

Supplementary Material:

Article Title A verified Petri model for the metabolism of *Arabidopsis thaliana*: application of network decomposition and network reduction

Ina Koch^{*1}, Joachim Nöthen¹ and Enrico Schleiff, ¹ Shared first authorship

*Correspondence:

Ina Koch, Enrico Schleiff

ina.koch@bioinformatik.uni-frankfurt.de, schleiff@bio.uni-frankfurt.de

First Author 2: joachim.noethen@gmx.de

1 SUPPLEMENTARY TABLES

Supplementary Table 1. Table of reductions. *RT* = reduction type (*CTP* = Common Transition Pair, *ITP* = Invariant Transition Pair, *Parallel* = reduction of parallel transitions, *?*, reduced node = the name of the node after the reduction. The columns t_i/p_i , $pc/t_i, t_j$, and t_j/p_j show t_i , pc , and t_j , if the reduction type is *CTP*, and p_i , t_i and t_j , and p_j , if the reduction type is *ITP* or *Parallel*. The column reduced node holds a transition, if the reduction type is *CTP*, and a place, if the reduction type is *ITP*.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
CTP	E151	→ 87	→ E152	ctp(E151 + E152)
CTP	E23	→ 88	→ E41	ctp(E23 + E41)
CTP	E30	→ 84	→ E31	ctp(E30 + E31)
CTP	ctp(E30+E31)	→ 83	→ E32	ctp(ctp(E30 + E31) + E32)
CTP	R5_2	→ 81	→ R3	ctp(R5_2 + R3)
CTP	R5_1	→ 86	→ ctp(R5_2 + R3)	ctp(R5_1 + ctp(R5_2 + R3))
CTP	E5	→ 53	→ E4	ctp(E5 + E4)
CTP	E129_2	→ 64	→ E128	ctp(E129_2 + E128)
CTP	E122	→ 14	→ E123	ctp(E122 + E123)
CTP	E42	→ 117	→ E43	ctp(E42 + E43)
CTP	E61_119	→ 120	→ E61_80	ctp(E61_119 + E61_80)
CTP	E44	→ 119	→ ctp(E61_119 + E61_80)	ctp(E44 + ctp(E61_119 + E61_80))
CTP	ctp(E42 + E43)	→ 118	→ ctp(E44 + ctp(E61_119 + E61_80))	ctp(ctp(E42 + E43) + ctp(E44 + ctp(E61_119 + E61_80)))
CTP	E132	→ 124	→ E137	ctp(E132 + E137)
CTP	ctp(E132 + E137)	→ 125	→ E138	ctp(ctp(E132 + E137) + E138)
CTP	E98	→ 11	→ E99	ctp(E98 + E99)
CTP	E140	→ 26	→ E141	ctp(E140 + E141)
CTP	E135	→ 1	→ E40	ctp(E135 + E40)
CTP	E117	→ 91	→ E116	ctp(E117 + E116)
CTP	E112	→ 114	→ E115	ctp(E112 + E115)
CTP	ctp(E117 + E116)	→ 113	→ OUT_113	ctp(ctp(E117 + E116)+OUT_113)
CTP	E64	→ 36	→ E65	ctp(E64 + E65)
CTP	ctp(E135 + E40)	→ 25	→ E136	ctp(ctp(E135 + E40) + E136)
CTP	E69	→ 103	→ E70	ctp(E69 + E70)

