimensionen ist sorgfältig darauf zu achten, daß die Vertauschung von γ_5 mit anderen γ -Matrizen nach den obigen Regeln erfolgt. Es gilt z.B.:

$$\text{Tr} \left\{ \bar{\gamma}_\alpha \bar{\gamma}_\beta \bar{\gamma}_\lambda \hat{\gamma}_\rho \gamma_5 \right\} = 0 \quad . \quad (\text{B.77})$$

Wie man an den Beispielen ersehen kann, treten durch die obige Aufteilung in $(d-4)$ und 4-dimensionale γ -Matrizen neue Terme auf, die immer proportional zu $d-4$ sind. Das bedeutet, daß die Relevanz dieser Terme bei der Regularisierung eines einfach divergenten Integrals auf den Konstanten Beitrag zu demselben beschränkt ist, da der divergente Term mit diesen zusätzlichen Termen zusammen von der Ordnung $(d-4)^0$ sind. Der divergente Term selbst bleibt hingegen unberührt, so daß im Rahmen der Berechnung von anomalen Dimensionen die Problematik von γ_5 in d -Dimensionen nicht auftritt.

Die zusätzlichen Konstanten Terme können auf eine Verletzung von Ward-Identitäten führen. Diese Möglichkeit macht eine zusätzliche Renormierung notwendig, die in Kap. 5.4.3 eingehender behandelt wird.

B.2 Spuren

Da die γ -Matrizen auch in d Dimensionen 4-dimensional definiert sind, sind die Spuren unabhängig von der Dimension bestimmt. Mit den Abkürzungen (B.22) und (B.25) folgt für Spuren über γ -Matrizen:

$$Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \} = 4g_{12} \quad , \quad (B.78)$$

$$Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \} = 4\sigma_{1234} \quad , \quad (B.79)$$

$$Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \} = 4\Sigma_{23456}^1 \quad , \quad (B.80)$$

$$Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \} = 4g_{12}\Sigma_{45678}^3 - 4g_{13}\Sigma_{45678}^2 + 4g_{14}\Sigma_{35678}^2 - 4g_{15}\Sigma_{34678}^2 + 4g_{16}\Sigma_{34578}^2 - 4g_{17}\Sigma_{34568}^2 + 4g_{18}\Sigma_{34567}^2 \quad . \quad (B.81)$$

Die Kontraktion einiger Matrizen mit dem metrischen Tensor ergibt:

$$g^{26} Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \} = -8g_{13}\sigma_{5478} + 8g_{14}\sigma_{5378} - 8g_{15}\sigma_{4378} + 8g_{17}\sigma_{3458} - 8g_{18}\sigma_{3457} \quad , \quad (B.82)$$

$$g^{26} g^{48} Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8 \} = -32g_{15}g_{37} \quad , \quad (B.83)$$

$$g^{26} Tr \{ \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 \} = -8\sigma_{1345} \quad . \quad (B.84)$$

Damit erhält man folgende Identitäten für Spuren:

$$Tr \{ \not{p} \not{q} \} = 4(p \cdot q) \quad , \quad (B.85)$$

$$Tr \{ \not{p} \not{q} \not{p} \not{q} \} = 8(p \cdot q)^2 - 4p^2 q^2 \quad , \quad (B.86)$$

$$Tr \{ \not{p} \not{q} \gamma_\mu \gamma_\nu \} = 4(p \cdot q)g_{\mu\nu} - 4p_\mu q_\nu + 4p_\nu q_\mu \quad , \quad (B.87)$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\mu \gamma_\nu \not{q} \} = 4(p \cdot q) g_{\mu\nu} + 4p_\mu q_\nu - 4p_\nu q_\mu \quad , \quad (\text{B.88})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{q} \} = 8p_\nu (p \cdot q) + 4p_\nu q^2 - 4q_\nu p^2 \quad , \quad (\text{B.89})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu \not{q} \gamma_\mu \} = 4(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) - 4(p \cdot q) g_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{B.90})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \} = 8p_\mu p_\nu - 4p^2 g_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{B.91})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu \} = 8p_\mu p_\nu + 4(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) - 4(p \cdot q) g_{\mu\nu} - 4p^2 g_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{B.92})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \not{p} \not{q} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu \not{q} \} \\ = 8(p \cdot q)(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) - 8q^2 p_\mu p_\nu - 8(p \cdot q)^2 g_{\mu\nu} + 4p^2 q^2 g_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.93})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \not{q} \gamma^\mu \not{q} \gamma_\nu \not{q} \} = 16(p \cdot q) q_\mu q_\nu - 4q^2 (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) - 4(p \cdot q) q^2 g_{\mu\nu} \quad , \quad (\text{B.94})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu \not{q} \not{p} \not{q} \gamma_\mu \} = -16(p \cdot q)^2 + 8p^2 q^2 \quad , \quad (\text{B.95})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{q} \gamma_\mu \not{q} \} \\ = 16(p \cdot q) p_\nu q_\mu + 4q^2 (p_\nu q_\mu - p_\mu q_\nu) \\ - 8p_\mu p_\nu q^2 - 8p^2 q_\mu q_\nu + 4(p \cdot q) q^2 g_{\mu\nu} + 4p^2 q^2 g_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.96})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \not{p} \gamma_\nu (\not{p} + \not{q}) \not{p} \gamma_\mu \not{q} \} \\ = -8(p \cdot q)(p_\nu q_\mu + p_\mu q_\nu) + 4p^2 (p_\nu q_\mu - p_\mu q_\nu) \\ + 8p_\mu p_\nu q^2 + 8p^2 q_\mu q_\nu + 8(p \cdot q)^2 g_{\mu\nu} + 4(p \cdot q) p^2 g_{\mu\nu} - 4p^2 q^2 g_{\mu\nu} \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu \not{q} \not{p} \not{q} \gamma_\mu \not{p} \not{q} \} = -32(p \cdot q)^3 + 24(p \cdot q) p^2 q^2 \quad , \quad (\text{B.98})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu \not{p} \gamma^\rho \} = -32(p \cdot q)^2 - 32p^4 - 64p^2 (p \cdot q) \quad , \quad (\text{B.99})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\rho \} = -32p^4 - 32p^2 (p \cdot q) \quad , \quad (\text{B.100})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho (\not{p} + \not{q}) \gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\rho \} \\ = -64(p \cdot q)^2 - 32(p \cdot q) q^2 - 32p^2 q^2 - 96p^2 (p \cdot q) - 32p^4 \quad , \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\rho \} = -32(p \cdot q) - 32p^2 \quad , \quad (\text{B.102})$$

$$\text{Tr} \{ \not{p} \gamma^\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma_\rho \not{p} \gamma_\mu (\not{p} + \not{q}) \gamma^\rho \} = -32p^4 - 64p^2 (p \cdot q) - 32p^2 q^2 \quad . \quad (\text{B.103})$$

Für Spuren, die γ_5 enthalten, erhält man in 4 Dimensionen:

$$\text{Tr} \{ \gamma_5 \} = 0 \quad , \quad (\text{B.104})$$

$$\text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \} = 0 \quad , \quad (\text{B.105})$$

$$\text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \} = 4i \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \quad . \quad (\text{B.106})$$

Für Spuren mit Massentermen, unkontrahierten Lorentzindizes und $p^2 \neq 0$ folgt:

$$\text{Tr} \{ (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{q} + m) \gamma^\nu \} = 4 \left[p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu - p \cdot q g^{\mu\nu} + m^2 g^{\mu\nu} \right] \quad , \quad (\text{B.107})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ (\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\nu \} \\ = 4 \left[2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + g^{\mu\nu} (p \cdot q - p^2 + m^2) \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

B.3 γ -Algebra auf dem Lichtkegel

Der metrische Tensor lautet in Lichtkegelkoordinaten:

$$\begin{aligned} g^{++} &= g^{--} = 0 \quad , \\ g^{+-} &= g^{-+} = 1 \quad , \\ g^{11} &= g^{22} = -1 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.109})$$

Damit ist der metrische Tensor nicht mehr diagonal. Er transformiert eine + Komponente in eine – Komponente und umgekehrt. Die transversalen Komponenten (1 und 2) bleiben in Lichtkegelkoordinaten unverändert. Es folgt auch für einen beliebigen Vierervektor $p^+ = p_-$. Die Gamma-Matrizen werden damit konsistent definiert:

$$\gamma^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^3) \quad . \quad (\text{B.110})$$

Explizit lauten die neuen Matrizen:

$$\gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{B.111})$$

Für den Antikommutator der beiden neuen Matrizen gilt dann:

$$\gamma^+ \gamma^- + \gamma^- \gamma^+ = 2g^{+-} = 2 \quad . \quad (\text{B.112})$$

Die Algebra ist demnach auch mit den neuen Komponenten noch die gleiche. Die hermitesche Konjugation ergibt:

$$(\gamma^\pm)^\dagger = \gamma^\mp \quad . \quad (\text{B.113})$$

Für Produkte von zwei Lichtkegel-Gamma-Matrizen folgt:

$$\gamma^\pm \gamma^\pm = 0, \quad \gamma^\pm \gamma^\mp = 1 \mp \gamma^0 \gamma^3 \quad . \quad (\text{B.114})$$

Man kann auch die analoge Größe zu $\sigma_{\mu\nu}$ definieren:

$$\sigma^{i\pm} := \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^\pm] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma^{i0} \pm \sigma^{i3}) \quad . \quad (\text{B.115})$$

Damit folgt:

$$\sigma^{1-\gamma_5} = \gamma^- \gamma^2, \quad \sigma^{2-\gamma_5} = -\gamma^- \gamma^1. \quad (\text{B.116})$$

Für einige Spuren erhält man:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \gamma^\pm \} &= 0, \\ \text{Tr} \{ \gamma^i \gamma^\pm \} &= \mp 2\sqrt{2} \delta_{i3}, \\ \text{Tr} \{ \gamma^\pm \gamma^\pm \} &= 0, \\ \text{Tr} \{ \gamma^\pm \gamma^\mp \} &= 4, \\ \text{Tr} \{ \gamma^\pm \gamma_5 \} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.117})$$

B.4 Diskrete Transformationen

B.4.1 Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation ist eine diskrete Transformation, die das Feld eines Teilchens in das seines Antiteilchens überführt. Konkret bedeutet dies eine Vertauschung der Vorzeichen von Ladung und Feld. Invarianz unter Ladungskonjugation heißt dann Invarianz der Lagrangefunktion unter der Transformation.

In der relativistischen Quantenmechanik (vor der zweiten Quantisierung) kann man die Transformation dadurch definieren, daß sie die Dirac-Gleichung für ein Fermion in die für das zugehörige Antifermion überführt. Dies kann durch komplexe Konjugation der Ausgangsgleichung und durch die Operation

$$\begin{aligned} C \gamma^{\mu T} C^{-1} &= -\gamma^\mu \\ C \bar{\psi}^T &= \psi_A \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

erreicht werden, wobei ψ_A die Antiteilchen-Wellenfunktion ist. Denn dann folgt

$$\begin{aligned} (i \not{\mathcal{X}} - e \not{A} - m) \psi &\rightarrow (C \gamma^0) (i \not{\mathcal{X}} - e \not{A} - m)^* \psi^* \\ &= (C \gamma^0) (-(i \partial_\mu + e A_\mu) \gamma^{\mu*} - m) (C \gamma^0)^{-1} (C \gamma^0) \psi^* \\ &= \left(-(i \partial_\mu + e A_\mu) (C \gamma^0) \gamma^{\mu*} (C \gamma^0)^{-1} - m \right) C \bar{\psi}^T \\ &= \left(-(i \partial_\mu + e A_\mu) C \gamma^{\mu T} C^{-1} - m \right) C \bar{\psi}^T \\ &= (i \not{\mathcal{X}} + e \not{A} - m) \psi_A, \end{aligned} \quad (\text{B.119})$$

wobei (B.8) benutzt wurde. Die Forderung (B.118) kann als Definitionsgleichung für die Matrix C aufgefaßt werden. In der in diesem Abschnitt benutzten Darstellung der Clifford-Algebra kann C explizit konstruiert werden. Um (B.118) zu garantieren, muß C mit $\gamma_{1,3}$ kommutieren und mit $\gamma_{2,4}$ antikommutieren. Dies wird durch

$$C = i\gamma_2\gamma_0 = -C^\dagger = -C^T = -C^{-1} \quad (\text{B.120})$$

gewährleistet, wobei (B.11), (B.7) und (B.6) benutzt wurden. Wenn ψ Lösung der Dirac-Gleichung mit bestimmtem Impuls und Spin ist, kann man nachprüfen, daß die durch ψ_A definierte Wellenfunktion wieder Lösung der Dirac-Gleichung mit gleichem Impuls und Spin nur mit alterniertem Vorzeichen in der Energie ist.

Aus der Definition der Matrix C folgt:

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T} \quad , \quad (\text{B.121})$$

$$Ci\gamma_5 C^{-1} = \gamma^2\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^2 = \gamma^1\gamma^3\gamma^0\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma_5 \quad , \quad (\text{B.122})$$

$$C\gamma^\mu\gamma_5 C^{-1} = C\gamma^\mu C^{-1}C\gamma_5 C^{-1} = -\gamma^{\mu T}\gamma_5 \quad , \quad (\text{B.123})$$

$$C\sigma^{\mu\nu} C^{-1} = \frac{i}{2}C[\gamma^\mu, \gamma^\nu]C^{-1} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu T}, \gamma^{\nu T}] = -\sigma^{\mu\nu T} \quad . \quad (\text{B.124})$$

In der Feldtheorie werden die Wellenfunktionen durch Feldoperatoren ersetzt, so daß ein unitärer Operator \mathcal{C} zu suchen ist, der die Transformation (B.118) erzeugt:

$$\mathcal{C}\psi_\alpha \mathcal{C}^{-1} = C_{\alpha\beta}\bar{\psi}_\beta \quad \mathcal{C}\bar{\psi}_\alpha \mathcal{C}^{-1} = -\psi_\beta C_{\beta\alpha} \quad . \quad (\text{B.125})$$

Für die Antivertauschungsrelationen von Fermionen gilt dann:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\{\psi_\alpha(x, t), \psi_\alpha^\dagger(x', t)\}\mathcal{C}^{-1} &= -\{C_{\alpha\eta}(\gamma^0)_{\eta\lambda}\psi_\lambda^\dagger(x, t), \psi_\rho(x', t)(\gamma_0)_{\rho\xi}C_{\xi\alpha}^{-1}\} \\ &= -\{(\gamma^0)_{\eta\lambda}\psi_\lambda^\dagger(x, t), \psi_\rho(x', t)(\gamma_0)_{\rho\xi}\}\delta_{\eta\xi} \\ &= -\{\psi_\lambda^\dagger(x, t), \psi_\rho(x', t)\}\delta_{\lambda\rho} \\ &= -\{\psi_\alpha^\dagger(x, t), \psi_\alpha(x', t)\} \\ &= \{\psi_\alpha(x, t), \psi_\alpha^\dagger(x', t)\} \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.126})$$

Alle anderen Antivertauschungsrelationen verschwinden und bleiben von der Transformation unberührt. Die Lagrangedichte ändert sich um eine totale Divergenz, die keinen Einfluß auf die Wirkung hat, so daß die Bewegungsgleichungen invariant sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\mathcal{L}\mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C}\bar{\psi}_\alpha(i\not{\nabla} - m)_{\alpha\beta}\psi_\beta\mathcal{C}^{-1} \\ &= -\psi_\lambda C_{\lambda\alpha}^{-1}(i\not{\nabla} - m)_{\alpha\beta}C_{\beta\rho}\bar{\psi}_\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\psi_\lambda C_{\lambda\alpha} (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)_{\alpha\beta} C_{\beta\rho}^{-1} \bar{\psi}_\rho \\
&= -\psi_\lambda (-i\partial_\mu \gamma^{\mu T} - m)_{\lambda\rho} \bar{\psi}_\rho \\
&= \bar{\psi}_\rho (i\partial_\mu \gamma^\mu - m)_{\rho\lambda} \psi_\lambda + \partial_\mu (\dots)^\mu \quad , \quad (B.127)
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile benutzt wurde, daß die Ableitung auf $\bar{\psi}$ wirkt, so daß die Produktregel anzuwenden ist, um die Richtung der Ableitung umzukehren. Dadurch wechselt das Vorzeichen, und es entsteht der irrelevante Divergenz-Term. Das Gesamt-Vorzeichen verschwindet durch die Vertauschung von Fermion-Feldern. Eine Zerlegung der Feldoperatoren in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Teilchen und Antiteilchen bestätigt die Interpretation, daß durch diese Operation die Rolle von Teilchen und Antiteilchen vertauscht wird.

Für den antisymmetrisierten Strom $j_\mu = \frac{1}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} j_\mu \mathcal{C}^{-1} &= \frac{1}{2} \mathcal{C} [\bar{\psi}_\alpha, (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta] \mathcal{C}^{-1} \\
&= -\frac{1}{2} [\psi_\lambda C_{\lambda\alpha}^{-1}, (\gamma_\mu)_{\alpha\rho} C_{\rho\beta} \bar{\psi}_\beta] \\
&= -\frac{1}{2} \psi_\lambda C_{\lambda\alpha} (\gamma_\mu)_{\alpha\rho} C_{\rho\beta}^{-1} \bar{\psi}_\beta + \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha\rho} C_{\rho\beta} \bar{\psi}_\beta \psi_\lambda C_{\lambda\alpha}^{-1} \\
&= \frac{1}{2} \psi_\lambda (\gamma_\mu)_{\lambda\beta}^T \bar{\psi}_\beta - \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\lambda\beta}^T \bar{\psi}_\beta \psi_\lambda \\
&= \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\beta\lambda} \psi_\lambda \bar{\psi}_\beta - \frac{1}{2} \bar{\psi}_\beta (\gamma_\mu)_{\beta\lambda} \psi_\lambda \\
&= -\frac{1}{2} [\bar{\psi}_\beta, (\gamma_\mu)_{\beta\lambda} \psi_\lambda] \\
&= -j_\mu \quad . \quad (B.128)
\end{aligned}$$

also genau das geforderte Transformationsverhalten, daß die Invarianz des Wechselwirkungsterms in der Lagrangedichte garantiert.

Für die Verteilungsfunktion h_1 lautet der generierende Operator

$$O^{\lambda\rho} = \bar{\psi}_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{\lambda\rho} i(\gamma_5)_{\beta\eta} \psi_\eta \quad . \quad (B.129)$$

Das Transformationsverhalten dieses Operators ist identisch mit dem des ersten Moments der chiral ungeraden Strukturfunktion h_1 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} O^{\lambda\rho} \mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C} \bar{\psi}_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{\lambda\rho} i(\gamma_5)_{\beta\eta} \psi_\eta \mathcal{C}^{-1} \\
&= -\psi_\xi C_{\xi\alpha}^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{\lambda\rho} i(\gamma_5)_{\beta\eta} C_{\eta\sigma} \bar{\psi}_\sigma \\
&= \psi_\xi \sigma_{\xi\delta}^{\lambda\rho T} i(\gamma_5)_{\delta\sigma} \bar{\psi}_\sigma \\
&= i(\gamma_5)_{\sigma\delta} \sigma_{\delta\xi}^{\lambda\rho} \psi_\xi \bar{\psi}_\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\bar{\psi}_\sigma i(\gamma_5)_{\sigma\delta} \sigma_{\delta\xi}^{\lambda\rho} \psi_\xi \\
&= -O^{\lambda\rho} \quad , \tag{B.130}
\end{aligned}$$

dabei sind die oberen Indizes Lorentzindizes und die unteren Komponenten im Dirac-Raum. Es wurden die Gln. (B.21), (B.122), (B.124) und $\gamma_5^T = \gamma_5$ benutzt. Außerdem ist zu beachten, daß der betrachtete Operator immer in Normalordnung auftritt, so daß die Fermion-Feldoperatoren antikommutieren. Der obige Operator ist demnach ungerade unter Ladungskonjugation, eine Eigenschaft die sich in der Definition des nullten Moments der chiral-ungeraden Verteilungsfunktion h_1 wiederfinden muß.

Die analoge Untersuchung für höherdimensionale Operatoren des gleichen Typs, die den höheren Momenten von h_1 entsprechen, ergibt eine allgemeine Formel für das Transformationsverhalten aller Momente von h_1 unter Ladungskonjugation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} O^{\lambda\rho\mu_1 \dots \mu_n} \mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C} \bar{\psi}_\alpha \sigma_{\alpha\beta}^{\lambda\rho} i(\gamma_5)_{\beta\eta} i D^{\mu_1} \dots i D^{\mu_n} \psi_\eta \mathcal{C}^{-1} \\
&= i(\gamma_5)_{\sigma\delta} \sigma_{\delta\xi}^{\lambda\rho} \psi_\xi i D^{\mu_1} \dots i D^{\mu_n} \bar{\psi}_\sigma \\
&= -(-)^n \bar{\psi}_\sigma i(\gamma_5)_{\sigma\delta} \sigma_{\delta\xi}^{\lambda\rho} i D^{\mu_1} \dots i D^{\mu_n} \psi_\xi \\
&= (-)^{n+1} O^{\lambda\rho\mu_1 \dots \mu_n} \quad , \tag{B.131}
\end{aligned}$$

wobei die erste Gleichheit vollständig analog zu (B.130) hergeleitet wird. Die kovarianten Ableitungen haben erst dann einen Einfluß auf das Ergebnis, wenn die Feldoperatoren vertauscht werden. Dadurch dreht sich auch die Wirkungsrichtung der Ableitungen um. Um die Ableitungen wieder nach rechts wirken zu lassen, ist die Produktregel zu benutzen. Dabei entsteht für jede der n Ableitungen ein Vorzeichen und ein unwesentlicher Oberflächenterm. Die Momente von h_1 haben demnach ein alternierendes Verhalten gegenüber Ladungskonjugation.

Anhang C

Dimensionale Regularisierung

C.1 Motivation und Definition des Verfahrens

C.1.1 Motivation

Bei der Berechnung der Koeffizienten der Operatoren in der OPE treten divergente Integrale auf. Beispielsweise ist der Quark-Polarisationsgraph ultraviolett divergent, wie man leicht durch Abzählen der Potenzen von p ablesen kann:

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp \left\{ \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{\not{p} - \not{q} + m}{(p - q)^2 - m^2} \gamma^\nu \right\} . \quad (\text{C.1})$$

Um diesem Integral einen physikalischen Inhalt zuzuordnen, benötigt man eine Vorschrift, wie die Divergenzen von den physikalischen Teilen der Amplitude getrennt werden können. Durch eine Renormierung von Masse, Ladung und Wellenfunktion werden die Divergenzen aus der Theorie eliminiert.

Voraussetzung für die Renormierung der Theorie ist die Existenz einer Vorschrift, die es erlaubt, die Trennung von Divergenzen und endlichen Anteilen einer Amplitude vorzunehmen. Dabei sollte das Verfahren eindeutig sein, damit der endliche Teil durch die Wahl eines anderen Verfahrens nicht völlig anders ausfällt. Die klassische Pauli-Villars Regularisierung¹ ist auf die QED erfolgreich angewendet worden. Es wird ein Parameter eingeführt, der die Loop-Impulse nach oben begrenzt, und dadurch das Auftreten von UV-Divergenzen umgangen. Alternativ dazu wurde die dimensionale Regularisierung² eingeführt, die den Vorzug hat, die

¹Vgl. Pauli, Villars 1949.

²Vgl. t'Hooft, Veltman 1972a.

Eichinvarianz der Amplituden zu erhalten. Dieses Verfahren wird in diesem Kapitel vorgestellt werden.

C.1.2 Idee

Im folgenden werden euklidische Impulse verwendet. Die Übertragung auf Minkowski-Impulse kann leicht durch eine Wick-Rotation (C.14) vorgenommen werden. Betrachtet man das Feynmanintegral (der Index 4 deutet die Dimension des Integrals an)

$$I_4(q) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \frac{1}{(p - q)^2 + m^2} \quad , \quad (\text{C.2})$$

stellt man fest, daß es für $p^2 \rightarrow \infty$ divergiert. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn man das gleiche Integral in 3 Dimensionen ausrechnet. Die Divergenz eines Integrals hängt demnach davon ab, in welcher Dimension es berechnet wird.

Dieser Umstand wird in der dimensionalen Regularisierung ausgenutzt. Das in 4 Dimensionen divergente Integral wird in einer Dimension d berechnet, bei der es konvergent ist. Das gewonnene Ergebnis muß dann auf vier Dimensionen analytisch fortgesetzt werden. Die Existenz und die Eindeutigkeit dieser Fortsetzung müssen dabei gewährleistet sein. Das analytisch fortgesetzte Resultat kann dann um $d = 4$ in eine Laurentreihe entwickelt werden³, um die Divergenz bei $d = 4$ zu isolieren, mit der der Counterterm für die Renormierung bis auf eine Konstante bestimmt ist. Die Festlegung dieser Konstanten entspricht der Wahl eines Renormierungsschemas.

C.1.3 Integrale über Räume mit kontinuierlicher Dimension

Axiomatik

Um ein dimensionale Fortsetzung eines Integrals zu kontinuierlichen Dimensionen vorzunehmen, ist zunächst zu definieren, was mit einem d -dimensionalen Integral gemeint ist. Die dafür verwendeten Axiome müssen im Limes $d \rightarrow 4$ mit den

³Die wichtigsten Entwicklungen sind in Kap. C.2.7 aufgeführt.

