

Eigenschaften von kompakten Sternen  
in QCD motivierten Modellen

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften

Vorgelegt beim Fachbereich Physik  
der Johann Wolfgang Goethe - Universität  
in Frankfurt am Main

von

Matthias Hanauske  
aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main, 2004  
(DF1)

vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe - Universität  
als Dissertation angenommen.

Dekan: .....

Gutachter: .....

Datum der Dissertation: .....

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>1 Elementarteilchen Theorie</b>	<b>1</b>
1.1 Einführung . . . . .	1
1.2 Elementare Teilchen und Kräfte . . . . .	3
1.3 Eichtheoretische Formulierung der bekannten Kräfte . . . . .	6
1.4 Die QuantenCromoDynamik . . . . .	13
1.5 Heiße und hochdichte Materie . . . . .	16
<b>2 Allgemeinen Relativitätstheorie</b>	<b>23</b>
2.1 Einführung . . . . .	23
2.2 Formulierung der ART . . . . .	27
2.3 Astrophysikalische Folgerungen der ART . . . . .	33
<b>3 Kompakte Sterne</b>	<b>81</b>
3.1 Neutronensterne . . . . .	83
3.2 Quarksterne . . . . .	115
3.3 Hybride Sterne . . . . .	139
3.4 Zwillingsterne, Sternübergänge und der Gravitationskollaps .	171
3.5 Astrophysikalische Observablen des Quark-Gluon-Plasmas . .	188
<b>A Elementare Teilchen</b>	<b>191</b>
<b>B Vergleich: QCD <math>\Leftrightarrow</math> ART</b>	<b>193</b>
<b>C Beobachtungsgrößen von kompakten Sternen</b>	<b>197</b>



# Vorwort

In diesem Vorwort zu meiner Promotionsarbeit möchte ich zunächst einiges zur Geschichte der Physik erzählen, genauer zur

Geschichte der Elementarteilchenastrogravitationsphysik.

Die Geschichte der Physik, die sich heutzutage aus vielen Teilgebieten zusammensetzt, war früher bei Demokrid (ca. 400 v. Chr.) noch viel weniger untergliedert, und sogar gesamte Wissensgebiete (Fach-Bereiche) waren ineinander faden-ähnlich verwoben. Demokrid hatte die Vorstellung, dass alle materiellen Körper aus unteilbaren, kleinsten Teilchen zusammengesetzt sind – den Atomen (atomos  $\hat{=}$  unteilbar), die er in vier Gruppen einordnete; die Feuer-, Wasser-, Erde- und Luft-Teilchen. Beim Erschaffen dieser Idee war ihm wichtig, dass er mit Hilfe dieser theoretischen Erkenntnis imstande war Vorgänge beschreiben zu können, die ihn und seine Umwelt direkt betrafen (wie z.B. Feuer-Entstehung beim Brennen von trockenen Holz, Metall Eigenschaften (siehe [1]). Man könnte auch sagen, dass Demokrid über die Frage nach dem Wesen der Materie nachdenken konnte, weil er Vorgänge in seiner (ihm nahen) Natur genauer verstehen wollte.

Da der Titel meiner Promotionsarbeit "Eigenschaften von kompakten Sternen in quantenchromodynamisch motivierten Modellen" lautet, stellt sich hier natürlich sofort die Frage, inwieweit denn solche theoretischen Überlegungen etwas mit einem Verstehen der wirklichen Vorgänge in der Natur zu tun haben, bzw. in welcher Weise denn Naturwissenschaftler heutzutage zu ihrem Fragen gelangen, und ob man dann mit diesen theoretischen Ideen die Welt und ihre Zusammenhänge besser (einfacher) verstehen kann. Einerseits gilt sicher, dass die Fragen die man sich zu Demokrids Zeiten stellte noch viel direkter mit dem täglichen Empfinden verbunden waren als sie das

heute sind, andererseits hat sich in den letzten 24 Jahrhunderten viel in der Beschreibung geändert was Natur ist und man besitzt heutzutage viel mehr Möglichkeiten als damals, neue theoretische Ideen auf ihren Wahrheitsgehalt hin zu untersuchen.

Anhand der historischen Entwicklung der Elementarteilchen Physik möchte ich nun beschreiben, wie sich das Bild der kleinsten, elementaren Teilchen gewandelt hat und beschreiben, wie man sich heutzutage elementare Materie/Kräfte vorzustellen hat.

Ende des 19. Jahrhunderts erkannte Sir J.J. Thomson mit Hilfe von Kathodenstrahlexperimenten, dass sich die Atome aus noch kleineren Teilchen zusammensetzen. Er stellte sich das Atom (statisches Atommodell, Wassermelonenmodell) als eine Kugel vor, die aus einer massiven, positiv geladenen Substanz besteht, in deren Inneren sich gleichmäßig, negativ geladene Teilchen befinden, denen er den Namen "Elektronen" gab. Anhand von Atomstreuexperimenten gelang es einem Schüler von Thomson (Ernest Rutherford) das statische Atommodell zu widerlegen. Die Resultate seiner experimentellen Arbeiten ließen ihn schließen, dass das Atom aus einem winzigen positiv geladenen, massiven Kern besteht, um den die negativ geladenen Elektronen herumkreisen. Anfang des 20. Jahrhunderts revolutionierte die Quantentheorie die gesamte Physik und hatte zur Folge, dass auch die Vorstellung des Atoms verändert wurde. Das Atommodell von Niels Bohr (1913) bestand ebenfalls aus einem winzigen, positiv geladenen, massiven Kern, jedoch kreisten die Elektronen nicht mehr auf klassischen Bahnen um diesen, sondern man durfte sich die Elektronen nicht länger als klassische Teilchen mit festen und unabhängigen Orten und Impulsen vorstellen; im Bohrschen Atommodell hielten sich die Elektronen in gequantelten Zuständen auf. 1920 erkannte Rutherford, dass sich die Atomkerne aus noch "elementareren" Teilchen zusammengesetzt sind – den neutralen Neutronen und den positiv geladenen Protonen – und dass diese durch eine starke Wechselwirkung zusammengehalten werden. 1936 stellte Yukawa die Idee eines Austausch-Teilchens vor, das der Träger dieser starken Wechselwirkung sein sollte; dieses Teilchen ( $\pi$ -Meson) wurde 1948 entdeckt. Neben der Quantentheorie revolutionierte in dieser Zeit Epoche noch eine andere Idee die gesamte Physik – die Relativitätstheorie. Schon 1928 arbeitete Paul Dirac an einer relativistischen

Quantentheorie und er fand als ein Ergebnis dieser Arbeiten, dass es zu jedem elementaren Teilchen ein zugehöriges Antiteilchen geben sollte, das die gleichen Eigenschaften wie das Teilchen hat, jedoch entgegengesetzte Ladung trägt. 1955 wurde das erste Antiteilchen (Antiproton) gefunden. 1931 erkannte Pauli, dass bei einigen elementaren Prozessen (z.B.  $\beta$ -Zerfall des Neutrons) Energie und Drehimpuls nicht erhalten sind. Er postulierte deshalb die Existenz eines Teilchens (Neutrino), das einer schwachen Kernwechselwirkung unterliegt und korrigierte so die anscheinenden Energie und Drehimpulsverletzungen – das Neutrino wurde 1953 nachgewiesen. Durch die technischen Möglichkeiten, die sich durch Teilchenbeschleunigeranlagen ergaben, folgte eine wahre Flutwelle von elementaren Teilchen (siehe Tab. A.1 im Anhang A), deren Anzahl die Zahl der Elemente im Periodensystem bei weitem überstieg. Obwohl die meisten dieser hadronischen, 'elementaren' Teilchen sehr kurzlebig sind und alle Atomkerne, der auf der Erde existierenden Elemente, lediglich aus Nukleonen zusammengesetzt sind, verkomplizierten sie das Bild der elementaren Materie sehr. Anfang der sechziger Jahre erkannte man jedoch, dass man viele dieser 'elementaren' Hadronen in Gruppen (Multiplets) zusammenfassen konnte, die mathematisch durch die SU(3)-Symmetrie verknüpft sind. Unabhängig voneinander fanden Gell-Mann und Zweig, dass sich viele der Eigenschaften von Hadronen zwanglos erklären lassen, wenn man annimmt, dass alle Hadronen sich aus noch kleineren Grundbausteinen zusammensetzen. Gell-Mann gab ihnen den Namen 'Quarks', nach einem Wortspiel in Finnegans Wake von J. Joyce. Im Laufe der Zeit bestätigte und verfestigte sich dieses Bild der elementaren Materie. Durch eichtheoretische, mathematische Formulierungen erklärte man in der Folgezeit, in welcher Weise die fermionischen Elementarteilchen ihre Kräfte untereinander vermitteln, und gelangte so zu den vier fundamentalen Wechselwirkungen: Die starke Kernkraft (QCD: Quanten Chromo Dynamik), die schwache Kernkraft, die elektromagnetische Wechselwirkung und die Gravitation. In der elektroschwachen Theorie gelang es dann die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zu vereinheitlichen (näheres siehe [2]).

Heutzutage setzt sich nach Ansicht vieler Physiker die elementare Materie aus den folgenden Bestandteilen zusammen (siehe Tab. A.2 im Anhang A). Elementare Materie kann man grob in zwei Arten von Teilchen einteilen:

len: die Fermionen, aus denen die gesamten Atome zusammengesetzt sind und die Eichbosonen, die für die Wechselwirkungen (Kräfte) verantwortlich sind (näheres siehe Kapitel 1). Interessant ist hierbei, dass sich die gesamte hadronische Materie aus sechs unterschiedlichen Quark zusammensetzt. Jedes barionische Teilchen besteht aus drei Quarks, die ihrerseits neben der elektrischen Ladung eine weitere Ladung tragen, die Farbladung. Diese Farbladung kann man jedoch in der Realität nicht experimentell erschließen, da die Quarks und gleichzeitig der Raum der Farbladung abgeschlossen (eng. confined) ist. Die Quarks gruppieren sich stets in einer Weise, dass das entstehende hadronische Teilchen farbneutral (weiss) ist. Die Wechselwirkung, die diese Eigenschaften der Quarks verursacht ist die starke Kraft, die durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben wird. Zu glauben, dass das gegenwärtige Bild elementarer Teilchen ein Endgültiges ist, kann man – betrachtet man die Geschichte – nicht erwarten, und es zeichnen sich schon jetzt neuere, noch spekulative Sichtweisen ab, wie z.B. die Stringtheorie oder die Supersymmetrie. Da jedoch diese interessanten Ansätze noch weit entfernt von einer experimentellen Evidenz sind, basiert diese Promotionsarbeit hauptsächlich auf dem dargestellten Elementarteilchen-Bild, das man das 'Standardmodell der Elementarteilchenphysik' nennt.

Da sich die Resultate dieser Arbeit auf die Eigenschaften von kompakten Sternen beziehen, werde ich im folgenden einen kurzen Umriss über die astrophysikalische Relevanz solcher Objekte geben, und somit die neuere Geschichte der Astro- und Gravitationsphysik, die im Zusammenhang mit kompakten Sternen steht, streifen.<sup>1</sup>

Nachdem sich Galileo Galilei zunächst ausgiebig mit Pendelversuchen und Schwerkraft Experimenten befasst hatte, wurde 1604 seine Aufmerksamkeit auf astronomische Ereignisse verlagert, als er eines Abends ein Aufleuchten eines Sterns beobachtete; an diesem Abend muss wohl eine Nova Explosion in unserer Milchstraße oder in der Magellanischen Wolke stattgefunden haben. Für die heilige Inquisition war dies eine sehr beunruhigende Tatsache, da sie den Sternenhimmel als etwas Gottgegebenes, unabänderbares ansah.

---

<sup>1</sup>Die Wurzeln der astronomischen Forschung sollen hier nicht betrachtet werden. Einen interessanten Einblick in die arabische Astronomiegeschichte vor Erfindung von teleskopischer Hilfsmittel ist z.B. in [3] zu finden.



Galilei baute drei Jahre später das erste Teleskop und betrachtete mit diesem unseren Mond und die Planeten unseres Sonnensystems. Im Laufe dieser Forschungen gelangte er zu der Überzeugung, dass sich die Erde um die Sonne dreht, und widersprach somit der christlichen Auffassung, dass die Erde der Mittelpunkt der Welt sei. Im Alter von 69 Jahren wurde er vom Gericht der heiligen Inquisition wegen Ketzerei verurteilt und musste kniend eine Abschwörungsformel sprechen, in der er seine Forschungsergebnisse bestritt. In seinen folgenden Lebensjahren erblindet Galilei und wurde, durch den ihm auferlegten Hausarrest, zunehmend lebensmüder. Im selben Jahr in dem Galilei stirbt, wird von einem Bauern-Ehepaar in Lincolnshire Isaac Newton geboren. Nachdem Newton sein Bachelor of Arts in Mathematik bestanden hatte, wurde er 1665 – aufgrund der ausufernden Pest in London – gezwungen in seinen Geburtsort zurückzugehen. In dieser ländlichen Abgeschiedenheit gelang es ihm innerhalb von nur 18 Monaten seine Grundideen zur Differential- und Integralrechnung zu formulieren und außerdem eine neue Gravitationstheorie zu entwerfen, in der er die Schwerkraft- und Fallgesetze auf der Erde in Zusammenhang mit den Keplerschen Gesetzen der Planetenbewegungen brachte. In seinem 1687 erschienenen Hauptwerk "Mathematische Prinzipien der Naturlehre" beschreibt er die Gravitation als eine Kraft zwischen je zwei massiven Körpern, die durch den leeren Raum hindurch ohne Vermittlung eines Mediums instantan wirkt. 1905 formuliert Albert Einstein die spezielle Relativitätstheorie. Eine Hauptaussage in dieser Theorie ist die Äquivalenz von Masse und Energie ( $E = mc^2$ ). Anhand dieser Gleichung erkannte Einstein, dass man die Newtonsche Gravitationstheorie verallgemeinern musste, da nicht allein die Eigenschaft der Masse eines Körpers, sondern sein gesamter Energieinhalt die Gravitationskraft bestimmt. 1915 stellte Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie vor, in der jeder Körper das raumzeitliche Maßfeld in seiner Umgebung verzerrt, und dadurch zwischen den Körpern eine Wechselwirkung vermittelt wird – die Gravitationskraft. Alle bisherigen Experimente zeigen die Richtigkeit der Einsteinschen Gravitationstheorie (näheres siehe Kapitel 2). Schon 1916 fand Schwarzschild eine exakte Lösung in der Einsteinschen Theorie, die das Gravitationsfeld eines Massenpunktes beschreibt, und die die bemerkenswerte Eigenschaft eines Ereignishorizontes besitzt. Die Raumzeitstruktur um einen

solchen Massenpunkt erscheint für einen äusserer Beobachter in zwei Bereiche aufgeteilt. In einen inneren, abgeschlossenen Bereich, aus dem in ihm enthaltene Teilchen nicht entweichen können und aus einem äusseren Bereich, dessen Informationen für den Beobachter zugänglich sind. Aufgrund dieser Eigenschaften bezeichnete erstmals A. Weehler ein solches Objekt als ein "Schwarzes Loch". Durch die experimentelle Entdeckung des Neutrons stimuliert, spekulierte Landau 1932 über die Möglichkeit eines kompakten Sterns bestehend aus Neutronen. 1933 wurde erstmals von Baade und Zwicky die Supernova-Erscheinung in Zusammenhang mit einem Sternkollaps zu einem Neutronenstern erklärt. Die für die allgemeinrelativistische Beschreibung eines so kompakten Sterns nötige Innenraumlösung der Schwarzschildmetrik wurde 1939 von Tollman Oppenheimer und Volkoff gefunden. 1967 entdeckte J. Bells - die zu dieser Zeit eine Studentin bei Antony Hewish war - eine periodisch wiederkehrende Radiostrahlung aus dem All. Die ersten Monate nach dieser Entdeckung dachte man zunächst, dass man hier einen Beweis der Existenz ausserirdischer Wesen gefunden hätte, so dass ihre Ergebnisse geheim gehalten wurden. Als man jedoch weitere solcher Pulsare aufspürte und eine Geheimhaltung immer mehr Aufwand erforderte, wurde eine natürliche Quelle immer wahrscheinlicher, an deren Ende die Erklärung als schnell rotierende Neutronensterne stand. 1974 erkannte S. Hawking, dass schwarze Löcher nicht wirklich schwarz sind, sondern in geringfügiger Menge eine Quantenstrahlung abgeben, die Hawkingstrahlung. 1979 konnten Hulse und Taylor indirekt zeigen, dass der Binärpulsar PSR1913+6 Gravitationswellen ausstrahlt; 1995 wurde für diese Entdeckung der Nobelpreis verliehen. Im gleichen Jahr wurde von N. Glendenning eine neue Beschreibung entwickelt, die die physikalisch richtige Formulierung lieferte, mit der man im Inneren von Neutronensternen einen Hadron-Quark-Phasenübergang beschreibt. Die Möglichkeit einer dritten Familie von Sternen ergab sich, die Hybrid- oder Quarksterne. In der Folgezeit werden astrophysikalische Nachweise eines Hadron-Quark-Phasenübergang diskutiert (wie z.B. der "Spin-up-" und der "Twin star-" Effekt) und neue astrophysikalische Erscheinungen durch diesen Phasenübergang erklärt (Hubble's strange star, Quasiperiodische Oszillationen, Glitches, Hypernova, Gamma-Ray-Bursts ...; siehe Kapitel 3 und Anhang C). In diesem Zusammenhang sind weitere interessante astrophysi-

kalische Fragen die Suche nach dem Nachweis schwarzer Löcher (wie z.B. bei Cygnus X-1 im Zentrum unserer Galaxie), Graviationslinsen Effekte und der direkte Nachweis von Gravitationswellen mittels interferometrischer Gravitationswellen Detektoren (Geo600, Virgo, LigoI+II, Lisa).

Anhand dieser Zusammenstellung geschichtlicher Abläufe erkennt man (und gerade der Laie) sofort, dass die Macht des Spezialisierungsprozesses anscheinend unaufhaltsam die Beschreibung physikalischer Zusammenhänge beherrscht und dadurch stark verkompliziert. Die derzeitige Situation innerhalb der Physik spiegelt den Zustand extrem spezialisierter Wissensgebiete wider (Elementarteilchenphysik, Kernphysik, Gravitationsphysik, Astrophysik, Laserphysik, Plasmaphysik, ... Computerphysik, usw.). Interdisziplinäre physikalische Forschung gelingt nur den wenigsten Wissenschaftlern obwohl gerade innerhalb dieser Wissens-Schnittmenge die speziellen theoretischen Vorhersagen am effektivsten überprüft werden können. Als interdisziplinäre Forschung kann man jedoch ein solches Zusammenfügen innerhalb der Teilbereiche der Physik nicht bezeichnen; sie beginnt erst dann, wenn man sich vom künstlich eingeführten Kategorienschema der Fachbereichsuniversität befreit und als Mensch versucht die Welt zu begreifen. Die theoretische Suche nach der einheitlichen Beschreibung aller bekannten Kräfte, kann nach meiner Meinung nur auf dem Weg einer interdisziplinären physikalischen Forschung erreicht werden – eine 'Weltformel' jedoch wird diese mitnichten darstellen. Eine zukunftsorientierte, moderne Universität die geschichtliche Zusammenhänge ernst nimmt und verantwortungsvoll die zukünftige Entwicklung verstehen und verändern will, muss einen interdisziplinären Austausch sich noch fremder Wissensgebiete und Kulturen ermöglichen. Ein zeitliches voranschreiten der Spezialisierung führt von vorne herein auswegslos in eine Sackgasse; ein Innehalten dagegen und ein verantwortungsvolles Zusammenfügen der voneinander abgegrenzten Teilbereiche ist die zukünftige Hauptaufgabe der Forschung. Beim Einschlagen eines solchen Weges betritt der Forscher für ihn unerforschtes Terrain.

Wie man anhand der Entwicklung der Astro- und Gravitationsphysik erkennt, sind die heutigen Fragen dieses Physikbereiches (der sich mit der Erforschung der Gesetze von großräumigen Strukturen befasst), nicht mehr unabhängig von den Erkenntnissen der Elementarteilchen Theorie zu be-

antworten, sondern gerade in der Zusammenfügung dieser so unterschiedlicher Bereiche der Physik, kann man sich in Zukunft die fruchtbarsten und beständigsten Erkenntnisse erhoffen. Kurzgefasst besteht das Hauptanliegen dieser Arbeit darin, die Gravitationstheorie, beschrieben durch die Allgemeine Relativitätstheorie, zu nehmen und diese mit den neusten Ideen der Elementarteilchen Theorie zu verbinden. Die theoretischen Ergebnisse, die durch ein solches Zusammenfügen numerisch erzielt werden, sollen dann mit der astrophysikalischen Realität konfrontiert werden um sie auf ihren Wahrheitsgehalt hin zu überprüfen.

Bevor ich jedoch zu diesen Kapiteln der Resultate und Ergebnisdiskussionen komme (Kapitel 3), möchte ich in den beiden folgenden Kapiteln die Elementarteilchen Theorie und die Allgemeinen Relativitätstheorie in ihrer mathematischen Formulierung darstellen und ihre wesentlichen physikalischen Folgerungen erläutern. Diese beiden einführenden Kapitel wurden so allgemeinverständlich wie möglich gehalten, so dass auch Physikern, die nicht gerade auf diesem Spezialgebiet forschen eine Möglichkeit gegeben wird die wesentlichen Aussagen zu erfassen.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Interessierten 'Nicht-Physikern' und Laien empfehle ich jedoch, wenn überhaupt, lediglich die Einführungen zu den jeweiligen Kapiteln zu lesen. Eine allgemeinverständliche Version dieser Doktorarbeit ist erhältlich unter:

<http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~harauske/Thesis.html>

# Kapitel 1

## Elementarteilchen Theorie

### 1.1 Einführung

Woraus besteht die Welt? – Das ist wohl die grundsätzlichste und beständigst wiederkehrende Frage innerhalb der theoretisch physikalischen Forschung. Woraus besteht der Tisch vor Ihnen, woraus besteht die Wand, woraus besteht die Luft die Sie atmen, woraus unsere Gedanken und woraus besteht diese Arbeit? 'Aus unterschiedlichen Verkörperungen der Energie' ist wohl die treffenste Antwort und nach meiner Meinung die Beständigste. Die verschiedenartigsten Erscheinungsformen der Energie, die wir als Beobachter der Welt wahrnehmen, sind nach meiner Meinung vom ursprünglichen Wesen her nichts unterschiedliches; sie sind die gleiche Sache in einer unterschiedlichen Form.

Innerhalb dieses Kapitels möchte ich Ihnen jedoch einen andersartigen, teilchenphysikalischen Einblick in das Wesen der Materie<sup>1</sup> vorstellen, der auf dem folgenden Prinzip basiert:

'Die Antwort woraus die Welt besteht erfährt man auf dem Weg der Teilung der Materie - auf dem Weg der konzentrierten Fokussierung'. Ich spreche hier von dem eingeschlagenen Weg der theoretischen Physik, die Materie in ihre elementaren Grundbausteine zu untergliedern. Jegliche Materieformen besitzen chemische Zusammensetzungen<sup>2</sup>, sind aus Molekülen zusammenge-

---

<sup>1</sup>Ich benutze hier und im folgenden den Einstein'schen Materiebegriff, wobei jegliche Energieformen Materie sind.

<sup>2</sup>Wenn sich die jeweilige Materieform nicht direkt aus elementaren Teilchen zusammen-

setzt, die ihrerseits aus Atomen bestehen. Das Periodensystem der Elemente fasst die uns bekannten Atome zusammen. Die Atome selbst bestehen aus einem Atomkern und einer Ansammlung von Elektronen, die sich in weitem Abstand vom Kern aufhalten. Ca. 99.9 Prozent der Materie befindet sich sehr konzentriert im Atomkern, wobei seine Größe gerade mal  $1/100000$  der Atomgröße entspricht. Atomkerne sind wiederum zusammengesetzt; sie bestehen aus Neutronen und Protonen. Das eigentlich interessante geschieht nun, wenn man versucht die Protonen und Neutronen weiter zu untergliedern – denn eine weitere Teilung ist experimentell nicht möglich. Diese experimentelle Unmöglichkeit der weiteren Teilung ist auch theoretisch verstanden und kann anschaulich wie folgt illustriert werden: Man nimmt hierbei an, dass das Neutron bzw. Proton doch aus noch fundamentaleren Teilchen zusammengesetzt ist; diese nennt man Quarks - jeweils drei Quarks bilden ein Neutron. Die Quarks besitzen jedoch eine Eigenschaft, die es in der uns direkt zugänglichen erfassbaren Welt nicht gibt. Aufgrund dieser Eigenschaft<sup>3</sup> kleben die Quarks so fest aneinander, dass man sie nur unter gewaltigem Energieaufwand voneinander ablösen kann. Die verwendete Energie, die man zur Trennung benötigt muss jedoch sehr konzentriert und fokussiert sein, so dass diese wiederum materialisiert und Quarks erzeugt, die an das Quark, das man ablösen wollte ankleben. Man trennt somit nicht das Neutron in seine Quarkteilbausteine auf, sondern erzeugt weitere Teilchen. In seinen Händen hält man nach einem solchen Teilungsversuch nicht drei einzelne Quarks, sondern zwei oder mehr Neutronen, oder andere uns schon bekannte Teilchen. Dem Prozess der Teilung der Materie ist demnach eine natürliche Schranke gesetzt, die es als Beobachter im 'Hier und Jetzt' nicht zu überschreiten gelingt. Man kann mit der Welt der Quarks nicht direkt kommunizieren, d.h. man kann experimentell nichts direkt über die Quarks und den Quarkkleber erfahren. Andererseits gilt ähnliches auch für die Welt der Quarks. Die Quarks können nie alleine auftreten, sondern müssen sich zu zweier oder dreier Gruppen verkleben. Diese Quark Gruppen müssen stets so gebildet

---

setzt.

<sup>3</sup>In der physikalischen Beschreibung wird diese Eigenschaft als 'Farbe' bezeichnet. Jedes Quark kann entweder die Farbe rot, gelb oder blau besitzen. Der umgangssprachlich benutzte Begriff Farbe hat nichts mit diesem elementaren Farbbegriff gemeinsam.

werden, dass die uns nicht zugängliche, fremde Eigenschaft der Quarks sich innerhalb der Gruppe gerade neutralisiert. Wir als Beobachter nehmen dann nur die neutrale Quark Gruppe wahr, z.B. das Neutron oder Proton, oder ein anderes uns bekanntes Teilchen. Die uns fremde Eigenschaft der Quarks kann man auch als weiteren Freiheitsgrad, als zusätzliche Dimension verstehen. Wir als Beobachter unserer Welt können nicht in diesen extra-dimensionalen Raum eindringen; die Quarks und ihr Kleber, können sich dagegen nicht von ihren zusätzlichen Dimensionen befreien.

Dies alles hielt jedoch die Gedankenwelt der theoretischen Physik nicht davon ab, sich eine mathematische, quantitative Theorie zu konstruieren, die gerade die Wechselwirkung der Quarks durch den Kleber beschreibt – die so genannte QuantenChromodynamik (QCD) oder starke Kraft. Sie ist die stärkste aller uns bekannter Kräfte und beschreibt, wie es zu der Abgeschlossenheit der Quarks zu farbneutralen Gruppen kommt. In dieser Theorie wird das Neutron und das Proton aus drei (so gut wie) energielosen (masselosen) Quarks zusammengesetzt, die durch Klebe-Teilchen (Gluonen) so zusammengehalten werden, dass die uns unbekannte Eigenschaft der Quarks (Farbe) neutralisiert wird. Die hohe Masse (Energie) des Neutrons bzw. Protons entsteht demnach nicht durch die Masse der Quarks, sondern durch den der Welt auferlegten Zwang, die uns nicht zugängliche Eigenschaft der Quarks zu verbergen. Die Quarks bewegen sich irrsinnig schnell (nahe der Lichtgeschwindigkeit) in ihrem "extra-Dimensionskäfig", und wenn sie diesem entkommen wollen, werden sie durch den Kleber der starken Kraft zurückgezogen. Um ein solches, ständig im Kampf befindliches System aufrecht zu erhalten ist eine gewaltige Energie erforderlich – diese Energie ist es, die dem Neutron bzw. dem Proton die hohe Masse verleiht. Die gesamte Energiewelt der Quarks wird also durch den Zwang der Welt, den Raum der Farbdimensionen nicht wahrnehmen zu dürfen, in eine gewisse Form gebracht. Woraus besteht die Welt? – Aus unterschiedlichen Verkörperungen der Energie.

## 1.2 Elementare Teilchen und Kräfte

Wie wir in der Einleitung sahen, bestehen jegliche Bestandteile der Welt grundsätzlich aus Energie. Bei der Beschreibung von Prozessen und Vorgängen

in der Welt hilft uns diese tiefe Erkenntnis jedoch meist nicht weiter. Es wird das derzeitige Elementarteilchen Bild nochmals zusammengefasst. Zunächst untergliedert man die elementaren Teilchen grob in zwei Arten – die Fermionen und Bosonen. Fermionische Teilchen besitzen ungeraden Spin ( $1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ), bosonische Teilchen besitzen geraden Spin ( $0, 1, 2, \dots$ ). Fermionische Teilchen gleicher Spinrichtung können, aufgrund der Symmetrie Eigenschaft ihrer Zustandsfunktion  $\psi$ , sich nicht im gleichen Zustand aufhalten; bosonische Teilchen dagegen können dies. Die elementaren bosonischen Teilchen stellen die Kräfte der Welt dar. Die Photonen sind die elementaren Teilchen der elektromagnetischen Kraft. Die  $W^{+-}$ ,  $W^-$  und  $Z^0$ -Bosonen sind die Austauscheteilchen der schwachen Kernkraft. Die starke Kraft, die zwischen den Quarks wirkt, wird durch den Austausch von 8 Gluonen beschrieben. Das Austauscheteilchen der Gravitationskraft nennt man Graviton<sup>4</sup>. Die fermionischen Teilchen sind die Grundbausteine der Welt, aus welchen die Moleküle, Atome und Kerne zusammengesetzt sind. Sie untergliedern sich ihrerseits in Leptonen und Quarks. Durch Analysen der kosmischen Strahlung und irdische Beschleuniger-Experimente fand man die folgenden Leptonen und Quarks und gliederte sie in drei Familien. Alle bekannten Elemente des Periodensystems sind lediglich aus elementaren Teilchen der 1. Familie zusammengesetzt. Das Wasserstoffatom z.B. besteht aus einem Elektron und einem Proton, wobei das Proton aus den folgenden drei Quarks zusammengesetzt ist:  $p := (u, u, d)$ . Wie schon im Vorwort erwähnt wurde, erzeugt man in Beschleunigeranlagen Teilchen (z.B. Hyperonen), die massiver sind als Nukleonen. Diese hyperonischen Teilchen beschreibt man durch Quarkstrukturen, die auch Quarks aus der 2. und 3. Familie beinhalten (z.B.  $\Lambda = (u, d, s)$ ). Diese Teilchen existieren jedoch unter irdischen Bedingungen nur kurzzeitig und zerfallen schnell in Teilchen die aus Quarks der 1. Familie zusammengesetzt sind. Man kann sich die elementaren Teilchen der 2. und 3. Familie als Energieanregungen von elementaren Teilchen der 1. Familie vorstellen, da sie sich lediglich in ihrer Masse unterscheiden. Jedes elementare Teilchen besitzt

---

<sup>4</sup>Da es noch keine akzeptierte Theorie der Quantengravitation gibt und in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Gravitationskraft als Raumzeitkrümmung beschrieben wird, ist die Existenz des Gravitons noch fraglich.



ein zugehöriges Antiteilchen<sup>5</sup>, welches sich allein durch seine entgegengesetzte Ladung unterscheidet.

	1. Familie	2. Familie	3. Familie
Leptonen	$\begin{pmatrix} e \\ \nu_e \end{pmatrix}_L, e_R$	$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu_\mu \end{pmatrix}_L, \mu_R$	$\begin{pmatrix} \tau \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_L, \tau_R$
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{L,R}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_{L,R}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_{L,R}$

Tabelle 1.1: Untergliederung der elementaren fermionischen Teilchen in drei Familien. Die Händigkeit der Teilchen wird mit dem Index  $L$  für links und  $R$  für rechts gekennzeichnet. Die Neutrinos  $\nu_e, \nu_\mu$  und  $\nu_\tau$  existieren nur im linkshändigen Zustand. Alle übrigen Teilchen können im links und rechtshändigen Zustand vorliegen, sie werden wie folgt bezeichnet:  $e$ : Elektron,  $\mu$ : Muon,  $\tau$ : Tauon,  $u$ : up-,  $d$ : down-,  $c$ : charm-,  $s$ : strange-,  $t$ : top-,  $b$ : bottom-Quark.

Aufgrund der quantentheoretischen Erkenntnis darf man elementare Teilchen jedoch nicht als klassische Teilchen in unserer 4-dimensionalen Raumzeit auffassen, sondern muss ihre Existenz als Zustand  $\psi$  beschreiben. Durch den Meßprozeß, d.h. durch das von einem äußeren Beobachter verursachte Zwingen an das Teilchen sich zu offenbaren, wird der Zustand des Teilchens festgelegt. In der relativistischen Formulierung der Quantentheorie erweitert man die Zustandsfunktion  $\psi$  zu einem Zustandsspinor  $\psi_A, A = 1..4$ . In der Quantenelektrodynamik z.B. fasst man die unterschiedlichen Händigkeiten

---

<sup>5</sup>Antiteilchen werden im folgenden mit einer übergesetzten Tilde gekennzeichnet. Das Positron, welches das Antiteilchen des Elektrons darstellt wird z.B. durch das Symbol  $\tilde{e}$  beschrieben.

des Elektrons und seines zugehörigen Antiteilchens als Zustand eines Diracspinors zusammen:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Linkshändiges Elektron} \\ \text{Rechtshändiges Elektron} \\ \text{Linkshändiges Positron} \\ \text{Rechtshändiges Positron} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Man kann dann mit ein und derselben Gleichung sowohl das Teilchen als auch das Antiteilchen beschreiben. Die zutreffende Gleichung nennt man Diracgleichung; sie besitzt die folgende Form:<sup>6</sup>

$$i \gamma^\mu{}_A{}^B \partial_\mu \psi_B - \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_A = 0 \quad (1.2)$$

$i = \sqrt{-1}$  : Imaginäre Einheit

$c$  : Lichtgeschwindigkeit

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$  : Plank'sches Wirkungsquantum

$m_0$  : Ruhemasse des Fermions

$\mu$  : Raumzeitindex 0...3

$A, B$  : Diracindex 1..4

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  : Partielle Ableitung

$\psi_A$  : Fermionischer Diracspinor

$\gamma^\mu{}_A{}^B$  : Dirac Matrizen

### 1.3 Eichtheoretische Formulierung der bekannten Kräfte

Bei der Beschreibung physikalischer Vorgänge steht man stets vor der Aufgabe der Modellbildung. Das Ziel eines physikalischen Modells ist es die Vorgänge der Realität quantitativ zu beschreiben. Ein Modell innerhalb der

---

<sup>6</sup>Diracgleichung eines freien (nicht wechselwirkenden) fermionischen Teilchens der Ruhemasse  $m_0$ .

### 1.3. EICHTHEORETISCHE FORMULIERUNG DER BEKANNTEN KRÄFTE<sup>7</sup>

theoretischen Physik wird als 'gut' bezeichnet, wenn es einerseits möglichst wenige Zusatzannahmen macht, existierende Gesetzmäßigkeiten nicht verletzt, möglichst einfach ist und dabei möglichst viele Vorgänge der messbaren Realität beschreibt. Bei der Modellbildung der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen, hat sich das im folgenden näher beschriebene 'Euler-Lagrange Prinzip der kleinsten Wirkung' als besonders hilfreich erwiesen<sup>7</sup>. Die gesamte Modellbildung verlagert man hierbei in eine Funktion, die man Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  nennt. Die Lagrangedichte des betrachteten Systems hängt neben den Zustandsfunktionen  $\psi$  (bzw. Zustandsspinoren  $\psi_A$ ) der in dem System befindlichen Teilchen, den zugehörigen konjugiert komplexen Funktionen  $\psi^*$  (bzw. adjungierten Spinoren  $\bar{\psi}_A := (\psi_A^+)^*$ ) auch von deren raumzeitlichen Ableitungen  $\psi_{|\mu} := (\partial\psi)/(\partial x^\mu)$  (bzw.  $\psi_{A|\mu} := (\partial\psi_A)/(\partial x^\mu)$ ) ab. An die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  werden nun die folgenden Bedingungen gestellt:

- Realwertigkeit von  $\mathcal{L}$

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  muss als ganzes real sein, da bei dem später näher beschriebenen Variationsprinzip des Wirkungsfunktionals  $W$

$$\delta W := \int \delta \mathcal{L} d^4x = 0 \quad (1.3)$$

ein Extremum gefordert wird; bei komplexen Größen wäre jedoch kein Extremwert definiert.

- $\mathcal{L}$  ist ein Skalar bezüglich Lorentztransformation

Da die Physik unabhängig vom gewählten Koordinatensystem (Inertialsystem) sein soll, muss  $\mathcal{L}$  invariant bzgl. globaler Lorentztransformationen sein (näheres siehe Kapitel 2).

- $\mathcal{L}$  ist ein Skalar bezüglich innerer Gruppen

Als 'innere Gruppen' bezeichne ich im folgenden Gruppen basierend auf inneren Freiheitsgraden der Teilchen. Der innere Freiheitsgrad eines Diraceteilchen beschrieben durch den Diracspinor  $\psi_A$  ist der Teilchen-Antiteilchen- Händigkeitszustand, der durch den Index  $A$  am Spinor

---

<sup>7</sup>Auch bei nicht-elementaren Vorgängen in der Natur (z.B. klassische Mechanik, Elektrodynamik) gibt das Euler-Lagrange, bzw. Hamilton Prinzip oft tiefere Einblicke in die physikalischen Vorgänge und erleichtert die Modellbildung.

gekennzeichnet wird (weitere innere Freiheitsgrade werden später beschrieben). Die Forderung der Invarianz der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  bzgl. innerer Gruppen bedeutet nun, dass die Lagrangedichte universell gelten soll und keinen der inneren Freiheitsgrade der Teilchen gesondert auszeichnet.

Man kann zusätzlich fordern, dass  $\mathcal{L}$  bilinear in den kovarianten Feldvariablen sein soll (minimale Kopplung) und das sie keine zeitlichen Ableitungen enthalten soll, die höher als 1. Ordnung sind.

Im folgenden wird das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung anhand des Problems der Bewegung eines massiven spinoriellen Zustandsfeldes  $\psi_A$  näher erläutert:

Zunächst steht man vor der Aufgabe der Konstruktion der Lagrangedichte  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi_A, \bar{\psi}_A, \psi_{A|\mu}, \bar{\psi}_{A|\mu})$ , wobei die vorher dargestellten Bedingungen die Freiheit der Konstruktion einschränken. Eine Möglichkeit, die einerseits die gestellten Forderungen gewährleistet und andererseits möglichst einfach ist, stellt die folgende Version der Lagrangedichte dar

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}^A \gamma^\mu{}_A{}^B \psi_{B|\mu} - \frac{i}{2} \bar{\psi}_{|\mu}{}^A \gamma^\mu{}_A{}^B \psi_B - \frac{m_0 c}{\hbar} \bar{\psi}^A \psi_A \quad . \quad (1.4)$$

Das Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung besagt nun das folgende: Betrachten wir das Verhalten des spinoriellen Feldes  $\psi_A = \psi_A(x^\mu) = \psi_A(ct, x, y, z)$  im Raum  $(x, y, z)$  im Laufe der Zeit  $t$ , so wird es stets den Weg des kleinsten Widerstandes wählen. Wir parametrisieren die unterschiedlichen Möglichkeiten des Verhaltens des Spinors mit dem Scharparameter  $\lambda$  ( $\psi_A = \psi_A(x^\mu, \lambda)$ ) und definieren eine Wirkungsfunktion  $W$ :

$$W(\lambda, t) := \int_{\text{Raumzeit-Volumen}} \mathcal{L} d^4x = \int_{t_0=0}^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dt dx dy dz \quad (1.5)$$

Die Variation der Wirkungsfunktion  $\delta W$  bzgl. des Scharparameters  $\lambda$  muss aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung bei der 'wahren', d.h. bei der physikalisch realisierten Bahn, verschwinden

$$\delta W = \int \delta \mathcal{L} d^4x = 0 \quad . \quad (1.6)$$

### 1.3. EICHTHEORETISCHE FORMULIERUNG DER BEKANNTEN KRÄFTE<sup>9</sup>

Ist dies der Fall, so kann man zeigen, dass die Euler-Lagrangegleichungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{A|\mu}} \right)_{|\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_A} &= 0 \\ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{A|\mu}} \right)_{|\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_A} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

erfüllt sein müssen; sie stellen dann die Bewegungsgleichungen des betrachteten Zustandsspinors bzw. des Teilchens dar. Das wirkliche Verhalten des spinoriellen Feldes  $\psi_A$  im Laufe der Zeit wird demnach durch die Gleichung (1.7) aufgrund des Prinzips der kleinsten Wirkung festgelegt. Die Euler-Lagrangegleichungen der Lagrangedichte (1.4) geben gerade die schon dargestellte Diracgleichung des freien, massiven, fermionischen spinoriellen Feldes (siehe Gleichung (1.2)).<sup>8</sup>

Die bekannten Wechselwirkungen werden nun durch so genannte Eichtheorien in die Theorie eingebettet. Im folgenden wird das eichtheoretische Prinzip anhand der stärksten Kraft (der QCD) dargestellt.

Wie schon erwähnt, besitzen die Quarks eine uns nicht zugängliche Eigenschaft, die durch den zusätzlichen Quarkfreiheitsgrad  $a = \text{rot, gelb, blau}$  gekennzeichnet wird. Man beschreibt deshalb die Quarks durch einen dreikomponentigen Zustandsspinor  $\psi_a$ . Da man sechs unterschiedliche Quarkteilchen (geordnet in drei Familien) kennt, fügt man einen weiteren Index dem Quarkspinor hinzu; diesen bezeichnet man als flavor Index  $f = 1..6$ :

$$\begin{aligned} \psi_a^f &= \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}^f \hat{=} \begin{pmatrix} \text{Rotes Quark} \\ \text{Gelbes Quark} \\ \text{Blaues Quark} \end{pmatrix}^f \quad \text{Flavor: } f = 1..6 \\ \psi_a^1 &= \begin{pmatrix} u_r \\ u_g \\ u_b \end{pmatrix}, \quad \psi_a^2 = \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \end{pmatrix}, \quad \psi_a^3 = \begin{pmatrix} s_r \\ s_g \\ s_b \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \psi_a^6 = \begin{pmatrix} t_r \\ t_g \\ t_b \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die Idee des Eichprinzips ist nun die folgende:

Würde man an einem Quarkspinor, z.B. an dem des up-Quarks  $\psi_a^1$  einen

---

<sup>8</sup>Die zweite Euler-Lagrangegleichung beschreibt die Bewegung des adjungierten spinoriellen Feldes.

Messprozeß durchführen, so müsste sich dieser definitiv auswählen in welchem Quarkzustand er vorliegt; entweder müsste er rot, gelb oder blau sein. Einen solchen Meßprozeß kann man jedoch nur durchführen wenn man eine Wechselwirkung benutzt, die zwischen den unterschiedlichen Farbzuständen der Quarks unterscheiden kann; d.h. allein durch eine farbsensitive Wechselwirkung wird die Farbunterscheidung der Quarks sinnvoll. Würde es eine solche Wechselwirkung nicht geben, dann wären die drei Farbzustände der Quarks nicht unterscheidbar. Eine Transformation  $U_a^b(x^\mu)$  von einem Farbzustand  $a$  in einem anderen  $b$  an einem lokalisierten Raumzeit-Punkt  $x^\mu$  würde dann den Quarkzustandsspinor  $\psi_a^f$  nicht verändern. Falls es jedoch eine farbsensitive Wechselwirkung gibt, dann sollte sich der transformierte Spinor  $\psi_a^{f\prime}$  im allgemeinen von dem ursprünglichen unterscheiden. Eine solche Farbtransformation wird mathematisch wie folgt formuliert:

$$\psi_a^{f\prime} = U_a^b(x^\mu)\psi_b^f, \text{ mit } U_a^b(x^\mu) = e^{i\lambda_i(x^\mu)\tau^i_a{}^b} \quad (1.9)$$

Die Transformationsgruppe ist hier die  $SU(3)_{(c)}$ . Die  $3 \times 3$ -Matrizen  $\tau^i_a{}^b$ ,  $i = 1..8$  sind die Generatoren der Gruppe und werden als Gell-Mann-Matrizen bezeichnet,  $\lambda_i(x^\mu)$  ist der Gruppenparameter. Die Lagrangedichte eines freien (nicht wechselwirkenden) Quarkspinors besitzt wieder die folgende Form

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_f^a \gamma^\mu \psi_{a|\mu}^f - \frac{i}{2} \bar{\psi}_{f|\mu}^a \gamma^\mu \psi_a^f - \frac{m_f c}{\hbar} \bar{\psi}_f^a \psi_a^f \quad , \quad (1.10)$$

wobei der Übersichtlichkeit halber der Diracindex  $A = 1..4$  unterdrückt wurde ( $\psi_f^a \hat{=} \psi_{Aa}^f$ ,  $\gamma^\mu = \gamma_A^{\mu B}$ ).

Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}^\prime$  im farbtransformierten System soll im Vergleich zu dem untransformierten System  $\mathcal{L}$  die gleichen physikalischen Grundgesetze beschreiben; die physikalischen Prozesse dürfen nicht von einer speziell gewählten Eichung im Farbraum abhängen. Die Eichforderung lautet demnach, dass die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  invariant unter lokalen  $SU(3)_{(c)}$  Farbtransformationen sein muß:

$$\mathcal{L}^\prime(\psi_a^{f\prime}) = \mathcal{L}(\psi_a^f) \quad (1.11)$$

Man kann zeigen, dass diese Forderung im allgemeinen nur dann erfüllt ist, wenn man die partiellen Ableitungen  ${}_{|\mu} = \partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$  durch kovariante Ableitungen  $D_{\mu a}{}^b$  ersetzt

$$D_{\mu a}{}^b = \partial_\mu 1_a{}^b + ig_3 G_{\mu a}{}^b \quad , \quad (1.12)$$

### 1.3. EICHTHEORETISCHE FORMULIERUNG DER BEKANNTEN KRÄFTE 11

wobei die  $G_{\mu a}{}^b = G_{\mu i} \tau_a{}^i{}^b$  die Eichfelder der  $SU(3)_{(c)}$  darstellen,  $1_a{}^b$  die Einheitsmatrix im Farbraum und  $g_3$  die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung ist. Um die Invarianz der Lagrangedichte zu gewährleisten transformieren sich die Eichfelder wie folgt unter den Farbtransformationen:

$$(G_{\mu a}{}^b)^l = U_a{}^c G_{\mu c}{}^d (U^{-1})_d{}^b + \frac{i}{g_3} U_a{}^c U_c{}^b \quad (1.13)$$

Nimmt man die inneren Farbfreiheitsgrade der Quarks also ernst, so ist die Eichforderung nur zu bewerkstelligen, wenn man zusätzliche Eichfelder der Theorie hinzufügt. Durch Kommutatorbildung der kovarianten Ableitungen gelangt man zu den Eichfeldstärken  $F_{\mu\nu a}{}^b$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu a}{}^b = \frac{i}{g_3} [D_{\mu a}{}^c, D_{\nu c}{}^b] = F_{\mu\nu i} \tau_a{}^i{}^b \quad (1.14) \\ F_{\mu\nu i} &= G_{\nu i|\mu} G_{\mu i|\nu} - g_3 f^{jk}{}_i G_{\mu j} G_{\nu k} \quad , \end{aligned}$$

wobei die  $f^{jk}{}_i$  die Strukturkonstanten der  $SU(3)_{(c)}$  Farbgruppe sind:

$$[\tau_a{}^k{}^c, \tau_c{}^l{}^b] = 2i f^{kl}{}_j \tau_a{}^j{}^b \quad (1.15)$$

Man schließt das System der Eichtheorie ab, indem man in der freien Lagrangedichte die partiellen Ableitungen  $\partial_\mu$  durch kovariante  $D_\mu$  ersetzt und die kinetische Energie der Eichfelder der Lagrangedichte hinzufügt. Die gesamte Lagrangedichte lautet dann

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_f^a \gamma^\mu D_{\mu a}{}^b \psi_b^f - \frac{i}{2} \overline{(D_{\mu a}{}^b \psi_b^f)} \gamma^\mu \psi^{af} - \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu i} F^{\mu\nu i} - \frac{m_f c}{\hbar} \bar{\psi}_f^a \psi_a^f \quad .$$

Die Bewegungsgleichungen der Quarks ergeben sich aus den Euler - Lagrangegleichungen hinsichtlich der Quarkspinoen:

$$\delta_{\psi_a^f} \int \mathcal{L} d^4x = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a^f |_\mu} \right)_{|\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\psi_a^f}} = 0 \quad (1.16)$$

Dies ergibt die Diracgleichung massiver Quarks, die durch den Austausch gluonischer Eichfelder wechselwirken

$$i \gamma^\mu D_{\mu a}{}^b \psi_b^f - m^f \psi_a^f = 0 \quad . \quad (1.17)$$

Die Bewegung der Eichfelder selbst ergibt sich durch die Euler - Lagrange-gleichungen hinsichtlich der Eichfelder  $G_{\mu i}$

$$\delta_{G_{\mu i}} \int \mathcal{L} d^4x = 0 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_{\mu i | \nu}} \right)_{| \nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_{\mu i}} = 0 \quad ; \quad (1.18)$$

sie hat die Struktur einer inhomogenen Yang-Mills-Gleichung<sup>9</sup>

$$F^{\mu\nu i}{}_{| \mu} + g_3 f^{ijk} F_j^{\mu\nu} G_{\mu k} = 4\pi j^{\nu i} \quad , \quad (1.19)$$

wobei die  $j^{\nu i} = g_3 \bar{\psi}_f^a \gamma^\nu \tau^i \psi_a^f$  die 8 Farbströme der Theorie repräsentieren. Die physikalischen Eichfelder, die die Gluonen in der QCD darstellen setzen sich aus den  $G_{\mu i}$  z.B. wie folgt zusammen

$$G_{\mu r \bar{g}} = \frac{1}{2} (G_{\mu 1} - i G_{\mu 2}) \quad \text{Gluon mit rot und antigelber Farbe} \quad . \quad (1.20)$$

Diese physikalischen Eichfelder besitzen die Eigenschaft reine Übergangsströme zwischen den Quarks zu erzeugen.

Am Beispiel der QCD sahen wir also wie die mathematische Konstruktion eines physikalischen Modells einer Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen durch ein eichtheoretisches Prinzip funktioniert; auf ähnliche Weise konstruiert man auch die anderen bekannten Wechselwirkungen<sup>10</sup>. Die elektromagnetische Wechselwirkung ist eine abelsche Eichtheorie, ihre Symmetriegruppe ist die  $U(1)$ , wobei ihr einziges Austauscheteilchen Photon genannt wird. Die Symmetriegruppe der schwachen Wechselwirkung ist die  $SU(2)$ , sie wirkt auf die Isospin-Freiheitsgrade der Teilchen. Sie besitzt drei massive Eichbosonen<sup>11</sup>, das  $W^{+-}$ ,  $W^-$ - und  $Z^0$ -Boson.

Die gesamte eichtheoretische Formulierung hat den erkenntnistheoretischen Vorteil, dass sie alle existierenden Kräfte der Welt auf ein universelles Grundprinzip zurückführt:

<sup>9</sup>Die homogene Yang-Mills-Gleichung ergibt sich aus der Yakobi Identität

$\mathcal{F}_{[\mu\nu|\lambda]} := [D_\lambda, \mathcal{F}_{\mu\nu}] + [D_\mu, \mathcal{F}_{\nu\lambda}] + [D_\nu, \mathcal{F}_{\lambda\mu}] = 0$  (siehe Anhang B).

<sup>10</sup>Wie wir in Kapitel 2 sehen werden, ist die eichtheoretische Formulierung der Gravitationskraft von der Struktur ihrer Symmetriegruppe unterschiedlich zu den anderen Wechselwirkungen.

<sup>11</sup>Die Masse der Eichbosonen wird durch die spontane Symmetriebrechung eines Higgsfeldes erzeugt.



Alle Kräfte die in der Welt auftreten werden durch Ungleichgewichte, d.h. Symmetriebrüche verursacht. Die so erzeugten Kräfte haben dann die Aufgabe einen Austausch zwischen den Ungleichgewichten zu schaffen, so dass im Ganzen das System wieder symmetrisch ist.

## 1.4 Die QuantenCromoDynamik

In diesem Unterkapitel werden einige wesentliche Eigenschaften der QCD zusammengefasst, die für das phenomenologische Verständnis dieser Wechselwirkung wichtig sind; dies sind die asymptotische Freiheit, das Confinement, der QCD-Phasenübergang und die Farbsupraleitung.

- Die asymptotische Freiheit

Betrachtet man ein System, das aus Quarks besteht und durch Gluonen zusammengehalten wird und erhöht die Gesamtenergie des Systems, durch Temperatur bzw. Dichte Erhöhung, so kann man durch störungstheoretische Berechnungen zeigen, dass der Kopplungsparameter  $g_3$  mit größer werdender Energie abnimmt.

Anschaulich bedeutet dies, dass die Wechselwirkung bei sehr heißen oder dichten Systemen zu vernachlässigen ist, da der  $g_3$ -Parameter verschwindend klein wird. Im akademischen Grenzfall unendlicher Temperatur bzw. Dichte wechselwirken die Quarks nicht mehr miteinander; sie bilden ein freies Quarkgas. Die QCD-Wechselwirkung ist demnach im asymptotischen Grenzfall  $T \rightarrow \infty$  bzw.  $\rho \rightarrow \infty$  nicht existent – sie ist asymptotisch frei.

- Das Confinement

Unter dem Begriff Confinement versteht man die Abgeschlossenheit der farbgeladenen Quarks zu zusammengesetzten farbneutralen (weißen) hadronischen Teilchen. Der Confinement-Prozess ist gerade der Gegensatz der zuvor besprochenen asymptotischen Freiheit. Zur Erläuterung dieser Eigenschaft betrachten wir das Innere eines hadronischen Teilchens, z.B. des Neutrons. Nehmen wir an, dass eines der drei Quarks des Neutrons zur Zeit  $t = 0$  zufällig einen entgegengesetzten Impuls relativ zu den beiden anderen besitzt. Die Quarkdichte zur Zeit  $t = 0$  sei

hoch, so dass die Stärke der QCD-Wechselwirkung, repräsentiert durch den Kopplungsparameter  $g_3$ , gering sei. Im Laufe der Zeit entfernt sich das Quark von den beiden anderen, so dass die Quarkdichte (Anzahl der umliegenden Quarks gemessen an seinem eigenen Ort) abnimmt, und somit die starke Wechselwirkung ( $g_3$ ) zunimmt. Der Kopplungsparameter wird dann so groß, dass man die entsprechenden Gleichungen nicht mehr störungstheoretisch behandeln kann. Man erkennt jedoch aufgrund dieser Eigenschaft, dass es den Quarks nicht mehr gelingt sich aus dem hadronischen Verbund zu befreien – es wird zurück gezogen und bleibt im 'Dreier-Verbund' confined.

- Der QCD-Phasenübergang

Als QCD-Phasenübergang bezeichnet man den Übergang von eingeschlossener Quarkmaterie hin zu freier Quarkmaterie. Zur Erläuterung betrachten wir einen Atomkern, bestehend aus Neutronen und Protonen, und erhöhen die Dichte des Systems. Beschreibt man der Einfachheit halber die Nukleonen als Kugeln mit dem Radius  $R_N = 1$  fm so erhält man aus einer simplen Volumenabschätzung, dass die Kugeln bei ca. zweifacher normaler Kerndichte aneinanderstoßen. Erhöht man die Dichte weiter, so steigt die Quarkdichte innerhalb der Nukleonen an, so dass die gluonische Wechselwirkung abnimmt und die Quarks sich aus ihrer nukleonischen Abgeschlossenheit befreien können. Bei diesem Prozess wechselt das System demnach von einer Phase bestehen aus Nukleonen hin zu einer Phase bestehen aus Quarks und Gluonen; das so genannte Quark-Gluon-Plasma. Da sich ein ähnlicher Prozess bei Erhöhung der Temperatur vollzieht, gelangt man qualitativ zu einem Phasendiagramm. Das genaue Verhalten des QCD-Phasenüberganges ist im einzelnen noch unklar und hängt von den Modellen und Annahmen ab, die man an das System stellt. Durch QCD-Gitterrechnungen und analytische Spezialisierungslösungen gelangte man im Laufe der Jahre zu folgendem quasi-quantitativen Phasendiagramm:

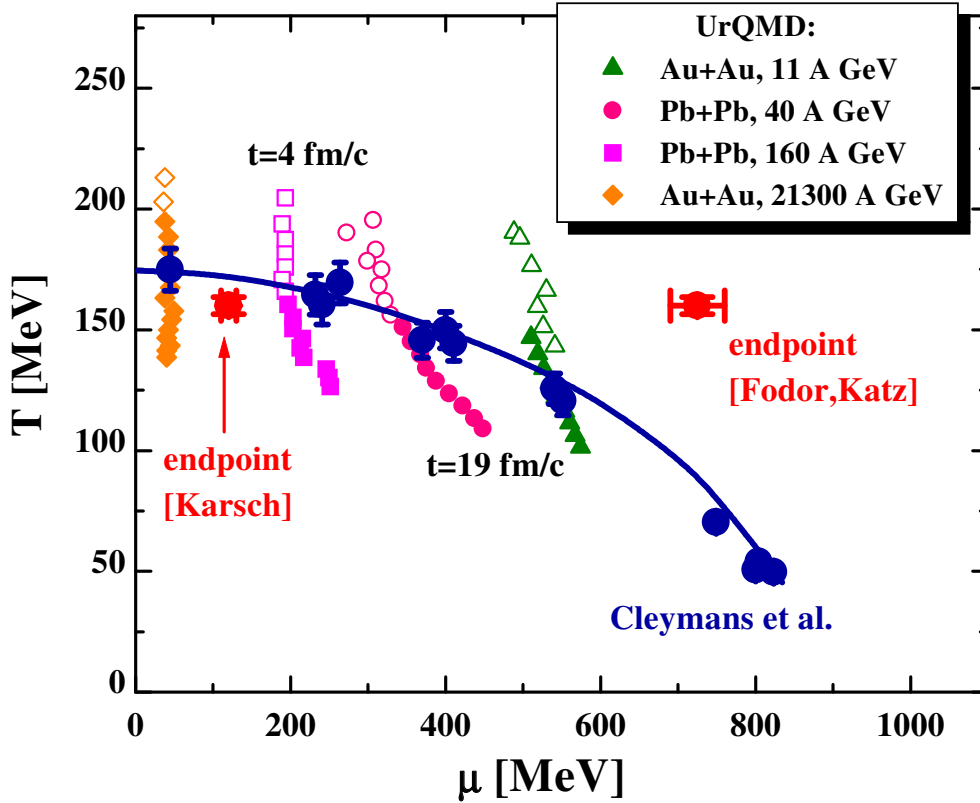


Abbildung 1.1: Durch numerische Berechnungen erhaltenes quasi-quantitatives QCD-Phasendiagramm (erstellt von Elena Bratkovskaya).  $\mu$  ist das barionische chemische Potential das bei steigender Dichte zunimmt.

Resultate von QCD-Gitterrechnungen zeigen, dass man bei verschwindender Dichte und ansteigender Temperatur einen 'Crossover'-Phasenübergang bei ca.  $T=170$  MeV erwartet. Bei hoher Dichte und kleiner Temperatur erwartet man dagegen einen Phasenübergang 1. Ordnung, wobei sich wohl zunächst, in einem gewissen Übergangsbereich der Dichte, eine gemischte Phase ausbildet. Bei sehr hohen Dichten ( $\rho > 5 - 10 \rho_0$ )<sup>12</sup> und geringen Temperaturen ist die Materie vollkommen deconfined. Unter diesen Bedingungen gruppiert sich ein Teil der Quarks zu Zweierpaaren und es bildet sich eine farbsupraleitende Phase aus (siehe Abb. 1.3).

<sup>12</sup> $\rho_0 := 0.15 \text{ fm}^{-3}$

- Die Farbsupraleitung

Die Supraleitung ist ein bekanntes Phänomen, dass bei vielen Metallen unterhalb einer kritischen Temperatur  $T_C$  auftritt. Der elektrische Widerstand in solchen supraleitenden Materialien verschwindet auf einen nicht messbar kleinen Wert. Theoretisch erklärt wird dieses Phänomen durch die BCS-Theorie:

Aufgrund der attraktiven Phononenwechselwirkung in metallischen Festkörpern ist es für die nicht gebundenen Elektronen, die sich an der Oberfläche der Fermikugel befinden, energetisch günstiger sich zu paaren. Die gepaarten Elektronen besitzen dann bosonische Eigenschaften – man nennt sie 'Cooper-Paare'. Die Bindungsenergie  $\Delta E$  der Cooper-Paare verursacht eine Energielücke zwischen dem Grundzustand und den angeregten Zuständen der Elektronen. Aufgrund dieser Eigenschaft ist es nun möglich Ladung von einem Ort zu einem anderen widerstandslos mit Hilfe der Cooper-Paare zu transportieren<sup>13</sup>.

Es wird nun erwartet, dass ein vergleichbares Phänomen bei sehr dichter, kalter Quarkmaterie auftritt. Aufgrund der attraktiven gluonischen Wechselwirkung paaren sich die Quarks an der Oberfläche der Fermikugel und bilden einen bosonischen Zustand – ein Quark-Cooper-Paar. Aufgrund der Cooper-Paar Bindungsenergie entsteht wiederum eine Energielücke, so dass die farbgeladenen Quark-Paare Farbladungen von einem Ort zu einem anderen widerstandslos transportieren können; dieses Phänomen bezeichnet man als Farbsupraleitung.

## 1.5 Heiße und hochdichte Materie

Wir sahen bisher aus welchen Bestandteilen die Welt zusammengesetzt ist und betrachteten die mathematische Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen in ihrer eichtheoretischen Formulierung am Beispiel der QCD. Der besprochene QCD-Phasenübergang von abgeschlossener hadronischer Materie hinzu befreiter Quarkmaterie ist unter irdischen Bedingungen nur mit riesigen Beschleuniger Anlagen (Cern, RICK) möglich (siehe z.B. [4]). In

---

<sup>13</sup>Bei zu hohen Ladungsstromdichten bricht die Supraleitung jedoch zusammen.

solchen Anlagen werden Atomkerne auf enorme Geschwindigkeiten ( $v \approx c$ ) beschleunigt und zu gegenseitiger Kollision gebracht. Man erzeugt dadurch kurzzeitig einen Zustand so hoher Energiedichte (Temperatur), dass man erwartet Materie im befreiten Zustand erzeugt zu haben. Dieser Zustand kühlt jedoch extrem schnell ab, so dass sich die Quarks wieder zu abgeschlossenen hadronischen Teilchen gruppieren. In den, der Kollision umgebenden Teilchendetektoren misst man pro Kernzusammenstoß einige Tausend geladener hadronischer Teilchen. Man versucht dann durch Analyse der Teilchenbahnen zu unterscheiden, ob sich eine Phase befreiter Quarkmaterie gebildet hat oder nicht. Ein stichhaltiges Indiz, welches zweifelsfrei eine Signatur eines befreiten Quarkzustandes zeigt, wurde trotz erheblicher theoretischer und experimenteller Anstrengungen nach meiner Meinung bisher nicht gefunden; es häufen sich jedoch in jüngster Zeit mehrere Teil-Indizien die eine Erzeugung eines solchen Zustandes nahe legen. Nach ihrer Kollision hinterlassen die beiden Kerne einen kleinen Raumzeitbereich extrem hoher Energiedichte. Die Temperatur in diesem Raumzeitbereich ist extrem hoch, wohingegen die Teilchendichte unterhalb normaler Kerndichte liegt. Dieser hochdichte Energieklumpen (Feuerball) ohne Form, bestehend aus farbgeladenen Quarks und Gluonen erfährt dann seine Verkörperung durch das Abkühlen und Ausfrieren in hadronische Teilchen. Der Zustand, der auf eine solche Weise künstlich erzeugt wird ähnelt dem Zustand der Materie kurz (ca.  $10^{-5}$  s) nach dem Urknall vor ca. 13 Gigajahren und hat somit enorme astrophysikalische Relevanz, da sich aus ihm das gesamte Universum formte.

Die Entstehung des Universums stellt man sich theoretisch wie folgt vor: Am Anfang zur Zeit  $t = 0$  war die gesamte Energie in einem Raumzeitpunkt konzentriert. Die Energiedichte war unendlich groß, so dass man diesen Raumzeitpunkt mathematisch als echte Singularität beschreibt<sup>14</sup>. Die Phase kurz nach der Singularität bezeichnet man als Inflation. In dieser inflationären Phase beschreibt man die Energie als einen Zustand eines skalaren Feldes  $\phi(x^\mu)$ ; in dieser Phase dehnt sich das Universum exponentiell schnell aus. In der darauf folgenden Phase entwickeln sich die heute bekannten elementaren Teilchen und ihre Wechselwirkungen werden durch spontane Symmetrieb-

---

<sup>14</sup>Diese klassische Sichtweise des 'Anfangs' wird sicherlich noch durch Quanteneigenschaften abgeändert werden; unterschiedlichste Ansätze existieren schon.

rechnungen erzeugt. Die Phase des extrem heißen Quark-Gluon-Plasmas entsteht, worauf dann die Phase der hadronischen Ausfrierung, das Confinement der Quarks folgt. Nun beginnt die Phase der Nukleosynthese in der sich die hadronischen Teilchen zu Kernen formen und durch Elektronen-Einfang die ersten Atome formen. Die direkte Überprüfung dieses theoretischen Modells ist nicht möglich, da das Universum erst nachdem sich die Atome gebildet haben für elektromagnetische Strahlung durchlässig wird. Die 2.7 Kelvin Hintergrundstrahlung, die man gleichförmig als Strahlungshintergrund wahrnimmt, stellt gerade diesen Zeitpunkt des Universums dar. Möchte man das Universum zu noch jüngeren Zeiten beobachten, so ist dies mit Hilfe einer auf elektromagnetischen Wellen basierenden Astronomie nicht möglich, sondern man muss zu einer Gravitationswellen-Astronomie übergehen.

Um nicht den Hauptfaden zu verlieren möchte ich nun vorgreifen und auf das eigentliche Anliegen der Promotionsarbeit zurück kommen. Neben der extrem heißen QGP-Phase im frühen Universum existiert nämlich eine weitere Möglichkeit im Universum die Materie (auf natürliche Weise) zu extremen Energiedichten zusammenzupressen, so dass erneut der QCD-Phasenübergang überschritten werden kann. Im Laufe der Evolution des Universums bilden sich ja bekanntlich unter anderem Galaxien, Sonnensysteme und Sterne. Der Sterbeprozess von Sternen hängt maßgeblich von der Gesamtmasse des Sterns ab (siehe Anhang C). Sterne, deren Gesamtmasse mindestens acht mal größer sind, als die Masse unserer Sonne, explodieren am Ende ihrer Lebensdauer in einer Supernova-Explosion. Der hochdichte innere Kern des Sterns kollabiert jedoch aufgrund der gewaltigen Gravitationskräfte. Bei diesem Gravitationskollaps des inneren Teils des Sterns wird seine, in ihm befindliche Materie immer weiter komprimiert und deshalb immer dichter. Welcher Zustand der Materie am Ende des Gravitationskollapses realisiert wird, hängt von der Ausgangsmasse des ursprünglichen Sterns ab. Endet der Gravitationskollaps vor Erreichen des QCD-Phasenüberganges, so nennt man das Endstadium Neutronenstern; überschreitet dagegen ein Teil der Materie den QCD-Phasenübergang, so nennt man das Endstadium Hybrider- bzw. Quarkstern. Schreitet der Kollaps jedoch unaufhaltsam voran, so durchschreitet die Materie zwar den Phasenübergang und wird befreit; sie wird jedoch unweigerlich durch eine Ereignishorizontbildung raumzeitlich gefangen (siehe

Kapitel 2) – ein schwarzes Loch entsteht.

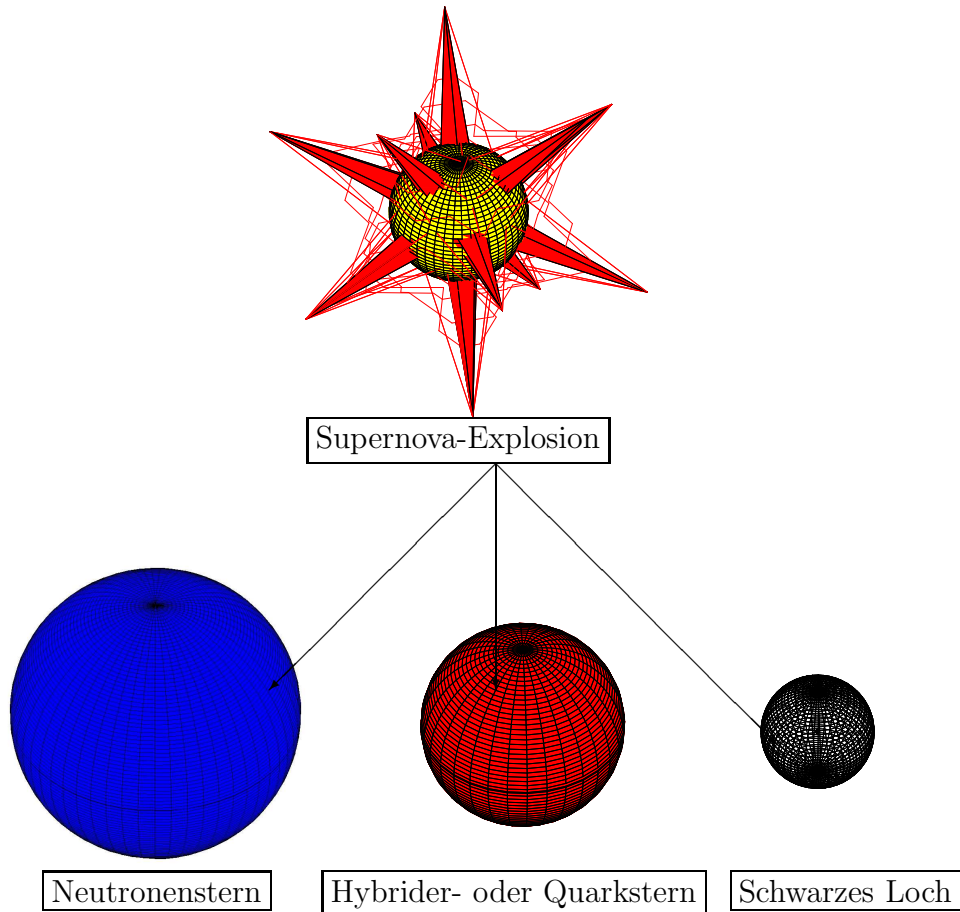


Abbildung 1.2: Neutronensterne, Hybride- und Quarksterne als mögliche Endzustände einer Supernova-Explosion.