Supplementary Table 2. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
CTP	E67	→ 96	→ E68	ctp(E67 + E68)
CTP	ctp(E67 + E68)	→ 97	→ ctp(E69 + E70)	ctp(ctp(E67 + E68) + ctp(E69 + E70))
CTP	E83	→ 7	→ E84	ctp(E83 + E84)
CTP	E82_90	→ 90	→ E81_90	ctp(E82_90 + E81_90)
CTP	E82_111	→ 111	→ E81_111	ctp(E82_111 + E81_111)
CTP	E81_100	→ 100	→ ctp(E82_90 + E81_90)	ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))
CTP	E81_104	→ 104	→ ctp(E82_111 + E81_111)	ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111))
CTP	E79	→ 112	→ E80	ctp(E79+E80)
CTP	E36.f	→ 75	→ E36.b	ctp(E36.f + E36.b)
CTP	E95	→ 55	→ OUT_55_ sinapate–esther–synthesis	ctp(E95 + OUT_55_ sinapate–esther–synthesis)
CTP	E86_31	→ 31	→ E87_48	ctp(E86_31 + E87_48)
CTP	E88_19	→ 30a	→ OUT_30a	ctp(E88_19 + OUT_30a)
CTP	ctp(E83 + E84)	→ 17	→ E85	ctp(ctp(E83+E84) + E85)
CTP	E86_133	→ 133	→ E87_134	ctp(E86_133 + E87_134)
CTP	E88_48	→ 30b	→ OUT_30b	ctp(E88_48 + OUT_30b)
CTP	E74	→ 99	→ OUT_99	ctp(E74 + OUT_99)
ITP	130 130	→ E143.f ← E143.b	→ 78 ← 78	itp(130 + 78) itp(130 + 78)
ITP	82 82	→ E20.f ← E20.b	→ 77 ← 77	itp(82 + 77) itp(82 + 77)
ITP	76 76	→ E24.f ← E24.b	→ 50 ← 50	itp(76 + 50) itp(76 + 50)
ITP	69	→ E34.b	→ 56	itp(69 + 56)
ITP	69	← E34.f	← 56	itp(69 + 56)
ITP	49	→ spo_b	→ itp(69 + 56)	itp(49 + itp(69 + 56))
ITP	49	← spo_f	← itp(69 + 56)	itp(49 + itp(69 + 56))
ITP	itp(49 + itp(69 + 56))	→ E8.f	→ 44	itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44)
ITP	itp(49 + itp(69 + 56))	← E8.b	← 44	itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44)

Supplementary Table 3. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
ITP	itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44)	→ E9_f	→ itp(76 + 50)	itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50))
		← E9_b	← itp(76 + 50)	
ITP	itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50))	→ R6_f	→ 89	itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89)
		← R6_b	← 89	
ITP	itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89)	→ E16	→ 43	itp(itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) + 43) itp(itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) + 43)
		← E15	← 43	
ITP	68 68	→ E13_f	→ 42	itp(68 + 42) itp(68 + 42)
		← E13_b	← 42	
ITP	itp(68 + 42) itp(68 + 42)	→ E91_f	→ 41	itp(itp(68 + 42) + 41) itp(itp(68 + 42) + 41)
		← E91_b	← 41	
ITP	itp(itp(68 + 42) + 41) itp(itp(68 + 42) + 41)	→ E90_f	→ 40	itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40)
		← E90_b	← 40	
ITP	45 45	→ E148_f	→ 52	itp(45 + 52) itp(45 + 52)
		← E148_b	← 52	
ITP	itp(itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) + 43) itp(itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) + 43)	→ E6_f	→ 54	itp(itp(itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) + 43) + 54) itp(itp(itp(itp(itp(itp(49 + itp(69 + 56)) + 44) + itp(76 + 50)) + 89) + 43) + 54)
		← E6_b	← 54	
ITP	itp(45 + 52) itp(45 + 52)	→ E3_b	→ 46	itp(itp(45 + 52) + 46) itp(itp(45 + 52) + 46)
		← E3_f	← 46	
ITP	itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40)	→ E89_f	→ 39	itp(itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) + 39) itp(itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) + 39)
		← E89_b	← 39	
ITP	129 129	→ E139_u_ttod	→ 115	itp(129 + 115) itp(129 + 115)
		← E144_u	← 115	
ITP	itp(129 + 115) itp(129 + 115)	→ E139_u_dtom	→ 80	itp(itp(129 + 115) + 80) itp(itp(129 + 115) + 80)
		← E62_u	← 80	
ITP	126 126	→ E35_u	→ itp(itp(129 + 115) + 80)	itp(126 + itp(itp(129 + 115) + 80)) itp(126 + itp(itp(129 + 115) + 80))
		← E120_u	← itp(itp(129 + 115) + 80)	
ITP	128 128	→ E139_c_dtom	→ 123	itp(128 + 123) itp(128 + 123)
		← E62_c	← 123	
ITP	122 122	→ E139_c_ttod	→ itp(128 + 123)	itp(122 + itp(128 + 123)) itp(122 + itp(128 + 123))
		← E144_c	← itp(128 + 123)	
ITP	itp(122 + itp(128 + 123)) itp(122 + itp(128 + 123))	→ E120_c	→ 127	itp(itp(122 + itp(128 + 123)) + 127) itp(itp(122 + itp(128 + 123)) + 127)
		← E35_c	← 127	