Eigenschaften 4-dimensionaler Integrale kompatibel sein. Das Axiomen-System ist⁴:

$$\begin{aligned} \int d^d p \{a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p)\} &= a_1 \int d^d p f_1(p) + a_2 \int d^d p f_2(p), \quad a_{1,2} \in \mathbf{R} \\ &\text{(Linearität)} \\ \int d^d p f(\lambda p) &= \lambda^{-d} \int d^d p f(p), \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{(Skalenverhalten)} \\ \int d^d p f(p+k) &= \int d^d p f(p) \quad \text{(Translationsinvarianz)}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Die Linearität und die Translationsinvarianz sind auch für 4-dimensionale Integrale in euklidischen Räumen gültig. Die eigentlich interessante Forderung ist das Skalenverhalten, durch die nicht-logarithmischen Divergenzen aus den Integralen eliminiert werden. Um das zu verstehen, betrachte man eine Funktion $f(p) = (p^2)^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbf{R}$. Aus der Linearität und dem Skalenverhalten folgt dann:

$$\begin{aligned} \int d^d p ((\lambda p)^2)^\alpha &= \lambda^{2\alpha} \int d^d p (p^2)^\alpha \\ &= \lambda^{-d} \int d^d p (p^2)^\alpha \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbf{R} \\ \implies \int d^d p (p^2)^\alpha &= 0 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{d/2\}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Die Bedingung $2\alpha \neq d$ filtert aus dem divergenten Integral gerade die logarithmischen Divergenzen heraus. Alle anderen Divergenzen bleiben unberücksichtigt. Die Elimination aller nicht-logarithmischen Divergenzen aus den Feynmanamplituden ist dadurch bedingt, daß in der betrachteten Theorie nur solche Divergenzen auftreten und alle beispielsweise quadratischen Divergenzen — wenn sie denn auftreten — sich gegenseitig wegheben. Für die QCD ist dies sichergestellt⁵.

Eindeutigkeit

Die Normierung eines d -dimensionalen Integrals wird relativ zu einem in vier Dimensionen bekannten Integral definiert⁶:

$$\int d^d p e^{-p^2} = \pi^{d/2} \quad . \quad (\text{C.5})$$

Durch diese Normierung werden die Integrale für alle Funktionen f eindeutig zu d -Dimensionen fortgesetzt, da man jede Funktion in die Basis

$$b_{\lambda,k}(p) = e^{-\lambda^2(p+k)^2} \quad (\text{C.6})$$

⁴Vgl. Zinn-Justin 1990.

⁵Siehe z. B. Muta 1987.

⁶Vgl. Collins 1985.

eindeutig entwickeln kann. Das Integral über die Basisfunktionen ist jedoch durch die Axiome (C.3) sowie die Normierung (C.5) eindeutig bestimmt:

$$\begin{aligned}
\int d^d p \, b_{\lambda,k}(p) &= \int d^d p \, e^{-\lambda^2(p+k)^2} \\
&= \int d^d p \, e^{-\lambda^2 p^2} && \text{(Translationsinvarianz)} \\
&= \lambda^{-d} \int d^d p \, e^{-p^2} && \text{(Skalenverhalten)} \\
&= \lambda^{-d} \pi^{d/2} && \text{(Normierung)} \quad . \quad (C.7)
\end{aligned}$$

Übergang zu d -Dimensionen

Bei der Fortsetzung auf d Dimensionen muß die Dimension des Volumenelements $d^d p$ erhalten bleiben. Dies kann durch Einführen einer dimensionsbehafteten Größe μ erreicht werden:

$$\frac{d^d p}{(2\pi)^d} \longrightarrow \mu^{4-d} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} = (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{d^d p}{(2\pi)^4} \quad . \quad (C.8)$$

Hier wurde im Hinblick auf die spätere Laurentreihen-Entwicklung $d = 4 - \varepsilon$ gesetzt.

Skalare Integranden

Für skalare Integranden kann der Wert eines d -dimensionalen Integrals explizit angegeben werden. Eine Koordinatentransformation auf d -dimensionale Kugelkoordinaten führt auf ein $(d-1)$ -dimensionales Integral über den winkelunabhängigen Integranden, dessen Wert eindeutig durch die Normierung (C.5) festgelegt ist, und auf ein eindimensionales Integral über eine skalare Funktion:

$$\begin{aligned}
\int d^d p \, f(p^2) &= \int d^d \sigma \int_0^\infty dp \, p^{d-1} f(p^2) \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp \, p^{d-1} f(p^2) \quad . \quad (C.9)
\end{aligned}$$

Die Integration über die d -dimensionale Hyperfläche $d^d \sigma$ wurde dabei auf die Normierung C.5 zurückgeführt. Setzt man für die Funktion $f(p^2) = e^{-p^2}$ an und verwendet Gl. C.53, folgt:

$$\begin{aligned}
\int d^d p \, e^{-p^2} &= \pi^{d/2} \\
&= \int d^d \sigma \int_0^\infty dp \, p^{d-1} e^{-p^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int d^d \sigma \int_0^\infty dp^2 (p^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-p^2} \\
&= \frac{1}{2} \Gamma(d/2) \int d^d \sigma \\
\Rightarrow \int d^d \sigma &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} . \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Dadurch verbleibt in (C.9) nur noch ein eindimensionales Integral.

Unkontrahierte Integranden

Für einen Integranden der Form $p^\mu p^\nu f(p^2)$ müßte das Integral im Minkowski-Raum folgende Struktur besitzen (im euklidischen Raum ist $g^{\mu\nu}$ durch δ^{ij} zu ersetzen):

$$\int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) = A g^{\mu\nu} . \tag{C.11}$$

Durch Kontraktion dieser Gleichung erhält man die Konstante A :

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) &= \int d^d p p^2 f(p^2) \\
&= A g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d A \\
\Rightarrow A &= \frac{1}{d} \int d^d p p^2 f(p^2) \\
\Rightarrow \int d^d p p^\mu p^\nu f(p^2) &= \frac{g^{\mu\nu}}{d} \int d^d p p^2 f(p^2) . \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Dabei wurde (B.46) benutzt. Die d -dimensionalen Integrale mit unkontrahierten Integranden sind damit auf Integrale mit skalaren Integranden zurückgeführt.

Das gleiche Verfahren kann auch auf Integranden mit vier freien Lorentz-Indizes angewendet werden. Man erhält dafür:

$$\int d^d p p^\mu p^\nu p^\lambda p^\rho f(p^2) = \left(g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} \right) \frac{1}{d^2 + 2d} \int d^d p p^4 f(p^2) . \tag{C.13}$$

C.2 Formelsammlung für die Praxis

C.2.1 Wick-Rotation

Die Wick-Rotation ermöglicht es, einen im Minkowski-Raum formulierten Ausdruck in den euklidischen Raum zu transformieren. Dazu wird die Nullkomponente der

Vierervektoren im Minkowski-Raum in die komplexe Ebene fortgesetzt. Sei also k^2 der Minkowski-Impuls. Dann lautet die Wick-Rotation

$$k_0 = iK_0, \quad \vec{k} = \vec{K} \quad \text{mit} \quad K_0 \in \mathbf{R} \quad . \quad (\text{C.14})$$

Die Skalarprodukte und Volumenelemente in d -Dimensionen lauten:

$$d^d k = id^d K, \quad k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -K_0^2 - \vec{K}^2 = -K^2 \quad \text{mit} \quad K^2 \equiv K_0^2 + \vec{K}^2 \quad . \quad (\text{C.15})$$

Die Wick-Rotation setzt voraus, daß bei der Rotation keine Pole in der imaginären Ebene überstrichen werden.

C.2.2 Dirac-Identität

Die Dirac-Identität teilt ein Integral über einen Integranden mit Polen in seinen Hauptwert und den Polanteil auf:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{x' - x - i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x' - x) \quad . \quad (\text{C.16})$$

Die entsprechende Beziehung für Pole mit mehrfacher Multiplizität ist die verallgemeinerte Dirac-Identität und lautet

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{(x' - x - i\varepsilon)^{n+1}} = \mathcal{P} \frac{1}{(x' - x)^{n+1}} + \frac{i\pi}{n!} (-1)^n \delta^{(n)}(x' - x) \quad . \quad (\text{C.17})$$

C.2.3 Differentiationen von Propagatoren

Für $l > 0$ gilt

$$\left(-\frac{d}{dQ^2} \right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}} \quad . \quad (\text{C.18})$$

Diese Formel wird durch vollständige Induktion bewiesen. Für $l = 1$ ist die Behauptung korrekt, denn es gilt

$$\left(-\frac{d}{dQ^2} \right) \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \frac{s(s+Q^2) - sQ^2}{s^2(s+Q^2)^2} = \frac{1}{(s+Q^2)^2} \quad . \quad (\text{C.19})$$

Schluß von l nach $l+1$: Es gelte

$$\left(-\frac{d}{dQ^2} \right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} = \frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}} \quad . \quad (\text{C.20})$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{d}{dQ^2}\right) \left(-\frac{d}{dQ^2}\right)^l \frac{-Q^2}{s(s+Q^2)} &= \left(-\frac{d}{dQ^2}\right) \frac{l!}{(s+Q^2)^{l+1}} \\
&= l!(-1)^2(l+1)(s+Q^2)^{-(l+2)} \\
&= \frac{(l+1)!}{(s+Q^2)^{(l+2)}} \quad , \quad (C.21)
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Im folgenden wird die Formel

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^n \frac{1}{(k-q)^{2j}} = 2^{2n} \frac{(j+n-1)!(j+n-2)!}{(j-1)!(j-2)!} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n)}} \quad (C.22)$$

für Minkowski-Impulse k und q bewiesen. Für $j = 1$ führen die kombinatorischen Faktoren auf

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right) \frac{1}{(k-q)^{2j}} = 4 \frac{(1)!(0)!}{(0)!(-1)!} \frac{1}{(k-q)^4} = 0 \quad . \quad (C.23)$$

Der Beweis von Gl. C.22 erfolgt durch vollständige Induktion in n . Für $n = 0$ gilt

$$\frac{1}{(k-q)^{2j}} = 2^0 \frac{(j-1)!(j-2)!}{(j-1)!(j-2)!} \frac{1}{(k-q)^{2j}} \quad . \quad (C.24)$$

Es gelte nun die Behauptung für n . Dann liefert die nächste Differentiation

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^{n+1} \frac{1}{(k-q)^{2j}} &= \frac{\partial^2}{\partial q^2} \underbrace{2^{2n} \frac{(j+n-1)!(j+n-2)!}{(j-1)!(j-2)!}}_{c_n :=} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n)}} \\
&= c_n(j+n) \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{2(k-q)_\mu}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \\
&= 2c_n(j+n) \left\{ \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \frac{\partial}{\partial q_\mu} (k-q)_\mu \right. \\
&\quad \left. + (k-q)_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \right\} \\
&= 2c_n(j+n) \left\{ -\frac{4}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \right. \\
&\quad \left. + (j+n+1)(k-q)_\mu \frac{2(k-q)^\mu}{(k-q)^{2(j+n+2)}} \right\} \\
&= 2c_n(j+n) \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \{-4 + 2(j+n+1)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^2 c_n (j+n)(j+n-1) \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \\
&= c_{n+1} \frac{1}{(k-q)^{2(j+n+1)}} \quad , \quad (C.25)
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Es ist zu beachten, daß diese Formel für beliebige $j \in \mathbf{Z}$ richtig bleibt. So folgt z. B. für $j = -1$ und $n = 1$

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} (k-q)^2 = 4 \frac{(-1)!(-2)!}{(-2)!(-3)!} = 8 \quad . \quad (C.26)$$

Für alle $n > 1$ und $j = -1$ verschwindet (C.22).

Differentiationen von Termen, die einen Logarithmus enthalten, können auf (C.22) zurückgeführt werden, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial q^2} (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{ \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_\mu} (k-q)^2 + (k-q)^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial q_\mu} \left\{ -2(k-q)_\mu \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2(k-q)_\mu \right\} \\
&= -2 \left\{ -4 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) - (k-q)_\mu \frac{2(k-q)_\mu}{(k-q)^2} - 4 \right\} \\
\Rightarrow \quad &\frac{\partial^2}{\partial q^2} (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) = 8 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) + 12 \quad . \quad (C.27)
\end{aligned}$$

Eine weitere Differentiation liefert

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^2 (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial q^2} \left\{ 8 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) + 12 \right\} \\
&= -16 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{(k-q)_\mu}{(k-q)^2} \\
&= -16 \left\{ \frac{1}{(k-q)^2} \frac{\partial}{\partial q_\mu} (k-q)_\mu + (k-q)_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{(k-q)^2} \right\} \\
&= -16 \left\{ -\frac{4}{(k-q)^2} + (k-q)_\mu \frac{2(k-q)_\mu}{(k-q)^4} \right\} \\
\Rightarrow \quad &\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} \right)^2 (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) = \frac{32}{(k-q)^2} \quad . \quad (C.28)
\end{aligned}$$

Wegen C.23 verschwindet jede weitere Ableitung, so daß

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^n \left\{ (k-q)^2 \ln\left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2}\right) \right\} = \begin{cases} 8 \ln\left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2}\right) + 12 & \text{für } n = 1 \\ \frac{32}{(k-q)^2} & \text{für } n = 2 \\ 0 & \text{für } n > 2 \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

gilt.

Eine weitere nützliche Formel betrifft die $2n$ -te Ableitung eines mit dem skalaren Propagator verwandten Ausdrucks:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^n \frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + a} = (2n)! 4^n \frac{(k^2)^n}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+1}}, \quad (\text{C.30})$$

wobei a eine beliebige komplexe Konstante ist. p und q sind Minkowski-Impulse und n ist aus den natürlichen Zahlen mit Null. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Für die Verankerung ist

$$\frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + a} = 0! 4^0 \frac{(k^2)^0}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^1}. \quad (\text{C.31})$$

Für den Schluß von n nach $n+1$ gelte die Behauptung für n . Dann folgt für die nächste Differentiation:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)^{n+1} \frac{1}{k^2 - 2k \cdot q + a} &= (2n)! 4^n (k^2)^n \frac{\partial^2}{\partial q^2} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+1}} \\ &= (2n)! 4^n (k^2)^n (-2n-1) \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{-2k_\mu}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+2}} \\ &= (2n+1)! 4^n (k^2)^n (-2n-2) \frac{-4k_\mu k^\mu}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+3}} \\ &= (2n+2)! 4^{n+1} (k^2)^n \frac{k^2}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2n+3}} \\ &= (2(n+1))! 4^{n+1} (k^2)^{n+1} \frac{1}{(k^2 - 2k \cdot q + a)^{2(n+1)+1}}. \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

was zu zeigen war.

C.2.4 Parametrisierungen

In Feynmanamplituden treten im Nenner Produkte von Polynomen auf, deren Faktoren jeweils von einem Propagator stammen. Diese Produkte werden mit Hilfe

von Parameterintegralen umgeschrieben, um die Amplituden auf die Form (C.103) zurückzuführen. Für die Polynome a und b gilt⁷:

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + b(1-x)]^{\alpha+\beta}} \quad . \quad (\text{C.33})$$

α und β können beliebige reelle Zahlen sein. Für $\alpha = \beta = 1$ reduziert sich (C.33) zu:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} \quad . \quad (\text{C.34})$$

Eine alternative Parametrisierung, die vorwiegend in euklidischen Anwendungen findet, ist⁸

$$\frac{1}{(K^2)^\alpha} = \frac{\Gamma\left(2 - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma(\alpha)} \int d^d x \frac{e^{2iKx}}{(x^2)^{2-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}} \quad , \quad (\text{C.35})$$

wobei $d = 4 - \varepsilon$ gewählt wurde.

Die Parametrisierung von drei Polynomen sieht wie folgt aus⁹:

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} (1-x-y)^{\gamma-1}}{[ax + by - c(1-x-y)]^{\alpha+\beta+\gamma}} \quad . \quad (\text{C.36})$$

Alternativ dazu kann auch die Parametrisierung¹⁰

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{u_1^{\alpha-1} u_2^{\beta-1} u_3^{\gamma-1}}{[au_1 + bu_2 + cu_3]^{\alpha+\beta+\gamma}} \quad (\text{C.37})$$

benutzt werden, wobei $u_1 = xy$, $u_2 = x(1-y)$, $u_3 = 1-x$ und $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Allgemeiner lautet die Formel für mehr als drei Faktoren¹¹:

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{a_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i x_i^{\alpha_i-1} \frac{\delta(1 - \sum_{i=1}^n x_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i a_i)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}} \quad . \quad (\text{C.38})$$

⁷Vgl. Pokorski 1990.

⁸Vgl. Pascual, Tarrach 1984.

⁹Vgl. Muta 1987.

¹⁰Vgl. Yndurain 1993.

¹¹Vgl. Muta 1987.

C.2.5 Quadratische Ergänzungen

Nach der Parametrisierung eines Integrals ist in der Regel der Nenner auf eine quadratische Form zu bringen:

$$\begin{aligned} & x \left((p-k)^2 - m_1^2 \right) + (1-x) \left(k^2 - m_2^2 \right) \\ &= (k-xp)^2 + x(1-x)p^2 - xm_1^2 - (1-x)m_2^2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

$$\begin{aligned} & u_1(p-k)^2 + u_2k^2 + u_3(p+q-k)^2 \\ &= (k-u_1p-u_3(p+q))^2 + 2p \cdot qu_3(1-u_1-u_3) + q^2u_3(1-u_3) \\ &= (k-xyp - (1-x)(p+q))^2 + q^2x(1-x)(1-\omega(1-y)) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

In der zweiten quadratischen Ergänzung wurde im Hinblick auf masselose Quarks $p^2 = 0$ gesetzt. Die Parameter $u_{1,2,3}$ sind mit denen aus der Parametrisierung (C.37) identisch — es gilt daher $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. In der letzten Zeile wurde die Parameter wieder rücks substituiert.

C.2.6 Parameterintegrale

Mit den Abkürzungen $y := ax^2 + bx + c$ und $\Delta := 4ac - b^2$ gelten folgende Beziehungen¹², die für die Lösung von Parameterintegralen hilfreich sind:

$$\int_0^1 dx x^{a-1} (1-x)^{b-1} = \int_0^\infty dx \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad , \quad (\text{C.41})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{x^\beta}{[x(1-x)p^2 - (1-x)\lambda^2]^\alpha} \\ &= \left(\frac{1}{p^2} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \alpha \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(1+\beta-\alpha-n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(2+\beta-2\alpha-n)} \left(\frac{\lambda^2}{p^2} \right)^n \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \frac{(1-x)^s x^\alpha}{(1-\omega(1-x))^{1+r}} = \int_0^1 dx \frac{x^s (1-x)^\alpha}{(1-\omega x)^{1+r}} \\ &= \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2+s+\alpha)} {}_2F_1(1+r, 1+s; 2+s+\alpha; \omega) \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+r)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+r+n)\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(2+s+n+\alpha)\Gamma(1+n)} \omega^n \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

$$\int dx \frac{1}{y} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \right) & \text{für } \Delta > 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{artanh} \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right) & \text{für } \Delta < 0 \end{cases} \quad , \quad (\text{C.44})$$

¹²Gradstein, Ryshik 1981: 2.17; Abramowitz, Stegun 1972: 15.1.1 und 15.3.1.

$$\int dx \frac{x}{y} = \frac{1}{2a} \ln(y) - \frac{b}{2a} \int dx \frac{1}{y} \quad , \quad (\text{C.45})$$

$$\int dx \frac{x^2}{y} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln(y) + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2} \int dx \frac{1}{y} \quad , \quad (\text{C.46})$$

$$\int dx \frac{x^m}{y} = -\frac{x^{m-1}}{(1-m)a} - \frac{b}{a} \int dx \frac{x^{m-1}}{y} - \frac{c}{a} \int dx \frac{x^{m-2}}{y} \quad , \quad (\text{C.47})$$

wobei in (C.43) die Hypergeometrische Funktion ${}_2F_1$ (A.49) benutzt wurde.

C.2.7 Laurent-Reihen-Entwicklung

Im folgenden werden Laurent-Reihen-Entwicklungen angegeben, die für die Isolation von Divergenzen in Feynmanamplituden hilfreich sind. Es wird $d = 4 - \varepsilon$ gesetzt.

Für eine beliebige Funktion f gilt

$$f^z = 1 + z \ln(f) + \frac{1}{2} z^2 \ln^2(f) + \frac{1}{6} z^3 \ln^3(f) + \dots \quad . \quad (\text{C.48})$$

Dies sieht man ein, wenn man die Funktion $g(z) := f^z$ etwas anders notiert:

$$\begin{aligned} f^z &= \exp(\ln(f^z)) = \exp(z \ln(f)) \\ \implies \frac{dg}{dz} &= \ln(f) \exp(z \ln(f)) \\ \implies \frac{d^2g}{dz^2} &= \ln^2(f) \exp(z \ln(f)) \\ \implies f^z &= g(0) + z \left. \frac{dg}{dz} \right|_{z=0} + \frac{1}{2} z^2 \left. \frac{d^2g}{dz^2} \right|_{z=0} + \dots \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.49})$$

Es gilt

$$\frac{1}{(1 - a\omega)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(1 + n)\Gamma(\alpha)} (a\omega)^n \quad . \quad (\text{C.50})$$

Für $\alpha = 1$ ist dies die geometrische Reihe. Für Wurzeln gilt die Entwicklung:

$$\sqrt{1 - \frac{a}{s}} = 1 - \frac{a}{2s} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{n!} \left(\frac{a}{2s}\right)^n \quad . \quad (\text{C.51})$$

Für Produkte von Entwicklungen gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\omega^n \sum_{m=0}^{\infty} \omega^m = \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k \sum_{j=0}^k f(j) \quad . \quad (\text{C.52})$$

Eine Integral-Darstellung der Γ -Funktionen lautet¹³:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t} = \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^2} \ln^{z-1}(r) \quad , \quad (\text{C.53})$$

wobei man die zweite Form durch eine einfache Substitution erhält. Ein günstiger Ausgangspunkt für die Entwicklung von Γ -Funktionen ist¹⁴:

$$\ln(\Gamma(1+z)) = -\ln(1+z) + z(1-\gamma) + \frac{1}{2}[\zeta(2)-1]z^2 + \dots \quad (\text{C.54})$$

mit der Riemannschen Zeta-Funktion

$$\begin{aligned} \zeta(n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \quad , \\ \zeta(2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \quad (\text{C.55})$$

und der Eulerschen Konstanten γ . Einige numerische Werte der Riemannschen Zeta-Funktion finden sich in der folgenden Tabelle:

$\zeta(1) = \infty$	$\zeta(2) = 1.6449332510$
$\zeta(3) = 1.2020568994$	$\zeta(4) = 1.0823232335$
$\zeta(5) = 1.0369277551$	$\zeta(6) = 1.0173430620$
$\zeta(7) = 1.0083492774$	$\zeta(8) = 1.0040773562$
$\zeta(9) = 1.0020083928$	$\zeta(10) = 1.0009945751$

Damit kann die Γ -Funktion selbst entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+z) &= \frac{1}{1+z} \exp \left\{ z(1-\gamma) + \frac{1}{2}z^2(\zeta(2)-1) + \dots \right\} \\ &= (1-z+z^2-\dots) \left\{ 1 + (1-\gamma)z + \frac{1}{2}z^2(\zeta(2)-\gamma) + \dots \right\} \\ \Rightarrow \Gamma(1+z) &= 1 - \gamma z + \frac{1}{2}z^2 \left(\zeta(2) - \frac{1}{2}\gamma \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.56})$$

Alle Γ -Funktionen mit anderen Argumenten können mit Hilfe der Beziehung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{C.57})$$

¹³Vgl. Abramowitz, Stegun 1972: 6.1.1.

¹⁴Vgl. Abramowitz, Stegun 1972: 6.1.33.

und der Entwicklung

$$\frac{1}{1 \pm z/n} = 1 \mp \frac{z}{n} + \left(\frac{z}{n}\right)^2 \mp \dots \quad (\text{C.58})$$

auf $\Gamma(1+z)$ in (C.56) zurückgeführt werden:

$$\Gamma(-1+z) = -\frac{1}{z} - (1-\gamma) - \frac{z}{2} \left(2 + \zeta(2) - \frac{3}{2}\gamma\right) \quad , \quad (\text{C.59})$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + \frac{z}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma\right) \quad , \quad (\text{C.60})$$

$$\Gamma(1+z) = 1 - \gamma z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma\right) \quad , \quad (\text{C.61})$$

$$\Gamma(2+z) = 1 + (1-\gamma)z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - \frac{3}{2}\gamma\right) \quad , \quad (\text{C.62})$$

$$\Gamma(3+z) = 2 \left(1 + \left(\frac{3}{2} - \gamma\right)z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + 1 - \frac{5}{2}\gamma\right)\right) \quad , \quad (\text{C.63})$$

$$\Gamma(4+z) = 6 \left(1 + \left(\frac{11}{6} - \gamma\right)z + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + 2 - \frac{19}{6}\gamma\right)\right) \quad . \quad (\text{C.64})$$

Allgemeiner kann für n aus den natürlichen Zahlen ohne Null durch vollständige Induktion die Beziehung

$$\Gamma(n+z) = \Gamma(n) \left[1 + z \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma\right) + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} + \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}\right) \gamma\right)\right] \quad (\text{C.65})$$

bewiesen werden. Die Induktionsverankerung ist leicht nachzuprüfen. Unter der Voraussetzung der Beziehung für ein beliebiges n folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+n+z) &= (n+z) \Gamma(n+z) \\ &= n \left(1 + \frac{z}{n}\right) \Gamma(n) \left[1 + z \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} + \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k}\right) \gamma\right)\right] \\ &= \Gamma(1+n) \left[1 + z \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \sum_{k=2}^n \frac{2}{k} \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l} + \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{2}{k}\right) \gamma\right)\right] \quad , \quad (\text{C.66}) \end{aligned}$$

was gerade die Behauptung für $1+n$ ergibt und den Induktionsschluß vollzieht.