Ordnet man die jeweiligen Endzustände hinsichtlich ihrer zentralen Dichten im QCD-Phasendiagramm an, so ergibt sich qualitativ das folgende Bild:

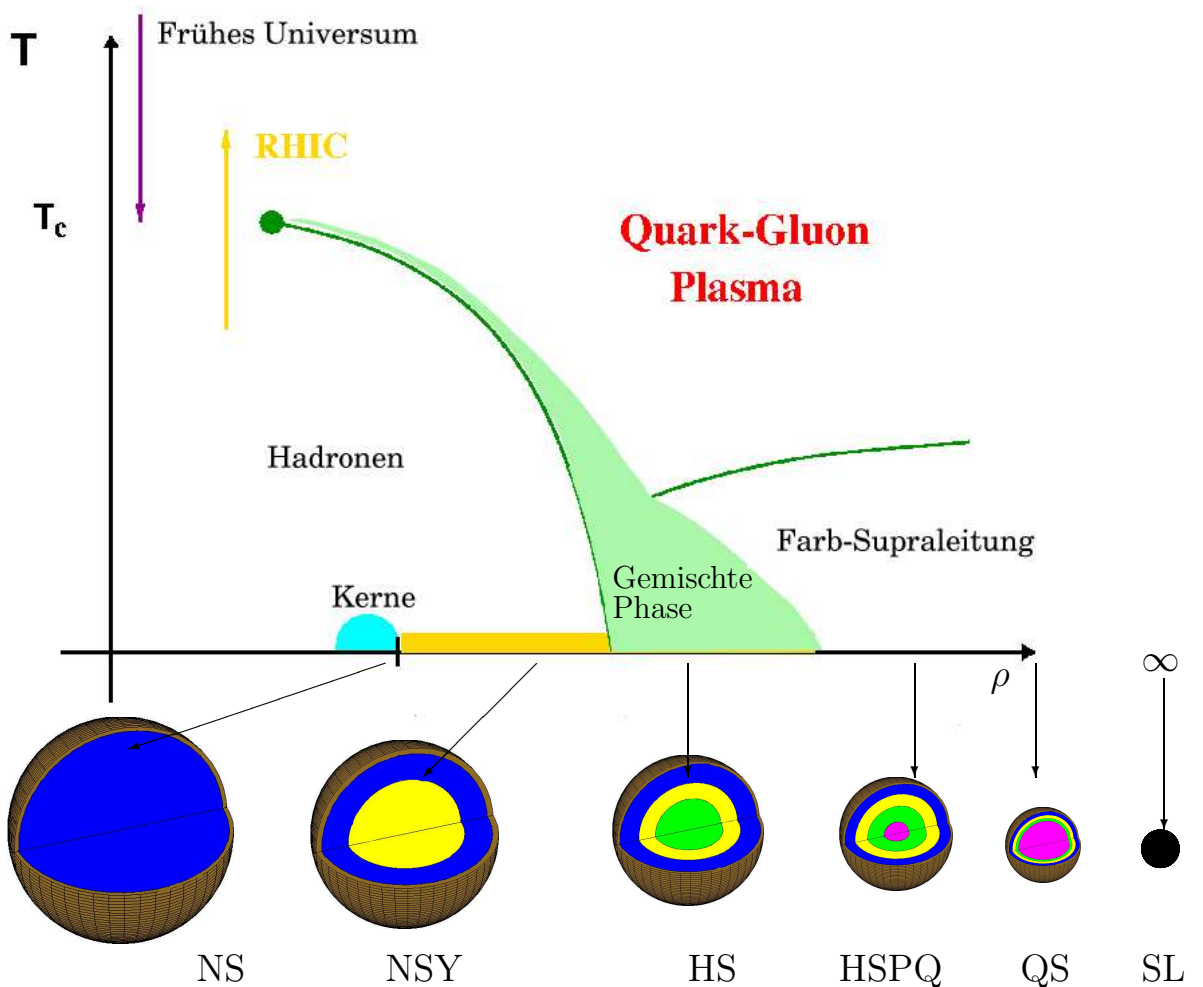


Abbildung 1.3: QCD-Phasendiagramm mit kompakten Sternen. NS: Neutronenstern, NSY: Neutronenstern mit innerem hyperonischen Kern, HS: Hybrider Stern mit gemischter Phase, HSPQ: Hybrider Stern mit innerem reinen Quarkkern, QS: Quarkstern (besteht maßgeblich aus (farb-supraleitender) Quarkmaterie), SL: Schwarzes Loch mit zentralem singulären Dichtezentrum.

Obwohl die zentrale Energiedichte im Inneren eines Quarksterns weit über der nötigen Energiedichte des QCD-Phasenüberganges liegt, durchschreitet seine Materie das gesamte Spektrum der Zustandsformen bis hin zum Vakuum am Sternrand.

Um die Zusammensetzung eines Quarksterns zu verstehen, stellen wir uns im folgenden vor, wir würden uns auf der Oberfläche eines solchen Sterns befinden und uns zum Sternzentrum hindurch graben:



Nach einer dünnen Atmosphärenschicht gelangt man zunächst zur äußeren Kruste des Sterns bestehend aus Metall, d.h. aus einem Gitter aus Atomkernen umschwirrt von einem Gas aus Elektronen. Nach ca. 500 Metern beginnt dann die innere Kruste, die aus schweren Atomkernen besteht, die in einem Gas aus Elektronen und Neutronen eingebettet sind. Die Anzahldichte der Neutronen nimmt zu, je tiefer man in die innere Kruste eindringt und die Atomkerne rutschen immer enger zusammen. Nach weiteren 500 Metern sind die Atomkerne so eng aneinander gerutscht und die Anzahldichte von Neutronen im Elektron-Neutronengas ist so hoch, dass eine Unterscheidung immer schwieriger wird; die Energiedichte ist kurz vor der normalen Kerndichte  $\epsilon_0$ . Hier beginnt nun ein neuer Bereich, den man den Bereich hadronischer Materie nennt. Die Materie besteht hier aus einer hochdichten Flüssigkeit bestehend aus ca. 90 Prozent Neutronen und 10 Prozent Protonen und Elektronen. Dringt man tiefer in die hadronische Phase ein, so verschieben sich die relativen Teilchenverhältnisse und es können andersartige hadronische und leptonische Teilchen (wie z.B. Hyperonen oder Muonen) auftreten. Die Zusammensetzung der hadronischen Phase ist abhängig von der Gesamtmasse des Sterns und dem verwendeten hadronischen Modell einige Kilometer dick. Am Ende dieser Phase ist die Materie so dicht (2 – 5 fache normale Kerndichte) dass sich die Zustandsfunktionen der hadronischen Teilchen stark überlagern, so dass ihre Quarkunterstruktur in Betracht gezogen werden muss. Dies ist die Grenze im Stern, wo der QCD-Phasenübergang eintritt und die Quarks von ihrem hadronischen Käfig befreit werden. Wie genau sich dieser Übergang im Sterninneren verhält hängt von den jeweiligen Modellen und der Konstruktion des Phasenüberganges ab; qualitativ ergeben sich jedoch zwei mögliche Szenarien. Entweder existiert eine klar definierte Grenze zwischen dem Hadronischen- und Quark-Bereich, oder es existiert ein Übergangsbereich (einige Kilometer dick) einer gemischten Phase bestehend aus Anteilen von confineter hadronischer und deconfineter Quarkmaterie; diesen Bereich nennt man 'Gemischte Phase'. Am Anfang einer solchen gemischten Phase entstehen zunächst kleine Tröpfchen aus freier (deconfineter) Quarkmaterie. Dringt man weiter ins Innere der gemischten Phase ein, so vereinen sich die Tröpfchen zu Fäden und dannach zu deconfineten Schichten. Dringt man noch tiefer ein, so nimmt der Anteil hadronischer Materie stetig ab, bis

am Ende der gemischten Phase lediglich kleine Kügelchen aus hadronischer Materie übrig bleiben. Noch tiefer gelangt man dann zu dem Bereich befreiter Quarkmaterie – dem Quark-Gluon-Plasma. Dieses dargestellte theoretische Bild eines Hybriden- bzw. Quarksterns erhält man, wie wir im Kapitel 3 sehen werden, aus quantitativen numerischen Modellrechnungen, in die einerseits die Modelle der Elementarteilchen und andererseits die Allgemeine Relativitätstheorie einfließen.

Im Gegensatz zu den nicht direkt messbaren Observablen des QGP in Teilchenbeschleunigern und im frühen Universum existiert eine Möglichkeit von klaren Indikatoren des QCD-Phasenüberganges beim Studium der Eigenschaften von kompakten Sternen; diese sind am Ende des Kapitels 3 zusammengefasst. Im Kapitel 3 wird unter anderem beantwortet unter welchen Bedingungen Hybride- und Quarksterne stabil existieren können und ob dadurch ein Zustand wirklich freier Quarkmaterie realisiert ist.

Kann ein möglicher Gravitationskollaps zu einem schwarzen Loch vielleicht sogar durch die elementaren Eigenschaften der Materie aufgehalten werden? Man wird beim Studium dieser Frage erkennen, dass in kompakten Sternen die raumzeitliche Abschließung durch die Ereignishorizontbildung mit der Befreiung der Materie (dem Prozess des Deconfinements) zusammenfällt. Die unserer Welt nicht zugänglichen Farbeigenschaften der Quarks, die die stärkste aller Wechselwirkungen (die QCD) durch den Symmetriebrech ihrer Farbungleichgewichte erzeugt, können im Inneren von kompakten Sternen sichtbar werden. Wenn jedoch diese, uns nicht direkt erfahrbaren Ungleichgewichte, durch weitere Kompression des Sterns an die Oberfläche vordringen wollen um ihre unverkörperpte (unabgeschlossene, freie, deconfined) Energie uns direkt zu offenbaren, verhindert die schwächste aller Wechselwirkungen (Gravitation, ART) eine Kontaktaufnahme. Die schwächste aller Wechselwirkungen, beschrieben durch die ART, ist unabhängig von der jeweiligen Verkörperungsart der Energie und wirkt allein durch Verformungen der raumzeitlichen Struktur. Sie besagt, dass jegliche Energieformen als Verformungen der raumzeitlichen Struktur aufzufassen sind. In der ART besteht die Welt aus Verformungen der raumzeitlichen Struktur und Verkörperungen der Energie.

# Kapitel 2

## Allgemeinen Relativitätstheorie

### 2.1 Einführung

Die Welt besteht aus unterschiedlichen Verkörperungen der Energie (siehe Kapitel 1); aber worin verkörpert sich diese Energie, die wir dann z.B. als Gegenstände, Wellen oder Elementarteilchen wahrnehmen? Die subjektive Wahrnehmung der Welt geschieht stets im 'Hier und Jetzt', d.h. an einem definierten Ort zu einer definierten Zeit – an einem definierten Raumzeitpunkt. Die Energie verkörpert sich demnach in einem 4-dimensionalen Raum, den wir im folgenden als die 'Raumzeit' bezeichnen. Allein dadurch wird die Energie in eine Form gebracht, so dass wir mit ihr in Kontakt treten können – sie materialisiert in unserer Raumzeit. Die Raumzeit ist die nötige Leinwand, auf der sich die Erscheinungen der Welt wie Bilder projizieren; sie ist der Raum unserer Welt, in dem sich die Energie verkörpern kann. Die Welt besteht demnach aus unterschiedlichen Verkörperungen der Energie in unserer Raumzeit.

Jede Art von physikalischer Beschreibung, deren Richtigkeit man experimentell überprüfen möchte, muss sich zumindest bei der Angabe ihrer theoretisch erzielten Resultate in unserer Raumzeit aufhalten, sonst ist sie nicht verifizierbar.

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist eine Theorie der Raumzeit. Sie beschreibt, unter welchen Bedingungen sich die Struktur und Form der Raumzeit ändert. Die Grundidee der ART findet ihre mathematische Formu-

lierung in der sog. 'Einsteingleichung', die von mathematisch interessierten Ästetikern oft als 'Schönste Gleichung der Physik' bezeichnet wird. Nach meiner Meinung liegt jedoch die eigentliche 'Schönheit' dieser Gleichung nicht in ihrer mathematischen Formulierung, sondern sie ist herausragend aufgrund der Idee selbst und aufgrund ihrer physikalischen Einfachheit:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu}}_{\text{Verformung der Raumzeit}} = \frac{8\pi G}{c^4} \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{Energieformen des System}} \quad (2.1)$$

Die Einsteingleichung besagt, dass jegliche Energieformen die Raumzeit verändern; je mehr Energie sich an einem Ort befindet, desto mehr verbiegt sich die Raumzeit. Genauso wie das Bild eines Künstlers sich verändert, wenn er auf einer gebogenen Leinwand malt, so verändern sich die physikalischen Prozesse, wenn der raumzeitliche Untergrund sich verbiegt. Die geniale Idee der ART ist nun, dass sie die anscheinenden Kräfte die durch die Raumzeitkrümmung auftreten, mit der Gravitationskraft gleichsetzt. In der ART wird die, zwischen zwei Körpern wirkende Gravitationskraft verursacht durch eine Raumzeitkrümmung.

Nehmen wir als Beispiel unsere Erdkugel: Die gesamte Energie, die in der Erde steckt, krümmt die Raumzeit. Die Gravitationskraft (Erddanziehungskraft), die wir auf der Oberfläche der Erde ständig spüren, ist eigentlich nichts anderes als die durch die Erdenergie verursachte Raumzeitkrümmung. Die Gravitationskraft ist die einzige aller bekannten elementaren Kräfte, die unser Leben ständig fühlbar begleitet. Wir können sie unter irdischen Bedingungen nicht einfach abschalten oder abschirmen. Sie begleitet unnachgiebig unser tägliches Leben und verleiht ihm einen anstrengenden, schwerevollen Charakter (z.B. Treppensteigen, Tragen von Einkaufstüten, Glas fällt vom Tisch usw.). Nur wenige Menschen sind bisher in den Genuss des befreienden Gefühls der Schwerelosigkeit gekommen<sup>1</sup> – dem Menschheitstraum vom Fliegen ohne Hilfsmittel.

Die Gravitationskraft unterscheidet sich demnach in ihrem Ursprung von den anderen drei elementaren Wechselwirkungen. Die elektrodynamische,

---

<sup>1</sup>Ich zähle hier nur Astronauten zu dieser Gruppe und nicht Personen, die durch Willenskraft (Meditation, Luizides träumen) lediglich das Gefühl der Schwerelosigkeit zulassen können.

schwache und starke Wechselwirkung erzeugen die Kräfte durch den Austausch ihrer zugehörigen Eichfelder in gegebener raumzeitlicher Struktur. Die Gravitationstheorie dagegen beschreibt den nötigen Untergrund der raumzeitlichen Struktur und erwirkt dadurch einen Einfluss auf die Bewegung der in ihr befindlichen Teilchen und Felder. Jede Form von Energie in unserer Raumzeit (die Sonne, die Erde, der Mensch, ein Buch oder ein Fußball) krümmt die Raumzeit in seiner Umgebung und bewirkt so eine resultierende attraktive Kraft auf Körper in seiner Umgebung. Je mehr Energie sich an einem Raumzeitpunkt befindet, desto größer ist die Raumzeitkrümmung in seiner Umgebung.

Die Gravitationskraft, beschrieben als Raumzeitkrümmung durch die ART, besitzt eine interessante Eigenschaft, die bei der Beschreibung von sehr energiereichen Systemen auftritt. Zur Veranschaulichung dieser Eigenschaft betrachten wir uns die im Außenraum entstehende Raumzeitkrümmung eines isolierten Körpers, z.B. eines Tennisballs. Durch Angabe der Gesamtenergie des Tennisballs läßt sich mit Hilfe der Einsteingleichung, die durch ihn verursachte Raumzeitkrümmung berechnen. Diese ist aufgrund des niedrigen Energiegehalts des Balls verschwindend gering, was bedeutet, dass Körper in seiner Umgebung 'so gut wie nicht' von ihm angezogen werden. Wir stellen uns nun vor, dass der Tennisball aus einem viel energiereicheren Material bestehen soll, so dass der Tennisball genau soviel Energie beinhaltet, wie der gesamte Energiegehalt der Erde. Würde man einen solchen Tennisball anstelle der Erde in unser Sonnensystem platzieren, so würde sich die Raumzeit um ihn so stark krümmen, dass unser Mond in gleicher Weise um diesen Ball kreisen würde, wie er sonst um die Erde kreist. Die Gravitationskraft die auf der Oberfläche eines solchen Balls wirken würde, wäre um ein vielfaches stärker als unsere Erdanziehungskraft. Erhöht man den Energiegehalt des Tennisballs weiter, so tritt bei ca. 12 Erdenergien ein eigenartiges Phänomen auf. Ein Tennisball mit einem Energiegehalt von 12 mal dem Energiegehalt der Erde würde die ihn umgebende Raumzeit so stark krümmen, dass man als äußerer Beobachter den Ball gar nicht mehr sehen könnte, da selbst Lichtstrahlen es nicht mehr gelingt von seiner Oberfläche zu entweichen. Die raumzeitliche Struktur wird so stark verformt, dass der Ball selbst sich im Laufe der Zeit unaufhaltsam zusammenziehen muss, bis seine gesamte Energie in

seinem Mittelpunkt vereint ist. An dem Ort seiner ursprünglichen Oberfläche entsteht ein raumzeitliches Phänomen, dass man mit dem Begriff 'Ereignishorizont' bezeichnet. Der Tennisball kann somit seine ursprüngliche Form nicht mehr beibehalten und muss zwangsläufig zu einem schwarzen Loch kollabieren. Materie, die sich innerhalb des Ereignishorizontes befindet kann nicht mehr mit der Außenwelt kommunizieren; es bildet sich ein getrennter, in sich abgeschlossener raumzeitlicher Bereich.

Würden wir als weit entfernter äußerer Beobachter einen Gegenstand (z.B. eine Murmel) in dieses tennisball-große schwarze Loch werfen, so würden wir das folgende beobachten: Die Murmel würde zunächst, aufgrund der großen gravitativen Kraft, immer schneller in Richtung des schwarzen Loches fallen. Kurz vor Erreichen des Ereignishorizontes verlangsamt sich die Murmel jedoch und kommt anscheinend am Ereignishorizont zum Stehen (näheres siehe später). Die Frequenz des von der Murmel ausgesandten Lichts wird gleichzeitig immer weiter in den roten Bereich verschoben. Das anscheinende Bild der Murmel 'friert ein' und verblasst, wie die Erinnerung an einen verlorenen Gegenstand. Die Reise zum schwarzen Loch aus der Sichtweise der Murmel sieht jedoch qualitativ vollkommen anders aus. Sie selbst überschreitet den Ereignishorizont ohne Hindernisse<sup>2</sup>. Sie kann jedoch nach dem Überschreiten dieser Grenze nicht mehr mit der Welt des äußeren Beobachters kommunizieren; sie kann ihm nicht mehr berichten, dass sie noch existiert. Der äußere Beobachter, der die Grenze des Ereignishorizontes nicht überschritten hat behält seine eigene Wirklichkeit der Welt, die er durch den visuellen Eindruck, des Einfrierens des Bildes der Murmel am Horizont gewinnt – die Murmel selbst weiß es besser, kann dies dem Beobachter jedoch nicht mitteilen. Diese Eigenschaft der raumzeitlichen Struktur von schwarzen Löchern hat von ihrer phänomenologischen Interpretation vieles mit dem 'Sterben' gemeinsam. Wenn ein Mensch stirbt, hinterlässt er seinen Mitmenschen das Bild verblassender Erinnerungen. Über sein unkörperliches Selbst, das die Grenze des Todes überschritten hat, können wir nichts mehr erfahren. Im 'Hier und Jetzt' des äußeren Beobachters bleibt, unabhängig von der jeweiligen Denkrichtung, allein der Glaube, bis man selbst die Grenze überschreitet.

---

<sup>2</sup>Wir betrachten hierbei nicht den Einfluss der starken Gezeitenkräfte auf die Murmel.

Es existieren in unserem Universum zwei mögliche Kandidaten von schwarzen Löchern. Die ersten sind sehr große, massive schwarze Löcher, die sich im Zentrum von Galaxien aufhalten. Ihre Existenz ist weitgehend experimentell gesichert<sup>3</sup>, wobei ihre Entstehung noch nicht stichhaltig geklärt ist. Die zweite Art von schwarzen Löchern besitzen den Energiegehalt von einigen Sonnenmassen und sind im Vergleich zu anderen astrophysikalischen Objekten relativ klein (Radius von einigen Kilometer). Sie entstehen als Endprodukte des Sterbeprozesses eines massiven Sterns. Das Sterninnere eines, in einer Supernova explodierenden Sterns, kollabiert und verdichtet sich unaufhaltsam, falls es nicht sein vorläufiges Endstadium in einem Neutronenstern findet. Während des Kollaps wird einerseits im Sternzentrum die Materie von ihrer hadronischen Abgeschlossenheit befreit, andererseits unterschreitet die Oberfläche des kollabierenden Sterns die Grenze des Ereignishorizontes und wird von der äußeren Welt raumzeitlich abgeschlossen. Die unserer Welt nicht zugänglichen Farbeigenschaften der Quarks können somit ihr Wesen wiederum nicht der Außenwelt offenbaren.

## 2.2 Formulierung der ART

Im folgenden werden die Grundlagen der ART dargestellt. Die Darstellung wird nicht in der eleganteren Koordinaten unabhängigen Formulierung erfolgen, da wir die deduzierten Gleichungen für quantitative Rechnungen später benötigen werden.

Wir stellen uns die Raumzeit als einen abstrakten vierdimensionalen Raum vor. Die Koordinaten von Teilchen und Ereignissen in diesem Raum beschreiben wir durch einen vierdimensionalen Vektor  $x^\mu := (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Die Koordinate  $x^0 = ct$  beschreibt den Koordinatenzeitpunkt des Ereignisses multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ ;  $x^1, x^2$  und  $x^3$  beschreiben dagegen die kartesischen Koordinaten des räumlichen Or-

---

<sup>3</sup>Die experimentell gesicherte Existenz von galaktischen schwarzen Löchern ist jedoch eigentlich nicht mehr als eine indirekte Evidenz. Sie benötigt die derzeitige Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie, so dass es sich bei den galaktischen Kernen auch um sehr massive und dichte Energieanhäufungen handeln kann. Der direkte Nachweis der Existenz eines Ereignishorizontes steht noch aus.

tes des Ereignisses. Der infinitesimale raumzeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen, das so genannte Weglängenelement  $ds$ , ist dann wie folgt definiert:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.2)$$

Wobei die  $4 \times 4$ -Matrix  $\eta_{\mu\nu}$  die Minkovski-Metrik der flachen Raumzeit darstellt

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (2.3)$$

Die objektiven physikalischen Phänomene dürfen nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, da die gewählte Art der Beschreibung subjektiv vom Beobachter abhängt. In der speziellen Relativitätstheorie ist dies nur für Koordinatentransformationen gegeben, die zwischen Inertialsystemen (gleichförmig zueinander bewegten Systemen) transformieren. Betrachtet man z.B. die Bewegung eines Pendels, in einer Wohnung und in einem sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegenden Zuges, so stimmen die Bewegungen überein, wenn man die Koordinaten  $x^\mu$  des in der Wohnung ruhenden Pendelsystems mit Hilfe der Lorentztransformation  $L^{\nu'}{}_\mu = (\partial x^{\nu'})/(\partial x^\mu)$  in das Inertialsystem des Zuges  $x^{\nu'}$  transformiert:

$$x^{\nu'} = L^{\nu'}{}_\mu x^\mu = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu} x^\mu \quad (2.4)$$

Jegliche messbaren physikalischen Größen müssen sich unter Lorentztransformationen kovariant verhalten; Skalare Größen (wie z.B.  $ds$ ,  $\mathcal{L}$ ) müssen sich invariant verhalten ( $ds' = ds$ ,  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ ).

Wenn man jedoch Koordinatentransformationen zwischen zueinander beschleunigten Bezugssystemen zuläßt, dann verändert sich anscheinend die Physik des betrachteten Systems. Befindet sich der Zug gerade in einem Beschleunigungs- oder Bremsprozeß, so pendelt das Pendel im Zug anders als das in der Wohnung. Die Transformation, die zwischen den zueinander beschleunigten Systemen transformiert, wird selbst eine Funktion der Koor-



dinaten:

$$\underbrace{L^{\nu'}_{\mu} = \text{konstant}}_{\text{Transf. zwischen Inertialsystemen}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{L^{\nu'}_{\mu}(x^{\alpha}) = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}}(x^{\alpha})}_{\text{Transf. zwischen beschleunigten Systemen}} \quad (2.5)$$

Das Weglängenelement  $ds'$  im beschleunigten System besitzt nun die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} (ds')^2 = dx_{\mu'} dx^{\mu'} &= \eta_{\mu\nu} L^{\mu}_{\mu'}(x^{\alpha}) L^{\nu}_{\nu'}(x^{\alpha}) dx^{\nu'} dx^{\mu'} & (2.6) \\ &=: g_{\mu'\nu'}(x^{\alpha}) dx^{\nu'} dx^{\mu'} \end{aligned}$$

Unter solchen Transformationen bleibt somit die Minkovski Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  nicht mehr invariant, sondern sie wird raumzeit-abhängig. Einsteins Grundidee zur Formulierung der ART war nun die folgende: Aufgrund des Äquivalenzprinzips, in dem die träge Masse eines Körpers gleich der gravitativ wirkenden, schweren Masse des Körpers ist, ist eine Unterscheidung zwischen Gravitationskräften und Beschleunigungskräften nicht möglich. Betrachten wir z.B. ein Pendel auf der Erde, das aufgrund des Gravitationsfeldes der Erde pendelt und ein Pendel im leeren Raum, das stetig mit konstanter Beschleunigung  $b_g = 9.81 \text{ m/s}^2$  nach oben beschleunigt wird. Die beiden Systeme sind vollkommen äquivalent, d.h. unterscheiden sich nicht in ihren physikalischen Bewegungen.<sup>4</sup> Wir sahen, dass wir bei der Beschreibung von beschleunigten Systemen zu einer raumzeitabhängigen Metrik  $g_{\mu\nu}$  übergehen mussten. Aufgrund des Äquivalenzprinzips bedeutet das, dass wir bei der Beschreibung von Systemen, die unter gravitativem Einfluss stehen, ebenfalls zu einer raumzeitabhängigen Metrik übergehen können, und somit die gravitative Wechselwirkung durch die Eigenschaften des Raumes beschreiben:

$$\begin{array}{ccc} \eta_{\mu\nu} & \Rightarrow & g_{\mu\nu}(x^{\alpha}) \\ \text{Flache Raumzeit} & & \text{Gekrümmte Raumzeit} & (2.7) \\ \text{Kein Gravitationsfeld} & & \text{Gravitation} \\ \text{Inertialsystem} & & \text{Beschleunigtes System} \end{array}$$

---

<sup>4</sup>Foucault'sche Effekte, die aufgrund der Erdrotation auftreten werden bei dieser Betrachtung vernachlässigt.

Wie bewegt sich nun ein Teilchen in einer durch Gravitationsfelder gekrümmten Raumzeit? Aufgrund des Hamilton'schen Prinzips der kleinsten Wirkung sollte das Teilchen den Weg des kleinsten Widerstandes wählen. Falls keine weiteren Kräfte auf das Teilchen einwirken, wird die realisierte Bahn des Teilchens die minimalste Strecke zwischen zwei Raumzeitpunkten  $A$  und  $B$  sein

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \rightarrow \text{minimal!} \quad , \quad (2.8)$$

was man als eine Gerade in der gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit bezeichnen kann. Parametrisiert man die Raumzeitkurve  $x^\alpha$  mit einem affinen Parameter  $\lambda$ ,<sup>5</sup> so muss die Weglänge bezüglich infinitesimaler Weg-Variationen  $\delta_{x^\alpha(\lambda)}$  verschwinden

$$\delta_{x^\alpha(\lambda)} \int_A^B ds = \delta_{x^\mu(\alpha)} \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (2.9)$$

$$= \delta_{x^\alpha(\lambda)} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = 0 \quad . \quad (2.10)$$

Die dadurch entstehende Euler-Lagrangegleichung bezeichnet man als Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad , \quad (2.11)$$

wobei die Tensoren  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  als Christoffelsymbole bzw. Konnexionen bezeichnet werden

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} (g_{\mu\nu|\lambda} + g_{\lambda\nu|\mu} + g_{\mu\lambda|\nu}) \quad . \quad (2.12)$$

Mit Hilfe der Geodätengleichung können wir also berechnen, wie sich Teilchen in vorgegebener gekrümmter Raumzeit bewegen müssen. Wie jedoch berechnet man wie stark die Raumzeit gekrümmt ist, d.h. wie berechnet man das konkrete Aussehen des raumzeitabhängigen metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$  - wie berechnet man die Stärke der Gravitationsfelder? Bei der eichtheoretischen Formulierung der QCD sahen wir, dass die Eichforderung  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ , d.h. die Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen  $SU(3)_{(c)}$  Farbtransformationen nur zu realisieren war, wenn man die gluonischen Eichfelder der Theorie hinzufügte. Man musste einerseits alle partiellen Ableitungen durch kovariante

---

<sup>5</sup> $\lambda$  wird später die Rolle der Eigenzeit  $\tau$  des Teilchens annehmen ( $d\tau = ds/c$ ).

Ableitungen ersetzen ( $\partial_\mu \rightarrow D_{\mu a}{}^b = \partial_\mu 1_a^b + ig_3 G_{\mu a}{}^b$ ) und andererseits die durch den Kommutator der kovarianten Ableitungen gebildeten gluonischen Feldstärken der Lagrangedichte als kinetische Eichtherme hinzufügen

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu a}{}^b F^{\mu\nu}{}^a{}_b \quad (2.13)$$

$$\text{mit: } F_{\mu\nu a}{}^b = \frac{i}{g_3} [D_{\mu a}{}^c, D_{\nu c}{}^b] = (G_{\nu i|\mu} G_{\mu i|\nu} - g_3 f^{jk}{}_i G_{\mu j} G_{\nu k}) \tau_a{}^i{}^b \quad .$$

Möchte man eine physikalische Theorie in gekrümmter Raumzeit allgemeinrelativistisch kovariant formulieren, so kann man in gleicher Weise eichtheoretisch vorgehen. Fordert man als eichtheoretischen Ansatz der klassischen Gravitationstheorie eine Invarianz der Physik unter lokalen Raumzeit-Transformationen (Gruppe der Diffeomorphismen), so muss man zu kovarianten Ableitungen übergehen, damit sich die Ableitungen von Vektoren und Tensoren tensoriell transformieren, und somit die physikalischen Aussagen der Gleichungen nicht mehr von der Wahl des Koordinatensystems abhängen. Die allgemeinrelativistisch kovariante Ableitung eines Vierervektors  $A^\mu$  lautet

$$A^\mu{}_{||\nu} := A^\mu{}_{|\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^\mu A^\beta \quad . \quad (2.14)$$

Damit die kovariant abgeleiteten Größen auch wirklich ein tensorielles Transformationsverhalten besitzen, müssen sich die Konnexionen  $\Gamma_{\beta\nu}^\mu$  wie folgt transformieren

$$\Gamma_{\beta'\nu'}^{\mu'} = \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma L^\sigma{}_{\nu'} L^{\rho'}{}_{\beta'} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho \partial x^\alpha} L^\alpha{}_{\nu'} L^{\rho'}{}_{\beta'} \quad . \quad (2.15)$$

Die Konnexionen besitzen also (wie die Eichfelder  $G_{\mu a}{}^b$ ) ein inhomogenes, nicht tensorielles Transformationsverhalten. Mit Hilfe der kovarianten Ableitung schreibt sich die Geodätengleichung 2.11 wie folgt

$$\begin{aligned} v^\mu{}_{||\nu} v^\nu &= 0 \quad \text{da:} & (2.16) \\ v^\mu{}_{||\nu} v^\nu &= \left( \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^\mu v^\beta \right) v^\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} + \Gamma_{\beta\nu}^\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda} \\ &= \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\nu}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \quad . \end{aligned}$$

Die gravitativen Feldstärken ergeben sich wie bei den anderen elementaren Wechselwirkungen durch den Kommutator der kovarianten Ableitungen:

$$[D_\mu, D_\nu] A^\alpha = A^\alpha{}_{||\mu||\nu} - A^\alpha{}_{||\nu||\mu}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\Gamma_{\sigma\nu|\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\mu|\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\mu}^{\beta}) A^{\sigma} \\
&=: -R^{\alpha}_{\sigma\nu\mu} A^{\sigma}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Den Feldstärketensor  $R^{\alpha}_{\sigma\nu\mu}$  der Gravitationstheorie nennt man Riemannstensor; er hängt von der Metrik  $g_{\mu\nu}$  und den ersten  $g_{\mu\nu|\alpha}$  und zweiten  $g_{\mu\nu|\alpha|\sigma}$  Ableitungen der Metrik ab. Der Riccitenor  $R_{\mu\nu}$  und der Riemannskalar  $R$  ergeben sich aus dem Riemannstensor durch Spurbildung

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu\lambda} \quad , \quad R := R_{\mu}^{\mu} \quad . \tag{2.18}$$

Die Lagrangedichte der Gravitation muss nun aus Größen gebildet werden, die invariant unter Koordinatentransformationen sind. Es ergeben sich theoretisch die folgenden Möglichkeiten

$$\mathcal{L}_{Grav} = R + c_1 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_2 R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + \dots \quad . \tag{2.19}$$

Obwohl allein der dritte Term den anderen Eichtheorien entsprechen würde (siehe Kapitel 1) reduziert man die Lagrangedichte der ART allein auf den ersten Term

$$\mathcal{L}_{ART} = R \quad . \tag{2.20}$$

Die gesamte Lagrangedichte des Systems setzt sich nun aus dem ART-Teil und dem Teil der in der Raumzeit verkörperten Energieformen  $\mathcal{L}_E$  zusammen

$$\mathcal{L} = R + \kappa \mathcal{L}_E \quad , \tag{2.21}$$

wobei  $\kappa = \frac{G}{c^4}$  durch die Kopplungskonstante der Gravitation  $G$  bestimmt ist.  $\mathcal{L}_E$  beinhaltet demnach alle im System befindlichen Teilchen und Felder ausgenommen der kinetischen Selbstenergie des Gravitationsfeldes selbst. Diese ist in  $\mathcal{L}_{ART}$  durch Anteile des Riemannskalars in das System eingebracht. Die Kopplungskonstante  $\kappa$  gibt an, wie stark das Gravitationsfeld an die Energieformen koppelt.

Das Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung formuliert sich nun wie folgt

$$\delta_{g_{\mu\nu}} \int (R + \kappa \mathcal{L}_E) \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad , \tag{2.22}$$

wobei  $dV^{(4)} = \sqrt{-g} d^4x$  das Volumenelement in gekrümmter Raumzeit,  $\sqrt{-g}$  die Wurzel aus der negativen Determinante der Metrik  $g_{\mu\nu}$  ist und die Variation  $\delta$  hinsichtlich der Metrik  $g_{\mu\nu}$  ausgeführt wird. Aus diesem Prinzip

der kleinsten Wirkung ergeben sich die Einsteinschen Feldgleichungen (siehe [2, 5, 6])

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu} = 8\pi \kappa T^{\mu\nu} \quad . \quad (2.23)$$

$T^{\mu\nu}$  ist der so genannte metrische Energieimpulstensor

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\mathcal{L}_E \sqrt{-g})}{\partial g_{\mu\nu}} \quad . \quad (2.24)$$

Der Energie- und Impulsgehalt der in dem System befindlichen Teilchen und Felder (rechte Seite der Einsteingleichung 2.23) ist demnach die Quelle und Ursache der Krümmung der Raumzeit (linke Seite der Einsteingleichung).

Vergleicht man die Theorie der ART mit der eichtheoretischen Formulierung der anderen drei elementaren Wechselwirkungen, so findet man gewisse Gemeinsamkeiten und Unterschiede. Der ursächliche Grund der Unterschiede liegt in den unterschiedlichen Symmetriegruppen der Theorien. Die ART ist nicht sensitiv auf die inneren Freiheitsgrade der Teilchen und Felder, wohingegen die anderen elementaren Wechselwirkungen gerade durch diese inneren Ungleichgewichte erzeugt werden. Die ART benötigt es nicht 'neue' Austauschfelder zu erzeugen, die dann die Ungleichgewichte durch Krafteinwirkung ausgleichen; sie benutzt dagegen die bestehende Raumzeit und verformt diese in einer Weise, dass für die Gesamtlagrangedichte des Systems das Prinzip der kleinsten Wirkung realisiert ist. Im Anhang B sind die wichtigsten Grundgrößen der QCD und der ART vergleichend zusammengefasst.

## 2.3 Astrophysikalische Folgerungen der ART

In diesem Unterkapitel werden jene astrophysikalischen Folgerungen der ART besprochen, die in direktem Zusammenhang mit kompakten Sternen auftreten, und die beim weiteren Studium der Eigenschaften von kompakten Sternen benötigt werden.<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Der gesamte Bereich der kosmologischen Konsequenzen der ART wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

## Schwarze Löcher

Obwohl schwarze Löcher nicht zu dem Sammelbegriff der kompakten Sterne (Weiße Zwerge, Neutronensterne, Hyperonensterne, Hybride Sterne, Quarksterne, Seltsame Sterne) hinzu gehören, ist ihre detaillierte Darstellung in dieser Arbeit nötig, da sie einerseits neben den kompakten Sternen einen weiteren möglichen Endzustand der Sternentwicklung darstellen, und andererseits ihre Eigenschaften auffällige Gemeinsamkeiten mit dem Prozess des Confinements der QCD aufweisen.

Nach dem 'No Hair'-Theorem können schwarze Löcher lediglich drei ihrer Eigenschaften der Außenwelt offenbaren. Neben der gravitativ wirkenden Masse  $M$  kann ein schwarzes Loch ebenfalls einen Drehimpuls  $L$  und eine Ladung  $Q$  besitzen. Da makroskopische, astrophysikalische Objekte stets als Ganzes ladungsneutral sind, werden wir im folgenden den Fall eines geladenen schwarzen Loches nicht betrachten ( $Q \equiv 0$ ).

## Schwarzschild Lösung

Wir betrachten im folgenden den Spezialfall eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes. Die zugehörige Raumzeitmetrik  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$  und das Weglängenelement  $ds$  müssen dann ebenfalls Kugelsymmetrie besitzen, was bedeutet, dass sie bei gleicher Entfernung vom Ursprung in allen Raumzeitpunkten gleiche Werte besitzen sollen. Verwenden wir räumliche Kugelkoordinaten ( $x^\mu = (ct, x, y, z) \rightarrow x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$ ) so ist die allgemeinste Form der Metrik die folgende [5]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} l(r, t) & a(r, t) & 0 & 0 \\ a(r, t) & h(r, t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k(r, t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k(r, t)\sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Aufgrund der Freiheit der Wahl des Koordinatensystems können wir die Radius  $r$  und Zeitkoordinate  $t$  so umtransformieren, dass die Außerdiagonalelemente der Metrik  $a(r, t)$  verschwinden und  $k(r, t) = -r^2$  wird; durch diese Transformation wird die Kugelsymmetrie nicht verletzt. Schreibt man weiter die Größen  $l(r, t)$  und  $h(r, t)$  in exponentieller Form ( $l(r, t) = e^{\nu(r, t)}$ )

und  $h(r, t) = -e^{\lambda(r, t)}$  so besitzt die kugelsymmetrische Metrik  $g_{\mu\nu}$  und das Weglängenelement  $ds$  die folgende Form:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r, t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r, t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$ds^2 = c^2 e^{\nu(r, t)} dt^2 - e^{\lambda(r, t)} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (2.27)$$

Die Masse eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches befindet sich (wie wir im folgenden sehen werden) konzentriert im Ursprungspunkt bei  $r = 0$ , so dass der gesamte Raum (ohne den Punkt  $r = 0$ ) materiefrei ist. Der Energieimpulstensor verschwindet demnach im Außenraum identisch  $T_{\mu\nu} \equiv 0$ , so dass sich die Einsteingleichung (Gl. 2.23) wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} &= 8\pi\kappa T^{\mu\nu} = 0 \\ \Rightarrow R^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Setzen wir den kugelsymmetrischen Ansatz der Metrik  $g_{\mu\nu}$  (2.26) in die Einsteingleichung des materiefreien Raumes (Gl. 2.28) ein, so erhalten wir das folgende System von Differentialgleichungen (siehe [5])

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\nu^{|}}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.29)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^{|}}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \quad , \quad (2.31)$$

wobei  $\lambda^{|} = \frac{\partial \lambda}{\partial r}$ ,  $\nu^{|} = \frac{\partial \nu}{\partial r}$ . Addition der ersten beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} \nu^{|} + \lambda^{|} &= \frac{\partial}{\partial r} (\nu(r, t) + \lambda(r, t)) = 0 \\ \nu(r, t) + \lambda(r, t) &= f(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.32)$$

wobei  $f(t)$  eine beliebige Funktion der Zeit ist. Da wir bei den bisherigen Koordinatentransformationen noch nicht die Freiheit einer beliebigen Zeittransformation  $t = f(\bar{t})$  benutzt haben, können wir diese stets so wählen, dass

$$\nu(r, t) = -\lambda(r, t) \quad (2.33)$$

gilt.

Gleichung 2.31 verbunden mit Gl. 2.33 ergibt die allgemeine Zeitunabhängigkeit von kugelsymmetrischen Vakuumlösungen der Einsteingleichung ( $\nu(r, t), \lambda(r, t) \rightarrow \nu(r), \lambda(r)$ ), das so genannte 'Birkov Theorem'. Dieses Theorem besagt, dass jede kugelsymmetrische Vakuumlösung der Einsteingleichung statisch sein muss. Ein kugelsymmetrisch kollabierender Stern, oder ein radial oszillierender kugelsymmetrischer Stern behalten demnach ihre Außenraummetrik bei und verändern somit nicht ihre gravitative Wirkung auf umliegende Objekte.

Durch Integration der Gleichung 2.30 erhält man

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{const}{r} . \quad (2.34)$$

Die Integrationskonstante  $const$  läßt sich im gravitativen Schwachfeld, d.h. in großem räumlichen Abstand, durch Vergleich mit der Newtonschen Theorie festlegen. In großer Entfernung gilt das folgende für die Zeit-Zeit Komponente  $g_{00}$  der Metrik [5]

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2\phi(r)}{c^2} = 1 - \frac{2G M}{r c^2} , \quad (2.35)$$

wobei  $\phi(r) = -\frac{GM}{r}$  das Newtonsche Gravitationspotential ist und  $M$  die Gravitationsfelderzeugende Masse darstellt. Die Integrationskonstante  $const$  wird als Schwarzschildradius bezeichnet

$$R_S = \frac{2G M}{c^2} . \quad (2.36)$$

Die Schwarzschildmetrik und das zugehörige Weglängenelement nimmt nun die folgende Form an

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) .$$



Ein Körper, der sich in unendlicher Entfernung vom Ursprung befindet spürt keine gravitative Kraft, da für  $r \rightarrow \infty$  die Schwarzschildmetrik  $g_{\mu\nu}$  in die Minkowskimetrik der flachen Raumzeit übergeht:

$$g_{\mu\nu}(r \rightarrow \infty) = \eta_{\mu\nu} \quad (2.38)$$

Die Schwarzschildmetrik beschreibt das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen, nichtrotierenden und nichtgeladenen schwarzen Loches der Masse  $M$ . Die skalare Invariante des Riemannschen Krümmungstensors  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  der Schwarzschildmetrik

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{48M^2}{r^6} \quad , \quad (2.39)$$

welche unabhängig von dem speziell gewählten Koordinatensystem ist, wird im Ursprung singularär, wohingegen sie beim Schwarzschildradius  $R_S$  regulär bleibt. Die Metrik besitzt daher eine echte ( $r = 0$ ) und eine Koordinatensystem bedingte, uneigentliche Singularität ( $r = R_S$ ). Um die Eigenschaften der Schwarzschild-Singularität zu verstehen, betrachten wir radial in das schwarze Loch einfallende bzw. auslaufende Lichtstrahlen, d.h. die Klasse der radialen Nullgeodäten

$$ds^2 = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = 0 \quad . \quad (2.40)$$

Durch Einsetzen der Schwarzschildmetrik in die Bedingung (2.40) erhalten wir die folgenden Gleichungen für die einlaufenden (+) und auslaufenden (-) Lichtstrahle

$$t = +/- (r + 2M \ln(|r - 2M|) + const) \quad . \quad (2.41)$$

Man gelangt somit zum Raumzeitdiagramm in Schwarzschildkoordinaten:

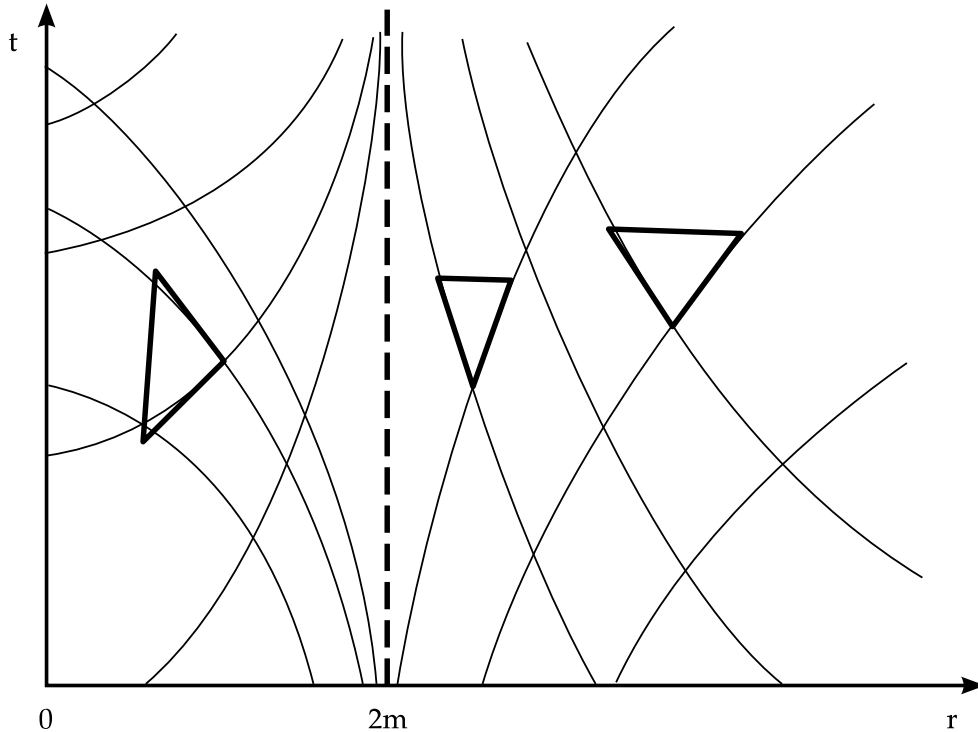


Abbildung 2.1: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in Schwarzschildkoordinaten.

Das Raumzeitdiagramm beschreibt das raumzeitliche Verhalten eines kugelsymmetrischen schwarzen Loches aus dem Betrachtungsstandpunkt eines im Unendlichen ruhenden Beobachters. Für den äußeren Beobachter erscheint es, als ob die Raumzeit in zwei Bereiche geteilt ist (Bereich I:  $r > R_S$ , Bereich II:  $r < R_S$ ), die untereinander keinerlei Informationen austauschen können. Nähert man sich vom Bereich I dem Schwarzschildradius an ( $r \rightarrow R_S, r > R_S$ ), so verengt sich der Lichtkegel so stark, dass man im Grenzfall unendlich lange Zeit benötigen würde um  $R_S$  erreichen zu können. Im Bereich II dagegen hat die Raum-  $r$  und Zeitkoordinate  $t$  anscheinend ihren Sinn getauscht – die Zukunftslichtkegel zeigen unweigerlich in Richtung der echten Singularität im Ursprung. Ein Teilchen, das sich an einem Ort im Bereich II befindet muss sich zwangsläufig in Richtung der echten Singularität bewegen. Nähert man sich theoretisch vom Bereich II der Schwarzschild Singularität an, so verbreitern die Lichtkegel ihren Öffnungswinkel. Im Grenzfall  $r \rightarrow R_S, r < R_S$  ist der Öffnungswinkel so groß, dass man bei ei-

ner winzigen räumlichen Bewegung die gesamte Zukunft bzw. Vergangenheit durchschreiten könnte. Einem äußeren Beobachter erscheint die Kugelfläche des Schwarzschildradius demnach als eine Grenze eines Ereignishorizontes. Vom Bereich I kann keine Information in den Bereich II, und von dem Bereich II kann man nicht in den Bereich I vordringen.

Die anscheinende Abgeschlossenheit beider Bereiche ist jedoch vom Standpunkt der Betrachtung d.h. von den zugrunde liegenden Koordinaten abhängig. Einem im unendlichen ruhenden Beobachter erscheint es als ob ein in das schwarze Loch fallender Körper, kurz vor Erreichen des Ereignishorizontes, immer langsamer wird und diesen in endlicher Zeit nicht überschreiten wird – der Körper selbst jedoch überschreitet den Ereignishorizont ohne Hindernisse, wie wir im folgenden sehen werden.

Bei der Schwarzschildlösung in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten liegt der Beobachtungsstandpunkt nicht ruhend im Unendlichen, sondern das Koordinatensystem bewegt sich selbst mit Lichtgeschwindigkeit auf das schwarze Loch zu. Die Zeitkoordinate  $t$  wurde hier durch den Ausdruck (2.41), der radial einfallenden Nullgeodäten transformiert

$$t \rightarrow \bar{t} = t + 2M \ln(|r - 2M|) \quad . \quad (2.42)$$

Das zugehörige Raumzeitdiagramm der radial ein- und auslaufenden Nullgeodäten in Eddington-Finkelstein Koordinaten ist in Abb. 2.2 dargestellt. Man erkennt, dass ein radial einfallendes Teilchen zwar den Ereignishorizont überschreiten kann, es jedoch nach dem Überschreiten keine Möglichkeit mehr gibt Information nach Außen zu senden.

Neben dem Ereignishorizont bei  $r = R_S = 2G M/c^2$  ist die Kugeloberfläche bei  $r = 3G M/c^2$  ebenfalls von zentraler Bedeutung. Man bezeichnet sie als 'Photonensphäre', da bei diesem Radius sich Lichtteilchen auf stabilen Kreisbahnen bewegen können (siehe [7, 8]).

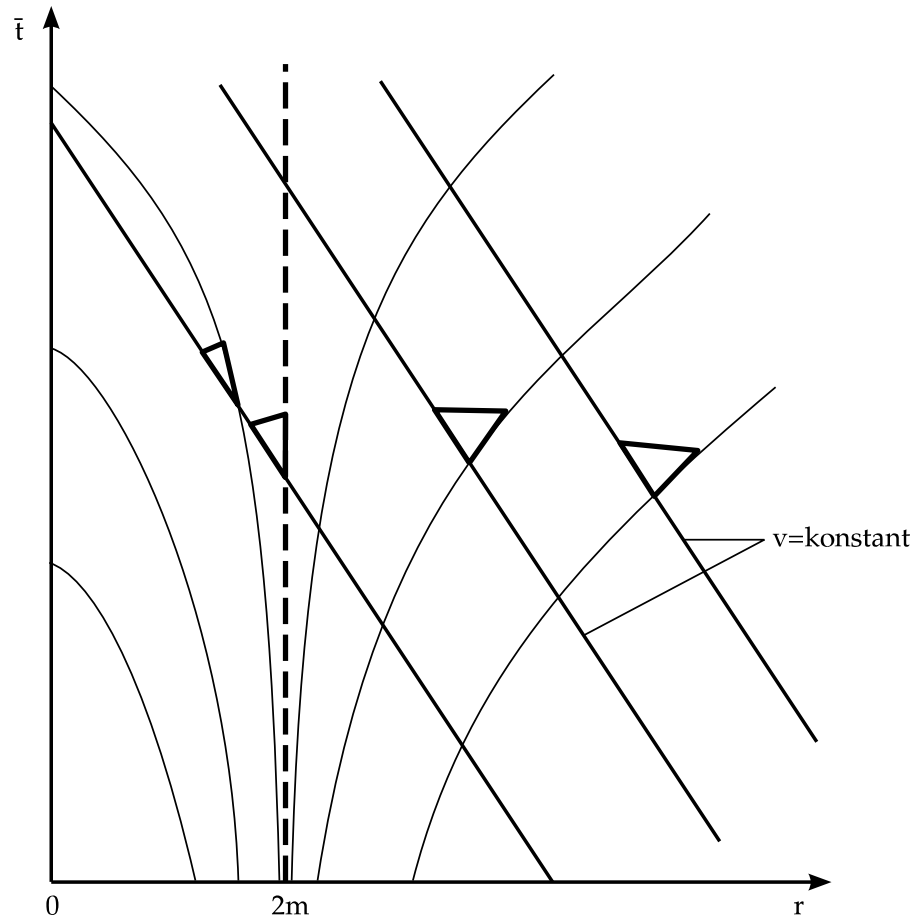


Abbildung 2.2: Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten.

### Kerr Lösung

Die axialsymmetrische, statische Lösung der Einsteingleichungen im Vakuum wird als Kerr-Lösung bezeichnet. Sie beschreibt die raumzeitliche Struktur eines mit der Frequenz  $\Omega = d\phi/dt$  rotierenden schwarzen Loches. Die Herleitung der Kerr-Lösung erfolgt mittels des Tetradenformalismus der ART. Wie bei der Schwarzschildlösung ist das konkrete Erscheinungsbild der Kerr-Metrik  $g_{\mu\nu}^{KERR}$  vom Beobachtungsstandpunkt, d.h. vom beschreibenden Koordinatensystem abhängig. Betrachtet man das rotierende schwarze Loch von einem unendlich entfernten, ruhenden Standpunkt, so nimmt die Kerr-Metrik

und ihr entsprechendes Weglängenelement  $ds$  die folgende Form an (siehe [9])

$$g_{\mu\nu}^{KERR} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta - \Omega^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \frac{2\Omega M r \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & -\frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho^2 & 0 \\ \frac{2\Omega M r \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} (\Delta \Omega^2 \sin^2 \theta - (r^2 + \Omega^2)^2) \end{pmatrix}$$

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - \Omega \sin^2 \theta d\phi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} ((r^2 + \Omega^2) d\phi - \Omega dt)^2 - \quad (2.43)$$

$$-\frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad ,$$

wobei  $\rho^2 := r^2 + \Omega^2 \cos^2 \theta$  und  $\Delta := r^2 - 2Mr + \Omega^2$ . Man bezeichnet diese Metrik als 'Boyer-Linquist'-Form der Kerr-Lösung. Im Grenzfall verschwindender Rotation ( $\Omega \rightarrow 0$ ) geht sie in die Schwarzschild-Form der Schwarzschild Metrik über

$$g_{\mu\nu}^{KERR}(\Omega \rightarrow 0) = \begin{pmatrix} (1 - \frac{R_S}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{R_S}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} .$$

Die zwei freien Parameter ( $M, \Omega$ ) der Kerr Metrik stellen die gravitative Masse und die Rotationsfrequenz des schwarzen Loches dar - gemessen von einem unendlich entfernten, ruhenden Beobachter.

Die Bildung der Riemannschen Invariante  $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$  zeigt, dass die Kerr-Lösung eine echte Singularität besitzt (siehe [9])

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} \rightarrow \infty$$

falls:  $x^2 + y^2 = \Omega^2, z = 0$  .

Diese echte Singularität befindet sich demnach nicht punktförmig im Ursprung, sondern ist ein Ring mit Radius  $\Omega$ , der sich in der Äquatorebene des schwarzen Loches bei  $z = 0$  befindet.

Die Flächen unendlicher Rotverschiebung sind durch das Verschwinden der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}^{KERR}$  gegeben

$$g_{00}^{KERR} \rightarrow 0$$

falls:  $r_{R+/-} = M + / - \sqrt{M^2 - \Omega^2 \cos^2 \theta}$  .

Im Unterschied zur Schwarzschildlösung existieren bei der Kerr-Lösung somit zwei Flächen unendlicher Rotverschiebung  $r_{R+/-}$ .

Die Ereignishorizonte der Kerr-Metrik sind dagegen Hyperflächen, die lichtartige Eigenschaft ( $ds = 0$ ) besitzen; dies ist der Fall, wenn die Raum-Raum-Komponente der Metrik  $g_{KERR}^{\mu\nu}$  verschwindet. Man gelangt dadurch zu den zwei Nullereignishorizonten der Kerr Metrik

$$g_{KERR}^{11} = 0, \quad \text{falls: } r_{+/-} = M + / - \sqrt{M^2 - \Omega^2} \quad . \quad (2.44)$$

Die Eigenschaften der Kerr Metrik lassen sich für  $\Omega < M$  zusammenfassend in folgendem Bild darstellen:

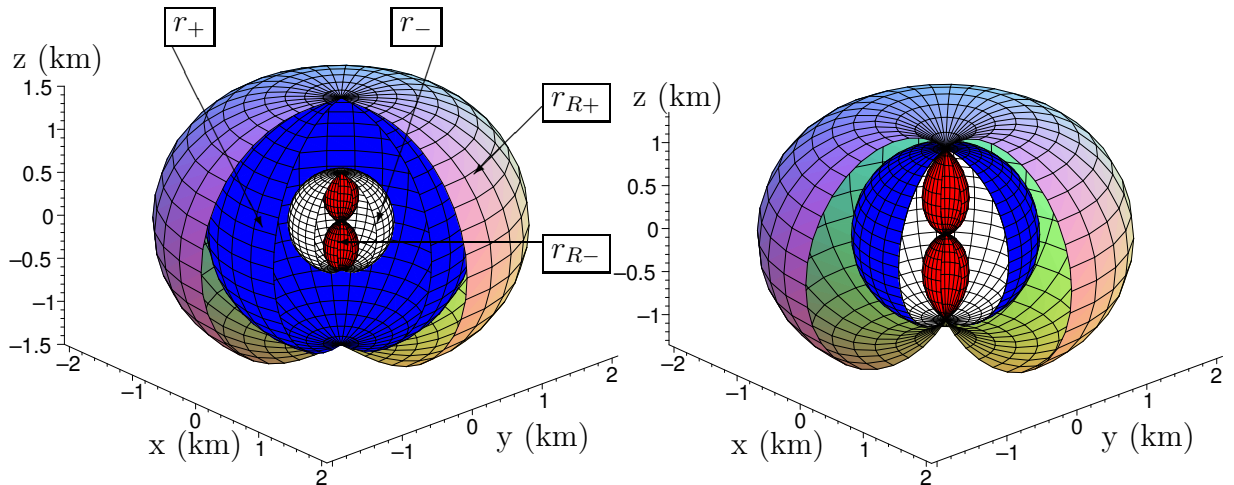


Abbildung 2.3: Horizontstruktur ( $r_+$ ,  $r_-$ ) und Flächen unendlicher Rotverschiebung ( $r_{R+}$ ,  $r_{R-}$ ) bei rotierenden Schwarzen Löchern (Links:  $\Omega = 0.9 M$ , Rechts:  $\Omega \lesssim M$ ), wobei  $M = 1$  km.

Den Bereich zwischen der äußeren Fläche unendlicher Rotverschiebung  $r_{R+}$  und dem äußeren Ereignishorizont  $r_+$  bezeichnet man als 'Ergosphäre'. Im Grenzfall verschwindender Rotation  $\Omega = 0$  fallen die Ereignishorizonte und die Flächen unendlicher Rotverschiebung zusammen und bilden die Schwarzschildsingularität bei  $r = R_S$ .

Für  $\Omega > M$  verschwinden die Ereignishorizonte, so dass eine nicht abgeschirmte, nackte Ringsingularität entsteht.<sup>7</sup>

Neben der Boyer-Linquist-Form der Kerr Lösung existieren noch weitere bekannte Darstellungsformen der Kerr Metrik, die sich physikalisch durch den benutzten Beobachtungsstandpunkt unterscheiden. In avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten ergibt sich z.B. das folgende Raumzeitdiagramm der Kerr Lösung, das sich in drei Bereiche untergliedern läßt (I,II,III):

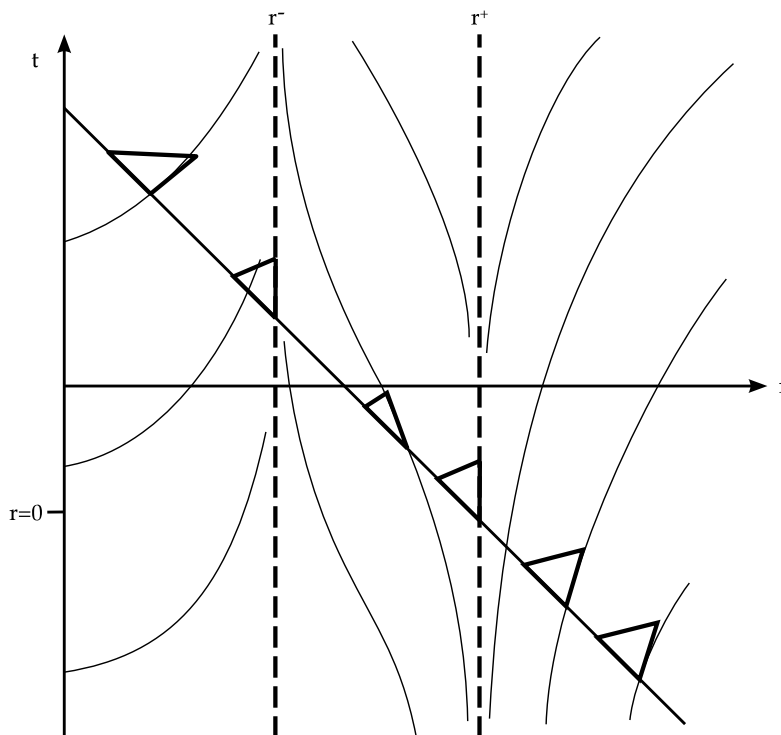


Abbildung 2.4: Raumzeitdiagramm der Kerr Metrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten.

Der äußere Ereignishorizont  $r_+$  ist dem der Schwarzschildsingularität sehr ähnlich, da sich auch hier die Raum- und Zeitkoordinaten gegeneinander austauschen. Ein Körper, der den äußeren Ereignishorizont übertritt wird unweigerlich vom Bereich II in den Bereich III gezwungen. Im Bereich III erhalten

<sup>7</sup>Nackte Singularitäten sind jedoch durch den von R. Penrose konstruierten 'kosmischen Zensor' verboten.

jedoch die Raum- und Zeitkoordinaten wieder ihren ursprünglichen Sinn, so dass der Körper nicht unweigerlich in der echten Ringsingularität enden muss.

Schwarze Löcher, die als Endprodukte von sehr energiereichen Supernova Explosionen, oder einem Neutronen- oder Quarksternkollaps entstehen können, sind sehr wahrscheinlich Kerr-Schwarze Löcher, wobei der Drehimpuls des Sterns  $L = I\Omega_{\text{Stern}}$ <sup>8</sup> in den Drehimpuls des schwarzen Loches  $L = M\Omega$  übergeht. Die sehr massiven schwarzen Löcher, die in Zentren von Galaxien vermutet werden, können im Prinzip ebenfalls Kerr-Schwarze Löcher sein.<sup>9</sup> Im Vergleich zu nichtrotierenden Schwarzen Löchern haben rotierende schwarze Löcher nicht nur eine unterschiedliche Singularitäts- und Horizont Struktur, sondern sie besitzen auch eine in der Newtonschen Theorie nicht bekannte Eigenschaft – den auf der 'Frame-Dragging' Eigenschaft beruhenden Lense-Thirring Effekt. Aufgrund von raumzeitlichen Mitführungseffekten (Frame-Dragging) rotiert die Raumzeit selbst mit dem schwarzen Loch, so dass umliegende Körper mitgezogen werden und rotierende Objekte, die sich in der Nähe des schwarzen Loches aufhalten um ihre Rotationsachse präzedieren.

## Kompakte Sterne

Im vorigen Unterkapitel betrachteten wir zwei Lösungen der Einsteingleichung in materiefreier Raumzeit  $T_{\mu\nu} \equiv 0$ . Um die raumzeitliche Struktur innerhalb (und außerhalb) von kompakten Sternen zu betrachten, werden wir in diesem Unterkapitel Lösungen der gesamten Einsteingleichung betrachten.

### Raumzeitkrümmung innerhalb und außerhalb eines nichtrotierenden Sterns

Wir betrachten im folgenden die raumzeitliche Struktur, die durch einen sphärisch symmetrischen, nichtrotierenden  $\Omega = 0$ , nichtgeladenen  $Q = 0$  und statischen  $T^{\mu\nu}(x^\alpha) = T^{\mu\nu}(r)$  Körper erzeugt wird. Wie bei der Herleitung der

---

<sup>8</sup> $I = I(\Omega)$  stellt das Trägheitsmoment des Sterns dar.

<sup>9</sup>Neuere Beobachtungen des schwarzen Loches in unserer Galaxie legen sogar eine sehr schnelle Rotation ( $\Omega \approx 0.5 M$ ) nahe (siehe [10, 11, 12, 13]).



Schwarzschildlösung benutzen wir den folgenden kugelsymmetrischen Ansatz der Metrik<sup>10</sup>

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Das Einsetzen dieses Ansatzes der Metrik in die Einsteingleichung

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}R g^\mu{}_\nu = 8\pi\kappa T^\mu{}_\nu \quad (2.46)$$

liefert das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} G^t{}_t &= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= 8\pi\kappa T^t{}_t \\ G^r{}_r &= -e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= 8\pi\kappa T^r{}_r \\ G^\theta{}_\theta &= -\frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu'' - \frac{\lambda'\nu'}{2} + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) &= 8\pi\kappa T^\theta{}_\theta \\ G^\phi{}_\phi &= G^\theta{}_\theta &= 8\pi\kappa T^\phi{}_\phi \end{aligned} \quad (2.47)$$

$T^\mu{}_\nu$  beschreibt den Energieimpulstensor des Gravitationsfeld erzeugenden Körpers (in unserem Falle den des Sterns). Die Materie innerhalb des Sterns setzen wir im folgenden als eine ideale Flüssigkeit an, so dass wir Wärmeaustauschprozesse ( $T^{0i} = 0, i = 1..3$ ) und Viskositätseffekte ( $T^{ij} = 0, i, j = 1..3, i \neq j$ ) vernachlässigen. Der Energieimpulstensor  $T^{\mu\nu}$  einer solchen idealen Flüssigkeit, lokal betrachtet an seinem Ort, kann wie folgt geschrieben werden

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}P \quad \text{mit: } u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.48)$$

wobei  $u^\mu$  die 4er Geschwindigkeit der Materie ist,  $\tau$  die lokale Eigenzeit an einem betrachteten Materiepunkt beschreibt ( $d\tau = \sqrt{ds^2} = \sqrt{g_{tt}} dt$ ,  $t$  ist die Koordinatenzeit eines unendlich entfernten Beobachters),  $\epsilon$  die Energiedichte und  $P$  der Druck der Materie ist.

Aufgrund der statischen Forderung gilt:

$$T^\mu{}_\nu = (\epsilon + P)u^\mu u_\nu - g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu}P = (\epsilon + P)\frac{dx^\mu}{d\tau} \left( g_{\nu\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) - \delta^\mu{}_\nu P$$

<sup>10</sup>Wir benutzen hier jedoch von Anfang an die Zeitunabhängigkeit der Metrik.

$$\begin{aligned}
T^t_t &= (\epsilon + P) \frac{dt}{d\tau} \left( g_{tt} \frac{dt}{d\tau} \right) - P = (\epsilon + P) \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \left( g_{tt} \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \right) - P = \epsilon \\
T^r_r &= (\epsilon + P) \underbrace{\frac{dr}{d\tau}}_{\equiv 0} \left( g_{rr} \underbrace{\frac{dr}{d\tau}}_{\equiv 0} \right) - P = -P \\
T^\theta_\theta &= T^\phi_\phi = -P
\end{aligned}$$

Die Gleichungen 2.47 schreiben sich nun<sup>11</sup>:

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda^|}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\epsilon \quad (2.49)$$

$$-e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu^|}{r} \right) + \frac{1}{r^2} = -8\pi P \quad (2.50)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{2} \left( \nu^{||} - \frac{\lambda^|\nu^|}{2} + \frac{(\nu^|)^2}{2} + \frac{\nu^|-\lambda^|}{r} \right) = -8\pi P \quad (2.51)$$

Man kann Gleichung 2.49 wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda^|}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^|}{r} - \frac{e^{-\lambda}}{r^2} + \frac{1}{r^2} = \\
= \frac{1}{r^2} \left( 1 - e^{-\lambda} - r \frac{d}{dr} (e^{-\lambda}) \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \underbrace{r(1 - e^{-\lambda})}_{:=2m(r)} \right) = \\
= \frac{2}{r^2} \frac{dm(r)}{dr} &= 8\pi\epsilon \\
\Rightarrow \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon \quad , \quad e^{-\lambda(r)} &= \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right) \quad (2.52)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m(r) = \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \epsilon(\tilde{r}) d\tilde{r} + m(0) \quad (2.53)$$

Die Funktion  $m(r)$  ist an dieser Stelle noch als eine willkürlich definierte Funktion aufzufassen; wir werden später ihre physikalische Bedeutung aufzeigen. Es ist physikalisch sinnvoll die Integrationskonstante  $m(0)$  identisch Null zu setzen, da sonst die Metrikkomponente  $g^{11}(r) = e^{-\lambda(r)} = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)$  bei  $r = 0$  eine Singularität hätte.

Durch Einsetzen der Funktion  $m(r)$  in Gleichung 2.50 und weitere Umformungen erhält man:

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu^|}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu^|}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P$$

<sup>11</sup>Wir setzen im folgenden  $\kappa = 1$ .

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d\nu}{dr} &= r \left( 8\pi P + \frac{1}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} - \frac{1}{r} \\
&= \left( \frac{8\pi P r^2 + 1}{r} \right) \left( \frac{r}{r-2m} \right) - \frac{1}{r} \\
&= \frac{8\pi P r^3 + r}{r(r-2m)} - \frac{r-2m}{r(r-2m)} \\
\frac{d\nu}{dr} &= \frac{8\pi P r^3 + 2m}{r(r-2m)} \tag{2.54}
\end{aligned}$$

Aus der Bianci-Identität (hommogene Yang-Mills Gleichung der Gravitation (siehe Anhang B))

$$R_{\mu\nu\alpha\beta||\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\alpha||\beta} + R_{\mu\nu\beta\lambda||\alpha} = 0 \tag{2.55}$$

folgt durch Spurbildung hinsichtlich der Indices  $\nu, \beta$  und  $\mu, \lambda$  und nachträgliche Umbenennung

$$\begin{aligned}
\nu, \beta : R_{\mu}^{\beta}{}_{\alpha\beta||\lambda} + R_{\mu}^{\beta}{}_{\lambda\alpha||\beta} + R_{\mu}^{\beta}{}_{\beta\lambda||\alpha} &= R_{\mu\alpha||\lambda} + R_{\mu}^{\beta}{}_{\lambda\alpha||\beta} - R_{\mu\lambda||\alpha} = 0 \\
\mu, \lambda : R^{\lambda}{}_{\alpha||\lambda} + R^{\lambda\beta}{}_{\lambda\alpha||\beta} - R^{\lambda}{}_{\lambda||\alpha} &= R^{\lambda}{}_{\alpha||\lambda} + R^{\beta}{}_{\alpha||\beta} - R_{||\alpha} = 0 \\
\Rightarrow \left( R^{\nu}{}_{\mu} - \frac{1}{2} R \delta^{\nu}{}_{\mu} \right)_{||\nu} &= G^{\nu}{}_{\mu||\nu} = 0 \quad . \tag{2.56}
\end{aligned}$$

Die Spur der kovarianten Ableitung des Einsteintensors  $G^{\nu}{}_{\mu}$  ist demnach stets 0. Verwendet man dieses Resultat in der Einsteingleichung so folgt:

$$\begin{aligned}
G^{\nu}{}_{\mu||\nu} &= 8\pi T^{\nu}{}_{\mu||\nu} = 0 \\
\Rightarrow T^{\nu}{}_{\mu||\nu} &= T^{\nu}{}_{\mu|\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T^{\alpha}{}_{\mu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T^{\nu}{}_{\alpha} = 0 \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Die Spur der kovarianten Ableitung des Energieimpulstensors ( $T^{\nu}{}_{\mu||\nu}$ ) verschwindet demnach stets. Verwendet man in dieser Bedingung nun den Ansatz der Metrik 2.45 und den Ausdruck des Energieimpulstensors einer idealen Flüssigkeit 2.48, so folgt für die Radius-Komponente:

$$\begin{aligned}
T^{\nu}{}_{r||\nu} &= T^{\nu}{}_{r|\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} T^{\alpha}{}_{r} - \Gamma_{r\nu}^{\alpha} T^{\nu}{}_{\alpha} = \\
&= T^r{}_{r|r} + \left( \Gamma_{rt}^t T^r{}_{r} + \Gamma_{rr}^r T^r{}_{r} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} T^r{}_{r} + \Gamma_{r\phi}^{\phi} T^r{}_{r} \right) - \\
&\quad - \left( \Gamma_{rt}^t T^t{}_{t} + \Gamma_{rr}^r T^r{}_{r} + \Gamma_{r\theta}^{\theta} T^{\theta}{}_{\theta} + \Gamma_{r\phi}^{\phi} T^{\phi}{}_{\phi} \right) = \\
&= -P|_r - \left( \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^{\theta} + \Gamma_{r\phi}^{\phi} \right) P -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \Gamma_{rt}^t \epsilon - \Gamma_{rr}^r P - \Gamma_{r\theta}^\theta P - \Gamma_{r\phi}^\phi P \right) = \\
& = -P|_r - \Gamma_{rt}^t P - \Gamma_{rt}^t \epsilon = -P|_r - \Gamma_{rt}^t (P + \epsilon) = 0 \quad (2.58)
\end{aligned}$$

Die Komponente  $\Gamma_{rt}^t$  des Christoffelsymbols hat die folgende Gestalt in der benutzten Metrik

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rt}^t &= \frac{g^{t\mu}}{2} (g_{\mu r|t} + g_{\mu t|r} + g_{rt|\mu}) = \frac{g^{tt}}{2} (g_{tr|t} + g_{tt|r} + g_{rt|t}) = \\
&= \frac{g^{tt}}{2} g_{tt|r} = \frac{1}{2} e^{-\nu(r)} \frac{d}{dr} (e^{\nu(r)}) = \frac{1}{2} e^{-\nu(r)} e^{\nu(r)} \frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \quad ,
\end{aligned}$$

so dass sich Gleichung 2.58 wie folgt schreibt

$$\frac{dP}{dr} = -\Gamma_{rt}^t (P + \epsilon) = -\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} (P + \epsilon) \quad . \quad (2.59)$$

Einsetzen des Ausdruckes 2.54 liefert

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\epsilon + P)4\pi r^3 + m}{r(r - 2m)} \quad . \quad (2.60)$$

Gleichung 2.60 zusammen mit den Ausdrücken 2.53 und 2.54 bezeichnet man als die **Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) Gleichungen**

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr} &= -\frac{(\epsilon + P)4\pi r^3 + m}{r(r - 2m)} \\
m(r) &= \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \epsilon(\tilde{r}) d\tilde{r} \\
\frac{d\nu}{dr} &= \frac{8\pi P r^3 + 2m}{r(r - 2m)} \quad ,
\end{aligned} \quad (2.61)$$

wobei die raumzeitliche Struktur durch die folgenden Ausdrücke bestimmt ist

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \\
ds^2 &= e^{\nu(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad .
\end{aligned}$$

Das gekoppelte Differentialgleichungssystem der TOV-Gleichungen beschreibt einerseits wie sich die Raumzeit innerhalb eines sphärisch symmetrischen

Sterns verhält<sup>12</sup>, andererseits beschreibt sie außerdem wie sich der Druck  $P$  und die Energiedichte  $\epsilon$  im Sterninneren verändern müssen. Wir nehmen im folgenden an, dass der Stern eine endliche Ausdehnung haben soll; seinen Radius bezeichnen wir mit  $R$ . Außerhalb des Sterns soll sich der materiefreie Raum befinden, so dass folgendes gilt:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(r) &\neq 0 & \text{falls: } r &\leq R \\ T^{\mu\nu}(r) &\equiv 0 & \text{falls: } r &> R \end{aligned}$$

Um die Struktur der Raumzeit außerhalb des Sterns zu bestimmen, müssen wir somit die Einsteingleichung im Vakuum lösen. Im sphärisch symmetrischen Fall vereinfacht sich dies aufgrund des Birkov-Theorems erheblich, da in Folge des Theorems jede sphärisch symmetrische Lösung der Vakuum-Einsteingleichung durch die Schwarzschildmetrik beschrieben wird. Am Sternradius  $R$  müssen somit die durch die TOV-Gleichungen gewonnenen Lösungen der Metrik, in die Schwarzschildmetrik übergehen. Diese Randbedingungen lassen sich wie folgt schreiben:

$$\begin{array}{lll} \text{Sternradius} & R : & P(r = R) = 0, \quad \epsilon(r = R) = 0 \\ \text{Metrik-Komponente} & g_{tt} = e^{\nu(r)} : & \nu(r = R) = \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right) \\ \text{Metrik-Komponente} & g_{rr} = \left( 1 - \frac{2m(r)}{R} \right)^{-1} : & m(r = R) = M \end{array} \quad (2.62)$$

Die physikalische Interpretation der Funktion  $m(r)$  als gravitativ wirkender Massenbeitrag des Sterns innerhalb des Radius  $r$  liegt nun nahe. Die gravitativ wirkende Gesamtmasse des Sterns schreibt sich somit

$$M = m(r = R) = \int_0^R 4\pi\tilde{r}^2 \epsilon(\tilde{r}) d\tilde{r} \quad . \quad (2.63)$$

Diese gravitative Masse des Sterns setzt sich aus zwei Bestandteilen zusammen, die ich im folgenden mit der Massenenergie der Teilchen und Felder  $M_{TF}$  und der Massenenergie des Gravitationsfeldes  $M_G$  bezeichnen möchte. Die Massenenergie der Teilchen und Felder ergibt sich durch das Volumenintegral  $dV^{(3)} = \sqrt{g^{(3)}} d^{(3)}x$  der Energiedichte  $\epsilon$  der Materie in gekrümmter

---

<sup>12</sup>Im folgenden wird von Sternen gesprochen, obwohl die TOV-Gleichungen einen beliebigen sphärisch symmetrischen Körper allgemeinrelativistisch beschreiben.