Supplementary Table 4. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
ITP	12 12	→ E94_b ← E94_f	→ 8 ← 8	itp(12 + 8) itp(12 + 8)
ITP	itp(12 + 8) itp(12 + 8)	→ E93 ← E92	→ 34 ← 34	itp(itp(12 + 8) + 34) itp(itp(12 + 8) + 34)
ITP	itp(itp(12 + 8) + 34) itp(itp(12 + 8) + 34)	→ E111 ← E110	→ 20 ← 20	itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20)
ITP	6 6	→ E97_b ← E97_f	→ 4 ← 4	itp(6 + 4) itp(6 + 4)
ITP	itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20)	→ E96_b ← E96_f	→ itp(6 + 4) ← itp(6 + 4)	itp(itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) + itp(6 + 4)) itp(itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) + itp(6 + 4))
ITP	itp(itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) + itp(6 + 4)) itp(itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) + itp(6 + 4))	→ E63_f ← E63_b	→ itp(itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) + 39) ← itp(itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) + 39)	itp(itp(itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) + itp(6 + 4)) + itp(itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) + 39)) itp(itp(itp(itp(itp(12 + 8) + 34) + 20) + itp(6 + 4)) + itp(itp(itp(itp(68 + 42) + 41) + 40) + 39))
ITP	102 102	→ E66 101_b ← E66 101_f	→ 101 ← 101	itp(102 + 101) itp(102 + 101)
ITP	itp(102 + 101) itp(102 + 101)	→ E67 95_b ← E67 95_f	→ 95 ← 95	itp(itp(102 + 101) + 95) itp(itp(102 + 101) + 95)
ITP	37 37	→ E66 95_f ← E67 101_b	→ itp(102 + 101) + 95 ← itp(102 + 101) + 95	itp(37 + itp(itp(102 + 101) + 95)) itp(37 + itp(itp(102 + 101) + 95))
CTP	ctp(E64 + E65)	→ itp(37 + itp(itp(102 + 101) + 95))	→ ctp(ctp(E67 + E68) + ctp(E69 + E70))	ctp(ctp(E64 + E65) + ctp(ctp(E67 + E68) + ctp(E69 + E70)))
Parallel	47 47	→ ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111)) → ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))	→ 108 → 108	parallel(ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111))ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))) parallel(ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111))ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90)))
CTP	parallel(ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111)) + ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90)))	→ 108	→ ctp(ctp(E83 + E84) + E85)	ctp(parallel(ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111)) + ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))) + ctp(ctp(E83 + E84) + E85))

Supplementary Table 5. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
CTP	ctp(E79+E80)	→ 47	→ ctp(parallel(ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111)) + ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))) + ctp(ctp(E83 + E84) + E85))	ctp(ctp(E79 + E80) + ctp(parallel(ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111)) + ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))) + ctp(ctp(E83 + E84) + E85)))
CTP	E151	→ 87	→ E152	ctp(E151 + E152)
CTP	E23	→ 88	→ E41	ctp(E23 + E41)
CTP	E30	→ 84	→ E31	ctp(E30 + E31)
CTP	ctp(E30 + E31)	→ 83	→ E32	ctp(ctp(E30 + E31) + E32)
CTP	R5_2	→ 81	→ R3	ctp(R5_2 + R3)
CTP	R5_1	→ 86	→ ctp(R5_2 + R3)	ctp(R5_1 + ctp(R5_2 + R3))
CTP	E5	→ 53	→ E4	ctp(E5 + E4)
CTP	E129_2	→ 64	→ E128	ctp(E129_2 + E128)
CTP	E122	→ 14	→ E123	ctp(E122 + E123)
CTP	E42	→ 117	→ E43	ctp(E42 + E43)
CTP	E61_119	→ 120	→ E61_80	ctp(E61_119 + E61_80)
CTP	E44	→ 119	→ ctp(E61_119 + E61_80)	ctp(E44 + ctp(E61_119 + E61_80))
CTP	ctp(E42 + E43)	→ 118	→ ctp(E44 + ctp(E61_119 + E61_80))	ctp(ctp(E42 + E43) + ctp(E44 + ctp(E61_119 + E61_80)))
CTP	E132	→ 124	→ E137	ctp(E132 + E137)
CTP	ctp(E132 + E137)	→ 125	→ E138	ctp(ctp(E132 + E137) + E138)
CTP	E98	→ 11	→ E99	ctp(E98 + E99)
CTP	E140	→ 26	→ E141	ctp(E140 + E141)
CTP	E135	→ 1	→ E40	ctp(E135 + E40)
CTP	E117	→ 91	→ E116	ctp(E117 + E116)
CTP	E112	→ 114	→ E115	ctp(E112 + E115)
CTP	ctp(E117 + E116)	→ 113	→ OUT_113	ctp(ctp(E117 + E116) + OUT_113)
CTP	E64	→ 36	→ E65	ctp(E64 + E65)
CTP	ctp(E135 + E40)	→ 25	→ E136	ctp(ctp(E135 + E40) + E136)