Für die inversen Γ -Funktionen ist:

$$\frac{1}{\Gamma(-1+z)} = -z + (1-\gamma)z^2 + \frac{z^3}{2} \left(\zeta(2) + \frac{5}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad , \quad (\text{C.67})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z + \gamma z^2 - \frac{z^3}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad , \quad (\text{C.68})$$

$$\frac{1}{\Gamma(1+z)} = 1 + \gamma z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) + \frac{1}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad , \quad (\text{C.69})$$

$$\frac{1}{\Gamma(2+z)} = 1 - (1-\gamma)z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - 2 + \frac{5}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \quad , \quad (\text{C.70})$$

$$\frac{1}{\Gamma(3+z)} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{3}{2} - \gamma \right) z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - \frac{7}{2} + \frac{7}{2}\gamma - 2\gamma^2 \right) \right) \quad , \quad (\text{C.71})$$

$$\frac{1}{\Gamma(4+z)} = \frac{1}{6} \left(1 - \left(\frac{11}{6} - \gamma \right) z - \frac{z^2}{2} \left(\zeta(2) - \frac{85}{18} + \frac{25}{6}\gamma - 2\gamma^2 \right) \right) \quad . \quad (\text{C.72})$$

Die Beta-Funktion ist durch

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{C.73})$$

definiert. Eine nützliche Integraldarstellung der Beta-Funktion ist¹⁵:

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} = \int_0^\infty dt \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} \quad (\text{C.74})$$

Die Psi-Funktion ist durch

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \quad (\text{C.75})$$

definiert. Die Reihen-Darstellung der Psi-Funktion lautet¹⁶:

$$\psi(1+z) = -\gamma + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) z^{n-1} \quad . \quad (\text{C.76})$$

Die Psi-Funktion mit anderen Argumenten folgt aus der Rekursionsformel

$$\psi(1+z) = \frac{1}{z} + \psi(z) \quad . \quad (\text{C.77})$$

¹⁵Vgl. Abramowitz, Stegun 1972: 6.2.1.

¹⁶Vgl. Abramowitz, Stegun 1972: 6.3.14.

Die letzte Beziehung erlaubt es, jede Funktion $\psi(n+z)$ mit n aus den ganzen Zahlen als eine Summe von rationalen Funktionen von z und der Funktion $\psi(1+z)$ auszudrücken:

$$\begin{aligned}\psi(-2+z) &= \frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} + \psi(1+z) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + 1+z - \frac{1}{z} + \psi(1+z) \\ &= -\frac{1}{z} + \frac{3}{2} + \frac{5}{4}z + \psi(1+z) \quad ,\end{aligned}\tag{C.78}$$

$$\begin{aligned}\psi(-1+z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{z} + \psi(1+z) \\ &= 1+z - \frac{1}{z} + \psi(1+z) \quad ,\end{aligned}\tag{C.79}$$

$$\begin{aligned}\psi(2+z) &= \frac{1}{1+z} + \psi(1+z) \\ &= 1-z+z^2-z^3 + \psi(1+z) \quad ,\end{aligned}\tag{C.80}$$

$$\begin{aligned}\psi(3+z) &= \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1+z} + \psi(1+z) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{5}{4}z + \frac{9}{8}z^2 - \frac{17}{16}z^3 + \psi(1+z) \quad ,\end{aligned}\tag{C.81}$$

$$\begin{aligned}\psi(4+z) &= \frac{1}{3+z} + \frac{1}{2+z} + \frac{1}{1+z} + \psi(1+z) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + 1-z+z^2 + \psi(1+z) \\ &= \frac{11}{6} - \frac{49}{36}z + \frac{251}{216}z^2 - \frac{1393}{1296}z^3 + \psi(1+z) \quad ,\end{aligned}\tag{C.82}$$

$$\begin{aligned}\psi(5+z) &= \frac{1}{4+z} + \psi(4+z) \\ &= \frac{25}{12} - \frac{205}{144}z + \frac{2035}{1728}z^2 - \frac{22369}{20736}z^3 + \psi(1+z) \quad .\end{aligned}\tag{C.83}$$

Es genügt deshalb, die Entwicklung von $\psi(1+z)$ zu kennen:

$$\psi(1+z) = -\gamma + \zeta(2)z - \zeta(3)z^2 + \zeta(4)z^3 + \dots\tag{C.84}$$

Setzt man $\psi(1+z)$ in die obigen Beziehungen ein, kann man durch vollständige Induktion für $n \geq 1$ die Beziehung

$$\psi(n+z) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma + z \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right) + \mathcal{O}(z^2)\tag{C.85}$$

beweisen, denn nach einer trivialen Induktionsverankerung erhält man mit (C.77) für das nächste n :

$$\psi(1+n+z) = \frac{1}{n+z} + \psi(n+z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} - \frac{z}{n^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma + z \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right) + \mathcal{O}(z^2) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + z \left(\zeta(2) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) + \mathcal{O}(z^2) \quad , \quad (C.86)
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

Für die Ableitung der ψ -Funktion findet man durch Differentiation von (C.76):

$$\begin{aligned}
\psi'(1+z) &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \zeta(n) (n-1) z^{n-2} \\
&= \zeta(2) - 2\zeta(3)z + 3\zeta(4)z^2 - 4\zeta(5)z^3 + \dots \quad . \quad (C.87)
\end{aligned}$$

Die Ableitung der ψ -Funktion von anderen Argumenten erhält man durch Differentiation von (C.77):

$$\psi'(2+z) = -1 + 2z - 3z^2 + 4z^3 + \psi'(1+z) \quad , \quad (C.88)$$

$$\psi'(3+z) = -\frac{5}{4} + \frac{9}{4}z - \frac{51}{16}z^2 + \frac{33}{8}z^3 + \psi'(1+z) \quad , \quad (C.89)$$

$$\psi'(4+z) = -\frac{49}{36} + \frac{251}{108}z - \frac{1393}{432}z^2 + \frac{8051}{1944}z^3 + \psi'(1+z) \quad , \quad (C.90)$$

$$\psi'(5+z) = -\frac{205}{144} + \frac{2035}{864}z - \frac{22369}{6912}z^2 + \frac{257875}{62208}z^3 + \psi'(1+z) \quad . \quad (C.91)$$

Schließlich werden einige Produkte von Γ -Funktionen in entwickelter Form angegeben:

$$\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{z}{2}\right) = 1 + \mathcal{O}(z^2) \quad , \quad (C.92)$$

$$\frac{\Gamma\left(-1 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{z}{2}\right)}{\Gamma(1-z)} = \frac{z}{2} - \gamma + \mathcal{O}(z) \quad , \quad (C.93)$$

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma(2-z)} = -\frac{2}{z} - 3\gamma + 2 + \mathcal{O}(z) \quad , \quad (C.94)$$

$$\frac{\Gamma\left(2 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma(2-z)} = 1 + \frac{z}{2}(1-\gamma) \quad , \quad (C.95)$$

$$\frac{\Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma(3-z)} = \frac{1}{2} \left(1 + z + \frac{z^2}{4} \left(4 - \frac{1}{2}\gamma + \gamma^2 - \zeta(2) \right) \right) \quad , \quad (C.96)$$

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma(3-z)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{z} + 2 + \frac{z}{2} \left(4 - \frac{1}{2}\gamma + \gamma^2 - \zeta(2) \right) \right) \quad ,$$

(C.97)

$$\frac{\Gamma\left(-2 + \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma(4 - z)} = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{z} - \gamma + \frac{11}{3} \right) , \quad (\text{C.98})$$

$$\frac{\Gamma\left(-3 + \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{z}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{z}{2}\right)}{\Gamma(5 - z)} = -\frac{1}{72} \left(\frac{2}{z} - \gamma + \frac{7}{2} \right) . \quad (\text{C.99})$$

Für Ableitungen von Produkten von Γ -Funktionen gilt:

$$\frac{d}{ds} \left[\frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(f_i(s))}{\prod_{j=1}^m \Gamma(g_j(s))} \right] = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(f_i(s))}{\prod_{j=1}^m \Gamma(g_j(s))} \left\{ \sum_{i=1}^n f'_i(s) \psi(f_i(s)) - \sum_{j=1}^m g'_j(s) \psi(g_j(s)) \right\} . \quad (\text{C.100})$$

Für die zweite Ableitung desselben Produkts erhält man für Funktionen f_i und g_j , die linear in s sind — also deren zweite Ableitung verschwindet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(f_i(s))}{\prod_{j=1}^m \Gamma(g_j(s))} \right] &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma(f_i(s))}{\prod_{j=1}^m \Gamma(g_j(s))} \left\{ \left[\sum_{i=1}^n f'_i(s) \psi(f_i(s)) - \sum_{j=1}^m g'_j(s) \psi(g_j(s)) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n f_i'^2(s) \psi'(f_i(s)) - \sum_{j=1}^m g_j'^2(s) \psi'(g_j(s)) \right\} , \quad (\text{C.101}) \end{aligned}$$

wie man mit Hilfe der Produktregel nachweisen kann.

C.3 Regularisierung von Integralen

C.3.1 Das fundamentale Integral

Für euklidische Impulse p wurde in (C.4) die Eigenschaft

$$\int d^d p (p^2)^\alpha = 0 \quad (\text{C.102})$$

für $\alpha \neq -2$ bewiesen.

Im folgenden wird die Formel

$$I := \int d^d p \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + m^2)^\beta} = \pi^{d/2} (m^2)^{d/2 + \alpha - \beta} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\beta - \alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma(\beta)} \quad (\text{C.103})$$

bewiesen. Mit Hilfe von (C.9) wird dieses Integral auf ein eindimensionales Integral zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp p^{d-1} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + m^2)^\beta} \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{m^{2\beta}\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dp \frac{p^{d-1+2\alpha}}{\left(\frac{p^2}{m^2} + 1\right)^\beta} \\
&= \frac{2\pi^{d/2}}{m^{2\beta}\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{m dt}{2\sqrt{t}} \frac{(m^2 t)^{\frac{d-1}{2}+\alpha}}{(t+1)^\beta} \\
&= \frac{\pi^{d/2}}{m^{2\beta-2\alpha-d}\Gamma(d/2)} \int_0^\infty dt \frac{t^{\frac{d}{2}+\alpha-1}}{(t+1)^\beta} \\
&\equiv \frac{\pi^{d/2}}{m^{2\beta-2\alpha-d}\Gamma(d/2)} B\left(\alpha + \frac{d}{2}, \beta - \alpha - \frac{d}{2}\right) \quad , \quad (C.104)
\end{aligned}$$

wobei die Substitution $m^2 t = p^2$ und die Integraldarstellung der Beta-Funktion B (C.74) benutzt wurden. Die Beta-Funktion ist genau die behauptete Kombination von Γ -Funktionen (C.73). Dieses regularisierte Integral wird die Grundlage für viele andere Integrale bilden. Man sieht, daß beispielsweise für $\alpha = \beta = 1$ und $d = 4$ eine Divergenz in der Funktion $\Gamma(-d/2)$ auftritt, die mit Hilfe der Laurentreihen-Entwicklung der Γ -Funktion¹⁷ isoliert werden kann. Alle anderen Funktionen sind endlich.

Im Minkowski-Raum lautet diese nützliche Formel

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + m^2)^\beta} = -(-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} (m^2)^{\frac{d}{2}+\alpha-\beta} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\beta - \alpha - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma(\beta)} \quad . \quad (C.105)$$

C.3.2 Einer von zwei masselosen Propagatoren in beliebiger Potenz

Skalarer Zähler

$$I^s(p^2) := i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad . \quad (C.106)$$

¹⁷Vgl. Kap. C.2.7.

Die Fortsetzung nach d -Dimensionen mit (C.8) liefert:

$$I^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad . \quad (\text{C.107})$$

Die Feynmanparametrisierung mit (C.33) ergibt:

$$I^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^s}{(x(p-k)^2 + (1-x)k^2)^{2+s}} \quad . \quad (\text{C.108})$$

Durch Umformung des Nenners mit quadratischer Ergänzung erhält man:

$$I^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^s}{((k-xp)^2 + x(1-x)p^2)^{2+s}} \quad . \quad (\text{C.109})$$

Hier kann die Translationsinvarianz ausgenutzt werden und der Integrand auf die Form von (C.105) gebracht werden. Damit ist das Impulsintegral gelöst. Auch das verbleibende Parameterintegral ist aus (C.41) bekannt. Man erhält auf diese Weise:

$$\begin{aligned} I^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^s}{(k^2 + x(1-x)p^2)^{2+s}} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} (p^2)^{-s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-2-s} (1-x)^{\frac{d}{2}-2} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(d-2-s)} \quad . \quad (\text{C.110}) \end{aligned}$$

Damit lautet das Ergebnis der Regularisierung:

$$\begin{aligned} I^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(d-2-s)} \quad . \quad (\text{C.111}) \end{aligned}$$

Hier können zwei Grenzfälle untersucht werden: $s = 0$ und $d = 4$. Für $s = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} I^0(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 k^2} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)^2}{\Gamma(d-2)} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{\Gamma(2-\varepsilon)} \quad . \quad (\text{C.112}) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist bei $\varepsilon = 0$ divergent und identisch mit (C.149). Für $d = 4$ erhält man

$$\begin{aligned} I^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\ &= -\frac{1}{(p^2)^s} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(2-s)} \\ &= -\frac{1}{(p^2)^s} \frac{1}{s(1-s)} . \end{aligned} \quad (\text{C.113})$$

Die Divergenz des Integrals äußert sich hier in zwei Polen bei $s = 0, 1$.

Vektorieller Zähler

$$I_\alpha^s(p^2) := i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} . \quad (\text{C.114})$$

Die Fortsetzung nach d -Dimensionen mit (C.8), die Feynmanparametrisierung mit (C.33) und die quadratische Ergänzung des Nenners liefern:

$$I_\alpha^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^s k_\alpha}{((k-xp)^2 + x(1-x)p^2)^{2+s}} . \quad (\text{C.115})$$

Eine Translation von k_α wirkt sich hier auch auf den Ausdruck im Zähler aus, wobei der Term proportional zu k_α wegen des sonst geraden Integranden wegfällt. Es verbleibt ein Integral, das aus (C.105) bekannt ist:

$$I_\alpha^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^s x p_\alpha}{(k^2 + x(1-x)p^2)^{2+s}} . \quad (\text{C.116})$$

Die Impulsintegration und die Parameterintegration sind nun mit den (C.105) und (C.41) auszuführen:

$$\begin{aligned} I_\alpha^s(p^2) &= -\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{p_\alpha}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1-s} (1-x)^{\frac{d}{2}-2} \\ &= -\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{p_\alpha}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(d-1-s)} . \end{aligned} \quad (\text{C.117})$$

Damit lautet das Ergebnis der Regularisierung:

$$\begin{aligned} I_\alpha^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\ &= -\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{p_\alpha}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(d-1-s)} . \end{aligned} \quad (\text{C.118})$$

Wieder werden die beiden Fälle $s = 0$ und $d = 4$ untersucht. Für $s = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
I_\alpha^0(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 k^2} \\
&= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} p_\alpha \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(d-1)} \\
&= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} p_\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3-\varepsilon)} \\
&= -\frac{1}{2} p_\alpha \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right) . \quad (\text{C.119})
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält eine einfache Divergenz bei $\varepsilon = 0$. Für $d = 4$ erhält man

$$\begin{aligned}
I_\alpha^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\
&= - \frac{p_\alpha}{(p^2)^s} \frac{\Gamma(s)\Gamma(2-s)}{\Gamma(1+s)\Gamma(3-s)} \\
&= - \frac{p_\alpha}{(p^2)^s} \frac{1}{s(2-s)} . \quad (\text{C.120})
\end{aligned}$$

Die Divergenz des Integrals äußert sich hier in zwei Polen bei $s = 0, 2$.

Tensorieller Zähler

$$I_{\alpha\beta}^s(p^2) := i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} . \quad (\text{C.121})$$

Die Fortsetzung nach d -Dimensionen mit (C.8), die Feynmanparametrisierung mit (C.33) und die quadratische Ergänzung des Nenners liefern:

$$I_{\alpha\beta}^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(2+s)} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(1-x)^{1+s} k_\alpha k_\beta}{((k-xp)^2 + x(1-x)p^2)^{3+s}} . \quad (\text{C.122})$$

Eine Translation von k_α wirkt sich hier auch auf den Ausdruck im Zähler aus, wobei die Terme proportional zu k_α oder k_β wegen des sonst geraden Integranden wegfallen. Es verbleibt ein Integral, das aus einem skalaren Integranden und einem Integranden proportional zu $k_\alpha k_\beta$ zusammengesetzt ist. Das erste ist aus (C.105)

bekannt, während das zweite mit (C.12) auf das gleiche Integral zurückgeführt werden kann.

$$I_{\alpha\beta}^s(p^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(2+s)} \int_0^1 dx (1-x)^{1+s} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\frac{g_{\alpha\beta}}{d} k^2 + x^2 p_\alpha p_\beta}{(k^2 + x(1-x)p^2)^{3+s}}. \quad (\text{C.123})$$

Nach der Ausführung der Impulsintegrationen erhält man:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}^s(p^2) &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(p^2)^s} \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s)} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-2-s} (1-x)^{\frac{d}{2}-1} \\ &\quad - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{p_\alpha p_\beta}{(p^2)^{1+s}} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s)} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1-s} (1-x)^{\frac{d}{2}-2}. \end{aligned} \quad (\text{C.124})$$

Die Feynmanparameterintegrale können mit (C.41) ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}^s(p^2) &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(p^2)^s} \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-1-s)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-1-s)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.125})$$

Damit lautet das Ergebnis der Regularisierung:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(p^2)^s} \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-1-s)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-1-s)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

Wieder werden die beiden Fälle $s = 0$ und $d = 4$ untersucht. Für $s = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\beta}^0(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 k^4} \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \left(2-\frac{d}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3 - \varepsilon)} \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \\
&= -\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) \right) - \frac{1}{2} \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad . \quad (\text{C.127})
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält eine einfache Divergenz bei $\varepsilon = 0$. Für $d = 4$ erhält man

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta}^s(p^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} \\
&= -\frac{1}{(p^2)^s} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(2+s)\Gamma(3-s)} \left[\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} s(1-s) \right] \\
&= -\frac{1}{(p^2)^s} \frac{1}{s(1+s)(1-s)(2-s)} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{p^2} s(1-s) \right) \quad . \quad (\text{C.128})
\end{aligned}$$

Die Divergenz des Integrals äußert sich hier in vier Polen bei $s = -1, 0, 1, 2$.

C.3.3 Die Quark-Selbstenergie in der Borelebene

Die im vorigen Abschnitt behandelten Integrale haben die Struktur des Quark-Selbstenergie-Graphen (siehe Abb. C.1) mit einem Borel-transformierten, resummierten Gluon-Propagator (4.58), der im folgenden ausgewertet wird. Die Ampli-

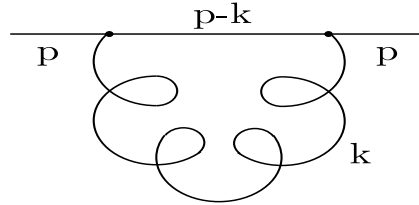


Abbildung C.1: Der Quark-Selbstenergie-Graph.

tude für den Selbstenergiegraphen ist

$$\begin{aligned}
S(p) &= \mu^{4-d} C_F \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} g \gamma_\rho \frac{-1}{\not{p} - \not{k}} g \gamma_\sigma D^{\rho\sigma}(k) \\
&= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} - \not{k}) \gamma_\sigma}{(p-k)^2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} D^{\rho\sigma}(k) \quad . \quad (\text{C.129})
\end{aligned}$$

Die Boreltransformation dieses Ausdrucks wirkt nur auf die Kopplung und den Gluonpropagator, so daß mit $s = \beta_0 u$ folgt:

$$\mathcal{B}[S](u) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} C_F \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} - \not{k}) \gamma_\sigma}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \left(g^{\rho\sigma} - \frac{k^\rho k^\sigma}{k^2} \right)$$

$$\equiv C_F \left(-\mu^2 e^{-C}\right)^s \left((2-d)\gamma_\rho I_g^\rho - I_k\right) \quad , \quad (\text{C.130})$$

wobei der Feynman- und der Landau-Term getrennt voneinander ausgewertet werden. Zunächst wird der Feynman-Term I_g betrachtet

$$I_g := i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\rho}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad , \quad (\text{C.131})$$

der eine Kombination der Integrale (C.106) und (C.114) bildet. Die zugehörigen regularisierten Ausdrücke (C.111) und (C.118) werden eingesetzt:

$$\begin{aligned} I_g &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{p^\rho}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(1+s)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-2)} - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\Gamma(d-s-1)} \right] \\ &= - \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{p^\rho}{(p^2)^s} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(d-s-1)} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.132})$$

Daraus erhält man für den Borel-transformierten Selbstenergie-Graphen in der durch den Index F bezeichneten Feynman-Eichung:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}}[S_F](u) &= 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{-p^2} \right)^s \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \not{p} \left(\frac{d}{2} - 1 \right) \\ &\quad \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(d-s-1)} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.133})$$

Für $d=4$ bzw. $\varepsilon=0$ erhält man das Ergebnis der analytischen Regularisierung in der Borel-Ebene:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[S_F](u) &= 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{-p^2} \right)^s \not{p} \frac{\Gamma(s) \Gamma(1-s)}{\Gamma(1+s) \Gamma(3-s)} \\ &= 2C_F \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{-p^2} \right)^s \not{p} \frac{1}{s(1-s)(2-s)} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.134})$$

Für $s=0$ wiederum erhält man den dimensional regularisierten Ausdruck für den Selbstenergie-Graphen mit einem ausgetauschten Gluon (ohne Resummation von Fermionen-Loops), wobei das Ergebnis mit $a_s = g^2/(4\pi^2)$ zu multiplizieren ist, um die Borel-Transformation rückgängig zu machen:

$$\begin{aligned} S_F(p) &= 2C_F a_s \not{p} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^2}{\Gamma(d-1)} \\ &= C_F a_s \not{p} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.135})$$

Im letzten Schritt wurde die Entwicklung um den Pol bei $\varepsilon = 0$ (wobei $d = 4 - \varepsilon$) mit (C.48), (C.60), (C.62) und (C.71) durchgeführt.

Im folgenden wird I_k in (C.130) bestimmt:

$$\begin{aligned}
I_k &:= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\rho (\not{p} - \not{k}) \gamma^\sigma}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \frac{k_\rho k_\sigma}{k^2} \\
&= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{k} (\not{p} - \not{k}) \not{k}}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} \\
&= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \left(\gamma^\rho \not{p} \gamma^\sigma \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\rho k_\sigma}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} \right. \\
&\quad \left. - \gamma^\rho \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\rho}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \right) . \quad (\text{C.136})
\end{aligned}$$

Auch diese beiden Integrale wurden im vorangegangenen Abschnitt regularisiert (siehe (C.118) und (C.126)):

$$\begin{aligned}
I_k &= -\frac{\gamma^\rho \not{p} \gamma^\sigma}{(p^2)^s} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \left\{ \frac{1}{2} g_{\rho\sigma} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-s-1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{p_\rho p_\sigma}{p^2} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-s-1)} \right\} \\
&\quad \frac{\not{p}}{(p^2)^s} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(d-s-1)} \\
&= \frac{\not{p}}{(p^2)^s} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \left(2d-6+s \left(1-\frac{d}{2} \right) \right) \\
&\quad \frac{\Gamma\left(2+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(2+s) \Gamma(d-s-1)} . \quad (\text{C.137})
\end{aligned}$$

Daraus erhält man das Ergebnis der analytischen Regularisierung für $d = 4$:

$$I_k = C_F \frac{\not{p}}{(p^2)^s} \frac{(2-s)\Gamma(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(2+s)\Gamma(3-s)} = \frac{\not{p}}{(p^2)^s} \frac{1}{s(1-s)(1+s)} . \quad (\text{C.138})$$

Dies ist bis auf einen Faktor $C_F(-\mu^2 e^{-C})^s$ der Beitrag des Landau-Terms zum Selbstenergiegraphen. Dieser ist in der Landau-Eichung gerade die Differenz von (C.134) und dem Landau-Term:

$$\mathcal{B}[S_L](u) = 3C_F \not{p} \left(\frac{\mu^2 e^{-C}}{-p^2} \right)^s \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s)} . \quad (\text{C.139})$$

Der Selbstenergie-Graph ist bei $s = 0$ in der Landau-Eichung nicht divergent. Dies ist konform mit der bekannten Tatsache, daß derselbe in der Landau-Eichung (ohne Loop-Resummation) verschwindet, und muß sich daher auch in dem Ergebnis der dimensional Regularisierung, das man für $s = 0$ und $d \neq 4$ erhält, widerspiegeln:

$$\begin{aligned} I_k &= \not{p} (2d - 6) \left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right)}{\Gamma(d - 1)} \\ &= \not{p} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 1 + \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{-p^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \right] . \end{aligned} \quad (\text{C.140})$$

Bis auf einen Faktor C_{Fas} ist dies das Ergebnis der dimensional Regularisierung für den Landau-Term des Selbstenergie-Graphen mit einem nicht resummierten ausgetauschten Gluon und ist tatsächlich mit dem Ergebnis der Feynman-Eichung (C.135) identisch, so daß die Differenz verschwindet:

$$S_L(p) = 0 \quad . \quad (\text{C.141})$$

Der Selbstenergie-Graph verschwindet in der Landau-Eichung, während er in der Feynman-Eichung einen Beitrag zur Feynman-Amplitude liefert, woran man erkennen kann, daß die Aussage der Eichinvarianz sich nicht auf die Graphen zu einer festgelegten Ordnung einzeln bezieht, sondern immer nur die Summe aller Graphen derselben Ordnung betrifft.