Raumzeit:

$$\begin{aligned} M_{TF} &= \int_V \epsilon(r) dV^{(3)} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \epsilon(r) \sqrt{|g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\phi\phi}|} dr d\theta d\phi = \\ &= \int_0^R \epsilon(r) 4\pi r^2 e^{-\frac{\lambda(r)}{2}} dr = 4\pi \int_0^R \frac{\epsilon(r) r^2}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}} dr \end{aligned}$$

$M_{TF}$  bezeichnet somit den gesamten Energiegehalt, der durch die in dem Stern befindlichen Teilchen und Felder bedingt ist<sup>13</sup>. Die zusätzliche gravitativ wirkende Energie des Sterns wird verursacht durch den Energiebeitrag des Gravitationsfeldes selbst; man kann diese Energie als gravitative Bindungsenergie  $M_G$  des Sterns bezeichnen<sup>14</sup>

$$M_G = M - M_{TF} \quad . \quad (2.64)$$

Bei der Konstruktion eines Sternmodells geht man nun wie folgt vor: Durch ein Elementarteilchen-theoretisches Modell (siehe Kapitel 3) gelangt man zur Zustandsgleichung der Materie, d.h. zu einer Funktion des Drucks der Materie in Abhängigkeit von seiner Energiedichte  $P(\epsilon)$ . Die TOV Gleichungen verbunden mit der Zustandsgleichung lassen sich numerisch lösen. Man legt dabei den Druck  $P_c := P(r = 0)$  bzw. die Energiedichte  $\epsilon_c := \epsilon(r = 0)$  im Sternzentrum  $r = 0$  fest und integriert die gekoppelten TOV-Gleichungen vom Sternzentrum nach außen bis der Druck an der Sternoberfläche verschwindet  $P(r = R) = 0$ . Um die Randbedingung (2.62) der  $g_{tt}$  Komponente der Metrik zu gewährleisten addiert man nachträglich einen konstanten Faktor zur Funktion  $\nu(r)$ . Man erhält dadurch die gesamte Metrik innerhalb und außerhalb des Sterns, seine Masse  $M$ , seinen Radius  $R$  und die Druck- und Energiedichtenprofile ( $P(r), \epsilon(r)$ ) im Stern (siehe Kapitel 3).

Die TOV-Gleichungen lassen sich für einige Spezialfälle und Zustandsgleichungen analytisch lösen; das bekannteste Beispiel ist das der konstanten

---

<sup>13</sup> $M_{TF}$  kann ebenfalls in zwei Teile gegliedert werden, wobei der eine die gesamte Teilchenenergie beschreibt und der andere die gesamte Bindungsenergie der Teilchen die durch Austauschkräfte verursacht werden beinhaltet.

<sup>14</sup>Obwohl der Energieimpulstensor des Gravitationsfeldes im allgemeinen nicht einheitlich definiert werden kann ([6, 14]) ist die Angabe der Gravitationsenergie im sphärisch symmetrischen Fall einheitlich möglich ([6]).

Dichte im Stern. Hierbei nimmt man an, dass die Energiedichte über den ganzen Stern konstant ist  $\epsilon(r) = \epsilon_0$  und am Sternrand diskontinuierlich auf Null springt. In diesem vereinfachten Modell erhält man eine natürliche Stabilitätsgrenze und damit verbundene Grenzmassen  $M_{lim}$  und Grenzradien  $R_{lim}$  für Sterne. Diese absolute Stabilitätsgrenze besagt, dass der Radius eines Sterns niemals kleiner als  $9/8$  seines theoretischen Schwarzschildradius werden darf, da sonst der Druck im Sternzentrum gegen unendlich strebt<sup>15</sup>. Es gilt:

$$R_{lim} = \frac{9}{4}M_{lim} = (3\pi\epsilon_0)^{-1/2} \Rightarrow \frac{R_{lim}}{R_S} = \frac{9}{8} \quad (2.65)$$

Um sich die Struktur der Raumzeit innerhalb und außerhalb des Sterns zu visualisieren kann man im statischen, sphärisch symmetrischen Fall wie folgt verfahren: Aufgrund der Zeitunabhängigkeit der Metrik betrachtet man sich die Raumzeit zu einem festen, beliebigen Zeitpunkt, d.h. auf einer Hyperfläche der Raumzeit mit  $t = const$ . Aufgrund der sphärischen Symmetrie sind alle Flächen mit  $\theta = const$  gleichbedeutend, so dass wir den Raum in einem Schnitt durch die Äquatorebene  $\theta = \pi/2$  betrachten. Das Weglängenelement schreibt sich somit

$$\begin{aligned} r \leq R : \quad ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \\ r > R : \quad ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 d\phi^2 \end{aligned}$$

Die durch das Weglängenelement beschriebene gekrümmte zweidimensionale Geometrie betten wir nun (zur Visualisierung) in einen dreidimensionalen euklidischen Raum ein, den wir durch zylindrische Koordinaten  $(z, r, \phi)$  beschreiben. Das Weglängenelement in diesem euklidischen Veranschaulichungsraum lautet

$$ds^2 = dz^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \quad . \quad (2.66)$$

Wir setzen nun beide Weglängenelemente gleich und beschreiben dadurch die Abweichungen der gekrümmten Raumzeit von der flachen, euklidischen

---

<sup>15</sup>Man kann zeigen, dass diese absolute Stabilitätsgrenze auch für beliebige Zustandsgleichungen gilt [6].

Geometrie durch die Koordinate  $z = z(r)$ , den so genannten 'Lift'

$$\begin{aligned} r \leq R: \quad z(r) &= \int_0^r \left( \frac{r}{2m(r)} - 1 \right)^{-1/2} dr \\ r > R: \quad z(r) &= \sqrt{8M(r - 2M)} + \text{const} \quad . \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante *const* wird so gewählt, dass am Sternradius  $R$  Innen- und Außendefinitionen von  $z(r)$  stetig ineinander übergehen. Durch die Funktion  $z(r)$  wird eine zweidimensionale Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum definiert; sie visualisiert die gekrümmte Raumzeit.  $z(r) \equiv 0$  entspricht der flachen Raumzeit, z.B. beschrieben durch die Minkowski Metrik (Gl. 2.3). Abb. 2.5 zeigt die Visualisierung der Raumzeit eines Neutronensterns der Masse  $M$  im Vergleich zu einem schwarzen Loch der Masse  $M$ .

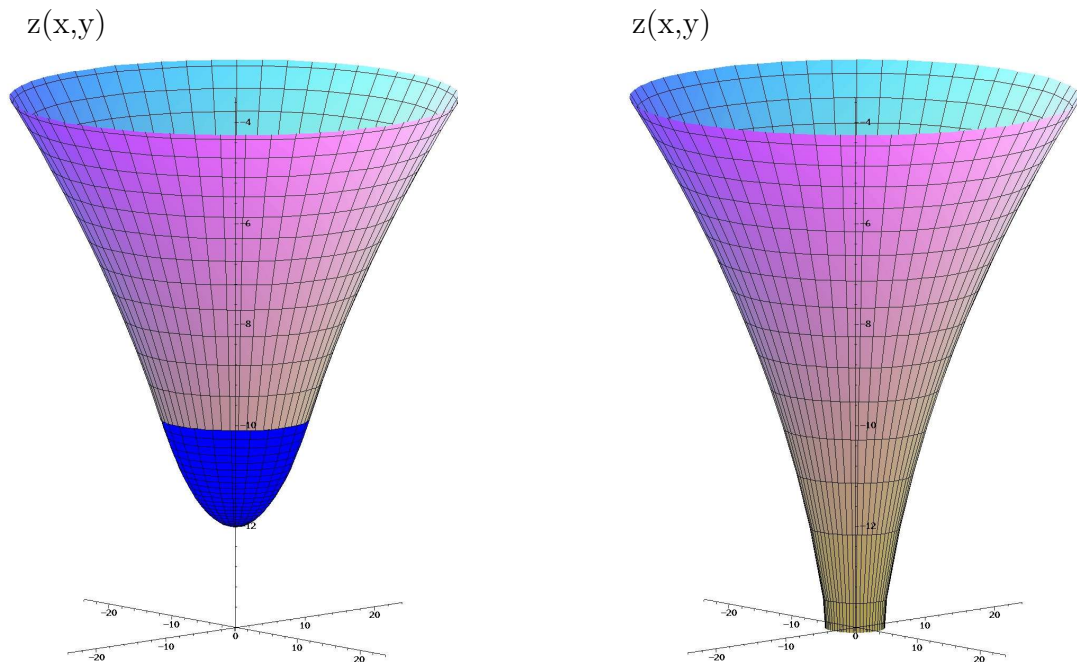


Abbildung 2.5: Eingebettetes Raumzeitdiagramm eines Neutronensterns (links) und eines schwarzen Loches (rechts) wobei  $M = 1.4 M_{\odot}$  und die  $x$ - und  $y$ -Achse in Einheiten km dargestellt sind.



Die Raumzeit inner- und außerhalb eines kompakten Sterns mit  $R > R_S$  ist somit singularitäts- und horizontfrei.

### Raumzeitkrümmung innerhalb und außerhalb eines rotierenden Sterns

Wie wir bereits bei der Beschreibung eines rotierenden schwarzen Lochs, formuliert durch die Kerr Lösung der Vakuum-Einsteingleichungen sahen, werden die entstehenden Gleichungen durch das Miteinbeziehen von Rotationseffekten sehr kompliziert. Die allgemeinrelativistische Behandlung von rotierenden Sternen ist deshalb nur numerisch möglich, falls man nicht extrem eingreifende Einschränkungen an das System macht. Die Korrekturen, die aufgrund der Rotation bei den Eigenschaften der Sterne bzw. bei der Metrik entstehen, werden jedoch erst bei sehr schneller Rotation wichtig. Numerische Rechnungen (siehe [15, 16]) zeigen, dass man Rotationskorrekturen bei Neutronensternen vernachlässigen kann, falls diese langsamer als 1 Herz rotieren; der maßgebliche Teil der bekannten Neutronensterne (siehe Anhang C) erfüllt diese Eigenschaft. Rotiert ein Neutronenstern jedoch schneller, so weicht seine Geometrie von der sphärischen ab und er wird um seine Rotationsachse axialsymmetrisch deformiert. Sein äquatorialer Radius  $R_{\text{äqu}}$  ist dann größer als sein polarer Radius  $R_{\text{pol}}$ . Diese axialsymmetrische Deformation wird durch die Angabe der Exzentrizität  $e$  definiert:<sup>16</sup>

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{R_{\text{pol}}}{R_{\text{äqu}}}\right)^2} \quad (2.67)$$

Neben der Deformation des Sterns wird die Metrik der Raumzeit  $g_{\mu\nu}$  innerhalb und außerhalb des Sterns durch die Rotation ebenfalls abgeändert. Wie bei der Kerr Metrik entstehen Mitführungseffekte der Raumzeit (engl. 'frame-dragging') die Lense-Thirring Effekte verursachen.

Da das Birkhoff-Theorem nur für sphärisch symmetrische Lösungen der Einsteingleichung (Schwarzschild, Reissner-Nordstrøm) gilt, kann man das Gravitationsfeld im Außenraum eines rotierenden Sterns nicht einfach durch

---

<sup>16</sup>Numerische Rechnungen in unterschiedlichsten Neutronenstern-Modellen zeigen, dass Exzentrizitäten bis zu  $e \sim 0.75$  möglich sind (siehe [15]).

die Kerr-Lösung beschreiben<sup>17</sup>. Die Innen- und Außenraumlösungen der Metrik eines rotierenden Sterns müssen demnach abhängig voneinander gelöst werden.

Man kann den axialsymmetrischen Ansatz der Metrik  $g_{\mu\nu}$  und des zugehörigen Weglängelements  $ds$  eines stationär rotierenden Sterns wie folgt darstellen (siehe [15]):

$$g_{\mu\nu}(r, \theta, (\Omega)) = \begin{pmatrix} e^{\Phi(r, \theta)} - \omega(r, \theta)^2 e^{\psi(r, \theta)} & 0 & 0 & \omega(r, \theta) e^{\psi(r, \theta)} \\ 0 & -e^{\Lambda(r, \theta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{\mu(r, \theta)} & 0 \\ \omega(r, \theta) e^{\psi(r, \theta)} & 0 & 0 & -e^{\psi(r, \theta)} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

$$ds^2 = e^{\Phi(r, \theta)} dt^2 - e^{\psi(r, \theta)} (d\phi - \omega(r, \theta) dt)^2 - e^{\mu(r, \theta)} d\theta^2 + e^{\Lambda(r, \theta)} dr^2$$

Die Metrik  $g_{\mu\nu}$ , die Metrik-Funktionen  $\Phi, \Lambda, \mu, \psi$  und die Funktion  $\omega$  hängen explizit von den Koordinaten  $r, \theta$  und implizit von der Rotationsfrequenz  $\Omega$  des Sterns ab.<sup>18</sup>

$\omega(r, \theta, (\Omega))$ , die so genannte 'Frame-Dragging'-Frequenz beschreibt die Mitführungseffekte der Raumzeit die aufgrund der Rotation des Sterns hervorgerufen werden. Die relative Winkelgeschwindigkeit eines Volumenelements von Materie im Stern ist demnach  $\bar{\omega}(r, \theta, \Omega) := \Omega - \omega(r, \theta, (\Omega))$ .

Um einen Einblick in die Struktur der Gleichungen eines rotierenden Sterns zu bekommen, wird im folgenden die störungstheoretische Methode von Hartle und Thorne beschrieben, die auf einer Multipolentwicklung der Metrik und der Einsteingleichung basiert (Details siehe [15])<sup>19</sup>. Die Materie des Sterns wird wieder als eine ideale Flüssigkeit angesetzt, so dass der Energieimpulstensor  $T_{\mu\nu}$  durch Gl. 2.48 beschrieben werden kann.

Durch die Rotation entstehen in jedem Fluidelement im Stern zusätzliche Beiträge zum Druck  $\Delta P$  und zur Energiedichte  $\Delta\epsilon$ , die man in der Hartle-

<sup>17</sup>Es kann sogar gezeigt werden, dass bei beliebiger Wahl einer Zustandsgleichung  $P(\epsilon)$ , die Kerr-Lösung im allgemeinen keine sinnvolle Innenraumlösung besitzt ([17]).

<sup>18</sup> $\Omega$  wird wieder gemessen von einem ruhenden, unendlich entfernten Beobachter.

<sup>19</sup>Die störungstheoretische Hartle-Thorne Methode ist nur für 'langsam' rotierende Sterne geeignet (Neutronensterne mit Perioden von Sekunden und einigen Millisekunden werden gut beschrieben); für schneller rotierende Objekte sind andere Methoden besser geeignet (siehe [18]).

Thorne Methode formal dem Energieimpulstensor hinzufügt:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= T_0^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu} \\ T_0^{\mu\nu} &= (\epsilon + P)u^\mu u^\nu - P g^{\mu\nu} \\ \Delta T^{\mu\nu} &= (\Delta\epsilon + \Delta P)u^\mu u^\nu - \Delta P g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$T_0^{\mu\nu}$  beschreibt den Energieimpulstensor eines nichtrotierenden Sterns (TOV-Gleichungen).

Die Grundidee der Hartle-Thorne Methode besteht darin, den rotierenden Stern um die sphärisch symmetrische Lösung der TOV-Gleichung mittels einer Multipolmethode zu entwickeln, und die entstehenden Gleichungen nach Ordnungen der Rotationsfrequenz  $\Omega$  zu gliedern<sup>20</sup>. Die zusätzlichen Beiträge des Drucks und der Energiedichte entwickelt man nach der Multipolmethode wie folgt:

$$\Delta P = (\epsilon + P) (P_0 + P_2 L_2(\cos^2\theta)) \quad , \quad \Delta\epsilon = \Delta P \frac{\partial\epsilon}{\partial P}$$

In gleicher Weise entwickelt man die Metrikkomponenten des Ansatzes (2.68) um die nichtrotierende Lösung der TOV-Gleichungen:

$$\begin{aligned} e^{\Phi(r,\theta,\Omega)} &= e^{\nu(r)} (1 + h_0(r, \Omega) + h_2(r, \Omega)L_2(\cos^2\theta)) \\ e^{\Lambda(r,\theta,\Omega)} &= e^{\lambda(r)} \left( 1 + \frac{m_0(r, \Omega) - m_2(r, \Omega)L_2(\cos^2\theta)}{r - 2m(r)} \right) \\ e^{\mu(r,\theta,\Omega)} &= r^2 (1 + v_2(r, \Omega) - h_2(r, \Omega)L_2(\cos^2\theta)) \\ e^{\psi(r,\theta,\Omega)} &= r^2 \sin^2\theta (1 + v_2(r, \Omega) - h_2(r, \Omega)L_2(\cos^2\theta)) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$L_2(\cos^2\theta)$  ist das zweite Legendrepolynom ( $L_2(x) := \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ ).<sup>21</sup> Die Parameter  $P_0, h_0$  und  $m_0$  sind die Monopolkorrekturen, die sich aufgrund der Rotation des Sterns ergeben; sie beschreiben die zusätzlichen sphärisch symmetrischen Beiträge zur Metrik  $g_{\mu\nu}$  und zur gravitativen Gesamtmasse  $M$  des Sterns. Die Parameter  $P_2, h_2, m_2$  und  $v_2$  sind die Quadrupolkorrekturen, die die sphärische Symmetrie des ungestörten Systems axialsymmetrisch deformieren; sie sind verantwortlich für die Abplattung des Sterns und bestimmen den Wert  $e$  der Exzentrizität (Gl. 2.67).

<sup>20</sup>Im folgenden werden Terme dritter Ordnung  $\Omega^3$  oder höher vernachlässigt.

<sup>21</sup>Um Verwechslungen mit dem Druck  $P$  zu vermeiden, wurden die Legendrepolynome mit  $L_2(\cos^2\theta)$  bezeichnet; in den meisten Lehrbüchern wird das Symbol  $P_2(\cos^2\theta)$  benutzt.

Die Frame-Dragging Frequenz  $\omega(r, \theta)$  läßt sich durch die  $\phi-t$  Komponente der Einsteingleichung bestimmen

$$G_{\phi}{}^t = R_{\phi}{}^t - \frac{1}{2}R \underbrace{\delta_{\phi}{}^t}_{\equiv 0} = R_{\phi}{}^t = 8\pi T_{\phi}{}^t \quad . \quad (2.70)$$

Entwickelt man diese Gleichung und vernachlässigt Ordnungen  $\geq \Omega^3$ , so wird  $\omega$  allein durch Ausdrücke des ungestörten Systems bestimmt und verliert seine  $\theta$ -Abhängigkeit

$$-\frac{d}{dr} \left( r^4 j(r) \frac{d\omega(r)}{dr} \right) + 4r^3 \frac{dj(r)}{dr} (\Omega - \omega(r)) = 0 \quad , \quad r \leq R \quad (2.71)$$

mit:  $j(r) = e^{\nu(r)/2} \sqrt{1 - 2m(r)/r}$  .

Außerhalb des Sterns fällt die Frame-Dragging Frequenz mit  $r^{-3}$  ab

$$\omega(r) = \frac{2}{r^3} J(\Omega) \quad r > R \quad , \quad (2.72)$$

wobei  $J(\Omega)$  der gesamte Drehimpuls des Sterns ist, der sich in niedrigster Ordnung wie folgt vereinfacht [15]:

$$J(\Omega) = \int_V T_{\phi}{}^t(r, \theta, \phi, (\Omega)) \sqrt{|g|} dr d\theta d\phi \approx$$

$$\approx \frac{8\pi}{3} \int_0^R r^4 \frac{\epsilon(r) + P(r)}{\sqrt{(1 - 2m(r)/r)}} (\Omega - \omega(r)) e^{-\nu(r)/2} dr \quad (2.73)$$

Das Trägheitsmoment  $I(\Omega)$  des Sterns, hinsichtlich seiner Rotationsachse, ergibt sich durch  $I(\Omega) = J(\Omega)/\Omega$ .

Die durch das Frame-Dragging verursachten Mitführungseffekte der Raumzeit und der dadurch entstehende Lense-Thirring Effekt sind experimentell noch nicht nachgewiesene Vorhersagen der ART die generell bei allen rotierenden Körpern auftreten sollten. Obwohl der Mitführungseffekt der Raumzeit im Außenraum der Erde, aufgrund der kleinen Rotationsgeschwindigkeit und Masse der Erde, minimal ist, glaubt man diesen Effekt durch eine geplante Satelitenmission<sup>22</sup> nachweisen zu können (siehe [19]). Da die Mitführungseffekte in der näheren Umgebung von schnell rotierenden Neutronensternen

<sup>22</sup>Die unter dem Namen 'Gravity Probe B' bekannte Mission wird voraussichtlich am 20. April 2004 starten (näheres siehe <http://einstein.stanford.edu>).

viel größer sind als die der Erde, können sie die Bewegung von um den Neutronenstern kreisenden Teilchen merklich beeinflussen. Neutronensterne, die von einem binären Partner durch Akkretion Masse erhalten, sind von einer Akkretionsscheibe umgeben. Es gibt erste Indizien, dass die Bewegung der Akkretionsscheibe und das Verhalten der auf den Neutronenstern einfallenden Materie von den Mitführungseffekten der Raumzeit mitbestimmt werden, so dass man ihre Existenz und Größe indirekt nachweisen kann [20].

Die absolute Obergrenze der Rotationsfrequenz  $\Omega$  eines Sterns ist erreicht, wenn sich Sternmaterie an der Oberfläche des Sterns in äquatorialer Ebene aufgrund der starken Zentrifugalkräfte ablöst. Bei dieser Frequenz (Keplerfrequenz  $\Omega_K$ ) sind die attraktiven, den Stern zusammenhaltenden Gravitationskräfte gleich den aufgrund der Rotation wirkenden Zentrifugalkräften. Ohne Rotationskorrekturen ergibt sich der folgende Wert für die Keplerfrequenz

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{M}{R^3}} \quad . \quad (2.74)$$

Bezieht man Rotationskorrekturen mit ein, so erhält man einen geringeren Wert für die Keplerfrequenz (näheres siehe [15])

$$(\Omega_K)^2 = \left(1 + \frac{2I}{R^3} - \left(\frac{2I}{R^3}\right)^2\right)^{-1} \frac{M}{R^3} \quad . \quad (2.75)$$

Anschaulich ist dies zu verstehen, indem man beachtet, dass in der ART die Rotationsenergie des Sterns eine zusätzliche gravitative Bindung erzeugt, so dass der Stern im Vergleich schneller rotieren kann. Eine durch 'exakte' numerische Berechnungen erzielte empirische Formel, die für rotierende Sterne mit maximaler Masse  $M_{max}$  erzielt wurde, lautet

$$\Omega_K = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{M_{max}}{R_{M_{max}}^3}} \quad . \quad (2.76)$$

### Radiale Oszillationen von kompakten Sternen

Radiale Oszillationen von sphärisch symmetrischen Sternen verändern nach dem Birkov-Theorem die Außenraummetrik (Schwarzschildmetrik) nicht, so

dass als Folge dessen keine Energieabstrahlung durch Gravitationswellen auftritt. Die Betrachtung der Eigenfrequenzen  $f_n$  von radial oszillierenden Sternen ist jedoch für die Stabilitätsbetrachtung von Gleichgewichtszuständen von Sternen von großer Bedeutung. Stabile kompakte Sterne sollten bei einer kleinen Verückung um ihren Gleichgewichtszustand wieder in diesen zurückkehren und nicht explodieren bzw. kollabieren; nur so können kompakte Sterne in binären Systemen existieren.

Der Gleichgewichtszustand des Sterns sei gegeben durch eine Lösung der TOV-Gleichungen (2.60) und wird im folgenden mit dem Index  $_0$  gekennzeichnet. Durch die Oszillationen wird die Metrik innerhalb des Sterns zeitabhängig, so dass wir folgenden sphärisch symmetrischen Ansatz der Metrik verwenden:

$$g_{\mu\nu}(t, r) = \begin{pmatrix} e^{\nu(t,r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(t,r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Die zeitabhängigen Metrikkomponenten sollen sich durch kleine Störungen um den Gleichgewichtszustand herum ergeben

$$\begin{aligned} \nu(t, r) &= \nu_0(r) + \delta\nu(t, r) \\ \lambda(t, r) &= \lambda_0(r) + \delta\lambda(t, r) \quad . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Diese kleinen Störungen verändern ebenfalls an jedem Raumzeitpunkt  $(t, r)$  den Druck  $P$ , die Energiedichte  $\epsilon$  und die barionische Teilchendichte  $\rho$ , so dass diese Größen ebenfalls um ihren Gleichgewichtszustand gestört werden

$$\begin{aligned} P(t, r) &= P_0(r) + \delta P(t, r) \\ \epsilon(t, r) &= \epsilon_0(r) + \delta\epsilon(t, r) \\ \rho(t, r) &= \rho_0(r) + \delta\rho(t, r) \quad . \end{aligned} \quad (2.79)$$

Flüssigkeitselemente der Sternmaterie, die sich in der Gleichgewichtskonfiguration am Orte  $r$  befinden, werden durch die Oszillationen räumlich um einen gewissen Betrag  $\xi(t, r)$  verschoben.

Die angegebenen Verückungen der Metrikkomponenten  $\delta\nu, \delta\lambda$  und der Materialeigenschaften  $\delta P, \delta\epsilon, \delta\rho$  sind von einem Beobachter betrachtet, der

sich an der Koordinate  $r$  des entsprechenden Gleichgewichtszustandes befindet; man bezeichnet sie als 'Euler'sche Verückung  $\delta$ '. Betrachtet man jedoch die Situation in der gestörten Metrik und bewegt sich als Beobachter mit der Oszillation auf dem Koordinatenpunkt  $r + \xi(r, t)$ , so nimmt man die Änderungen der Materieeigenschaften anders wahr. Man bezeichnet diese Störung als 'Lagrange'sche Verückung  $\Delta$ ', sie besitzen in Näherung den folgenden Wert:

$$\begin{aligned}\Delta P(t, r) &= P(t, r + \xi(r, t)) - P_0(r) \approx \delta P(t, r) + \frac{dP_0(r)}{dr} \xi(r, t) \quad (2.80) \\ \Delta \epsilon(t, r) &= \epsilon(t, r + \xi(r, t)) - \epsilon_0(r) \approx \delta \epsilon(t, r) + \frac{d\epsilon_0(r)}{dr} \xi(r, t) \\ \Delta \rho(t, r) &= \rho(t, r + \xi(r, t)) - \rho_0(r) \approx \delta \rho(t, r) + \frac{d\rho_0(r)}{dr} \xi(r, t)\end{aligned}$$

Wir nehmen im folgenden an, dass Barionenzahl und Energieerhaltung während der Oszillation erfüllt ist. Weiter fordern wir, dass die Vibrationen des Sterns adiabatisch erfolgen sollen, so dass es keinen Wärmeaustausch zwischen benachbarten Volumenelementen im Stern geben darf.

Die dynamischen Gleichungen erhält man durch das Einsetzen des Ansatzes der gestörten Metrik (2.77) und der gestörten Energieimpulsausdrücke (2.80) in die Einsteingleichung (2.23) bzw. in die Gleichung der kovarianten Erhaltung des Energieimpulstensors  $T_{\mu\nu}{}^{||\nu} \equiv 0$ . Wir betrachten im folgenden sehr kleine Lagrange'sche Verückungen, so dass wir nur lineare Terme der Verückungen in den entstehenden Gleichungen betrachten und höhere Ordnungen vernachlässigen. Die so entstehende dynamische Gleichung für die radiale Verückung  $\xi(t, r)$  besitzt die folgende Struktur:

$$\begin{aligned}W \frac{d^2 \zeta}{dt^2} &= \frac{d}{dr} \left( \Pi \frac{d\zeta}{dr} \right) + Q \zeta, \quad \zeta(t, r) = \frac{e^{-\nu_0}}{r^2} \xi(t, r) \quad (2.81) \\ W &= \frac{(e^{3\lambda_0 + \nu_0}) (\epsilon + P)}{r^2} \\ \Pi &= \frac{e^{\lambda_0 + 3\nu_0} \Gamma P}{r^2} \\ Q &= -4 \frac{e^{\lambda_0 + 3\nu_0}}{r^3} \frac{dP}{dr} - 8\pi \frac{e^{3\lambda_0 + 6\nu_0} (\epsilon + P) P}{r^2} + \\ &\quad + \frac{e^{3\lambda_0 + \nu_0}}{r^2 (\epsilon + P)} \left( \frac{dP}{dr} \right)^2,\end{aligned}$$

wobei  $\Gamma$  den adiabatischen Index bezeichnet:<sup>23</sup>

$$\Gamma = \left. \frac{\partial(\ln P)}{\partial(\ln \rho)} \right|_s = \frac{\epsilon + P}{P} \left. \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right|_s \quad (2.82)$$

Wir nehmen weiter an, dass die Zeitabhängigkeit der radialen Verückung  $\zeta(t, r)$  sich aus sinusförmigen Normalmoden  $n$  der Oszillationsfrequenzen  $f_n$  zusammensetzen

$$\zeta(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n(r) e^{if_n t} \quad . \quad (2.83)$$

Für die  $n$ -te Eigenmode erhält man somit die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left( \Pi \frac{d\zeta_n}{dr} \right) + (Q + f_n^2 W) \zeta_n = 0 \quad (2.84)$$

Bei gegebener Zustandsgleichung  $P(\epsilon, \rho)$  lassen sich die Oszillations-Eigenmoden berechnen, wobei die folgenden Randbedingungen benutzt werden

$$\begin{aligned} \zeta_n &\sim r^3 \quad \text{für: } r \rightarrow 0 \\ \frac{d\zeta_n}{dr} &= 0 \quad \text{für: } r \rightarrow R \quad . \end{aligned} \quad (2.85)$$

Eigenmoden mit  $f_n^2 > 0$  lassen den Stern in einer gleich bleibenden Weise radial oszillieren, wohingegen die Oszillationen der Eigenmoden mit  $f_n^2 < 0$  exponentiell mit der Zeit anwachsen, so dass hier eine dynamische Instabilität des Sterns auftritt. Da das Frequenzspektrum der Eigenfrequenzen  $f_n$  wie folgt geordnet ist

$$f_n^2 < f_{n+1}^2 \quad \text{mit: } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad , \quad (2.86)$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für die dynamische Stabilität des Stern hinsichtlich radialer Oszillationen die folgende Forderung:

$$\text{Dynamische Stabilitätsforderung: } f_0^2 \geq 0 \quad (2.87)$$

Die Frequenz der Fundamentalmode ( $n = 0$ ) darf demnach keine imaginären Anteile enthalten.

Die dynamische Instabilität tritt bei kompakten Sternen mit realistischen Zustandsgleichungen immer vor der absoluten Stabilitätsgrenze ( $R \geq$

---

<sup>23</sup><sub>s</sub> beschreibt berechnete Größen bei konstant gehaltener Entropie  $s$ .



$9/8 R_S$ ) auf und definiert die maximale Masse  $M_{max}$  der Sterne (siehe Kapitel 3).

Berechnungen von Oszillationen, die die sphärische Symmetrie verletzen bzw. Oszillationen von rotierenden Sternen sind in der ART sehr aufwendig, da dabei eine Energieabstrahlung durch Gravitationswellen erzeugt wird. Die astrophysikalische Relevanz solcher nichtradialer Oszillationen wird im letzten Teil dieses Kapitels dargestellt.

## Gravitative Rotverschiebung

Den maßgeblichen Anteil der astrophysikalischen Erscheinungen nimmt man durch die Detektion von elektromagnetischen Wellen wahr (Infrarot-, optische, Röntgen- und Gamma- Teleskope)<sup>24</sup>. Die hier auf der Erde (bzw. durch Satelliten im All) detektierte elektromagnetische Wellenform ist jedoch nicht identisch mit der elektromagnetischen Welle, die von der Quelle der Strahlung ausgesandt wurde. Einerseits wird die Strahlungsintensität geometrisch abgeschwächt, andererseits können Teile auf ihrem Weg durch das interstellare Medium abgeändert werden. Des Weiteren können Frequenz-Verschiebungen auftreten.

Frequenz-Verschiebungen von elektromagnetischen Wellen können durch zwei ganz unterschiedliche Arten verursacht werden. Bewegt sich ein strahlendes astrophysikalisches Objekt auf uns zu bzw. von uns weg, so wird die Frequenz der Strahlung ins Blaue bzw. ins Rote hin verschoben. Die kosmologische Rotverschiebung, die durch die Expansion des gesamten Universums entsteht, basiert auf dieser Art der Doppler-Rotverschiebung. Neben der Frequenz-Verschiebung durch den Dopplereffekt gibt es die gravitative Rotverschiebung, die bei astrophysikalischen Objekten auftritt, die ein sehr starkes Gravitationsfeld besitzen (z.B. schwarze Löcher, kompakte Sterne, Galaxiekern).

Zur Veranschaulichung des Effekts der gravitativen Rotverschiebung stellen wir uns vor, daß sich auf der Oberfläche eines statischen und sphärisch

---

<sup>24</sup>Neben den Detektoren für elektromagnetische Wellen geben außerdem Neutrinodetektoren, kosmische Teilchenschauer Detektoren und vielleicht in Zukunft Gravitationswellendetektoren Auskunft über bestimmte astrophysikalische Erscheinungen.

symmetrischen Neutronensterns der Masse  $M$  und des Radius  $R$  eine monochromatische Strahlungsquelle der Frequenz  $\nu_Q$  befindet. Die radial ausgesandte Strahlung wird von uns als Beobachter (ruhend am Orte  $r_B$ ) detektiert (siehe Abb. 2.6); wir bezeichnen die vom Beobachter gemessene Frequenz mit  $\nu_B$ .

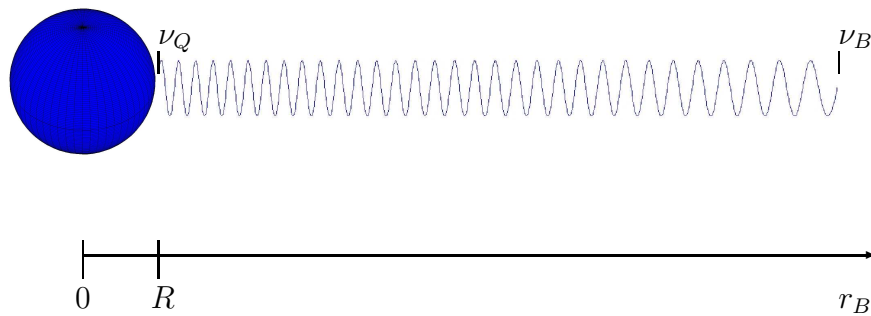


Abbildung 2.6: Veranschaulichung der gravitativen Rotverschiebung.

Die Frequenz  $\nu_Q$  ergibt sich durch den Quotienten der Zeitspanne  $\Delta\tau_Q$  der aufeinander folgenden Wellenkämme der elektromagnetischen Strahlung ( $\nu_Q = 1/(\Delta\tau_Q)$ ) gemessen in der Eigenzeit  $\tau$  am Orte  $R$  der Oberfläche des Sterns. Das Differential der Eigenzeit  $d\tau$  an einem Ort  $r$  in dieser statischen, sphärisch symmetrischen Raumzeit ist wie folgt definiert

$$d\tau(r) = \sqrt{g_{\mu\nu}(r) dx^\mu dx^\nu} \quad . \quad (2.88)$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich, wenn man annimmt, dass sich die Quelle der Strahlung und der Beobachter räumlich nicht bewegen

$$d\tau(r) = \sqrt{g_{tt}(r)} dt \quad , \quad (2.89)$$

wobei  $dt$  das Differential der Koordinatenzeit  $t$  (Weltzeit) ist.

Die Frequenz der ausgesandten Strahlung  $\nu_Q$  schreibt sich somit

$$\nu_Q = \frac{1}{\Delta\tau_Q} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}(R)} \Delta t} \quad , \quad (2.90)$$

wobei  $\Delta t$  die Zeitspanne beschreibt, die eine Schwingung der elektromagnetischen Welle, in Koordinatenzeit  $t$  gemessen benötigt. Da die Koordinatenzeit  $t$  an jedem Ort universell definiert ist, gilt für die am Orte  $r_B$  des Beobachters gemessene Frequenz  $\nu_B$

$$\begin{aligned}\nu_B &= \frac{1}{\Delta\tau_B} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}(r_B)} \Delta t} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}(r_B)}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{g_{tt}(R)} \nu_Q}} = \\ &= \sqrt{\frac{g_{tt}(R)}{g_{tt}(r_B)}} \nu_Q \quad .\end{aligned}\quad (2.91)$$

Wir erhalten demnach eine Frequenz-Verschiebung der Strahlung, die sich durch die Unterschiede der  $tt$ -Komponente der Metrik am Orte  $R$  der Quelle und am Orte  $r_B$  der Beobachtung ergibt.

Die Raumzeit an der Oberfläche eines sphärisch symmetrischen kompakten Sterns wird beschrieben durch die Schwarzschildmetrik, so daß ein ruhender Beobachter im Unendlichen ( $r_B \rightarrow \infty$ ) die Frequenz  $\nu_Q$ , der von der Oberfläche des Sterns emittierten Strahlung, als rotverschoben wahrnehmen würde

$$\nu_B = \sqrt{\frac{g_{tt}(R)}{g_{tt}(r_B \rightarrow \infty)}} \nu_Q = \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \nu_Q \quad (2.92)$$

$$\text{mit:} \quad g_{tt}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad . \quad (2.93)$$

Für typische Massen und Radien von Neutronensternen ( $M = 1.4 M_\odot$ ,  $R = 12$  km) würde z.B. eine von der Oberfläche des Sterns emittierte, monochromatische blaue Strahlung ( $\nu_Q = 650 \times 10^{15}$  Hz) vom Beobachter ins rote hin verschoben als grün wahrgenommen werden ( $\nu_B \approx 526 \times 10^{15}$  Hz). Noch kompaktere Sterne (z.B. Quarksterne, Zwillingsterne) würden die emittierte blaue Strahlung noch weiter ins rote hin verschieben. Ein Quarkstern mit derselben Masse  $M = 1.4 M_\odot$  aber geringerem Radius  $R = 7$  km würde die blaue Strahlung über den grünen Farbbereich hinaus ins rote hin verschieben ( $\nu_B \approx 416 \times 10^{15}$  Hz).

In umgekehrter Weise lassen sich demnach anhand der gemessenen Rotverschiebung makroskopische Sterneigenschaften bestimmen (siehe Anhang C). Für den Quotienten der gravitativen Masse durch den Radius gilt nach

Gl. 2.92

$$\frac{M}{R} = \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \frac{\nu_B}{\nu_Q} \right) \right) \quad . \quad (2.94)$$

Eine am Ereignishorizont  $r_Q = R = 2M = R_S$  eines schwarzen Loches ausgesandte Strahlung wird unendlich rotverschoben:

$$\nu_B = \sqrt{\frac{g_{tt}(r_Q \rightarrow 2M)}{g_{tt}(r_B \rightarrow \infty)}} \nu_Q = 0 \nu_Q = 0 \quad (2.95)$$

## Gravitationslinsen

Jegliche Energieformen krümmen die raumzeitliche Struktur in ihrer Umgebung. Die Bewegung von Körpern in dieser gekrümmten Raumzeit erfolgt auf geodätischen Linien, die die kürzeste Verbindungsstrecke zwischen zwei Raumzeitpunkten darstellen. Im Ortsraum dagegen beschreibt der sich bewegende Körper im allgemeinen eine gekrümmte Kurve, so daß es für einen Beobachter erscheint, als ob der Körper von der Energieansammlung gravitativ angezogen wird.

In der ART gilt das gleiche Anschauungsbild auch für die Bewegung von Lichtstrahlen. Ein Lichtstrahl, der auf seinem Weg zu einem Beobachter an einer großen Energieansammlung vorbeikommt, wird durch diese abgelenkt, da er sich stets in der, durch die Energieansammlung gekrümmten Raumzeit, geodätisch bewegen muss. Das Prinzip der gravitativen Lichtablenkung ist in Abb. 2.7 veranschaulicht. Ein von einem Stern ausgehender Lichtstrahl wird durch das Gravitationsfeld der Sonne, d.h. durch die von der Sonne verursachte Raumzeitkrümmung, geodätisch abgelenkt. Ein Beobachter auf der Erde nimmt somit den Stern an einer anderen Position wahr als er in Wirklichkeit ist. 1919 wurde diese gravitative Abweichung der Sternposition erstmals experimentell bestätigt.

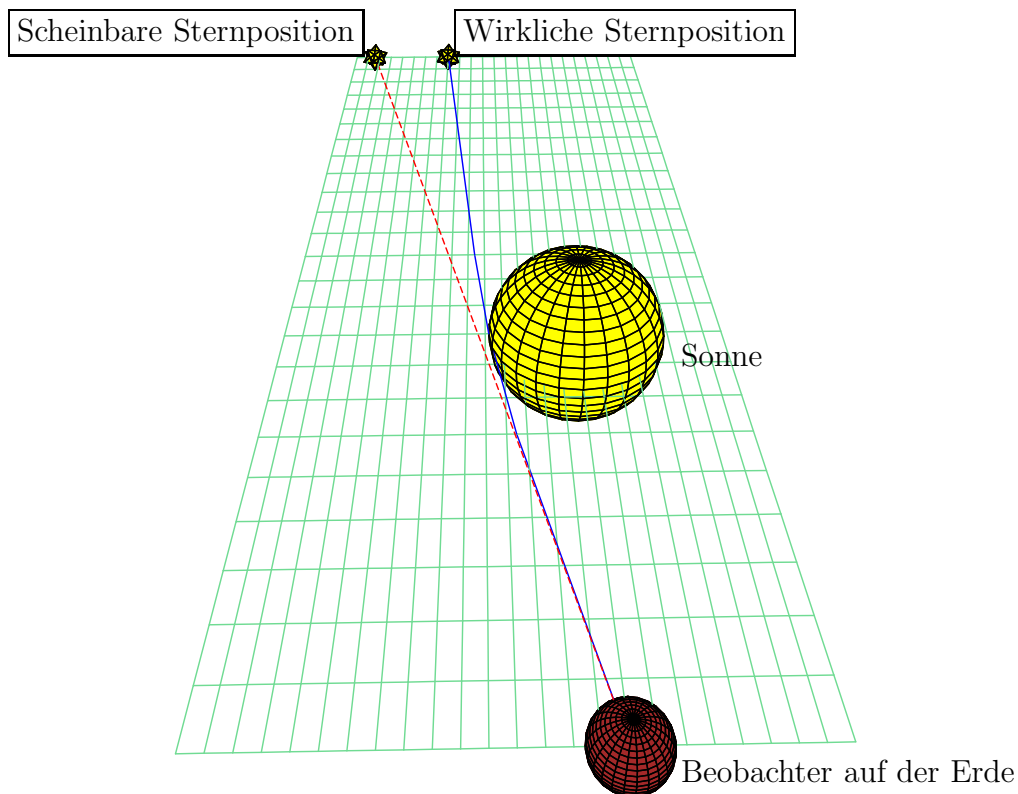


Abbildung 2.7: Veranschaulichung der gravitativen Lichtablenkung einer Sternposition durch das gravitative Feld der Sonne.

Bei sehr starken Gravitationsfeldern kann ein interessanter Effekt auftreten, den man als Gravitations-Linseneffekt bezeichnet. Wir nehmen im folgenden an, dass sich eine Lichtquelle  $Q$  hinter einem sehr energiereichen Objekt befindet, das wir im folgenden als Gravitationslinse bezeichnen werden (siehe Abb. 2.8). Aufgrund der durch die Linse verursachten Raumzeitkrümmung nimmt der Beobachter scheinbar zwei identische Bilder der Lichtquelle wahr. Für den speziellen Fall, dass sich die Lichtquelle, die Linse und der Beobachter auf einer Linie befinden, entstehen sogar unendlich viele Bilder der Quelle, angeordnet auf einem Ring um die Linse (Einstein-Ring). Den Radius des Ringes der Erscheinungsbilder der Quelle bezeichnet man als Einstein-Radius  $R_E$ <sup>25</sup>.

<sup>25</sup>In die Berechnung von  $R_E$ , die mit Hilfe der Geodätengleichung (2.11) gewonnen wird ( $ds = 0$ ), geht die Annahme ein, dass das durch die Linse verursachte Gravitationsfeld durch die Schwarzschildmetrik beschrieben wird.

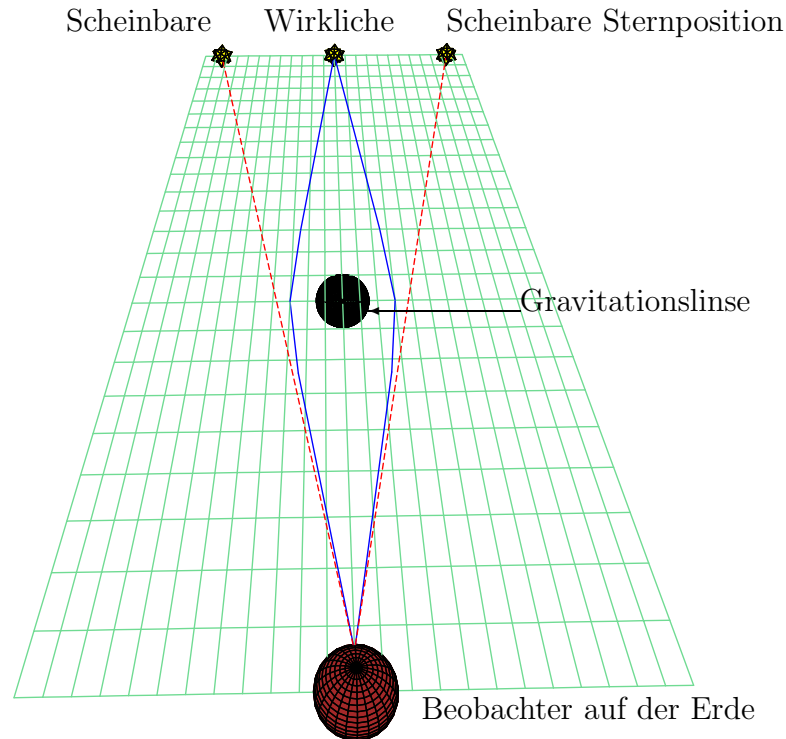


Abbildung 2.8: Der Gravitations - Linseneffekt.

$$R_E = \sqrt{4M \frac{r_{LQ} r_{BL}}{r_{BQ}}} \quad (2.96)$$

- $M$  : Gravitative Masse der Linse  
 $r_{BL}$  : Abstand Beobachter – Linse  
 $r_{BQ}$  : Abstand Beobachter – Quelle  
 $r_{LQ}$  : Abstand Linse – Quelle

Eine Lichtquelle, die sich z.B. im Abstand  $r_{LQ} = 200$  km hinter einem kompakten Stern der Masse  $M = 1.4 M_{\odot}$  befindet, würde von einem Beobachter, der sich im Abstand  $r_{BL} = 1000$  km von dem kompakten Stern aufhält, als leuchtende Ring-Erscheinung mit dem Radius  $R_E \approx 37$  km um den kompakten Stern herum wahrgenommen werden. Da wir uns als realer Beobachter jedoch in weit größerem Abstand zum kompakten Stern aufhalten, ist es mit Hilfe der heutigen Teleskope leider nicht möglich solche Einsteinringe bei

kompakten Sternen aufzulösen.<sup>26</sup>

Obwohl es somit bei kompakten Sternen nicht möglich ist die einzelnen Bilder, die durch den Gravitations-Linseneffekt entstehen, aufzulösen, ergibt sich dennoch ein experimentell beobachtbarer Effekt, der mit dem Begriff 'Microlensing' bezeichnet wird. Beobachtet man z.B. die Intensität der gemessenen Strahlung eines beliebigen Sterns (Quellstern) in unserer Galaxie und nimmt an, dass sich ein kompakter Stern aufgrund seiner translatorischen Eigenbewegung, zufällig vor diesen Quellstern schieben würde, so nimmt die gemessene Intensität des Quellsterns, aufgrund der Lichtbündelung des Gravitationslinsen-Effektes des kompakten Sterns plötzlich zu. Die gemessene Intensitätszunahme hängt (wie der Einstein-Radius  $R_E$  auch) von der Masse des kompakten Sterns ab. Bei Kenntnis der Abstandsverhältnisse  $r_{LQ}, r_{BL}$  ist somit eine Massenbestimmung des kompakten Sterns experimentell möglich (siehe Anhang C).

## Gravitationswellen

Die derzeitige Wahrnehmung astrophysikalischer Erscheinungen beruht neben Neutrino- und kosmischen Teilchendetektionen maßgeblich auf dem Bild, welches wir durch elektromagnetische Wellen unterschiedlichster Frequenz vom Kosmos erhalten. Die Theorie der allgemeinen Relativität sagt jedoch voraus, dass auch Gravitationswellen von Körpern emittiert werden können. Gravitationswellen stellen eine Schwingung der raumzeitlichen Struktur dar, die sich ungehindert im Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Trifft eine solche Welle auf die Erde, so verändert sie dort die Längen- und Zeitmaße, so dass sich im Prinzip, durch Messung dieser Längenänderungen ein Bild des Verhaltens des Gravitationswellen-emittierenden Körpers rekonstruieren läßt. Mit Hilfe eines sensitiven Gravitationswellen-Detektors würde sich das heutige Bild des Kosmos revolutionieren, da er im Vergleich zu den Detektoren (Teleskopen) der elektromagnetischen Strahlung ganz andere Eigenschaften der astrophysikalischen Objekte darstellen würde. Gravitationswellen tragen Informationen der makroskopischen Energiebewegungen der emittieren-

---

<sup>26</sup>Bei energiereicheren Linsen, die durch gesamte Galaxien gebildet werden können, sind zur Zeit in drei Fällen Einsteinringe beobachtet worden (siehe [21])

den astrophysikalischen Objekte mit sich. In engen Doppelsternsystemen gibt es bereits eine indirekte Evidenz der Existenz von Gravitationswellen (siehe [22, 23, 24] und später) – der direkte experimentelle Nachweis steht jedoch noch aus.

In diesem Unterkapitel sollen zunächst die mathematischen Grundlagen von Gravitationswellen in der ART beschrieben werden, danach werden mögliche Gravitationswellen emittierende Systeme dargestellt, die im Zusammenhang mit kompakten Sternen auftreten. Abschließend werden dann die derzeit existierenden und zukünftig geplanten Gravitationswellen-Detektoren kurz vorgestellt.

## Grundlagen

Als Grundlage der Theorie der Gravitationswellen dient die Einsteingleichung (2.23), die wir wie folgt durch Kontraktion umformulieren können<sup>27</sup>

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} \Leftrightarrow R^{\mu\nu} = 8\pi \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g^{\mu\nu} \right) \quad (2.97)$$

$$\text{da: } R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2}R \underbrace{\delta^\mu{}_\mu}_{\equiv 4} = -R = 8\pi T^\mu{}_\mu = 8\pi T \quad ,$$

wobei  $T := T^\mu{}_\mu$  die Spur des Energieimpulstensors der Materie ist.

Wir nehmen nun an, dass man die Gravitationswelle als eine kleine Störung der Raumzeit um eine sonst flache Minkovski-Raumzeit darstellen kann. Wir entwickeln deshalb die Metrik  $g_{\mu\nu}$  um die Minkovski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$ , wobei wir die Störung  $h_{\mu\nu}$  als klein annehmen

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{mit: } |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad . \quad (2.98)$$

Ordnet man den Ricci-Tensor  $R_{\mu\nu}$  nach Ordnungen in  $h_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \underbrace{R_{\mu\nu}^{(0)}}_{\equiv 0} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad , \quad (2.99)$$

so schreibt sich die linearisierte Einsteingleichung der Form (2.97) wie folgt

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T \eta_{\mu\nu} \right) \quad (2.100)$$

$$\text{mit: } R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \square h_{\mu\nu} + h^\alpha{}_{\alpha|\mu|\nu} - h^\alpha{}_{\mu|\alpha|\nu} - h^\alpha{}_{\nu|\alpha|\mu} \right) \quad ,$$

<sup>27</sup>Im folgenden verwenden wir  $G = c = 1$ .



wobei  $\square := \square_{||\alpha}^\alpha = \partial^\alpha \partial_\alpha + O(h)$  der D'Alembert Operator ist.

Aufgrund der Freiheit der Wahl eines beschreibenden Koordinatensystems ist die Störung  $h_{\mu\nu}$  nicht eindeutig festgelegt, so dass wir vier zusätzliche Eichbedingungen an  $h_{\mu\nu}$  stellen können, die jedoch mit den Eichtransformationen in Einklang stehen müssen. Wählt man die folgenden vier Eichbedingungen

$$2 h^\alpha{}_{\mu|\alpha} = h^\alpha{}_{\alpha|\mu} \quad , \quad (2.101)$$

so entkoppeln die linearisierten Feldgleichungen (2.100) aufgrund der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left( \square h_{\mu\nu} + h^\alpha{}_{\alpha|\mu|\nu} - \underbrace{h^\alpha{}_{\mu|\alpha|\nu}}_{=\frac{1}{2}h^\alpha{}_{\alpha|\mu|\nu}} - \underbrace{h^\alpha{}_{\nu|\alpha|\mu}}_{=\frac{1}{2}h^\alpha{}_{\alpha|\nu|\mu}} \right) = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} \quad . \quad (2.102)$$

Analog zur Elektrodynamik (mit der Eichung  $A^\alpha{}_{|\alpha}$  und der Ladungsstromdichte  $j^\mu$ )

$$\square A^\mu = 4\pi j^\mu \quad (2.103)$$

erhalten wir demnach eine gravitative Wellengleichung

$$\square h_{\mu\nu} = 16\pi \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T \eta_{\mu\nu} \right) =: 16\pi S_{\mu\nu} \quad , \quad (2.104)$$

deren Lösung durch die retardierten Potentiale gegeben ist

$$h_{\mu\nu}(t, \bar{r}) = -4 \int \frac{S_{\mu\nu}(t - |\bar{r} - \bar{r}'|, \bar{r})}{|\bar{r} - \bar{r}'|} d^3 x' \quad . \quad (2.105)$$

Die Lösung der freien linearisierten Feldgleichung

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (2.106)$$

läßt sich in der Form von ebenen Wellen schreiben, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ( $c = 1$ ) ausbreiten

$$h_{\mu\nu}(x^\alpha) = \varepsilon_{\mu\nu} e^{-i k_\alpha x^\alpha} + c.c. \quad , \quad (2.107)$$

wobei die Amplituden der Welle durch den Polarisationsensor  $\varepsilon_{\mu\nu}$  beschrieben werden.  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnet den Wellenzahlvektor und  $k_0 = k_t = \omega$

die Frequenz der Welle, wobei  $k_\mu$  die Eigenschaft eines Nullvektors besitzt<sup>28</sup>

$$k_\mu k^\mu = \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \Rightarrow \omega = k_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = \sqrt{k_i k^i} \quad . \quad (2.108)$$

Der Vektor  $k_\mu$  legt die Ausbreitungsrichtung und Frequenz der Welle fest, wohingegen  $\varepsilon_{\mu\nu}$  die Amplitude und Polarisation und damit den Spin<sup>29</sup> und die Helizität der Welle vorgibt.

Eine solche, sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum bewegende Raumzeitwelle transportiert eine gewisse Menge an Energie. Diese Energie der Gravitationswelle stammt von dem astrophysikalischen Objekt, das die Gravitationswelle emittierte und wurde ihm zu früherer Zeit entzogen. Im allgemeinen läßt sich der Energieimpulstensor  $t_{\mu\nu}^{grav}$  des Gravitationsfeldes nicht lokal definieren (siehe [6, 14]), da man stets ein lokales Koordinatensystem definieren kann, indem die Raumzeitkrümmung identisch verschwindet, und somit Gravitationsfeld-frei ist. In der Literatur wurden eine Vielzahl von Gravitations-Pseudotensoren definiert, die jedoch alle die Eigenschaft besitzen, dass sie ihren Energie-Impuls-Gehalt unter Koordinatentransformationen im allgemeinen ändern. Den Energie-Impuls Betrag einer Gravitationswelle kann man jedoch in der benutzten störungstheoretischen Formulierung mit Hilfe eines Mittelungsprozesses  $\langle \dots \rangle$  (siehe [6]) sinnvoll definieren

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{1}{8\pi} \left[ \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle - \frac{1}{2} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle \eta^{\mu\nu} \right] \quad , \quad (2.109)$$

wobei über mehrere Wellenlängen  $\lambda$  der Gravitationswelle gemittelt wird, so dass man einen ausgeschmierten Eindruck der Gravitationswelle erhält. In störungstheoretischer Weise läßt sich demnach die Einsteingleichung wie folgt schreiben

$$R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} R^{(1)} \eta_{\mu\nu} = 8\pi (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}^{grav}) + O(h^3) \quad , \quad (2.110)$$

wobei Ordnungen  $O(h^3)$  und höher im folgenden vernachlässigt werden. Man kann zeigen (siehe [6]), dass der gemittelte Energieimpulstensor des Gravitationsfeldes sich unter Verwendung der Eichbedingung (2.101) wie folgt aus

---

<sup>28</sup>Aufgrund der benutzten Approximation der Störungsentwicklung werden Indices im folgenden mit der flachen Minkovskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$  gehoben und gesenkt.

<sup>29</sup>Der Spin ist normalerweise eine teilchenphysikalische Eigenschaft. Stellt man sich die Gravitationswelle als einen quantisierten Gravitonenaustausch vor, so würden die entsprechenden Gravitonen Spin 2 Teilchen sein (siehe [25]).

den Störungen  $h_{\mu\nu}$  zusammensetzt

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{1}{32\pi} \left\langle \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\rho}{}^{\rho} \eta_{\alpha\beta} \right)_{|\mu} \left( h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h_{\rho}{}^{\rho} \eta^{\alpha\beta} \right)_{|\nu} \right\rangle . \quad (2.111)$$

Durch Einsetzen der Form der ebenen Gravitationswellen und Zeitmittelung erhält man

$$t_{\mu\nu}^{grav} = \frac{1}{16\pi} k_{\mu} k_{\nu} \left( (\varepsilon^{\alpha\beta})^* \varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} |\varepsilon_{\alpha}{}^{\alpha}|^2 \right) . \quad (2.112)$$

Der Energiestrom der Gravitationswelle  $dE$ , der durch das Flächenelement  $r^2 d\Omega$  im Abstand  $r$  von der Quelle auftritt ist gegeben durch

$$dE = t_{0i}^{grav} x^i r^2 d\Omega . \quad (2.113)$$

Bisher betrachteten wir lediglich die Lösung der freien, linearisierten Feldgleichung ( $\square h_{\mu\nu} = 0, T_{\mu\nu} \equiv 0$ ). Möchte man jedoch Aussagen über den Abstrahlungsmechanismus des Gravitationswellen-erzeugenden Objektes machen, so muss man die Eigenschaften des Objektes selbst in Betracht ziehen und sich die Lösung der retardierten Potentiale (2.105) genauer betrachten.

Wir gehen im folgenden davon aus, dass das Gravitationswellen-aussendende Objekt durch den folgenden Ansatz des Energieimpulstensors beschrieben werden kann

$$T^{\mu\nu}(x^{\alpha}) = T^{\mu\nu}(r) e^{-i\Omega_{Ob}t} + c.c. \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{für: } r \leq r_{ob} \\ \equiv 0 & \text{für: } r > r_{ob} \end{cases} . \quad (2.114)$$

Das Objekt ist demnach auf den Radius  $r_{Ob}$  begrenzt und führt eine zeitliche Schwingung der Frequenz  $\Omega_{Ob}$  aus. Weiter nehmen wir an, dass die Wellenlänge  $\lambda_{Ob} = 2\pi/\Omega_{Ob}$  groß gegenüber der Ausdehnung des Objektes, aber klein gegenüber dem Beobachtungsstandpunkt  $r$  ist ( $r_{Ob} \ll \lambda_{Ob} \ll r$ ). Entwickelt man den Ausdruck der retardierten Potentiale (2.105) für große Abstände  $r$ , so erhält man (siehe [25])

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(t, r) &= -\frac{4}{r} e^{i(kr - \Omega_{Ob}t)} \int S_{\mu\nu}(\vec{r}') e^{-ikr'} d^3\vec{r}' + c.c. = \\ &= -\frac{4}{r} e^{i(kr - \Omega_{Ob}t)} S_{\mu\nu}(k) , \end{aligned} \quad (2.115)$$

wobei  $S_{\mu\nu}(k)$  sich aus der Fouriertransformierten des Energieimpulstensors und seiner Spur zusammensetzt

$$S_{\mu\nu}(k) = T_{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2} T(k) \eta_{\mu\nu} . \quad (2.116)$$

Mit Hilfe von  $h_{\mu\nu}$  kann man nun den Energieimpulstensor des Gravitationsfeldes  $t_{\mu\nu}^{grav}$  berechnen. Durch Gleichung (2.113) erhält man die durch die Gravitationswelle abgestrahlte Energie  $dE$  pro Raumwinkel  $d\Omega$  und Zeit  $t$  ( $\omega = \Omega_{Ob}$ )

$$-\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{\omega^2}{\pi} \left( (T_{\mu\nu}(k))^* T_{\mu\nu}(k) - \frac{1}{2} |T(k)|^2 \right) . \quad (2.117)$$

Durch Integration über den Raumwinkel  $d\Omega$  kann man die abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit wie folgt schreiben

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2\omega^6}{5} \left( \sum_{i,j=1}^3 |Q^{ij}|^2 - \frac{1}{3} \left| \sum_{i=1}^3 Q^{ii} \right|^2 \right) , \quad (2.118)$$

wobei  $Q^{ij}$  den Quadrupoltensor der Materie bezeichnet

$$Q^{ij} = \int x^i x^j T^{tt}(x, y, z) dx dy dz . \quad (2.119)$$

Gravitationswellen werden demnach durch Oszillationen von Quadrupoldeformationen der Quelle hervorgerufen; eine gravitative Diplostrahlung existiert nicht.

Hätte man nicht das natürliche Einheitensystem  $G = c = 1$  benutzt, so müsste in Gleichung 2.118 noch der Vorfaktor  $G/c^5$  eingefügt werden, was die außerordentliche Kleinheit von abgestrahlter Energie durch die Gravitationswelle zum Ausdruck bringt. Wie wir im folgenden sehen werden gibt es dennoch experimentelle Möglichkeiten Gravitationswellen zu detektieren.

### Kompakte Sterne als Quellen von Gravitationswellen

Im folgenden sollen mögliche Quellen von Gravitationswellen besprochen werden, die im Zusammenhang mit kompakten Sternen auftreten können. Im einzelnen sind dies

- Abstrahlung von Gravitationswellen in binären Systemen von kompakten Sternen
- Abstrahlung von Gravitationswellen bei einzelnen kompakten Sternen
- Gravitationswellen-’Burst’ durch Supernova-Explosionen

- Gravitationswellen-’Burst’ von kollabierenden kompakten Sternen
- Gravitationswellen-’Burst’ durch kollidierende kompakten Sterne

#### Abstrahlung von Gravitationswellen in binären Systemen

Wir betrachten ein System von sich in konstanten Abstand  $r_A$ , kreisförmig umkreisenden kompakten Sternen der Massen  $M_1$  und  $M_2$ . Damit die Zentrifugal- und Gravitationskraft der sich umkreisenden Sterne übereinstimmt, müssen sich die Sterne mit der Bahnfrequenz  $\Omega_{Bahn}$  umkreisen

$$\Omega_{Bahn} = \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{r_A^3}} \quad . \quad (2.120)$$

Das Gesamtsystem beschreibt eine periodisch oszillierende Quadrupolschwingung der Frequenz  $\omega = 2\Omega_{Bahn}$ . Mit Hilfe der Gleichung 2.118 erhält man die durch die Gravitationswelle abgestrahlte Energie pro Zeit (siehe [25])

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2)}{r_A^5} \quad . \quad (2.121)$$

Im folgenden betrachten wir das binäre System ’PSR 1913+16’ das aus zwei kompakten Sternen der Massen  $M_1 = 1.4 M_\odot$  und  $M_2 = 1.42 M_\odot$  besteht, die sich zur Zeit im Abstand  $r_A = 10^6$  km umkreisen

$$r_A = \left( \frac{M_1 + M_2}{\Omega_{Bahn}^2} \right)^{-3} \Rightarrow \Omega_{Bahn} = 7.75 \text{ Stunden} \quad . \quad (2.122)$$

Durch die Abstrahlung von Gravitationswellen verliert das binäre System ständig Energie, so dass sich im Laufe der Zeit der Abstand  $r_A$  verringert

$$\frac{r_A(t)}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{(r_A(t))^3} \quad . \quad (2.123)$$

Durch die Annäherung der kompakten Sterne verringert sich die Bahnperiode  $\tau_{Bahn} = 2\pi/\Omega$  mit der Zeit. Weisberg und Taylor konnten dies experimentell nachweisen, wobei der experimentelle Wert ( $\tau_{Bahn}/\Delta t = -(2.4 + / - 0.09) 10^{-12}$ ) sehr genau mit dem theoretisch vorhergesagten übereinstimmt [26]. Hulse und Taylor erhielten dafür 1993 den Nobelpreis.

Abstrahlung von Gravitationswellen bei einzelnen kompakten Sternen

Damit einzelne kompakte Sterne Gravitationswellen aussenden können, muss die Geometrie des Sterns von der sphärischen abweichen. Rotierend- oszillierende oder quadrupoldeformierte kompakte Sterne sind Kandidaten für Gravitationswellen. Quadrupoldeformationen können z.B. bei akretierenden kompakten Sternen in 'Low-Mass X-Ray Binaries (LMXB)', oder in engen binären Systemen durch Gravitationsdeformation (verursacht durch den binären Partner) hervorgerufen werden. Die Frequenz der ausgesandten Gravitationswelle ist dann doppelt so groß wie die Rotationsfrequenz  $\Omega$  des kompakten Sterns (vorausgesetzt ist hier eine axialsymmetrische Deformation des Sterns). Die Intensität der Strahlung hängt von der Größe der Quadrupoldeformation des Sterns ab und ist demnach unter anderem durch die Zustandsgleichung der Materie bestimmt. Durch die Abstrahlung von Gravitationswellen verliert der kompakte Stern Energie und seine Rotation verlangsamt sich dadurch.

Die als Pulsare beobachteten kompakten Sterne verlieren jedoch außerdem durch magnetische Dipolstrahlung Energie, so daß eine eindeutige Zuordnung der Verursachung der Abnahme der Rotationsperiode im allgemeinen nicht möglich ist. Durch Messung der Beschleunigung der Abnahme der Rotationsfrequenz  $\Omega$  ist jedoch eine Unterscheidung möglich

$$n(\Omega) = \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} \begin{cases} = 5 & \text{für Gravitationsstrahlung} \\ = 3 & \text{für magnetische Dipolstrahlung} \end{cases} . \quad (2.124)$$

Zur Zeit reichen jedoch die bekannten Pulsardaten noch nicht aus um eine hinreichend genaue Fehlerabschätzung zu erhalten.

Gravitationswellen-'Burst' durch Supernova-Explosionen

Der kollabierende Kern einer Supernova-Explosion bildet einen kompakten Stern oder ein schwarzes Loch. Kurz nach der Supernova-Explosion ist der kompakte Stern extrem heiß (Proto-kompakter Stern) und oszilliert in deformierter Weise um seinen Gleichgewichtszustand (Abklingzeit ca. 0.1 s). In dieser kurzen Zeitspanne sendet er höchst wahrscheinlich einen extrem intensiven Gravitationswellen-Burst aus. Der ausgesandte Burst hängt unter anderem von der Rotationsperiode, dem Radius und der Quadrupoldeformation der Masse des kompakten Sterns ab und ist demnach von der Zustands-

gleichung der Materie abhängig.

#### Gravitationswellen-’Burst’ von kollabierenden kompakten Sternen

Wenn ein Neutronenstern seine maximale Masse überschreitet, so wird er instabil und kollabiert. Das Endstadium eines solchen Gravitationskollaps kann ein noch kompakterer Stern (Quarkstern, Zwillingstern) oder ein schwarzes Loch sein. Während eines solchen Kollaps treten sehr wahrscheinlich starke Quadrupoldeformationen auf. Endet der Gravitationskollaps in einem Zwillingstern (siehe Kapitel 3), so oszilliert dieser eine kurze Zeit um seinen Gleichgewichtszustand und sendet einen Gravitationswellen-Burst aus. Endet der Kollaps hingegen in einem schwarzen Loch, so werden die ausgesandten Gravitationswellen der kollabierenden Materie am Ereignishorizont unendlich rotverschoben. In beiden Fällen sollte sich ein extrem intensitätsreicher Gravitationswellen-Burst ergeben, der sich in seiner Dauer, Frequenz und Form unterscheiden lassen sollte.