Supplementary Table 6. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
CTP	E69	→ 103	→ E70	ctp(E69 + E70)
CTP	E67	→ 96	→ E68	ctp(E67 + E68)
CTP	ctp(E67 + E68)	→ 97	→ ctp(E69 + E70)	ctp(ctp(E67 + E68) + ctp(E69 + E70))
CTP	E83	→ 7	→ E84	ctp(E83 + E84)
CTP	E82_90	→ 90	→ E81_90	ctp(E82_90 + E81_90)
CTP	E82_111	→ 111	→ E81_111	ctp(E82_111 + E81_111)
CTP	E81_100	→ 100	→ ctp(E82_90 + E81_90)	ctp(E81_100 + ctp(E82_90 + E81_90))
CTP	E81_104	→ 104	→ ctp(E82_111 + E81_111)	ctp(E81_104 + ctp(E82_111 + E81_111))
CTP	E79	→ 112	→ E80	ctp(E79 + E80)
CTP	E36_f	→ 75	→ E36_b	ctp(E36_f + E36_b)
CTP	E95	→ 55	→ OUT_55_sinapate- esther-synthesis	ctp(E95 + OUT_55_sinapate- esther-synthesis)
CTP	E86_31	→ 31	→ E87_48	ctp(E86_31 + E87_48)
CTP	E88_19	→ 30a	→ OUT_30a	ctp(E88_19 + OUT_30a)
CTP	ctp(E83 + E84)	→ 17	→ E85	ctp(ctp(E83 + E84) + E85)
CTP	E86_133	→ 133	→ E87_134	ctp(E86_133 + E87_134)
CTP	E88_48	→ 30b	→ OUT_30b	ctp(E88_48 + OUT_30b)
CTP	E74	→ 99	→ OUT_99	ctp(E74 + OUT_99)
ITP	130 130	→ E143_f ← E143_b	→ 78 ← 78	itp(130 + 78) itp(130 + 78)
ITP	82 82	→ E20_f ← E20_b	→ 77 ← 77	itp(82 + 77) itp(82 + 77)
ITP	76 76	→ E24_f ← E24_b	→ 50 ← 50	itp(76 + 50) itp(76 + 50)
ITP	69 69	→ E34_b ← E34_f	→ 56 ← 56	itp(69 + 56) itp(69 + 56)
ITP	49 49	→ spo_b ← spo_f	→ itp(69 + 56) ← itp(69 + 56)	itp(49 + itp(69 + 56)) itp(49 + itp(69 + 56))