C.3.4 Zwei masselose Propagatoren in beliebigen Potenzen

Im folgenden wird ein Integral mit skalaren Propagatoren von masselosen Teilchen betrachtet:

$$I^{r,s}(q^2) := i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + i\epsilon)^r ((p - q)^2 + i\epsilon)^s} \quad . \quad (\text{C.142})$$

Dieses Integral wird für beliebige $r, s \in \mathbf{R}$ regularisiert. Die analytische Fortsetzung auf d Dimensionen lautet mit (C.8)

$$I^{r,s}(q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + i\epsilon)^r ((p - q)^2 + i\epsilon)^s} \quad . \quad (\text{C.143})$$

Mit Hilfe der Wick-Rotation¹⁸ kann das Integral mit euklidischen Impulsen notiert werden:

$$I^{r,s}(-Q^2) = -(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{1}{(-P^2)^r (-(P - Q)^2)^s}$$

¹⁸Vgl. Kap. C.2.1.

$$= (-1)^{r+s+1} (4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{1}{(P^2)^r ((Q-P)^2)^s} \quad . \quad (\text{C.144})$$

Unter Benutzung der Parametrisierung C.35 wird die Impulsintegration trivial:

$$\begin{aligned} I^{r,s}(-Q^2) &= (-1)^{r+s+1} (4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-r\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(r)} \int d^d x \frac{e^{2iPx}}{(x^2)^{\frac{d}{2}-r}} \\ &\quad \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(s)} \int d^d y \frac{e^{2i(Q-P)y}}{(y^2)^{\frac{d}{2}-s}} \\ &= (-1)^{r+s+1} (4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-r\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\pi^d \Gamma(r) \Gamma(s)} \\ &\quad \int d^d x \int d^d y \frac{1}{(x^2)^{\frac{d}{2}-r} (y^2)^{\frac{d}{2}-s}} \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} e^{2iP(x-y)} e^{2iQy} \\ &= (-1)^{r+s+1} (4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-r\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\pi^d \Gamma(r) \Gamma(s)} \\ &\quad \int d^d x \int d^d y \frac{1}{(x^2)^{\frac{d}{2}-r} (y^2)^{\frac{d}{2}-s}} \frac{\pi^d}{(2\pi)^d} \delta^{(d)}(x-y) e^{2iQy} \\ &= (-1)^{r+s+1} \frac{(4\pi)^2 \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-r\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\Gamma(r) \Gamma(s)} \int d^d x \frac{1}{(x^2)^{d-r-s}} e^{2iQy} \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.145})$$

Das letzte Parameterintegral kann ausgeführt werden, indem man (C.35) rückwärts liest. Dabei wird α durch den Exponenten von x^2 bestimmt:

$$\frac{d}{2} - \alpha = d - r - s \quad \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{d}{2} + r + s \quad . \quad (\text{C.146})$$

Damit sind alle Integrale ausgeführt, und es folgt:

$$I^{r,s}(-Q^2) = (-1)^{r+s+1} \frac{(4\pi)^2 \mu^{4-d} \pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d (Q^2)^{r+s-\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-r\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right) \Gamma\left(r+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(r) \Gamma(s) \Gamma(d-r-s)} \quad . \quad (\text{C.147})$$

Diesen Ausdruck kann man wieder in den Minkowski-Raum zurücktransformieren:

$$\begin{aligned} I^{r,s}(q^2) &= i(4\pi)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 + i\epsilon)^r ((p-q)^2 + i\epsilon)^s} \\ &= -\frac{1}{(q^2)^{r+s-2}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-r\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right) \Gamma\left(r+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(r) \Gamma(s) \Gamma(d-r-s)} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.148})$$

Dieses Ergebnis ist symmetrisch gegen den Austausch von r und s , d. h. es gilt $I^{r,s} = I^{s,r}$. Die Divergenzen treten je nach Wahl des Paares (r, s) in verschiedenen Γ -Funktionen auf. Jedoch wird die Zahl der divergenten Γ -Funktionen niemals größer als eins. Das Ergebnis kann mit den Formeln aus Kap. C.2.7 in ε entwickelt werden, wobei $d = 4 - \varepsilon$ gesetzt wird. Dies ist im folgenden für einige Werte von (r, s) durchgeführt.

$$I^{1,1}(q^2) = - \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(2 - \varepsilon)} \quad (\text{C.149})$$

$$= - \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right\} . \quad (\text{C.150})$$

$I^{1,1}$ ist gerade das Integral des skalaren Polarisationsgraphen ohne Masse (C.112). Mit Masse findet sich dieser Feynman-Graph in (C.247), wobei der Grenzfall $m \rightarrow 0$, das hier gewonnene Ergebnis (C.149) reproduziert.

$$\begin{aligned} I^{1,2}(q^2) &= -\frac{1}{q^2} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(1 - \varepsilon)} \\ &= -\frac{1}{q^2} \left\{ -\frac{2}{\varepsilon} + \gamma - \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.151})$$

$$\begin{aligned} I^{2,2}(q^2) &= -\frac{1}{q^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(-\varepsilon)} \\ &= 2\frac{1}{q^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + 1 - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.152})$$

$$\begin{aligned} I^{1,3}(q^2) &= -\frac{1}{q^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{2\Gamma(-\varepsilon)} \\ &= \frac{1}{q^4} . \end{aligned} \quad (\text{C.153})$$

Das Integral $I^{1,3}$ ist demnach divergenzfrei.

C.3.5 Einer von drei masselosen Propagatoren in beliebiger Potenz

In diesem Kapitel werden Integrale regularisiert, die drei Propagatoren enthalten, von denen einer in der Potenz $1 + s$ eingeht. Für den Impuls p soll jeweils $p^2 = 0$ gelten. Es wird das inverse Bjorken- x $\omega = \frac{2p \cdot q}{Q^2}$ verwendet.

Skalarer Zähler

$$I^s(\omega, q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad . \quad (\text{C.154})$$

Mit der Feynmanparametrisierung (C.37) erhält man:

$$I^s(\omega, q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \, x \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{u_2^s}{[(p-k)^2 u_1 + k^2 u_2 + (p+q-k)^2 u_3]^{3+s}} \quad , \quad (\text{C.155})$$

wobei $u_1 = xy$, $u_2 = x(1-y)$ und $u_3 = 1-x$. Wegen $u_1 + u_2 + u_3 = 1$ erhält man mit (C.40)

$$\begin{aligned} I^s(\omega, q^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \, x \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{u_2^s}{[(k - u_1 p - u_3(p+q))^2 + 2p \cdot qu_3(1 - u_1 - u_3) + q^2 u_3(1 - u_3)]^{3+s}} \\ &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{x^{1+s}(1-y)^s}{[k^2 + q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{3+s}} \quad , \quad (\text{C.156}) \end{aligned}$$

wobei die Translationsinvarianz des Integrals ausgenutzt, die u -Parameter rücksubstituiert und ω , das inverse Bjorken- x , eingeführt wurden. Das verbliebene Impulsintegral ist aus (C.105) bekannt:

$$\begin{aligned} I^s(\omega, q^2) &= -(-4\pi)^{2-\frac{d}{2}} \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, x^{1+s}(1-y)^s \\ &\quad [q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{\frac{d}{2}-3-s} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(3+s)} \\ &= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \\ &\quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, x^{\frac{d}{2}-2} (1-x)^{\frac{d}{2}-3-s} (1-y)^s \frac{1}{(1-\omega(1-y))^{3+s-\frac{d}{2}}} \\ &= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \\ &\quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, x^{\frac{d}{2}-2} (1-x)^{\frac{d}{2}-3-s} (1-y)^{s+n} \quad . \quad (\text{C.157}) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Entwicklung (C.50) benutzt. Die Parameterintegrale können mit Hilfe von (C.41) ausgeführt werden, und man erhält das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
I^s(\omega, q^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\
&= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \\
&\quad \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(-1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(-2-s+\frac{d}{2}\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)\Gamma(-3-s+d)\Gamma(2+s+n)} \\
&= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} {}_2F_1\left(3+s-\frac{d}{2}, 1+s; 2+s; \omega\right) \\
&\quad \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(-1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(-2-s+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(2+s)\Gamma(-3-s+d)}. \tag{C.158}
\end{aligned}$$

Das Ergebnis kann also mit der hypergeometrischen Funktion ausgedrückt werden. Für den Grenzfall der analytischen Regularisierung $d = 4$ vereinfacht sich das Ergebnis zu:

$$\begin{aligned}
I^s(\omega, q^2) &= \frac{1}{(q^2)^{1+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{1}{s(1+s+n)} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \\
&= \frac{1}{(q^2)^{1+s}} \frac{1}{s(1+s)} {}_2F_1(1+s, 1+s; 2+s; \omega). \tag{C.159}
\end{aligned}$$

Vektorieller Zähler

$$I_\alpha^s(\omega, q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}}. \tag{C.160}$$

Völlig analog zum Fall mit skalarem Zähler erhält man nach der Feynmanparametrisierung (C.37) ($u_1 = xy$, $u_2 = x(1-y)$ und $u_3 = 1-x$ sowie $u_1 + u_2 + u_3 = 1$) und der Umformung des Nenners mit (C.40)

$$\begin{aligned}
I_\alpha^s(\omega, q^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(3+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{1+s} (1-y)^s \\
&\quad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k + xyp + (1-x)(p+q))_\alpha}{[k^2 + q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{3+s}}, \tag{C.161}
\end{aligned}$$

wobei sich hier die Translation des Integrals auch auf den Impuls im Zähler auswirkt. Es wurden gleichzeitig die u -Parameter rückschstituiert und ω , das inverse

Bjorken- x , eingeführt. Der Term proportional zu k_α verschwindet aus Symmetriegründen identisch, so daß ausschließlich das aus (C.105) bekannte Integral verbleibt. Nach der Entwicklung in ω mit (C.50) erhält man zwei faktorisierte Feynmanintegrationen:

$$\begin{aligned}
I_\alpha^s(\omega, q^2) &= -(-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{1+s}(1-y)^s \\
&\quad (xyp + (1-x)(p+q))_\alpha [q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{\frac{d}{2}-3-s} \\
&= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \\
&\quad \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}-2} (1-y)^s (1-x)^{\frac{d}{2}-3-s} \\
&\quad (xyp + (1-x)(p+q))_\alpha \frac{1}{(1-\omega(1-y))^{3+s-\frac{d}{2}}} \\
&= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \\
&\quad \left\{ p_\alpha \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-3-s} \int_0^1 dy y(1-y)^{s+n} \right. \\
&\quad \left. + (p+q)_\alpha \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-2} (1-x)^{\frac{d}{2}-2-s} \int_0^1 dy (1-y)^{s+n} \right\} \quad (\text{C.162})
\end{aligned}$$

Die Parameterintegrale können mit Hilfe von (C.41) ausgeführt werden und man erhält das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
I_\alpha^s(\omega, q^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\
&= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \\
&\quad \left\{ p_\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-2-s\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(d-2-s)\Gamma(3+s+n)} \right. \\
&\quad \left. + (p+q)_\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(d-2-s)\Gamma(2+s+n)} \right\} \quad (\text{C.163})
\end{aligned}$$

Für den Grenzfall der analytischen Regularisierung $d = 4$ lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
I_\alpha^s(\omega, q^2) &= \frac{1}{(q^2)^{1+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \left\{ \frac{p_\alpha}{s(1-s)(1+s+n)(2+s+n)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(p+q)_\alpha}{(1-s)(1+s+n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{p_\alpha}{(q^2)^{1+s}} \frac{{}_2F_1(1+s, 1+s; 3+s; \omega)}{s(1-s)(1+s)(2+s)} - \frac{(p+q)_\alpha}{(q^2)^{1+s}} \frac{{}_2F_1(1+s, 1+s; 2+s; \omega)}{(1-s)(1+s)}, \quad (\text{C.164})$$

wobei die hypergeometrische Funktion eingeführt wurde.

Tensor zweiter Stufe als Zähler

Der Fall dreier masseloser Propagatoren mit einem Tensor zweiter Stufe als Zähler wird mit zwei variablen Potenzen a und $1+s$ der Faktoren im Nenner behandelt:

$$I_{\alpha\beta}^{s,a}(\omega, q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{((p-k)^2)^a (p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}}. \quad (\text{C.165})$$

Völlig analog zum Fall mit skalarem Zähler erhält man nach der Feynmanparametrisierung (C.37) ($u_1 = xy$, $u_2 = x(1-y)$ und $u_3 = 1-x$ sowie $u_1 + u_2 + u_3 = 1$) und der Umformung des Nenners mit (C.40)

$$I_{\alpha\beta}^{s,a}(\omega, q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s+a)}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{s+a} y^{a-1} (1-y)^s \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k+ryp + (1-x)(p+q))_\alpha (k+ryp + (1-x)(p+q))_\beta}{[k^2 + q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{2+s+a}}, \quad (\text{C.166})$$

wobei sich hier die Translations des Integrals auch auf den Impuls im Zähler auswirkt. Es wurden gleichzeitig die u -Parameter rücksubstituiert und ω , das inverse Bjorken- x , eingeführt. Die Terme proportional zu k_α verschwinden identisch, und der Term proportional zu $k_\alpha k_\beta$ geht wie $\frac{1}{d} g_{\alpha\beta}$, so daß wieder nur zwei aus (C.105) bekannte Integrale verbleiben.

$$I_{\alpha\beta}^{s,a}(\omega, q^2) = -(-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(1+s+a-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)} \frac{g_{\alpha\beta}}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{s+a} y^{a-1} (1-y)^s [q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{\frac{d}{2}-1-s-a} - (-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(2+s+a-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{s+a} y^{a-1} (1-y)^s (ryp + (1-x)(p+q))_\alpha (ryp + (1-x)(p+q))_\beta [q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{\frac{d}{2}-2-s-a} = -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2+s+a+n-\frac{d}{2})}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{x^{\frac{d}{2}-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-1-s-a}y^{a-1}(1-y)^{s+n}}{1+s+a+n-\frac{d}{2}} \right. \\
& + p_\alpha p_\beta \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-2-s-a}y^{a+1}(1-y)^{s+n} \\
& + p_{\{\alpha(p+q)\beta\}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}-1}(1-x)^{\frac{d}{2}-1-s-a}y^a(1-y)^{s+n} \\
& \left. + (p+q)_\alpha(p+q)_\beta \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}-2}(1-x)^{\frac{d}{2}-s-a}y^{a-1}(1-y)^{s+n} \right\}, \tag{C.167}
\end{aligned}$$

wobei bereits die Entwicklung in ω mit (C.50) durchgeführt und die faktorisierenden Parameterintegrale getrennt wurden. $a_{\{\alpha b\beta\}} = (a_\alpha b_\beta + a_\beta b_\alpha)$ Die Parameterintegrale können mit Hilfe von (C.41) durchgeführt werden. Mit der Notation $p_{\{\alpha q\beta\}} = p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha$ erhält man:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta}^{s,a}(\omega, q^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{((p-k)^2)^a (p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\
&= -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
&\times \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2} \frac{\Gamma\left(1+s+a+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-a\right)}{\Gamma(d-s-a)\Gamma(1+s+a+n)} \right. \\
& + a(a+1)p_\alpha p_\beta \frac{\Gamma\left(2+s+a+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s-a\right)}{\Gamma(d-s-a)\Gamma(3+s+a+n)} \\
& + ap_{\{\alpha(p+q)\beta\}} \frac{\Gamma\left(2+s+a+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-a\right)}{\Gamma(d-s-a)\Gamma(2+s+a+n)} \\
& \left. + (p+q)_\alpha(p+q)_\beta \frac{\Gamma\left(2+s+a+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1-s-a\right)}{\Gamma(d-s-a)\Gamma(1+s+a+n)} \right\}. \tag{C.168}
\end{aligned}$$

Für den Grenzfall der analytischen Regularisierung $d = 4$ lautet das Ergebnis:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta}^{s,a}(\omega, q^2) &= -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2} \frac{\Gamma(-1+s+a+n) \Gamma(2-s-a)}{\Gamma(4-s-a)\Gamma(1+s+a+n)} \right. \\
& + 2a(a+1)p_\alpha p_\beta \frac{\Gamma(s+a+n) \Gamma(1-s-a)}{\Gamma(4-s-a)\Gamma(3+s+a+n)} \\
& \left. + ap_{\{\alpha(p+q)\beta\}} \frac{\Gamma(s+a+n) \Gamma(2-s-a)}{\Gamma(4-s-a)\Gamma(2+s+a+n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (p+q)_\alpha (p+q)_\beta \frac{\Gamma(s+a+n)\Gamma(3-s-a)}{\Gamma(4-s-a)\Gamma(1+s+a+n)} \Big\} \\
= & - \frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2} \frac{{}_2F_1(-1+s+a, 1+s; 1+s+a; \omega)}{(2-s-a)(3-s-a)(s+a)(s+a-1)} \right. \\
& + \frac{2a(a+1)p_\alpha p_\beta {}_2F_1(s+a, 1+s; 3+s+a; \omega)}{(1-s-a)(2-s-a)(3-s-a)(s+a)(1+s+a)(2+s+a)} \\
& + a p_{\{\alpha} (p+q)_{\beta\}} \frac{{}_2F_1(s+a, 1+s; 2+s+a; \omega)}{(2-s-a)(3-s-a)(s+a)(1+s+a)} \\
& \left. + (p+q)_\alpha (p+q)_\beta \frac{{}_2F_1(s+a, 1+s; 1+s+a; \omega)}{(3-s-a)(s+a)} \right\}, \quad (C.169)
\end{aligned}$$

wobei die hypergeometrische Funktion eingeführt wurde. Für $a = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta}^{s,1}(\omega, q^2) &= - \frac{1}{(q^2)^{1+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2} \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s+n)(s+n)} \right. \\
& - \frac{4p_\alpha p_\beta}{s(1-s)(2-s)(1+s+n)(2+s+n)(3+s+n)} \\
& + p_{\{\alpha} (p+q)_{\beta\}} \frac{1}{(1-s)(2-s)(1+s+n)(2+s+n)} \\
& \left. + (p+q)_\alpha (p+q)_\beta \frac{1}{(2-s)(1+s+n)} \right\} \\
= & - \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{(q^2)^{1+s}} \frac{{}_2F_1(1+s, s; 2+s; \omega)}{2s(1-s)(2-s)(1+s)} \\
& + \frac{4p_\alpha p_\beta}{(q^2)^{1+s}} \frac{{}_2F_1(1+s, 1+s; 4+s; \omega)}{s(1-s)(2-s)(1+s)(2+s)(3+s)} \\
& - \frac{p_{\{\alpha} (p+q)_{\beta\}}}{(q^2)^{1+s}} \frac{{}_2F_1(1+s, 1+s; 3+s; \omega)}{(1-s)(2-s)(1+s)(2+s)} \\
& - \frac{(p+q)_\alpha (p+q)_\beta}{(q^2)^{1+s}} \frac{{}_2F_1(1+s, 1+s; 2+s; \omega)}{(2-s)(1+s)}. \quad (C.170)
\end{aligned}$$

Für $a = 2$ folgt entsprechend:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta}^{s,2}(\omega, q^2) &= \frac{1}{(q^2)^{2+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2s(1-s)(1+s+n)(2+s+n)} \right. \\
& \left. - \frac{12p_\alpha p_\beta}{s(1-s)(1+s)(2+s+n)(3+s+n)(4+s+n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2p_{\{\alpha}(p+q)_{\beta\}}}{s(1-s)(2+s+n)(3+s+n)} \\
& - \frac{(p+q)_{\alpha}(p+q)_{\beta}}{(1-s)(2+s+n)} \} \\
= & \frac{1}{(q^2)^{2+s}} \left\{ \frac{g_{\alpha\beta}q^2}{2} \frac{{}_2F_1(1+s, 1+s; 3+s; \omega)}{s(1-s)(1+s)(2+s)} \right. \\
& - \frac{12p_{\alpha}p_{\beta}}{s(1-s)(1+s)(2+s)(3+s)(4+s)} \frac{{}_2F_1(2+s, 1+s; 5+s; \omega)}{s(1-s)(2+s)(3+s)} \\
& + 2p_{\{\alpha}(p+q)_{\beta\}} \frac{{}_2F_1(2+s, 1+s; 4+s; \omega)}{s(1-s)(2+s)(3+s)} \\
& \left. - (p+q)_{\alpha}(p+q)_{\beta} \frac{{}_2F_1(2+s, 1+s; 3+s; \omega)}{(1-s)(2+s)} \right\} . \quad (\text{C.171})
\end{aligned}$$

Tensor dritter Stufe als Zähler

$$I_{\alpha\beta\lambda}^{s,a}(\omega, q^2) = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_{\alpha,\beta,\lambda}}{((p-k)^2)^a (p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}} , \quad (\text{C.172})$$

wobei die Notation $k_{\alpha,\beta,\lambda} = k_{\alpha}k_{\beta}k_{\lambda}$ eingeführt wurde. Wie im Fall mit einem Tensor zweiter Stufe als Zähler erhält man nach der Feynmanparametrisierung (C.37) ($u_1 = xy$, $u_2 = x(1-y)$ und $u_3 = 1-x$ sowie $u_1 + u_2 + u_3 = 1$) und der Umformung des Nenners mit (C.40)

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^{s,a}(\omega, q^2) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(2+s+a)}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{s+a} y^{a-1} (1-y)^s \\
&\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k + xyp + (1-x)(p+q))_{\alpha,\beta,\lambda}}{[k^2 + q^2x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{2+s+a}} , \quad (\text{C.173})
\end{aligned}$$

wobei sich hier die Translations des Integrals auf die drei Impulse im Zähler auswirkt. Es wurden gleichzeitig die u -Parameter rückschstituiert und ω , das inverse Bjorken- x , eingeführt. Die Terme proportional zu k_{α} , k_{β} , k_{λ} und zu $k_{\alpha}k_{\beta}k_{\lambda}$ verschwinden identisch, und die Terme proportional zu $k_{\alpha}k_{\beta}$ etc. gehen wie $\frac{1}{d}g_{\alpha\beta}$ etc., so daß wieder nur zwei aus (C.105) bekannte Integral-Typen verbleiben. Führt man $P(a_{\alpha}b_{\beta}b_{\lambda}) = a_{\alpha}b_{\beta}b_{\lambda} + a_{\beta}b_{\alpha}b_{\lambda} + a_{\lambda}b_{\alpha}b_{\beta}$ ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^{s,a}(\omega, q^2) &= -(-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(1+s+a-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{s+a} y^{a-1} (1-y)^s \\
&P\left\{\frac{g_{\alpha\beta}}{2}(xyp + (1-x)(p+q))_{\lambda}\right\} [q^2x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{\frac{d}{2}-1-s-a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2+s+a-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{s+a} y^{a-1} (1-y)^s \\
& (xyp + (1-x)(p+q))_{\alpha,\beta,\lambda} [q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))]^{\frac{d}{2}-2-s-a} \\
= & -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2+s+a+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ p_{\alpha,\beta,\lambda} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{1+\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-2-s-a} y^{2+a} (1-y)^{s+n} \right. \\
& + P\{p_\alpha p_\beta (p+q)_\lambda\} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1-s-a} y^{1+a} (1-y)^{s+n} \\
& + P\{(p+q)_\alpha (p+q)_\beta p_\lambda\} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-a} y^a (1-y)^{s+n} \\
& \left. + (p+q)_{\alpha,\beta,\lambda} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}-2} (1-x)^{\frac{d}{2}+1-s-a} y^{a-1} (1-y)^{s+n} \right\} \\
& -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+s+a+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ \frac{q^2}{2} P\{g_{\alpha\beta} p_\lambda\} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-1-s-a} y^a (1-y)^{s+n} \right. \\
& \left. + \frac{q^2}{2} P\{g_{\alpha\beta} (p+q)_\lambda\} \int_0^1 dx \int_0^1 dy x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-a} y^{a-1} (1-y)^{s+n} \right\}.
\end{aligned} \tag{C.174}$$

Die Entwicklung in ω mit (C.50) wurde bereits durchgeführt und die verschiedenen faktorisierten Parameterintegrale voneinander getrennt. Die Parameterintegrale können mit Hilfe von (C.41) durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^{s,a}(\omega, q^2) = & -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(2+s+a+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(d+1-s-a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ a(1+a)(2+a) p_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma\left(2+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-1-s-a\right)}{\Gamma(4+s+a+n)} \right. \\
& + a(1+a) P\{p_\alpha p_\beta (p+q)_\lambda\} \frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-a\right)}{\Gamma(3+s+a+n)} \\
& + a P\{(p+q)_\alpha (p+q)_\beta p_\lambda\} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1-s-a\right)}{\Gamma(2+s+a+n)} \\
& \left. + (p+q)_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+2-s-a\right)}{\Gamma(1+s+a+n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1+s+a+n-\frac{d}{2}\right) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(d+1-s-a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ \frac{a}{2} q^2 P\{g_{\alpha\beta} p_{\lambda}\} \frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-a\right)}{\Gamma(2+s+a+n)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} q^2 P\{g_{\alpha\beta}(p+q)_{\lambda}\} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}+1-s-a\right)}{\Gamma(1+s+a+n)} \right\} . \quad (\text{C.175})
\end{aligned}$$