#### Gravitationswellen-’Burst’ durch kollidierende kompakten Sterne

Aufgrund der gravitativen Abstrahlung von Energie verringern kompakte Sterne in binären Systemen ständig ihren relativen Abstand  $r_A$ , so dass sie irgendwann unweigerlich zusammenstoßen müssen. Je enger die binären Partner sich kommen, desto intensitätsreicher wird die, aufgrund der Bahnbewegung verursachte Gravitationsstrahlung. Sie besitzt ihren maximalen Wert am Kollisionspunkt  $r_A = 2 R$ <sup>30</sup>:

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{Koll} = \frac{2}{5} \left(\frac{M}{R}\right)^5 \quad (2.125)$$

Die emittierte Energie der Gravitationswelle hängt demnach höchst sensitiv von den Parametern  $M$  und  $R$  der kompakten Sterne ab. Die Frequenz  $\omega = 2\Omega_{Bahn}$  der Gravitationswelle am Kollisionspunkt ist gegeben durch

$$\omega_{Koll} = 2\Omega_{Bahn} = 2\sqrt{\frac{2M}{(2R)^3}} = \sqrt{\frac{M}{R^3}} \quad (2.126)$$

In Abb. 2.9 ist die Energie und Frequenz der Gravitationswelle am Kollisionspunkt als Funktion des Radius  $R$  der kompakten Sterne ( $R_1 = R_2 = R$ ,  $M_1 = M_2 = M = 1.4 M_\odot$ ) aufgetragen.

---

<sup>30</sup>Wir nehmen im folgenden an, dass beide kompakten Sterne den Radius  $R$  und die Masse  $M$  besitzen sollen.

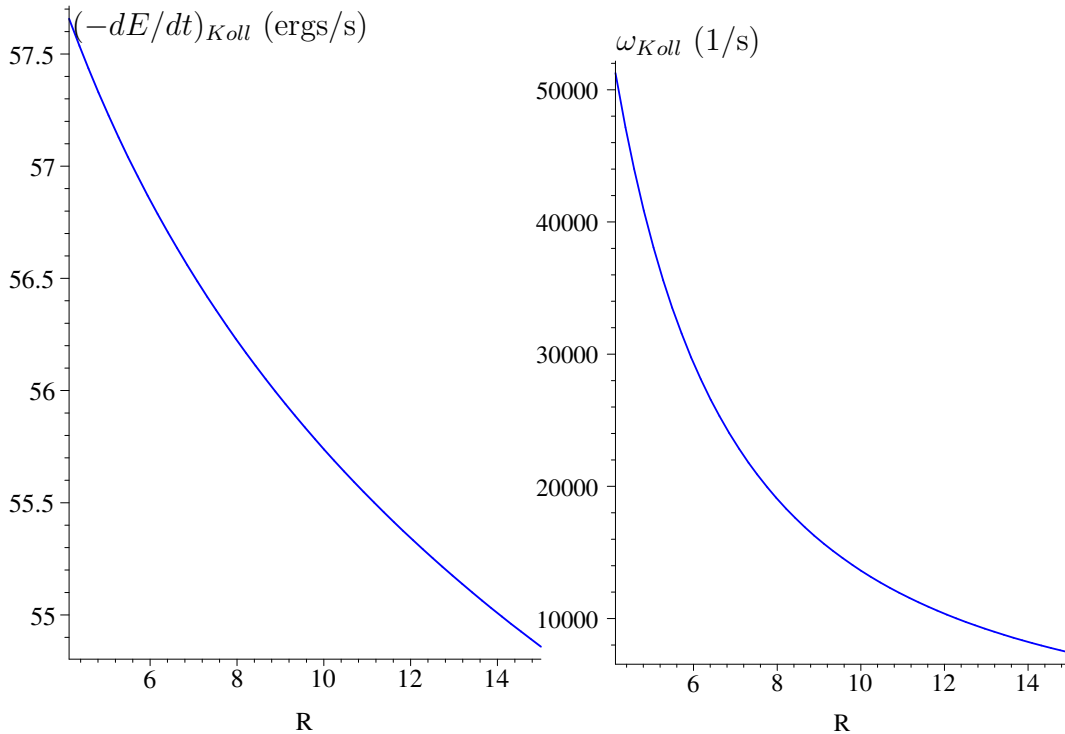


Abbildung 2.9: Links: Emittierte Gravitationswellenenergie (logarithmischer Maßstab) am Kollisionszeitpunkt zweier kompakter Sterne als Funktion ihrer Radien. Rechts: Kreisfrequenz der emittierten Gravitationswelle am Kollisionszeitpunkt zweier kompakter Sterne als Funktion ihrer Radien.

Da sich die Radien von Neutronensternen ( $R \approx 12$  km), Quarksterne ( $R \approx 7$  km) und schwarzen Löchern ( $R = 4.3$  km, falls wie angenommen  $M = 1.4 M_{\odot}$ ) unterscheiden, würde man bei der Kollision von zwei Quarksternen im Vergleich zur Kollision von zwei Neutronensternen eine ca. 10-fach energiereichere Abstrahlung von Gravitationswellen bekommen; die Kollision zweier schwarzer Löcher dagegen wäre nochmals 10 mal energiereicher.

Nehmen wir an, dass sich ein binäres System bestehend aus zwei kompakten Sternen (oder schwarzen Löchern) im Abstand  $r_A = 100$  km umkreist; so gilt für die Annäherung des relativen Abstandes der Objekte aufgrund der emittierten Gravitationswellenenergie

$$\frac{dr_A(t)}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{(r_A(t))^3} . \quad (2.127)$$



Die Zeit, die bis zur Kollision ( $r_A = 2R$ ) benötigt wird ist somit gegeben durch

$$t_{Koll}^{100\text{km}} = \frac{5}{256} \frac{(100\text{km})^4 - (2R)^4}{M_1 M_2 (M_1 + M_2)} . \quad (2.128)$$

In Tab. 2.3 sind die charakteristischen Eigenschaften der emittierten Gravitationswellen aufgetragen, die sich für typische Kollisionszenarien von kompakten Sternen und schwarzen Löchern ergeben würden.<sup>31</sup>

Kollisionart	$M$	$R$	$-\left(\frac{dE}{dt}\right)_{Koll}$	$\omega_{Koll}$	$t_{Koll}^{100\text{km}}$
NS – NS	$1.4 M_\odot$	12 km	$2.2 \cdot 10^{55}$ ergs/s	10370 1/s	0.367 s
QS – QS	$1.4 M_\odot$	7 km	$3.3 \cdot 10^{56}$ ergs/s	23275 1/s	0.368 s
SL – SL	$1.4 M_\odot$	4.13 km	$4.5 \cdot 10^{57}$ ergs/s	51274 1/s	0.369 s

Tabelle 2.1: Abschätzungen der am Kollisionszeitpunkt emittierten Gravitationswellen, bei Neutronenstern-Neutronenstern (NS-NS), Quarkstern-Quarkstern (QS-QS) und schwarze Loch - schwarze Loch (SL-SL) Kollisionen.

Am Kollisionszeitpunkt treffen beide kompakte Sterne aufeinander und verschmelzen. Hierbei heizt sich die Materie auf, so dass weitere nicht gravitative Abstrahlungsmechanismen einsetzen (Neutrinos,  $\gamma$ -Ray Burst's). Überschreitet die gravitative Masse des Gesamtsystems ( $M_1 + M_2 - (\Delta E_{grav} + \Delta E_{sonst})$ ) die maximal erlaubte Masse für kompakte Sterne, so kollabiert das Gesamtsystem unter Aussendung von weiteren Gravitationswellen zu einem schwarzen Loch. Kollabieren zwei relativ leichte Neutronensterne miteinander, so kann es nach ihrer Verschmelzung zur Formation eines Zwillingsterns unter Aussendung von weiteren Gravitationswellen kommen (siehe Kapitel 3).

---

<sup>31</sup>Die Werte in Tab 2.3 sollten als grobe Abschätzungen angesehen werden, da sie einerseits Näherungen (z.B. die Kreisförmigkeit der Bewegung) enthalten, andererseits wird die so erzeugte Gravitationswelle sicherlich noch von weiteren Gravitationswellen unterschiedlicher Frequenzen überlagert werden, die z.B. durch die gravitative Deformation des jeweiligen binären Partners und seiner Eigenrotation hervorgerufen werden. Realistischere Berechnungen erfordern einen enormen numerischen Aufwand. Ein durch die DPG (mit 17 Mio Euro) unterstütztes Vorhaben wird in den nächsten 4 Jahren an fünf unterschiedlichen institutionellen Einrichtungen an genaueren Vorhersagen arbeiten (siehe <http://hpcs3.tpi.uni-jena.de/~sfb>).

### Experimenteller Nachweis von Gravitationswellen

Eine auf die Erde treffende Gravitationswelle verursacht eine oszillierende Längen- und Zeitänderung, die alle Körper mitvollziehen müssen. Die relativen Abstände zwischen Objekten im Raum verändern sich dann periodisch, da die gesamte raumzeitliche Struktur, auf der sie sich zwangsläufig befinden mit der Frequenz  $\omega$  der Gravitationswelle schwingt. Die aufgrund der Gravitationswelle verursachte relative Längenänderung  $\Delta L$  eines Körpers der Länge  $L$  ist gegeben durch (siehe [25, 27, 19])

$$\frac{\Delta L}{L} \approx h \cos(\omega t) \quad , \quad (2.129)$$

wobei  $h$  die Amplitude und  $\omega$  die Frequenz der Welle ist.

Wir nehmen im folgenden an, dass sich die Quelle der Gravitationswelle im Abstand  $D$  von der Erde befindet, so dass der auf die Erde eintreffende Energiefluss  $\Phi$  wie folgt gegeben ist:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi D^2} \frac{dE}{dt} \quad (2.130)$$

Für die im vorigen Unterpunkt dargestellten Szenarien der Kollision von kompakten Sternen ergeben sich somit die folgenden Abschätzungen der Längenauswirkungen auf der Erde [25]

$$\frac{\Delta L}{L} \approx h = \frac{16}{\sqrt{10}} \frac{M^2}{D R} \quad . \quad (2.131)$$

Berechnet man die Auswirkungen, die eine Kollision kompakter Sterne in unserer Galaxie im Abstand  $D = 100$  pc bzw.  $D = 1000$  pc oder in unserer Nachbargalaxie dem Andromedanebel ( $D = 52$  kpc) bewirken würde, so erhält man die in Tab. 2.3 berechneten Abschätzungen<sup>32</sup>

Im Jahre 2002 begannen die ersten, auf der Erde stationierten laserinterferometrischen Gravitationswellendetektoren (der 3. Art) ihren Testbetrieb;<sup>33</sup>

---

<sup>32</sup>Hier sind die optimistischen Maximalwerte der relativen Längenänderung dargestellt, die jedoch nur millisekundenlang aufrecht erhalten werden.

<sup>33</sup>Die ersten Gravitationswellendetektoren basierten noch auf einem Resonatorprinzip (Weber-Detektoren). Sie haben den Nachteil einer geringeren Empfindlichkeit und sind nur in einem engen Frequenzband sensitiv.

sie befinden sich in Deutschland (GEO 600), Italien (VIRGO), den USA (LIGO) und Japan (TAMA 300). Ihr Ziel ist es, die durch Gravitationswellen verursachten Weglängenunterschiede nachzuweisen. Das grundsätzliche Prinzip der Nachweismethodik ist bei all diesen Geräten das gleiche. Ein Laserstrahl wird in einem 'Beamsplitter' in zwei rechtwinklig zueinander stehende Strahlen aufgeteilt. Die beiden Strahle werden dann an möglichst weit entfernten Spiegeln zurück reflektiert und zur Interferenz gebracht (vom Aufbau ähnelt das Prinzip einem 'Michelson-Morley'-Experiment). Durch diese Interferenzmethode läßt sich eine Abstandsänderung vom Beamsplitter zu den Spiegel (die als Probemassen in diesem Aufbau verstanden sind) sehr genau bestimmen. Trifft nun eine Gravitationswelle auf eine solche Anordnung, so erwirkt sie aufgrund ihrer Raumzeitverzerrung eine Weglängendifferenz, die sich dann durch die Phasenverschiebung im Interferenzbild nachweisen lassen müsste.

Kollisionart	$D = 100 \text{ pc}$	$D = 1000 \text{ pc}$	$D = 52 \text{ kpc}$
NS – NS	$\frac{\Delta L}{L} \approx 5.8 \cdot 10^{-16}$	$\approx 5.8 \cdot 10^{-17}$	$\approx 1.1 \cdot 10^{-18}$
QS – QS	$\frac{\Delta L}{L} \approx 1 \cdot 10^{-15}$	$\approx 1 \cdot 10^{-16}$	$\approx 1.9 \cdot 10^{-18}$
SL – SL	$\frac{\Delta L}{L} \approx 1.7 \cdot 10^{-15}$	$\approx 1.7 \cdot 10^{-16}$	$\approx 3.3 \cdot 10^{-18}$

Tabelle 2.2: Abschätzungen der relativen Längenänderungen verursacht durch Neutronenstern-Neutronenstern (NS-NS), Quarkstern-Quarkstern (QS-QS) und schwarze Loch-schwarze Loch (SL-SL) Kollisionen im Abstand  $D$  von der Erde.

Die zur Zeit auf der Erde befindlichen Gravitationswellendetektoren sind für Gravitationswellen der Frequenz  $10 \text{ Hz} \leq \nu \leq 10^5 \text{ Hz}$  sensitiv. Ihre Empfindlichkeit hängt von der Größe der Detektoren ab und reicht zur Zeit bis zu  $\frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-22}$  (LIGO I) bzw.  $\frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-24}$  (LIGO II, geplant).

Die astrophysikalischen Quellen der Gravitationswellen, die sie möglicherweise nachweisen können, sind aufgrund ihres Frequenzbereichs alle eng verbunden mit kompakten Sternen. Für kleinere Frequenzen  $10^{-4} \text{ Hz} \leq \nu \leq 1 \text{ Hz}$  sind erdgebundene Gravitationswellendetektoren nicht geeignet, so dass hierfür ein im Weltraum stationierter Detektor geplant ist (LISA). Die möglichen astrophysikalischen Quellen für solche Gravitationswellen sind

sehr große (massive) schwarze Löcher (kollidierend bzw. in Binärsystemen), normale (nicht kollidierende) binäre Systeme von kompakten Sternen und kosmologische Hintergrundwellen.

# Kapitel 3

## Kompakte Sterne

In den beiden vorigen, einführenden Kapiteln wurden die Grundlagen der Elementarteilchen Theorie des Standardmodells und die Formulierung der ART und die daraus resultierenden astrophysikalisch relevanten Folgerungen dargestellt.

Dieses Kapitel stellt den Hauptteil der Promotionsarbeit dar und beinhaltet die während meiner Promotionsdauer erzielten Forschungsergebnisse. Die einzelnen Berechnungen lassen sich inhaltlich wie folgt gliedern:

- Neutronensterne
- Quark Sterne und seltsame Sterne
- Hybride Sterne
- Zwillingsterne

Alle Berechnungen wurden in Kooperation mit unterschiedlichen Wissenschaftlern angefertigt, so dass ich an dieser Stelle nochmals die jeweiligen Personen erwähnen und den Organisationen und Stiftungen danken möchte, die einen solch umfassenden Austausch und schließlich diese Promotionsarbeit erst ermöglichten.<sup>1</sup> Dieses Kapitel und die ihm zugrunde liegenden Kooperationen gliedern sich wie folgt:

---

<sup>1</sup>Für die finanzielle Unterstützung während meiner Promotionsarbeit möchte ich mich bei der Hessischen Landesgraduiertenförderung, der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI), dem Ministerium für Wissenschaft und Kunst, dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) und dem Austauschdienst auf indischer Seite (DST) bedanken.

Zunächst werden Eigenschaften von Neutronensternen (mit und ohne hyperonische Teilchen) im chiralen, hadronischen  $SU(3)_f$ -Modell (CHM) dargestellt. Diese Arbeit entstand in enger Kooperation mit D.Zschesche, S. Schramm (Frankfurt) und S.Pal (Indien) und wurde in dem folgenden Artikel veröffentlicht [28]. Die Eigenschaften der Neutronensterne, die mit diesem Modell berechnet wurden, werden dann mit anderen Neutronensternmodellen verglichen. An diesem Vergleich war A.Bhattacharia (Indien) maßgeblich beteiligt, welchem 2002 durch die Humboldtstiftung der Aufenthalt in Frankfurt ermöglicht wurde. Ein weiterer Vergleich des CHM mit dem QMC-Modell, an dem S.Pal (Indien) und I.Zakout (Palästina) beteiligt waren ist in dem Artikel.[29] veröffentlicht<sup>2</sup>

Im zweiten Teil dieses Kapitels werden die Eigenschaften von reinen Quarksternen im 'Nambu-Jona-Lasinio'-Modell (NJL-Modell) berechnet. Diese Arbeit entstand in Kooperation mit I.Mishustin und L.Satarov (Russland)<sup>3</sup> und wurde in den folgenden Artikeln veröffentlicht [30, 31, 32]. Am Ende dieses zweiten Teils werden die Quarksterneigenschaften des NJL-Modells mit anderen Quarkmodellen verglichen.

Im dritten Teil werden die Eigenschaften von hybriden Sternen, d.h. von kompakten Sternen mit Hadron-Quark-Phasenübergang berechnet. Die ersten Berechnungen, die bereits 2000 im CHM-Bag-Modell gemacht wurden und in dem Artikel [33] publiziert sind, enthalten leider einen Fehler, der aufgrund einer falschen Hyperonenkopplungskonstante im Computercode verursacht wurde. Die hier dargestellten Ergebnisse sind korrigiert und weichen deshalb von den publizierten ab. Der umfangreiche Vergleich mit anderen Modellen wurde in Kooperation mit A.Bhattacharia, I.Mishustin und L.Satarov angefertigt. Am Ende dieses Teils werden die unterschiedlichen Eigenschaften der hybriden Sterne besprochen, die bei einer Gibbs- bzw. Maxwellkonstruktion des Phasenüberganges entstehen.

Die Miteinbeziehung einer farbsupraleitenden Quarkphase im Inneren von hybriden Sternen wurde in Kooperation mit I.Shovkovy (Ukraine) und

---

<sup>2</sup>Diese Kooperation entstand 1998-1999 und wurde durch den DAAD und die Humboldt Gesellschaft ermöglicht.

<sup>3</sup>Diese Kooperation, die durch die DFG, Humboldt und die GSI ermöglicht wurde, ist während der gesamten Promotionsdauer aufrecht erhalten worden.

M.Huang (China) angefertigt und ist in [34, 35] publiziert.<sup>4</sup>

Im vierten Teil werden die Eigenschaften von Zwillingsternen dargestellt. Zunächst wird die Zwillingsternentstehung betrachtet, die aufgrund eines Hadron-Quark-Phasenübergang entstehen kann. Diese Arbeit wurde in Kooperation mit A.Bhattacharia, I.Mishustin und L.Satarov berechnet und ist in [36] publiziert. Eine weitere Möglichkeit der Zwillingsternentstehung durch ein stark gebundenes Hyperonenkondensat wurde in Kooperation mit J.Schaffner (Frankfurt) berechnet und ist in [37] publiziert.

Im fünften und letzten Teil dieses Kapitels werden die, aus dieser Arbeit resultierenden astrophysikalischen Observablen der Quark-Gluon-Plasma – Phase zusammengefasst dargestellt.

## 3.1 Neutronensterne

### Eigenschaften von Neutronensternen im chiralen $SU(3)$ Modell

#### Einführung in das Modell

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt wurde stellen effektive Theorien der hadronischen Wechselwirkung derzeit die einzige Möglichkeit dar die starke Wechselwirkung bei hohen Dichten zu simulieren. Solche effektiven hadronischen Theorien beschreiben die starke Wechselwirkung durch einen Austausch von Mesonen zwischen Barionen und werden erfolgreich bei der Simulation von Kernmaterie, endlichen Kernen und Neutronensternen angewandt. Vom Prinzip her sollte es jedoch theoretisch möglich sein auch solche Vielteilchenprobleme auf der Basis der QCD zu formulieren; leider ist man derzeit von solchen numerischen Simulationen (Gitter Eichtheorie bei hohen Dichten) noch weit entfernt.<sup>5</sup> Akzeptiert man dies, so stellt sich die Frage, wie man eine möglichst gute, d.h. realitätsnahe effektive Theorie der hadronischen Wech-

---

<sup>4</sup>Diese Kooperation entstand 2002 und wurde durch die Humboldt Gesellschaft und die GSI ermöglicht.

<sup>5</sup>Prof. F. Karsch sagte 2001 während der "Dense Matter" Konferenz in Schladming: "Wenn es überhaupt möglich ist eine Zustandsgleichung aus Gitter-Eichtheorierechnungen zu bekommen, dann frühestens in 10 Jahren."

selwirkung konstruiert, ohne dabei den theoretischen Fakt zu vernachlässigen, dass die fundamentale Basis der Wechselwirkung die eichtheoretisch formulierte QCD ist.

In dem hier dargestellten chiralen  $SU(3)$  Modell der hadronischen Wechselwirkung versuchte man dies zu realisieren indem möglichst viele Eigenschaften der QCD innerhalb der effektiven Theorie verankert wurden. Im folgenden werden die wichtigsten Eigenschaften und die Konstruktionsforderungen der Lagrangedichte des chiralen  $SU(3)$  Modells vorgestellt (eine ausführliche Darstellung des Modells findet man in [38, 39, 40, 41, 42]):

- Chirale Symmetrie der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$

Die Lagrangedichte der QCD (siehe Kapitel 1) besitzt chirale Symmetrie. Projiziert man den Spin der masselosen Quarks auf deren Impulsrichtung, so entkoppeln diese exakt und es entstehen zwei Arten von Quarks, die nicht miteinander wechselwirken. Diese Symmetrie ist nur dann erfüllt wenn die Quarks masselos sind; andererseits könnte man durch eine geeignet gewählte Lorentztransformation deren Chiralität umkehren. Eine Theorie kann demnach nur dann chirale Symmetrie besitzen, wenn die in ihr enthaltenen Teilchen masselos sind, oder wenn die Massenerzeugung durch eine Art Higgsmechanismus der spontanen Symmetriebrechung realisiert wird. Bei der Konstruktion des chiralen  $SU(3)$  Modells wurde diese Eigenschaft der QCD realisiert. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  wurde so konstruiert, dass sie unter chiralen Transformationen invariant ist. Da man bestrebt war, auch seltsame Teilchen (Hyperonen) beschreiben zu können, wurde die Forderung der chiralen Symmetrie auf den 3-Flavorraum (up, down, strange) ausgedehnt. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  besitzt demnach  $SU(3)_L * SU(3)_R$ -Symmetrie.

- Higgsmechanismus und spontane Symmetriebrechung

Aufgrund der Realisierung der chiralen Symmetrie in der Lagrangedichte sind die hadronischen Teilchen im chiralen Modell zunächst masselos und müssen, ähnlich wie bei den fundamentalen Eichtheorien, durch eine spontane Symmetriebrechung ihre Massen erhalten. Im vorliegenden Modell werden die Massen der Barionen durch die Wechselwirkung mit Mesonenfeldern mit Hilfe der spontanen Symmetriebrechung erzeugt.



Die Massen der Teilchen hängen somit vom umgebenden Medium selbst ab und verändern sich mit ihrer Dichte und Temperatur. Da einige Mesonen (z.B. das Pion  $\pi$ ) eine kleine, aber nichtverschwindende Masse haben, fügte man außerdem eine explizite Symmetriebrechung hinzu.

- Gluonenkondensat und gebrochene Skaleninvarianz

Die Skaleninvarianz der QCD wurde ebenfalls in der Lagrangedichte des chiralen Modells realisiert. Hierzu fügte man ein weiteres skalares Feld  $\chi$  ein (das Dilatonfeld), das man physikalisch als ein Gluonenkondensat auffassen kann.

Für das explizite Aussehen und die genaue Beschreibung der Lagrangedichte verweise ich hier auf die folgenden Arbeiten [38, 41, 42].

Die aus der Lagrangedichte über das Variationsprinzip resultierenden Bewegungsgleichungen für Barionen und Mesonen sind nichtlineare gekoppelte Quantenfeldgleichungen, deren exakte Lösung leider nicht möglich ist und perturbative Ansätze sind auszuschließen, da die Kopplungskonstanten im allgemeinen groß sind. Um eine numerische Behandlung dieser DGL's möglich zu machen, benutzt man eine mittlere Feld-Näherung (engl. Mean-Field Approximation MFA). Die mesonischen Feldoperatoren werden hier durch ihre Erwartungswerte im Grundzustand ersetzt und höhere quantenmechanische Effekte vernachlässigt. Da diese Näherung desto besser ist, je dichter das betrachtete System ist, stellt es bei der Betrachtung von Neutronensternmaterie eine sinnvolle und gute Approximation dar (näheres siehe [43]).

Die gesamte Lagrangedichte des chiralen Modells in MFA teilt sich in die folgenden Bestandteile auf

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}} + \mathcal{L}_{\text{vec}} + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{SB}} \quad , \quad (3.1)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}} &= - \sum_i \bar{\psi}_i [m_i^* + g_{i\omega}\gamma_0\omega^0 + g_{i\phi}\gamma_0\phi^0 + g_{N\rho}\gamma_0\tau_3\rho_0] \psi_i \quad , \\ \mathcal{L}_{\text{vec}} &= \frac{1}{2}m_\omega^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2}\omega^2 + \frac{1}{2}m_\phi^2 \frac{\chi^2}{\chi_0^2}\phi^2 + \frac{1}{2}\frac{\chi^2}{\chi_0^2}m_\rho^2\rho^2 + g_4^4(\omega^4 + 2\phi^4 + 6\omega^2\rho^2 + \rho^4) \quad , \\ \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{2}k_0\chi^2(\sigma^2 + \zeta^2) + k_1(\sigma^2 + \zeta^2)^2 + k_2\left(\frac{\sigma^4}{2} + \zeta^4\right) + k_3\chi\sigma^2\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -k_4\chi^4 - \frac{1}{4}\chi^4 \ln \frac{\chi^4}{\chi_0^4} + \frac{\delta}{3} \ln \frac{\sigma^2\zeta}{\sigma_0^2\zeta_0}, \\
\mathcal{L}_{\text{SB}} = & - \left( \frac{\chi}{\chi_0} \right)^2 \left[ m_\pi^2 f_\pi \sigma + (\sqrt{2} m_K^2 f_K - \frac{1}{\sqrt{2}} m_\pi^2 f_\pi) \zeta \right].
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_{\text{kin}}$  stellt den kinetischen Beitrag des gesamten Barionenoktetts ( $p, n, \Lambda, \Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^-, \Xi^0$ ), der skalaren Mesonen ( $\sigma, \zeta$ ) und Vektormesonen ( $\omega, \phi, \rho$ ) dar. Die Teile  $\mathcal{L}_{\text{BM}} + \mathcal{L}_{\text{BV}}$  stellen den Teil der Lagrangedichte dar, der für die Wechselwirkung zwischen Barionen und Spin 0 und Spin 1 Mesonen verantwortlich ist. Die Mesonenfelder sind hier minimal an die barionischen Spinoren  $\psi_i$  gekoppelt,  $m_i^*$  bezeichnet die effektive Barionenmasse (siehe Gl. 3.2), die durch die spontane Symmetriebrechung der skalaren Mesonen realisiert wird. Die Massen der Spin 1 Mesonen werden im Term  $\mathcal{L}_{\text{vec}}$  generiert,  $\mathcal{L}_0$  beschreibt die Meson-Meson Interaktion und ist verantwortlich für die spontane Symmetriebrechung der chiralen Symmetrie. Das Dilatonfeld  $\chi$  beschreibt die Gluonenkondensation und erscheint in der Lagrangedichte mit einem logarithmischen Potential um der gebrochenen Skaleninvarianz der QCD Rechnung zu tragen. Die effektiven Massen der Barionen sind durch folgende Gleichungen gegeben

$$\begin{aligned}
m_N^* &= m_0 - \frac{1}{3} g_{O8}^S (4\alpha_{OS} - 1) (\sqrt{2}\zeta - \sigma) \\
m_\Lambda^* &= m_0 - \frac{2}{3} g_{O8}^S (\alpha_{OS} - 1) (\sqrt{2}\zeta - \sigma) \\
m_\Sigma^* &= m_0 + \frac{2}{3} g_{O8}^S (\alpha_{OS} - 1) (\sqrt{2}\zeta - \sigma) \\
m_\Xi^* &= m_0 + \frac{1}{3} g_{O8}^S (2\alpha_{OS} + 1) (\sqrt{2}\zeta - \sigma), \tag{3.2}
\end{aligned}$$

wobei  $m_0 = g_{O1}^S (\sqrt{2}\sigma + \zeta) / \sqrt{3}$ .

Die freien Parameter des Modells werden wie folgt durch experimentelle Resultate und Symmetrieüberlegungen festgelegt:  $g_{O1}^S$ ,  $g_{O8}^S$  und  $\alpha_{OS}$  werden benutzt um die Barionenmassen im Vakuum an deren experimentelle Ergebnisse anzufitten.  $k_0$  und  $k_2$  werden benutzt um ein Extremum des Vakuumzustandes zu erzeugen,  $k_3$  legt die Masse des  $\eta'$  Teilchens fest, und  $k_1$  wird variiert um die Masse des  $\sigma$ -Mesons ( $m_\sigma = 500$  MeV) festzulegen. Der Vakuum Erwartungswert des  $\sigma$  und  $\zeta$  Feldes werden durch die Zerfallskonstanten

des Pions und Kaons festgelegt;  $\sigma_0 = f_\pi$  und  $\zeta_0 = -(2f_K - f_\pi)/\sqrt{2}$ . Die Parameter  $g_{N\omega}$  und  $\chi_0$  werden benutzt um die Bindungsenergie von nuklearer Materie  $B/A = \varepsilon/\rho_B - m_N = -16$  MeV bei Sättigungsdichte  $\rho_0 = 0.15 \text{ fm}^{-3}$  festzulegen. In den meisten der in dieser Arbeit gezeigten Resultaten wurde der Parametersatz C1 verwendet (näheres siehe [38, 41]). Die vorhergesagten Werte für die effektive Nukleonenmasse, die Inkompressibilität und die Symmetrieenergie bei Sättigungsdichte lauten  $m_N^*/m_N = 0.61$ ,  $K = 276$  MeV und  $a_{\text{sym}} = 40.4$  MeV. Die Kopplungen der seltsamen Barionen sind durch die Symmetrien des additiven Quark Modells gegeben:

$$g_{\Lambda\omega} = g_{\Sigma\omega} = 2g_{\Xi\omega} = \frac{2}{3}g_{N\omega} = 2g_{O8}^V; \quad g_{\Lambda\phi} = g_{\Sigma\phi} = \frac{g_{\Xi\phi}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}g_{N\omega} \quad (3.3)$$

Die Potentialtiefen der Hyperonen in nuklearer Materie sind leider bei diesem Parametersatz unrealistisch hoch und widersprechen den experimentellen Werten  $U_{\Lambda,\Xi}^N \approx -28$  MeV für das  $\Lambda$  und  $\Xi$  Hyperon. Andere Parametersätze, die geeignete Werte für  $U_{\Lambda,\Xi}^N$  geben, konnten jedoch Eigenschaften der nuklearen Materie schlecht beschreiben [38]. Deshalb wurde im chiralen Model ein weiterer, explizit symmetriebrechender Term eingefügt, der eine zusätzliche Hyperonen-Mesonen Kopplung berücksichtigt

$$\mathcal{L}_{\text{hyp}} = m_3 \text{Tr} (\bar{\psi}\psi + \bar{\psi} [\psi, S]) \text{Tr} (X - X_0) , \quad (3.4)$$

wobei  $X$  eine skalare Größe,  $S_b^a = -[\sqrt{3}(\lambda_8)_b^a - \delta_b^a]/3$  und  $\lambda_8$  die gewöhnlichen Gell-Mann Matrizen sind. Durch diesen Term erhält man in mittlere Feld-Näherung zusätzliche Beiträge zu den effektiven Massen der Barionen

$$\tilde{m}_i^* = m_i^* + a m_3 \left[ \sqrt{2}(\delta - \delta_0) + (\zeta - \zeta_0) \right] , \quad (3.5)$$

wobei die  $m_i^*$ 's durch die Gleichung 3.2 definiert sind,  $a = n_s$  die Anzahl der seltsamen Quarks innerhalb der Barionen ist und  $m_3$  als Parameter benutzt wird um das Lambda-Hyperonenpotential auf  $U_\Lambda^N = -28$  MeV zu fixieren. Die weiteren Hyperonenpotentiale ergeben sich dann zu  $U_\Sigma^N = +3.2$  MeV und  $U_\Xi^N \sim +30$  MeV. Da das Potential des  $\Xi$  Hyperons von seinem experimentellen Wert zu sehr abweicht, wurde "per Hand"  $a_\Xi = 1 = n_s/2$  gesetzt, so dass der explizit symmetriebrechende Zusatzterm (3.5) auf alle Hyperonen gleich wirkt, unabhängig der Anzahl ihrer seltsamen Quarks. Somit ergaben

sich die folgenden Hyperonenpotentiale:

$$U_{\Lambda}^N = -28\text{MeV}, \quad U_{\Sigma}^N = +3.2\text{MeV} \quad \text{und} \quad U_{\Xi}^N = -42\text{MeV} \quad (3.6)$$

In diesem chiralen  $SU(3)_L * SU(3)_R$  Modell der hadronischen Wechselwirkung ist es gelungen die Massen der Hadronen des  $SU(3)$  Multiplets an die experimentellen Werte anzugleichen [38] und dabei viele experimentell bekannte Eigenschaften von angeregter nuklearer Materie [38, 42], endlichen Kernen [44, 41] und Hyperkernen [44, 41] gut zu beschreiben.

### Erweiterung auf Neutronenstern Materie

Das bisher dargestellte chirale Modell kann benutzt werden um Laborexperimente der Hochenergiephysik, Schwerionenphysik und die Eigenschaften von endlichen Kernen zu beschreiben. Da wir im folgenden seine Vorhersagen hinsichtlich der Eigenschaften von Neutronensternen berechnen wollen, muss man Abänderungen und zusätzliche Zwangsbedingungen in das Modell einfügen. Im Unterschied zu nuklearer Materie gilt bei Neutronensternmaterie das folgende:

- Ladungsneutralität der Materie

Im Gegensatz zu endlichen Kernen und symmetrischer nuklearer Materie (Anzahl der Neutronen = Anzahl der Protonen), die bekanntlich positiv geladen sind/ist, ist die Materie, aus der kompakte Sterne zusammengesetzt sind, ladungsneutral. Diese Ladungsneutralität wird bei Dichten im Bereich  $\rho_0 \approx \rho \leq 2.5\rho_0$  durch negativ geladene Leptonen ( $e, \mu$ ) realisiert, deren Anzahl gleich der Anzahl der Protonen bei gegebener Dichte sein muss. Bei höheren Dichten ( $\rho \geq 2.5\rho_0$ ) können auch negativ geladene Hyperonen einen Teil der positiven Ladung kompensieren. Um diese Eigenschaft der Neutronensternmaterie im chiralen Modell zu verankern mussten einerseits die Leptonen in der Lagrangedichte 3.1 integriert werden und andererseits die Zwangsbedingung der Ladungsneutralität im numerischen Computercode verankert werden. Der Beitrag der Leptonen zur Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{\text{lep}} = \sum_{l=e,\mu} \bar{\psi}_l [i\gamma_\mu \partial^\mu - m_l] \psi_l, \quad (3.7)$$

wobei  $\psi_l$  der Spinor und  $m_l$  die Ruhemasse des jeweiligen Leptons ( $l = e, \mu$ ) ist.<sup>6</sup>

- Chemisches  $\beta$ -Gleichgewicht

Bei Neutronensternmaterie ist es den Barionen, aufgrund der hohen Drücke im Inneren der Sterne, möglich in andere Teilchen zu zerfallen. Bei gegebenem Druck stellt sich somit ein chemisches Gleichgewicht ein, das unter Beachtung der Ladungsneutralität die jeweilige Anzahl der Teilchensorte festlegt. Ein Beispiel eines solchen Zerfalls ist der  $\beta$ -Zerfall des Neutrons

$$n \Leftrightarrow p + e + \tilde{\nu}_e . \quad (3.8)$$

Das durch diesen Prozess erzeugte Antielektronneutrino  $\tilde{\nu}_e$  entweicht dem Stern aufgrund seiner verschwindend geringen Wechselwirkung.<sup>7</sup> Ob und in welcher Anzahl Teilchen von einer Sorte in eine andere zerfallen, wird durch die Energieniveaus der Teilchensorten bestimmt. Für ein gegebenes Barion  $i$  ist das Einteilchenenergie-Niveau  $E_i$  und das chemische Potential  $\mu_i$  wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} E_i(k) &= E_i^*(k) + g_{i\omega}\omega_0 + g_{i\phi}\phi_0 + g_{i\rho}I_{3i}\rho_0 , & E_i^*(k) &= \sqrt{k_i^2 + m_i^{*2}} , \\ \mu_i &= b_i\mu_n - q_i\mu_e = \mu_i^* + g_{i\omega}\omega_0 + g_{i\phi}\phi_0 + g_{i\rho}I_{3i}\rho_0 , \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei  $\mu_i^* \equiv E_i^*(k = k_{F_i})$ ,  $k$  der Impuls und  $k_{F_i}$  der Fermiimpuls des Barions  $i$  ist.  $b_i$  und  $q_i$  sind die Barionzahl und die Ladung des  $i$ 'ten Barions.

- Seltsamkeit ist keine Erhaltungsgröße

Aufgrund des allgemeinen  $\beta$ -Gleichgewichts sind im inneren Bereich von Neutronensternen auch Teilchenumwandlungen möglich, die die Erhaltung der Quantenzahl "Seltsamkeit" verletzen. Nukleonen ( $N =$

---

<sup>6</sup>Tauonen  $\tau$  können in Neutronensternmaterie aufgrund ihrer grossen Massen nicht entstehen.

<sup>7</sup>Bei heißen Protoneutronensternen, die einige Sekunden nach einer Supernova Explosion existieren, können Neutrinos nicht entweichen. Sie sind im Stern gefangen ("trapped neutrinos") und ihr Beitrag zum Druck der Materie ist nicht zu vernachlässigen.

$n, p$ ) können, wenn es energetisch günstig ist, in Hyperonen nach folgendem Prinzip zerfallen

$$N + N \Rightarrow N + H + M , \quad (3.10)$$

wobei  $H$  das Hyperon und  $M$  ein Meson beschreibt. Ein Beispiel eines solchen Prozesses ist z.B.

$$n + n \Rightarrow n + \Lambda + K . \quad (3.11)$$

### Teilchenkompositionen und Zustandsgleichung

Alle thermodynamischen Eigenschaften der Neutronensternmaterie im chiralen Modell können über das großkanonische thermodynamische Potential  $\Omega$  bestimmt werden. Pro Einheitsvolumen bei Temperatur  $T = 0$  ist es gegeben durch [38]

$$\begin{aligned} \Omega/V &= -\mathcal{L}_{\text{vec}} - \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_{\text{SB}} - \mathcal{V}_{\text{vac}} - \sum_i \frac{\gamma_i}{(2\pi)^3} \int d^3k [E_i^*(k) - \mu_i^*] \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_l \frac{1}{\pi^2} \int \frac{dk k^4}{\sqrt{k^2 + m_l^2}} , \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei der Beitrag der Leptonen berücksichtigt und die Vakuumenergie  $\mathcal{V}_{\text{vac}}$  subtrahiert wurde. Die Energiedichte  $\epsilon$  und der Druck  $P$  ergibt sich nun mit Hilfe der Gibbs-Duhem Relation

$$\epsilon = \Omega/V + \sum_{k=i,l} \mu_k \rho_k \quad , \quad P = -\Omega/V . \quad (3.13)$$

Die Feldgleichungen des chiralen Modells für Neutronensternmaterie, die sich durch das Variationsprinzip als Euler-Lagrangegleichungen ergeben, wurden nun, unter Beachtung der Ladungsneutralität und des  $\beta$ -Gleichgewichts, selbstkonsistent numerisch gelöst um die Eigenschaften der Materie grafisch darzustellen.

In Abb. 3.1 ist die Bindungsenergie pro Barion  $B/A = \epsilon/\rho_B - m_B$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B$  für verschiedene Neutron-Proton Verhältnisse  $\delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho_B$  aufgetragen. Die Kurve mit  $\delta = 0$  beschreibt symmetrische nukleare Materie wie sie bei leichten Kernen vorliegt. Aufgrund

der negativen Bindungsenergie, deren Minimum sich bei normaler nuklearer Kerndichte  $\rho_0$  befindet ( $B/A(\rho_0) = -16$  MeV), ist diese Materie selbst gebunden und hält sich deshalb ohne weitere Kräfte selbständig zusammen; so wie man es bei endlichen Kernen auch beobachtet.

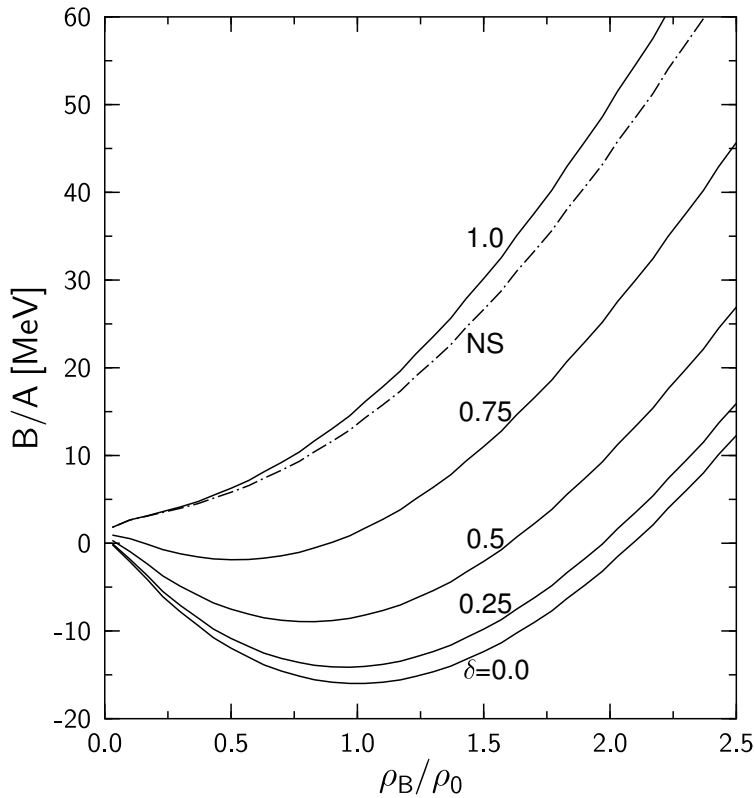


Abbildung 3.1: Bindungsenergie pro Nukleon  $B/A$  in Abhängigkeit der baryonischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$  ( $\rho_0 = 0.15 \text{ fm}^{-3}$ ) für unterschiedliche Werte der Neutron-Proton-Asymmetrie ( $\delta = (\rho_n - \rho_p)/\rho_B$ ) berechnet im hadronischen chiralen Modell. Die mit 'NS' bezeichnete Kurve beschreibt ladungsneutrale Neutronensternmaterie im  $\beta$ -Gleichgewicht bestehend aus Nukleonen und Elektronen.

Mit steigender Asymmetrie ( $\delta > 0$ ), d.h. relativ zunehmender Anzahl der Neutronen, reduziert sich einerseits die Bindungsenergie im Grundzustand und andererseits verschiebt sich das Minimum hin zu kleineren Dichten; die Eigenschaft der Selbstgebundenheit der Materie nimmt also ab. Der Grund für die Abnahme der Bindungseigenschaft nuklearer Materie bei zunehmen-

der Asymmetrie liegt in der Abnahme der Isospin-symmetrischen nuklearen Kräfte. Der gebundene Charakter der Materie wird bei hohen Asymmetrien ( $\delta \geq 0.84$ ) vollständig aufgehoben. Die steifste Kurve wird bei  $\delta = 1$  realisiert - hier besteht die Materie allein aus Neutronen. Die Kurve, die in Abb. 3.1 mit "NS" bezeichnet ist, beschreibt Neutronensternmaterie bei der, aufgrund des  $\beta$ -Gleichgewichts und der Ladungsneutralität, die Teilchenzusammensetzung (und deshalb auch der Parameter  $\delta$ ) festgelegt ist. Sie ist weicher als reine Neutronenmaterie, zeigt jedoch ein starkes, ungebundenes Verhalten. Neutronensternmaterie im chiralen Modell ist demnach nicht selbstgebunden. Die endliche Ausdehnung von Neutronensternen ist also nicht durch die Materieeigenschaften bedingt, sondern wird durch eine weitere Kraft (die Gravitationskraft) erzeugt (siehe Kapitel 2).<sup>8</sup>

Wie schon erwähnt, wird die Teilchenzusammensetzung im Neutronenstern durch die Zwangsbedingung der Ladungsneutralität und durch das allgemeine  $\beta$ -Gleichgewicht bestimmt. Abb. (3.2, oben) veranschaulicht schematisch die Teilchenkompositionen bei unterschiedlichen Dichten, wobei Abb. (3.2, unten) die Teilchenenergien der jeweiligen Barionen im chiralen SU(3) Modell darstellen. Bei geringer barionischer Dichte ( $\rho_B \lesssim 0.9 \rho_0$ ) besteht die Materie aus Neutronen mit geringer Beimischung von Elektronen und Protonen (maximal 5 Prozent). Bei höheren Dichten ( $0.9 \rho_0 < \rho_B < 2.6 \rho_0$ ) ist es für Elektronen nahe der Fermienergie energetisch günstiger in Muonen zu zerfallen ( $e^- \leftrightarrow \mu^- + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ ), so dass sich ein chemisches Gleichgewicht beider Leptonen einstellt  $\mu_{\mu^-} = \mu_{e^-}$ . Für noch höhere Dichten ( $\rho_B \gtrsim 2.6 \rho_0$ ) wird es schließlich für Nukleonen energetisch günstiger in Hyperonen zu zerfallen. Die ersten Hyperonen, die bei  $\rho_B = 2.6 \rho_0$  erscheinen sind das  $\Lambda$  und  $\Sigma^-$  Hyperon; die jeweiligen Prozesse und deren energetische Grundlage sind in Abb. (3.2, unten) und Gleichung 3.15 dargestellt. Aufgrund der hohen Massen der Hyperonen wird deren Auftreten erst bei hohen Dichten möglich. Erreicht die Fermikante des "Energietopfes" der Neutronen die Masse des  $\Lambda$ -Teilchens, so wird es für diese hochenergetischen Neutronen günstig zu  $\Lambda$ -Teilchen zu transformieren.

---

<sup>8</sup>Bei Quark- und Hyperonensternen kann die Sternmaterie, abhängig vom gewählten Parametersatz, die Eigenschaft der Selbstgebundenheit besitzen, so dass die Kompaktheit der Sterne teils materiell, teils gravitativ bedingt ist.



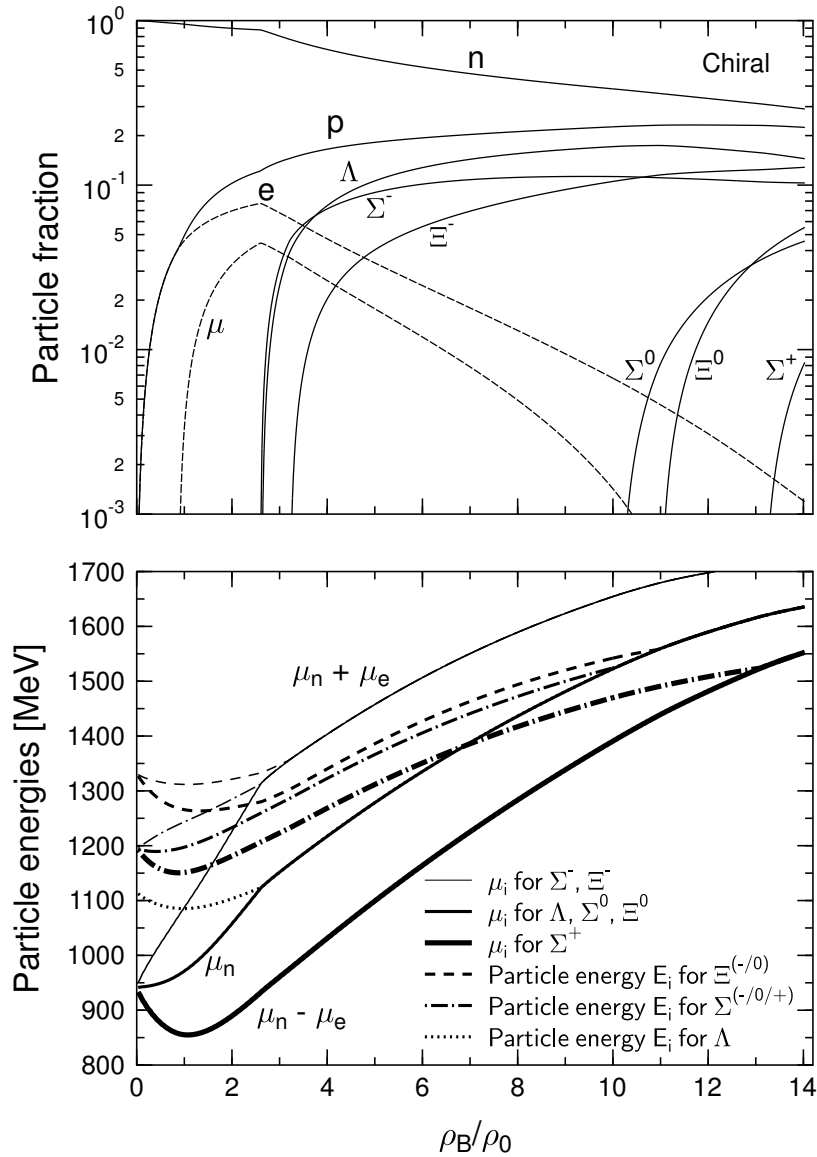


Abbildung 3.2: Oben: Relative Teilchenzusammensetzung in Abhängigkeit der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$ . Unten: Chemische Potentiale  $\mu_i$  und Einzelteilchenenergien  $E_i$  der Hyperonen in Abhängigkeit der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$ .

Obwohl das  $\Sigma^-$ -Hyperon eine weit höhere Masse als das  $\Lambda$ -Teilchen hat, tritt es bei ungefähr gleicher Dichte in das System ein. Der Grund hierfür liegt in der Zwangsbedingung der Ladungsneutralität des Systems, bei dem

negativ geladene Teilchen bevorzugt werden

$$\Lambda\text{-Hyperon} \quad n + n \leftrightarrow n + \Lambda + K^0 \quad \mu_\Lambda = \mu_n \quad (3.14)$$

$$\Sigma^-\text{-Hyperon} \quad n + n \leftrightarrow n + \Sigma^- + K^+ \quad \mu_{\Sigma^-} = \mu_n + \mu_{e^-} \quad . \quad (3.15)$$

Hyperonische Teilchen werden dann automatisch durch Zerfall von Nukleonen erzeugt, wenn die Einteilchenenergie  $E_i$  (siehe Gleichung 3.9) des jeweiligen Hyperons  $i$  mit dem chemischen Potential  $\mu_i$  gleich ist (siehe Abb. 3.2). Die bei den Umwandlungsprozessen entstehenden Mesonen, zerfallen in Photonen und Neutrinos, die ungehindert dem Stern entweichen können<sup>9</sup>. Durch das Erscheinen des  $\Sigma^-$ -Hyperons sinkt die Anzahl der negativ geladenen Leptonen im System, da diese nun nicht mehr allein für die Ladungskompensation der positiv geladenen Protonen im System verantwortlich sind. Die Abnahme der Leptonen wird weiter unterstützt durch das  $\Xi^-$ -Hyperon, das bei einer Dichte  $\rho_B \gtrsim 3.2 \rho_0$  auftritt. Im chiralen Modell treten die weiteren Hyperonen des Barionenoktetts erst bei sehr hohen Dichten auf ( $\rho_B > 10 \rho_0$ ), so dass ihre Existenz bei dem Studium der Eigenschaften von Neutronensternen keine Relevanz haben wird (näheres siehe später).

Die numerischen Resultate der Zustandsgleichung  $P(\rho_B, T = 0)$  des chiralen SU(3)-Modells für ladungsneutrale Neutronensternmaterie im  $\beta$ -Gleichgewicht ist in Abb. 3.3 dargestellt. Die durchgezogene Kurve beschreibt Neutronensternmaterie im chiralen Modell, die sich lediglich aus Neutronen, Protonen und Elektronen (npe) zusammensetzt. Die gepunktete Kurve hingegen stellt Neutronensternmaterie dar, die des weiteren Myonen und das gesamte Barionenoktet beinhaltet, d.h. Materie deren Teilchenkompositionen sich so wie in Abb. 3.2 beschrieben zusammensetzt. Man erkennt, dass das Auftreten der Hyperonen bei  $\rho_B = 2.6 \rho_0$  die Zustandsgleichung stark "verweicht" (softening). In Abb. 3.4 ist eine weitere Darstellung der Zustandsgleichung abgebildet ( $P(\epsilon, T = 0)$ ), die bei der Berechnung der Eigenschaften von Neutronensternen von größerer Bedeutung ist, da sie direkt in die TOV-Gleichungen (siehe Gl. 2.61 in Kapitel 2) eingeht.

---

<sup>9</sup>Dies gilt nur dann, wenn die entstehenden Mesonen nicht durch einen Phasenübergang im Stern kondensieren (siehe [16] neue Auflage und [45, 46, 47, 48]).

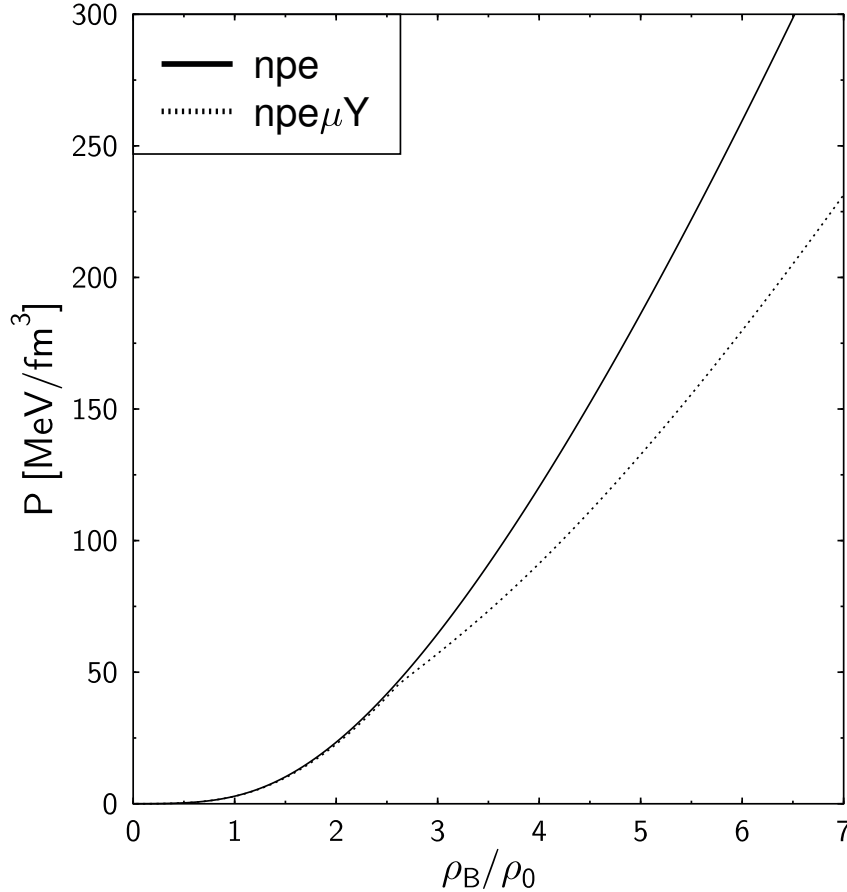


Abbildung 3.3: Die Zustandsgleichung, d.h. der Druck  $P$  der hadronischen Materie als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$ . Die durchgezogene Kurve (npe) beschreibt ladungsneutrale Materie im  $\beta$ -Gleichgewicht bestehend aus Neutronen, Protonen und Elektronen, wohingegen die gepunktete Kurve (npe $\mu$ Y) auch Muonen und Hyperonen beinhaltet.

Der Druck  $P$  und die Energiedichte  $\epsilon$  sind die relevanten Größen zur Berechnung der Gravitationskraft eines Systems bzw. der durch die Materie verursachten Raumzeitkrümmung; die Barionendichte  $\rho_B$  ist in der Einstein-Gleichung unerheblich und tritt nur als verborgener Parameter auf. In Abb. 3.4 erkennt man ebenfalls einen weicheren Verlauf der Zustandsgleichung bei Einbeziehung von Hyperonen oberhalb der Energiedichte  $\epsilon = \epsilon(\rho_B = 2.6 \rho_0) \approx 400 \text{ [MeV}/\text{fm}^3]$ .

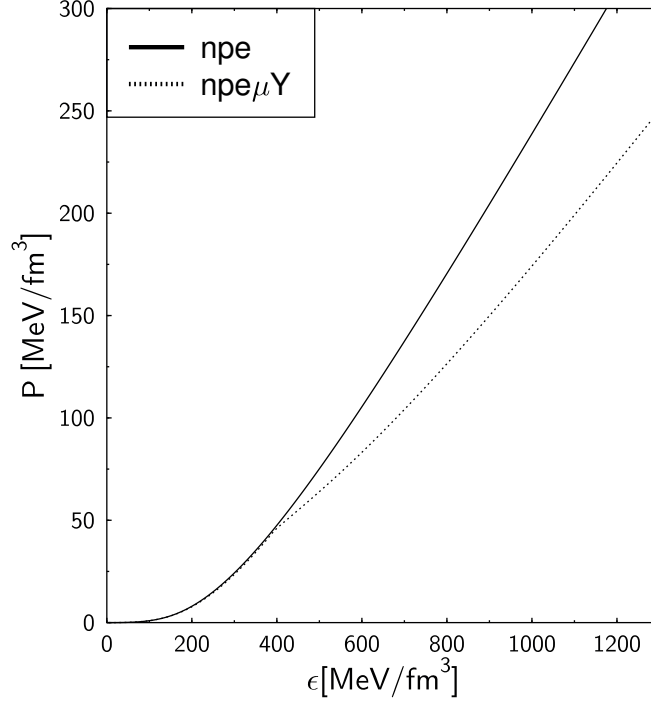


Abbildung 3.4: Die Zustandsgleichung, d.h. der Druck  $P$  der hadronischen Materie als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$ . Die beiden Kurven beschreiben dieselben Systeme wie in Abb. 3.3. Diese Form der Zustandsgleichung ( $P(\epsilon)$ ) geht direkt in die Einsteingleichung ein (siehe Kapitel 2).

### Eigenschaften des nichtrotierenden Neutronensterns

Um die Eigenschaften von Neutronensternen auszurechnen setzt man die in Abb. 3.4 dargestellte Zustandsgleichung in die TOV-Gleichung ein und löst diese numerisch. Um die äußere Kruste des Sterns, bestehen aus einem Gitter von Atomkernen eingebettet in ein Elektronengas, beschreiben zu können, benutzen wir für niedrige Dichten ( $\rho_B < 0.001 \text{ fm}^{-3}$ ) die Zustandsgleichung von Baym, Pethick und Sutherland [49]. Den inneren Teil der Kruste ( $0.001 < \rho_B < 0.08 \text{ fm}^{-3}$ ) beschreiben wir durch die Resultate von Negele und Vautherin [50]. Die so berechneten Eigenschaften werden im folgenden dargestellt; sie beschreiben ladungslose, nichtrotierende, magnetfeldfreie Neutronensterne mit sphärischer Symmetrie im chiralen SU(3)-

Modell.

- **Energiedichteprofile**

Abb. 3.5 stellt drei Energiedichteprofile von Neutronensternen im chiralen Modell dar, die sich in dem Wert der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c := \epsilon(r = 0)$  im Zentrum des Sterns unterscheiden.

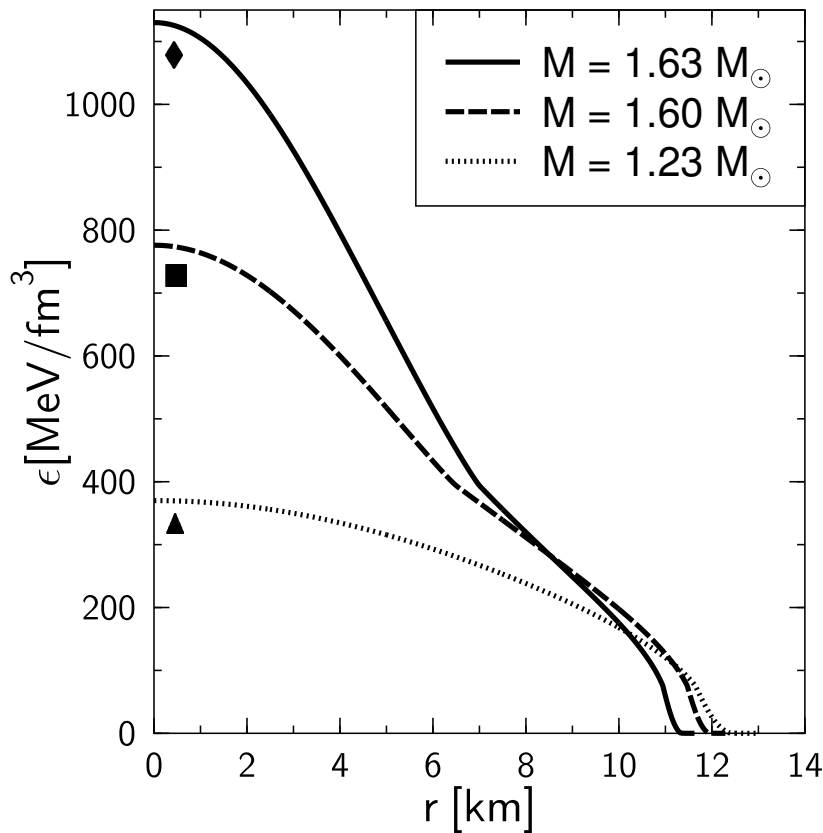


Abbildung 3.5: Drei Energiedichtenprofile  $\epsilon(r)$  von Neutronensternen mit unterschiedlichen zentralen Dichten  $\epsilon_c := \epsilon(r = 0)$  im chiralen Modell mit Hyperonen. Der Stern  $\blacklozenge$  mit der höchsten zentralen Energiedichte ( $\epsilon_c^{\blacklozenge} = 1130 \text{ MeV/fm}^3$ ) repräsentiert den Stern mit maximaler Masse. Der Stern  $\blacktriangle$  dagegen besitzt eine zu geringe Energiedichte um eine Hyperonenerzeugung im Sterninneren zu ermöglichen.

Der mit dem Symbol  $\blacktriangle$  gekennzeichnete Stern besitzt die geringste

zentrale Energiedichte  $\epsilon_c^\blacktriangle = 370 \text{ MeV/fm}^3$ , der "■-Stern" eine mittlere ( $\epsilon_c^\blacksquare = 780 \text{ MeV/fm}^3$ ) und  $\blacklozenge$  die höchste Energiedichte im Zentrum ( $\epsilon_c^\blacklozenge = 1130 \text{ MeV/fm}^3$ ). Berechnet man die gravitativen Gesamtmassen dieser Sterne, so unterscheiden sie sich ebenfalls ( $M_\blacktriangle = 1.23M_\odot$ ,  $M_\blacksquare = 1.60M_\odot$ ,  $M_\blacklozenge = 1.63M_\odot$ ). Auffällig ist das geänderte Steigungsverhalten der Profile ■ und  $\blacklozenge$  bei ca.  $400 \text{ MeV/fm}^3$ . Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, dass ab dieser Energiedichte hyperonische Teilchen in das System kommen und die Zustandsgleichung weicher machen. Demnach besteht der Stern  $\blacktriangle$  nur aus Nukleonen und Leptonen, wohingegen die Sterne ■ und  $\blacklozenge$  in ihrem inneren Kern ( $r < 6.4 \text{ km}$ ) Hyperonen beinhalten. Das Aussehen der Dichteprofile wird demnach stark von den Hyperonen beeinflusst.

- **Raumzeitkrümmung**

Die Abbildungen 3.6 und 3.7 stellen die  $g_{00} \equiv g_{tt}$  und  $g_{11} \equiv g_{rr}$  Komponente der Metrik  $g_{\mu\nu}$  als Funktion des radialen Abstandes  $r$  vom Sternzentrum dar. Die  $g_{00}$ -Komponente, die in Newtonscher Approximation das Newtonsche Gravitationspotential beschreibt, ist in Abb. 3.6 dargestellt. Die durchgezogenen Kurven stellen die numerischen Resultate der Metrik im Inneren des Sterns dar, die mit Hilfe der TOV-Gleichungen berechnet wurden wohingegen die gepunkteten Kurven die Außenraummetriken der Schwarzschildlösung darstellen. Aufgrund der unterschiedlichen Energiedichteprofile der Sterne unterscheiden sich ihre Innenraummetriken merklich voneinander. Der Stern  $\blacklozenge$  mit der höchsten zentralen Energiedichte verursacht gleichzeitig die stärkste Raumzeitkrümmung; der Stern  $\blacktriangle$  die geringste Krümmung. Bei den Sternen ■ und  $\blacklozenge$  ist es auffällig, dass sich ihre Außenmetriken nur wenig voneinander unterscheiden, was daran liegt, dass ihre Gesamtmassen ungefähr gleich sind und die äußere Schwarzschildlösung lediglich von diesem Parameter bestimmt wird.

Die Kurven der  $g_{11}$ -Metriken der Sterne besitzen ein Minimum bei den Radien, bei denen die Zustandsgleichung der hadronischen Materie in die äußere Krustenmaterie der Sterne übergeht; an der Oberfläche des Sterns geht sie ebenfalls in die Schwarzschildlösung über (gepunktete

Kurve). Für  $r \rightarrow \infty$  gehen alle Komponenten der Metrik bei sämtlichen Sternen in den Limes des flachen, gravitationsfreien Raumes über ( $g_{00}(r \rightarrow \infty) = 1$  und  $g_{11}(r \rightarrow \infty) = -1$ ).

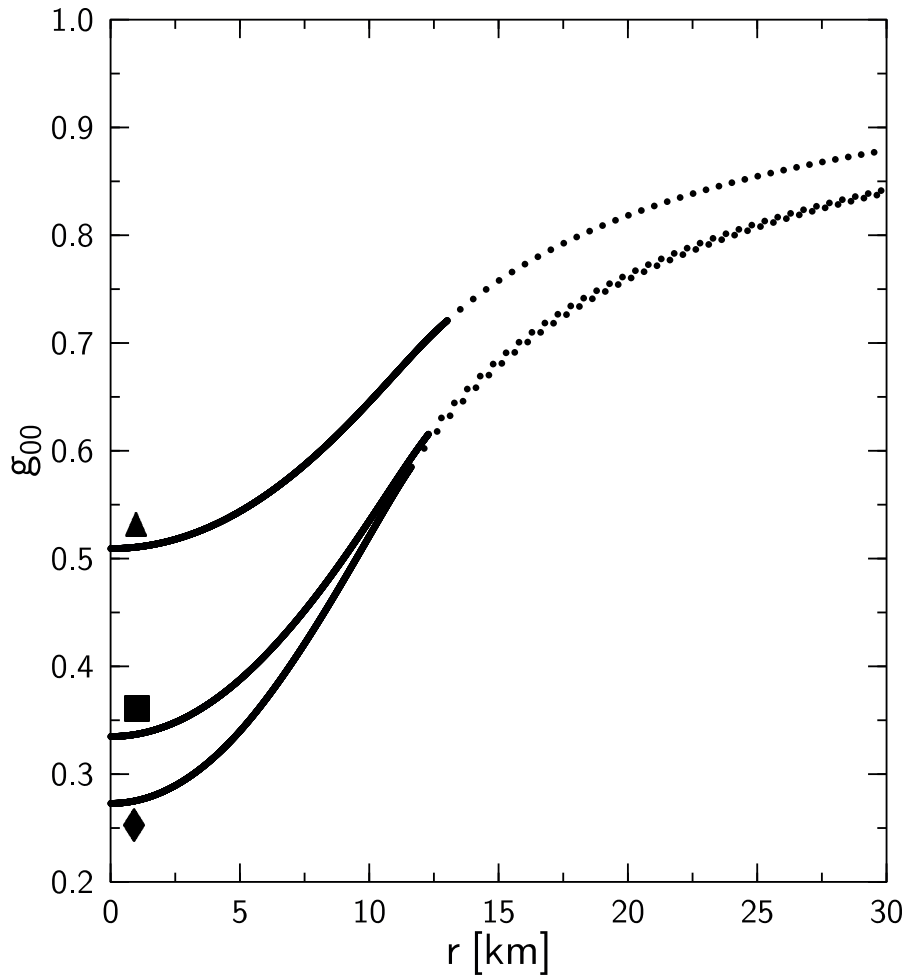


Abbildung 3.6: Zeit-Zeit Komponente  $g_{00}$  des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  als Funktion der radialen Koordinate  $r$ . Die drei Kurven entsprechen den Neutronensternen  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$  und  $\blacklozenge$  der Abb. 3.6. Die durchgezogenen Kurven beschreiben die Metrik innerhalb der Sterne wohingegen die gepunkteten Kurven die Außenraummetriken der Sterne darstellen.

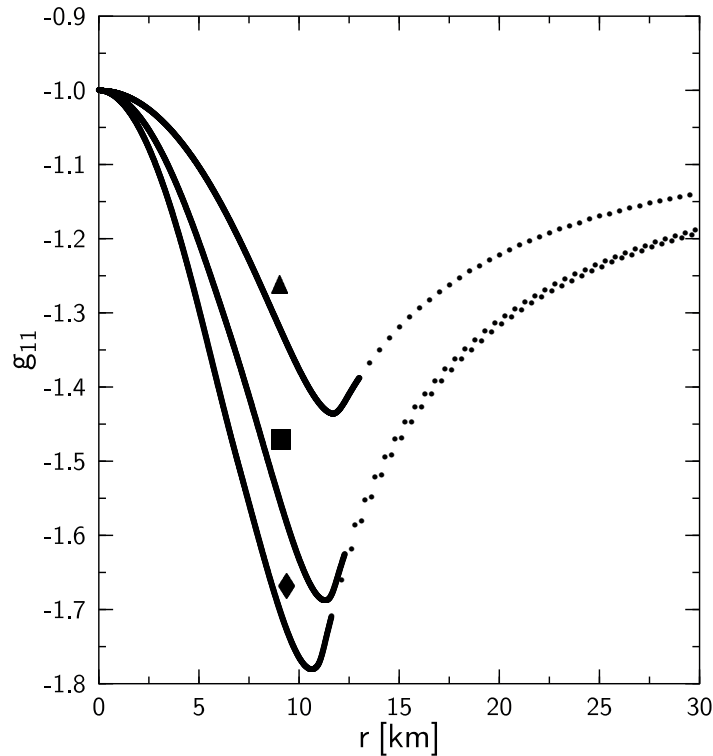


Abbildung 3.7: Raum-Raum Komponente  $g_{11}$  des metrischen Tensors  $g_{\mu\nu}$  als Funktion der radialen Koordinate  $r$ . Die Kurven beschreiben dieselben Systeme wie in den vorigen Bildern.

- **Masse und Radius**

Abgesehen von der Rotationsfrequenz  $\Omega$  sind die Gesamtmasse und der Sternradius die wichtigsten makroskopischen Eigenschaften von kompakten Sternen die direkt mit observablen Daten verglichen werden können.