Supplementary Table 7. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
ITP	$\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56))$	\rightarrow E8.f	$\rightarrow 44$	$\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44)$
	$\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56))$	\leftarrow E8.b	$\leftarrow 44$	$\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44)$
ITP	$\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44)$	\rightarrow E9.f	$\rightarrow \text{itp}(76 + 50)$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69+56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50))$
	$\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44)$	\leftarrow E9.b	$\leftarrow \text{itp}(76 + 50)$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50))$
ITP	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50))$	\rightarrow R6.f	$\rightarrow 89$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76+50))+89)$
	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50))$	\leftarrow R6.b	$\leftarrow 89$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89)$
ITP	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89)$	\rightarrow E16	$\rightarrow 43$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89) + 43)$
	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89)$	\leftarrow E15	$\leftarrow 43$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89) + 43)$
ITP	68	\rightarrow E13.f	$\rightarrow 42$	$\text{itp}(68 + 42)$
	68	\leftarrow E13.b	$\leftarrow 42$	$\text{itp}(68 + 42)$
ITP	$\text{itp}(68 + 42)$	\rightarrow E91.f	$\rightarrow 41$	$\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41)$
	$\text{itp}(68 + 42)$	\leftarrow E91.b	$\leftarrow 41$	$\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41)$
ITP	$\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41)$	\rightarrow E90.f	$\rightarrow 40$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41) + 40)$
	$\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41)$	\leftarrow E90.b	$\leftarrow 40$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41) + 40)$
ITP	45	\rightarrow E148.f	$\rightarrow 52$	$\text{itp}(45 + 52)$
	45	\leftarrow E148.b	$\leftarrow 52$	$\text{itp}(45 + 52)$
ITP	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89) + 43)$	\rightarrow E6.f	$\rightarrow 54$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89) + 43) + 54)$
	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89) + 43)$	\leftarrow E6.b	$\leftarrow 54$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(49 + \text{itp}(69 + 56)) + 44) + \text{itp}(76 + 50)) + 89) + 43) + 54)$
ITP	$\text{itp}(45 + 52)$	\rightarrow E3.b	$\rightarrow 46$	$\text{itp}(\text{itp}(45 + 52) + 46)$
	$\text{itp}(45 + 52)$	\leftarrow E3.f	$\leftarrow 46$	$\text{itp}(\text{itp}(45 + 52) + 46)$
ITP	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41) + 40)$	\rightarrow E89.f	$\rightarrow 39$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41) + 40) + 39)$
	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41) + 40)$	\leftarrow E89.b	$\leftarrow 39$	$\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) + 41) + 40) + 39)$
ITP	129	\rightarrow E139.u_ttod	$\rightarrow 115$	$\text{itp}(129 + 115)$
	129	\leftarrow E144.u	$\leftarrow 115$	$\text{itp}(129 + 115)$

Supplementary Table 8. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(129 + 115) \\ \text{itp}(129 + 115) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E139_u_dtom} \\ \leftarrow \text{E62_u} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 80 \\ \leftarrow 80 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(129 + 115) + 80) \\ \text{itp}(\text{itp}(129 + 115) + 80) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 126 \\ 126 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E35_u} \\ \leftarrow \text{E120_} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{itp}(\text{itp}(129 + 115) + 80) \\ \leftarrow \text{itp}(\text{itp}(129 + 115) + 80) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(126 + \text{itp}(\text{itp}(129 + 115) + 80)) \\ \text{itp}(126 + \text{itp}(\text{itp}(129 + 115) + 80)) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 128 \\ 128 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E139_c_dtom} \\ \leftarrow \text{E62_c} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 123 \\ \leftarrow 123 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(128 + 123) \\ \text{itp}(128 + 123) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 122 \\ 122 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E139_c_ttod} \\ \leftarrow \text{E144_c} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{itp}(128 + 123) \\ \leftarrow \text{itp}(128 + 123) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(122 + \text{itp}(128 + 123)) \\ \text{itp}(122 + \text{itp}(128 + 123)) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(122 + \text{itp}(128 \\ + 123)) \\ \text{itp}(122 + \text{itp}(128 \\ + 123)) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E120_c} \\ \leftarrow \text{E35_c} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 127 \\ \leftarrow 127 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(122 + \text{itp}(128 + 123)) + 127) \\ \text{itp}(\text{itp}(122 + \text{itp}(128 + 123)) + 127) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E94_b} \\ \leftarrow \text{E94_f} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 8 \\ \leftarrow 8 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(12 + 8) \\ \text{itp}(12 + 8) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(12 + 8) \\ \text{itp}(12 + 8) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E93} \\ \leftarrow \text{E92} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 34 \\ \leftarrow 34 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) \\ \text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(12 + 8) \\ + 34) \\ \text{itp}(\text{itp}(12 + 8) \\ + 34) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E111} \\ \leftarrow \text{E110} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 20 \\ \leftarrow 20 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) + 20) \\ \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) + 20) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 6 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E97_b} \\ \leftarrow \text{E97_f} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 4 \\ \leftarrow 4 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(6 + 4) \\ \text{itp}(6 + 4) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 \\ + 8) + 34) + 20) \\ \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 \\ + 8) + 34) + 20) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E96_b} \\ \leftarrow \text{E96_f} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{itp}(6 + 4) \\ \leftarrow \text{itp}(6 + 4) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) \\ + 20) + \text{itp}(6 + 4)) \\ \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) \\ + 20) + \text{itp}(6 + 4)) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\\ 12 + 8) + 34) + \\ 20) + \text{itp}(6 + 4)) \\ \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\\ 12 + 8) + 34) + \\ 20) + \text{itp}(6 + 4)) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E63_f} \\ \leftarrow \text{E63_b} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) \\ + 41) + 40) + 39) \\ \leftarrow \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(68 + 42) \\ + 41) + 40) + 39) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) \\ + 20) + \text{itp}(6 + 4)) + \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\\ \text{itp}(68 + 42) + 41) + 40) + 39)) \\ \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(12 + 8) + 34) \\ + 20) + \text{itp}(6 + 4)) + \text{itp}(\text{itp}(\text{itp}(\\ \text{itp}(68 + 42) + 41) + 40) + 39)) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 102 \\ 102 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E66_101_b} \\ \leftarrow \text{E66_101_f} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 101 \\ \leftarrow 101 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(102 + 101) \\ \text{itp}(102 + 101) \end{array}$