Für den Grenzfall der analytischen Regularisierung $d = 4$ vereinfacht sich dies zu:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^{s,a}(\omega, q^2) &= -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+a+n) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(5-s-a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ 6a(1+a)(2+a) p_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma(1-s-a)}{\Gamma(4+s+a+n)} \right. \\
& + 2a(1+a) P\{p_{\alpha} p_{\beta}(p+q)_{\lambda}\} \frac{\Gamma(2-s-a)}{\Gamma(3+s+a+n)} \\
& + a P\{(p+q)_{\alpha}(p+q)_{\beta} p_{\lambda}\} \frac{\Gamma(3-s-a)}{\Gamma(2+s+a+n)} \\
& \left. + (p+q)_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma(4-s-a)}{\Gamma(1+s+a+n)} \right\} \\
& -\frac{1}{(q^2)^{s+a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1+s+a+n) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(5-s-a)\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ a q^2 P\{g_{\alpha\beta} p_{\lambda}\} \frac{\Gamma(2-s-a)}{\Gamma(2+s+a+n)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} q^2 P\{g_{\alpha\beta}(p+q)_{\lambda}\} \frac{\Gamma(3-s-a)}{\Gamma(1+s+a+n)} \right\} . \quad (\text{C.176})
\end{aligned}$$

Für $a = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^{s,1}(\omega, q^2) &= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
& \left\{ 36 p_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma(-s) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(4-s)\Gamma(5+s+n)} \right. \\
& + 4 P\{p_{\alpha} p_{\beta}(p+q)_{\lambda}\} \frac{\Gamma(1-s) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(4-s)\Gamma(4+s+n)} \\
& + P\{(p+q)_{\alpha}(p+q)_{\beta} p_{\lambda}\} \frac{\Gamma(2-s) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(4-s)\Gamma(3+s+n)} \\
& \left. + (p+q)_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma(3-s) \Gamma(1+s+n)}{\Gamma(4-s)\Gamma(2+s+n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +q^2 P\{g_{\alpha\beta p\lambda}\} \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(s+n)}{\Gamma(4-s)\Gamma(3+s+n)} \\
 & +\frac{1}{2}q^2 P\{g_{\alpha\beta}(p+q)_\lambda\} \frac{\Gamma(2-s)\Gamma(s+n)}{\Gamma(4-s)\Gamma(2+s+n)} \Big\} . \quad (C.177)
 \end{aligned}$$

Für $a = 2$ wird dies zu:

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\beta\lambda}^{s,2}(\omega, q^2) = & -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \omega^n \\
 & \left\{ 144p_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma(-1-s)\Gamma(2+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(6+s+n)} \right. \\
 & +12P\{p_\alpha p_\beta(p+q)_\lambda\} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(2+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(5+s+n)} \\
 & +2P\{(p+q)_\alpha(p+q)_\beta p_\lambda\} \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(2+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(4+s+n)} \\
 & +(p+q)_{\alpha,\beta,\lambda} \frac{\Gamma(2-s)\Gamma(2+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(3+s+n)} \\
 & +2q^2 P\{g_{\alpha\beta p\lambda}\} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(4+s+n)} \\
 & \left. +\frac{1}{2}q^2 P\{g_{\alpha\beta}(p+q)_\lambda\} \frac{\Gamma(1-s)\Gamma(1+s+n)}{\Gamma(3-s)\Gamma(3+s+n)} \right\} . \quad (C.178)
 \end{aligned}$$

C.3.6 Die Vertex-Korrektur in der Borelebene

Die zuletzt behandelten Integrale haben die Struktur der Vertex-Korrektur (siehe Abb. C.2) mit einem Borel-transformierten resummierten Gluon-Propagator (4.58). Nach den Feynmanregeln lautet die Amplitude für den Vertex-Korrektur-Graphen:

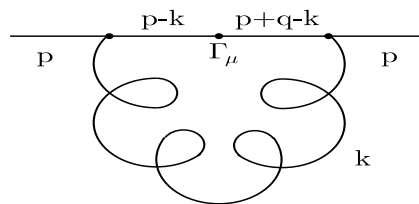


Abbildung C.2: Der Vertex-Korrektur-Graph.

$$V_\mu(p, q) = \mu^{4-d} C_F \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} g\gamma_\rho \frac{-1}{\not{p} + \not{q} - \not{k}} \Gamma_\mu \frac{-1}{\not{p} - \not{k}} g\gamma_\sigma D^{\rho\sigma}(k)$$

$$= -i(4\pi)^2 \mu^{4-d} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \Gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma_\sigma}{(p+q-k)^2 (p-k)^2} a_s D^{\rho\sigma}(k) \quad . \quad (\text{C.179})$$

Die Lorentz-Struktur des Vertex wurde hier offengelassen und allgemein mit Γ_μ bezeichnet. Man denke sich dafür insbesondere einen vektoriellen γ_μ oder einen axialvektoriellen Vertex $\gamma_\mu \gamma_5$.

Die Boreltransformation dieses Ausdrucks wirkt nur auf die Kopplung und den Gluonpropagator $D^{\rho\sigma}$, so daß mit $s = \beta_0 u$ in der Feynman-Eichung folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{1/a_s} [V_\mu](u) &= -i(4\pi)^2 \mu^{4-d} C_F \left(-\mu^2 e^{-C}\right)^s \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \Gamma_\mu (\not{p} - \not{k}) \gamma^\rho}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\ &\equiv -C_F \left(-\mu^2 e^{-C}\right)^s \gamma_\rho \gamma_\alpha \Gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\rho I^{\alpha\beta} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.180})$$

Das für die Vertex-Korrektur wesentliche Integral $I^{\alpha\beta}$ setzt sich aus einer Kombination der zuvor regularisierten Integrale zusammen:

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} &\equiv i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+q-k)^\alpha (p-k)^\beta}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \\ &= (p+q)^\alpha p^\beta (C.154) - p^\beta (C.160) - (p+q)^\alpha (C.160)|^{\alpha\rightarrow\beta} + (C.165)|_{a=1} \\ &= (p+q)^\alpha p^\beta (C.158) - p^\beta (C.163) - (p+q)^\alpha (C.163)|^{\alpha\rightarrow\beta} + (C.168)|_{a=1} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.181})$$

In der letzten Zeile wird auf die regularisierten Ausdrücke verwiesen, die hier eingesetzt werden. Sortiert man die Ausdrücke dabei nach den Lorentzstrukturen $p^\alpha p^\beta, p^\alpha q^\beta, \dots$, erhält man einen recht umfänglichen Ausdruck:

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma(1+s+n) \Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s) \Gamma(1+n)} \\ &\quad \left\{ p^\alpha p^\beta \left[\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-3) \Gamma(2+s+n)} - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-2) \Gamma(3+s+n)} \right. \right. \\ &\quad - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-2) \Gamma(2+s+n)} + 2 \frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(4+s+n)} \\ &\quad \left. \left. + 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(3+s+n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s\right)}{\Gamma(d-s-1) \Gamma(2+s+n)} \right] \right. \\ &\quad \left. + q^\alpha p^\beta \left[\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-3) \Gamma(2+s+n)} - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-2) \Gamma(2+s+n)} \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right)}{\Gamma(d - s - 2) \Gamma(3 + s + n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} \right] \\
& + p^\alpha q^\beta \left[- \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 2) \Gamma(2 + s + n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} \right] \\
& + q^\alpha q^\beta \left[- \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 2) \Gamma(2 + s + n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} \right] \\
& \left. + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\left(2 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} \right\} . \quad (\text{C.182})
\end{aligned}$$

Eine allen Termen gemeinsame Kombination von Gamma-Funktionen wurde ausgeklammert. Die in den eckigen Klammern verbliebenen Summen können zusammengefaßt werden. So erhält man für den $q^\alpha q^\beta$ -Term:

$$\begin{aligned}
\left[\dots \right] \Big|_{q^\alpha q^\beta} &= \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} \left(\frac{d}{2} - s - 1 - (d - s - 2) \right) \\
&= - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} . \quad (\text{C.183})
\end{aligned}$$

Die gleiche Kombination tritt auch in dem $p^\alpha q^\beta$ -Termen auf:

$$\begin{aligned}
\left[\dots \right] \Big|_{p^\alpha q^\beta} &= - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(2 + s + n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} (-(2 + s + n) + 1) \\
&= -(1 + s + n) \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} . \quad (\text{C.184})
\end{aligned}$$

Diese Kombination wiederum tritt auch in dem $q^\alpha p^\beta$ -Term auf, der dann lautet:

$$\begin{aligned}
\left[\dots \right] \Big|_{q^\alpha p^\beta} &= - \frac{(1 + s + n) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right)}{\Gamma(d - s - 3) \Gamma(2 + s + n)} \\
&\quad - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right)}{\Gamma(d - s - 2) \Gamma(2 + s + n)} - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right)}{\Gamma(d - s - 2) \Gamma(3 + s + n)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \\
&\quad \left\{ -\frac{2}{d}\left(\frac{d}{2}-s-2\right) + \frac{4(d-s-2)}{d(d-2)}(d-s-3)\frac{2+s+n}{1+s+n} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4(d-s-2)}{d(d-2)}\left(\frac{d}{2}-s-2\right)\frac{2+s+n}{1+s+n} - \frac{2d-s-2}{d}\frac{2+s+n}{1+s+n} \right\} \\
&= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \left\{ -\frac{2}{d}\left(\frac{d}{2}-s-2\right)\frac{2+s+n}{1+s+n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4(d-s-2)}{d(d-2)}\left(\frac{d}{2}-1\right)\frac{2+s+n}{1+s+n} - \frac{1}{1+s+n} \right\} \\
&= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \left\{ \frac{2d}{d}\frac{2+s+n}{1+s+n} - \frac{1}{1+s+n} \right\} \\
&= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} . \tag{C.185}
\end{aligned}$$

Schließlich ist die Klammer des $q^\alpha p^\beta$ -Terms Teil des $p^\alpha p^\beta$ -Terms. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\left[\dots \right] \Big|_{p^\alpha p^\beta} &= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} + 2\frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(4+s+n)} \\
&\quad - \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-2)\Gamma(3+s+n)} + \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \\
&= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(4+s+n)} \left\{ (3+s+n) + \frac{2}{1+s+n} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{d}(d-s-2)\frac{3+s+n}{1+s+n} + \frac{2}{d}\left(\frac{d}{2}-s-2\right)\frac{3+s+n}{1+s+n} \right\} \\
&= \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(4+s+n)} \\
&\quad \left\{ (3+s+n) + \frac{2}{1+s+n} - \frac{3+s+n}{1+s+n} \right\} \\
&= \frac{(1+s+n)(2+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(4+s+n)} . \tag{C.186}
\end{aligned}$$

Die Auswertung der Klammer-Ausdrücke (C.183)-(C.186) wird in das Integral (C.182) eingesetzt, so daß man dieses in nach Lorentz-Strukturen sortierter Form erhält:

$$I^{\alpha\beta} = -\frac{1}{(q^2)^{1+s}} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{\Gamma(1+s+n)\Gamma\left(3+s+n-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ p^\alpha p^\beta \frac{(1+s+n)(2+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(4+s+n)} \right. \\
& + q^\alpha p^\beta \frac{(1+s+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-2\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \\
& - p^\alpha q^\beta \frac{(1+s+n)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(3+s+n)} \\
& - q^\alpha q^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(2+s+n)} \\
& \left. + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-1\right)}{\left(2+s+n-\frac{d}{2}\right)\Gamma(d-s-1)\Gamma(2+s+n)} \right\} . \quad (\text{C.187})
\end{aligned}$$

Das regularisierte Integral ist in den Ausdruck für den Vertex-Graphen (C.180) einzusetzen. Je nach gewähltem Vertex Γ_μ erhält man dann unterschiedliche Kontraktionen der in dem Integral aufgetretenen Lorentz-Strukturen.

Im folgenden wird ein vektorieller Vertex angenommen, das Integral für $s = 0$ — also ohne Borel-Transformation und mit einem einfachen Gluon — eingesetzt und der divergente Anteil ausgewertet:

$$\begin{aligned}
V_\mu(p, q) &= C_{F a_s} \gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma^\rho \frac{1}{q^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \Gamma\left(3+n-\frac{d}{2}\right) \\
& \left\{ p^\alpha p^\beta \frac{(1+n)(2+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right)}{\Gamma(d-1)\Gamma(4+n)} - q^\alpha q^\beta \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(d-1)\Gamma(2+n)} \right. \\
& + q^\alpha p^\beta \frac{(1+n)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-2\right)}{\Gamma(d-1)\Gamma(3+n)} - p^\alpha q^\beta \frac{(1+n)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\Gamma(d-1)\Gamma(3+n)} \\
& \left. + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} q^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-1\right)}{\left(2+n-\frac{d}{2}\right)\Gamma(d-1)\Gamma(2+n)} \right\} . \quad (\text{C.188})
\end{aligned}$$

Dieses Integral enthält Divergenzen bei $d = 4$, die ausschließlich von den Termen $p^\alpha p^\beta$ und $q^\alpha p^\beta$, sowie für das niedrigste Moment $n = 0$ auch von dem $g^{\alpha\beta}$ -Term stammen. Die ersten beiden Terme verschwinden wegen der Bewegungsgleichung, wenn das einlaufende Quark ein reelles Quark ist, das auf der Massenschale liegt. Um die Divergenz zu isolieren, genügt es daher, sich auf den letzten Term zu beschränken, die divergente Gamma-Funktion auszuklammern und sonst $d = 4$ zu setzen.

$$V_\mu(p, q)|_{div} = -2C_{F a_s} \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\alpha \frac{1}{q^2} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} q^2 \frac{1}{1+n} \frac{1}{2+n-\frac{d}{2}}$$

$$= 2C_F a_s \gamma_\mu \frac{1}{4-d} \quad (\text{C.189})$$

mit (B.47).

C.3.7 Der Box-Graph in der Borelebene

Auch der Box-Graph Abb. C.3 läßt sich auf die in den vorigen Abschnitten regulierten Integrale zurückführen. Das so gewonnene Ergebnis wird durch die explizite Berechnung des für den Box-Graphen charakteristischen Integrals in diesem Abschnitt verifiziert. Die Regularisierung erfolgt wie zuvor in der Borel-Ebene mit dem resummierten Gluon-Propagator (4.58) und in d -Dimensionen. Die Amplitude

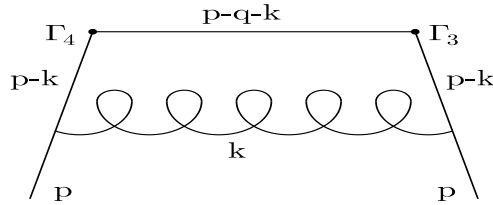


Abbildung C.3: Der Box-Graph mit zwei beliebigen Vertices Γ_3 und Γ_4 .

für den Box-Graphen lautet nach den Feynmanregeln:

$$\begin{aligned} B_{34}(p, q) &= \mu^{4-d} C_F \int \frac{d^d k}{i(2\pi)^d} g \gamma_\rho \frac{-1}{\not{p} - \not{k}} \Gamma_3 \frac{-1}{\not{p} + \not{q} - \not{k}} \Gamma_4 \frac{-1}{\not{p} - \not{k}} g \gamma_\sigma D^{\rho\sigma}(k) \\ &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} - \not{k}) \Gamma_\nu^1 (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \Gamma_\mu^2 (\not{p} - \not{k}) \gamma_\sigma}{(p+q-k)^2 (p-k)^4} a_s D^{\rho\sigma}(k). \end{aligned} \quad (\text{C.190})$$

Die Lorentz-Struktur der beiden Vertices wurde hier offengelassen und allgemein mit Γ_4 und Γ_3 bezeichnet. Man denke sich dafür insbesondere vektorielle γ_μ oder axialvektorielle Vertices $\gamma_\mu \gamma_5$.

Die Boreltransformation dieses Ausdrucks wirkt auf die Kopplung a_s und den Gluonpropagator $D^{\rho\sigma}$, so daß mit $s = \beta_0 u$ in der Feynman-Eichung folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\frac{1}{a_s}} [B_{\mu\nu}](u) &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} C_F \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s \\ &\quad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma_\rho (\not{p} - \not{k}) \Gamma_3 (\not{p} + \not{q} - \not{k}) \Gamma_4 (\not{p} - \not{k}) \gamma^\rho}{(p+q-k)^2 (p-k)^4 (k^2)^{1+s}} \\ &\equiv C_F \left(-\mu^2 e^{-C} \right)^s \gamma_\rho \gamma_\alpha \Gamma_3 \gamma_\beta \Gamma_4 \gamma_\lambda \gamma^\rho I^{\alpha\beta\lambda} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.191})$$

Das für den Box-Graphen charakteristische Integral lautet demnach:

$$I^{\alpha\beta\lambda} = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{(p+q-k)^2 (p-k)^4 (k^2)^{1+s}} . \quad (\text{C.192})$$

Mit Hilfe der Parametrisierung (C.37) und der Wahl $a = (p-k)^2$, $b = k^2$ und $c = (p+q-k)^2$ erhält man:

$$I^{\alpha\beta\lambda} = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(4+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy u_1 u_2^s \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{[a u_1 + b u_2 + c u_3]^{4+s}} \quad (\text{C.193})$$

mit $u_1 = xy$, $u_2 = x(1-y)$, $u_3 = 1-x$ und $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Der Nenner des Integranden im Impulsintegral kann mit Hilfe von (C.40) quadratisch ergänzt werden. Mit der Abkürzung $\Theta^2 := q^2 x(1-x)(1-\omega(1-y))$ ergibt dies:

$$I^{\alpha\beta\lambda} = i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(4+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx x^{2+s} \int_0^1 dy y(1-y)^s \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{[(k-xyp - (1-x)(p+q))^2 + \Theta^2]^{4+s}} . \quad (\text{C.194})$$

Die Translationsinvarianz, die auch in d -Dimensionen erhalten bleibt, erlaubt es, den Integranden in eine Form zu bringen, die nur noch unkontrahierte Integrationsimpulse k_μ vor einer Funktion von k^2 enthält. Um das zu erreichen, wird die Translation $k \rightarrow k + xyp + (1-x)(p+q)$ durchgeführt. Der Zähler erhält durch die Translation eine neue Form, in der nur die Terme zur Impulsintegration beitragen, die eine gerade Zahl von Impuls-Integrationsvariablen k enthält:

$$\begin{aligned} & (p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda \\ \rightarrow & (p-k-xyp - (1-x)(p+q))^{\alpha,\lambda} (p+q-k-xyp - (1-x)(p+q))^\beta \\ = & (p-xyp - (1-x)(p+q))^{\alpha,\lambda} (p+q-xyp - (1-x)(p+q))^\beta \\ & + k^{\alpha,\beta} (p-xyp - (1-x)(p+q))^\lambda + k^{\alpha,\lambda} (p+q-xyp - (1-x)(p+q))^\beta \\ & + k^{\beta,\lambda} (p-xyp - (1-x)(p+q))^\alpha \\ = & (px(1-y) - q(1-x))^{\alpha,\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta \\ & + k^{\alpha,\beta} (px(1-y) - q(1-x))^\lambda + k^{\alpha,\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta \\ & + k^{\beta,\lambda} (px(1-y) - q(1-x))^\alpha . \end{aligned} \quad (\text{C.195})$$

Es wurde die Notation $A^{\alpha,\beta} = A^\alpha A^\beta$ verwendet. Da der Integrand nach der Translation außer diesem Zähler nur noch eine Funktion von k^2 enthält, kann man entsprechend (C.12) die Ersetzung $k^{\alpha,\beta} = \frac{g^{\alpha\beta} k^2}{d}$ in den drei letzten Termen vornehmen.

Das translatierte Integral (C.194) lautet dann:

$$\begin{aligned}
I^{\alpha\beta\lambda} &= i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \frac{\Gamma(4+s)}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx x^{2+s} \int_0^1 dy y(1-y)^s \\
&\quad \left\{ \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(px(1-y) - q(1-x))^{\alpha,\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta}{[k^2 + \Theta^2]^{4+s}} \right. \\
&\quad + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{g^{\alpha\beta} k^2 (px(1-y) - q(1-x))^\lambda}{[k^2 + \Theta^2]^{4+s}} \\
&\quad + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{g^{\alpha\lambda} k^2 (px(1-y) + qx)^\beta}{[k^2 + \Theta^2]^{4+s}} \\
&\quad \left. + \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{g^{\beta\lambda} k^2 (px(1-y) - q(1-x))^\alpha}{[k^2 + \Theta^2]^{4+s}} \right\} . \quad (C.196)
\end{aligned}$$

Die Impulsintegrationen haben jetzt die Form des Integrals (C.105), das hier eingesetzt wird. Dabei wird das in allen Termen auftretende $-(4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}}$ ausgeklammert und $\Gamma(4+s)$ gekürzt:

$$\begin{aligned}
I^{\alpha\beta\lambda} &= -(-4\pi\mu^2)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{\Gamma(1+s)} \int_0^1 dx x^{2+s} \int_0^1 dy y(1-y)^s \\
&\quad \left\{ (\Theta^2)^{\frac{d}{2}-s-4} \Gamma\left(4+s-\frac{d}{2}\right) (px(1-y) - q(1-x))^{\alpha,\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} (\Theta^2)^{\frac{d}{2}-s-3} \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) g^{\alpha\beta} (px(1-y) - q(1-x))^\lambda \\
&\quad + \frac{1}{2} (\Theta^2)^{\frac{d}{2}-s-3} \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) g^{\alpha\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (\Theta^2)^{\frac{d}{2}-s-3} \Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right) g^{\beta\lambda} (px(1-y) - q(1-x))^\alpha \right\} . \quad (C.197)
\end{aligned}$$

Es verbleiben nur noch je zwei faktorisierende Parameterintegrale. Setzt man Θ^2 wieder ein und sortiert die Ausdrücke etwas um, erhält man:

$$\begin{aligned}
I^{\alpha\beta\lambda} &= - \left(\frac{-4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(q^2)^{2+s}} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \\
&\quad \left\{ \left(3+s-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-2} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-4} \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^s}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \right. \\
&\quad \quad \left. (px(1-y) - q(1-x))^{\alpha,\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta \right. \\
&\quad + \frac{q^2}{2} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-3} \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^s}{((1-\omega(1-y)))^{3+s-\frac{d}{2}}} \\
&\quad \quad \left. \times [g^{\alpha\beta} (px(1-y) - q(1-x))^\lambda + g^{\alpha\lambda} (px(1-y) + qx)^\beta] \right.
\end{aligned}$$

$$+g^{\beta\lambda}(px(1-y)-q(1-x))^\alpha] \} . \quad (\text{C.198})$$

Die verbleibenden Parameterintegrale treten in 9 Varianten auf. Um diese explizit zu notieren, müssen die Integranden nach Potenzen von x , $(1-x)$, y und $(1-y)$ sortiert werden:

$$\begin{aligned} & (px(1-y)-q(1-x))^\alpha(px(1-y)+qx)^\beta(px(1-y)-q(1-x))^\lambda \\ = & x^3(1-y)^3p^\alpha p^\beta p^\lambda - x^2(1-x)(1-y)^2p^\alpha p^\beta q^\lambda + x^3(1-y)^2p^\alpha q^\beta p^\lambda \\ & - x^2(1-x)(1-y)p^\alpha q^\beta q^\lambda - x^2(1-x)(1-y)^2q^\alpha p^\beta p^\lambda \\ & + x(1-x)^2(1-y)q^\alpha p^\beta q^\lambda - x^2(1-x)(1-y)q^\alpha q^\beta p^\lambda + x(1-x)^2q^\alpha q^\beta q^\lambda \\ = & x^3(1-y)^3p^\alpha p^\beta p^\lambda + x^3(1-y)^2p^\alpha q^\beta p^\lambda \\ & - x^2(1-x)(1-y)^2(p^\alpha p^\beta q^\lambda + q^\alpha p^\beta p^\lambda) - x^2(1-x)(1-y)(p^\alpha q^\beta q^\lambda + q^\alpha q^\beta p^\lambda) \\ & + x(1-x)^2(1-y)q^\alpha p^\beta q^\lambda + x(1-x)^2q^\alpha q^\beta q^\lambda . \end{aligned} \quad (\text{C.199})$$

In dem ersten Term von (C.198) treten also alleine sechs Typen von Parameterintegralen auf. Diese werden von den übrigen drei Termen um drei weitere ergänzt:

$$\begin{aligned} & g^{\alpha\beta}(px(1-y)-q(1-x))^\lambda + g^{\alpha\lambda}(px(1-y)+qx)^\beta + g^{\beta\lambda}(px(1-y)-q(1-x))^\alpha \\ = & x(1-y)[g^{\alpha\beta}p^\lambda + g^{\alpha\lambda}p^\beta + g^{\beta\lambda}p^\alpha] - (1-x)[g^{\alpha\beta}q^\lambda + g^{\beta\lambda}q^\alpha] + xg^{\alpha\lambda}q^\beta . \end{aligned} \quad (\text{C.200})$$