Im chiralen SU(3) Modell ergibt sich numerisch der in Abb. 3.8 dargestellte Zusammenhang zwischen Radius  $R$  und gravitativer Gesamtmasse  $M$ . Die  $R(M)$ -Eigenschaften der im vorigen Teilkapitel besprochenen Sterne ( $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$ ,  $\blacklozenge$ ) sind durch Pfeile gekennzeichnet. Das erste Auftreten der einzelnen Hyperonen im Zentrum der Neutronensterne ist ebenfalls in Abb. 3.8 durch Pfeile markiert. Man erkennt hier deutlich, dass der Stern  $\blacktriangle$  (geringe zentrale Dichte) keine hyperonischen



Teilchen besitzt; er hat eine geringe Masse ( $M_{\blacktriangle} = 1.23M_{\odot}$ ), einen relativ großen Radius ( $R_{\blacktriangle} = 13$  km) und befindet sich auf dem so genannten "Plateau" der  $R(M)$ - Kurve, das für Neutronensterne mit Kruste typisch ist. Das extreme Ansteigen des Radius bei sehr kleinen Massen ( $M < 0.2M_{\odot}$ ) ist bedingt durch die Eigenschaften der Krustenzustandsgleichung; diese Sterne gehen für sehr große Radien in den Zweig der Weißen Zwerge über. Neutronensterne mit mittlerer  $\blacksquare$  und höchster  $\blacklozenge$  zentraler Dichte sind kompakter, besitzen Hyperonen in ihrem inneren Kern, haben größere Massen und besitzen kleinere Radien ( $R_{\blacksquare} = 12.3$ ,  $R_{\blacklozenge} = 11.6$  km).

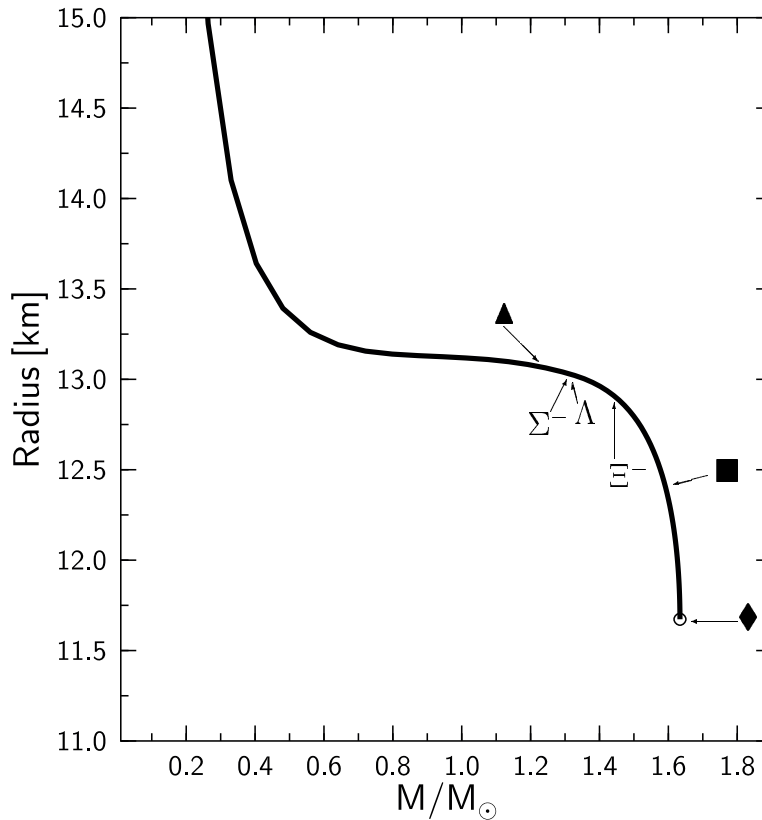


Abbildung 3.8: Radius  $R$  des Sterns als Funktion seiner gravitativen Gesamtmasse  $M$ .  $\blacktriangle$ ,  $\blacksquare$  und  $\blacklozenge$  markieren die in den vorigen Abbildungen besprochenen Sterne. Des weiteren sind die Grenzwerte des ersten Einsetzens der Hyperonen  $\Lambda$ ,  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^-$  im Sternzentrum markiert.

Der  $\blacklozenge$  - Stern hat die größtmögliche zentrale Energiedichte, den kleinsten Radius, die größte Masse und beinhaltet die meisten seltsamen hyperonischen Teilchen. Im chiralen Modell stellt dieser Stern die letzte makroskopisch stabile Form der Materie dar, da gezeigt werden kann (siehe Kapitel 2), dass noch kompaktere oder seltsamere Sterne instabil unter radialen Oszillationen werden und zwangsläufig zu schwarzen Löchern kollabieren müssen.<sup>10</sup> Demnach stellt die zentrale Energiedichte des  $\blacklozenge$  - Sterns eine Grenzdichte dar, die stabile Neutronensterne nicht überschreiten können. Da diese Grenzdichte weit unterhalb der Dichte liegt, die ein Erscheinen der Hyperonen ( $\Sigma^0, \Sigma^+, \Xi^0$ ) möglich machen würde, können diese Teilchen in Neutronensternen, die auf dem chiralen Modell basieren, nicht vorkommen.

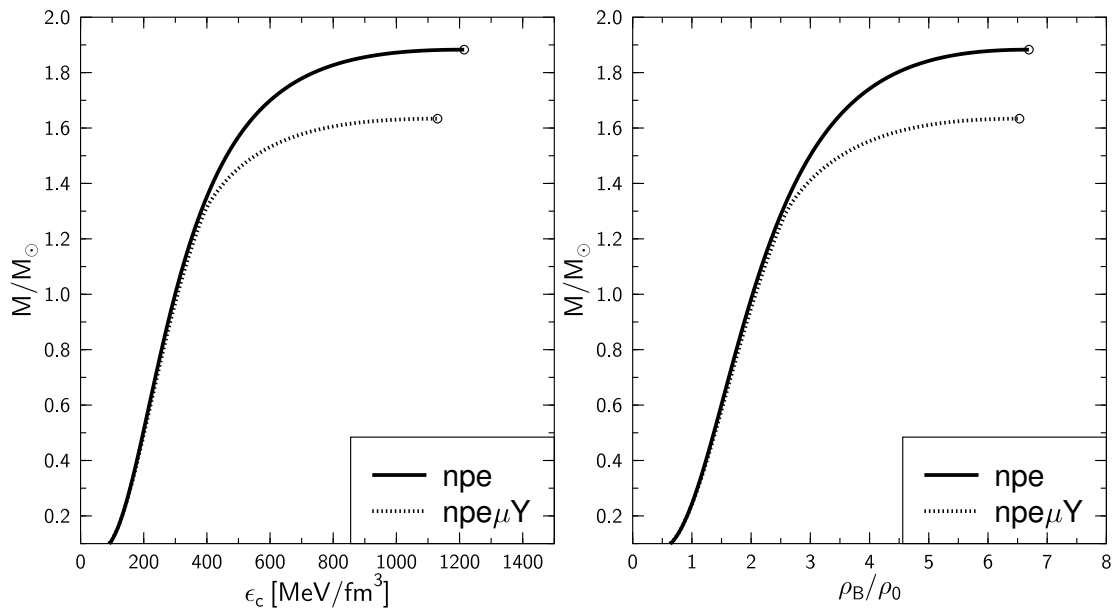


Abbildung 3.9: Links: Gravitative Masse  $M$  als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$ . Rechts: Gravitative Masse  $M$  als Funktion der zentralen Barioendichte  $\rho_c/\rho_0$ .

<sup>10</sup>Vorausgesetzt ist hier, dass das chirale SU(3) Modell für jegliche Dichtebereiche gültig ist und während des Kollaps zum schwarzen Loch die Materie keinen Hadron-Quark Phasenübergang vollzieht.

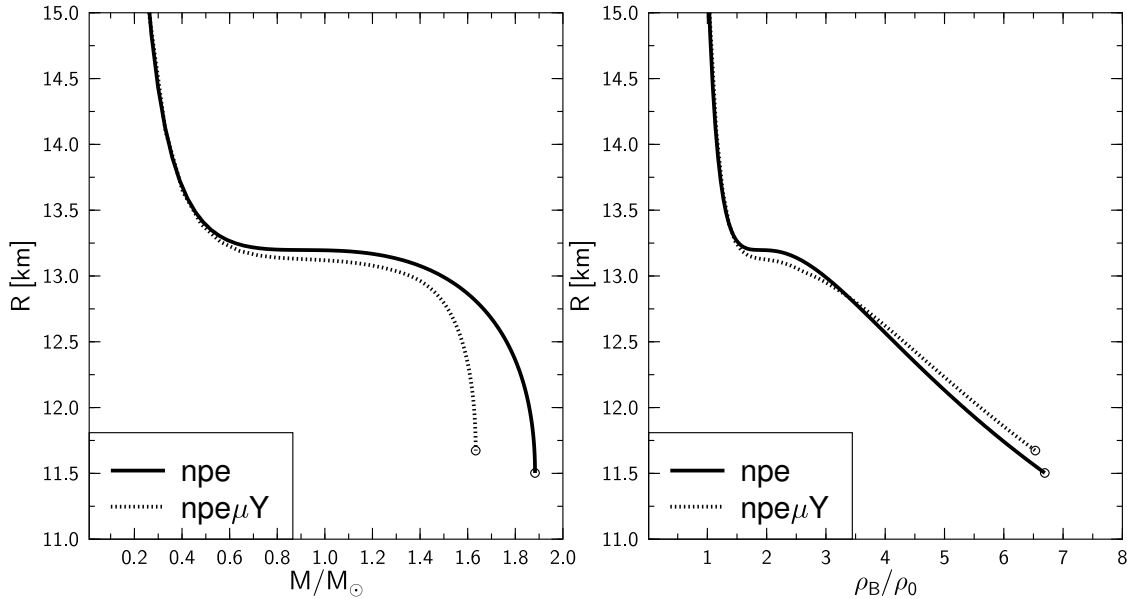


Abbildung 3.10: Links: Radius  $R$  des Sterns als Funktion seiner gravitativen Masse  $M$ . Rechts: Radius  $R$  des Sterns als Funktion seiner zentralen Barionendichte  $\rho_c/\rho_0$ .

In den Abbildungen 3.9 und 3.10 werden weitere Zusammenhänge zwischen Radius, Masse und anderen Größen dargestellt. Die durchgezogenen Kurven stellen die numerischen Resultate des chiralen Modells dar (mit Hyperonen), wobei die gepunkteten Kurven die Berechnungen des chiralen Modells zeigen, die sich ergeben, wenn man die natürliche Erzeugung der Hyperonen unterdrückt und nur Nukleonen und Elektronen im System zulässt. Durch das "softening" der Zustandsgleichung bei Einbeziehung von Hyperonen wird die maximale Masse stark reduziert.

### Rotierender Neutronenstern

Die Auswirkungen der Rotation eines kompakten Sterns auf seine charakteristischen Größen (Masse, Radius usw.) und die innere und äußere Metrik der Raumzeit wurde bereits in Kapitel 2 dargestellt und diskutiert. Die folgenden Resultate wurden in der perturbativen Hartle-Thorn-Methode bis zur Quadrupolnäherung allgemeinrelativistisch berechnet und beschreiben die Rotationskorrekturen einiger charakteristischer Größen des Neutronensterns im chiralen Modell und dessen verursachte Raumzeitkrümmung.

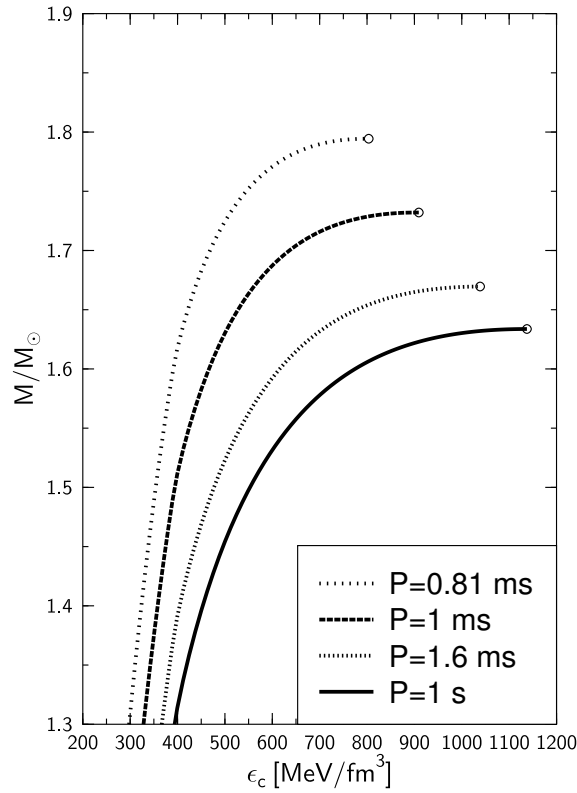


Abbildung 3.11: Gravitative Masse  $M$  als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  für vier verschiedene Rotationsperioden  $P = 2\pi/\Omega = 1, 0.0016, 0.001, 0.00081$  s.

In Abb. 3.11 ist die gravitative Masse des Neutronensterns gegen die zentrale Energiedichte  $\epsilon_c$  bei verschiedenen Rotationsgeschwindigkeiten aufgetragen. Man erkennt, dass sich für Rotationsperioden  $P = 2\pi/\Omega \geq 1$  s so gut wie keine Rotationskorrekturen der Gesamtmasse des Sterns ergeben; dies gilt auch für die anderen charakteristischen Größen. Man kann aus diesem Ergebnis folgern, dass alle bekannten Sekundenpulsare in guter Näherung als nichtrotieren approximiert werden können und die im vorigen Teilkapitel dargestellten Ergebnisse für sämtliche Sekundenpulsare gültig sind. Rotiert der Neutronenstern jedoch schneller (Milli- und Submilli- Sekundenpulsare), so verschiebt sich dessen Massenkurve zu höheren Werten, seine maximale Masse  $M_{max}$  nimmt zu und seine sphärische Symmetrie wird zerstört. Seine Radius am Äquator  $R_{äqu}$  nimmt zu und an den Polen  $R_{pol}$  ab. Die durch die

Gleichung 2.76 berechnete Keplerfrequenz  $\Omega_K^{CHM} = 7787 \text{ rad/s}$  entspricht einer Keplerperiode von  $P_K^{CHM} \approx 0.81 \text{ ms}$ .

Wie im Kapitel 2 bereits beschrieben, entstehen aufgrund der Rotation Mitführungseffekte der Raumzeit (frame dragging), welche durch die Frame-dragging Frequenz  $\omega(r)$  bestimmt sind.

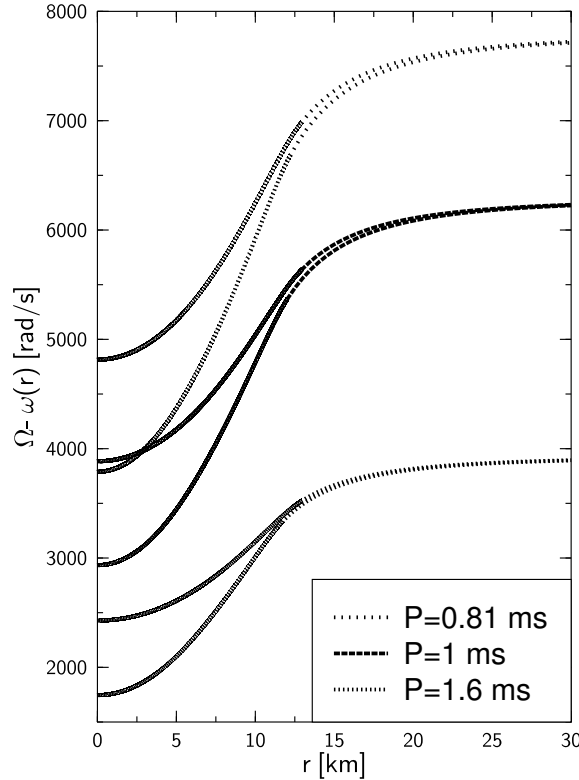


Abbildung 3.12: Veranschaulichung der 'Frame dragging' - Frequenz  $\omega(r)$ .  $\bar{\omega}(r) := \Omega - \omega(r)$  als Funktion der radialen Koordinate  $r$ . Zu zwei unterschiedlichen zentralen Energiedichten  $\epsilon_c$  ( $\epsilon_c = 400 \text{ MeV/fm}^3$  und  $\epsilon_c = \epsilon^{M_{max}}$ ) wurden drei unterschiedlich schnell rotierende Sterne berechnet (Rotationsperioden:  $P = 0.0016, 0.001, 0.00081 \text{ s}$ ).

In Abb. 3.12 ist die Framedragging Frequenz  $\omega(r)$  von der Rotationsfrequenz  $\Omega$  des Sterns subtrahiert ( $\bar{\omega}(r) := \Omega - \omega(r)$ ) und für drei unterschiedliche Rotationsperioden  $P = 0.0016, 0.001, 0.00081 \text{ s}$  und zwei unterschiedliche zentrale Energiedichten ( $\epsilon_c = 400 \text{ MeV/fm}^3$  und  $\epsilon_c = \epsilon^{M_{max}}$ ) gegen den radialen Abstand vom Zentrum des Sterns aufgetragen. Im Zen-

trum rotiert die Raumzeit stets am schnellsten und theoretisch betrachtet, spürt erst ein unendlich weit entfernter Beobachter keine Mitführungseffekte mehr. Bei gleicher Rotationsfrequenz  $\Omega$  und größeren zentralen Energiedichten sind die Mitführungseffekte und somit  $\omega(r)$  größer, da mehr Energie pro Volumeneinheit bewegt wird.

### Abhängigkeit der Resultate vom Parametersatz

Alle die in den vorigen Teilkapiteln dargestellten Ergebnisse hängen von dem gewählten Parametersatz des chiralen SU(3)-Modells ab. Die dargestellten Ergebnisse wurden im C1-Parametersatz berechnet, da mit diesen Parametern am befriedigsten die Eigenschaften von Kernmaterie realisiert werden (siehe [38]). Für einen neueren Parametersatz (siehe [41, 44]), mit dem man die Eigenschaften von endlichen Kernen gut beschreiben kann, wurden Vergleichsrechnungen angestellt. Die mit Hilfe dieses Parametersatzes berechneten Werte der Eigenschaften von Neutronensternen im chiralen Modell unterscheiden sich nur minimal (weniger als 5 % Abweichung) von denen im C1-Parametersatz berechneten Werte, so dass diese Resultate nicht nochmals in dieser Arbeit dargestellt werden.

### Vergleich mit anderen hadronischen Modellen

Die zur Strukturbestimmung von Neutronensternen am häufigsten benutzten Modelle der hadronischen Wechselwirkung sind erweiterte "Walecka Modelle" [43, 16, 15], die teilweise in der Struktur ihrer zugrundeliegenden Lagrangedichte große Unterschiede besitzen. In diesem Teilkapitel wird deshalb exemplarisch ein Walecka Modell gewählt, dass von seinem physikalischen Inhalt ähnlich dem chiralen Modell ist.

Im folgenden benutzen wir die nichtlineare Version eines relativistischen 'mean-field' Modells, dessen Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  wie folgt formuliert wird

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\partial - m_B) \psi_B + \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{a}{3} \sigma^3 - \frac{b}{4} \sigma^4 - \frac{1}{4} \omega^{\mu\nu} \omega_{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - \frac{1}{4} \vec{\rho}^{\mu\nu} \vec{\rho}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}^\mu \vec{\rho}_\mu \end{aligned}$$

$$+ \sum_B \bar{\psi}_B (g_{\sigma B} \sigma + g_{\omega B} \omega^\mu \gamma_\mu + g_{\rho B} \vec{\rho}^\mu \gamma_\mu \vec{\tau}_B) \psi_B, \quad (3.16)$$

wobei die Summe über alle Barionenarten  $B=p, n, \Lambda, \Sigma^{0,\pm}, \Xi^{0,-}$  geht.  $\sigma, \omega$  und  $\vec{\rho}$  sind die iso-skalar skalaren  $\sigma$ , die iso-skalar vektoriellen  $\omega$  und die iso-vektoriell vektoriellen  $\rho$  Mesonenfelder.  $\omega^{\mu\nu}$  und  $\vec{\rho}^{\mu\nu}$  sind die Feldstärke-tensoren der  $\omega$  und  $\rho$  Mesonenfelder.

Da man allein mit diesem Modell nicht imstande war die stark attraktive  $\Lambda\Lambda$ -Wechselwirkung beschreiben zu können, fügte man der Lagrangedichte (Gl. 3.19) einen weiteren Term  $\mathcal{L}^{YY}$  hinzu. In diesem Erweiterungsteil treten zusätzliche mesonische Felder auf (das iso-skalar skalare  $\sigma^*$ -Feld und das iso-skalar vektorielle  $\phi$ -Feld), die ausschließlich an hyperonische Teilchen koppeln. Experimentell kann man diese Mesonen als das  $f_0(975)$  und  $\phi(1020)$  Teilchen interpretieren. Der Zusatzterm lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{YY} = & \frac{1}{2} (\partial^\mu \sigma^* \partial_\mu \sigma^* - m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2}) - \frac{1}{4} \phi^{\mu\nu} \phi_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^\mu \phi_\mu \\ & + \sum_Y \bar{\psi}_Y (g_{\sigma^* Y} \sigma^* + g_{\phi Y} \phi^\mu \gamma_\mu) \psi_Y \quad , \end{aligned}$$

wobei der Index  $Y$  über alle Hyperonen geht.

Die hyperonischen Vektorkopplungskonstanten erfüllen die  $SU(6)$  Symmetrie, wobei die skalaren hyperonischen Kopplungskonstanten so gewählt werden, dass die gemessenen optischen Potentiale reproduziert werden (näheres siehe [51, 52]).

Der Druck  $P$  und die Energiedichte  $\epsilon$  von statischer, homogener barionischer Materie in diesem Modell kann in 'mean-field' Approximation wie folgt geschrieben werden

$$\begin{aligned} \epsilon^H = & \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{b}{3} \sigma^3 + \frac{c}{4} \sigma^4 + \frac{1}{2} m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{0,0}^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_0^2 + \sum_B \frac{\nu_B}{2\pi^2} \int_0^{k_F^B} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_B^{*2}}, \quad (3.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^H = & -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{b}{3} \sigma^3 - \frac{c}{4} \sigma^4 - \frac{1}{2} m_{\sigma^*}^2 \sigma^{*2} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_{0,0}^2 + \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi_0^2 + \sum_B \frac{\nu_B}{6\pi^2} \int_0^{k_F^B} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_B^{*2}}}, \quad (3.18) \end{aligned}$$

wobei  $m_B^* = m_B - g_{\sigma B}\sigma - g_{\sigma^* B}\sigma^*$  die effektive Masse,  $\nu_B$  der Degenerationsfaktor und  $k_F^B = \sqrt{\mu_B^2 - m_B^{*2}}$  der Fermiimpuls des barionischen Teilchens  $B$  ist.

Um ladungsneutrale barionische Materie im  $\beta$ -Gleichgewicht zu beschreiben, müssen außerdem noch Leptonen in das System miteinbezogen werden. Dieser Übergang zu Neutronensterne Materie geschieht analog zum chiralen Modell durch Hinzufügung des Beitrags  $\mathcal{L}_{\text{lep}}$  zur gesamten Lagrangedichte (siehe Gl. 3.7).

Im folgenden werden vier unterschiedliche Parametersätze dieses Modells benutzt (TM1, NLZ, TM1YY und NLZYY). Die Parametersätze TM1 und NLZ beinhalten keine zusätzlichen mesonischen Felder der hyperonischen Wechselwirkung ( $\mathcal{L}^{YY} \equiv 0$ ), wohingegen die Parametersätze TM1YY und NLZYY diese beinhalten (näheres zu den Modellen und Parametersätzen findet man in [51, 52]).

Die Zustandsgleichung der Modelle ist in Abb. 3.13 dargestellt.

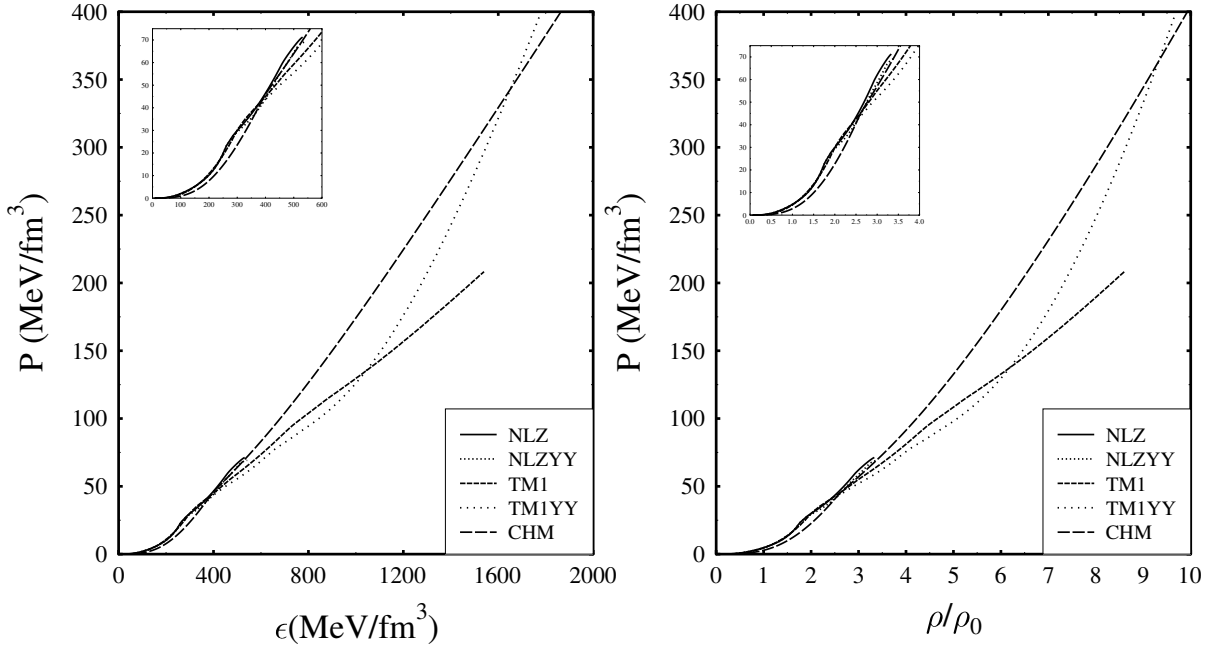


Abbildung 3.13: Links: Druck  $P$  als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$ . Rechts: Druck  $P$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho/\rho_0$ .



Die Zustandsgleichungen der einzelnen Modelle unterscheiden sich vor allem bei hohen Energiedichten voneinander, da die experimentell überprüfbareren Eigenschaften der Modelle sich streng nur bei normaler nuklearer Dichte  $\rho_0$  gleichen. Ein weiterer wichtiger Punkt ist die unterschiedliche Hyperonenbeschreibung der einzelnen Modelle, die bei Dichten  $\rho \geq 2\rho_0$  einsetzt.

In Abb. 3.13 erkennt man außerdem ein plötzliches Aussetzen der Zustandsgleichungen der Modelle TM1, NLZ und NLZYY bei jeweils unterschiedlichen Dichten. Bei diesen Dichten kommt es bei den jeweiligen Modellen zu negativen effektiven Nukleonenmassen  $m_N^*$  (siehe Abb. 3.14 und 3.15).

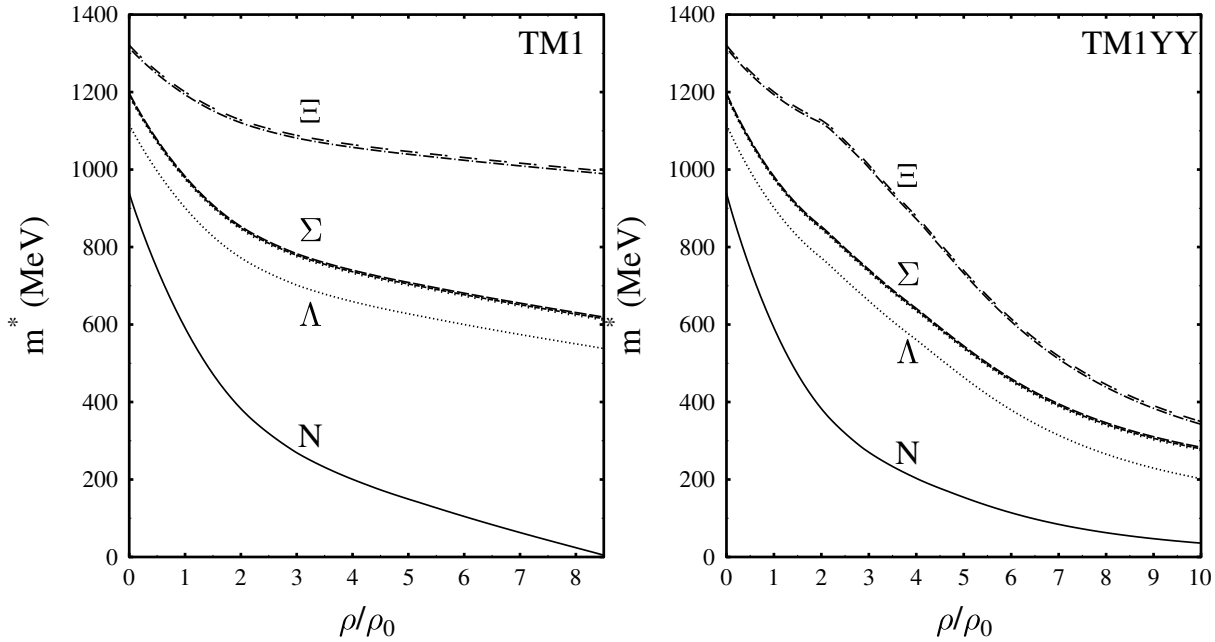


Abbildung 3.14: Effektive barionische Massen  $m_B^*$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho/\rho_0$  im TM1- und TM1YY-Modell.

Im TM1-Modell wird die effektive Masse  $m_N^*$  der Nukleonen bei einer barionischen Dichte von  $\rho \geq 8.5\rho_0$  negativ. Da negative effektive Massen unphysikalische Ausdrücke darstellen, entschieden wir uns die Ergebnisse der jeweiligen Modelle lediglich bis zu den kritischen Dichten anzugeben und nicht durch Betragsbildung die Eigenschaft der negativen Massen zu

verschleiern.<sup>11</sup> Durch Miteinbeziehen der Hyperonen-Hyperonen Wechselwirkung in das TM1-Modell (TM1YY) erreicht man einen langsameren Abfall der Nukleonenmassen mit steigender Dichte, so dass keine negativen effektiven Massen, im betrachteten Bereich bis  $10\rho_0$ ) auftreten. Die effektiven Hyperonenmassen  $m_Y^*$  fallen dagegen schneller ab (siehe Abb. 3.14).

Im NLZ-Modell treten negative effektive Nukleonenmassen schon bei Dichten  $\rho \geq 3.3\rho_0$  auf. Ein Miteinbeziehen der Hyperonen-Hyperonen Wechselwirkung (NLZYY-Modell) hilft hier nur wenig weiter (siehe Abb. 3.15 rechts).

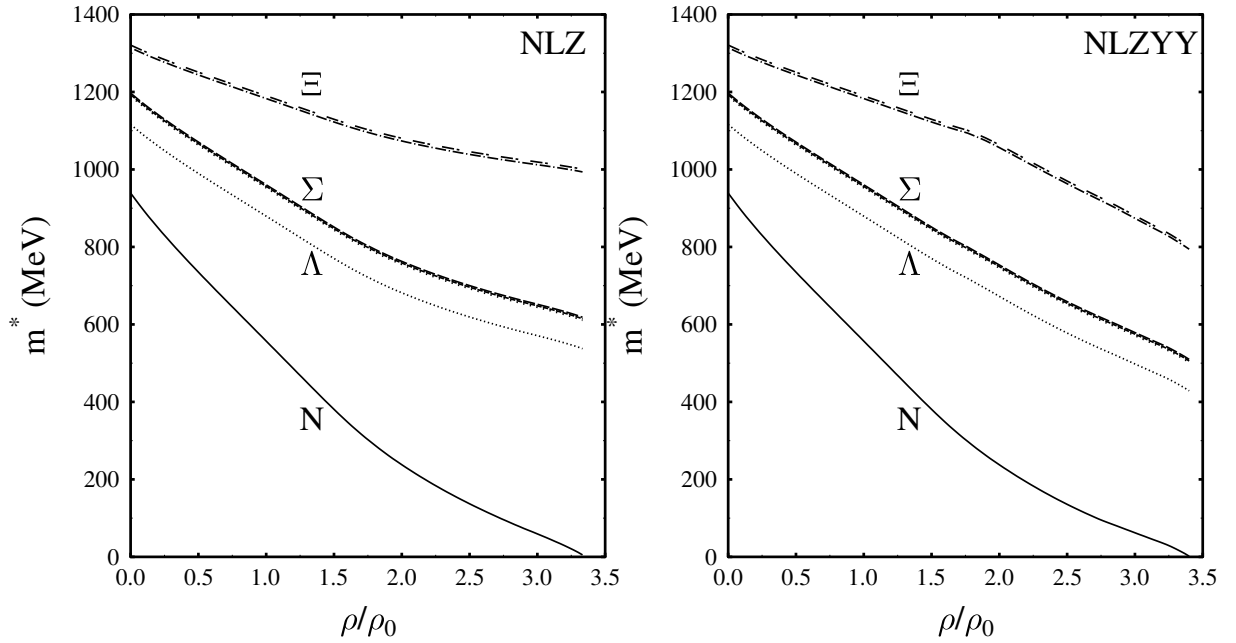


Abbildung 3.15: Effektive barionische Massen  $m_B^*$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho/\rho_0$  im NLZ- und NLZYY-Modell.

Im chiralen hadronischen Modell können effektive barionische Massen aufgrund der higgs'schen Massenerzeugungskonstruktion nicht auftreten (siehe Abb. 3.16). Die effektiven Teilchenmassen fallen im CHM im Vergleich zu den anderen Modellen viel schwächer ab.

<sup>11</sup>Die negativen effektiven Teilchenmassen entstehen aufgrund von vernachlässigten Vakuumpolarisationseffekten ('Mean Field' - Näherung) und stellen somit eine spontane Teilchen-Antiteilchen Erzeugung dar (näheres siehe [53, 52, 54, 55]).

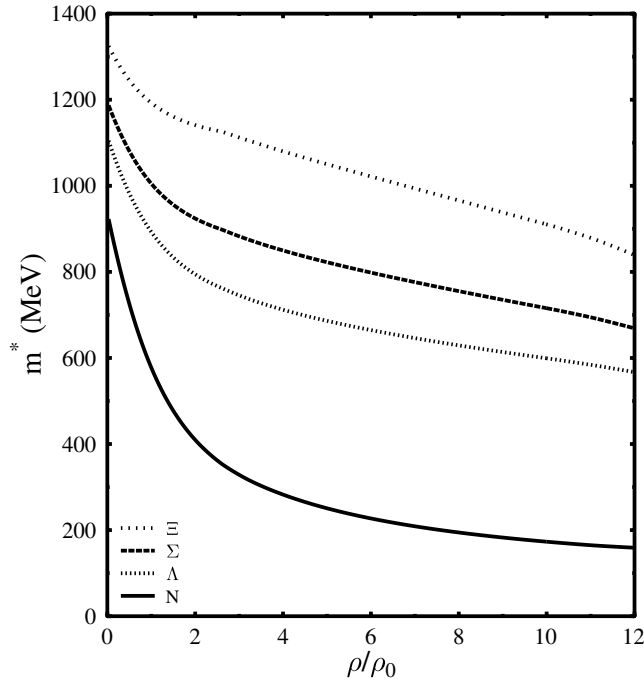


Abbildung 3.16: Effektive barionische Massen  $m_B^*$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho/\rho_0$  im CHM.

Die Teilchenzusammensetzungen der jeweiligen Modelle ist in den Abbildungen 3.17 und 3.18 veranschaulicht. Verglichen mit dem CHM (Abb. 3.2) entstehen in allen anderen betrachteten Modellen die ersten hyperonischen Teilchen schon bei niedrigeren Dichten (TM1, TM1YY:  $\approx 2\rho_0$ , NLZ, NLZYY:  $\approx 1.7\rho_0$ ). Das Miteinbeziehen der Hyperonen-Hyperonen Wechselwirkung erleichtert im allgemeinen die Produktion von hyperonischen Teilchen bei steigender Dichte, so dass auch massiveren und positiv geladenen Hyperonen ein Erscheinen ermöglicht wird. Vergleicht man die hyperonischen Teilchenzusammensetzungen mit dem CHM, so erkennt man, dass in den betrachteten Modellen im allgemeinen mehr Hyperonen auftreten. Im TM1 und den NLZ-Modellen erscheinen sogar bei hohen Dichten mehr ladungslose  $\Lambda$ -Hyperonen als Neutronen oder Protonen; dies ist im CHM nicht der Fall. Für extrem hohe Dichten unterscheiden sich die relativen Teilchenhäufigkeiten nicht mehr, was man als einen Ausdruck der chiralen Restaurierung innerhalb der einzelnen Modelle verstehen kann.

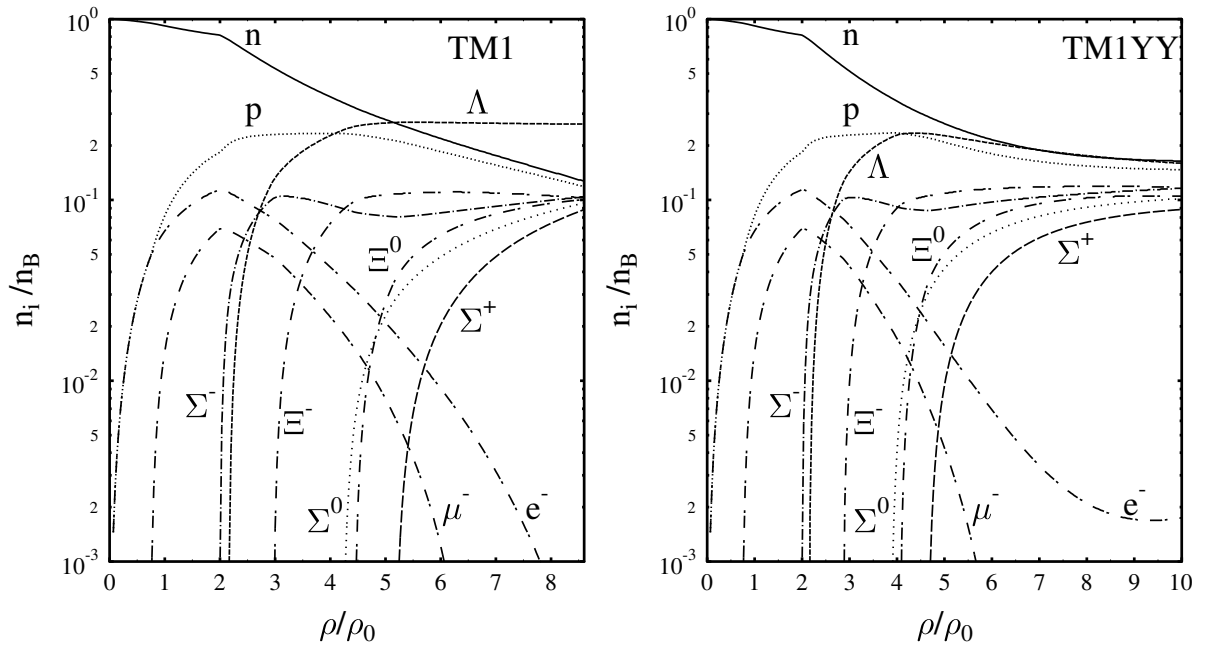


Abbildung 3.17: Relative Teilchenzusammensetzung in Abhängigkeit der baryonischen Dichte  $\rho/\rho_0$ .

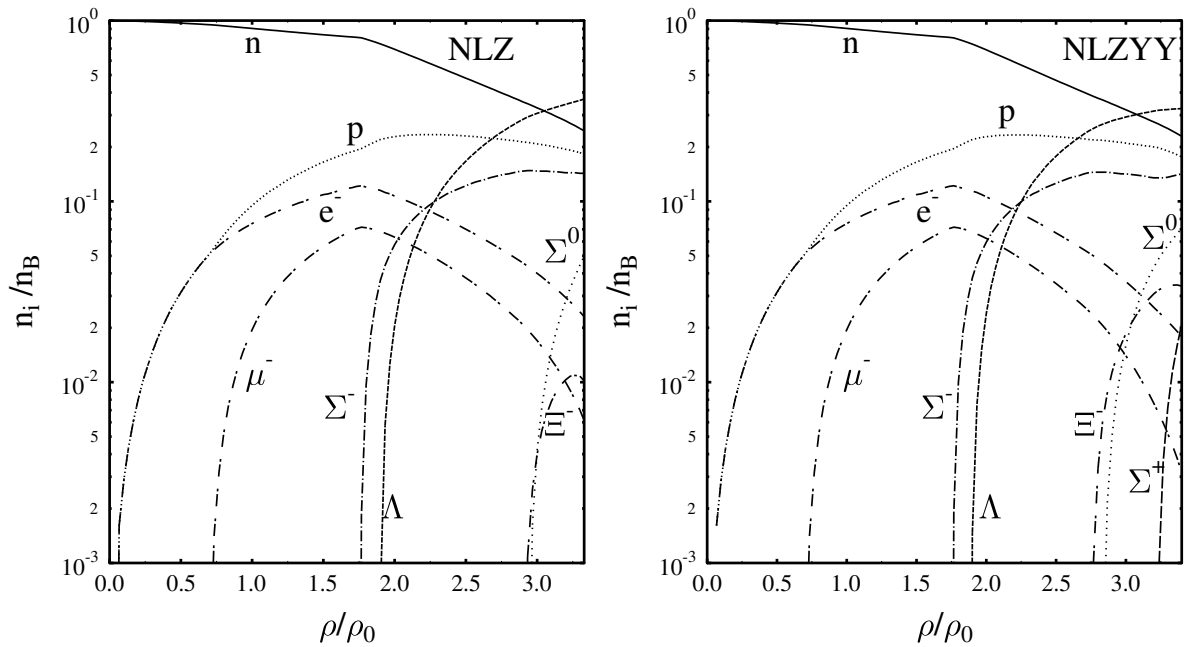


Abbildung 3.18: Relative Teilchenzusammensetzung in Abhängigkeit der baryonischen Dichte  $\rho/\rho_0$ .

Die makroskopischen Sterneigenschaften ergeben sich wieder durch Einsetzen der Zustandsgleichung in die TOV-Gleichungen. In Abb. 3.19 sind die Massen  $M$  der Neutronensterne als Funktion ihrer zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  dargestellt. Die NLZ-Modelle (NLZ, NLZYY) erreichen die kritische Dichte, bei der negative effektive Nukleonenmassen entstehen, bevor sie ihre Maximalmasse erreichen können, so dass wir an diesem Punkt die Berechnungen stoppten (die jeweiligen Punkte in Abb. 3.19 sind mit einem  $\times$  gekennzeichnet).

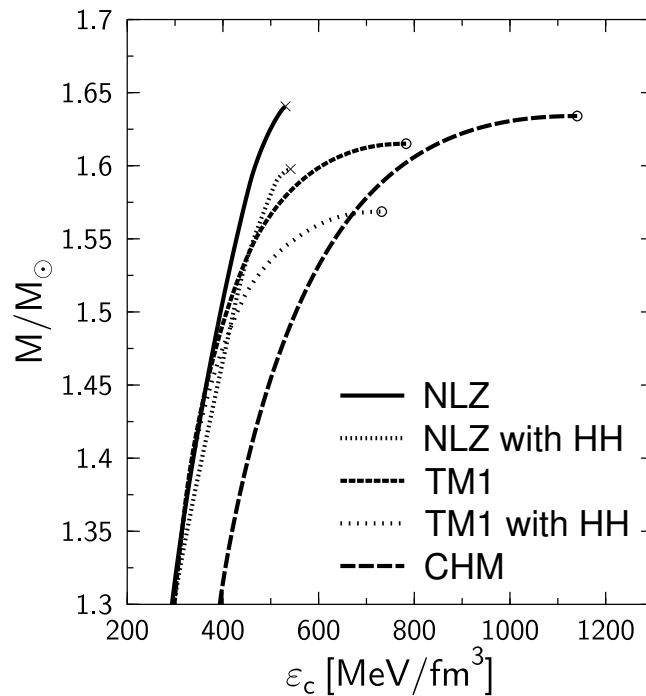


Abbildung 3.19: Gravitative Masse  $M$  als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$ .

In allen Modellen bewirkt die Miteinbeziehung der Hyperonen-Hyperonen Wechselwirkung einen niedrigeren Wert der maximalen Masse, da ein 'softening' der Zustandsgleichung stattfindet (siehe Abb. 3.13). Die in den Modellen vorhergesagten maximalen Massen liegen eng beieinander ( $1.56 M_\odot \leq M \leq 1.65 M_\odot$ ) und beschreiben alle die bekannten Pulsarmassen gut. Auffällig ist, dass das CHM, im Vergleich zu den anderen Modellen weit höhere zentrale Energiedichten ermöglicht. Der Grund hierfür liegt in dem sehr

soften Verhalten der Zustandsgleichung des CHM bei Dichten  $\rho \leq 2.5 \rho_0$  die einen Großteil der Sternmaterie bestimmen (siehe Abb. 3.13).

In Abb. 3.20 ist der Radius der Neutronensterne in Abhängigkeit ihrer gravitativen Masse  $M$  aufgetragen. Man erkennt einen qualitativen Unterschied in den Vorhersagen des Radius zwischen dem CHM und den anderen Modellen. Die Neutronensternradien im CHM sind ca. 2 km kleiner als in den anderen Modellen. Der Grund liegt auch hier in dem softeren Verhalten der Zustandsgleichung des CHM bei Dichten  $\rho \leq 2.5 \rho_0$ ; die Gravitationskraft kann im CHM den Stern mehr zusammendrücken.

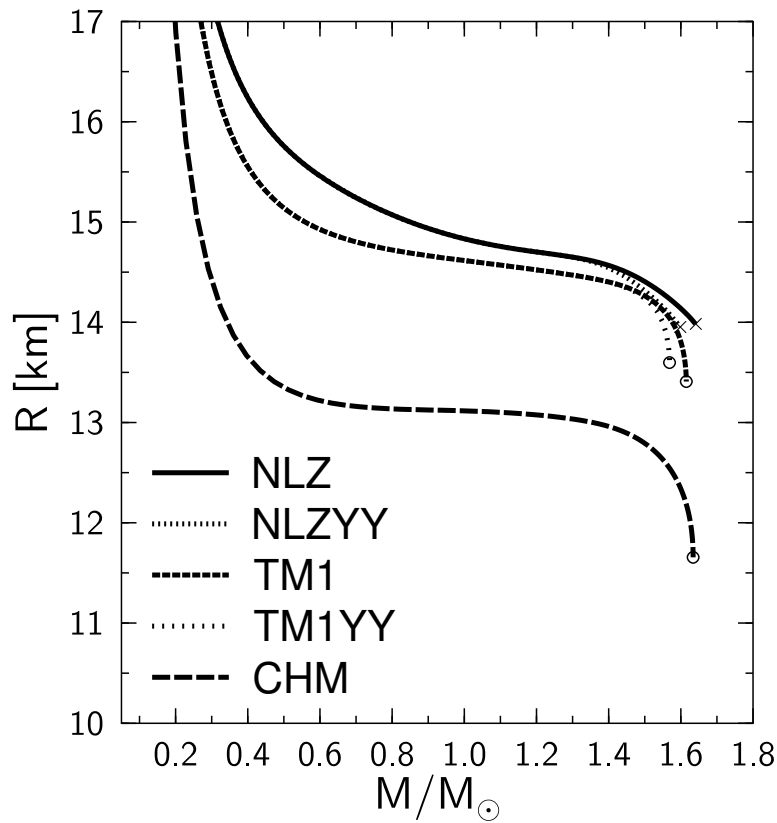


Abbildung 3.20: Sternradius  $R$  als Funktion der gravitativen Masse  $M$ .

## 3.2 Quarksterne

### Eigenschaften von seltsamen Quark Sternen im Nambu–Jona-Lasinio (NJL) Modell

Die direkte Simulation der fundamentale Wechselwirkung zwischen Quarks durch den Austausch von Gluonen und deren Anwendung auf kompakte Sterne ist derzeit nicht möglich (siehe Kapitel 1), so dass es auch hier nötig ist effektive, QCD-ähnliche Theorien zu konstruieren oder auf perturbative Ansätze auszuweichen. Die fundamentalen fermionischen Teilchen in all diesen effektiven Quarkmaterie-Theorien sind nicht wie im chiralen Modell die Hadronen, sondern die Quarks. Der hauptsächliche Unterschied zwischen den einzelnen Quarkmaterie-Theorien (NJL, ENJL, MIT-Bag, QMF, QMC) besteht in der Art und Weise, wie diese die Wechselwirkung zwischen den Quarks simulieren. Im folgenden werden Quarkmaterie Eigenschaften und Quark Sterne<sup>12</sup> im NJL und im erweiterten NJL (ENJL) Modell beschrieben und mit Resultaten von anderen Modellen und astrophysikalischen Observablen verglichen.

#### Beschreibung von Quarkstern Materie im NJL Modell

Die  $SU(3)_L * SU(3)_R$  - Flavour Version des NJL Modells [56, 57, 58] stellt ein interessantes effektives Modell der starken Wechselwirkung dar, da es einerseits dieselben Symmetrien wie die QCD aufweist und es andererseits gelang mit Hilfe dieses Modells hadronische Eigenschaften im seltsamen und nichtseltsamen Sektor zu beschreiben [59, 60]. Im NJL Modell konnte im chiralen Limes ( $m_u = m_d = m_s = 0$ ) gezeigt werden, dass oberhalb einer kritischen Temperatur von 200 MeV die chirale Symmetrie restauriert wird [60]. Des weiteren konnte man erfolgreich Phasenübergänge in dichter Materie [61, 62, 63] und multiple Teilchenzustände [64, 65, 66, 67] beschreiben. In den letzten Jahren wurde das NJL Modell auch auf ladungsneutrale Quarkstern Materie im  $\beta$ -Gleichgewicht ausgedehnt und die resultierenden Quarkstern Eigenschaften berechnet [68, 69]. Neben der simplen  $SU(2)$  Version wurden auch Berechnungen in erweiterten  $SU(3)$  Versionen unter Einbeziehung von

---

<sup>12</sup>Besser 'reine' Quark Sterne; d.h. kompakte Sterne die allein aus einer Quark-(Gluon)-Plasma Phase zusammengesetzt sind und keine hadronischen Teilchen beinhalten.

4-Fermion Vektorboson Austausch gemacht.

Im folgenden soll die erweiterte  $SU(3)_L * SU(3)_R$  - Flavour Version des NJL Modells dargestellt werden, die neben der skalaren Wechselwirkung eine vektorielle 4-Fermion Wechselwirkung beinhaltet. Die Lagrangedichte besitzt die folgende Gestalt<sup>13</sup> [30]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \underbrace{\bar{\psi} (i \not{\partial} - \hat{m}_0) \psi}_{\text{Kinetische und Massenbeiträge}} + G_S \underbrace{\sum_{j=0}^8 \left[ \left( \bar{\psi} \frac{\lambda_j}{2} \psi \right)^2 + \left( \bar{\psi} \frac{i\gamma_5 \lambda_j}{2} \psi \right)^2 \right]}_{\text{Skalare Wechselwirkung}} \\
& - G_V \underbrace{\sum_{j=0}^8 \left[ \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\lambda_j}{2} \psi \right)^2 + \left( \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{\gamma_5 \lambda_j}{2} \psi \right)^2 \right]}_{\text{Vektorielle Wechselwirkung}} \\
& - K \underbrace{[\det_f (\bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi) + \det_f (\bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi)]}_{\text{Flavour Mischterme}} + \underbrace{\mathcal{L}_L}_{\text{Leptonische Beiträge}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Die Quarkzustandspinoren  $\psi \equiv \psi_{Aa}^f$  sind vektorielle Größen in drei unterschiedlichen elementaren Räumen (Spinorraum, Farbraum und Flavourraum). Sie sind einerseits Diracspinoren im Teilchen-Antiteilchen Spinorraum ( $A = 1..4$ ), andererseits tragen sie Farbe ( $a = \text{rot, gelb, blau}$ ) und treten in drei Flavourformen ( $f = u, d, s$ ) auf. Sowohl die Gamma-Matrizen  $\gamma^\mu \equiv \gamma^\mu_{A^B}$ ,  $\gamma^5 \equiv \gamma^5_{A^B}$  als auch die partielle Ableitung  $\not{\partial} \equiv \not{\partial}_{A^B} := \partial_\mu \gamma^\mu_{A^B}$  stellen  $4 \times 4$ -Matrizen im Spinorraum dar. Die Massenmatrix  $\hat{m}_0 = \text{diag}(m_{0u}, m_{0d}, m_{0s})$  ist eine Diagonalmatrix im Flavourraum, die die nackten Massen der Quarks festlegt. Die  $SU(3)$  Gell-Mann Matrizen  $\lambda_j \equiv \lambda_{ja}{}^b$  ( $j = 1 \dots 8$ ) sind  $3 \times 3$ -Matrizen im Farbraum. Die auftretenden Parameter  $G_S$ ,  $G_V$  und  $K$  sind die Kopplungskonstanten der skalaren, vektoriellen und flavouraustausch Wechselwirkung. Der letzte Term in Gleichung 3.19 beschreibt die leptonischen Beiträge. In den folgenden Rechnungen werden lediglich Elektronen miteinbezogen. Diese werden durch ein ideales Gas beschrieben das sich aus masselosen fermionischen Teilchen zusammensetzt. Muonen und Tauonen werden vernachlässigt, da der Maximalwert des chemischen Potentials der Elektronen  $\mu_e$  deren Massen nicht signifikant übersteigt, so dass ihre Beimischungen in der Quarksternmaterie gering sein werden. In Approximation

---

<sup>13</sup> $\hbar = c = 1$



setzen wir somit

$$\mathcal{L}_L \approx \mathcal{L}_e = \bar{\psi}_e i \not{\partial} \psi_e, \quad (3.20)$$

wobei  $\psi_e$  der Zustandsspinor der Elektronen ist.

Summiert man über die Farbindices und benutzt die Näherungen der Mean Field Approximation so gelangt man zur folgenden Darstellung der Lagrangedichte (siehe [30])

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_f \bar{\psi}_f (i \not{\partial} - m_f - \gamma_0 G_V \rho_f) \psi_f - \frac{G_S}{2} \sum_f \rho_{Sf}^2 \\ &+ \frac{G_V}{2} \sum_f \rho_f^2 + 4K \prod_f \rho_{Sf} + \mathcal{L}_L. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die effektiven Massen  $m_f$  der konstituierenden Quarks erhält man durch das gekoppelte System von Gap-Gleichungen

$$m_f = m_{0f} - G_S \rho_{Sf} + 2K \prod_{f' \neq f} \rho_{Sf'}, \quad (3.22)$$

wobei  $m_{0f}$  die nackten (engl: bare, current) Massen der Quarks mit Flavour  $f$  darstellen.

Die Einteilchenenergien der Quarks sind gegeben durch

$$E_f(p) = \sqrt{m_f^2 + p^2}. \quad (3.23)$$

Die chiralen Kondensate der Quarks  $\langle \bar{\psi}_f \psi_f \rangle$ , die durch die skalaren Dichten  $\rho_{Sf}$  gegeben sind, besetzen sowohl die positiven als auch die negativen Energieniveaus. Da die nicht begrenzten negativen Antiteilchenzustände des Dirac-Sees divergente Beiträge liefern würden, ist es nötig diese ab einem gewissen Quarkimpuls  $\Lambda = p_f^{Cutoff}$  abzuschneiden. Summationen bzw. Integrationen im Impulsraum werden so durch diesen "Cut-Off" Parameter  $\Lambda$  limitiert. Die skalare Dichte für homogene Quarkmaterie bei  $T = 0$  berechnet sich somit durch den folgenden Ausdruck [30]

$$\rho_{Sf} = -\frac{\nu m_f}{2\pi^2} \int_{p_{Ff}}^{\Lambda} \frac{dp p^2}{E_f(p)} = \frac{\nu m_f}{4\pi^2} \left[ p_{Ff}^2 \Phi\left(\frac{m_f}{p_{Ff}}\right) - \Lambda^2 \Phi\left(\frac{m_f}{\Lambda}\right) \right], \quad (3.24)$$

wobei  $\nu = 6$  der Spin-Farb Entartungsfaktor der Quarks ist. Der Fermi Impuls der Quarks mit Flavour  $f$  ist gegeben durch  $p_{Ff} = (\frac{6\pi^2}{\nu}\rho_f)^{1/3}$  und die in Gleichung 3.24 auftretende Funktion  $\Phi(x)$  ist wie folgt definiert

$$\Phi(x) = \sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} - 1}. \quad (3.25)$$

Die auftretenden Modell Parameter  $m_{0f}, G_S, K, \Lambda$  wurden so fixiert, dass die Massen der  $\pi, K$  und  $\eta'$ -Mesonen und die Pionen Zerfallskonstante  $f_\pi$  den experimentellen Werten entsprechen. Der so erzielte Parametersatz lautet (näheres siehe [70]):

$$\begin{aligned} m_{0u} = m_{0d} &= 5.5 \text{ MeV}, & m_{0s} &= 140.7 \text{ MeV}, \\ G_S &= 20.23 \text{ GeV}^{-2}, & K &= 155.9 \text{ GeV}^{-5}, & \Lambda &= 0.6023 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Zur Existenz und Größe der vektoriellen Wechselwirkung im NJL Modell gibt es in der Literatur unterschiedliche Auffassungen. Während einige Autoren diese Art der Wechselwirkung vollkommen vernachlässigen [68, 69] wird sie in anderen Arbeiten berücksichtigt und es wurde versucht die Kopplungskonstante  $G_V$  der vektoriellen Wechselwirkung durch Anfitting an die Vektormesonmassen [71] und die axiale Ladung  $g_A$  des Nukleons [59] zu begründen. Die Resultate der letzteren Arbeiten legen nahe, dass die Konstanten der skalaren und vektoriellen Wechselwirkung von gleicher Größenordnung sein sollten ( $\xi \equiv G_V/G_S \approx 1$ ). Aufgrund dieser sowohl theoretischen als auch experimentellen Unsicherheit in der Größe der vektoriellen Kopplung variierten wir den Parameter  $\xi$  im Intervall  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Aufgrund der Mischung der pseudo-skalaren und longitudinalen-axialen Vektor-Wechselwirkung sind die Massen und Zerfallskonstanten der pseudoskalaren Mesonen ( $\pi, K, \eta, \dots$ ) abhängig von der Größe der vektoriellen Wechselwirkung. Da der verwendete Parametersatz (3.27) bei verschwindender Vektorkopplung an die experimentell bekannten Teilchengrößen angefitting wurde, gilt dies exakt nur bei  $\xi = 0$ . Die Abhängigkeit der Pionenmasse  $m_\pi$  und der Zerfallskonstanten  $f_\pi$  von der Größe der relativen vektoriellen Kopplungskonstanten  $\xi$  ist in Abb. 3.21 dargestellt.

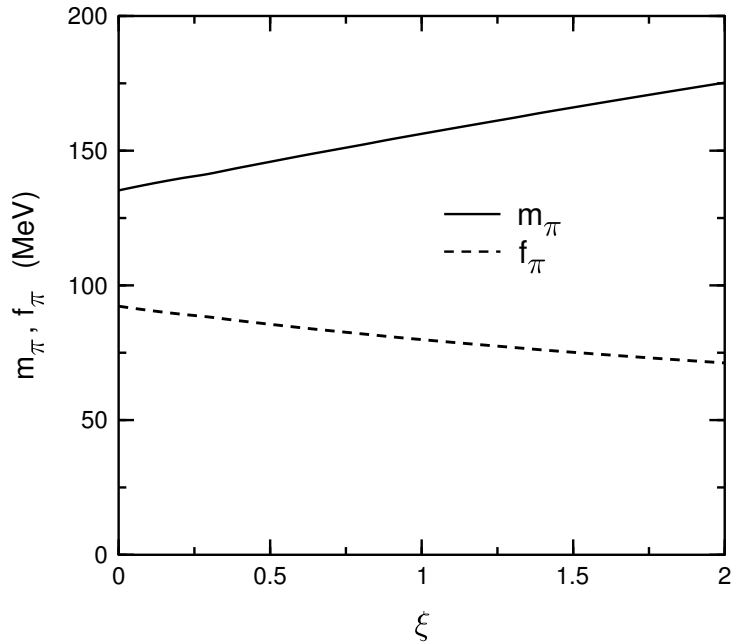


Abbildung 3.21: Die durchgezogene Kurve kennzeichnet die Masse  $m_\pi$  des Pions im Vakuum als Funktion der relativen Vektorkopplungskonstante  $\xi := G_V/G_S$ . Die gestrichelte Kurve beschreibt die Zerfallskonstante  $f_\pi$  des Pions.

Man erkennt, dass sich  $m_\pi$  und  $f_\pi$  bei festgehaltenem Parametersatz (3.27) um ca. 10 Prozent ändern, wenn man  $\xi$  von 0 bis 1 erhöht. Da wir in dieser Arbeit die Auswirkungen der Vektorkopplung auf die Eigenschaften von kompakten Sternen untersuchen wollen, und nach unserer Ansicht eine ständige Parameterveränderung bei wechselndem  $\xi$  den Vergleich unübersichtlicher gemacht hätte, entschieden wir uns dafür, bei allen Rechnungen den in (3.27) angegebenen Parametersatz beizubehalten. Da der Parameter  $\xi$  Auswirkungen auf die Zustandsgleichung hat, war zu erwarten, dass sich die Eigenschaften der Quarksterne ebenfalls sensitiv zu diesem Parameter verhalten.

### Zustandsgleichung und Teilchenkompositionen

Genauso wie in Neutronensternen Teilchenumwandlungen für Hadronen möglich sind, geschieht dies auch für Quarks im Inneren der Quarksterne. Quarkmaterie ist in Bezug auf die starke und schwache Wechselwirkung im chemischen Gleichgewicht. Unter der Annahme einer "geringen" Temperatur des

Sterns ( $T < \text{MeV}$ ) können die bei Teilchenumwandlungen entstehenden Neutrinos dem Stern ungehindert entkommen, so dass  $\mu_\nu \equiv 0$  ist. Die chemischen Potentiale  $\mu_i$  ( $i=u,d,s,e$ ) der im Stern existierenden fundamentalen Teilchen erfüllen im chemischen  $\beta$ -Gleichgewicht die folgenden Relationen

$$\mu_d = \mu_s = \mu_u + \mu_e \quad . \quad (3.27)$$

Die chemischen Potentiale sind im allgemeinen gegeben durch

$$\mu_i = B_i \mu_B + S_i \mu_S + Q_i \mu_Q, \quad (3.28)$$

wobei  $B_i$  die Barionenzahl,  $S_i$  die Seltsamkeit und  $Q_i$  die Ladung des jeweiligen Teilchens darstellt. Wie schon bei Neutronensternen besprochen, ist die Seltsamkeit in kompakten Sternen keine Erhaltungsgröße, so dass man  $\mu_S \equiv 0$  setzt. Die Gleichung 3.27 ist mit  $\mu_Q = -\mu_e$  somit automatisch erfüllt. Die chemischen Potentiale im NJL Modell bei  $T \equiv 0$  lauten explizit

$$\mu_f = \sqrt{m_f^2 + p_{Ff}^2} + G_V \rho_f, \quad (3.29)$$

$$\mu_e \simeq p_{Fe} = (3\pi^2 \rho_e)^{1/3}, \quad (3.30)$$

wobei  $\rho_e$  die Teilchendichte der Elektronen,  $f = u, d, s$  der flavour Index und  $p_F$  der Fermiimpuls des jeweiligen Teilchens ist.

Neben der Bedingung des chemischen  $\beta$ -Gleichgewichts wird die Ladungsneutralität der Materie gefordert

$$\rho_Q = \sum_i Q_i \rho_i = \frac{1}{3} (2\rho_u - \rho_d - \rho_s) - \rho_e \equiv 0 \quad . \quad (3.31)$$

Die Zeit-Zeit Komponente  $T^{00}$  des kanonischen Energieimpulstensors  $T^{\mu\nu}$  stellt die Energiedichte  $\epsilon$  des Systems dar und berechnet sich aus der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  wie folgt [2]

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{|\nu}} \mathcal{A}^{|\mu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad , \quad (3.32)$$

wobei  $\mathcal{A}$  ein "Symbolfeld" darstellt, dass alle im System vorhandenen Teilchen- und Wechselwirkungsfelder symbolisiert. Bei Temperatur  $T \equiv 0$  besitzt die

Energiedichte explizit die folgende Gestalt

$$T^{00} = \epsilon = \sum_f \left[ \frac{\nu}{2\pi^2} \int_{p_{Ff}}^{\Lambda} dp p^2 E_f(p) + \frac{G_S}{2} \rho_{Sf}^2 + \frac{G_V}{2} \rho_f^2 \right] - 4K \prod_f \rho_{Sf} + \frac{p_{Fe}^4}{4\pi^2} - \epsilon_{\text{vac}}, \quad (3.33)$$

wobei  $\epsilon_{\text{vac}}$  die Energiedichte des physikalischen Vakuums ( $p_{Fi} = 0$ ) auf den Wert Null setzt.

Der Druck des Systems  $P$  und die entsprechende Barionendichte  $\rho_B$  ist gegeben durch

$$P = \sum_i \mu_i \rho_i - \epsilon, \quad (3.34)$$

$$\rho_B = \sum_i B_i \rho_i = \frac{1}{3} (\rho_u + \rho_d + \rho_s). \quad (3.35)$$

Die Zustandsgleichung  $P(\rho_B)$  bzw.  $P(\epsilon)$  wurde nun unter Berücksichtigung des  $\beta$ -Gleichgewichts und der Ladungsneutralität numerisch berechnet. In den Abbildungen 3.22 und 3.23 ist die Zustandsgleichung für ladungsneutrale Quarkmaterie im NJL Model für drei verschiedene Vektorkopplungs-Werte ( $\xi = 0, 0.5, 1$ ) aufgetragen. Für den Fall verschwindender Vektorkopplung  $\xi = 0$  ist die Materie in dem Dichtebereich  $0 < \rho_B < 2.55 \rho_0$  selbstgebunden, was man in den Abbildungen anhand der negativen Drücke erkennt. Das lokale Minimum der Zustandsgleichung ( $P'(\rho_B^{\text{min}}) = 0, P''(\rho_B^{\text{min}}) > 0$ ) entsteht bei einer Barionendichte ( $\rho_B^{\text{min}} = 1.92 \rho_0, P(\rho_B^{\text{min}}) = -10.3 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ ). Kompakte Sterne, deren Materie einer solchen Zustandsgleichung unterliegt, benötigen für ihre kompakte Gebundenheit nur teilweise die Gravitationskraft; sie sind teilweise selbst gebunden. Erhöht man die Vektorkopplung, so verschiebt sich das lokale Minimum zu kleineren Barionendichten hin. Die negativen Drücke und somit auch der selbstgebundene Charakter der Materie verschwinden vollständig, wenn die vektorielle Kopplung den folgenden Wert übersteigt  $\xi \geq 0.4$ . Die dargestellten Zustandsgleichungen  $\xi = 0.5$  und  $\xi = 1$  haben eine wesentlich steifere Zustandsgleichung und besitzen keine negativen Drücke.

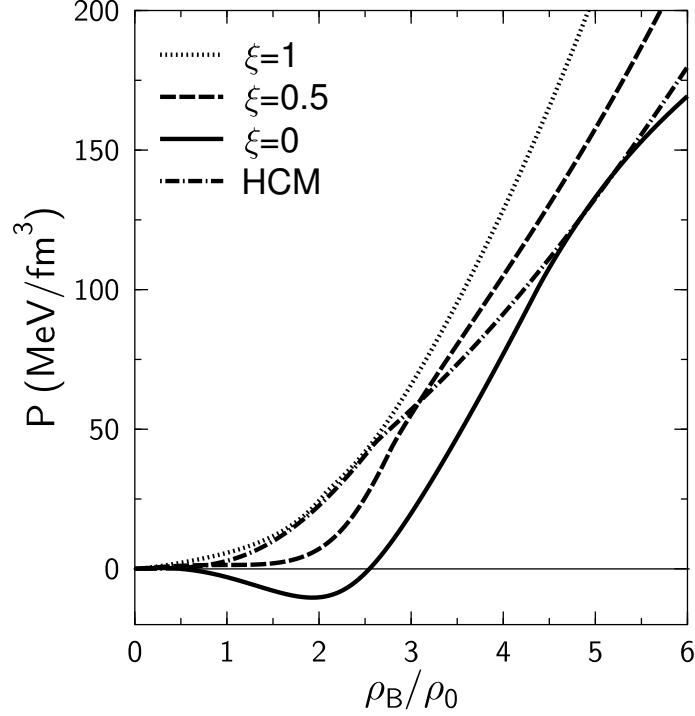


Abbildung 3.22: Zustandsgleichung: Druck  $P$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$  für drei unterschiedliche Größen der relativen Vektorkopplung  $\xi$ . Die 'gestrichen-gepunktete' Kurve beschreibt die Zustandsgleichung von Neutronensternmaterie im hadronischen chiralen Modell (HCM).

Vergleicht man die Zustandsgleichungen des NJL Modells mit dem Hadronischen Chiralen Modell (HCM (mit Hyperonen)) (siehe Abb. 3.22 und 3.23) so erkennt man, dass sich die Zustandsgleichung  $\xi = 0$  von der des chiralen Modells für Dichten  $\rho_B \leq 4\rho_0$  stark unterscheidet.

Im Falle einer Selbstgebundenheit der Materie ( $\xi \leq 0.4$ ) können kleine selbstgebundene Tropfen von Quarkmaterie im mechanischen Gleichgewicht mit dem Vakuum auch ohne Gravitationskraft existieren. In den Rechnungen zeigte sich, dass auch für höhere Vektorkopplungen  $0.4 < \xi \leq 0.65$  ein Flüssigkeits-Gas Phasenübergang 1.Ordnung erwartbar ist. Ähnliche Phasenübergänge wurden bereits in den folgenden Artikeln diskutiert [67, 72]. Wir verwendeten in dem gesamten Phasenübergangsbereich  $0 < \xi \leq 0.65$  eine Gibbskonstruktion (näheres zur Gibbskonstruktion siehe später) beste-

hend aus einer selbstgebundenen Flüssigkeitsphase (Phase 1) und dem quasifreien Quarkgas (Phase 2).

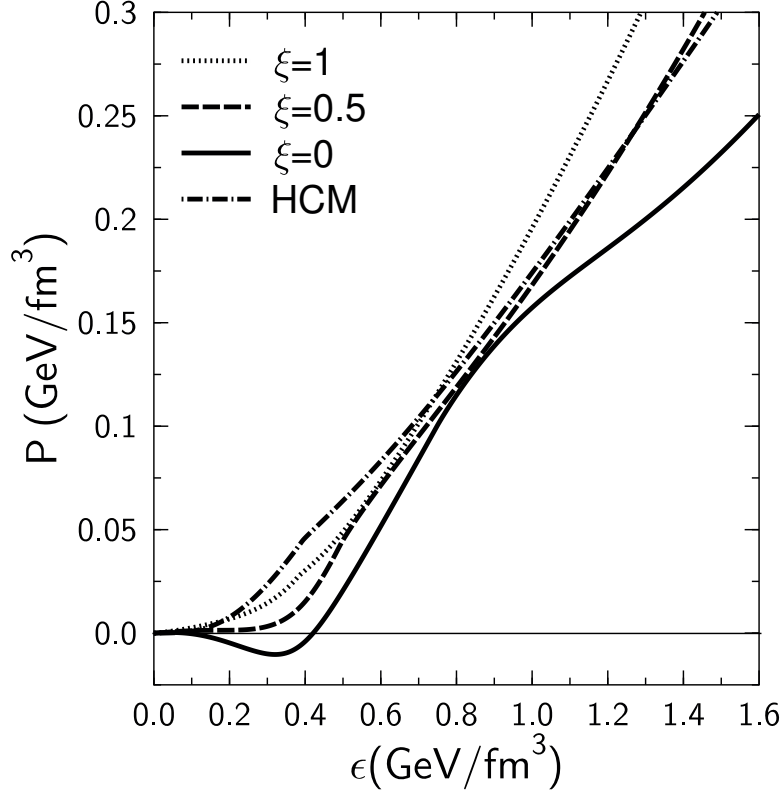


Abbildung 3.23: Zustandsgleichung: Druck  $P$  als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$ . Bedeutung der unterschiedlichen Kurven wie in Abb. 3.22.