Supplementary Table 9. Table of reductions. For the legend see Table 1.

RT	t_i/p_i	$pc/t_i, t_j$	t_j/p_j	Reduced vertex
ITP	$\begin{array}{l} \text{itp}(102 + 101) \\ \text{itp}(102 + 101) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E67_95_b} \\ \leftarrow \text{E67_95_f} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 95 \\ \leftarrow 95 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95) \\ \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95) \end{array}$
ITP	$\begin{array}{l} 37 \\ 37 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{E66_95_f} \\ \leftarrow \text{E67_101_b} \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95) \\ \leftarrow \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{itp}(37 + \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95)) \\ \text{itp}(37 + \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95)) \end{array}$
CTP	$\text{ctp}(\text{E64} + \text{E65})$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{itp}(37 + \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95)) \\ \leftarrow \text{itp}(37 + \text{itp}(\text{itp}(102 + 101) + 95)) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E67} + \text{E68}) + \text{ctp}(\text{E69} + \text{E70})) \\ \leftarrow \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E67} + \text{E68}) + \text{ctp}(\text{E69} + \text{E70})) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E64} + \text{E65}) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E67} + \text{E68}) + \text{ctp}(\text{E69} + \text{E70}))) \\ \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E64} + \text{E65}) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E67} + \text{E68}) + \text{ctp}(\text{E69} + \text{E70}))) \end{array}$
Parallel	$\begin{array}{l} 47 \\ 47 \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) \\ \rightarrow \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90})) \end{array}$	$\begin{array}{l} \rightarrow 108 \\ \rightarrow 108 \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111}))\text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) \\ \text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111}))\text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) \end{array}$
CTP	$\begin{array}{l} \text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) \\ + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) \end{array}$	$\rightarrow 108$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85}) \\ \leftarrow \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85}) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{ctp}(\text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85})) \\ \text{ctp}(\text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85})) \end{array}$
CTP	$\text{ctp}(\text{E79} + \text{E80})$	$\rightarrow 47$	$\begin{array}{l} \rightarrow \text{ctp}(\text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) \\ + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85})) \\ \leftarrow \text{ctp}(\text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) \\ + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85})) \end{array}$	$\begin{array}{l} \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E79} + \text{E80}) \text{ctp}(\text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85}))) \\ \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E79} + \text{E80}) \text{ctp}(\text{parallel}(\text{ctp}(\text{E81_104} + \text{ctp}(\text{E82_111} + \text{E81_111})) + \text{ctp}(\text{E81_100} + \text{ctp}(\text{E82_90} + \text{E81_90}))) + \text{ctp}(\text{ctp}(\text{E83} + \text{E84}) + \text{E85}))) \end{array}$