Die letzten beiden Gleichungen werden in (C.198) verwendet, um die vier Terme nach Typen der Parameterintegrale zu resortieren:

$$\begin{aligned} I^{\alpha\beta\lambda} = & - \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(q^2)^{2+s}} \frac{\Gamma\left(3+s-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(1+s)} \\ & \left\{ p^\alpha p^\beta p^\lambda \left(3+s-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}+1}(1-x)^{\frac{d}{2}-s-4} \right. \\ & \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^{3+s}}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \\ & + p^\alpha q^\beta p^\lambda \left(3+s-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}+1}(1-x)^{\frac{d}{2}-s-4} \\ & \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^{2+s}}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \\ & \left. - (p^\alpha p^\beta q^\lambda + q^\alpha p^\beta p^\lambda) \left(3+s-\frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}}(1-x)^{\frac{d}{2}-s-3} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^{2+s}}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \\
& - (p^\alpha q^\beta q^\lambda + q^\alpha q^\beta p^\lambda) \left(3 + s - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-3} \\
& \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^{1+s}}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \\
& + q^\alpha p^\beta q^\lambda \left(3 + s - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-2} \\
& \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^{1+s}}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \\
& + q^\alpha q^\beta q^\lambda \left(3 + s - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-2} \\
& \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^s}{((1-\omega(1-y)))^{4+s-\frac{d}{2}}} \\
& + [g^{\alpha\beta} p^\lambda + g^{\alpha\lambda} p^\beta + g^{\beta\lambda} p^\alpha] \frac{q^2}{2} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-3} \\
& \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^{1+s}}{((1-\omega(1-y)))^{3+s-\frac{d}{2}}} \\
& - [g^{\alpha\beta} q^\lambda + g^{\beta\lambda} q^\alpha] \frac{q^2}{2} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}-1} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-2} \\
& \quad \times \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^s}{((1-\omega(1-y)))^{3+s-\frac{d}{2}}} \\
& + g^{\alpha\lambda} q^\beta \frac{q^2}{2} \int_0^1 dx x^{\frac{d}{2}} (1-x)^{\frac{d}{2}-s-3} \int_0^1 dy \frac{y(1-y)^s}{((1-\omega(1-y)))^{3+s-\frac{d}{2}}} \Big\}.
\end{aligned} \tag{C.201}$$

Die Parameterintegrale werden mit (C.41) und (C.43) gelöst, woraus entsprechende Kombinationen von Γ -Funktionen resultieren. Die y -Integration gibt dem Ausdruck zusätzlich die Form einer Reihe in ω .

$$\begin{aligned}
I^{\alpha\beta\lambda} = & - \left(\frac{4\pi\mu^2}{Q^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \frac{1}{(q^2)^{2+s}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{\Gamma(1+s)\Gamma(1+n)} \\
& \left\{ p^\alpha p^\beta p^\lambda \frac{\Gamma\left(2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-3\right)\Gamma\left(4+s+n-\frac{d}{2}\right)\Gamma(4+s+n)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(6+s+n)} \right. \\
& \left. + p^\alpha q^\beta p^\lambda \frac{\Gamma\left(2+\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}-s-3\right)\Gamma\left(4+s+n-\frac{d}{2}\right)\Gamma(3+s+n)}{\Gamma(d-s-1)\Gamma(5+s+n)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(p^\alpha p^\beta q^\lambda + q^\alpha p^\beta p^\lambda \right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right)}{\Gamma(d - s - 1)} \\
& \quad \frac{\Gamma\left(4 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(3 + s + n)}{\Gamma(5 + s + n)} \\
& - \left(p^\alpha q^\beta q^\lambda + q^\alpha q^\beta p^\lambda \right) \frac{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right)}{\Gamma(d - s - 1)} \\
& \quad \frac{\Gamma\left(4 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(2 + s + n)}{\Gamma(4 + s + n)} \\
& + q^\alpha p^\beta q^\lambda \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right) \Gamma\left(4 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(2 + s + n)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(4 + s + n)} \\
& + q^\alpha q^\beta q^\lambda \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right) \Gamma\left(4 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1 + s + n)}{\Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} \\
& + \left[g^{\alpha\beta} p^\lambda + g^{\alpha\lambda} p^\beta + g^{\beta\lambda} p^\alpha \right] \frac{q^2 \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right)}{2 \Gamma(d - s - 1)} \\
& \quad \frac{\Gamma\left(3 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(2 + s + n)}{\Gamma(4 + s + n)} \\
& - \left[g^{\alpha\beta} q^\lambda + g^{\beta\lambda} q^\alpha \right] \frac{q^2 \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 1\right) \Gamma\left(3 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1 + s + n)}{2 \Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} \\
& + g^{\alpha\lambda} q^\beta \frac{q^2 \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} - s - 2\right) \Gamma\left(3 + s + n - \frac{d}{2}\right) \Gamma(1 + s + n)}{2 \Gamma(d - s - 1) \Gamma(3 + s + n)} \Bigg\}. \tag{C.202}
\end{aligned}$$

Dieses Resultat ist identisch mit dem, das man schneller aus der Rückführung des für den Box-Graphen charakteristischen Integrals auf die Integrale der vergangenen Abschnitte erhält. Die weitere Berechnung des Box-Graphen (C.191) hängt von der Lorentzstruktur, also von der Strukturfunktion ab, die man untersuchen möchte, und wird daher in den entsprechenden Kapiteln durchgeführt.

C.3.8 Ein spezielles Box-Graph-Integral

Bei der Renormierung der Ward-Identität in Kap. 5.4.3 wird der divergente Anteil des Integrals

$$I_{\alpha\beta\lambda}^d = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p' + k)_\alpha (p' + p + 2k)_\beta (p + k)_\lambda}{(p' + k)^2 (p' + p + 2k)^2 (p + k)^2} \tag{C.203}$$

benötigt. Dieses Integral wird mit $\gamma^\alpha \hat{\gamma}^\beta \gamma_5 \gamma^\lambda$ kontrahiert. Diese Kontraktion führt zu einem zusätzlichen Faktor $(d-4)$, so daß die Berechnung der führenden Divergenz ausreicht, um den Konstanten Beitrag dieses Integrals zur Ward-Identität zu bestimmen.

Das Integral wird mit den üblichen Methoden der Feynmanparametrisierung durch (C.37) behandelt:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^d &= 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p'+k)_\alpha (p'+p+2k)_\beta (p+k)_\lambda}{(p+k)^2 u_1 + k^2 u_2 + (p'+k)^2 u_3} \\
&= 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p'+k)_\alpha (p'+p+2k)_\beta (p+k)_\lambda}{(k+pu_1+p'u_3)^2 + \Theta^2} \\
&= 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{Z_{\alpha\beta\lambda}}{k^2 + \Theta^2} \\
&= 2\mu^{4-d} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy \\
&\quad \left\{ (p'(1-u_3) - pu_1)_\alpha (p'(1-2u_3) + p(1-2u_1))_\beta (p(1-u_1) - p'u_3)_\lambda \right. \\
&\quad \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + \Theta^2} \\
&\quad + (p(1-u_1) - p'u_3)_\lambda \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2 + \Theta^2} \\
&\quad + (p'(1-u_3) - pu_1)_\alpha \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\beta k_\lambda}{k^2 + \Theta^2} \\
&\quad \left. + (p'(1-2u_3) + p(1-2u_1))_\beta \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\lambda}{k^2 + \Theta^2} \right\} \tag{C.204}
\end{aligned}$$

mit

$$Z_{\alpha\beta\lambda} = (p'(1-u_3) + k - pu_1)_\alpha (p'(1-2u_3) + p(1-2u_1) + 2k)_\beta (p(1-u_1) + k - p'u_3)_\lambda \tag{C.205}$$

und

$$\Theta^2 = p^2 u_1 (1-u_1) + p'^2 u_3 (1-u_3) - 2u_1 u_3 p \cdot p' = x(1-x)(p' - py)^2 - xy^2 p^2 \quad . \tag{C.206}$$

Die Terme mit einer ungeraden Zahl von Loopimpulsen verschwinden wegen des ansonsten nur von k^2 abhängenden Integranden. Der divergente Teil des ersten der vier Integrale in (C.204) ist nach der Kontraktion proportional zu $\Gamma(d-4) \hat{p} \not{p} u(p)$ und daher proportional zur Bewegungsgleichung.

Die anderen drei Integrale werden mit (C.12) und (C.105) gelöst:

$$\begin{aligned}
I_{\alpha\beta\lambda}^d &= \frac{i(4\pi\mu)^{2-\frac{d}{2}}}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x \int_0^1 dy (\Theta^2)^{2-\frac{d}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \\
&\quad \left[(p(1-u_1) - p'u_3)_\lambda g_{\alpha\beta} + (p'(1-u_3) - pu_1)_\alpha g_{\beta\lambda} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(p(1-2u_1) + p'(1-2u_3))_\beta g_{\alpha\lambda} \right] . \tag{C.207}
\end{aligned}$$

Die Feynmanparameter-Integrale sind für $d \rightarrow 4$ alle endlich, und die führende Divergenz $\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)$ faktorisiert, so daß der Ausdruck im folgenden für $d = 4$ ausgewertet werden kann. Die Terme werden nach Potenzen der Feynmanparameter sortiert und die Integrale gelöst:

$$I_{\alpha\beta\lambda}^d = \frac{i\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{3(4\pi)^2} \left[g_{\alpha\beta} \left(p - \frac{1}{2}p'\right)_\lambda + \frac{1}{4}g_{\alpha\lambda} (p + p')_\beta + g_{\beta\lambda} \left(p' - \frac{1}{2}p\right)_\alpha \right] . \tag{C.208}$$

Es ist zu beachten, daß diese Herleitung nur in Verbindung mit der entsprechenden Kontraktion durch γ -Matrizen korrekt ist. Bei anderen Kontraktionen könnte von dem ersten Integral in (C.204) ein weiterer Beitrag zu dem Resultat hinzukommen. Außerdem ist lediglich die führende Divergenz berechnet worden.

C.3.9 Integranden mit Logarithmen

Integranden mit einem Logarithmus

Integrale vom Typ

$$J_n := i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln\left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right) = 0 \tag{C.209}$$

verschwinden für alle ganzen Zahlen n .

Um aus diesem Integral den Logarithmus zu eliminieren, kann ein Parameter η in den Exponenten eingeführt werden, so daß der Logarithmus durch eine Differentiation ersetzt wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\eta} \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-1-n-\eta} &= \frac{\partial}{\partial\eta} \exp\left\{-(1+n+\eta) \ln\left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right)\right\} \\
&= -\ln\left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right) \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-1-n-\eta}
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{1}{(q^2)^{n+1+\eta}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) = -\frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} . \quad (\text{C.210})$$

Mit dieser Beziehung kann J_n als Grenzwert für η gegen Null dargestellt werden, wobei der Logarithmus nicht mehr explizit erscheint:

$$\begin{aligned} J_n &= -i \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \eta} (k-q)^2 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} \\ &= -\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} (-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{((k-q)^2)^{-1} (q^2)^{n+1+\eta}} . \end{aligned} \quad (\text{C.211})$$

Das letzte Integral hat die Form von (C.142) mit dem Paar $(r, s) = (-1, n+1+\eta)$, so daß aus (C.148) folgt

$$\begin{aligned} J_n &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial \eta} (-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta} \frac{1}{(k^2)^{-2+n+\eta}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\quad \frac{\Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(1 - n - \eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n + \eta\right)}{\Gamma(-1) \Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4 - n - \eta - \varepsilon)} . \end{aligned} \quad (\text{C.212})$$

In dieser Form erkennt man bereits, daß die Behauptung (C.209) richtig ist. Für endliches ε liefern alle Γ -Funktionen für alle n endliche Werte, während $\Gamma(-1)$ im Nenner unabhängig von allen Parametern den gesamten Ausdruck zu Null macht.

Auf dem gleichen Weg kann das Integral

$$I_n := i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (\text{C.213})$$

regularisiert werden.

Um den Logarithmus durch eine Differentiation zu ersetzen, benötigt man eine zu (C.210) analoge Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \exp \left\{ (1+\eta) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\ &= \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\ \implies \left((k-q)^2 \right) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) &= (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} . \end{aligned} \quad (\text{C.214})$$

Damit kann man für I_n schreiben

$$\begin{aligned}
I_n &= i \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{n+1}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\eta} \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{1+\eta}} i \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{n+1} ((k-q)^2)^{-1-\eta}} \quad .
\end{aligned} \tag{C.215}$$

Das letzte Integral ist von der Form (C.142) mit den Parametern $(r, s) = (n + 1, -1 + \eta)$. Das regularisierte Integral $I^{n+1, -1-\eta}$ ist in (C.148) zu finden. Es folgt

$$\begin{aligned}
I_n &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{1+\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{1+\eta}} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^{-2+n-\eta}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma\left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 + \eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n - \eta\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(-1-\eta) \Gamma(4-n+\eta-\varepsilon)} \\
&= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (-4\pi\mu^2)^\eta (k^2)^{2-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}-\eta} \\
&\quad \times \frac{\Gamma\left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 + \eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n - \eta\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(-1-\eta) \Gamma(4-n+\eta-\varepsilon)} \quad . \tag{C.216}
\end{aligned}$$

Betrachtet man dieses Ergebnis für endliches ε , findet man nur eine einzige im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ divergente Γ -Funktion, deren Entwicklung mit (C.67) $\frac{1}{\Gamma(-1-\eta)} = \eta + (1-\gamma)\eta^2$ ist. Um η aus (C.216) zu eliminieren, muß man sich klar machen, was es bedeutet, erst nach η zu differenzieren und dann den Grenzprozeß $\eta \rightarrow 0$ durchzuführen:

Nach einer Entwicklung in η besteht der gesamte Ausdruck aus Produkten der Art

$$\begin{aligned}
&(\eta + (1-\gamma)\eta^2) \left(\frac{1}{\varepsilon + \eta} + const \right) (const + (\varepsilon + \eta)) \cdots \\
&= \eta(\varepsilon + const) + \mathcal{O}(\eta^2) \quad , \tag{C.217}
\end{aligned}$$

wobei alle Konstanten weggelassen wurden, da nur die Struktur des Ausdrucks betrachtet wird. Das erste Produkt stammt von $\Gamma(-1-\eta)$. Zunächst erniedrigt die Differentiation nach η den Grad des Polynoms um eins. Es verbleiben ein von η unabhängiger Ausdruck und Terme höheren Grades in η . Diese letzten jedoch verschwinden nach dem Grenzprozeß, so daß nur die ursprünglich in η linearen Terme überleben. Da jedoch wegen $\Gamma(-1-\eta)$ ein η faktorisiert, bedeutet diese Feststellung, daß sonst nur noch Terme nullter Ordnung in η zu dem Ergebnis

beitragen können. Praktisch kann man demnach folgendermaßen verfahren:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{f(\eta)}{\Gamma(-1-\eta)} = f(0) \quad , \text{ falls } f(0) \text{ endlich ist} \quad . \quad (\text{C.218})$$

(C.216) wird damit

$$I_n = i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (\text{C.219})$$

$$= -\frac{\pi^2 (k^2)^{2-n}}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-n-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n\right)}{\Gamma(n+1) \Gamma(4-n-\varepsilon)} \quad . \quad (\text{C.220})$$

Für gegebenes n kann man diesen Ausdruck mit den Formeln des Kapitels C.2.7 in ε entwickeln und damit die Divergenz isolieren. Im folgenden wird dies für alle $n < 2$ durchgeführt, wo man Divergenz in ε erwartet. Genau wie in (C.212) kann man sofort ablesen, daß das Integral für $n < 0$ verschwindet (wegen $\Gamma(n+1)$), d. h.

$$I_{n < 0} = 0 \quad . \quad (\text{C.221})$$

Für $n = 1, 2$ treten doppelte Divergenzen auf, d. h. Terme der Art $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Für $n = 3$ ist die Divergenz wieder linear in ε , während für alle $n > 3$ überhaupt keine Divergenz in ε mehr auftritt. Diese Aussagen kann man einfach durch Abzählen der divergenten Γ -Funktionen verifizieren.

Für $n = 0$ folgt mit der Entwicklung (C.98)

$$\begin{aligned} I_0 &= -\frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^4 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(4-\varepsilon)} \\ &= -\frac{\pi^2}{6(2\pi)^4} k^4 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{11}{3} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\} \quad . \quad (\text{C.222}) \end{aligned}$$

Für $n = 1$ lautet der entsprechende Ausdruck:

$$I_1 = -\frac{\pi^2 k^2}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(3-\varepsilon)} \quad , \quad (\text{C.223})$$

der quadratisch divergent ist.

Integranden mit 2 Logarithmen

Bei Integranden mit 2 Logarithmen muß das im vorigen Abschnitt dargestellte Verfahren 2 mal angewendet werden. Das gesuchte Integral lautet

$$K_n := i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) . \quad (\text{C.224})$$

Die beiden Logarithmen werden mit Hilfe der Beziehungen (C.210) und (C.214) ersetzt

$$\begin{aligned} K_n &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} (k-q)^2 \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \\ &= - \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} \frac{(-4\pi\mu^2)^{1+\xi}}{(-4\pi\mu^2)^{n+1+\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2} \right)^{n+1+\eta} \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right)^{1+\xi} \\ &= - \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{\xi-\eta-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-4\pi\mu^2)^{n+\eta-\xi} i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2)^{n+1+\eta} ((k-q)^2)^{-1-\xi}} . \end{aligned} \quad (\text{C.225})$$

Das letzte Integral ist wieder von der Form (C.142), mit dem Parameterpaar $(r, s) = (n+1+\eta, -1-\xi)$. Die regularisierte Form dieses Integrals (C.148) kann hier eingesetzt werden

$$\begin{aligned} K_n &= \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{\xi-\eta-n} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} (-4\pi\mu^2)^{n+\eta-\xi} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^{-2+n+\eta-\xi}} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\xi}{2}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma \left(1-n-\eta-\frac{\xi}{2} \right) \Gamma \left(3+\xi-\frac{\xi}{2} \right) \Gamma \left(-2+\frac{\xi}{2}+n+\eta-\xi \right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(-1-\xi) \Gamma(4-n-\eta+\xi-\varepsilon)} \\ &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \lim_{\eta, \xi \rightarrow 0} (-4\pi\mu^2)^{\xi-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\xi}{2}+\eta-\xi} \\ &\quad \times \frac{\Gamma \left(1-n-\eta-\frac{\xi}{2} \right) \Gamma \left(3+\xi-\frac{\xi}{2} \right) \Gamma \left(-2+\frac{\xi}{2}+n+\eta-\xi \right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(-1-\xi) \Gamma(4-n-\eta+\xi-\varepsilon)} . \end{aligned} \quad (\text{C.226})$$

Die Argumentation, die auf (C.218) führte, findet hier auf ξ Anwendung. Es folgt

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\xi}{2}+\eta} \\ &\quad \times \frac{\Gamma \left(1-n-\eta-\frac{\xi}{2} \right) \Gamma \left(3-\frac{\xi}{2} \right) \Gamma \left(-2+\frac{\xi}{2}+n+\eta \right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} . \end{aligned} \quad (\text{C.227})$$

η faktorisiert nach einer Entwicklung nur für $n < 0$, da $\Gamma(n + 1 + \eta)$ im Nenner nur in diesem Fall divergiert. Deshalb müssen die beiden Fälle $n < 0$ und $n \geq 0$ getrennt voneinander untersucht werden.

Im Fall $n < 0$ ist $\Gamma(n + 1 + \eta)$ im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ immer divergent. Um die Argumentation vor (C.218) wieder anwenden zu können, muß man diese Γ -Funktion von n unabhängig notieren. Mit Hilfe von (C.57) kann man sie auf die Form

$$\frac{1}{\Gamma(n + 1 + \eta)} = \frac{1}{\Gamma(\eta)} \prod_{k=1}^{-n-1} (\eta - k) \quad (\text{für } n < 0) \quad (\text{C.228})$$

bringen, wobei das Produkt nur für $n < -1$ gemeint ist (für $n = -1$ ist mit dem Produkt einfach 1 gemeint). Die Entwicklung (C.68) dieser Funktion ist in erster Ordnung in η mit der von $\frac{1}{\Gamma(-1-\eta)}$ identisch — und nur diese Ordnung ist von Bedeutung. Man kann deshalb (C.218) anwenden, wobei die $\Gamma(-1 - \eta)$ einfach durch $\Gamma(\eta)$ zu ersetzen ist. Für (C.227) folgt

$$\begin{aligned} K_{n < 0} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2} + \eta} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(1 - n - \eta - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n + \eta\right)}{\Gamma(\eta) \Gamma(4 - n - \eta - \varepsilon)} \prod_{k=1}^{-n-1} (\eta - k) \\ \Rightarrow \\ K_{n < 0} &= (-1)^{-n-1} (-n-1)! \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\quad \times \frac{\Gamma\left(1 - n - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2 + \frac{\varepsilon}{2} + n\right)}{\Gamma(4 - n - \varepsilon)}. \quad (\text{C.229}) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist die regularisierte Form des Integrals K_n im Bereich $n < 0$. Für alle n in diesem Bereich erhält man eine einfache Divergenz in ε , die nach der Entwicklung isoliert ist. Für $n = -1$ ergibt sich mit (C.99)

$$\begin{aligned} K_{-1} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^6 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(5 - \varepsilon)} \\ &= -\frac{1}{72} \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^6 \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{7}{2} - \gamma + \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \right\}. \quad (\text{C.230}) \end{aligned}$$

Für $n \geq 0$ kann man sich jedoch nicht auf die Terme nullter Ordnung beschränken, da $\Gamma(n + 1 + \eta)$ in diesem Fall nicht divergent ist. Man muß uneingeschränkt nach η entwickeln. Um dennoch einen in n allgemeinen, aber von η

unabhängigen Ausdruck zu bekommen, kann man die Differentiation durchführen und in dem resultierenden Ausdruck den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ vornehmen. Die Differentiation ergibt mit (C.210)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \right\} \\
&= \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \\
&\quad + \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \\
&= \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) \\
&\quad + \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \\
&\quad \times \left\{ -\Psi\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \Psi(n+1+\eta) + \Psi(4-n-\eta-\varepsilon) \right\} \\
&= \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \\
&\quad \times \left\{ \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \Psi\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \Psi(n+1+\eta) + \Psi(4-n-\eta-\varepsilon) \right\} . \quad (C.231)
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Definition der Ψ -Funktion (C.75) verwendet. Der differenzierte Ausdruck kann in (C.227) eingesetzt werden. Da bei festem ε keine Divergenzen im Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ auftreten, ist es möglich, den Grenzwert zu bestimmen:

$$\begin{aligned}
K_{n \geq 0} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
&\quad \times \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{(-4\pi\mu^2)^\eta} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^\eta \frac{\Gamma\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right)}{\Gamma(n+1+\eta) \Gamma(4-n-\eta-\varepsilon)} \\
&\quad \times \left\{ \ln \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right) - \Psi\left(1-n-\eta-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n+\eta\right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \Psi(n+1+\eta) + \Psi(4-n-\eta-\varepsilon) \right\} \\
&\implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{n \geq 0} &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} (k^2)^{2-n} \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-n-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(4-n-\varepsilon)} \\
&\quad \times \left\{ \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) - \Psi\left(1-n-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}+n\right) \right. \\
&\quad \left. - \Psi(n+1) + \Psi(4-n-\varepsilon) \right\} . \quad (\text{C.232})
\end{aligned}$$

Dies ist der regularisierte Ausdruck für das Integral K_n in (C.224) im Bereich $n \geq 0$. Es treten für kleine n Divergenzen höheren Grades in ε auf. In der Klammer ist für alle $n \geq 0$ mindestens eine Funktion divergent. Damit erhält man für $n = 0, 3$ eine dreifache, für $n = 1, 2$ eine vierfache und für $n \geq 4$ eine einfache Divergenz.

Für $n = 0$ wird das regularisierte Integral in entwickelter Form notiert. In diesem Fall werden einige Zwischenschritte der Entwicklung darstellt, da dieser Fall im Gegensatz zu den bisherigen illustrativ ist. Wegen der quadratischen Divergenz in ε müssen die Laurentreihen in zweiter Ordnung in ε verwendet werden, da auch die Terme zweiter Ordnung zusammen mit $\frac{1}{\varepsilon^2}$ einen konstanten Beitrag ergeben. Die notwendigen Laurentreihen finden sich in (C.78)-(C.84), (C.48), (C.57) und (C.59)-(C.72). Mit $\Psi(1) = -\gamma$ folgt:

$$\begin{aligned}
K_0 &= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^4 \left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(3-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Gamma\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\Gamma(4-\varepsilon)} \\
&\quad \times \left\{ \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) - \Psi\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) + \Psi\left(-2+\frac{\varepsilon}{2}\right) - \Psi(1) + \Psi(4-\varepsilon) \right\} \\
&= \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} k^4 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{8} \ln^2\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} \\
&\quad \times \frac{1}{6} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} + \frac{11}{3} - \gamma + \varepsilon \left(\frac{85}{18} - \frac{1}{4}\zeta(2) - \frac{47}{24}\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2 \right) \right\} \\
&\quad \times \left\{ -\frac{2}{\varepsilon} + \frac{10}{3} + \frac{143}{72}\varepsilon + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} \\
\Rightarrow & \\
K_0 &= -\frac{\pi^2}{6(2\pi)^4} k^4 \left\{ \frac{4}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2}{3} - 2\gamma \right) - \frac{27}{4} - \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{7}{12}\gamma + \gamma^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{10}{3} \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \right\} . \quad (\text{C.233})
\end{aligned}$$

Das Interessante ist, daß sich die Logarithmen der ersten und dritten Klammer im Zwischenschritt beim Ausmultiplizieren wegheben. Dies muß so sein, da ansonsten k^2 -abhängige Terme der Art $\frac{1}{\varepsilon} \ln(-k^2)$ auftreten würden. Ein von k^2 abhängiger

Counterterm ist für die Renormierung jedoch ungeeignet. Für alle renormierbaren Theorien müssen deshalb diese Logarithmen, die zwischenzeitlich auftreten, spätestens nach der Regularisierung aller Graphen wegfallen¹⁹, wie es hier geschehen ist.