Im Phasenübergangsbereich koexistieren beide Phasen nebeneinander und können im allgemeinen einzeln Ladung tragen, wobei die Gesamtladung verschwindet. Die Gesamtladung beider Phasen und deren gesamte Barionendichte sind wie folgt definiert

$$\chi \rho_Q^{(1)} + (1 - \chi) \rho_Q^{(2)} = 0 \quad (3.36)$$

$$\rho_B = \chi \rho_B^{(1)} + (1 - \chi) \rho_B^{(2)}, \quad (3.37)$$

wobei  $\chi$  der Volumenanteil der dichteren Flüssigkeitsphase (Phase 1) ist und  $\rho_B^{(k)}$  und  $\rho_Q^{(k)}$  ( $k=1,2$ ) die Barionen und Ladungsdichte der einzelnen Phasen

beschreibt. Die Gibbs'schen Phasenbedingungen im Koexistenzgebiet lauten:

$$P^{(1)} = P^{(2)}, \quad (3.38)$$

$$\mu_B^{(1)} = \mu_B^{(2)}, \quad (3.39)$$

$$\mu_Q^{(1)} = \mu_Q^{(2)} \quad (3.40)$$

In den folgenden Rechnungen vernachlässigten wir Energie- und Druckkorrekturen die durch die Oberflächenspannung der Flüssigkeitsphase, oder den Coulombeffekten aufgrund der Einzelladungen der Phasen, resultieren. Die Zustandsgleichung und somit die generellen Eigenschaften der resultierenden kompakten Sterne werden durch diese Vereinfachung nur unwesentlich geändert (siehe [30]). Diese vernachlässigten Effekte haben jedoch enormen Einfluss auf die geometrische Struktur der gemischten Phase (siehe [15, 73]) und die Teilchen-Transport Eigenschaften innerhalb der Sterne.

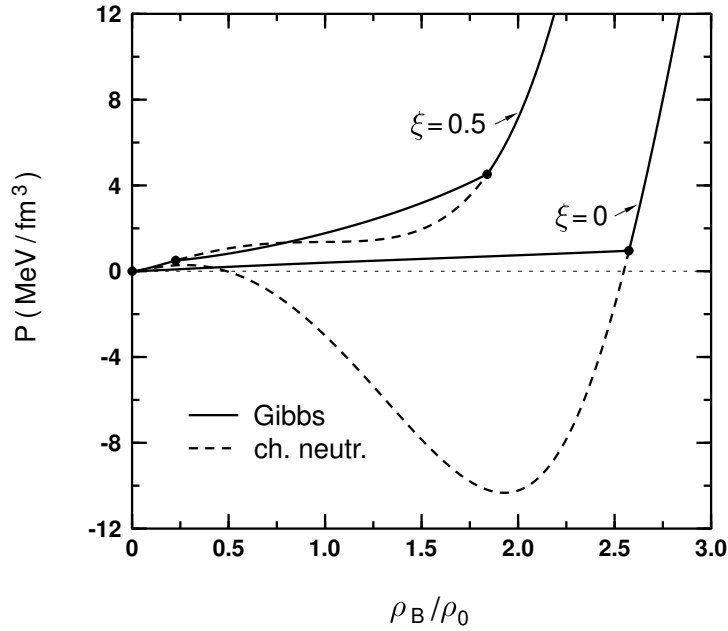


Abbildung 3.24: Druck  $P$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$  für zwei unterschiedliche Größen der relativen Vektorkopplung  $\xi$ . Die durchgezogenen Kurven stellen die Zustandsgleichung dar, falls ein Flüssigkeits-Gas Phasenübergang in die Rechnungen durch eine Gibbs-Konstruktion miteinbezogen wird. Die gestrichelten Kurven stellen Rechnungen ohne eine Miteinbeziehung einer gemischten Flüssigkeits-Gas Phase dar.



Abb. 3.24 zeigt die Zustandsgleichung ( $\xi = 0, 0.5$ ) mit und ohne Gibbskonstruktion. Die durchgezogenen Kurven beschreiben die Zustandsgleichung nach Gibbskonstruktion, wohingegen die unterbrochenen Kurven die Zustandsgleichung der in Abb. 3.22 und 3.23 dargestellten Resultate ohne gemischte Phase darstellen. Durch die Gibbskonstruktion verschwinden die negativen Drücke bei  $\xi = 0$ , so dass der Druck im Koexistenzgebiet "so gut wie" linear ansteigt.

Die relativen Teilchenhäufigkeiten  $\rho_i/\rho_B$  als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B$  sind in Abb. 3.25 dargestellt.

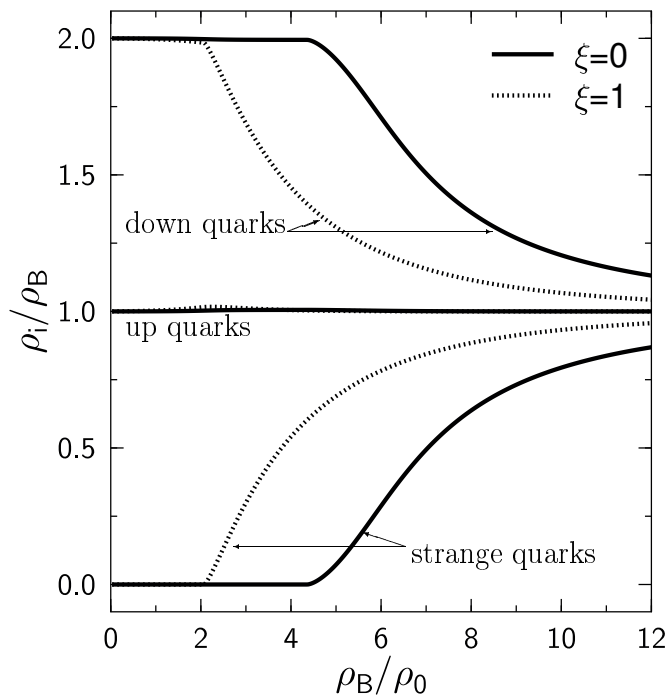


Abbildung 3.25: Relative Quarkdichten  $\rho_f/\rho_B$  ( $f = u, d, s$ ) als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$  für zwei unterschiedliche Größen der relativen Vektorkopplung  $\xi$ .

Bei  $\xi = 0$  ist die Materie für Dichten  $\rho_B \leq 4.3 \rho_0$  lediglich aus up und down Quarks zusammengesetzt (mit geringen Beimischungen von Elektronen), wobei auf ein up Quark ca. zwei down Quarks kommen. Bei höheren Dichten ( $\rho_B > 4.3 \rho_0$ ) ist es für das System energetisch günstiger den "Fermipotf" der massiven s-Quarks zu öffnen, so dass bei zunehmender Dichte im-

mer mehr d-Quarks in s-Quarks zerfallen. Aufgrund des positiven, vektoriell bedingten Zusatzterms in den chemischen Potentialen  $\mu_i$  der Quarks wird es bei nichtverschwindender vektorieller Kopplung ( $\xi > 0$ ) schon bei geringeren Barionendichten möglich Seltsamkeit im System entstehen zu lassen. Bei  $\xi = 1$  treten seltsame Quarks schon bei Barionendichten  $\rho_B \geq 2\rho_0$  auf.

Der Grad der Seltsamkeit der Materie  $r_s$  ist durch den folgenden Ausdruck definiert:

$$r_s = \frac{|S|}{3B} = \frac{\rho_s}{\rho_u + \rho_d + \rho_s} \quad (3.41)$$

### Eigenschaften der seltsamen Quark Sterne

Um die Eigenschaften von Quarksternen zu berechnen nehmen wir zunächst an, dass der Stern sphärische Symmetrie hat, nichtrotiert und auch keine radialen Oszillationen aufweist. Außerhalb des Sterns benutzen wir somit die Schwarzschildmetrik, innerhalb die TOV-Gleichungen (siehe Kapitel 2). Im Parameterbereich  $0 \leq \xi \leq 0.65$  verwenden wir die NJL-Zustandsgleichung mit Gibbskonstruktion, bei höheren Vektorkopplungen war dies nicht nötig. Es zeigte sich jedoch in den Rechnungen, dass die resultierenden Eigenschaften der Quarksterne nur gering davon abhängen, ob eine Gibbskonstruktion durchgeführt wurde oder nicht.<sup>14</sup> Für sehr geringe Dichten am Rand des Sterns ( $\epsilon < \epsilon_{drip} = 4.3 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ) verwendeten wir die Krustenzustandsgleichung von Baym, Pethick und Sutherland (siehe [49]).

In Abb. 3.26 ist die gravitative Gesamtmasse  $M$  der Quarksterne als Funktion der zentralen barionischen Dichte  $\rho_c$  für  $\xi = 0, 0.5, 1$  aufgetragen und in Beziehung zu denen im chiralen Model (HCM) berechneten Neutronsterndaten aufgetragen.

---

<sup>14</sup>Der Grund liegt einerseits daran, dass die Gibbskonstruktion nur bei kleinen  $\epsilon$  zum Tragen kommt, und andererseits bei selbstgebundenen Zustandsgleichungen ( $\xi < 0.3$ ) die Gravitationskraft im Stern selbst eine maxwellartige Konstruktion durchführt, die der Gibbskonstruktion ähnelt, und durch einen Dichtesprung im Stern realisiert wird.

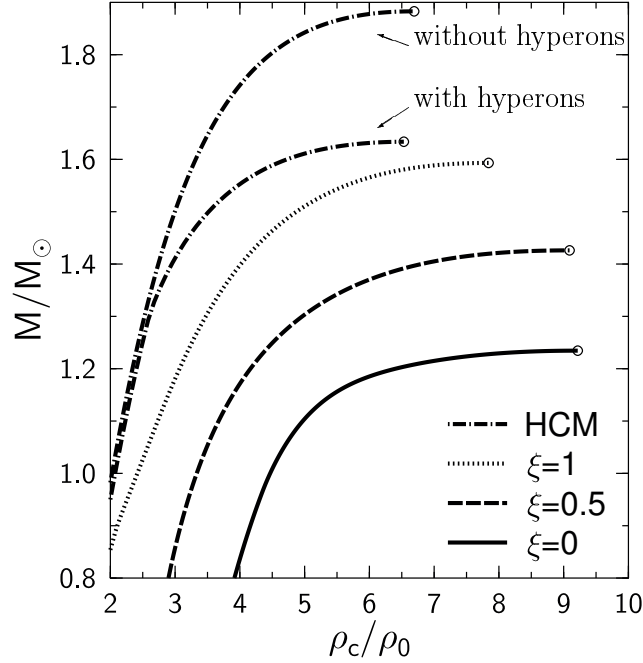


Abbildung 3.26: Gravitative Masse  $M/M_\odot$  in Abhängigkeit von der zentralen barionischen Dichte  $\rho_c/\rho_0$ . Die beiden oberen Kurven beschreiben Neutronensterne im chiralen Modell (mit und ohne Hyperonen); die drei unteren Kurven stellen Quarksterne im NJL-Modell dar, wobei der Parameter  $\xi$  variiert wurde.

Man erkennt deutlich, dass bei zunehmender Vektorkopplung die maximal möglichen Massen der Quarksterne ansteigen. Während bei  $\xi = 0$  nur Quarksterne unterhalb einer Masse von  $1.23M_\odot$  möglich sind, sind bei  $\xi = 0.5$  schon Massen von  $1.43M_\odot$  und bei  $\xi = 1$  sogar von  $1.6M_\odot$  möglich. Die Obergrenze der maximal möglichen barionischen Dichte sinkt dagegen bei zunehmendem  $\xi$  ( $\xi = 0 : \rho_c^{max} = 9.23\rho_0$ ,  $\xi = 0.5 : \rho_c^{max} = 9.09\rho_0$ ,  $\xi = 1 : \rho_c^{max} = 7.84\rho_0$ ).

Abb. 3.27 stellt den berechneten Quarksternradius als Funktion der gravitativen Masse dar. Bei verschwindender Vektorkopplung haben die Quarksterne den geringsten Radius  $7.4 \text{ km} \leq R \leq 8.5 \text{ km}$ . Aufgrund des selbstgebundenen Verhaltens der Zustandsgleichung (siehe Abb. 3.22 und 3.23) wird hier der kleinst mögliche Radius  $R^{min}$  nicht beim maximalen Massenstern  $M^{max} = 1.23M_\odot$ ,  $R^{M^{max}} = 8.4 \text{ km}$  erreicht, sondern bei einer vergleichsweise

geringen Masse ( $M^{R^{min}} = 0.23M_{\odot}$ ,  $R^{min} = 7.4$  km). Für noch kleinere Gesamtmassen bzw. noch kleinere zentrale Dichten nimmt die Ausdehnung der Kruste des Sterns extrem zu, so dass der Radius des Sterns enorm anwächst. Solche Sterne besitzen einen kleinen deconfineten Quarkkern umgeben von einer weit ausgebreiteten Kruste. Diese Kruste kann sich bis zu mehreren hundert Kilometer ausdehnen, so dass man sie als "Seltsame Zwerge" bezeichnet [15].

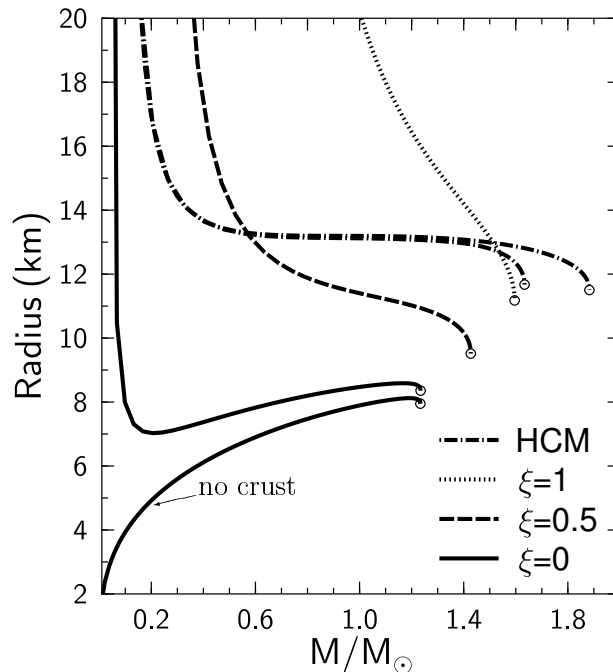


Abbildung 3.27: Sternradius  $R$  in Abhängigkeit der gravitative Masse  $M/M_{\odot}$ . Bedeutung der Kurven wie in Abb. 3.26. Die Kurve mit der Bezeichnung 'no crust' beschreibt das Verhalten nackter Quarksterne ohne Kruste ( $\xi = 0$ ).

Vernachlässigt man die Quarksternkruste, so wird die Untergrenze der Radiusbeschränkung aufgrund der Selbstgebundenheit der Materie vollständig aufgehoben (siehe Abb. 3.27 "no crust"). In solch einem Modell ist der Übergang von mikroskopisch selbstgebundener Quarkmaterie hin zu makroskopischen Quarksternen kontinuierlich; für kleine Radien gilt die Beziehung  $M \sim R^3$ . Bei ansteigender Vektorkopplungskonstante ( $\xi = 0.5, 1$ ) steigt neben der Masse auch der Radius des Sterns an. Bei  $\xi = 0.5$  sind alle Quarkster-

ne unterhalb eines minimalen Radius  $R^{min} = 9.5$  km instabil, bei  $\xi = 1$  wird diese Stabilitätsgrenze schon bei  $R^{min} = 11.2$  km erreicht. Vergleicht man die erzielten Resultate mit denen von Neutronensternen (siehe Abb. 3.27, HCM) so erkennt man, dass je größer man  $\xi$  in den Quarksternrechnungen wählt, desto mehr ähneln sich die Eigenschaften der Quarksterne denen von Neutronensternen. In Abb. 3.28 sind die Dichtenprofile der Maximalmassen-Sterne für  $\xi = 0, 0.5, 1$  im NJL Modell im Vergleich zu dem Dichteprofil des Maximalmassen-Sterns im HCM (mit Hyperonen) dargestellt.

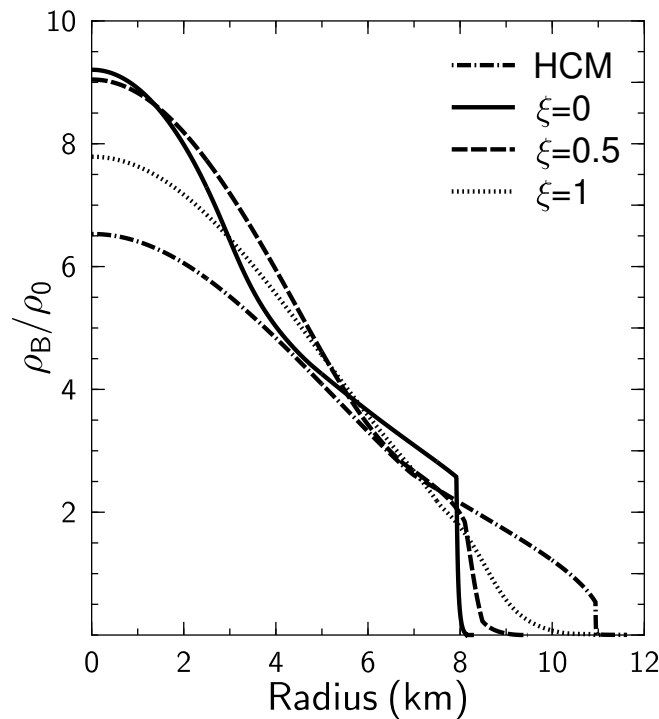


Abbildung 3.28: Profile der barionischen Dichte  $\rho_B(r)/\rho_0$  der 'maximalen Massen Sterne' im hadronischen chiralen Modell (mit Hyperonen) und im NJL-Quarkmodell ( $\xi = 0, 0.5, 1$ ).

Der kompakteste Stern ist der selbstgebundene Quarkstern mit  $\xi = 0$ . Die barionische Dichte dieses Stern besitzt im Zentrum einen Wert von  $\rho_B = 9.2 \rho_0$  und fällt am Sternrand sprunghaft ab<sup>15</sup>. Bei ansteigender Vek-

<sup>15</sup>Bei genauer Betrachtung besitzt dieser Dichtesprung kein diskontinuierliches Verhalten, sondern er stellt aufgrund der verwendeten Gibbskonstruktion ein kontinuierliches aber extrem schnelles Abfallen dar.

torkopplung tendieren die Quarksterne dazu weniger kompakt zu werden; ihre zentrale Dichte sinkt und ihr Radius nimmt zu. Aufgrund der Gibbs-konstruktion bei  $\xi = 0.5$  sinkt die barionische Dichte am Sternrand relativ schnell, weist jedoch im Gegensatz zu  $\xi = 0$  kein Sprung-ähnliches Verhalten auf. Bei dem Vergleich der Dichteprofile der Quarksterne mit dem Neutronensternmodell HCM stellen wir ebenfalls fest: Je größer  $\xi$  desto mehr gleichen sich die Eigenschaften der Quarksterne an Neutronenstern-Eigenschaften an.

Die Zusammensetzung der Quarksternmaterie im NJL Modell hängt ebenfalls signifikant von der Größe der Vektorkopplung ab.

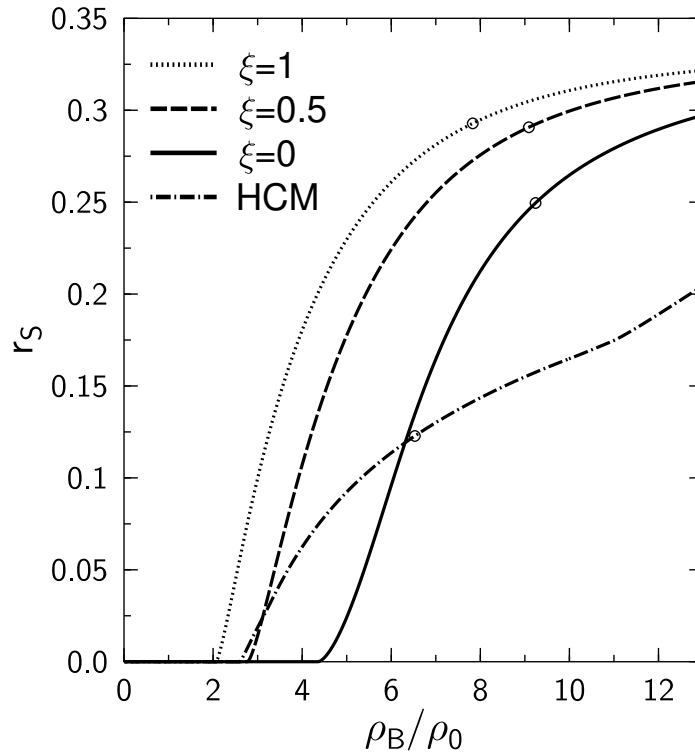


Abbildung 3.29: Seltsamkeitsverhältnis  $r_s$  im Sternzentrum als Funktion der barionischen Dichte  $\rho_B/\rho_0$  im NJL-Modell für drei unterschiedliche Werte von  $\xi$ . Die 'gestrichen-gepunktete' Kurve stellt  $r_s$  für das HCM dar. Die Kreise markieren die maximalen Sternmassen der jeweiligen Modelle.

In Abb. 3.29 ist das Seltsamkeitsverhältnis  $r_s$  (siehe Gleichung 3.41) als Funktion der barionischen Dichte für  $\xi = 0, 0.5, 1$  im NJL Modell darge-

stellt und mit dem HC-Modell verglichen. Wie bereits in Abb. 3.25 dargestellt erkennt man, dass die Grenzdichte des Erscheinens von seltsamen Quarks stark von dem Kopplungsparameter  $\xi$  abhängt. Erst bei sehr hohen Dichten ( $\rho_B \geq 13 \rho_0$ ) wird die Größe der Vektorkopplung unwichtig für den Wert des Seltsamkeitsverhältnisses  $r_s$ . Im Limes  $\rho_B \rightarrow \infty$  strebt  $r_s$  für alle möglichen Werte von  $\xi$  gegen  $1/3$ , was bedeutet, dass die Quarkmaterie zu gleichen Teilen aus up-, down- und strange Quarks zusammengesetzt ist. Der Grund für dieses Verhalten liegt darin, dass bei solch hohen Dichten die Unterschiede in den nackten Massen der Quarks unwichtig werden und die SU(3)-Flavour Symmetrie effektiv restauriert wird. Aufgrund der Stabilitätsgrenze bei den Maximalmassen-Sternen existiert eine Obergrenze des Seltsamkeitsverhältnisses  $r_s$  (markierte Punkte in Abb. 3.29). Während bei  $\xi = 0$  der Maximalmassen-Stern in seinem Zentrum ein Seltsamkeitsverhältnis von  $r_s = 0.25$  besitzt, weist der Maximalmassen-Stern mit  $\xi = 1$  in seinem Zentrum einen Wert von  $r_s = 0.29$  auf. Größere Werte von  $r_s$  sind aus Stabilitätsgründen nur in Kollapsszenarien möglich. Das Seltsamkeitsverhältnis von Neutronensternmaterie im HCM besitzt starke Unterschiede zu dem dargestellten Quarkstern Modell. Seltsamkeit in Form von hyperonischen Teilchen entstehen im HCM oberhalb einer Dichte von  $\rho_B \geq 2.6 \rho_0$ . Das Seltsamkeitsverhältnis  $r_s$  steigt jedoch im Vergleich zum NJL Modell weniger stark an, so dass lediglich der Wert  $r_s = 0.12$  im Zentrum maximal erreichbar ist. Die totale Anzahl von seltsamen Quarks innerhalb eines Quarksterns berechnet sich durch das Volumenintegral der seltsamen Teilchendichte  $\rho_s$  über das gesamte Sternvolumen

$$N_s = \int \sqrt{-g} \rho_s u^0 dV = 4 \pi \int_0^R r^2 \frac{\rho_s}{\sqrt{1 - 2m(r)/r}} dr \quad , \quad (3.42)$$

wobei  $u^0$  die Zeitkomponente der Vierergeschwindigkeit der Materie und  $m(r)$  die gravitative Masse beim Radius  $r$  darstellt.

In Abb. 3.30 ist das Verhältnis der Anzahl der seltsamen Quarks  $N_s$  zur gesamten Barionenanzahl  $N_B$  ( $N_B = 3 N_Q$ ) als Funktion der gravitativen Gesamtmasse  $M$  dargestellt.

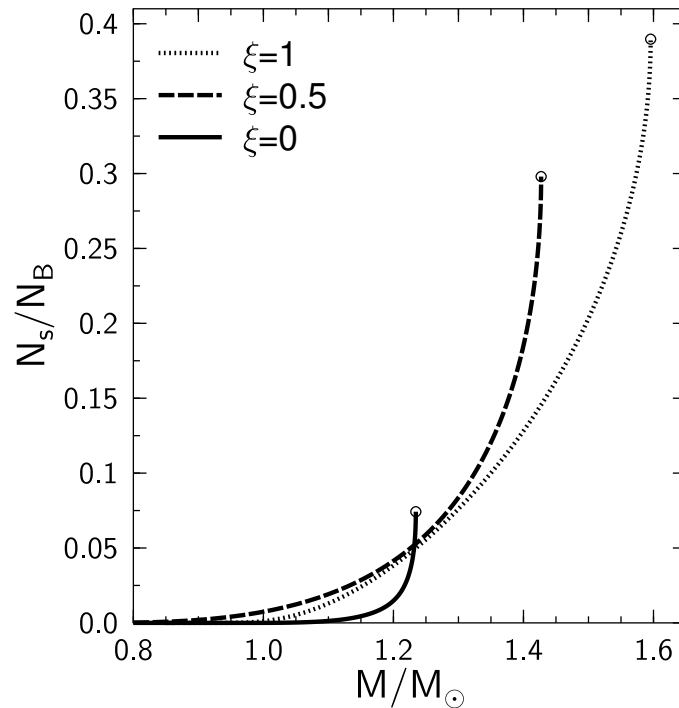


Abbildung 3.30: Totale Anzahl von seltsamen Quarks  $N_s$  im Stern geteilt durch die totale Anzahl von Barionen ( $N_B = 3 N_Q$ ) als Funktion der gravitativen Masse  $M/M_{\odot}$ .

Die größten Werte für  $N_s/N_B$  werden bei den Maximalmassen-Sternen erzielt, wobei die Ergebnisse eine deutliche Abhängigkeit von der Vektorkopplungskonstante zeigen.

## Vergleiche mit anderen Quark Modellen

In diesem Unterkapitel vergleichen wir die im NJL-Modell berechneten Materie und Sterneigenschaften mit zwei weiteren Quark Modellen.

Das wohl einfachste Quark Modell stellt das MIT-Bag Modell dar. Es beschreibt die Quarkmaterie als ein freies Fermi-Gas bestehend aus up, down und strange Quarks, das durch einen zusätzlichen Vakuumsdruck abgeschlossen ist. Die zur Abschließung erforderliche zusätzliche Energie wird durch die 'Bag-Konstante'  $B$  parametrisiert. Die Energiedichte und der Druck von kalter ( $T \equiv 0$ ) Quarkmaterie in diesem Modell besitzt die folgende einfache



Form

$$\epsilon^Q = \sum_{f=u,d,s} \frac{\nu_f}{2\pi^2} \int_0^{k_F^f} k^2 \sqrt{m_f^2 + k^2} dk + B, \quad (3.43)$$

$$P^Q = \sum_{f=u,d,s} \frac{\nu_f}{6\pi^2} \int_0^{k_F^f} \frac{k^4}{\sqrt{m_f^2 + k^2}} dk - B, \quad (3.44)$$

wobei  $p_F^f = \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2}$  der Fermiimpuls der Quarks mit Flavour  $f$  ist. Der Degenerationsfaktor der einzelnen Quarks ist  $\nu_f = 2(\text{Spin}) \times 3(\text{Farbe}) = 6$  und die Quarkmassen wählten wir wie folgt:  $m_u = 5$  MeV,  $m_d = 10$  MeV und  $m_s = 150$  MeV. Um Quarksternmaterie zu beschreiben fügten wir dem System wieder leptonische Teilchen hinzu und berechneten alle Eigenschaften unter der Nebenbedingung der Ladungsneutralität im  $\beta$ -Gleichgewicht.

Neben dem MIT-Bag Modell berechneten wir auch die Quarkmaterie und Sterneigenschaften im 'Massiv-Quasi-Particle' Modell (MQM).

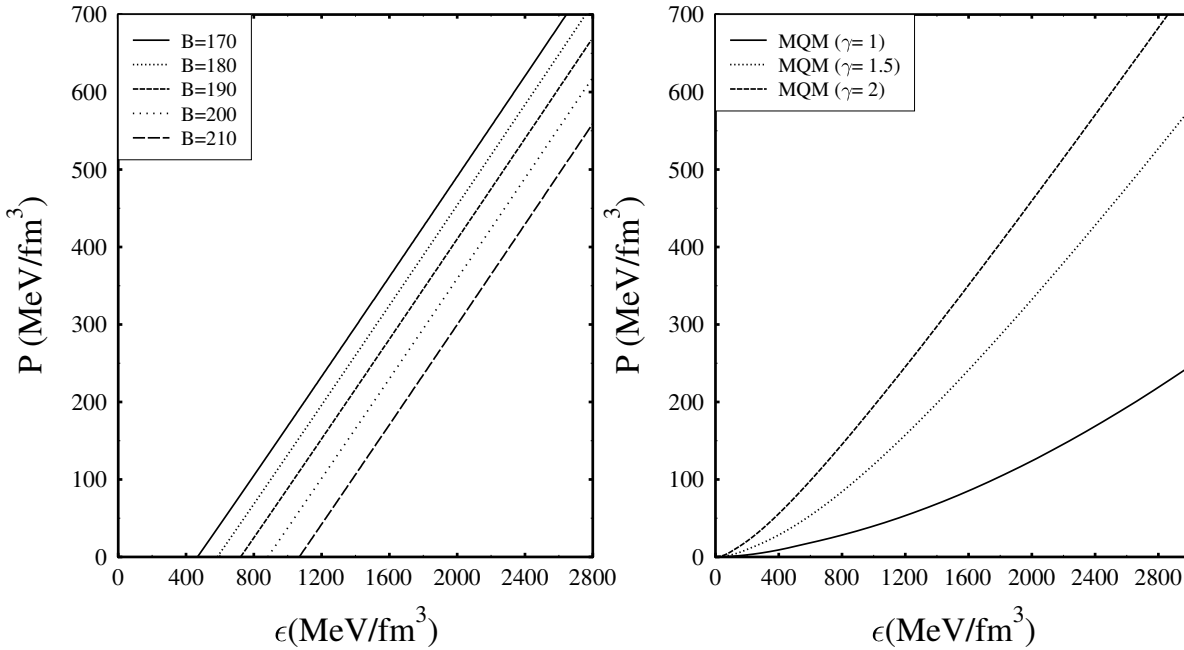


Abbildung 3.31: Druck  $P$  der Materie innerhalb von Quarksternen als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$ .

In den Abbildungen 3.31 und 3.32 sind die Zustandsgleichungen des MIT-Bag Modells und des MQM für unterschiedliche Parameterwerte der Modelle dargestellt. Der Druck  $P$  als Funktion der Energiedichte  $\epsilon$  im MIT-Bag Modell zeigt ein lineares Verhalten. Eine Vergrößerung des Bag-Parameters  $B$  bewirkt eine Verschiebung der Gerade in  $-P$  Richtung. Bei geringen Energiedichten erhält man einen negativen Druck, was den selbstgebundenen Charakter der Quarkmaterie ausdrückt.

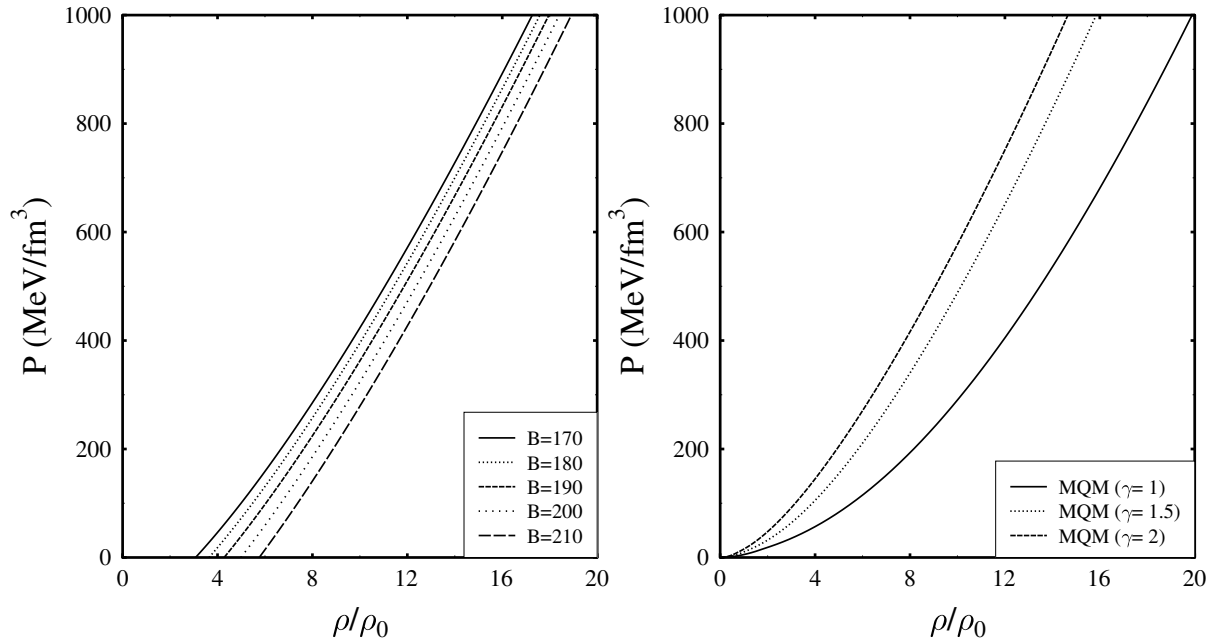


Abbildung 3.32: Druck  $P$  als Funktion der entsprechenden Barionendichte  $\rho/\rho_0$ .

Im MQM entstehen keine negativen Drücke und das Verhalten der Zustandsgleichung  $P(\epsilon)$  hat eine nichtlineare Eigenschaft. Durch Erhöhung des Parameter  $\gamma$  macht man die Zustandsgleichung des MQM steifer. Vergleicht man die beiden Modelle miteinander, so erkennt man deutliche qualitative Unterschiede, die innerhalb der unterschiedlichen Ansätze der Modelle verankert sind.

Zum Vergleich ist in Abb. (3.33, links) die Zustandsgleichung des NJL Modells für drei unterschiedliche Vektorkopplungsparameter  $\xi$  veranschaulicht. Bei verschwindender Vektorkopplung  $\xi = 0$  zeigt die Zustandsgleichung ein selbstgebundenes Verhalten, was dem MIT-Bag Modell ähnelt. Das veränder-

te Steigungsverhalten bei ca.  $5\rho_0$  ist bedingt durch das Entstehen von seltenen Quarks im System, was die Zustandsgleichung weicher macht. Mit steigender Vektorkopplung wird die Zustandsgleichung weicher und verliert ihr selbstgebundenes Verhalten; sie ähnelt dann eher dem MQM.

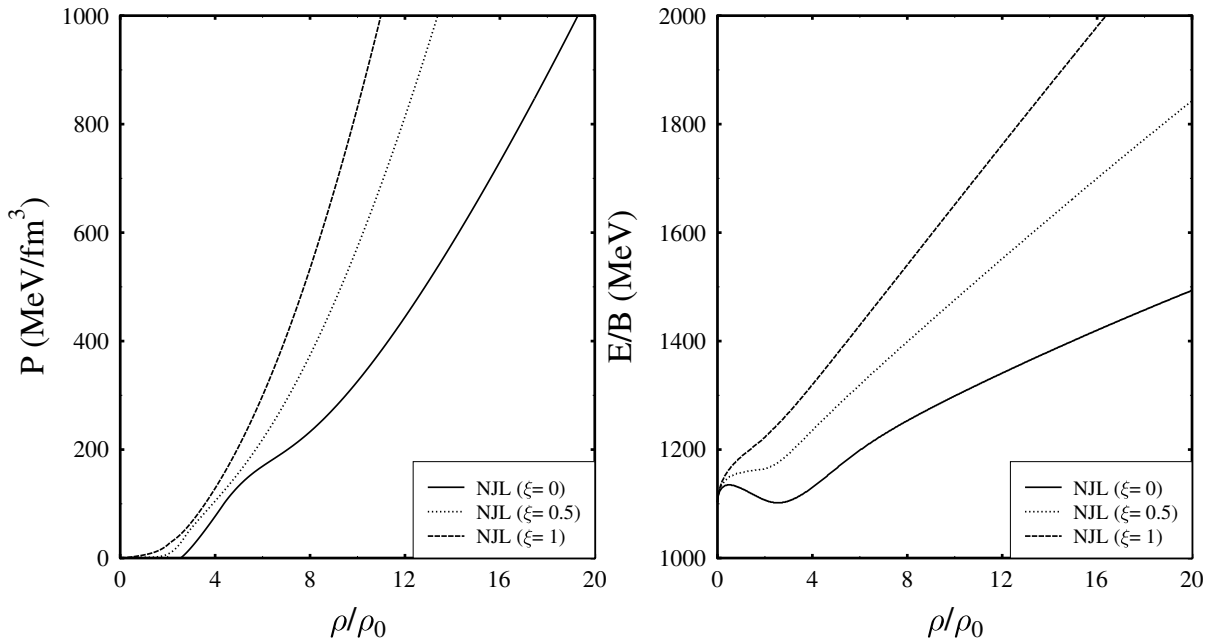


Abbildung 3.33: Rechts: Druck  $P$  als Funktion der entsprechenden Barionendichte  $\rho/\rho_0$  im NJL Modell. Links: Bindungsenergie  $E/B$  als Funktion der entsprechenden Barionendichte  $\rho/\rho_0$ .

Die Bindungsenergie der Quarks in den jeweiligen Modellen (Abb. 3.34 und Abb. 3.33 rechts) spiegelt die Eigenschaft der Ungebundenheit und Selbstgebundenheit nochmals wieder. Während im MIT-Bag Modell stets ein Bindungsminimum auftritt, tritt dies im NJL Modell nur bei  $\xi = 0$  auf, wohingegen kein Minimum im MQM erscheint.

Die relativen Häufigkeiten der Quarkflavoursorten sind in Abb. 3.35 als Funktion der entsprechenden Barionendichte  $\rho/\rho_0$  aufgetragen. Während im MIT-Bag Modell die relativen Quark-Zusammensetzungen nicht vom Bag Parameter abhängen, zeigen die anderen betrachteten Modelle eine starke Veränderung in den Teilchenzusammensetzungen bei Variation der jeweiligen Parameter der Modelle.

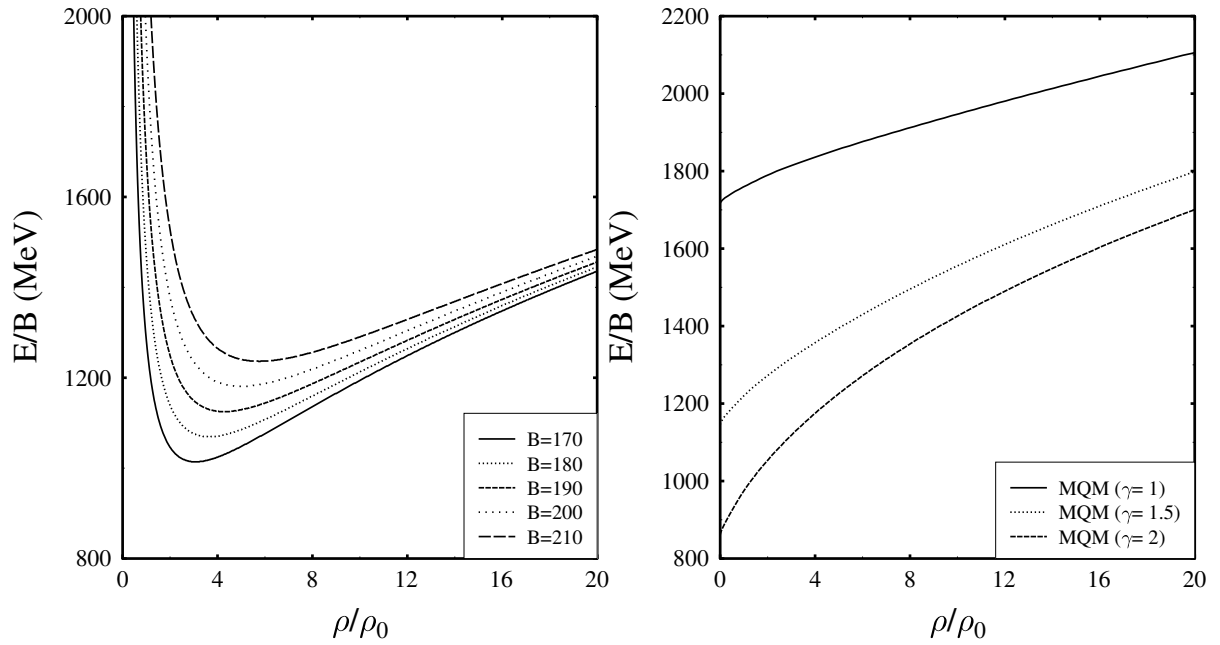


Abbildung 3.34: Bindungsenergie  $E/B$  als Funktion der entsprechenden Baryonendichte  $\rho/\rho_0$ .

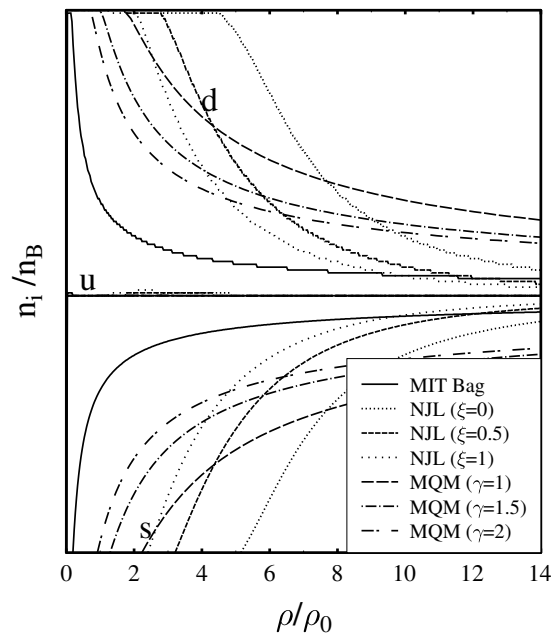


Abbildung 3.35: Relative Quark-Zusammensetzungen als Funktion der entsprechenden Baryonendichte  $\rho/\rho_0$ .

Die entsprechenden Eigenschaften der Quarksterne der Modelle sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. In Abb. 3.36 ist die gravitative Masse als Funktion der zentralen Dichte im Sterninneren abgebildet.

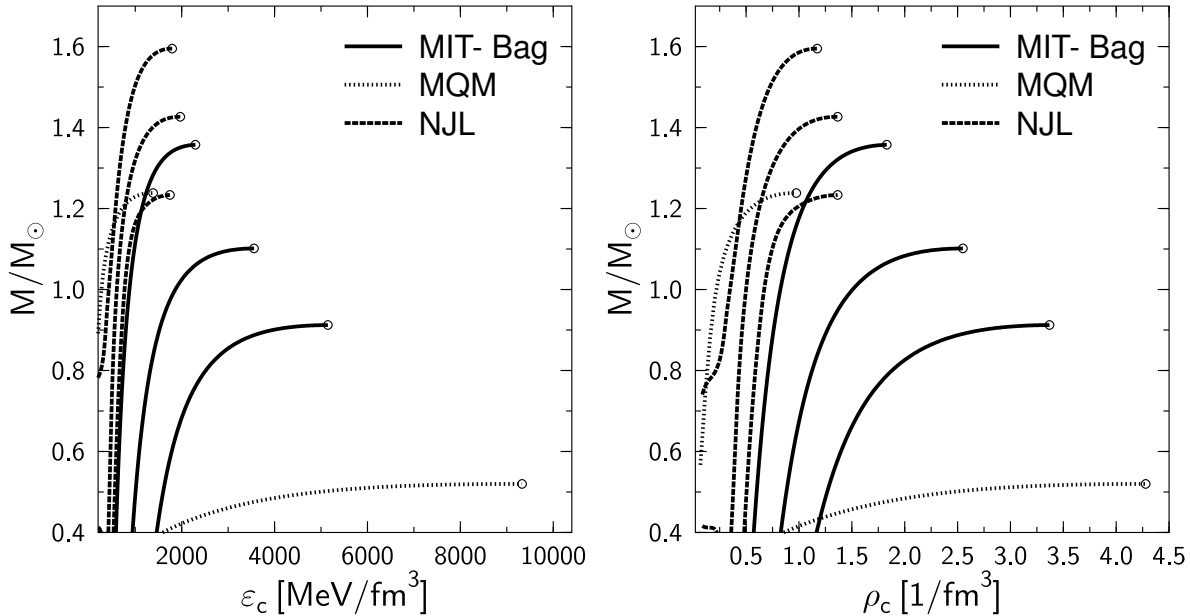


Abbildung 3.36: Links: Gravitative Masse der Quarksterne als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  im Stern (NJL:  $\xi = 0, 0.5, 1$ , MIT-Bag:  $B^{1/4} = 170, 190, 210$  MeV, MQM:  $\gamma = 1, 1.5$ ). Rechts: Gravitative Masse der Quarksterne als Funktion der entsprechenden zentralen Barionendichte  $\rho_c$  im Stern.

Im MIT-Bag Modell sinkt die maximale Masse  $M_{max}$  mit steigendem Bag-Parameter  $B$ . Dies ist einfach zu verstehen, da bei steigendem Bag Parameter mehr Materie in den selbstgebundenen Zustand übergeht, so dass schon bei kleineren Gravitationsfeldstärken der Stern instabil wird und kollabiert. Bei stabilen Sternen wird bei größerem Bag Parameter weniger Gravitationsenergie benötigt um den Stern zu stabilisieren. Im MQM sind die Eigenschaften der Quarksterne für die Parameterwerte  $\gamma = 1, 1.5$  dargestellt. Die maximale Masse wird in diesem Modell bei sinkendem Parameter  $\gamma$  stark verringert, wobei die mögliche zentrale Dichte sich extrem erhöht. Der Grund liegt hier in dem sehr weichen Verhalten der Zustandsgleichung bei kleinen  $\gamma$ -Werten (siehe Abb. 3.31). Das NJL Modell verringert ebenfalls aufgrund dieser Eigenschaft

der Zustandsgleichung seine maximale Masse bei sinkendem  $\xi$ -Wert.

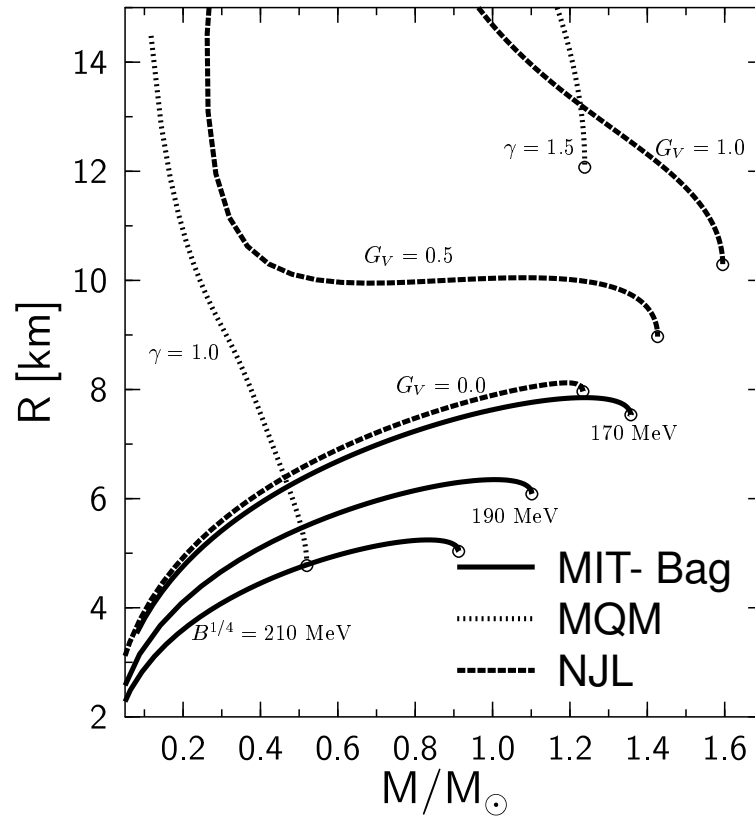


Abbildung 3.37: Quarksternradius  $R$  als Funktion der gravitativen Gesamtmasse  $M/M_\odot$ .

Der Radius der Sterne ist in Abb. 3.37 als Funktion der Sternmasse dargestellt. Um den selbstgebundenen Charakter der Quarksterne im Vergleich zu den nicht selbstgebundenen Sternen zu verdeutlichen, vernachlässigten wir bei den Berechnungen die Einflüsse einer äußeren Kruste der Quarksterne, so dass die selbstgebundenen Quarksterne für  $M \rightarrow 0$  die Eigenschaft  $R \rightarrow 0$  besitzen. Man erkennt, dass bei geeigneter Parameterwahl Quarksterne auch relativ große, Neutronenstern ähnliche Eigenschaften besitzen können (NJL:  $\xi \geq 0.5$ , MIT-Bag:  $B^{1/4} \leq 150$  MeV, MQM:  $\gamma \geq 1.25$ ). Anhand einer astrophysikalische Radiusmessung eines Quarksterns könnte man die derzeitige Unbestimmtheit der jeweiligen teilchenphysikalischen Quarkmodelle stark einschränken.

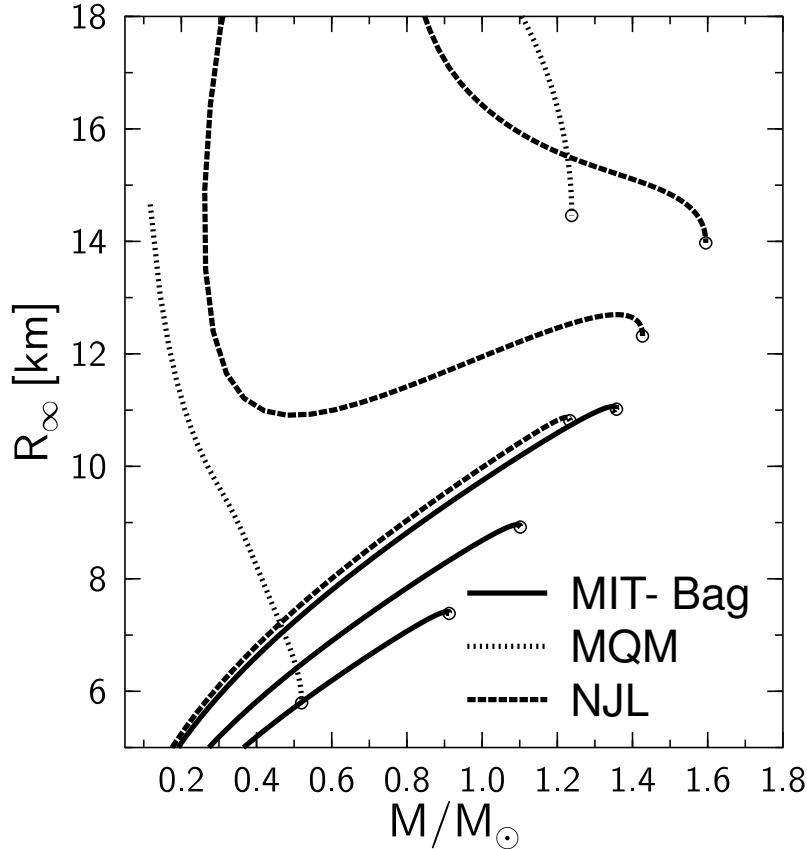


Abbildung 3.38: Anscheinender Quarksternradius  $R_\infty$  als Funktion der gravitativen Gesamtmasse  $M/M_\odot$ .

Da optische Beobachtungen des Sternradius über die Temperatur der Sterne indirekt bestimmt werden können (siehe Anhang C), die empfangenen elektromagnetischen Wellen jedoch gravitativ rotverschoben sind, geben wir hier ebenfalls den Radius  $R_\infty$  an, der sich aus der Temperatur  $T_\infty$  gemessen von einem unendlich entfernten Beobachter anscheinend ergibt

$$R_\infty = \frac{R}{\sqrt{1 - 2M/R}} \quad . \quad (3.45)$$

### 3.3 Hybride Sterne

Hybride Sterne sind kompakte Sterne, die teilweise aus confinierter hadronischer Materie und teilweise deconfinierter Quarkmaterie bestehen. Im Inneren

der Sterne vollzieht sich ein Phasenübergang erster Ordnung, der im allgemeinen die Gibbs'sche Phasenbedingungen erfüllt. Abweichungen von der Gibbs'schen Phasenübergangskonstruktion können durch Oberflächenspannungen und coulomb'sche 'Screening'-Effekte entstehen. Die Miteinbeziehung dieser Effekte in die Phasenkonstruktion verschiebt die Gibbs'schen Resultate hin zu einer maxwellartigen Konstruktion. Der in der Natur realisierte Phasenübergang wird sich zwischen diesen beiden idealisierten Konstruktionen (Gibbs und Maxwell) aufhalten.

### **Eigenschaften von hybriden Sternen im chiralen $SU(3)$ – MIT-Bag Modell**

Wir realisierten die Konstruktion eines hybriden Modells der Sternmaterie, indem wir einen Phasenübergang zwischen einem hadronischen Modell (hier das CHM mit Hyperonen) und einem Quarkmodell (hier das MIT-Bag Modell) erzeugten. Im folgenden wird zunächst die Gibbs Konstruktion des Phasenübergangs dargestellt.

#### **Gibbs-Konstruktion des Quark-Hadron Phasenüberganges**

Im Gegensatz zur Maxwellkonstruktion eines Phasenüberganges existiert bei einer Gibbskonstruktion ein Phasenübergangsbereich einer gemischten Phase (Mixed Phase: MP). Innerhalb dieser gemischten Phase koexistieren beide Phasen nebeneinander, so dass sich, abhängig von dem jeweiligen Dichtebereich ein gewisser Anteil der Materie im hadronischen Zustand und im deconfienten Quarkzustand befindet. Die einzelnen Phasen in diesem Übergangsbereich können elektrisch geladen sein, wohingegen die gesamte elektrische Ladungsdichte  $\rho_e$  in der gemischten Phase in jedem Dichtebereich des Sterns verschwinden muss, so dass der Stern als Ganzes keine elektrische Ladung besitzt. Der Druck der hadronischen Materie  $P^H$  muss in der gemischten Phase gleich dem Druck der Quarkmaterie  $P^Q$  sein, wohingegen sich die Teilchen- und Energiedichten ( $\rho^H, \rho^Q$  und  $\epsilon^H, \epsilon^Q$ ) unterscheiden können. Da die Ladungsneutralität der einzelnen Phasen nun aufgehoben ist, ist der Druck abhängig von den zwei unabhängigen chemischen Potentialen  $\mu_B$  und  $\mu_e$ . Die Gibbs'sche Phasenbedingung bei  $T = 0$  in der MP lautet wie



folgt:

$$P^H(\mu_B, \mu_e) = P^Q(\mu_B, \mu_e), \quad (3.46)$$

$$\mu_B = \mu_B^H = \mu_B^Q, \quad (3.47)$$

$$\mu_e = \mu_e^H = \mu_e^Q \quad (3.48)$$

Die chemischen Potentiale der einzelnen Teilchen  $i$  setzen sich im  $\beta$ -Gleichgewicht wie folgt zusammen

$$\mu_i = B_i \mu_B + Q_i \mu_e, \quad (3.49)$$

wobei  $B_i$  die Barionenzahl des Teilchens  $i$  ist, und  $Q_i$  die Ladung des  $i$ -ten Teilchens in Einheiten der Elektronenladung  $e$  beschreibt. Wiederum können Neutrinos aufgrund ihrer großen freien Weglänge dem Stern entweichen und die Seltsamkeitserhaltung ist verletzt. Die chemischen Potentiale der einzelnen Quarks lauten demnach

$$\begin{aligned} \mu_u &= \frac{1}{3}(\mu_B - 2\mu_e) \\ \mu_d = \mu_s &= \frac{1}{3}(\mu_B + \mu_e) \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die gemittelte Energie- und Teilchendichte  $(\epsilon, \rho_B)$  in der gemischten Phase definieren wir wie folgt:

$$\epsilon = (1 - \chi)\epsilon^H(\mu_B, \mu_e) + \chi\epsilon^Q(\mu_B, \mu_e), \quad (3.51)$$

$$\rho_B = (1 - \chi)\rho_B^H(\mu_B, \mu_e) + \chi\rho_B^Q(\mu_B, \mu_e), \quad (3.52)$$

wobei  $\chi = V_Q/V$  der Volumenanteil der Quarkphase ist. Die globale Ladungserhaltung in der gemischten Phase wird wie folgt formuliert

$$\rho_e := (1 - \chi)\rho_e^H(\mu_B, \mu_e) + \chi\rho_e^Q(\mu_B, \mu_e) = 0. \quad (3.53)$$

In Abb. 3.39 ist das Prinzip einer Gibbskonstruktion eines Hadron-Quark Phasenüberganges zwischen dem CHM mit Hyperonen (hadronische Phase) und dem MIT-Bag Modell ( $B^{1/4} = 180$  MeV) dargestellt. Der Druck der hadronischen Materie  $P^H(\mu_B, \mu_e)$  ist als transparente Fläche veranschaulicht. Punkte auf dieser Fläche beschreiben hadronische Materie, die im allgemeinen elektrisch geladen ist. Durch Miteinbeziehung der Nebenbedingung

der Ladungsneutralität innerhalb der hadronischen Phase, reduziert man die Freiheitsgrade des Systems, so dass sich eine spezielle Kurve auf der Fläche ergibt. Diese Kurve beschreibt nun ladungsneutrale Neutronensternmaterie (siehe Abb. 3.39, Kurve unterhalb von Punkt 'C').

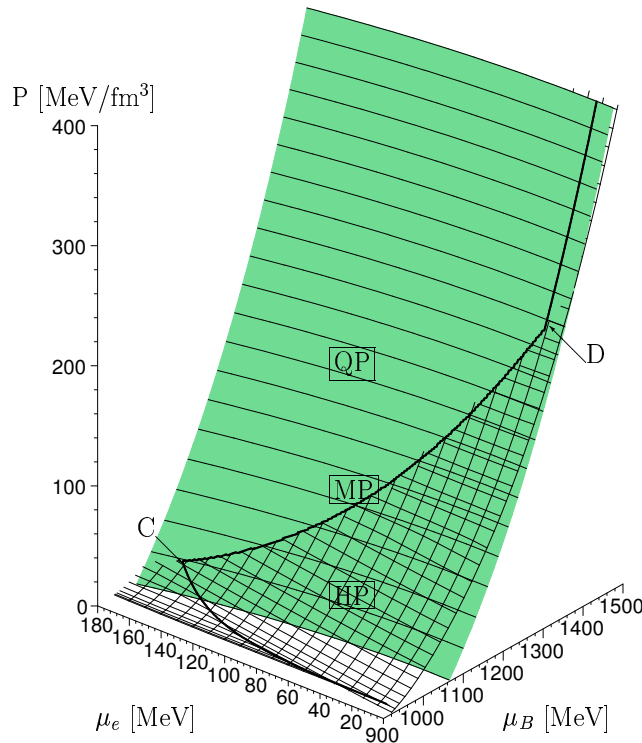


Abbildung 3.39: Gibbskonstruktion des Hadron-Quark Phasenüberganges: Druckfläche der hadronischen Phase im CHM mit Hyperonen (transparente Fläche) und der Quarkphase im MIT-Bag Modell mit  $B^{1/4} = 180$  MeV in Abhängigkeit ihrer zwei unabhängigen chemischen Potentiale. Die Kurve auf den Flächen beschreibt ladungsneutrale Sternmaterie. Die Markierung 'C' stellt den Beginn und 'D' das Ende der gemischten Phase (MP) dar.

Die Druckfläche der Quarkphase  $P^Q(\mu_B, \mu_e)$  ist ebenfalls in Abb. 3.39 dargestellt. Die hadronische Fläche  $P^H$  schneidet die Quarkfläche  $P^Q$  und definiert dadurch eine Schnittfunktion. An dem Punkt, wo diese Schnittfunktion die Kurve der ladungsneutralen Neutronensternmaterie schneidet (Punkt 'C' in Abb. 3.39) beginnt die gemischte Phase MP. Ist der Druck des Systems kleiner als der entsprechende Druck am Punkt 'C', so ist die Materie

ausschließlich aus ladungsneutraler hadronischer Materie zusammengesetzt, da dann der Druck der hadronischen Phase stets größer ist als der der Quarkphase; die hadronische Phase ist stabiler. Steigt der Druck jedoch über den entsprechenden Druck am Punkt 'C', so setzt sich die Materie anteilig aus Hadronen und Quarks zusammen und beschreitet die Schnittkurve beider Flächen. Die Gesamtladung ist stets Null, wobei die hadronische Phase negativ und die Quarkphase positiv geladen ist. Der Volumenanteil  $\chi$  der Quarks erhöht sich stetig, bis er schließlich am Punkt 'D' den Wert  $\chi = 1$  besitzt. An diesem Punkt endet die gemischte Phase, da die Materie bei weiterer Druckerhöhung sich ausschließlich aus deconfineter ladungsloser Quarkmaterie zusammensetzt. Die geometrischen Strukturen, die aufgrund von Oberflächenspannungen, Coulomb- und Screeningeffekten entstehen können, werden bei dieser Behandlung vernachlässigt.

In der Abb. 3.40 ist die Auswirkung der Änderung der Bag-Konstante  $B$  auf die Phasenübergangskonstruktion untersucht. Bei Erhöhung der Bag-Konstante auf  $B^{1/4} = 190$  MeV verschiebt man den Beginn und das Ende der gemischten Phase zu höheren Drücken und dehnt gleichzeitig der MP-Bereich aus, da die Erhöhung der Bag-Konstante eine Verschiebung der Quarkfläche zu höheren Drücken hin bewirkt. Bei  $B^{1/4} = 200$  MeV ist die Quarkfläche soweit verschoben, dass schon hyperonische Teilchen in der reinen hadronischen Phase entstehen, bevor die gemischte Hadron-Quarkphase beginnt. Dies erkennt man an der Änderung des Verhaltens der ladungsneutralen Kurve auf der hadronischen Fläche. Bei  $B^{1/4} = 210$  MeV existiert zwar noch eine Schnittkurve beider Flächen; diese schneidet jedoch nicht mehr die ladungsneutrale Kurve der hadronischen Phase. Man kann daraus folgern, dass für  $B^{1/4} \geq 210$  MeV keine sinnvolle Gibbskonstruktion mehr möglich ist, und die hadronische Phase bei solch hohen Bag-Konstanten stets stabiler ist als die Quarkphase.<sup>16</sup>

---

<sup>16</sup>Genauer betrachtet tritt diese Eigenschaft schon bei  $B^{1/4} \geq 205$  MeV auf.

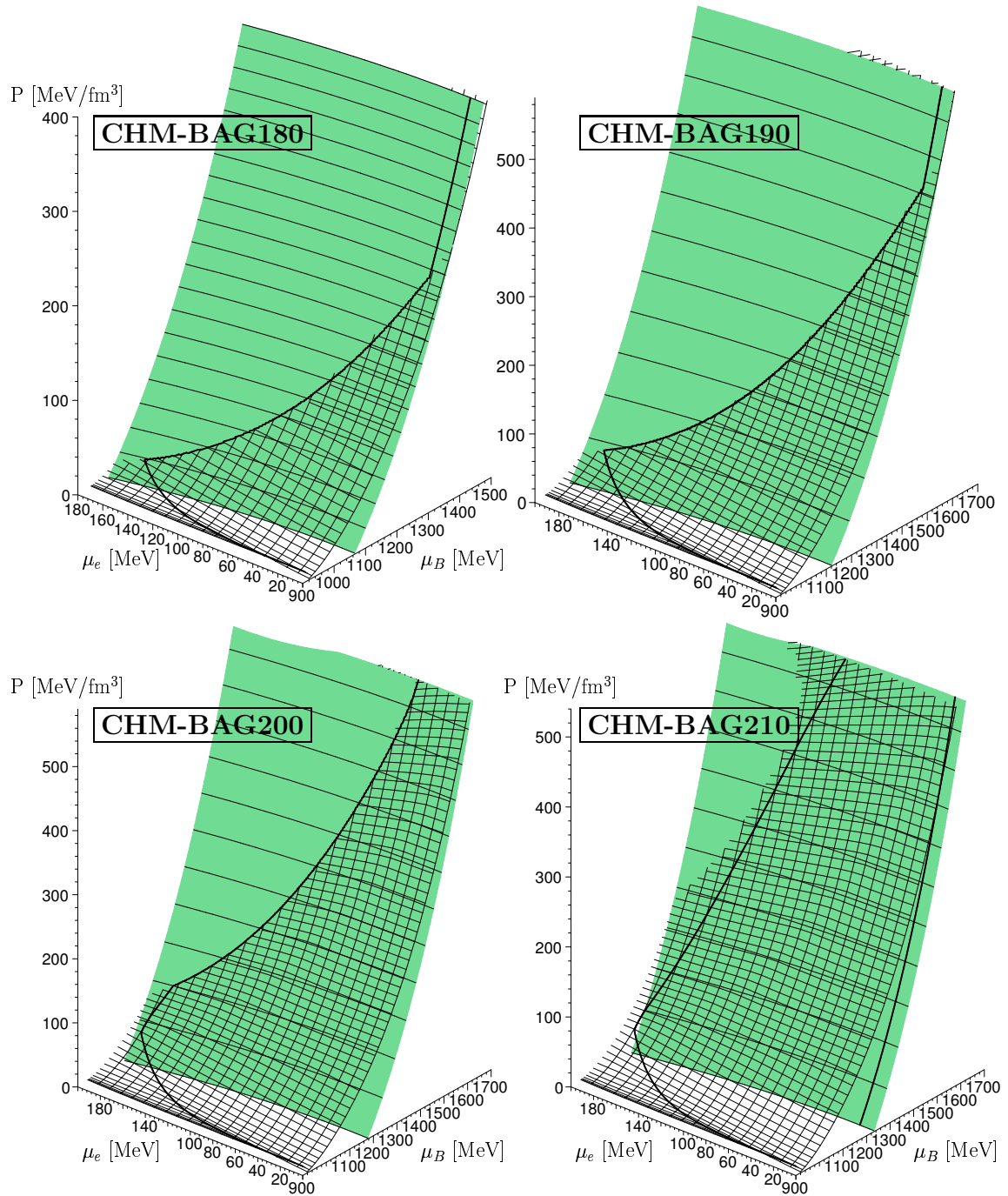


Abbildung 3.40: Auswirkung der Änderung der Bag-Konstante  $B$  auf die Phasenübergangskonstruktion zwischen dem CHM und dem MIT-Bag Modell (CHM-Bag).

### Zustandsgleichung und Teilchenkompositionen

Abb. 3.41 zeigt die Zustandsgleichungen  $P(\rho_B/\rho_0)$  und  $P(\epsilon)$  im global neutralen, hybriden CHM-Bag Modell für unterschiedliche Werte der Bag Konstanten. Man erkennt deutlich den Beginn der gemischten Phase durch ein 'softer werden' der Zustandsgleichung. Am Ende der gemischten Phase wird die Zustandsgleichung wieder 'steifer' und die reine Quarkphase beginnt. Wie schon in Abb. 3.40 gezeigt wurde, verschiebt man den Beginn der gemischten Phase hin zu höheren Dichten, indem man die Bag Konstante  $B$  erhöht.

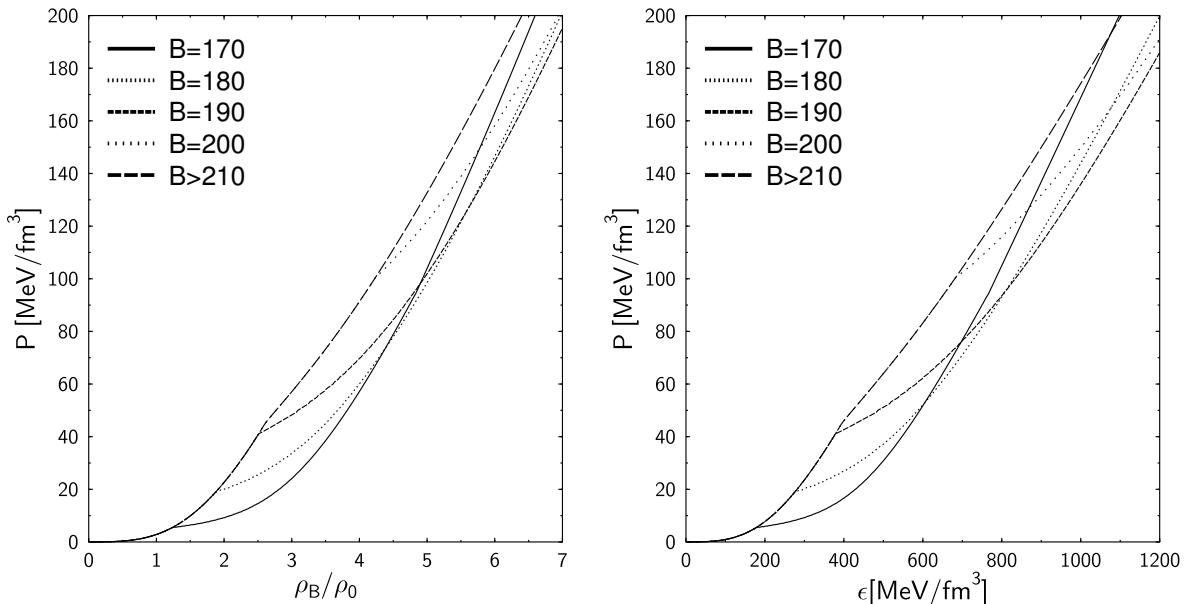


Abbildung 3.41: Zustandsgleichungen des CHM-Bag Modells ( $B^{1/4} = 170, 180, 190, 200, 210$  MeV).

Die jeweiligen Teilchenkompositionen der Modelle sind in den Abbildungen 3.42 - 3.44 dargestellt.

Im CHM-Bag170 (hybrides Modell mit hadronischer CHM-Phase und MIT-Bag Quarkphase mit  $B^{1/4} = 170$  MeV) beginnt die gemischte Phase schon bei  $\rho_B \approx 1.2 \rho_0$ . Die Materie in der rein hadronischen und gemischten Phase enthält keine hyperonischen Teilchen. Im Laufe der gemischten Phase werden die leptonischen Teilchen ( $e^-$ ,  $\mu^-$ ) nach und nach durch die negativ geladenen Quarks ( $d$ ,  $s$ ) ersetzt. In der gemischten Phase kommt das up-Quark weniger häufig vor als die anderen Flavoursorten. Der Grund hierfür

liegt in der Bevorzugung negativ geladener Teilchen aufgrund der Ladungsneutralitätsbedingung.

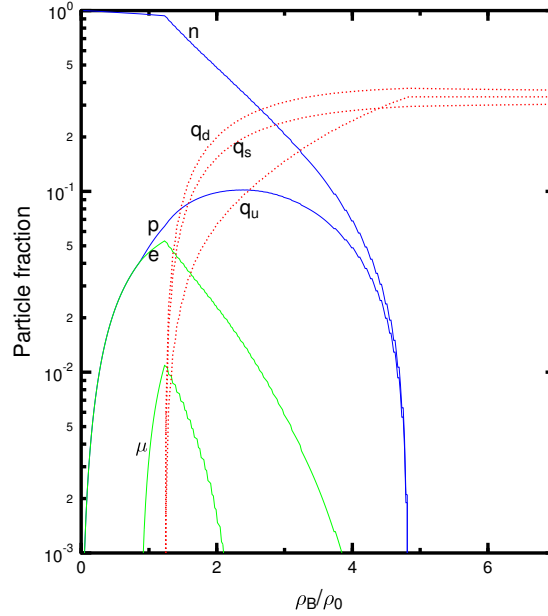


Abbildung 3.42: Relative Teilchendichten im CHM-B170 Modell.

In der reinen Quarkphase ( $\rho_B \geq 4.85 \rho_0$ ) sind aufgrund der endlichen Masse des seltsamen Quarks weniger s-Quarks vorhanden.

Das CHM-Bag180 Modell enthält als einziges hyperonisches Teilchen das  $\Lambda$ -Hyperon, welches in der Mitte der gemischten Phase bei  $\rho_B \approx 4.05 \rho_0$  erscheint. Die negativen hyperonischen Teilchen (z.B.  $\Sigma^-$ ,  $\Xi^-$ ) treten nicht auf, da sie genau wie die leptonischen Teilchen durch die negativ geladenen Quarks kompensiert werden.

Im CHM-Bag190 Modell erscheinen ebenfalls lediglich die  $\Lambda$ -Hyperonen in der gemischten Phase. Im Gegensatz zum CHM-Bag180 Modell ist die Teilchenkonzentration der  $\Lambda$ -Hyperonen höher, die gemischte Phase beginnt später ( $\rho_B \approx 2.5 \rho_0$ ) und dehnt sich weiter aus ( $2.5 \rho_0 \geq \rho_B \geq 11.1 \rho_0$ ).