C.3.10 Zwei skalare Propagatoren mit Masse

Im folgenden wird ein Integral regularisiert, das aus zwei Propagatoren für skalare Teilchen mit endlicher Masse besteht:

$$\Pi_S(q) = ig^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \quad . \quad (\text{C.234})$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Vakuumpolarisations-Graphen skalarer Teilchen. g ist die Kopplung, p der Loopimpuls und Δ ist der Propagator eines skalaren Teilchens mit der Masse m , das Farbe tragen soll. Die Spur erstreckt sich deshalb über den Farbraum und ergibt den Faktor N_c . Mit den eingesetzten Propagatoren lautet die Feynman-Amplitude:

$$\Pi_S(q) = iN_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad . \quad (\text{C.235})$$

Nach einer Wick-Rotation in den euklidischen Raum²⁰ erhält man mit (C.8):

$$\Pi_S(q) = -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{P^2 + m^2} \frac{1}{(P-Q)^2 + m^2} \quad . \quad (\text{C.236})$$

Mit Hilfe der Feynmanparametrisierung C.34 kann der Nenner auf ein Polynom reduziert werden:

$$\begin{aligned} \Pi_S(q) &= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[((P-Q)^2 + m^2)x + (P^2 + m^2)(1-x)]^2} \\ &= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(P-xQ)^2 + x(1-x)Q^2 + m^2]^2} \\ &= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P^2 + x(1-x)Q^2 + m^2]^2} \\ &= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P^2 + \Theta^2]^2} \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.237})$$

¹⁹Siehe die Ausführungen in Collins 1985.

²⁰Siehe Kap. C.2.1.

wobei die Translationsinvarianz (C.3) verwendet und die Ersetzung $\Theta^2 := x(1-x)Q^2 + m^2$ vorgenommen wurde. Das Integral hat damit die Form von (C.103) (mit $\alpha = 0$ und $\beta = 2$). Es folgt (mit $d = 4 - \varepsilon$):

$$\begin{aligned} \Pi_S(q) &= -N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^{d/2}}{(2\pi)^4} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx (\Theta^2)^{\frac{d}{2}-2} \\ &= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx (x(1-x)Q^2 + m^2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \\ &= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)Q^2 + m^2}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.238})$$

Die Divergenz des Integrals wird durch eine Entwicklung in ε isoliert. Im Minkowski-Raum folgt dann

$$\begin{aligned} \Pi_S(q) &= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma\right) \int_0^1 dx \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{x(1-x)Q^2 + m^2}\right)\right) \\ &= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \int_0^1 dx \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.239})$$

Der Counterterm lautet daher $-\frac{6\pi^2 g^2}{\varepsilon(2\pi)^4}$.

Das endliche Parameterintegral ist noch zu lösen. Eine partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} I_P &:= \int_0^1 dx \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2}\right) \\ &= x \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2}\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 dx \frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon} \frac{q^2(2x^2 - x)}{4\pi\mu^2} \\ &= \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) - \underbrace{\int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} - i\epsilon}}_{I_1}. \end{aligned} \quad (\text{C.240})$$

Um das Integral I_1 auswerten zu können, muß man zunächst die Pole des Integranden analysieren. Physikalische, d. h. reelle Pole treten nur für $q^2 > 4m^2$ auf, denn die Nullstellen des Nenners sind:

$$x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}\right). \quad (\text{C.241})$$

Damit die Pole für das Integral relevant sind, müssen sie im Intervall $0 \leq x_0 \leq 1$ liegen und daher auch reell sein. Reelle Pole sind aber nur möglich, wenn der

Radikant größer als Null ist:

$$\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \in \mathbf{R} \iff q^2 > 4m^2 \quad . \quad (\text{C.242})$$

Pole, die dieser Bedingung genügen, liegen auch automatisch im gewünschten Intervall, denn

$$q^2 > 4m^2 \implies 0 < \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} < 1 \implies 0 < x_0 < 1 \quad . \quad (\text{C.243})$$

Mit Hilfe der Dirac-Identität (C.16) kann man den Beitrag des Pols zu dem Integral I_1 aus (C.240) berechnen. Dazu ist das Integral I_1 auf die Form $\int dx h(x) \frac{1}{x-i\epsilon}$ zu bringen (mit der reellen Funktion $h(x)$):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} - i\epsilon} \\ &= \int_{-1}^{+1} dy \frac{y^2 - y}{y^2 - 1 + \frac{4m^2}{q^2} - i\epsilon} \quad \text{mit } y := 1 - 2x \\ &= \int_{-1}^{+1} dy \frac{y^2}{y^2 - 1 + \frac{4m^2}{q^2} - i\epsilon} \quad \text{wegen des um 0 symmetrischen Bereichs} \\ &= 2 \int_0^{+1} dy \frac{y^2}{y^2 - 1 + \frac{4m^2}{q^2} - i\epsilon} \quad \text{da der Integrand symmetrisch ist} \\ &= \int_{\frac{4m^2}{q^2}}^{\infty} dM^2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{M^2}} \frac{1}{M^2 \left(\frac{M^2}{q^2} - 1 - i\epsilon \right)} \quad \text{mit } M^2 := \frac{4m^2}{1-y^2} \\ &= \int_{\frac{4m^2}{q^2}-1}^{\infty} dz \underbrace{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{(z+1)q^2}} \frac{1}{z+1} \frac{1}{z-i\epsilon}}_{\in \mathbf{R}} \quad \text{mit } z := \frac{M^2}{q^2} - 1 \quad . \quad (\text{C.244}) \end{aligned}$$

Mit (C.16) folgt dann:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} + i\pi \int_{\frac{4m^2}{q^2}-1}^{\infty} dz \sqrt{1 - \frac{4m^2}{(z+1)q^2}} \frac{\delta(z)}{z+1} \Theta(q^2 - 4m^2) \\ &= \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} + i\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \Theta(q^2 - 4m^2) \quad . \quad (\text{C.245}) \end{aligned}$$

Das Hauptwertintegral kann man auf die Integrale (C.44), (C.45) und (C.46) zurückführen:

$$\mathcal{P} I_1 = \mathcal{P} \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2m^2}{q^2}\right) \int_0^1 dx \frac{1}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} \\
&= 2 - 2\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{4m^2}{q^2} - 1}}\right) \Theta(4m^2 - q^2) \\
&\quad - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) \\
&= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}\right) \quad , \quad (C.246)
\end{aligned}$$

wobei $i x \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{ix}\right) = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ verwendet wurde. Insgesamt folgt daher aus (C.246), (C.245), (C.240) und (C.239):

$$\begin{aligned}
\Pi_S(q) &= ig^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp\{\Delta(p)\Delta(p-q)\} \\
&= -\frac{N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + i\pi\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \Theta(q^2 - 4m^2) \right. \\
&\quad \left. - 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}}\right) \right\} \quad . \quad (C.247)
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis geht für masselose Propagatoren in (C.149) über. Um dies einzusehen wird eine Entwicklung in m^2 durchgeführt. Mit

$$\operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}}\right) \quad (C.248)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + 2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \left(1 - \frac{2m^2}{k^2} + \mathcal{O}(m^4)\right) \ln\left(-\frac{1 + 1 - \frac{2m^2}{k^2} + \mathcal{O}(m^4)}{1 - 1 + \frac{2m^2}{k^2} + \mathcal{O}(m^4)}\right) \\
&\approx \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \left(1 - \frac{2m^2}{k^2}\right) \ln\left(-\frac{k^2 - m^2}{m^2}\right) \\
&\approx \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right) + \ln\left(-\frac{k^2}{m^2}\right) \quad \text{für } k^2 \gg m^2 \\
&= -\ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{k^2}\right) \quad . \quad (C.249)
\end{aligned}$$

C.3.11 Der fermionische 1-Loop Polarisationsgraph

Der zu (C.234) analoge Ausdruck mit einem Fermion-Loop ist:

$$\Pi_F^{\mu\nu}(q) = ig^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{Sp\{(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\nu\}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)}. \quad (\text{C.250})$$

Die Spur ergibt einen Faktor N_c und mit (B.1):

$$\begin{aligned} & Sp\{(\not{p} + m)\gamma^\mu(\not{p} - \not{q} + m)\gamma^\nu\} \\ &= N_c Sp\{\not{p}\gamma^\mu\not{p}\gamma^\nu\} - N_c Sp\{\not{p}\gamma^\mu\not{q}\gamma^\nu\} + N_c m^2 Sp\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} \\ &= N_c p \cdot A Sp\{\not{p}\not{B}\} - N_c p \cdot p Sp\{A\not{B}\} + N_c p \cdot B Sp\{A\not{p}\} \\ &\quad - N_c p \cdot A Sp\{\not{q}\not{B}\} + N_c p \cdot q Sp\{A\not{B}\} - N_c p \cdot B Sp\{A\not{q}\} + 4N_c m^2 g^{\mu\nu} \\ &= 4N_c \{p^\mu p \cdot B - p^2 A \cdot B + p^\nu A \cdot p - p^\mu q \cdot B + p \cdot q A \cdot B - p^\nu A \cdot q + m^2 g^{\mu\nu}\} \\ &= 4N_c \{2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + g^{\mu\nu}(p \cdot q - p^2 + m^2)\}. \end{aligned} \quad (\text{C.251})$$

Dieses Ergebnis wird in (C.250) eingesetzt:

$$\Pi_F^{\mu\nu}(q) = 4i N_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - p^\nu q^\mu + g^{\mu\nu}(p \cdot q - p^2 + m^2)}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p - q)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (\text{C.252})$$

Dimensionale Fortsetzung mit (C.8) und Wick-Rotation²¹ ergeben:

$$\Pi_F^{ij}(Q) = 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{2P^i P^j - P^i Q^j - P^j Q^i + \delta^{ij}(P \cdot Q - P^2 - m^2)}{(P^2 + m^2)((P - Q)^2 + m^2)}. \quad (\text{C.253})$$

Da der Nenner mit dem in (C.235) identisch ist, kann auch das Ergebnis der Feynmanparametrisierung (C.34) von (C.237) übernommen werden. Die Translation $P \rightarrow P + xQ$ muß noch im Zähler durchgeführt werden. Mit $\Theta^2 := x(1-x)Q^2 + m^2$ folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{ij}(Q) &= 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P^2 + \Theta^2]^2} \\ &\quad \{2(P + xQ)^i(P + xQ)^j - (P + xQ)^i Q^j - (P + xQ)^j Q^i \\ &\quad + \delta^{ij}((P + xQ) \cdot Q - (P + xQ)^2 - m^2)\} \\ &= 4N_c g^2 (2\pi\mu)^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \\ &\quad \frac{2P^i P^j - 2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij}(P^2 - x(1-x)Q^2 + m^2)}{[P^2 + \Theta^2]^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.254})$$

²¹Siehe Kap. C.2.1.

wobei

$$\int d^d p p^i f(p^2) = 0 \quad (\text{C.255})$$

verwendet wurde. Mit (C.12) folgt für den Zähler des Integranden $P^i P^j = P^2 \delta^{ij}/d$, woraus folgt:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{ij}(Q) &= -4N_c g^2 (2\pi\mu)^\varepsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^4} \\ &\quad \left\{ \frac{\delta^{ij} P^2 \left(1 - \frac{2}{d}\right)}{[P^2 + \Theta^2]^2} + \frac{2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij} (x(1-x)Q^2 - m^2)}{[P^2 + \Theta^2]^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.256})$$

Die Impulsintegration wird mit (C.103) für $\alpha = 0, 1$ und $\beta = 2$ durchgeführt:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{ij}(Q) &= -\frac{4N_c g^2}{(2\pi)^4} (2\pi\mu)^\varepsilon \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^1 dx \\ &\quad \left\{ \delta^{ij} \left(1 - \frac{2}{d}\right) (\Theta^2)^{-1+\frac{d}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2x(1-x)Q^i Q^j - \delta^{ij} (x(1-x)Q^2 - m^2) \right\} (\Theta^2)^{-2+\frac{d}{2}} \Gamma(d/2) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \right\} \\ &= -\frac{4N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \Gamma(\varepsilon/2) \\ &\quad \int_0^1 dx 2x(1-x) (x(1-x)Q^2 + m^2)^{-\varepsilon/2} \{Q^i Q^j - \delta^{ij} Q^2\}. \end{aligned} \quad (\text{C.257})$$

Hier wurden (C.57) und $d = 4 - \varepsilon$ verwendet sowie Θ^2 wieder eingesetzt. Das Ergebnis wird mit (C.48) und (C.60) in ε entwickelt und im Minkowski-Raum notiert:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\mu\nu}(q) &= -\frac{4N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma(\varepsilon/2) \\ &\quad \int_0^1 dx 2x(1-x) \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon} \right)^{\varepsilon/2} \\ &= -\frac{4N_c \pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \\ &\quad \int_0^1 dx 2x(1-x) \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.258})$$

Das Parameterintegral über die Konstanten ist:

$$\int_0^1 dx 2x(1-x) \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma \right\} = \left\{ \frac{2}{3\varepsilon} - \frac{1}{3}\gamma \right\}. \quad (\text{C.259})$$

Es verbleibt das Parameterintegral über den Logarithmus, das wie (C.240) behandelt werden kann. Eine partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} I_P &:= - \int_0^1 dx \, 2x(1-x) \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\epsilon}{4\pi\mu^2} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) - \underbrace{\frac{1}{3} \int_0^1 dx \, x^2 \frac{4x^2 - 8x + 3}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2} - i\epsilon}}_{I_1 :=} . \end{aligned} \quad (\text{C.260})$$

Die Polstruktur von I_1 ist mit der aus (C.240) identisch, so daß wie in (C.241)-(C.244) folgt:

$$I_1 = -\frac{1}{3} \int_{\frac{4m^2}{q^2}-1}^{\infty} dz \, \underbrace{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{(z+1)q^2} \left(1 + \frac{2m^2}{(z+1)q^2}\right)} \frac{1}{z+1} \frac{1}{z-i\epsilon}}_{\in \mathbf{R}} . \quad (\text{C.261})$$

Mit Hilfe der Dirac-Identität und der Polbedingung $q^2 > 4m^2$ folgt:

$$I_1 = \frac{1}{3} \mathcal{P} \int_0^1 dx \, x^2 \frac{4x^2 - 8x + 3}{x^2 - x + \frac{m^2}{q^2}} - \frac{i\pi}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) . \quad (\text{C.262})$$

Das Hauptwertintegral folgt aus (C.44)-(C.47) (für $m \leq 4$):

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{5}{9} - \frac{4m^2}{3q^2} - \frac{i\pi}{3} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) \\ &\quad + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.263})$$

Aus den Resultaten (C.258)-(C.260) und (C.263) folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\mu\nu}(q) &= ig^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Sp\{S(p)\gamma^\mu S(p-q)\gamma^\nu\} \\ &= -\frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2 g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu\} \\ &\quad \left\{ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \frac{5}{3} - \ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + i\pi \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \Theta(q^2 - 4m^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m^2}{q^2} - 2 \left(1 + \frac{2m^2}{q^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}}} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{C.264})$$

Das Resultat ist erwartungsgemäß eichinvariant. Allgemeiner hat die dimensionale Regularisierung die Eigenschaft, die Eichinvarianz zu erhalten²², was für andere Regularisierungsverfahren wie etwa das von Pauli–Villars²³ nicht gilt. Dies ist ein grundlegender Vorzug der dimensionale Regularisierung gegenüber anderen Verfahren.

Abschließend wird der Grenzfall verschwindender Masse untersucht, indem man vom ersten Teil von (C.258) ausgeht und darin die Masse gleich Null setzt:

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\mu\nu}(q)|_{m=0} &= -\frac{4N_c\pi^2g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma(\varepsilon/2) \\ &\quad \int_0^1 dx \, 2x(1-x) \left(\frac{-4\pi\mu^2}{x(1-x)q^2 + i\epsilon} \right)^{\varepsilon/2} \\ &= -\frac{8N_c\pi^2g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right)^{\varepsilon/2} B\left(2 - \frac{\varepsilon}{2}, 2 - \frac{\varepsilon}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.265})$$

wobei (C.74) benutzt wurde. Die Entwicklung in ε ergibt mit (C.73), (C.60), (C.62), (C.72) und (C.48):

$$\Pi_F^{\mu\nu}(q)|_{m=0} = -\frac{4N_c}{3} \frac{\pi^2g^2}{(2\pi)^4} \{g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu\} \left\{ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma + \frac{5}{3} + \ln\left(-\frac{4\pi\mu^2}{q^2}\right) \right\}. \quad (\text{C.266})$$

C.3.12 Alle regularisierten Integrale

Es folgt eine Liste der wichtigsten Integrale mit dem jeweiligen Verweis auf die Gleichung, in der der zugehörige regularisierte Ausdruck zu finden ist.

$$i(4\pi)^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{(p^2)^\alpha}{(p^2 + m^2)^\beta} \quad (\text{C.105})$$

$$i(4\pi)^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.111})$$

$$i(4\pi)^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.118})$$

$$i(4\pi)^2\mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} \quad (\text{C.126})$$

²²Vgl. t'Hooft, Veltman 1972a; Ashmore 1972.

²³Vgl. Pauli, Villars 1949.

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\rho}{(p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.132})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\not{k} (\not{p} - \not{k}) \not{k}}{(p-k)^2 (k^2)^{2+s}} \quad (\text{C.137})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2)^r ((p-q)^2)^s} \quad (\text{C.148})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.158})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.163})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{((p-k)^2)^\alpha (p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.168})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta k_\lambda}{((p-k)^2)^\alpha (p+q-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.175})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p+q-k)^\alpha (p-k)^\beta}{(p+q-k)^2 (p-k)^2 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.187})$$

$$i(4\pi)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(p-k)^\alpha (p+q-k)^\beta (p-k)^\lambda}{(p+q-k)^2 (p-k)^4 (k^2)^{1+s}} \quad (\text{C.202})$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(p'+k)_\alpha (p'+p+2k)_\beta (p+k)_\lambda}{(p'+k)^2 (p'+p+2k)^2 (p+k)^2} \quad (\text{C.208})$$

$$i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (\text{C.209})$$

$$i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (\text{C.219})$$

$$i \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(k-q)^2}{(q^2)^{n+1}} \ln \left(-\frac{q^2}{4\pi\mu^2} \right) \ln \left(-\frac{(k-q)^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (\text{C.232}), (\text{C.229})$$

$$i N_c g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p-q)^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.247})$$

$$i g^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{Sp\{(\not{p} + m) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + m) \gamma^\nu\}}{(p^2 - m^2 + i\epsilon) ((p-q)^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (\text{C.264})$$

Abbildungsverzeichnis

2.1	Die tief-inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung	15
2.2	Analytische Fortsetzung der Vorwärtsstreuamplitude	57
2.3	Die Proton-Strukturfunktion F_2 als Funktion von Q^2	62
2.4	Die Proton-Strukturfunktion F_2 als Funktion von x	63
2.5	Die Deuteron-Strukturfunktion F_2 als Funktion von Q^2	64
2.6	Die Deuteron-Strukturfunktion F_2 als Funktion von x	65
2.7	Die Strukturfunktion F_2^{NS} als Funktion von Q^2	66
2.8	Die Strukturfunktion F_2^{NS} als Funktion von x	67
2.9	Die Nonsinglet-Strukturfunktion g_1^{NS} als Funktion von x	69
2.10	Der R -Faktor als Funktion von x	72
2.11	Der R -Faktor als Funktion von Q^2	73
4.1	Photon-Propagator mit resummierten Fermionen-Loops	103
4.2	Gluon-Propagator mit resummierten Gluon- und Fermion-Loops . .	104
4.3	Das qualitative Verhalten der QCD-Störungsreihe	115
4.4	Die Näherung großer N_f	123
5.1	Die Feynman-Graphen der DIS mit beliebigen Vertizes	137
5.2	Die Feynman-Graphen für g_1	138
5.3	Der Selbstenergie-Graph mit axialvektoriellem Vertex	140

5.4	Der Vertex-Graph mit einem resummierten Gluon am axialvektoriellen Vertex	143
5.5	Der Vertex-Graph mit einem resummierten Gluon am vektoriellen Vertex	147
5.6	Der Box-Graph mit einem resummierten Gluon-Propagator	150
5.7	Die Twist-4-Korrektur zu g_1^{NS}	179
5.8	Die relative Größe der Twist-4-Korrektur zu g_1^{NS}	180
6.1	Der Box-Graph für F_L	189
6.2	Die $1/Q^2$ -Korrekturen zu F_L^{NS}	203
6.3	Die Twist-4-Korrektur zu F_L^{NS}	204
6.4	Die UV-Feynman-Graphen mit Twist-4-Operatoren	207
7.1	Der Drell-Yan-Prozeß	215
7.2	Der Chiralitäts-Flip im Drell-Yan-Prozeß	220
7.3	Die Feynman-Graphen für h_1	230
7.4	Die Baumgraphen für h_1	231
7.5	Die Selbstenergie-Graphen für h_1	232
7.6	Die Vertex-Korrektur-Graphen für h_1 : Gluon am skalaren Vertex	233
7.7	Die Vertex-Korrektur-Graphen für h_1 : Gluon am axialvektoriellen Vertex	235
7.8	Die Box-Graphen für h_1	237
7.9	Die Bag-Modell-Rechnung für h_1	249
7.10	Die Twist-4-Korrektur zu h_1	250
7.11	Die relative Größe der Twist-4-Korrektur zu h_1	251
C.1	Der Quark-Selbstenergie-Graph	314
C.2	Der Vertex-Korrektur-Graph	329
C.3	Der Box-Graph mit zwei beliebigen Vertizes Γ_3 und Γ_4	334

Literaturverzeichnis

- ABRAMOWITZ, M. / STEGUN, I.A. (Hrsg.), **1972**: Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 9. Aufl.
- ALTARELLI, G. / MARTINELLI, G., **1978**: Transverse momentum of jets in electroproduction from Quantum Chromodynamics, Phys. Lett. **B76**, 89–94.
- ALTARELLI, G. / PARISI, G., **1977**: Asymptotic freedom in parton language, Nucl. Phys. **B126**, 298–318.
- ARTRU, X. / MEKHFI, M., **1990**: Transversely polarized parton densities, their evolution and their measurement, Z. Phys. **C45**, 669–676.
- ASHMORE, J.F., **1972**: A Method of Gauge-Invariant Regularization, Lett. Nuovo Cim. **4**, 289–290.
- BALITSKY, I.I. / BRAUN, V.M. / KOLESNICHENKO, A.V., **1990**: Power corrections $1/Q^2$ to parton sum rules for deep inelastic scattering from polarized nucleons, Phys. Lett. **B242**, 245.
- BALITSKY, I.I. / BRAUN, V.M. / KOLESNICHENKO, A.V., **1993**: Power corrections $1/Q^2$ to parton sum rules for deep inelastic scattering from polarized nucleons, Phys. Lett. **318 (E)**, 648.
- BALL, P. / BENEKE, M. / BRAUN, V.M., **1995**: Resummation of $(\beta_0\alpha_s)^n$ corrections in QCD: Techniques and applications to the τ hadronic width and the heavy quark pole mass, Nucl. Phys. **B452**, 563.
- BCDMS COLLABORATION, **1989**: A high statistics measurement of the proton structure functions $F_2(x, Q^2)$ and R from deep inelastic muon scattering at high Q^2 , Phys. Lett. **B223**, 485–489.
- BCDMS COLLABORATION, **1990**: A high statistics measurement of the deuteron structure functions $F_2(x, Q^2)$ and R from deep inelastic muon scattering at high Q^2 , Phys. Lett. **B237**, 592.

- BECHER, P. / BÖHM, M. / JOOS, H., **1983**: Eichtheorie der starken und elektroschwachen Wechselwirkung. Teubner, Stuttgart, 2. Aufl.
- BENEKE, M. / BRAUN, V.M., **1994**: Heavy quark effective theory beyond perturbation theory: renormalons, the pole mass and the residual mass term, Nucl. Phys. **B426**, 301–343.
- BENEKE, M. / BRAUN, V.M., **1995**: Naive nonabelianization and resummation of fermion bubble chains, Phys. Lett. **B348**, 513–520.
- BENEKE, M. / BRAUN, V.M. / ZAKHAROV, V.I., **1994**: Bloch–Nordsieck Cancellations beyond Logarithms in Heavy Particle Decays, Phys. Rev. Lett. **73**, 3058–3061.
- BJORKEN, J.D., **1966**: Applications of the Chiral $U(6) \times U(6)$ Algebra of Current Densities, Phys. Rev. **148**, 1467.
- BJORKEN, J.D., **1970**: Inelastic Scattering of Polarized Leptons from Polarized Nucleons, Phys. Rev. **D1**, 1376.
- BJORKEN, J.D. / PASCHOS, E.A., **1969**: Inelastic Electron–Proton and γ –Proton Scattering and the Structure of the Nucleon, Phys. Rev. **185**, 1975.
- BODWIN, G., **1985**: Factorization of the Drell–Yan cross section in perturbation theory, Phys. Rev. **D31**, 2616.
- BODWIN, G., **1986**: Factorization of the Drell–Yan cross section in perturbation theory, Phys. Rev. **D34 (E)**, 3932.
- BOGOLIUBOV, N.N. / SHIRKOV, D.V., **1959**: Introduction to the Theory of Quantized Fields, in: R.E. Marshak (Hrsg.), Interscience Monographs in Physics and Astronomy, Vol. III. Interscience Publishers, New York/London.
- BOLLINI, C.G. / GIAMBIAGI, J.J., **1972**: Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter, Nuovo Cim. **B12**, 20–26.
- BREAKSTONE, A. ET AL., **1984**: A measurement of $\bar{p}p$ and pp elastic scattering at ISR energies, Nucl. Phys. **B248**, 253.
- BROADHURST, D.J., **1993**: Large N expansion of QED: asymptotic photon propagator and contributions to the muon anomaly for any number of loops, Z. Phys. **C58**, 339.
- BROADHURST, D.J. / KATAEV, A.L., **1993**: Connections between deep–inelastic and annihilation processes at next–to–next–to–leading order and beyond, Phys. Lett. **B315**, 179.