Bei  $B^{1/4} = 195$  MeV treten Hyperonen bereits in der rein hadronischen Phase auf. Hier erscheinen, wie im CHM üblich das  $\Sigma^-$  und  $\Lambda$  Hyperon; das  $\Xi^-$  erscheint erst in der gemischten Phase. Bei Beginn der gemischten Phase ( $\rho_B \approx 3.1 \rho_0$ ) nimmt die Konzentration der  $\Sigma^-$ -Teilchen und der Leptonen schnell ab und die Ladungsneutralität wird maßgeblich durch die Quarks

realisiert. Die gemischte Phase endet erst bei  $\rho_B \approx 13.5 \rho_0$ .

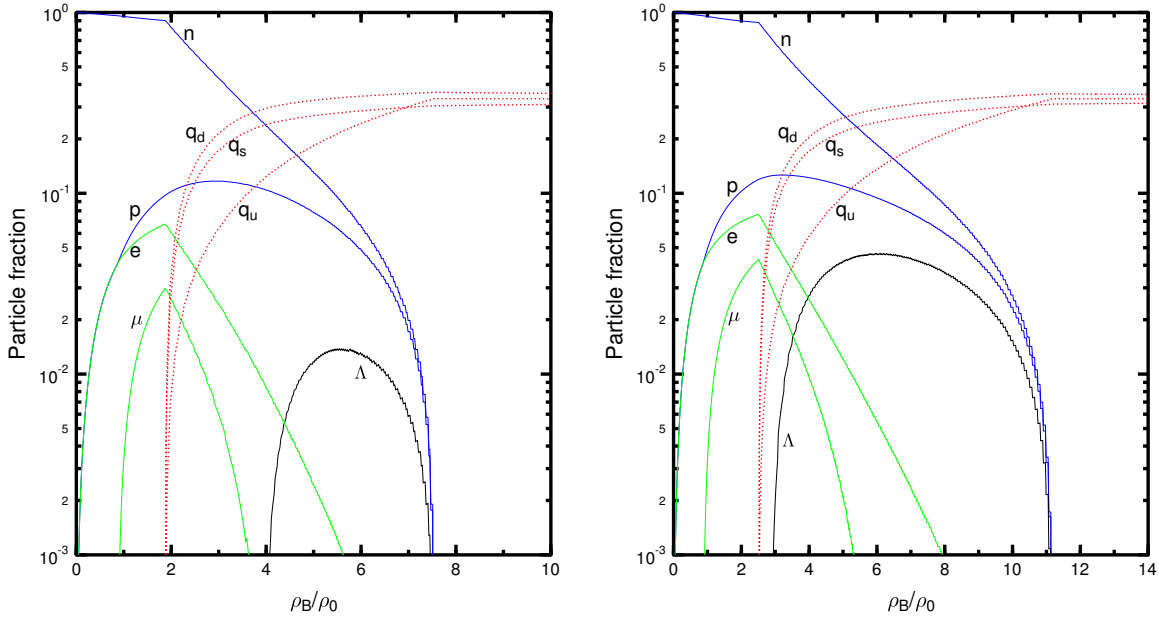


Abbildung 3.43: Relative Teilchendichten im CHM-B180 und CHM-B190 Modell.

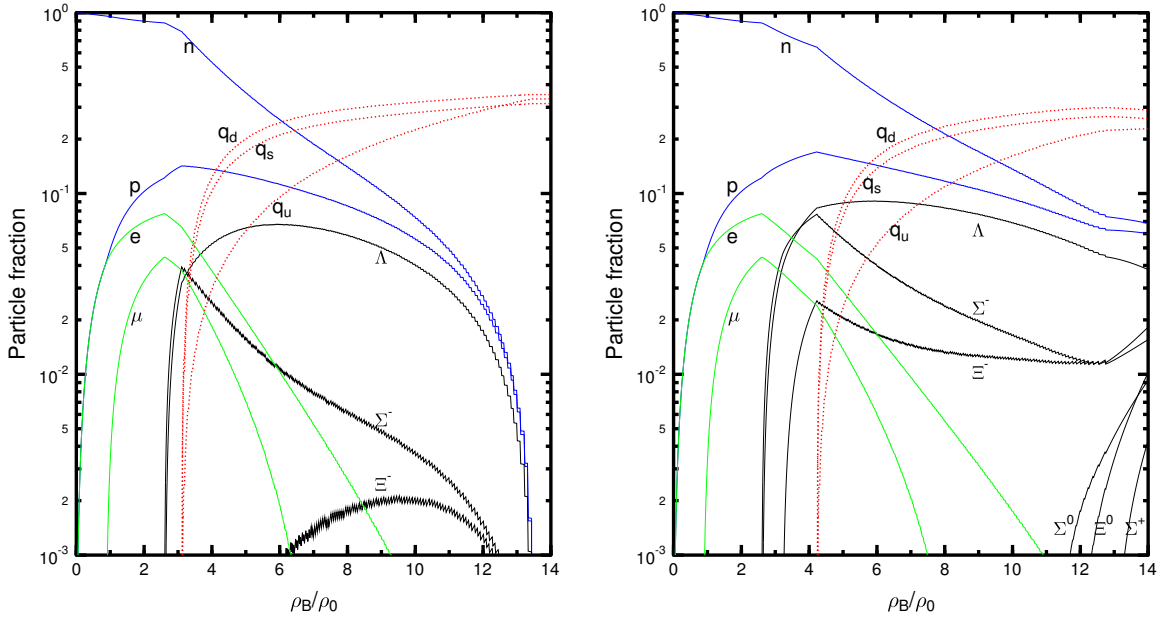


Abbildung 3.44: Relative Teilchendichten im CHM-B195 und CHM-B200 Modell.

Im CHM-Bag200 Modell erscheinen die hyperonischen Teilchen  $\Lambda$ ,  $\Sigma^-$  und

$\Xi^-$  bereits in der rein hadronischen Phase. Die gemischte Phase beginnt erst bei  $\rho_B \approx 4.25 \rho_0$  und dehnt sich weit über zwanzigfache normale Kerndichte aus, so dass eine reine Quarkphase praktisch nicht realisiert wird. In der gemischten Phase erscheinen weitere hyperonische Teilchen ( $\Sigma^0, \Xi^0, \Sigma^+$ ).

Wie bereits erwähnt wurde, scheitert die Gibbs-Konstruktion des Hadron-Quark Phasenüberganges CHM-Bag Modell, wenn man Bag-Konstanten größer als  $B^{1/4} = 205$  MeV wählt, so dass die Teilchenzusammensetzung für  $B^{1/4} \geq 205$  MeV gleich dem reinen CHM Modell zu setzen sind.

### Eigenschaften der Hybridsterne

Die Eigenschaften der nichtrotierenden hybriden Sterne im CHM-Bag Modell erhält man wiederum durch das Einsetzen der Zustandsgleichung in die TOV-Gleichungen. Wir wählten zur Beschreibung der Kruste der Sterne die in Kapitel 3.1 dargestellten Krustenzustandsgleichungen der äußeren und inneren Kruste.

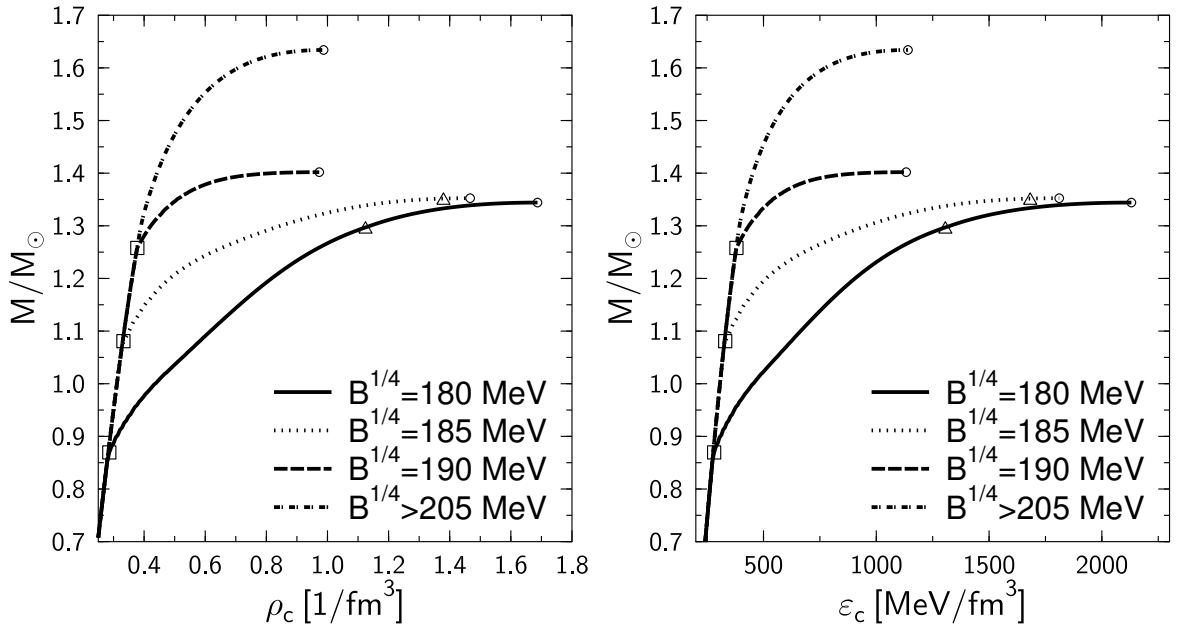


Abbildung 3.45: Gravitative Masse  $M$  der hybriden Sterne als Funktion der zentralen barionischen Teilchendichte  $\rho_c$  (links), bzw. als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  (rechts).



In Abb. 3.45 ist die gravitative Gesamtmasse  $M$  der hybriden Sterne als Funktion der zentralen Dichten ( $\rho_c$  bzw.  $\epsilon_c$ ) für unterschiedliche Bag Parameter  $B$  dargestellt. Die durch Vierecke markierten Punkte kennzeichnen den Beginn der gemischten Phase, wohingegen die Dreiecke das Ende der gemischten Phase im Zentrum der Sterne, bzw. den Anfang der reinen Quarkphase kennzeichnen. Durch Erhöhung der Bag Konstante  $B$  vergrößert man den Wert der maximalen Masse  $M_{max}$ , welcher in den Abbildungen 3.45 und 3.46 durch einen Kreis gekennzeichnet ist.

Der Stern mit maximaler Masse im CHM-Bag180 Modell hat eine zentrale Dichte von  $\rho_c^{max} \approx 1.71/\text{fm}^3$  und besitzt in seinem Zentrum einen reinen Quarkkern umgeben von einer ausgedehnten gemischten Phase (siehe Abb. 3.47). Im CHM-Bag185 Modell dagegen besitzt der maximale Massenstern lediglich einen kleinen reinen Quarkkern; wobei sich der Wert der Gesamtmasse  $M_{max}$  im Vergleich zum CHM-Bag180 Modell nur minimal vergrößert hat. Die maximale Masse im CHM-Bag190 Modell hat sich dagegen merklich vergrößert, wobei der maximale Massenstern keinen reinen Quarkkern besitzt und somit lediglich aus rein hadronischer und gemischter Phase besteht.

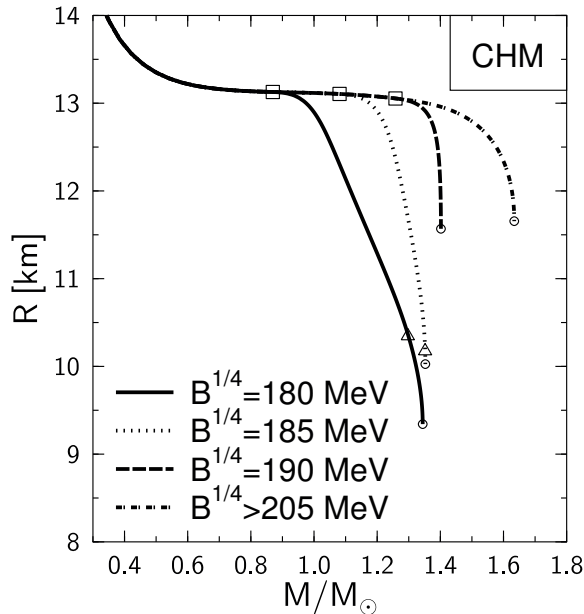


Abbildung 3.46: Radius  $R$  des Sterns als Funktion seiner Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$ .

In Abb. 3.46 erkennt man, dass die Kompaktheit der hybriden Sterne bei Erhöhung der Bag Konstante  $B$  abnimmt; der Radius der hybriden Sterne mit maximaler Masse sinkt, wenn man die Bag Konstante verkleinert.

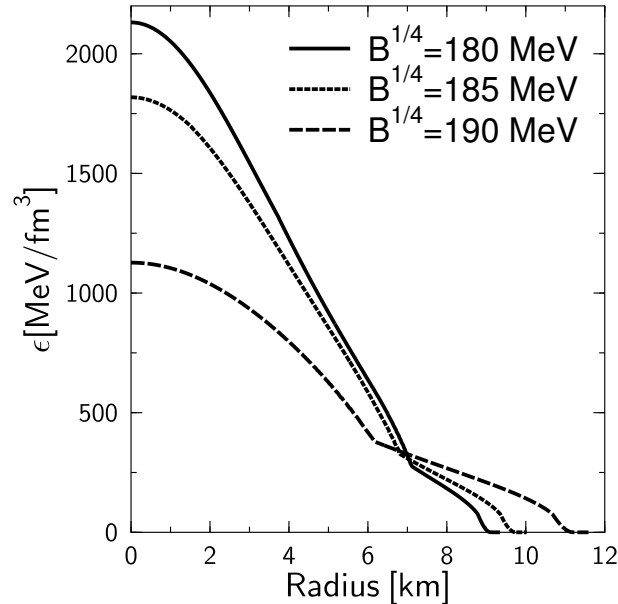


Abbildung 3.47: Energiedichtenprofile der hybriden Sterne mit maximaler Masse im CHM-Bag Modell für drei unterschiedliche Bag Konstanten  $B$ .

In Abb. 3.47 sind die Energiedichtenprofile der Sterne mit maximaler Masse dargestellt. Man erkennt deutlich den Beginn der gemischten Phase im Stern durch einen stark beschleunigten Anstieg der Dichte, wobei man das Ende der gemischten Phase anhand der Sternprofile nicht deutlich bestimmen kann, da sich die Zustandsgleichung bei dem Übergang zur reinen Quarkphase nicht drastisch verändert. Der maximale Massenstern mit  $B^{1/4} = 180$  MeV besitzt einen reinen Quarkkern, der sich bis zu einem Radius von 4 Kilometer ausdehnt, dann beginnt die gemischte Phase, die bei  $R \approx 7$  km endet. Sie ist ihrerseits umgeben von einer rein hadronischen Phase und der Kruste des Sterns. Bei  $B^{1/4} = 185$  MeV ist der reine Quarkkern auf einen Radius von  $R \approx 1.8$  km geschrumpft. Der innere Kern bei  $B^{1/4} = 190$  MeV besteht dagegen nur aus einer gemischten Phase, die sich bis zu einem Radius von  $R \approx 6$  km ausdehnt.

### Maxwell-Konstruktion des Quark-Hadron Phasenüberganges

Das exakte Verhalten des Hadron-Quark Phasenüberganges hängt von vielen, experimentell noch unbekanntenen Parametern ab (z.B. Oberflächenspannungen, Coulomb-Effekten, Screening Effekten, geometrischen Strukturen innerhalb der gemischten Phase). Die im vorigen Kapitel dargestellte Gibbskonstruktion vernachlässigt all diese Effekte. Die Miteinbeziehung solcher Korrekturen würde im Prinzip das Verhalten der Zustandsgleichung und somit die Sterneigenschaften beeinflussen. Sind die Oberflächenspannungen zwischen den jeweiligen Phasen relativ groß, so kann sogar die gemischte Phase vollkommen verschwinden, so dass eine scharf definierte Grenze zwischen der hadronischen und der Quarkphase erscheint. Man beschreibt dann den Hadron-Quark Phasenübergang mit Hilfe einer maxwell'schen Konstruktion. Hier bleibt beim Phasenübergang der Druck  $P$  und das barionische chemische Potential  $\mu_B$  konstant wobei die Dichten und das chemische Potential der Ladung  $\mu_e$  beim Phasenübergang diskontinuierlich springen.

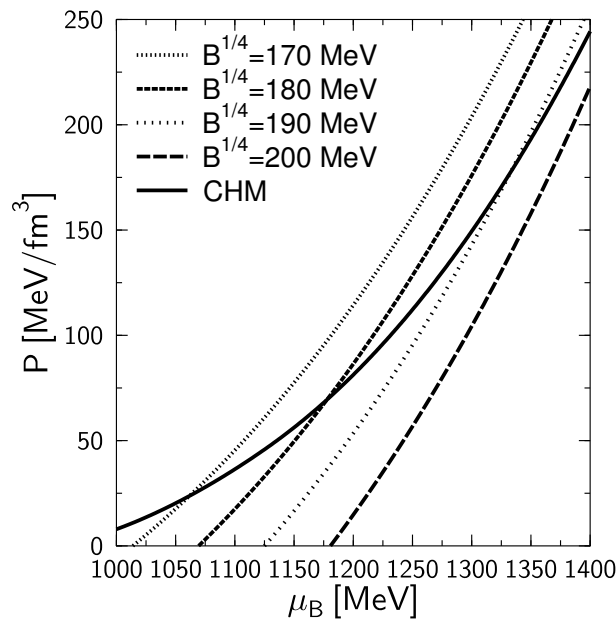


Abbildung 3.48: Druck  $P$  als Funktion des barionischen chemischen Potentials  $\mu_B$ .

In Abb. 3.48 sind die Funktionen  $P(\mu_B)$  des CHM und des MIT-Bag

Modells für unterschiedliche Bag Parameter dargestellt. Der maxwell'sche Phasenübergang vollzieht sich an dem Punkt, wo sich die ladungsneutralen Funktionen  $P(\mu_B)$  der einzelnen Phasen schneiden. Man erkennt, dass sich der Phasenübergang bei steigender Bag Konstante hin zu höheren Dichten verschiebt. Eine Maxwellkonstruktion ist für  $B^{1/4} \geq 200$  nicht mehr möglich, da es keinen Schnittpunkt mehr zwischen den Funktionen  $P(\mu_B)$  der einzelnen Phasen gibt; die hadronische Phase ist stets stabiler.

Die Sterneigenschaften der gravitativen Gesamtmassen und der Radien sind in der Abbildung 3.49 dargestellt. Für  $B^{1/4} \geq 178$  MeV werden alle Sterne nach Einsetzen des Phasenüberganges instabil und müssen zu schwarzen Löchern kollabieren, so dass innerhalb dieser Parameterwahl keine stabilen hybriden Sterne möglich sind. Für  $B^{1/4} \leq 178$  MeV sind dagegen hybride Sterne möglich. Die Sequenz der hadronischen Sterne ist von der der hybriden Sterne durch einen Instabilitätsbereich getrennt, wobei die Radien der hybriden Sterne kleiner sind als die rein aus hadronischer Materie zusammengesetzten.

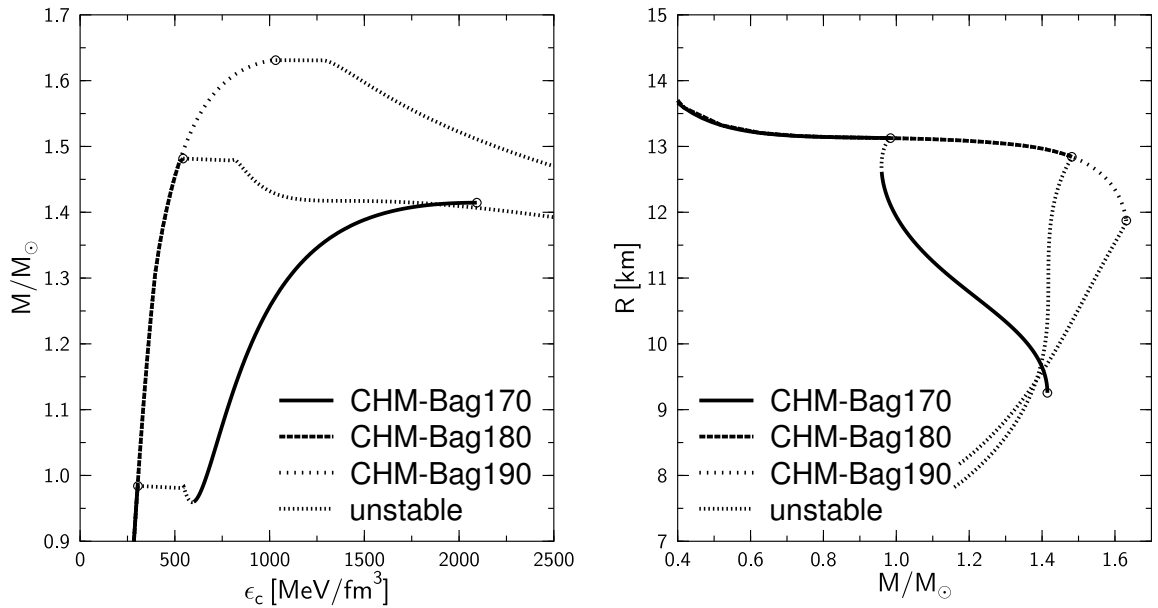


Abbildung 3.49: Links: Gravitative Masse  $M/M_\odot$  der hybriden Sterne in maxwell'scher Phasenkonstruktion als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$ . Rechts: Radius  $R$  als Funktion der gravitativen Masse  $M/M_\odot$ .

Das Auftreten solcher getrennter 'Familien' von Sternen ist bei anderen Modellen auch in Gibbs'scher Phasenkonstruktion möglich. Die zugehörigen Sterne nennt man Zwillingsterne; sie werden später ausführlich beschrieben.

Hybride Sterne die mittels einer maxwell'schen Konstruktion beschrieben sind, zeichnen sich durch einen Energiedichtesprung innerhalb des Sterns aus. In Abb. 3.50 erkennt man deutlich diesen Sprung in der Energiedichte, der die hadronische Phase streng von der Quarkphase trennt.

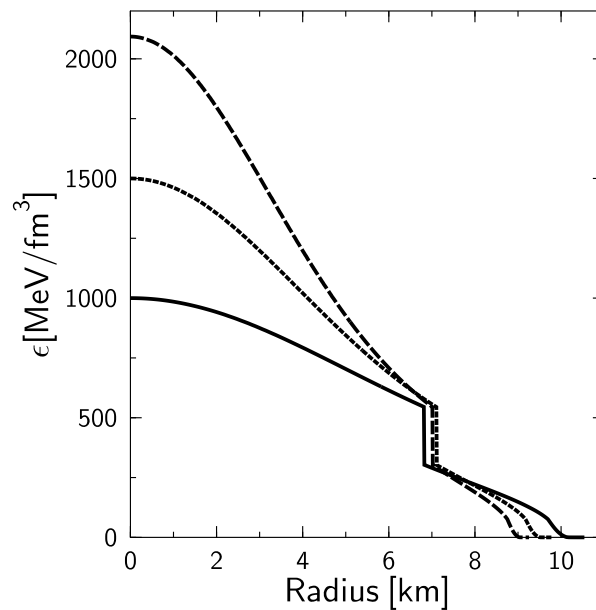


Abbildung 3.50: Drei Energiedichtenprofile von hybriden Sternen im CHM-Bag170 Modell in maxwell'scher Phasenkonstruktion.

### Vergleiche mit anderen hybriden Modellen

In diesem Unterkapitel werden weitere hybride Modelle vorgestellt und die zugehörigen Sterneigenschaften zusammengefasst. In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst die hadronische Phase, beschrieben durch das CHM beibehalten und der Phasenübergang zu anderen Quarkmodellen untersucht. Danach werden auch andere hadronische Modelle verwendet und ihr möglicher Hadron-Quark Phasenübergang zu unterschiedlichen Quarkmodellen untersucht.

### Gibbs-Phasenübergang vom CHM zum NJL-Modell

Der Hadron-Quark Phasenübergang des chiralen hadronischen Modells mit dem zuvor beschriebenen NJL-Quarkmodell ist nicht möglich, da die Druckflächen  $P(\mu_B, \mu_e)$  der beiden Modelle keine Schnittkurve besitzen (siehe Abb. 3.51). Die hadronische Phase in der Umgebung der ladungsneutralen Kurve des CHM ist stets stabiler als die Quarkphase, so dass keine Konstruktion einer gemischten Phase möglich ist.

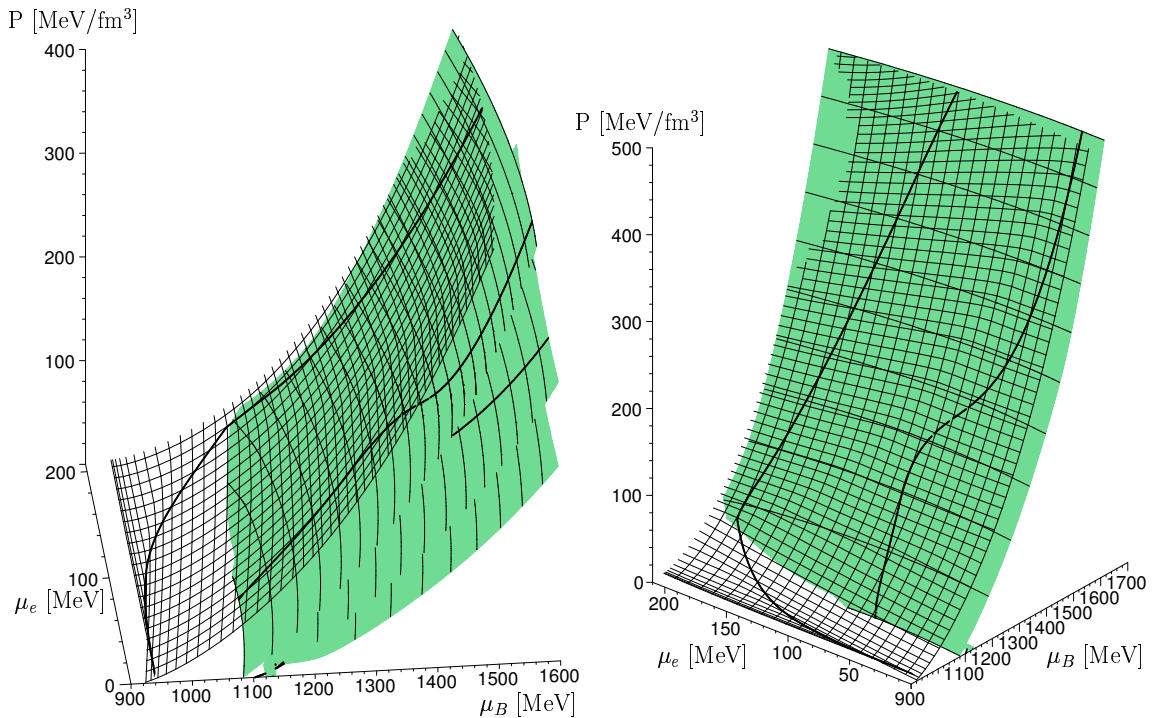


Abbildung 3.51: Unmöglichkeit der Konstruktion des Hadron-Quark Phasenübergang: Links sind die Druckflächen  $P(\mu_B, \mu_e)$  des CHM und des NJL-Modells ( $\xi = 0, 0.5, 1$ ) dargestellt. Die Kurven auf den Flächen sind die entsprechenden ladungsneutralen Kurven der Modelle im  $\beta$ -Gleichgewicht. Rechts sind die Druckflächen des CHM und des NJL( $\xi = 0$ ) unter einem anderen Blickwinkel abgebildet.

Es existiert lediglich ein, von den ladungsneutralen Kurven abgetrennter Bereich einer Schnittfunktion des CHM mit dem NJL( $\xi = 0$ ) Modell (siehe

Abb. 3.51, rechts:  $P \geq 350 \text{ MeV/fm}^3$  und  $\mu_e \geq 180 \text{ MeV}$ ). Für das Studium von ladungsneutraler Materie in kompakten Sternen ist jedoch diese Schnittmenge nicht von Bedeutung.

### Gibbs-Phasenübergang vom CHM zum SU(2)-NJL Modell mit Farbsupraleitung

Die im vorigen Unterkapitel dargestellte Unmöglichkeit eines Hadron-Quark Phasenübergang des chiralen hadronischen Modells mit dem NJL-Quark Modell ist jedoch nicht universell, da diese Folgerung von dem gewähltem Parametersatz der Modelle abhängt.

Im hier behandelten SU(2)-NJL Modell wurden strange Quarks vernachlässigt, die up- und down- Quarks als masselos angenommen, vektorielle Austauschwechselwirkungen nicht betrachtet ( $\xi = 0$ ) und die Lagrangedichte und die zugehörigen Parameterwerte besitzen eine leicht abgeänderte Form.<sup>17</sup> Neben dieser normalen, 2-Flavor Quarkmaterie (NQ-Phase), betrachteten Mei und Shokvoviy jedoch außerdem die Auswirkungen einer farbsupraleitenden Phase (2SC-Phase) auf den Hadron-Quark Phasenübergang.

Die drei Flächen des Drucks  $P(\mu_B, \mu_e)$  des CHM, der normalen Quarkphase NQ und der farbsupraleitenden 2SC-Phase sind in Abb. 3.52 dargestellt. In diesem hybriden CHM-SU(2)-NJL- Modell ist eine Drei-Phasen Gibbs Konstruktion eines Hadron-NQ-2SC-Phasenüberganges möglich. Bei niedrigen Drücken bzw. Dichten ( $\epsilon \leq 220 \text{ MeV/fm}^3$ ) besitzt die Materie eine rein hadronische Zusammensetzung. Für höhere Drücke beginnt dann zunächst eine gemischte Phase aus hadronischer und normaler Quarkmaterie (der Beginn dieser gemischten CHM-NQ Phase ist in Abb. 3.52 mit dem Symbol  $\square$  markiert). Diese gemischten Phase bewegt sich bei steigender Dichte entlang der Schnittfunktion der CHM- und NQ-Druckflächen, wobei der Volumenanteil der hadronischen Phase stetig abnimmt. Die Schnittkurve der CHM- und NQ-Druckflächen trifft am Punkt  $\triangle$  auf die Druckfläche der 2SC-Phase und leitet somit eine Drei-Phasen Gibbskonstruktion ein. Der an diesem Punkt noch vorliegende hadronische Volumenanteil (ca. 60 Prozent) geht abrupt

---

<sup>17</sup>Für Details des verwendeten Modells verweise ich den Leser auf [34, 35] und weiterführende Referenzen in diesen Artikeln.

in die 2SC-Phase über, so dass sich ein Dichtesprung bei gleich bleibendem Druck ergibt. Erhöht man den Druck noch weiter, so besteht die Materie aus einer gemischten NQ-2SC-Phase mit ungefähr gleichen Volumenanteilen.

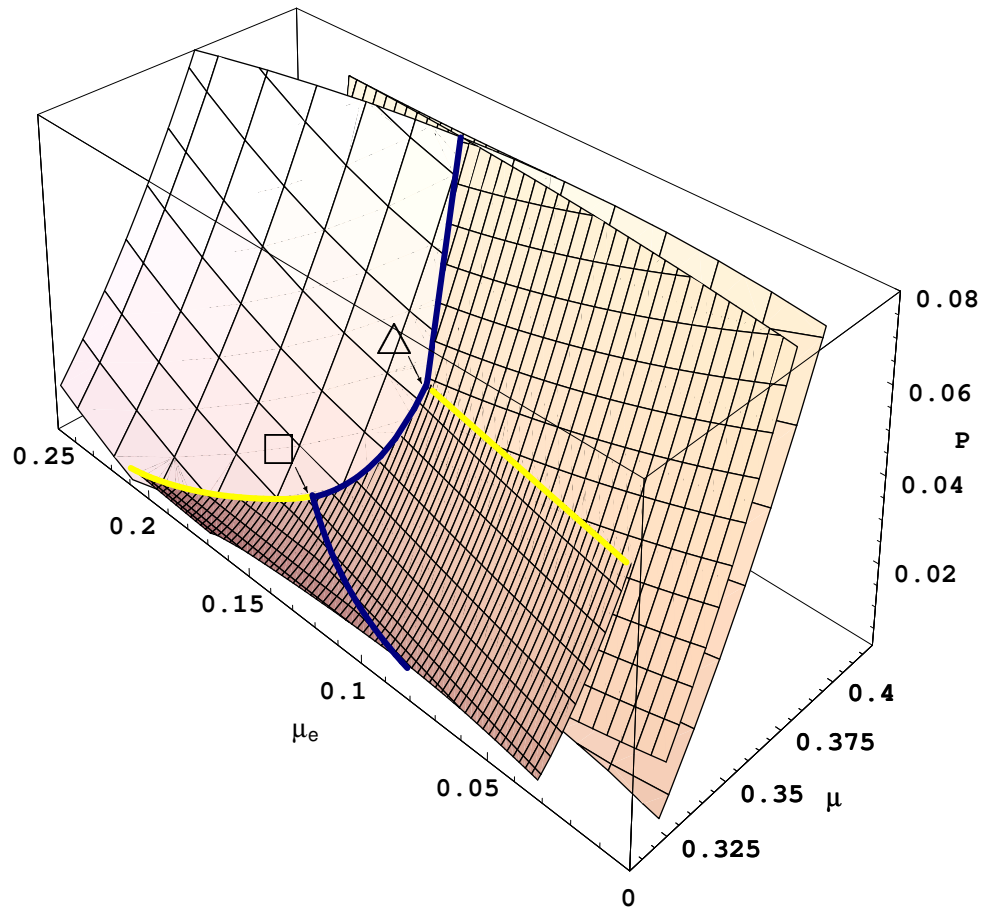


Abbildung 3.52: Drei-Phasen Gibbs Konstruktion eines Hadron-NQ-2SC-Phasenüberganges im CHM-SU(2)-NJL-Modell. Die Fläche des Drucks der hadronischen CHM-Phase (rechts vorne bei niedrigen Drücken) schneidet die Flächen des Drucks der NQ-Phase (links vorne, rechts hinten) und der 2SC-Phase (rechts vorne bei hohen Drücken).

In Abb. 3.53 ist die Rückseite der Abb. 3.52 und die entsprechenden ladungsneutralen Kurven der reinen NQ- und 2SC-Phase dargestellt. Da keine dieser Kurven die Schnittfunktion der NQ-2SC-Druckflächen schneidet, ist das hybride CHM-SU(2)-NJL-Modell auch für sehr hohe Drücke stets aus einer gemischten NQ-2SC-Phase zusammengesetzt.



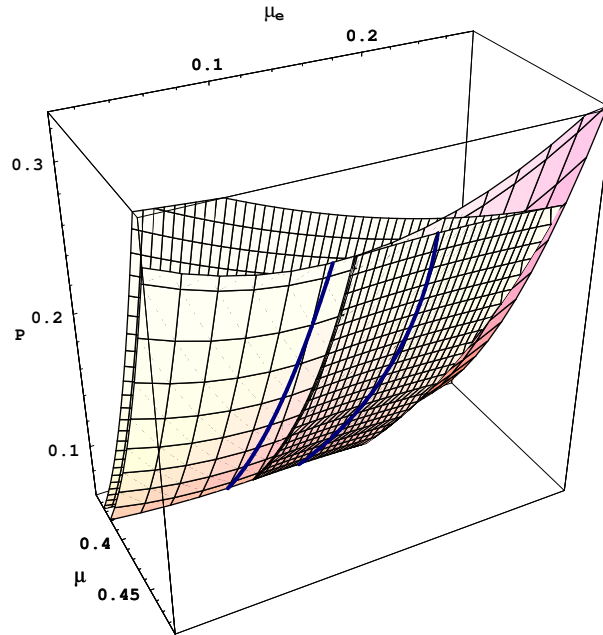


Abbildung 3.53: Rückseite der Abb. 3.52. Die Kurven auf den Flächen stellen die ladungsneutralen Funktionen der reinen NQ- und 2SC-Phase dar.

In Abb. 3.54 ist die Masse und der Radius der hybriden Sterne im CHM–SU(2)-NJL-Modell dargestellt. Zum Vergleich sind die Eigenschaften der reinen Quarksterne mit gemischter NQ-2SC-Phase im SU(2)-NJL-Modell hinzugefügt. Man erkennt in Abb. 3.54 (links) den kleinen Sprung der Energiedichte bei Einsetzen der Drei-Phasen Gibbs-Konstruktion (gekennzeichnet mit  $\Delta$ ). Die mit den Symbolen  $\circ$  gekennzeichneten Punkte entsprechen den zentralen Energiedichtenwerten, bei denen ein Erscheinen von seltsamen Quarks im System erwartet wird. Da die dargestellten Ergebnisse auf einem Quarkmodell ohne strange Quarks basieren, ist zu erwarten, dass sich die Sterneigenschaften für hybride Sterne mit höherer zentraler Energiedichte bei Miteinbeziehung von strange Quarks noch ändern.

Die Energiedichtenprofile der hybriden Sterne für vier unterschiedliche zentrale Energiedichten  $\epsilon_c$  sind in Abb. 3.55 dargestellt. Während der Stern mit maximaler Masse und höchster zentraler Energiedichte einen großen Kern ( $R \approx 8$  km) aus farbsupraleitender Quarkmaterie besitzt, bestehen Sterne mit geringer zentraler Energiedichte ( $\epsilon_c \leq 220$  MeV/fm<sup>3</sup>) in diesem Modell

lediglich aus hadronischer Materie. Die farbsupraleitende NQ-2SC-Phase ist im Stern durch einen Energiedichtesprung von der CHM-NQ-Phase getrennt.

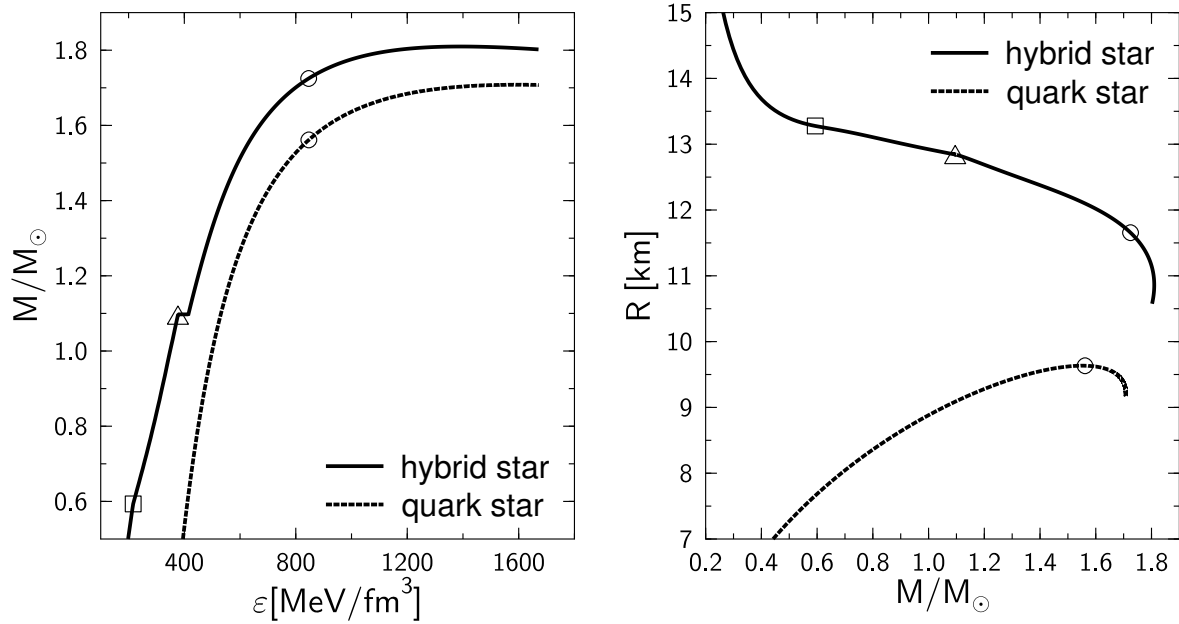


Abbildung 3.54: Eigenschaften der hybriden Sterne im CHM-SU(2)-NJL-Modell im Vergleich zu den im CHM-SU(2)-NJL-Modell berechneten Quarksternen mit NQ-2SC-Phase.

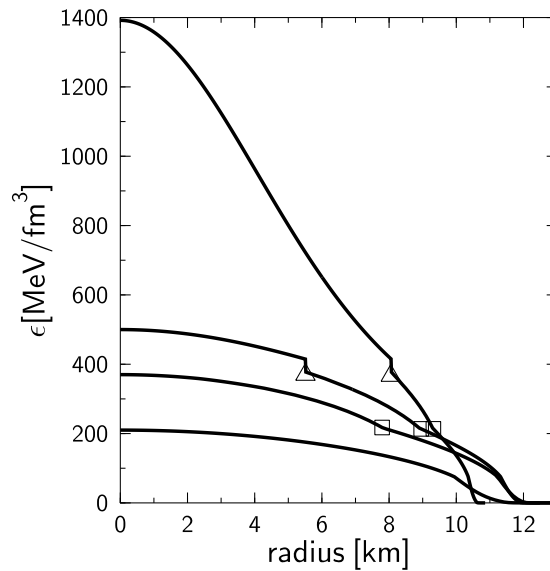


Abbildung 3.55: Energiedichtenprofile der hybriden Sterne im CHM-SU(2)-NJL-Modell.

### Gibbs-Phasenübergang vom CHM zum MQM-Modell

Der Versuch eines Hadron-Quark Phasenüberganges vom CHM zum MQM scheitert aufgrund der Nichtexistenz einer Schnittmenge der Druckflächen der einzelnen Modelle (siehe Abb. 3.56).

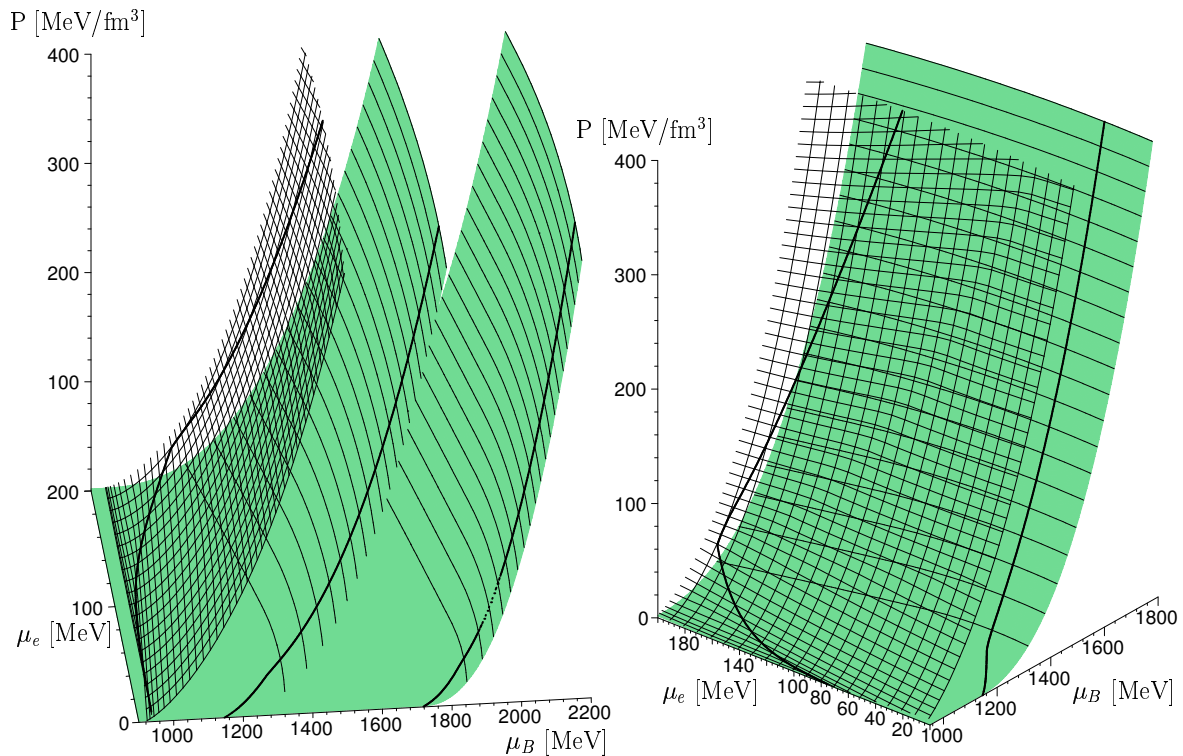


Abbildung 3.56: Unmöglichkeit der Konstruktion des Hadron-Quark Phasenübergang. Dargestellt sind die Druckflächen  $P(\mu_B, \mu_e)$  des CHM und des MQM-Modells (links:  $\gamma = 1, 1.5$ , rechts:  $\gamma = 1.5$ ).

### Gibbs-Phasenübergang von Walecka-Modellen zu unterschiedlichen Quarkmodellen

Wir betrachten im folgenden den möglichen Phasenübergang von den im Unterkapitel 3.1 beschriebenen hadronischen Walecka-Modellen (NLZ, NLZYY, TM1, TM1YY) zu den Quarkmodellen MIT-Bag, NJL und MQM.

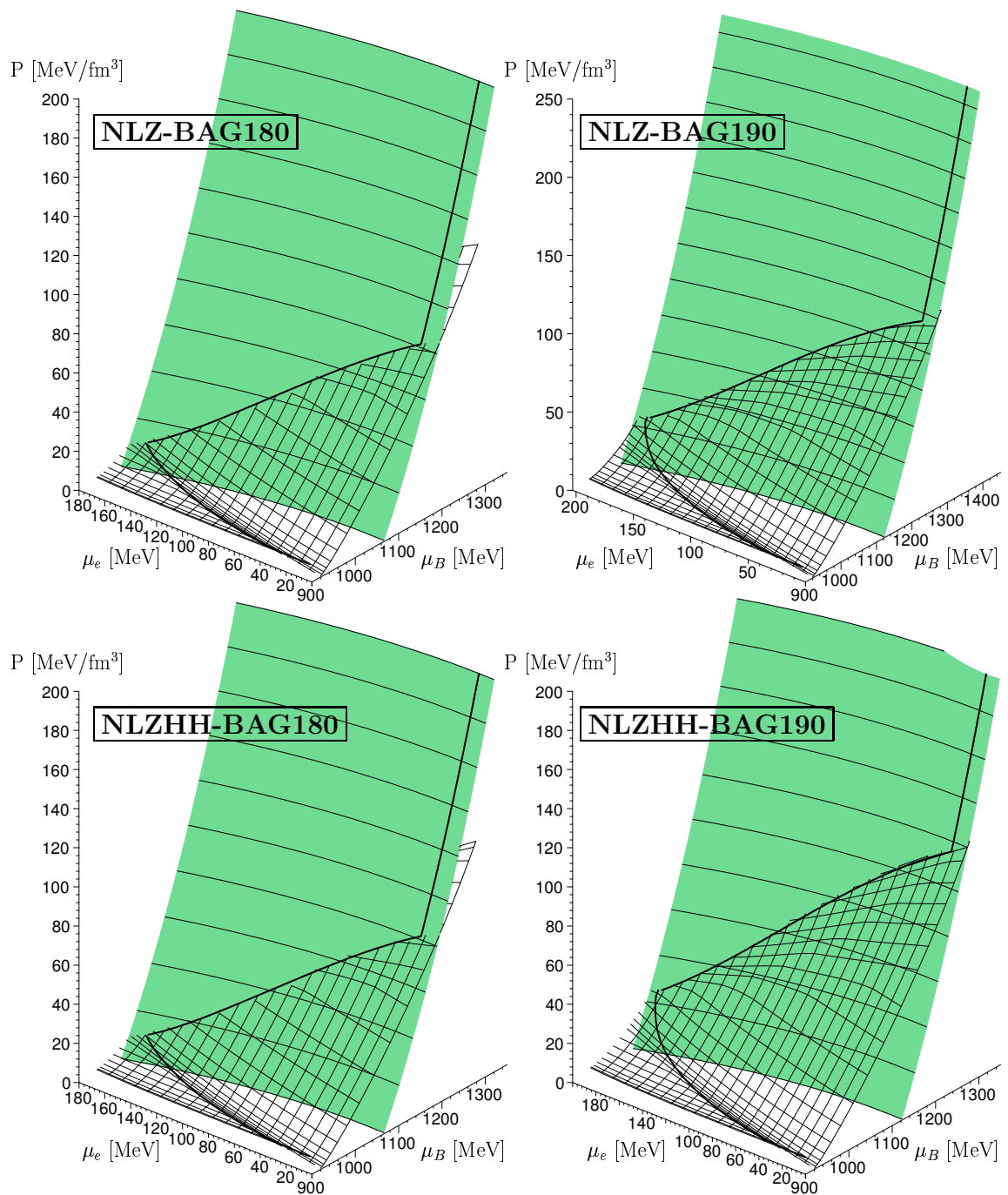


Abbildung 3.57: Druckflächen  $P(\mu_B, \mu_e)$  des hadronischen NLZ-, NLZYY-Modells und des MIT-Bag-Modells ( $B^{1/4} = 180, 190$  MeV).

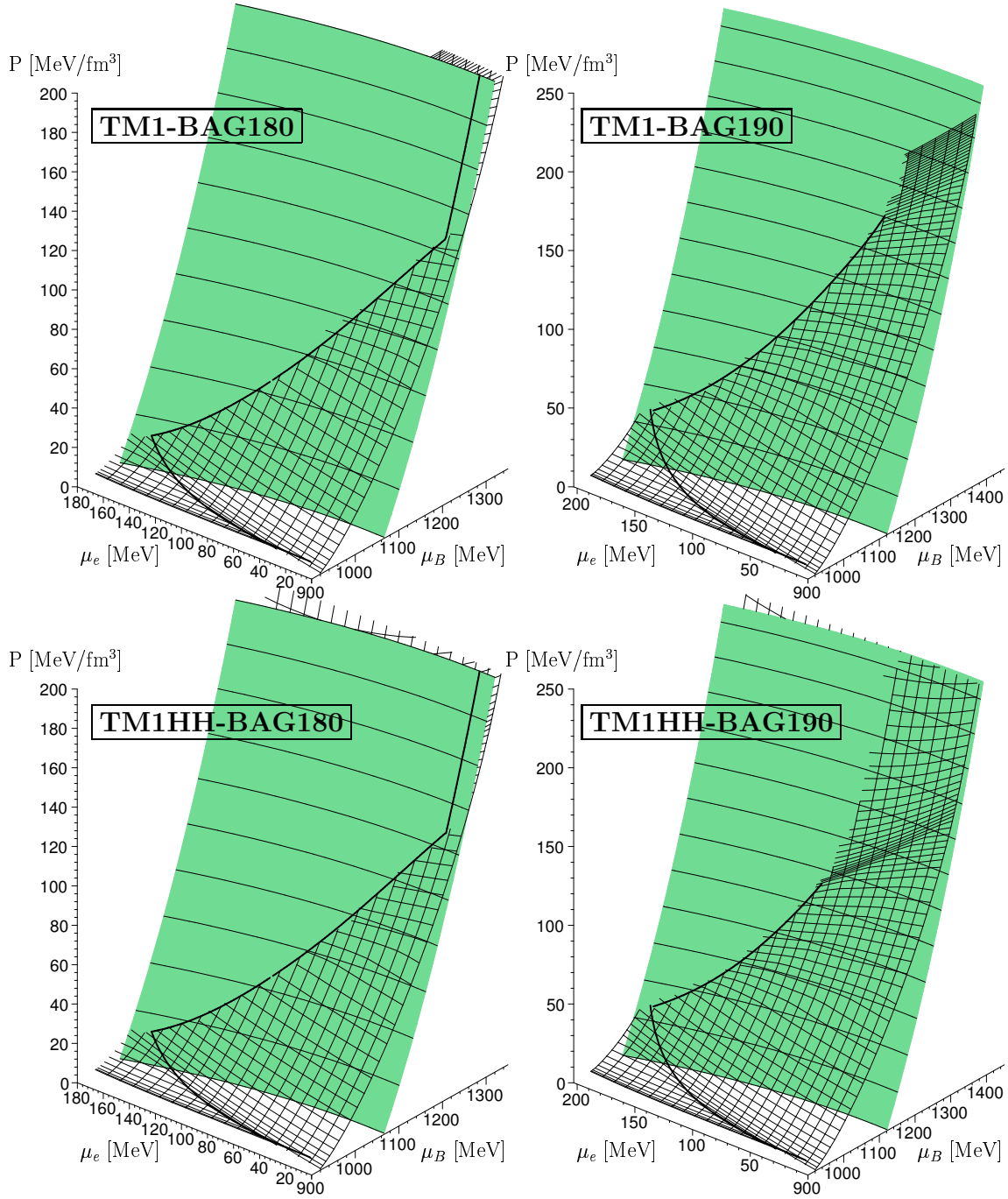


Abbildung 3.58: Druckflächen  $P(\mu_B, \mu_e)$  des hadronischen TM1-, TM1YY-Modells und des MIT-Bag-Modells ( $B^{1/4} = 180, 190$  MeV).

In Abb. 3.57 sind die Druckflächen des NLZ-, NLZYY-Modells und des MIT-Bag-Modells für  $B^{1/4} = 180, 190$  MeV dargestellt. Eine Gibbs Konstruktion eines Hadron-Quark Phasenüberganges ist in allen Fällen möglich. Die im reinen NLZ-, NLZYY-Modell auftretenden Probleme der negativen effektiven nukleonischen Massen treten im hybriden Modell mit  $B^{1/4} \leq 190$  MeV nicht auf, da der Phasenübergang vor dem Entstehen der negativen Werte auftritt.

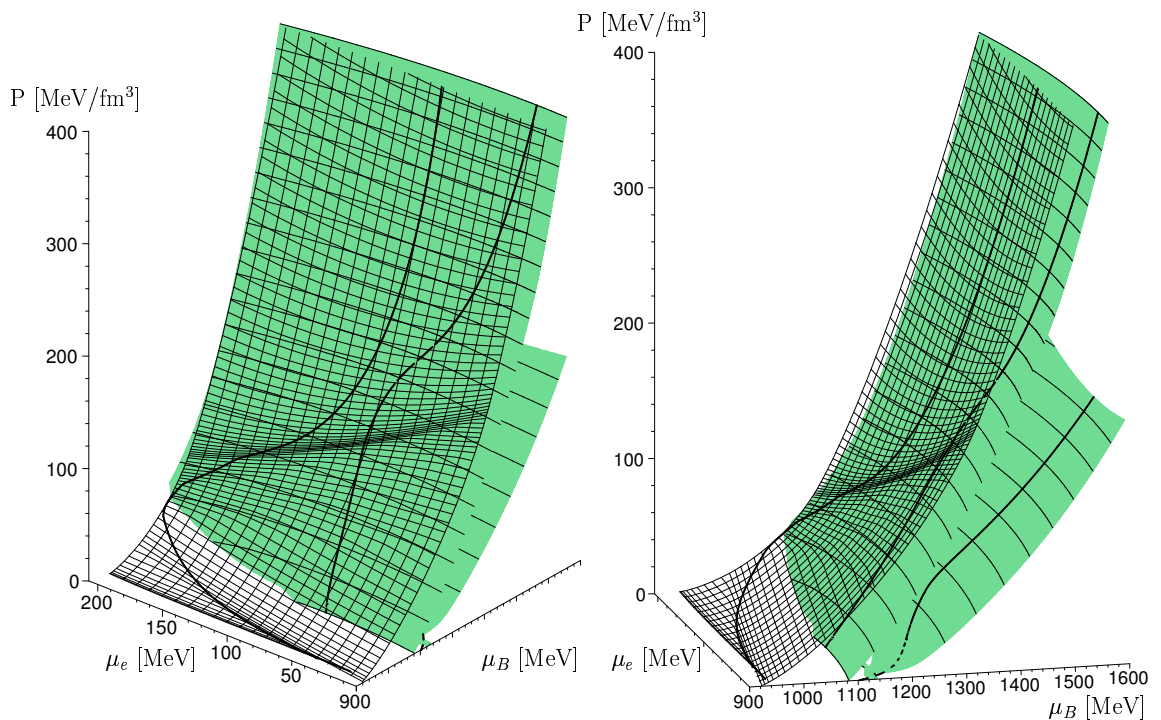


Abbildung 3.59: Druckflächen  $P(\mu_B, \mu_e)$  des hadronischen TM1YY-Modells und des NJL-Modells ( $\xi = 0, 1$ ).

In Abb. 3.58 sind die Druckflächen des TM1-, TM1YY-Modells und des MIT-Bag-Modells für  $B^{1/4} = 180, 190$  MeV dargestellt. Eine komplikationslose Gibbs Konstruktion des Hadron-Quark Phasenüberganges ist nur für  $B^{1/4} \leq 188$  MeV möglich, da für höhere Werte der Bag-Konstanten  $B$  keine reine Quarkphase für hohe Drücke möglich ist (siehe Abb. 3.57 rechts). Die ladungsneutrale Kurve der reinen Quarkphase kann in diesen Fällen die Schnittkurve der Druckflächen nicht schneiden, da die hadronische Phase für hohe Drücke und niedrige elektrische chemische Potentiale  $\mu_e$  wieder stabiler

als die Quarkphase wird. Das System bleibt somit weiter in der gemischten Phase und erreicht im TM1-Modell den Bereich negativer effektiver Nukleonenmassen.

Eine Phasenübergangskonstruktion vom NLZ-, NLZYY-, TM1- und TM1YY-Modell zum NJL- und MQM-Modell scheitert wie beim CHM aufgrund der fehlenden Schnittkurven der Druckflächen. In Abb. 3.59 sind die Druckflächen des TM1YY-Modell und des NJL-Modells ( $\xi = 0, 1$ ) dargestellt. Die starke Änderung der Steigung der Druckfläche des TM1YY-Modells (schwarzer Bereich der sonst transparenten Fläche in Abb. 3.59) ist bedingt durch die Entstehung von hyperonischen Teilchen im System.

### Vergleiche der Materie- und Sterneigenschaften

In Abb. 3.60 sind die relativen Teilchenhäufigkeiten als Funktion der barionischen Dichte  $\rho/\rho_0$  für die hybriden Modelle NLZYY-B180 und TM1YY-B180 dargestellt.

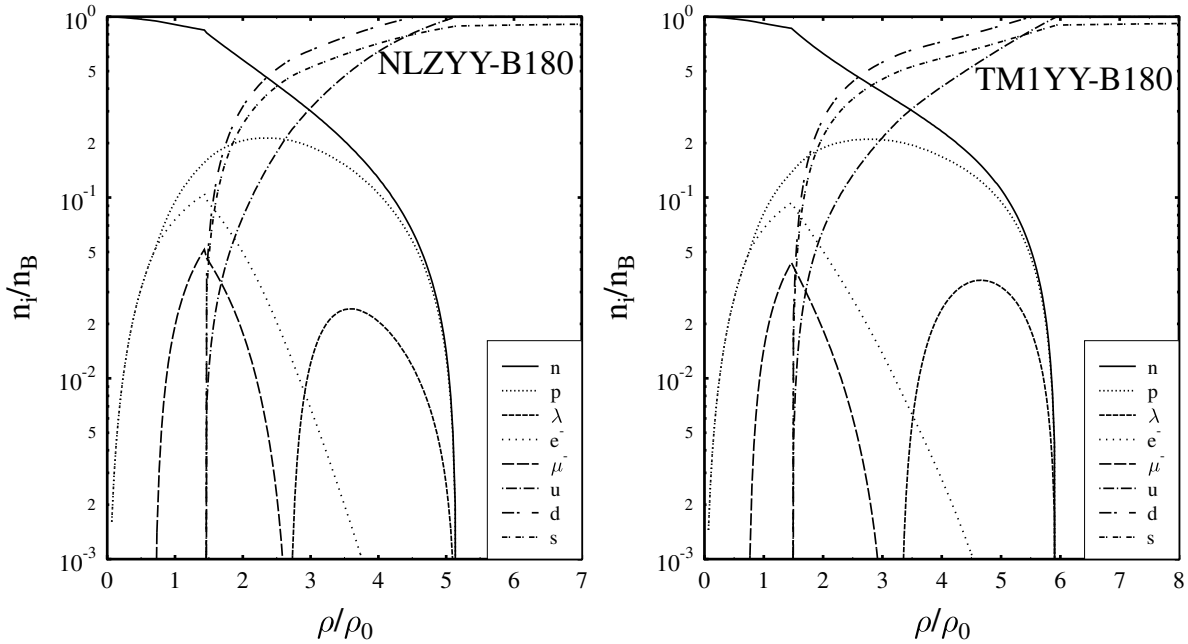


Abbildung 3.60: Relativen Teilchenhäufigkeiten als Funktion der barionischen Dichte  $\rho/\rho_0$  für die hybriden Modelle NLZYY-B180 und TM1YY-B180.

Die gemischte Phase beginnt in beiden Modellen bei  $\rho \approx 1.5 \rho_0$  und endet im NLZYY-B180 Modell bei  $\rho \approx 5.1 \rho_0$  und im TM1YY-B180 Modell bei

$\rho \approx 5.9 \rho_0$ . Wie im CHM-B180 Modell entsteht als einziges hyperonisches Teilchen das  $\Lambda$ -Hyperon in der gemischten Hadron-Quark Phase.

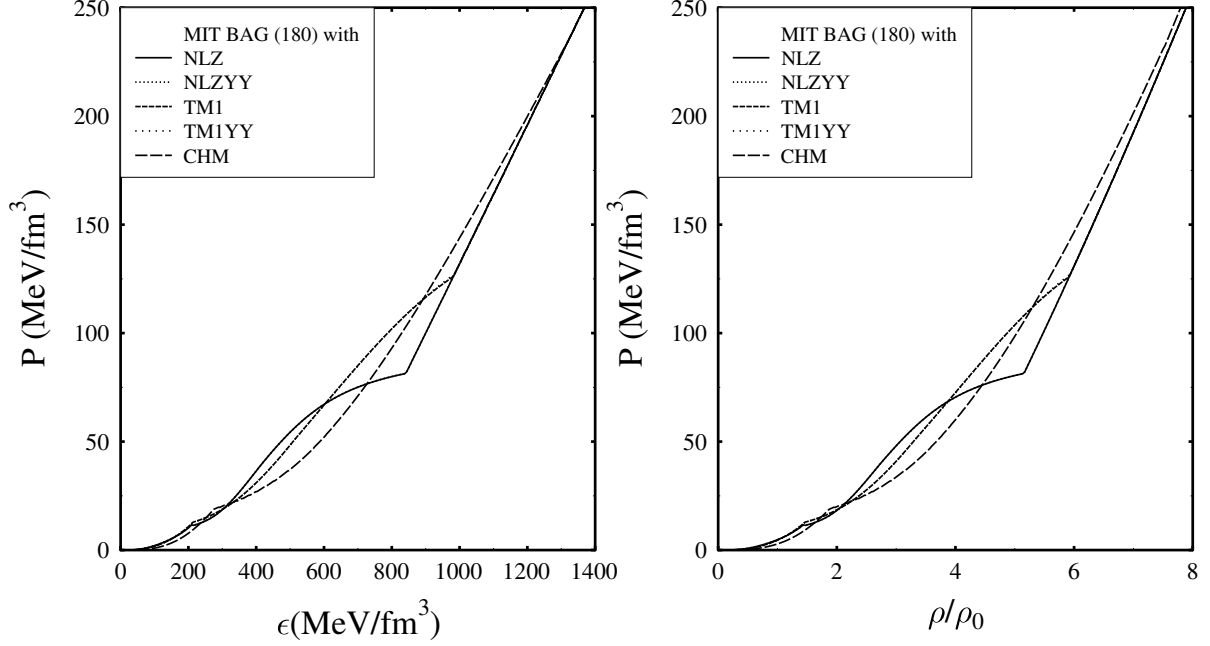


Abbildung 3.61: Zustandsgleichungen der hybriden Modelle mit  $B^{1/4} = 180$  MeV. Die Resultate der Zustandsgleichungen der NLZ-B180 und NLZYY-B180 bzw. der TM1-B180 und TM1YY-B180 Modelle sind weitgehend identisch.

Die Zustandsgleichungen der jeweiligen Modelle sind in Abb. 3.61 dargestellt. Während sich die rein hadronischen Bereiche der Zustandsgleichung bei niedrigen Drücken nur wenig voneinander unterscheiden und die Bereiche reiner Quarkmaterie identisch sind (MIT-Bag Modell mit  $B^{1/4} = 180$  MeV), weichen die Bereiche der gemischten Phase der Zustandsgleichung stark voneinander ab. Durch die Vernachlässigung der zusätzlichen hyperonischen Wechselwirkung (NLZ-, TM1-Modell) werden die relativen Teilchenhäufigkeiten und die zugehörigen Zustandsgleichungen dieser hybriden Modelle nur minimal verändert.

In der Abb. 3.62 ist die gravitative Gesamtmasse der hybriden Sterne des NLZ-Bag- und des NLZYY-Bag-Modells als Funktion der zentralen barioni-



schen Dichte  $\rho_c$  für unterschiedliche Werte des Bag Parameters  $B$  dargestellt.

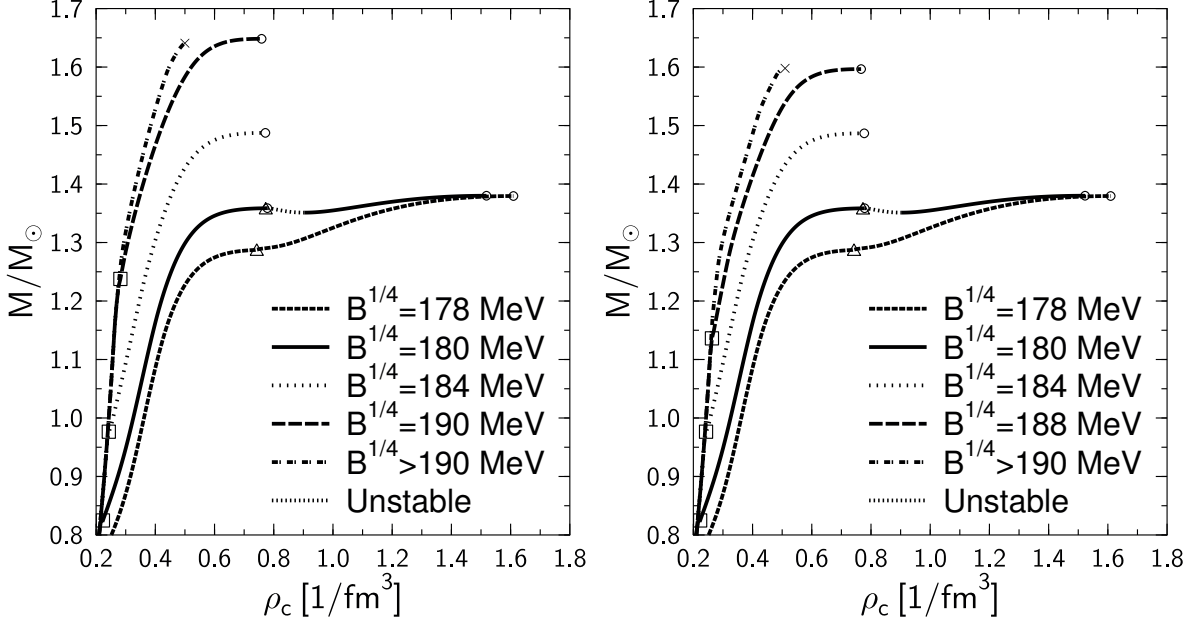


Abbildung 3.62: Gravitative Gesamtmasse des NLZ-Bag- und des NLZYY-Bag-Modells als Funktion der zentralen barionischen Dichte  $\rho_c$  für unterschiedliche Werte des Bag Parameters  $B$ .

Für Bag Konstanten  $B^{1/4} > 190$  MeV ist keine Gibbs Konstruktion mehr möglich, da die hadronische Phase stets stabiler ist; die rein hadronische  $M(\rho_c)$ -Kurve endet dann bei der Entstehung von negativen effektiven Massen im Zentrum der Sterne (gekennzeichnet mit einem Kreuz in Abb. 3.62). Durch Verringerung des Wertes der Bag Konstanten  $B$  im Bereich  $180 < B^{1/4}/\text{MeV} \leq 190$  erniedrigt man die maximale Masse  $M_{max}$  der hybriden Sterne (gekennzeichnet mit dem Symbol  $\circ$  in Abb. 3.62). Für Bag Konstanten  $B^{1/4} \leq 180$  MeV entsteht ein neues Maximum der  $M(\rho_c)$ -Kurve bei höheren Dichten. Dieses Maximum wird verursacht durch die reine Quarkphase im Sterninneren, die bei kleineren Bag Konstanten (d.h. bei früher einsetzendem Phasenübergang) und hohen Dichten ausgeprägt ist. In einer kleinen Umgebung um  $B^{1/4} \approx 180$  MeV entstehen zwei stabile Sternkurven, die durch einen instabilen Bereich (gepunktete Bereiche der  $M(\rho_c)$ -Kurve in Abb. 3.62) voneinander getrennt sind; die entsprechenden Sterne gleicher Ge-

samtmasse der beiden Sternfamilien nennt man Zwillingsterne (siehe Kapitel 3.4).

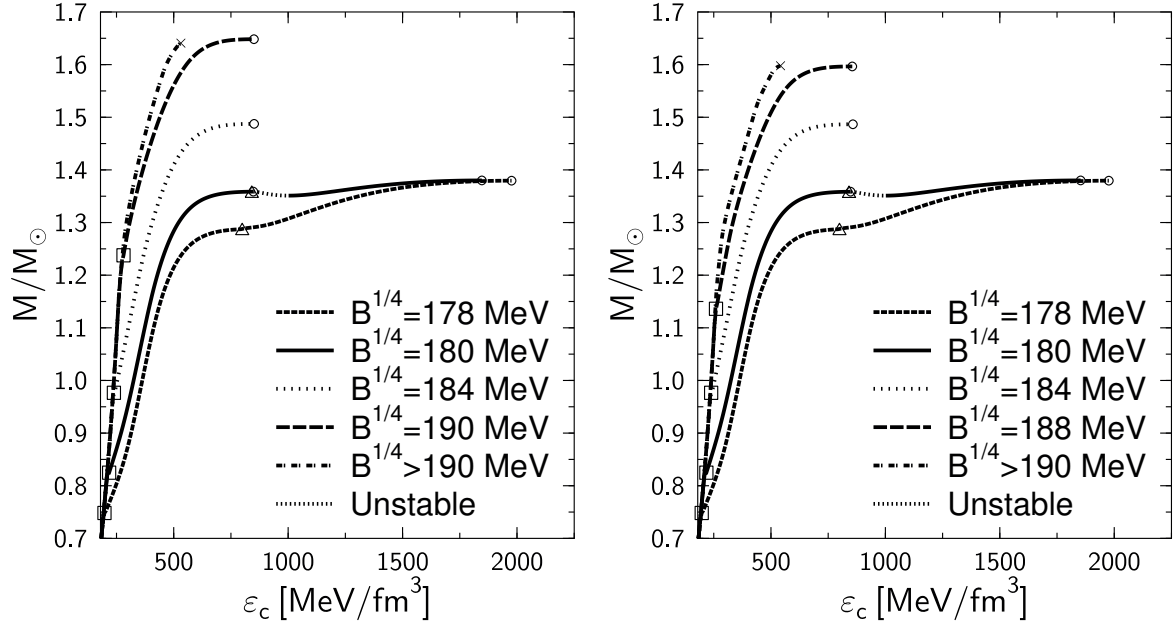


Abbildung 3.63: Gravitative Gesamtmasse des NLZ-Bag- und des NLZYY-Bag-Modells als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  für unterschiedliche Werte des Bag Parameters  $B$ .

Das erste Erscheinen der gemischten Phase im Zentrum der Sterne ist in der Abb. 3.62 wiederum mit dem Symbol  $\square$  gekennzeichnet; das Ende der gemischten Phase und somit der Anfang der reinen Quarkphase ist mit  $\triangle$  markiert. Eine reine Quarkphase in stabilen hybriden Sternen ist in den NLZ-Bag- und NLZYY-Bag-Modellen nur möglich falls  $B^{1/4} < 182$  MeV ist. Für  $182 \leq B^{1/4}/\text{MeV} \leq 190$  ist der maximale Massenstern im Kern lediglich aus gemischter Hadron-Quark-Phase zusammengesetzt. Bei  $B^{1/4} = 180$  MeV entsteht der Instabilitätsbereich, der die Sequenzen der Zwillingsterne voneinander trennt gerade dann, wenn sich im Zentrum der Sterne die reine Quarkphase bildet. Die Quarkstern ähnlichen Zwillingsterne der zweiten Sequenz besitzen einen ausgedehnten reinen Quarkkern. Der Vollständigkeit halber ist in Abb. 3.63 die Gesamtmasse der Sterne gegen die zentrale Energiedichte  $\epsilon_c$  aufgetragen.