- BRODSKY, S.J. / LEPAGE, G.P. / MACKENZIE, P.B., **1983**: On the elimination of scale ambiguities in perturbative quantum chromodynamics, Phys. Rev. **D28**, 228.
- BRONSTEIN, I.N. / SEMENDJAJEW, K.A., **1985**: Taschenbuch der Mathematik, hrsg. v. G. Grosche, V. Ziegler, D. Ziegler. Nauka und Teubner, Moskau/Leipzig, 22. Aufl.
- BROWN, C.N. ET AL., **1989**: Dimuon Production in 800-GeV Proton-Nucleus Collisions, Phys. Rev. Lett. **63**, 2637.
- BURKHARDT, H. / COTTINGHAM, W.N., **1970**: Sum rules for Forward Virtual Compton Scattering, Ann. Phys **56**, 453.
- CALLAN, C.G., **1970**: Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory, Phys. Rev. **D2**, 1541.
- CALLAN, C.G. / GROSS, D.J., **1969**: High-Energy Electroproduction and the constitution of the electric current, Phys. Rev. Lett. **22**, 156.
- CHOI, S. / HATSUDA, T. / KOIKE, Y. / LEE, SU H., **1993**: Twist-4 matrix elements of the nucleon from recent DIS data at CERN and SLAC, Phys. Lett. **B312**, 351.
- COLEMAN, S. / GROSS, D.J., **1973**: Price of Asymptotic Freedom, Phys. Rev. Lett. **31**, 851.
- COLLINS, J.C., **1980**: Intrinsic transverse momentum: Nongauge theories, Phys. Rev. **D21**, 2962-2978.
- COLLINS, J.C., **1985**: Renormalization. Cambridge University Press, Cambridge u.a.
- COLLINS, J.C., **1993**: Hard scattering in QCD with polarized beams, Nucl. Phys. **B394**, 169-199.
- COLLINS, J.C. / SOPER, D.E., **1982**: Parton Distribution and Decay Functions, Nucl. Phys. **B194**, 445-492.
- COLLINS, J.C. / SOPER, D.E. / STERMAN, GEORGE, **1985**: Factorization for Short Distance Hadron-Hadron Scattering, Nucl. Phys. **B261**, 104.
- COLLINS, J.C. / SOPER, D.E. / STERMAN, GEORGE, **1988**: Soft Gluons and Factorization, Nucl. Phys. **B308**, 833.
- COLLINS, J.C. / SOPER, D.E. / STERMAN, GEORGE, **1989**: Factorization of hard processes in QCD, in: A.H. Mueller (Hrsg.), Advanced series on directions in

- high energy physics, Bd. 5: *Perturbative Quantum Chromodynamics*. World Scientific, Singapore u.a., S. 1–92.
- CRAIGIE, N.S. / HIDAKA, K. / JACOB, M. / RENARD, F.M., **1983**: Spin Physics at short distances, *Phys. Rep.* **99**, 69–236.
- DASGUPTA, M. / WEBBER, B.R., **1996**: Power Corrections and Renormalons in Deep Inelastic Structure Functions, *Phys. Lett.* **B382**, 273–281.
- DASU, S. ET AL., **1988**: Precision measurement of $R=\sigma_L/\sigma_T$ and F_2 in Deep-Inelastic Electron Scattering, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 1061.
- DASU, S. ET AL., **1994**: Measurement of kinematic and nuclear dependence of $R=\sigma_L/\sigma_T$ in deep inelastic electron scattering, *Phys. Rev.* **D49**, 5641–5670.
- DOKSHITSER, Y.L. / URALTSEV, N.G., **1996**: Are IR renormalons a good probe for the strong interaction domain?, *Phys. Lett.* **B380**, 141–150.
- DOKSHITZER, Y.L. / MARCHESINI, G. / WEBBER, B.R., **1996**: Dispersive approach to power-behaved contributions in QCD hard processes, *Nucl.Phys.* **B469**, 93–142.
- DRELL, S.D. / YAN, T.M., **1970**: Massive Lepton–Pair Production in Hadron–Hadron Collisions at high Energies, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 316.
- DRELL, S.D. / YAN, T.M., **1971**: Partons and Their Applications at High Energies, *Ann. Phys.* **66**, 578.
- DUKE, D.W. / KIMEL, J.D. / SOWELL, G.A., **1982**: Fourth–order quantum–chromodynamic corrections to the longitudinal coefficient function in deep–inelastic scattering, *Phys. Rev.* **D25**, 71–83.
- E710 COLLABORATION, **1990**: Antiproton–proton elastic scattering at $s^{1/2}=1.8$ TeV for $|t|=0.03.4$ to 0.65 (GeV/c)², *Phys. Lett.* **B247**, 127.
- EHRNSPERGER, B., **1995**: Die Spinstruktur des Protons. Dissertation Frankfurt am Main.
- EHRNSPERGER, B. / MANKIEWICZ, L. / SCHÄFER, ANDREAS, **1994**: OPE analysis for polarized deep inelastic scattering, *Phys. Lett.* **B323**, 439–445.
- ELLIS, J. / GARDI, E. / KARLINER, M. / SAMUEL, M.A., **1996**: Padé Approximants, Borel Transforms and Renormalons: the Bjorken Sum Rule as a Case Study, *Phys. Lett.* **B366**, 268.
- ELLIS, J. / JAFFE, R.L., **1974a**: Sum rule for deep–inelastic electroproduction from polarized protons, *Phys. Rev.* **D9**, 1444.

- ELLIS, J. / JAFFE, R.L., **1974b**: Sum rule for deep-inelastic electroproduction from polarized protons, *Phys. Rev.* **D10** (E), 1669.
- EMC (EUROPEAN MUON COLLABORATION), **1989**: An Investigation of the Spin Structure of the Proton in Deep Inelastic Scattering of Polarized Muons on Polarized Protons, *Nucl. Phys.* **B328**, 1.
- FEYNMAN, R.P., **1969**: Very High-Energy Collisions of Hadrons, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1415.
- FEYNMAN, R.P., **1972**: Photon-Hadron Interactions. W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts.
- GEHRMANN, T. / STIRLING, W.J., **1996**: Polarized Parton Distributions in the Nucleon, *Phys. Rev.* **D53**, 6100–6109.
- GÖCKELER, M. / HORSLEY, R. / ILGENFRITZ, E.-M. / PERLT, H. / RAKOW, P. / SCHIERHOLZ, G. / SCHILLER, A., **1997**: Lattice computation of structure functions, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B53**, 81–87.
- GOLDSTEIN, G.R., **1976**: Optimally Simple Connection between the Reaction Matrix and the Observables, *Ann. Phys.* **98**, 128.
- GOLDSTEIN, G.R., **1982**: Symmetry Constraints in Optimal Polarization Formalism with an Application to p-p Scattering, *Ann. Phys.* **142**, 219.
- GOLDSTEIN, G.R. / JAFFE, R.L. / JI, XIANGDONG, **1995**: Soffer's inequality, *Phys. Rev.* **D52**, 5006.
- GOLDSTEIN, G.R. / MORAVCSIK, M.J., **1989**: Photons in the Transversity System, *Ann. Phys.* **195**, 213.
- GRACEY, J.A., **1992**: Quantum Electrodynamics at $O(1/N_f^2)$ in arbitrary dimensions, *Mod. Phys. Lett.* **A7**, 1945–1951.
- GRACEY, J.A., **1993a**: Algorithm for computing the β function of quantum electrodynamics in the large N_f expansion, *Int. J. Mod. Phys.* **A8**, 2465–2485.
- GRACEY, J.A., **1993b**: Electron mass anomalous dimension at $O(1/N_f^2)$ in quantum electrodynamics, *Phys. Lett.* **B317**, 415–420.
- GRACEY, J.A., **1993c**: Quark, gluon and ghost anomalous dimensions at $O(1/N_f)$ in quantum chromodynamics, *Phys. Lett.* **B318**, 177–183.
- GRACEY, J.A., **1995**: Large N_f methods for computing the perturbative structure of deep inelastic scattering, *AIHENP* 259–264.
- GRACEY, J.A., **1996a**: Renormalization group functions of QCD in large N_f , hep-

- ph/9609164.
- GRACEY, J.A., **1996b**: Anomalous dimensions of operators in polarized deep inelastic scattering at $O(1/N_f)$, Nucl. Phys. **B480**, 73–98.
- GRACEY, J.A., **1996c**: The QCD β -function at $O(1/N_f)$, Phys. Lett. **B373**, 178–184.
- GRADSTEIN / RYSHIK, **1981**: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main, **1**.
- GRUNBERG, G., **1996**: Renormalons and perturbative fixed points, Phys. Lett. **B372**, 121.
- GUPTA, S. / MUELLER, A.H., **1979**: High-energy predictions in quantum chromodynamics, Phys. Rev. **D20**, 118.
- H1 COLLABORATION, **1995**: A measurement of the proton structure function $F_2(x, Q^2)$, Nucl. Phys. **B439**, 471–502.
- IOFFE, B.L. / KHODJAMIRIAN, A., **1995**: Calculation of chirality-violating proton structure function $h_1(x)$ in QCD, Phys. Rev. **D51**, 3373–3380.
- IOFFE, B.L. / KHOZE, V.A. / LIPATOV, L.N., **1984**: Hard Processes. North Holland, Amsterdam.
- ITZYKSON, C. / ZUBER, J.-B., **1980**: Quantum Field Theory. McGraw-Hill, New York u.a.
- JAFFE, R.L., **1996**: Spin, twist and hadron structure in deep inelastic processes, hep-ph/9602236 Talk given at Ettore Majorana International School of Nucleon Structure: 1st Course: The Spin Structure of the Nucleon, Erice, Italy 1995.
- JAFFE, R.L. / JI, XIANGDONG, **1991**: Chiral-odd parton distributions and polarized Drell-Yan processes, Phys. Rev. Lett. **67**, 552–555.
- JAFFE, R.L. / JI, XIANGDONG, **1992**: Chiral-odd parton distributions and Drell-Yan processes, Nucl. Phys. **B375**, 527.
- JAFFE, R.L. / SOLDATE, M., **1981**: Twist-4 in the QCD analysis of lepton production, Phys. Lett. **B105**, 467.
- JOACHAIN, C.J., **1987**: Quantum Collision Theory. North Holland, Amsterdam u.a., 3. Aufl.
- JONES, D.R.T., **1974**: Two-Loop Diagrams in Yang-Mills Theory, Nucl. Phys. **B75**, 531–538.

- KODAIRA, J. / MATSUDA, S. / MUTA, T. / UEMATSU, T. / SASAKI, K., **1979**: Quantum–chromodynamic effects in polarized electroproduction, Phys. Rev. **D20**, 627.
- LARIN, S.A. / RITBERGEN, T. VAN / VERMASEREN, J.A.M., **1994**: The next–next–to–leading QCD approximation for non–singlet moments of deep inelastic structure functions, Nucl. Phys. **B427**, 41–52.
- LARIN, S.A. / TKACHOV, F.V. / VERMASEREN, J.A.M., **1991**: α_s^3 Correction to the Bjorken Sum Rule, Phys. Rev. Lett. **66**, 862–863.
- LARIN, S.A. / VERMASEREN, J.A.M., **1991**: The α_s^3 corrections to the Bjorken sum rule for polarized electroproduction and to the Gross–Llewellyn Smith sum rule, Phys. Lett. **B259**, 345–352.
- LARIN, S.A. / VERMASEREN, J.A.M., **1993**: Two–loop QCD corrections to the coefficient functions of deep inelastic structure functions F_2 and F_L , Z. Phys. **C57**, 93–97.
- LEE, S.H., **1994**: Contribution of Quark–Mass–Dependent Operators to Higher Twist Effects in DIS, Phys.Rev. **D49**, 2242–2246.
- LEIBBRANDT, G., **1975**: Introduction to the Technique of Dimensional Regularization, Rev. Mod. Phys. **47**, 849–876.
- LICHTENBERG, D.B., **1970**: Unitary Symmetry and elementary Particles. Academic Press, New York/London.
- LOVETT–TURNER, C.N. / MAXWELL, C.J., **1995**: All–Orders Renormalon Resummations for some QCD Observables, Nucl. Phys. **B452**, 188.
- MAIANI, L. / MARTINELLI, G. / SACHRAJDA, C.T., **1992**: Nonperturbative subtractions in the heavy quark effective field theory, Nucl.Phys. **B368**, 281.
- MARTINELLI, G. / SACHRAJDA, C.T., **1995**: Renormalons and the heavy quark effective theory, Phys. Lett. **B354**, 423.
- MEYER–HERMANN, M. / MAUL, M. / MANKIEWICZ, L. / STEIN, E. / SCHÄFER, A., **1996**: IR Renormalon Contribution to the Polarized Structure Function g_1 , Phys. Lett. **B383**, 463–469.
- MEYER–HERMANN, M. / MAUL, M. / MANKIEWICZ, L. / STEIN, E. / SCHÄFER, A., **1997**: IR Renormalon Contribution to the Polarized Structure Function g_1 , Phys. Lett. **B393 (E)**, 487.
- MEYER–HERMANN, M. / SCHÄFER, A., **1997**: The Chiral–Odd Distribution Func-

- tion h_1 : IR-Renormalon Contribution and α_s -Correction, to be published.
- MOTT, N.F., **1930**: Proc. Roy. Soc. **A126**, 259.
- MUELLER, A.H., **1985**: On the Structure of Infrared Renormalons in Physical Processes at High Energies, Nucl. Phys. **B250**, 327–350.
- MUELLER, A.H., **1993**: The QCD perturbation series, in: P.M. Zerwas, H.A. Kastrup (Hrsg.), QCD – 20 years later, Aachen 6/1992. World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, S. 162–171.
- MUTA, T., **1987**: Foundations of Quantum Chromodynamics. An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories. World Scientific, Singapore.
- NACHTMANN, O., **1990**: Elementary Particle Physics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- NEUBERT, M., **1995**: Scale setting in QCD and the momentum flow in Feynman diagrams, Phys. Rev. **D51**, 5924–5941.
- NMC (NEW MUON COLLABORATION), **1995**: Measurement of the proton and the deuteron structure functions F_2^p and F_2^d , Phys. Lett. **B364**, 107–115.
- NMC (NEW MUON COLLABORATION), **1997a**: Measurement of the proton and the deuteron structure functions, F_2^p and F_2^d , and of the ratio σ_L/σ_T , Nucl. Phys. **B483**, 3–43.
- NMC (NEW MUON COLLABORATION), **1997b**: Accurate Measurement of F_2^d/F_2^p and R^d-R^p , Nucl. Phys. **B487**, 3–26.
- PARISI, G., **1978**: Singularities of the Borel Transform in Renormalizable Theories, Phys. Lett. **B76**, 65.
- PARISI, G., **1979**: On Infrared Divergences, Nucl. Phys. **B150**, 163.
- PASCUAL, P. / TARRACH, R., **1984**: QCD: Renormalization for the Practitioner. Springer, Berlin u.a.
- PAULI, W. / VILLARS, F., **1949**: On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory, Rev. Mod. Phys. **21**, 434–444.
- POKORSKI, S., **1990**: Gauge Field Theories. Cambridge University Press, Cambridge, 3. Aufl.
- RALSTON, J. / SOPER, D.E., **1979**: Production of dimuons from high-energy polarized proton–proton collisions, Nucl. Phys. **B152**, 109.
- REMMERT, R., **1984**: Funktionentheorie I. Springer, Berlin u.a.

- ROBERTS, R.G., **1990**: The structure of the proton. Cambridge University Press, Cambridge.
- SÁNCHEZ GUILLEN, J. ET AL., **1991**: Next-to-leading order analysis of the deep inelastic $R=\sigma_L/\sigma_T$, Nucl. Phys. **B353**, 337–345.
- SCHWINGER, JULIAN, **1970**: Particles, Sources and Fields. Addison–Wesley, Reading (Massachusetts) u.a., **Vol. I**.
- SCHWINGER, JULIAN, **1973**: Particles, Sources and Fields. Addison–Wesley, Reading (Massachusetts) u.a., **Vol. II**.
- SHIFMAN, M.A. / VAINSHTEIN, A.I. / ZAKHAROV, V.I., **1979a**: QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations, Nucl. Phys. **B147**, 385–447.
- SHIFMAN, M.A. / VAINSHTEIN, A.I. / ZAKHAROV, V.I., **1979b**: QCD and Resonance Physics. Applications, Nucl. Phys. **B147**, 448–518.
- SHURYAK, E.V. / VAINSHTEIN, A.I., **1982**: Theory of power corrections to deep inelastic scattering in quantum chromodynamics (I). Q^2 -effects, Nucl. Phys. **B199**, 451.
- SLAC E80, **1976**: Deep Inelastic Scattering of Polarized Electrons by Polarized Protons, Phys. Rev. Lett. **37**, 1261.
- SLAC E80, **1978**: Deep–Inelastic e–p Asymmetry Measurements and Comparison with the Bjorken Sum Rule and Models of Proton Spin Structure, Phys. Rev. Lett. **41**, 70.
- SLAC E130, **1983**: New Measurement of Deep–Inelastic e–p Asymmetries, Phys. Rev. Lett. **51**, 1135.
- SLAC E143, **1995a**: Precision Measurement of the Deuteron Spin Structure Function g_1^d , Phys. Rev. Lett. **75**, 25–28.
- SLAC E143, **1995b**: Precision Measurement of the Proton Spin Structure Function g_1^p , Phys. Rev. Lett. **74**, 346–350.
- SLAC E143, **1995c**: Measurement of the Q^2 –Dependence of the Proton and Deuteron Spin Structure Functions g_1^p and g_1^d , Phys. Lett. **B364**, 61–68.
- SLAC E143, **1996**: Measurements of the Proton and Deuteron Spin Structure Funktion g_2 and Asymmetry A_2 , Phys. Rev. Lett. **76**, 587–591.
- SLAC E140X, **1996**: Precision measurement of $R=\sigma_L/\sigma_T$ on hydrogen, deuterium, and beryllium targets in deep inelastic electron scattering, Z. Phys. **C70**, 387–390.

- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1993**: Measurement of the spin-dependent structure function $g_1(x)$ of the deuteron, Phys. Lett. **B302**, 533.
- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1994a**: Measurement of the spin-dependent structure funktion $g_1(x)$ of the proton, Phys. Lett. **B329**, 399–406.
- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1994b**: Measurement of the spin-dependent structure funktion $g_1(x)$ of the proton, Phys. Lett. **B339 (E)**, 332–333.
- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1994c**: Spin asymmetry in muon–proton deep inelastic scattering on a transversely–polarized target, Phys. Lett. **B336**, 125–130.
- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1995**: A new measurement of the spin-dependent structure function $g_1(x)$ of the deuteron, Phys. Lett. **B357**, 248–254.
- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1997a**: Spin Structure of the Proton from Polarized Inclusive Deep Inelastic Muon–Proton Scattering, hep-ex–9702005.
- SMC (SPIN MUON COLLABORATION), **1997b**: The Spin Dependent Structure Function $g_1(x)$ of the Deuteron from Polarized Deep Inelastic Muon Scattering, Phys. Lett. **B396**, 338–348.
- SOFFER, J., **1995**: Positivity Constraints for Spin–Dependent Parton Distributions, Phys. Rev. Lett. **74**, 1292.
- STEIN, E. / GÓRNICKI, P. / MANKIEWICZ, L. / SCHÄFER, A., **1995**: QCD sum rule calculation of twist–4 corrections to Bjorken and Ellis–Jaffe sum rules, Phys. Lett. **B353**, 107.
- STEIN, E. / MEYER–HERMANN, M. / MANKIEWICZ, L. / SCHÄFER, A., **1996**: IR–Renormalon Contribution to the Longitudinal Structure Function F_L , Phys. Lett. **B376**, 177–185.
- STERMAN, G., **1994**: Quantum Field Theory. Cambridge University Press, Cambridge.
- STRATMANN, M., **1993**: Bag model predictions for polarized structure functions and their Q^2 –evolutions, Z. Phys. **C60**, 763.
- SYMANZIK, K., **1970**: Small distance behaviour in Field Theory and power counting, Comm. Math. Phys. **18**, 227.
- TANGERMAN, R.D. / MULDER, P.J., **1995**: Intrinsic transverse momentum and the polarized Drell–Yan process, Phys. Rev. **D51**, 3357–3372.
- TAYLOR, J.C., **1976**: Gauge Theories of Weak Interactions. Cambridge University

- Press.
- T'HOOFT, G., **1974**: A Planar Diagram Theory for Strong Interactions, Nucl. Phys. **B72**, 461.
- T'HOOFT, G., **1977**: in: A. Zichichi (Hrsg.), The whys of subnuclear physics, Erice 1977. New York.
- T'HOOFT, G. / VELTMAN, M., **1972a**: Regularization and Renormalization of Gauge Fields, Nucl. Phys. **B44**, 189–213.
- T'HOOFT, G. / VELTMAN, M., **1972b**: Combinatorics of Gauge Fields, Nucl. Phys. **B50**, 318.
- VASILIEV, A.N. / PISMAK, Y.M. / HONKONEN, Y.R., **1981a**: $1/n$ Expansion: Calculation of the Exponent η and ν in the order $1/n^2$ for Arbitrary Number of Dimensions, Theor. Math. Phys. **47**, 465–475, Übersetzt aus Teor. Mat. Fiz. 47 (1981), 291.
- VASILIEV, A.N. / PISMAK, Y.M. / HONKONEN, Y.R., **1981b**: Simple Method of Calculating the Critical Indices in the $1/n$ Expansion, Theor. Math. Phys. **46**, 104–113, Übersetzt aus Teor. Mat. Fiz. 46 (1981), 157.
- WEINBERG, S., **1996**: The Quantum Theory of Fields. Cambridge University Press, Cambridge, **2**.
- WHITLOW, L.W. ET AL., **1990**: A precise extraction of $R=\sigma_L/\sigma_T$ from a global analysis of the SLAC deep inelastic e–p and e–d scattering cross sections, Phys. Lett. **B250**, 193.
- WHITLOW, L.W. ET AL., **1992**: Precise measurements of the proton and deuteron structure functions from a global analysis of the SLAC deep inelastic electron scattering cross sections, Phys. Lett. **B282**, 475–482.
- WICK, G.C., **1950**: The Evaluation of the Collision Matrix, Phys. Rev. **80**, 268.
- WILSON, K.G., **1969**: Non-Lagrangian Models of Current Algebra, Phys. Rev. **179**, 1499–1512.
- WITTEN, E., **1979**: Baryons in the $1/N$ Expansion, Nucl. Phys. **B160**, 57.
- YANG, U.K. ET AL., **1996**: A measurement of $R=\sigma_L/\sigma_T$ in deep inelastic neutrino–nucleon scattering at the Tevatron, J. Phys. **G22**, 775–780.
- YNDURÁIN, F.J., **1993**: The Theory of Quark and Gluon Interactions. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Aufl.
- YOH, J.K. ET AL., **1978**: Study of Scaling in Hadronic Production of Dimuons,

Phys. Rev. Lett. **41**, 684.

ZAKHAROV, V.I., **1992**: QCD perturbative expansions in large orders, Nucl. Phys. **B385**, 452–480.

ZEUS COLLABORATION, **1996a**: Measurement of the Proton Structure Funktion F_2 at Low x and Low Q^2 at HERA, Z. Phys. **C69**, 607–620.

ZEUS COLLABORATION, **1996b**: Measurement of the F_2 Structure Funktion in Deep Inelastic e^+P Scattering using 1994 Data from the ZEUS Detector at HERA, Z. Phys. **C72**, 399–424.

ZIJLSTRA, E.B. / NEERVEN, W.L. VAN, **1992**: Order- α_s^2 QCD corrections to the deep inelastic proton structure functions F_2 and F_L , Nucl. Phys. **B383**, 525–574.

ZINN–JUSTIN, J., **1990**: Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Clarendon Press, Oxford u.a.

Danksagung

Ich bedanke mich bei meinem akademischen Lehrer Prof. Dr. Andreas Schäfer für die langjährige und konstante Betreuung dieser Arbeit. Seine physikalische Intuition, mit der er den abstraktesten Formalismen einen physikalischen Inhalt entnehmen konnte, waren mir stets ein Beispiel. Seine vielfältigen Kontakte gaben mir die Möglichkeit zu einer Reihe von Vorträgen und zur Teilnahme an Tagungen.

Mein Dank gilt auch Prof. Dr. Dr. hc. mult. Walter Greiner, der mich früh in sein Institut aufgenommen und mich stetig über lange Jahre hinweg gefördert hat. Meine Arbeit für ihn als Tutor in den die Grundvorlesungen begleitenden Übungen hat mir viel Freude gemacht und eine große Erfahrung in der Vermittlung von Physik gegeben.

Ich möchte mich bei allen Kollegen unserer Arbeitsgruppe für die gute Zusammenarbeit und die wertvollen Diskussionen bedanken. Damit spreche in erster Linie Stefan Hofmann und Dr. Eckart Stein und weiterhin Christoph Best, Dr. Bruno Ehrnsperger, Philipp Högler, Benedikt Lehmann-Drohnke, Oliver Martin, Martin Maul und Zoltan Palmer an. Außerdem möchte ich meinen Freunden und Zimmerkollegen Stefan Hofmann, Philipp Högler und Zoltan Palmer für die vielen Gespräche und Aufmunterungen danken.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau Ulrike Ruttman, meinen Eltern, meinen Schwiegereltern und meinem Freund Johannes Süßmann, die mir ein sehr gutes Umfeld für das Gelingen dieser Arbeit geschaffen haben und mir nach fachlichen und menschlichen Rückschlägen immer eine große Stütze gewesen sind.