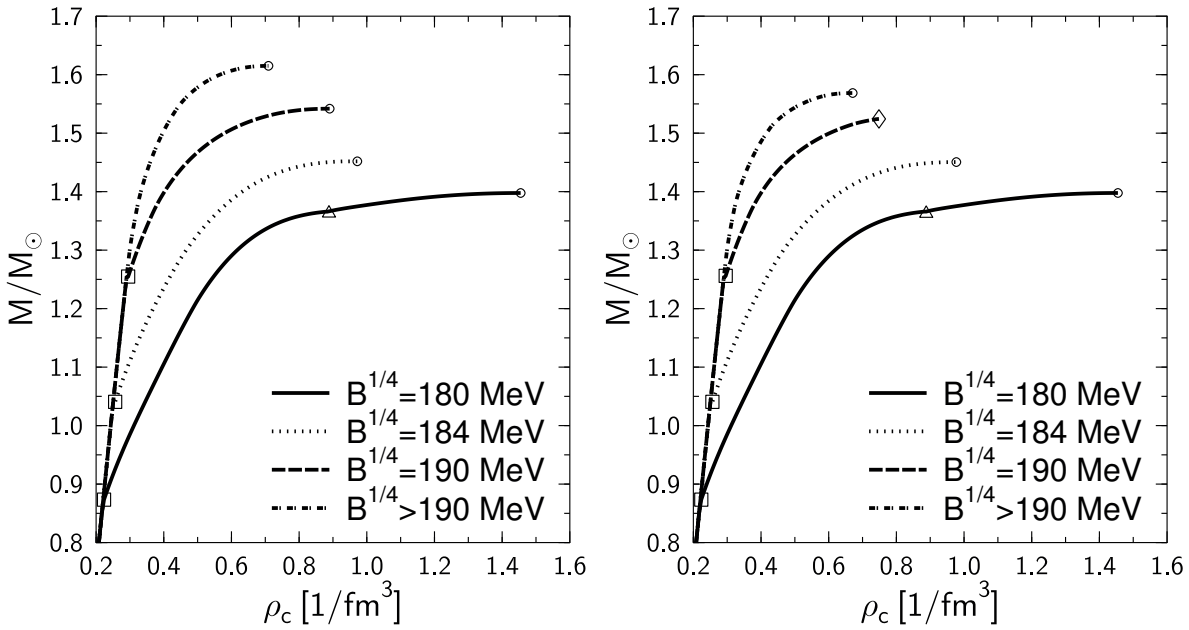


Abbildung 3.64: Gravitative Gesamtmasse des TM1-Bag- und des TM1YY-Bag-Modells als Funktion der zentralen barionischen Dichte  $\rho_c$  für unterschiedliche Werte des Bag Parameters  $B$ .

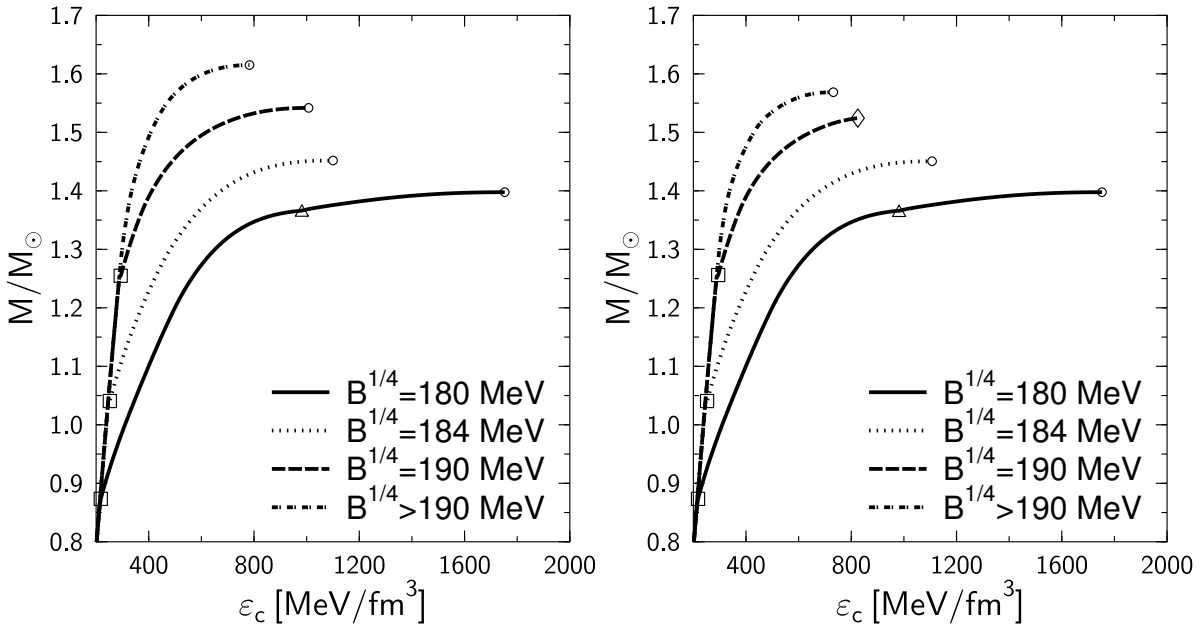


Abbildung 3.65: Gravitative Gesamtmasse des TM1-Bag- und des TM1YY-Bag-Modells als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  für unterschiedliche Werte des Bag Parameters  $B$ .

In den Abbildungen 3.64 und 3.65 ist die Gesamtmasse der hybriden Sterne im TM1-Bag- und TM1YY-Bag-Modell als Funktion der zentralen Barioendichte bzw. der zentralen Energiedichte dargestellt. Wie bei der Gibbs Konstruktion des Hadron-Quark Phasenüberganges des CHM-Bag Modells entstehen im TM1-Bag- und TM1YY-Bag-Modell keine Zwillingsterne.

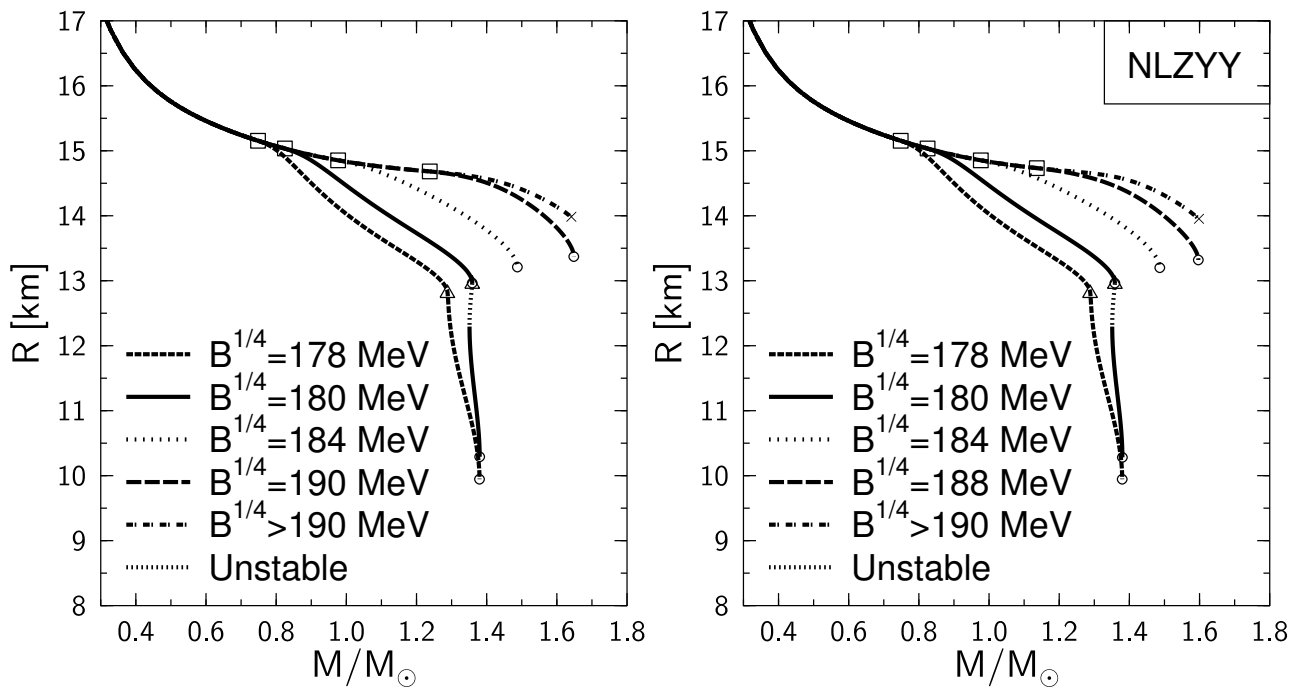


Abbildung 3.66: Radius  $R$  als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$  der hybriden Sterne im NLZ-Bag- und des NLZYY-Bag-Modell.

Der in den jeweiligen Modellen berechnete Sternradius  $R$  ist in den Abbildungen 3.66 und 3.67 dargestellt. In allen Modellen erkennt man den rapiden Abfall des Radius bei Existenz eines reinen Quarkkerns im Zentrum der Sterne ( $\Delta$ -Punkt in den Abbildungen). In den Modellen, bei denen sich lediglich eine gemischte Phase formt, ist der entsprechende Sternradius dem von Neutronensternen ähnlich. Der Radius der Quarkstern-ähnlichen Zwillingsterne der zweiten Sternsequenzen ist bis zu 3 km kleiner als der der ersten Sequenzen (Neutronenstern-ähnliche Zwillingsterne).

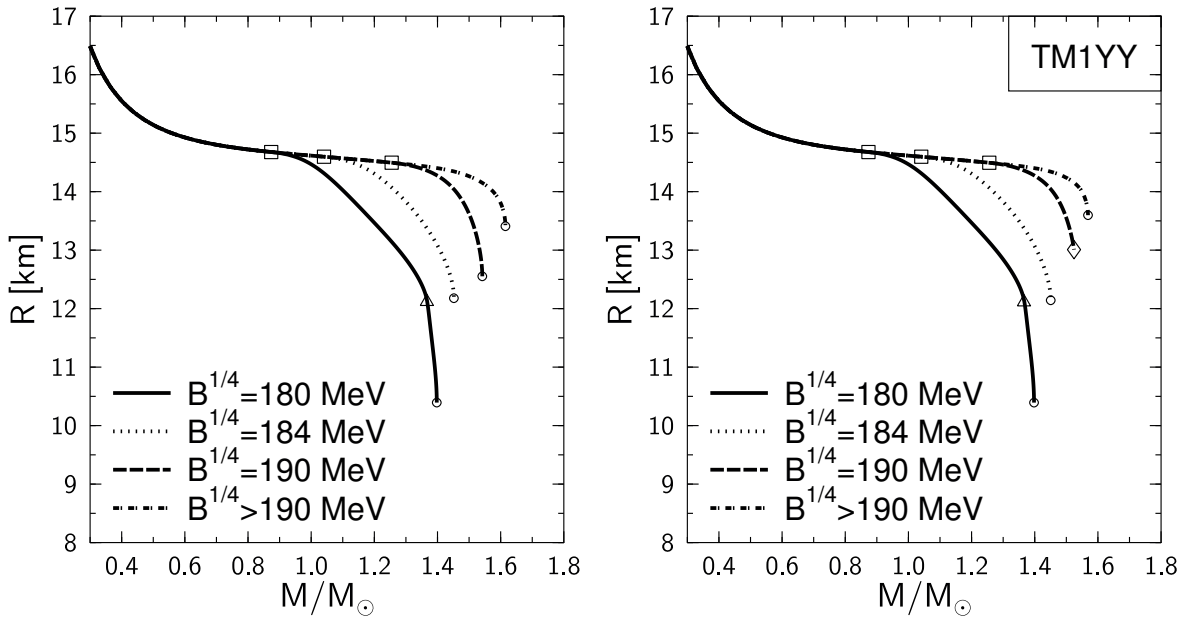


Abbildung 3.67: Radius  $R$  als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$  der hybriden Sterne im TM1-Bag- und des TM1YY-Bag-Modell.

### Maxwell-Konstruktion des Quark-Hadron Phasenüberganges

In diesem Unterkapitel wurde die Maxwellkonstruktion zur Beschreibung des Hadron-Quark Phasenüberganges benutzt. Wie wir schon im CHM-Bag Modell sahen, wird die Existenz von Zwillingsternen durch die Maxwellkonstruktion erleichtert. Während man bei der Gibbs Konstruktion des Hadron-Quark Phasenüberganges lediglich in den NLZ-Bag und NLZYY-Bag Modellen in einem engen Fenster der Bag-Konstanten im Bereich  $B^{1/4} \approx 180$  MeV Zwillingsterne fand, ist unter Verwendung der Maxwellkonstruktion in allen Modellen eine Zwillingsternentstehung in einem großen Wertebereich der Bag Konstanten möglich (siehe Abb. 3.68). Man erkennt deutlich die bei der maxwell'schen Konstruktion üblichen Dichtesprünge bei Beginn des Phasenüberganges. Im TM1YY-Bag-Modell (Abb. 3.68 links) sind im Parameterbereich  $B^{1/4} > 177$  MeV keine stabilen hybriden Sterne möglich, da die Sterne bei Beginn des Phasenüberganges instabil werden und keine zweite Sequenz stabiler hybrider Sterne existiert. Für  $B^{1/4} \leq 177$  MeV entsteht eine stabile Sequenz von hybriden Sternen mit reinem Quarkkern, die

durch einen Instabilitätsbereich von der ersten Sequenz abgetrennt ist. Der Wert der maximalen Masse  $M_{max}$  der Neutronensterne der ersten Sequenz lässt sich verringern, indem man die Bag Konstante verkleinert. Der Wert der maximalen Masse  $M_{max}$  der zweiten Sequenz der hybriden Sterne mit reinem Quarkkern bleibt hingegen bei Änderung der Bag Konstante weitgehend konstant. Im NLZYY-Bag-Modell ist das Parameterfenster der Bag Konstanten bei dem stabile hybride Sterne möglich sind noch breiter als im TM1YY-Bag-Modell.

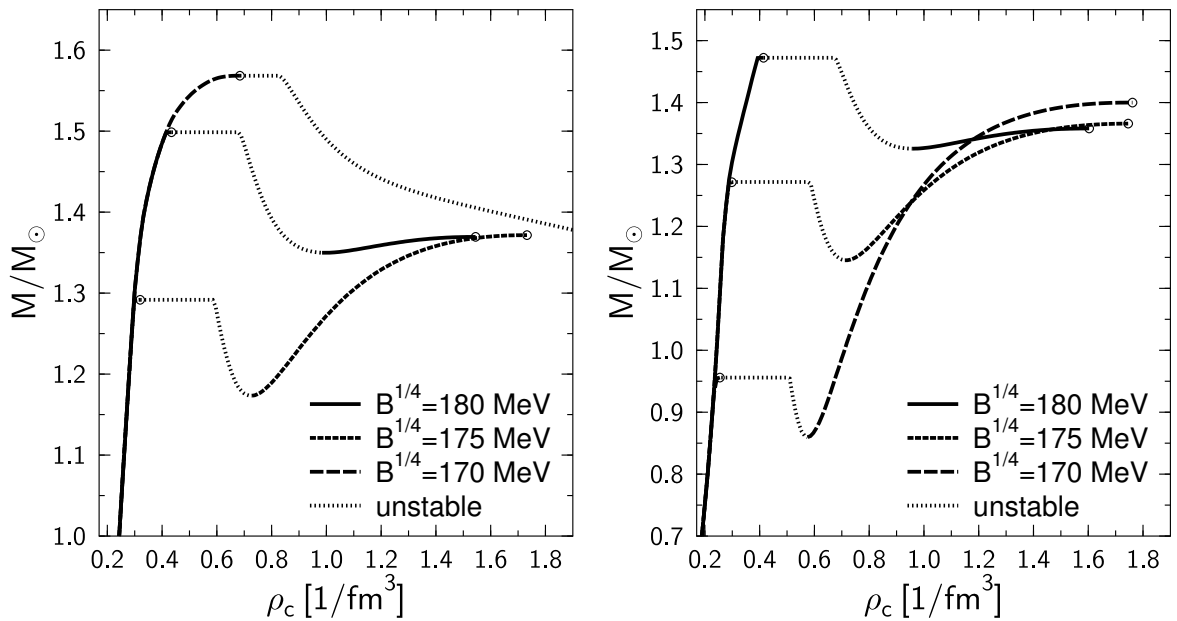


Abbildung 3.68: Gravitative Gesamtmasse des TM1YY-Bag-(links) und NLZYY-Bag-Modells(rechts) als Funktion der zentralen barionischen Dichte  $\rho_c$  für unterschiedliche Werte des Bag Parameters  $B$  unter Verwendung der Maxwell'schen Konstruktion des Hadron-Quark-Phasenüberganges.

Der Sternradius  $R$  ist in Abb. 3.69 dargestellt. Man erkennt, dass sich die Sternradien der Zwillingsterne der ersten und zweiten Sequenz um bis zu 5 km unterscheiden können.

Der mögliche Kollaps von einem instabil werdenden Neutronenstern der ersten Sequenz hin zu einem hybriden Stern der zweiten Sequenz soll im folgenden Unterkapitel betrachtet werden.

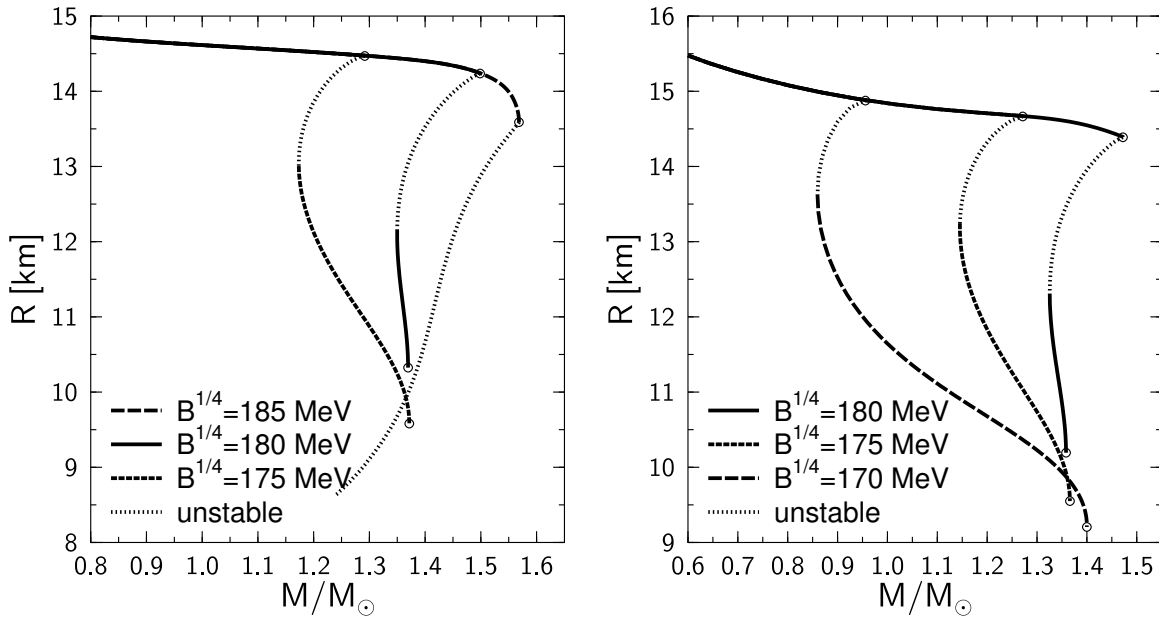


Abbildung 3.69: Radius  $R$  als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$  der hybriden Sterne im TM1YY-Bag- (links) und NLZYY-Bag-Modell (rechts) unter Verwendung der maxwell'schen Konstruktion des Hadron-Quark-Phasenüberganges.

### 3.4 Zwillingsterne, Sternübergänge und der Gravitationskollaps

Wie wir im vorigen Unterkapitel, bei der Betrachtung der Eigenschaften von hybriden Sternen, d.h. von Sternen mit Hadron-Quark Phasenübergang sahen, ist die Entstehung von Zwillingssternen bei Verwendung einer Gibbs'schen Phasenkonstruktion möglich (NLZ-Bag180 und NLZYY-Bag180 Modell). Bei maxwell'scher Phasenkonstruktion dagegen ist sie sogar sehr wahrscheinlich. Der in der Natur realisierte Hadron-Quark Phasenübergang wird sich zwischen diesen beiden extremen Varianten aufhalten, so dass die gleichzeitige Existenz von zwei separaten Sequenzen von kompakten Sternen im Bereich des möglichen liegt.

Da sich bei Existenz solcher stabiler, separater Sequenzen von kompakten Sternen interessante, nachweisbare astrophysikalischen Konsequenzen ergeben, sind die Eigenschaften von Zwillingssernen und mögliche Übergänge zwischen ihnen in diesem Unterkapitel näher betrachtet. Zunächst werden die Eigenschaften von Zwillingssernen behandelt, die aufgrund eines Hadron-Quark Phasenüberganges entstehen. Danach werden wir uns der Frage widmen, inwieweit man durch Observation von 'Zwillingssereneigenen astrophysikalischen Erscheinungen' auf die Existenz einer Quark-Gluon Plasma Phase im Inneren der kompakten Sterne schließen kann.

### Zwillingssermentstehung aufgrund eines Quark-Hadron Phasenüberganges

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften von Zwillingssernen zunächst exemplarisch am Beispiel des NLZYY-Bag180 Modells unter Verwendung der Gibbs'schen Phasenübergangskonstruktion dargestellt.

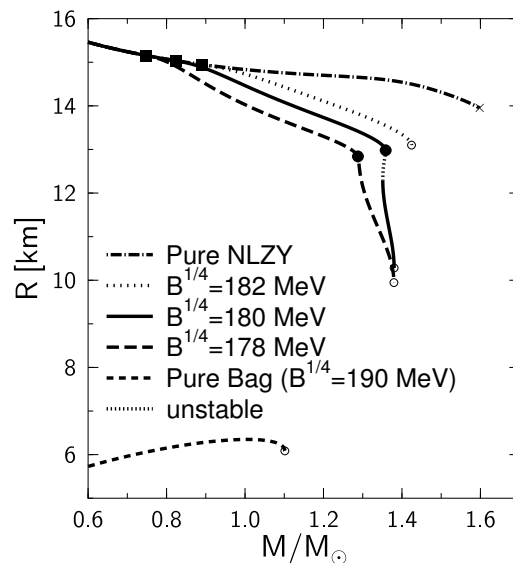


Abbildung 3.70: Radius  $R$  als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$  der hybriden Sterne im NLZYY-Bag-Modell(rechts) unter Verwendung der Gibbs'schen Konstruktion des Hadron-Quark-Phasenüberganges. Die Kurve am unteren Bildrand stellt reine Quarksterne im MIT-Bag Modell mit  $B^{1/4} = 190$  MeV dar.



In Abb. 3.70 ist erneut der Radius  $R$  der hybriden Sterne als Funktion ihrer gravitativen Gesamtmasse  $M$  dargestellt. Der Anfang und das Ende der gemischten Phase ist in dieser Abbildung durch schwarze Vierecke und Kreise gekennzeichnet. Wir betrachten im folgenden die Kurve des NLZYY-Bag Modells mit  $B^{1/4} = 180$  MeV genauer, da allein bei diesem Parameterwert Zwillingsterne entstehen.

Stellen wir uns z.B. ein enges binäres System vor, bei dem ein Stern ein kompakter Stern (beschrieben durch das NLZYY-Bag180 Modell) sein soll. Aufgrund seiner starken gravitativen Wirkung soll der kompakte Stern Materie von seinem Partner durch Akkretion erhalten, so dass die Gesamtmasse des kompakten Sterns und somit seine zentrale Dichte (siehe Abb. 3.62) mit der Zeit zunimmt. Nehmen wir weiter an, dass die zentrale Dichte des kompakten Sterns gerade eine Größe erreicht hat, so dass eine reine Quarkphase im Sternzentrum gebildet wird  $\rho_c \approx 5.1 \rho_0$ . Der kompakte Stern befindet sich somit am Ende der ersten Sequenz stabiler Sterne. Bei weiterem Massenzuwachs durch Akkretion wird er instabil, so dass der Stern kollabiert. Während des Kollaps dehnt sich unweigerlich der zunächst kleine innere Quarkkern des Stern aus, wobei der gesamte Radius des Stern in Bruchteilen von Sekunden schrumpft. Wir nehmen an, dass der gesamte Stern kollabiert, so dass die gesamte barionische Teilchenzahl des Sterns  $N_B$  während der Kollapsphase konstant bleibt. In Abb. 3.71 ist die gravitative Gesamtmasse  $M$  der Sterne im NLZYY-Bag180-Modell als Funktion der gesamten barionischen Teilchenzahl  $N_B$  aufgetragen, wobei der Bereich der Instabilität vergrößert dargestellt ist. Der besprochene Kollaps der Sterns verläuft, unter Annahme der Konstanz der Teilchenzahl  $N_B$  vom Stern A hin zu Stern B. Der Endzustand B besitzt eine um  $\Delta M \approx 0.007 M_\odot$  geringere Masse. Diese Massen- bzw. Energiedifferenz der Zwillingsterne (besser  $N_B$ -Zwillingsterne)<sup>18</sup> A und B wird in Form von unterschiedlichen Abstrahlmechanismen während der Kollaps-

---

<sup>18</sup>Der Begriff der Zwillingsterne wurde erstmals 1998 in dem Artikel [74] definiert. Der Begriff beschreibt zwei kompakte Sterne gleicher gravitativer Gesamtmasse  $M$  die einen unterschiedlichen Radius  $R$  besitzen. In diesem Unterkapitel werden die Anfangs- und Endzustände des Zwillingsternkollaps ebenfalls mit dem Begriff Zwillingsterne bezeichnet, obwohl sie eine leicht unterschiedliche Masse  $M$  besitzen, dafür die gleiche gesamte barionische Teilchenzahl  $N_B$  haben; man sollte sie deshalb  $N_B$ -Zwillingsterne nennen.

phase emittiert (näheres später).

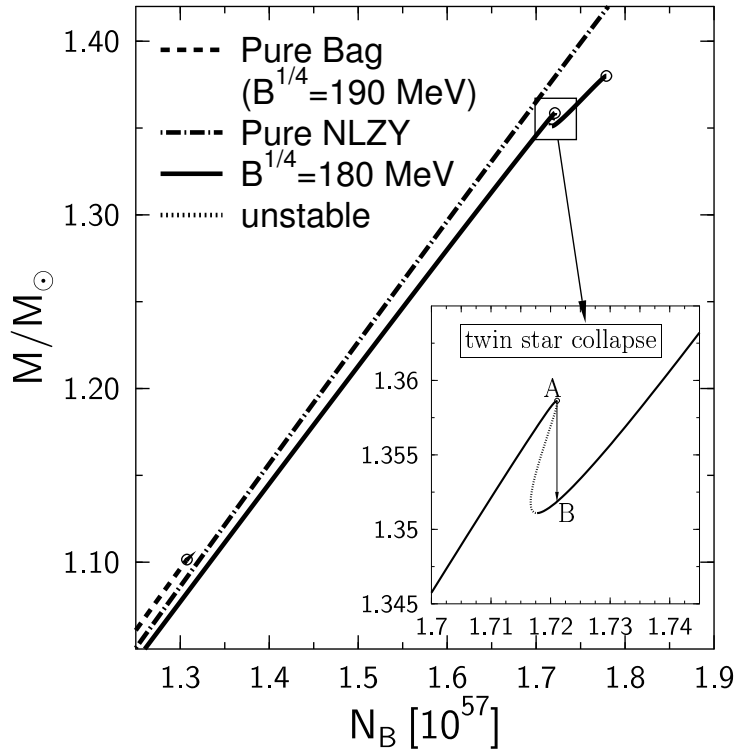


Abbildung 3.71: Gravitative Gesamtmasse der Sterne als Funktion der gesamten barionischen Teilchenzahl  $N_B$  im NLZYY-Modell, MIT-Bag190 Modell und im NLZYY-Bag180-Modell unter Verwendung der Gibbs'schen Konstruktion des Hadron-Quark-Phasenüberganges.

Der Unterschied des Sternradius der beiden Zwillingsterne mit konstanter Barionenzahl  $N_B$  beträgt  $\Delta R \approx 1$  km (siehe Abb. 3.73).

Die Druck und Energiedichtenprofile innerhalb der Zwillingsterne A und B sind in Abb. 3.74 dargestellt. Man erkennt den großen Unterschied in den zentralen Drücken der Zwillingsterne (A:  $P_c \approx 83$  MeV/fm<sup>3</sup>, B:  $P_c \approx 150$  MeV/fm<sup>3</sup>). Die Änderungen in den Dichteprofilen der Sterne sind bedingt durch den Beginn und das Ende der gemischten Phase. Bei beiden Sternen beginnt die gemischte Phase bei einem Radius von  $R \approx 8$  km. Der Stern A besitzt jedoch lediglich einen kleinen reinen Quarkkern von weniger als 1 km Radius. Sein Zwillingstern B hat dagegen einen ausgedehnten reinen

Quarkkern von  $R \approx 4$  km (siehe Abb. 3.74 rechts).

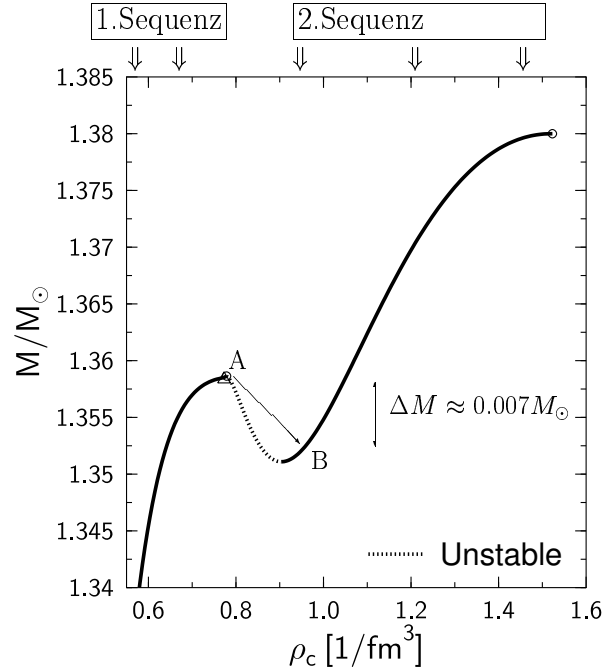


Abbildung 3.72: Der Zwillingstern-Kollaps: Gravitative Gesamtmasse  $M$  der hybriden Sterne der ersten und zweiten Sequenz als Funktion der zentralen barionischen Dichte  $\rho_c$  im NLZYY-Bag180-Modell.

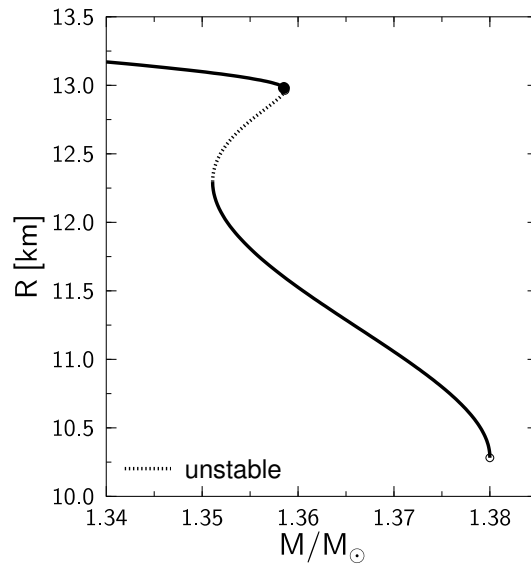


Abbildung 3.73: Radius  $R$  als Funktion der gravitativen Gesamtmasse  $M$  im NLZYY-Bag180-Modell.

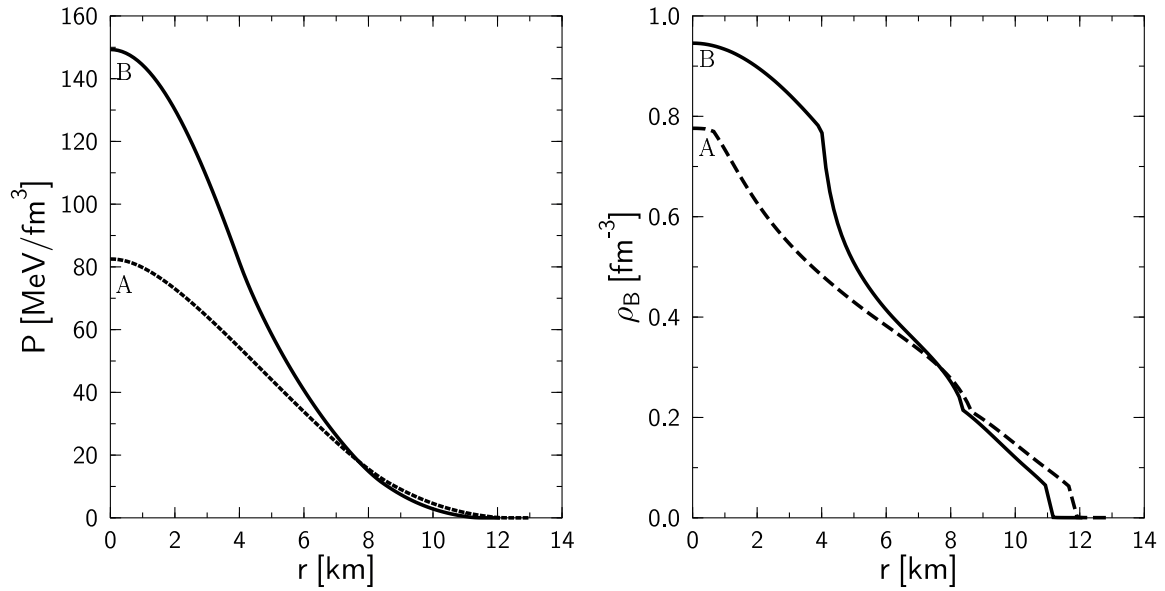


Abbildung 3.74: Druck-(links) und Dichteverläufe(rechts) innerhalb der  $N_B$ -Zwillingsterne.

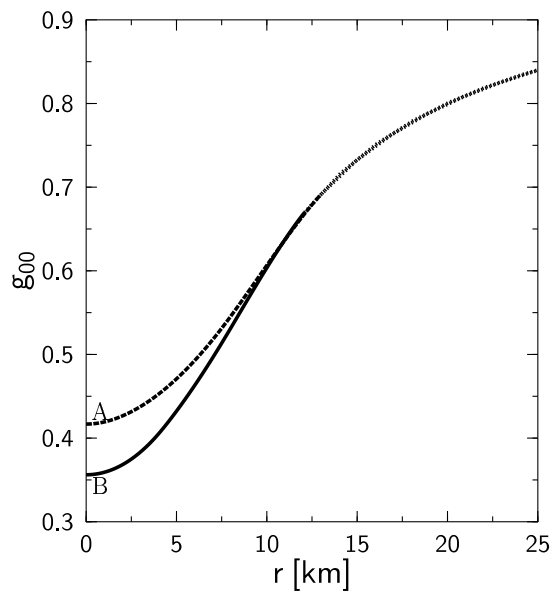


Abbildung 3.75: Raumzeitkrümmung (Metrikkomponente  $g_{tt} = g_{00}$ ) innerhalb und außerhalb der  $N_B$ -Zwillingsterne.

Die gravitative Kraft, die auf umliegende Objekte wirkt unterscheidet sich nur minimal bei den Sternen A und B, da sich ihre gesamte gravitative Masse  $M$  lediglich um den Betrag  $\Delta M$  unterscheidet. Die Außenmetriken  $g_{\mu\nu}(r \geq R)$  der Sterne A und B sind somit sehr ähnlich, wobei sich die Metrik innerhalb der Sterne ( $g_{\mu\nu}(r \leq R)$ ) merklich voneinander unterscheiden, da die Energieverteilungen innerhalb der Sterne unterschiedlich sind. Innerhalb des kompakteren Zwillingsterns B wird die Raumzeitstruktur stärker verformt als in Stern A.

Der maßgebliche Unterschied der Zwillingstterne A und B liegt somit in dem Unterschied des Radius, in den Druck- und Energiedichteverläufen und als Folge dessen in der jeweiligen Teilchenzusammensetzung der Sterne.

Während der Kollapsphase lösen sich im inneren Kern des Stern viele hadronische Teilchen in ihre Quark-Bestandteile auf. Aufgrund des  $\beta$ -Gleichgewichts und der Ladungsneutralität der Materie laufen dann viele starke und schwache spontane Teilchenprozesse ab, da der Anteil der seltsamen Quarks in der deconfienten Phase viel höher und der Anteil der Leptonen viel geringer ist als in der confienten hadronischen Phase (siehe Abb. 3.60). Die dabei entstehenden Neutrinos können den Stern ungehindert verlassen, so dass ein Teil der Energiedifferenz  $\Delta E = \Delta M \approx 10^{52}$  ergs der Zwillingsterne durch einen spontanen Neutrino-Burst emittiert wird. Die gesamte Anzahl der Neutrinos  $\Delta N_{\nu_e}$ , die während der Kollapsphase emittiert wird, ist aufgrund der Leptonenzahlerhaltung gleich dem Unterschied der gesamten Elektronenzahl der Sterne A und B.<sup>19</sup> In Abb. 3.76 ist die gesamte Elektronenzahl  $N_e$  als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  der Sterne aufgetragen. Die Anzahl der während der Kollapsphase in Neutrinos umgewandelten Elektronen ist gegeben durch die gesamte Elektronenzahldifferenz  $\Delta N_e$  der Sterne A und B ( $\Delta N_{\nu_e} = \Delta N_e = N_e(\epsilon_c \approx 850 \text{ MeV/fm}^3) - N_e(\epsilon_c \approx 1050 \text{ MeV/fm}^3) \approx 1.6 \cdot 10^{55}$ ). Die relevanten, neutrino produzierenden Teilchenreaktionen sind die folgenden:  $e + u \rightarrow d + \nu_e$  und  $u + d \rightarrow s + u$ . Die Energie der während der Kollapsphase produzierten Neutrinos überspannen einen weiten Bereich bis hin zu einer maximalen Energie  $E_{\nu_e}^{\max} = \mu_e + \mu_u - \mu_d$ . Man erhält  $E_{\nu_e}^{\max} \approx 150 \text{ MeV}$ , so dass sich ei-

---

<sup>19</sup>Die Anzahl der emittierten myonischen Neutrinos  $\nu_\mu$  ist viel geringer und wird im folgenden vernachlässigt.

ne mittlere Neutrinoenergie von  $\approx 100$  MeV ergibt (siehe [36]). Multipliziert man diesen Wert der mittleren Neutrinoenergie mit  $\Delta N_{\nu_e}$ , so erhält man, dass ca. 30 % der gesamten, frei werdenden Energie durch den Neutrino-Burst abgegeben werden.

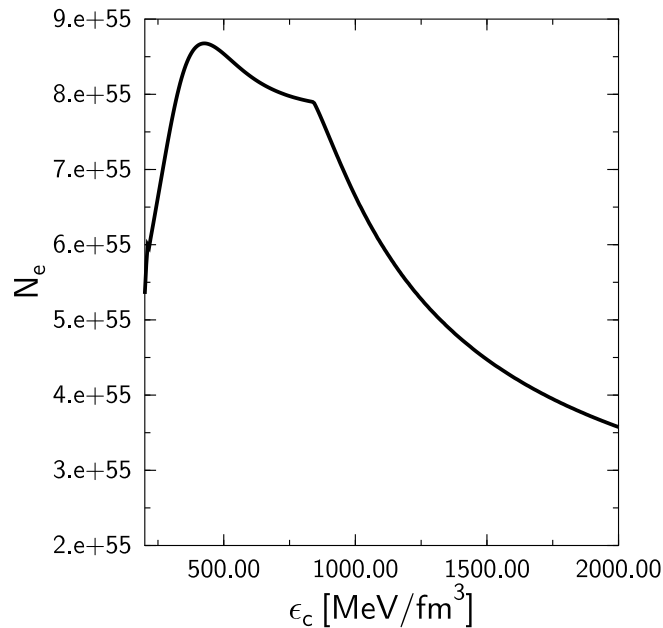


Abbildung 3.76: Gesamtzahl der Elektronen  $N_e$  im Stern als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$ .

Die verbleibenden 70 % der freiwerdenden Energie werden höchst wahrscheinlich durch Gravitationswellen und einen leicht verzögerten Gamma-Ray-Burst abgestrahlt. Der reine Quarkkern des Sterns kann sich bis zu einer Temperatur von  $T \simeq 40$  MeV aufheizen. Diese Hitze dringt dann zur Oberfläche des Stern und kühlt durch hochenergetische Photonenemission aus. Die Emmisionstemperatur  $T_{\text{em}}$  an der Oberfläche des Stern lässt sich zu  $T_{\text{em}} \approx 2$  MeV abschätzen (näheres siehe [36]).

Aufgrund der Drehimpulserhaltung beschleunigt sich die Rotation des Sterns während der Kollapsphase, so dass ein enormes 'Glitch'-Phänomen (siehe Anhang C) auftreten sollte.

Eine gestörte Kugelsymmetrie während der Kollapsphase und ein Nachoszillieren des Sterns B (mit Millisekundenfrequenz) würden Ausendungen von

Gravitationswellen möglich machen. Die Stärke und Frequenz der ausgesendeten Gravitationswellen liegt im Bereich der Nachweisbarkeit der Gravitationswellendetektoren, die derzeit zur Messung bereit sind (siehe Kapitel 2).

Der in diesem Kapitel besprochene Zwillingsternkollaps wurde exemplarisch im Modell NLZYY-Bag180 unter Verwendung der Gibbskonstruktion des Hadron-Quark Phasenüberganges vorgestellt. Unter Verwendung der maxwell'schen Phasenübergangskonstruktion ist das Erscheinen von Zwillingsternen viel wahrscheinlicher. In Abb. 3.77 ist die gravitative Masse  $M$  als Funktion der gesamten barionischen Teilchenzahl  $N_B$  im TM1YY-Bag-(links) und NLZYY-Bag-Modell(rechts) unter Verwendung der maxwell'schen Konstruktion des Hadron-Quark-Phasenüberganges für unterschiedliche Werte der Bag-Konstanten  $B$  dargestellt.

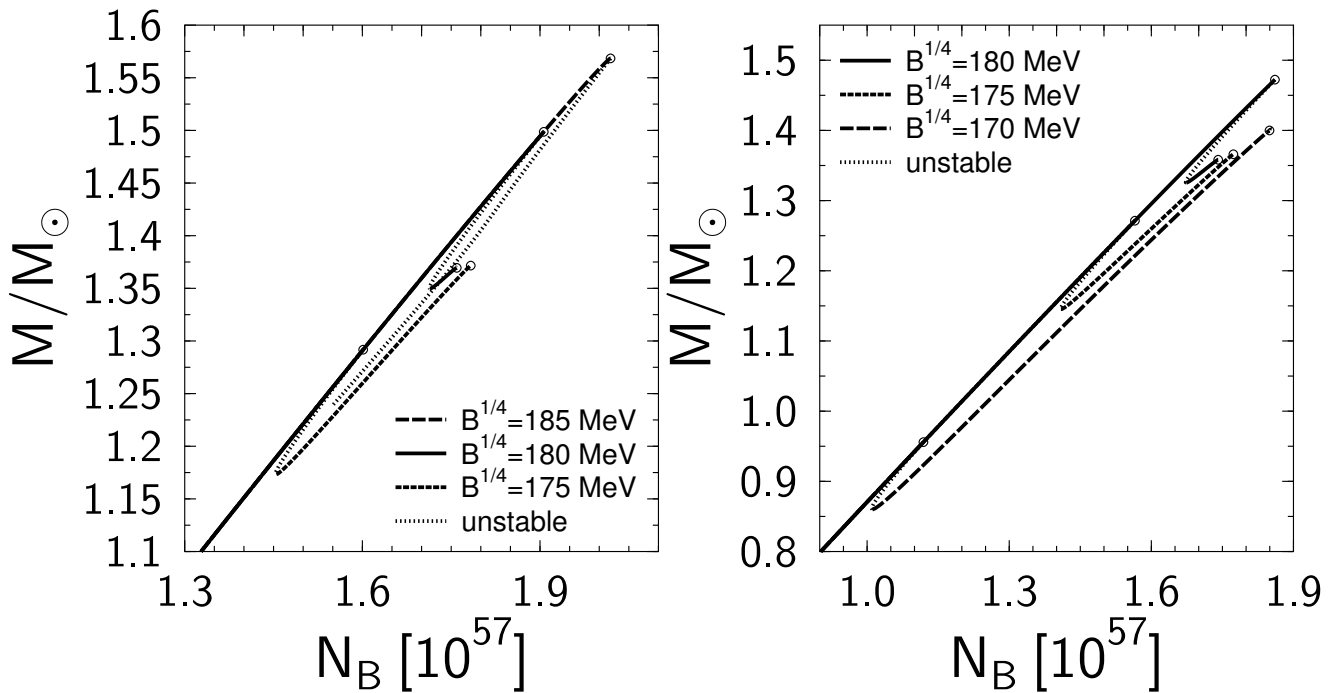


Abbildung 3.77: Gravitative Gesamtmasse der Sterne als Funktion der gesamten barionischen Teilchenzahl  $N_B$  im TM1YY-Bag-(links) und NLZYY-Bag-Modell(rechts) unter Verwendung der maxwell'schen Konstruktion des Hadron-Quark-Phasenüberganges.

Man erkennt, dass im TM1YY-Bag185-Modell keine Zwillingsterne mö-

glich sind (vergleiche auch Abb. 3.64), da keine stabile zweite Sequenz kompakter Sterne existiert. Im TM1YY-Bag180-Modell dagegen existiert zwar ein kleiner stabiler Bereich von kompakten Sternen der zweiten Sequenz, diese besitzen jedoch (verglichen mit dem Stern maximaler Masse der ersten Sequenz) eine geringere Gesamtzahl  $N_B$  von Barionen. Kollabiert ein instabil werdender Stern der ersten Sequenz im TM1YY-Bag180-Modell, so endet sein Kollaps (unter Annahme der Erhaltung der gesamten Barionenzahl) nicht im Zwillingstern, sondern er kollabiert unaufhaltsam weiter und endet in einem schwarzen Loch. Im TM1YY-Bag175-Modell dagegen existieren durch einen Kollaps erreichbare Zwillingsterne. Die frei werdende Energie, d.h. die Massendifferenz  $\Delta M \approx 0.04 M_\odot$  zwischen den Zwillingsternen ist sogar höher als im NLZYY-Bag180-Modell ( $\Delta M \approx 0.007 M_\odot$ ) unter Verwendung der Gibbs Konstruktion.

Im NLZYY-Bag180-Modell unter Verwendung der maxwell'schen Konstruktion sind zwar Zwillingsterne möglich, diese können jedoch nicht durch den Kollaps eines instabil werdenden Sterns der ersten Sequenz entstehen. Für kleinere Bag Konstanten (z.B. NLZYY-Bag175, NLZYY-Bag170) ist dies aber möglich. Der Wert der frei werdenden Energie  $\Delta E = \Delta M \approx 0.033 M_\odot$  (im NLZYY-Bag175 Modell) ist wieder größer als bei der Gibbs Konstruktion. Der Unterschied in den Radien der Zwillingsterne  $\Delta R \approx 3$  km ist ebenfalls mehr ausgeprägt.

### Zwillingsternentstehung durch Hyperonenkondensate

Im vorigen Unterkapitel wurde gezeigt, dass Zwillingsterne in Modellen mit Hadron-Quark Phasenübergang möglich sind. Es wurden des weiteren astrophysikalisch observable Konsequenzen dargestellt (siehe auch Kapitel 3.5), die bei einem Zwillingsternkollaps zwangsläufig auftreten. Falls in Zukunft solche astrophysikalischen Erscheinungen nachgewiesen werden, stellt sich die Frage, ob dadurch der Hadron-Quark Phasenübergang der Materie bei hohen Dichten erwiesen ist, oder ob es noch weitere elementare Eigenschaften der Materie gibt, die ein solches astrophysikalisches Szenario verursachen können.

In diesem Unterkapitel wird gezeigt, dass eine Zwillingsternentstehung auch in einem rein hadronischen Modell möglich ist, und die dadurch entste-



henden astrophysikalischen Konsequenzen eines Zwillingssternkollaps wohl nicht von denen zu unterscheiden sind, die durch ein hybrides Modell mit Hadron-Quark Phasenübergang verursacht wurden. Das benutzte rein hadronische Modell (GM1 mit starker Hyperon-Hyperon Wechselwirkung) hat die gleiche Struktur der Lagrangedichte wie die TM1YY und NLZYY Modelle. Es wurde lediglich ein anderer Parametersatz (GM1) benutzt und die Stärke der skalaren Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}^{YY}$  wurde relativ zur nukleonischen Wechselwirkung  $g_{\sigma}^{NN}$  vergrößert. Eine solche Vergrößerung der Stärke der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung ist im Bereich des möglichen, da durch neuere Teilchenbeschleuniger Experimente Indizien für eine stark attraktive  $\Lambda - \Lambda$  Wechselwirkung gefunden wurden. Solange somit die genaue Stärke der Wechselwirkung der Hyperonen untereinander noch unklar ist, kann man die Kopplungskonstante  $g_{\sigma^*}^{YY}$  in den Modellen nicht festlegen.

### Eigenschaften der stark gebundenen Hyperonenmaterie

In Abb. 3.78 ist die totale Energie  $E$  pro Barion als Funktion der Anzahl der strange Quarks pro Barion  $f_s = N_s/N_B$  für unterschiedliche Stärken der skalaren Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} = g_{\sigma^*}^{YY}/g_{\sigma N}^{NN}$  im GM1-Modell dargestellt. Man erkennt, dass für  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \geq 1.0$  ein zweites lokales Minimum bei hohen Seltsamkeitsverhältnissen  $f_s > 1$  entsteht. Es bildet sich somit eine metastabile hadronische Materiephase, die einen hohen Seltsamkeitsgrad  $f_s$  (d.h. viele hyperonische Teilchen) besitzt und die nur durch multiple schwache Teilchenprozesse in Nukleonen zerfallen kann. Für  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \geq 1.2$  liegt das zweite Minimum sogar unterhalb der Nukleonenmasse, so dass die seltsame hyperonische Phase absolut stabil ist. Sogar ein solch hoher Wert von  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$  kann experimentell nicht ausgeschlossen werden, da Atomkerne aufgrund der Erhaltung der Seltsamkeit nicht spontan in den energetisch günstigeren seltsamen Zustand fallen können.

Die für die Berechnung der Sterneigenschaften nötige ladungsneutrale Zustandsgleichung der hadronischen Materie im  $\beta$ -Gleichgewicht ist in Abb. 3.79 dargestellt.

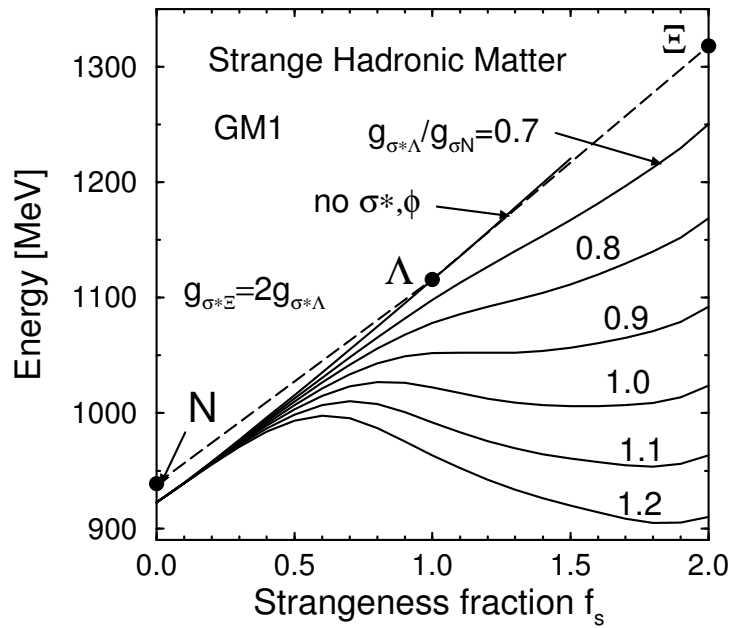


Abbildung 3.78: Teilchenenergie  $E$  im GM1-Modell als Funktion des Seltensamkeitsverhältnisses  $f_s = N_s/N_B$  für unterschiedliche Stärken der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$ .

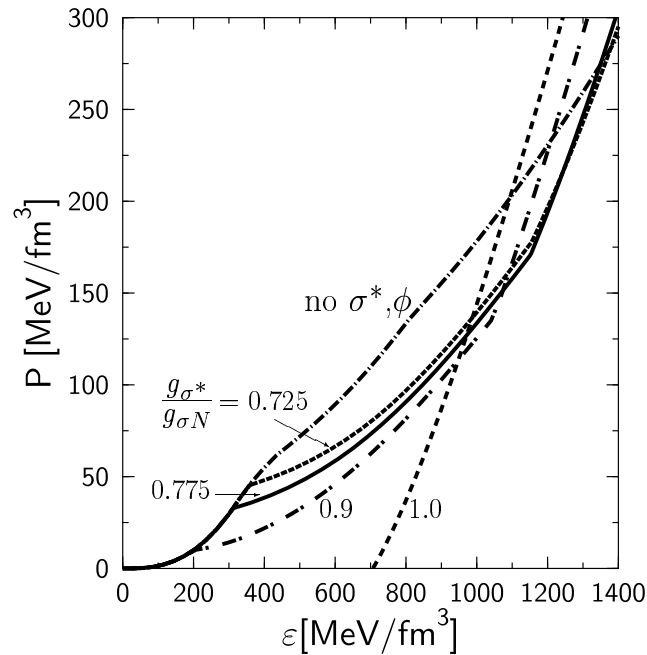


Abbildung 3.79: Zustandsgleichung für ladungsneutrale Neutronensternmaterie im  $\beta$ -Gleichgewicht im GM1-Modell für unterschiedliche Stärken der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$ .

Durch Erhöhung der skalaren Kopplungskonstanten  $g_{\sigma^*}$  der hyperonischen Selbstwechselwirkung entsteht ein Phasenübergang im mittleren, softem Bereich der Zustandsgleichung, der ähnlich dem Verhalten eines Hadron-Quark Phasenüberganges ist. Es entsteht eine gemischte Phase aus rein nukleonischer Materie und hyperonischer Materie hoher Seltsamkeit. Im Falle eines zweiten metastabilen Minimums ( $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \geq 1.0$ ) besitzt die Materie sogar einen selbstgebundenen Charakter und ähnelt damit der Zustandsgleichung reiner Quarkmaterie.

### Eigenschaften der Hyperonensterne

Die gravitative Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$  als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  ist in Abb. 3.80 für unterschiedliche Stärken der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$  aufgetragen.

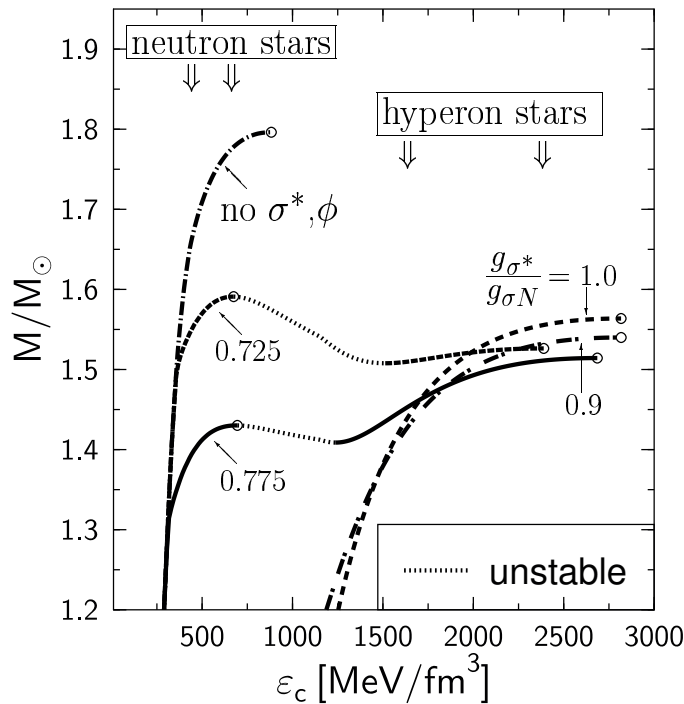


Abbildung 3.80: Gravitative Gesamtmasse  $M/M_{\odot}$  als Funktion der zentralen Energiedichte  $\epsilon_c$  für unterschiedliche Stärken der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$ .

In einem schmalen Parameterbereich  $0.71 \leq g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \leq 0.78$  entsteht eine zweite stabile Sequenz von kompakten Sternen, die wir im folgenden, aufgrund ihrer Zusammensetzung als Hyperonensterne bezeichnen werden. Für kleinere Werte ( $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \leq 0.71$ ) entsteht keine zweite stabile Sequenz, da die Gesamtmasse  $M$  nach Erreichen ihres maximalen Wertes (Endpunkt der ersten Sequenz) stetig sinkt. Für größere Werte ( $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \geq 0.78$ ) beginnt die gemischte Phase schon bei so niedrigen Energiedichten (siehe Abb. 3.79), dass die resultierenden Sterne sehr schnell hyperonischen Charakter bekommen, und sich somit kein Maximum der ersten Sequenz ausbilden kann.

In Abb. 3.81 ist der Sternradius  $R$  (links) bzw.  $R_\infty$  als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_\odot$  dargestellt.

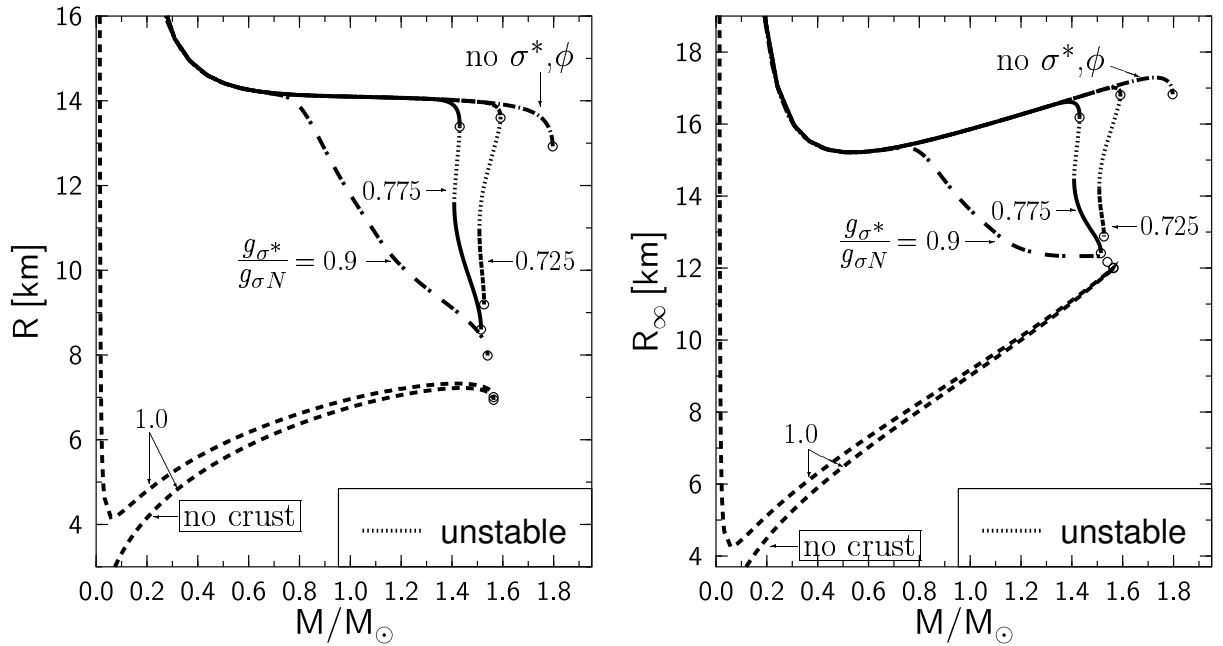


Abbildung 3.81: Sternradius  $R$  (links) bzw.  $R_\infty$  (rechts) als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_\odot$  für unterschiedliche Stärken der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$ .

Für  $0.71 \leq g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \leq 0.78$  erkennt man das typische Verhalten des Radius von Zwillingsternen. Die zwei stabilen Sequenzen haben unterschiedliche Radien (bis zu  $\approx 4.5$  km Unterschied) und sind durch einen Instabilitäts-

bereich voneinander getrennt. Die Sterne, die aus selbstgebundener hyperonischer Materie ( $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \geq 1$ ) zusammengesetzt sind, zeigen das typische selbstgebundene  $R(M)$  Verhalten; sie werden teils gravitativ und teils durch ihre elementaren Wechselwirkungen zusammengehalten. Eine interessante Eigenschaft zeigt sich im  $R_\infty(M)$ -Plot (Abb. 3.81, rechts). Die entstehende Fokussierung der Kurven mit unterschiedlichen Parameterwerten  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$  zeigt die Unsensibilität der Resultate bei hohen zentralen Energiedichten hinsichtlich der Stärke der jeweiligen elementaren Wechselwirkungen.

Ein Zwillingsternkollaps ist lediglich im Parameterbereich  $0.75 \leq g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \leq 0.78$  möglich, wie man in Abb. 3.82 erkennt. Die beim Kollaps freigesetzte Energie  $\Delta E$  ist gleich dem Massenunterschied der Sterne und beträgt z.B. bei  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} = 0.775$  ca.  $\Delta E = \Delta M \approx 0.3 M_\odot = 0.5 \cdot 10^{53}$  ergs.

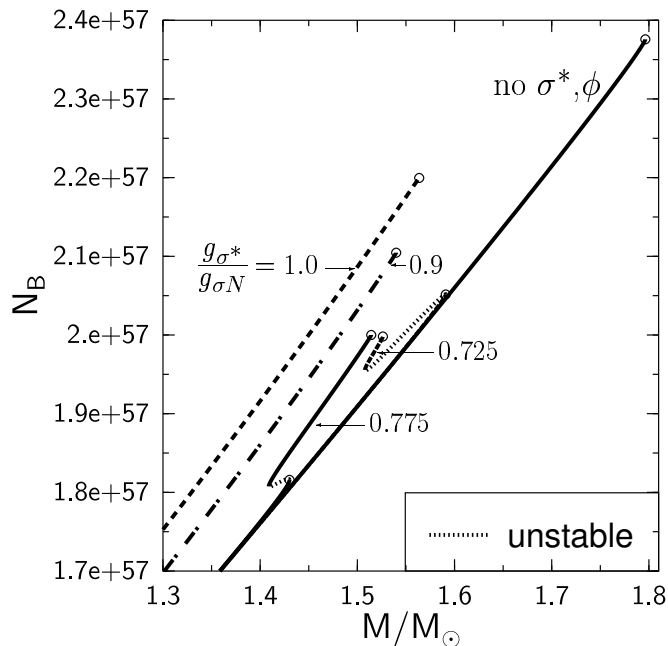


Abbildung 3.82: Totale Barionenzahl  $N_B$  der Sterne als Funktion der Gesamtmasse  $M/M_\odot$  für unterschiedliche Stärken der Hyperon-Hyperon Wechselwirkung  $g_{\sigma^*}/g_{\sigma N}$ .

Im Parameterbereich  $0.71 \leq g_{\sigma^*}/g_{\sigma N} \leq 0.75$  existiert zwar eine zweite Sequenz von Hyperonensterne, diese können jedoch nicht durch einen Zwillingsternkollaps erreicht werden, der die gesamte Barionenzahl erhält.

Neben der geschilderten Zwillingssternentstehung durch starke hyperonische Selbstwechselwirkungen ist eine weitere alternative Zwillingssternerzeugung durch Kaonen-Kondensation möglich (siehe [46]). Um zwischen den Ursachen der Zwillingssternentstehung in Zukunft unterscheiden zu können, sind weitere Beschleunigerexperimente bei hohen Dichten unerlässlich (siehe Zukunftsperspektiven der GSI; <http://www.gsi.de/zukunft/projekt/>), da dadurch die noch unbekanntesten Stärken der jeweiligen Wechselwirkungen eingeschränkt werden können und somit die Unsicherheiten innerhalb der hadronischen Modelle begrenzt werden. Auf der Suche nach der in der Natur realisierten Zustandsgleichung müssen die durch Teilchenbeschleuniger gewonnenen Erkenntnisse kompatibel mit den astrophysikalischen Beobachtungen kompakter Sterne sein.

## Der Gravitationskollaps

In den vorigen Unterkapiteln wurde gezeigt, welche Eigenschaften stabile kompakte Sterne (Neutronensterne, Quarksterne, hybride Sterne und Hyperonensterne) besitzen können. Welche Art von kompakten Sternen in der Natur realisiert ist, hängt von der in der Natur realisierten Zustandsgleichung der Materie ab. Nach meiner Meinung ist ein hybrides Modell mit Hadron-Quark Phasenübergang das realistischste. Welches hybride Modell aber in der Natur realisiert ist bzw. bei welcher Dichte und in welcher Art und Weise der QCD-Phasenübergang sich vollzieht ist zur Zeit nicht vorhersagbar.

Die dargestellten Ergebnisse meiner Berechnungen zeigen, dass es stabile hybride Sterne in der Natur geben kann. In jedem Modell ergibt sich jedoch eine Grenzmasse, bzw. zentrale Grenzdicke, bei der kompakte Sterne instabil werden und zwangsläufig kollabieren müssen.<sup>20</sup> Die Sterne mit maximaler Masse in den dargestellten hybriden Modellen besitzen, abhängig von den gewählten Parameterwerten, einen mehr oder weniger stark ausgeprägten inneren Quarkkern. Kollabiert ein solcher Stern, so steigt seine zentrale Dichte weiter an und sein innerer Quarkkern vergrößert sich relativ zu dem Radius des Sterns. Unterschreitet der Radius des Sterns seinen theoretischen

---

<sup>20</sup>Auch bei Modellen mit Zwillingssternen ist der Gravitationskollaps des Sterns mit maximaler Masse der zweiten Sequenz nicht aufhaltbar.

Schwarzschildradius  $R_S = 2M$  so entsteht ein schwarzes Loch. Ob der gesamte Stern schon vor Erreichen des Schwarzschildradius (oder erst danach) in Quarkmaterie konvertiert ist, hängt von den Parametern des hybriden Modells ab.

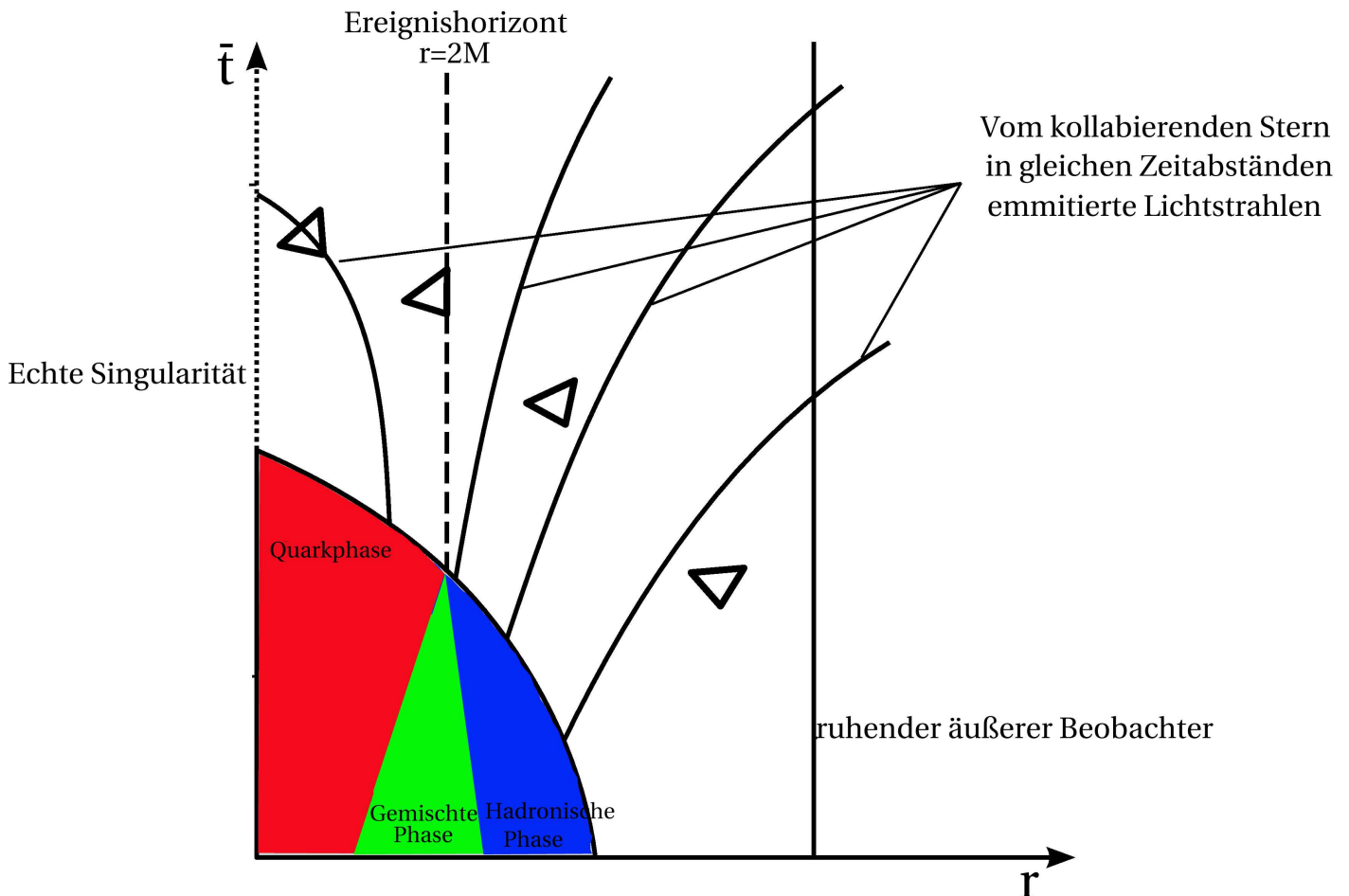


Abbildung 3.83: Gravitationskollaps mit realistischer hybrider Zustandsgleichung im Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten.

In Abb. 3.83 ist der Gravitationskollaps eines kompakten Sterns in einem realistischen hybriden Modell dargestellt und in ein Raumzeitdiagramm der Schwarzschildmetrik in avancierten Eddington-Finkelstein Koordinaten eingebettet. Die Parameter des hybriden Modells wurden dabei so gewählt, dass der gesamte Stern exakt zu dem Zeitpunkt in Quarkmaterie konvertiert ist,

bei dem sich die Abschließung des Sterns durch Ereignishorizontbildung ereignet. Die durch den Hadron-Quark Phasenübergang befreite Materie wird somit, bei geeigneter Konstruktion des hybriden Modells, gerade dann raumzeitlich abgeschlossen, wenn sie in Kontakt mit der Außenwelt treten könnte. Falls die Natur ein solches Modell der Materie gewählt hat, würde nach meiner Meinung ein tieferer, noch nicht verstandener Sinn der Naturzusammenhänge und Wechselwirkungen dahinter verborgen liegen.

### 3.5 Astrophysikalische Observablen des Quark-Gluon-Plasmas

Im folgenden werden die wesentlichen Indizien zusammengefasst, die einen Hadron-Quark Phasenübergang durch die Messung astrophysikalischer Größen kompakter Sterne beweisen würde. Es wurde hierbei angenommen, dass man einen weiteren Phasenübergang (z.B. zu stark attraktiv gebundener hyperonischer Materie) ausschließen kann.

- Indizien des Phasenüberganges anhand der Masse und des Radius

Die Radien von Neutronensternen sind im allgemeinen größer als die von Quarksternen oder hochdichten hybriden Sternen. Falls man einen existierenden kompakten Stern mit einem Radius  $R \leq 9$  km finden würde, so könnte man mit Sicherheit einen gewöhnlichen Neutronenstern ausschließen – dieser Stern müsste in seinem Inneren ein Phasenübergang besitzen.

Würde man zwei kompakte Sterne mit gleicher gravitativer Gesamtmasse  $M$ , aber unterschiedlichem Radius  $R$  finden (z.B.  $R_1 = 13$  km  $> R_2 = 11.5$  km), so wäre der Beweis der Existenz von Zwillingsternen und somit die Existenz eines starken QCD-Phasenübergangs im Inneren des kompakteren Zwillingsterns erbracht.

- Indizien des Phasenüberganges anhand der Rotationsfrequenz

Quarksterne bzw. hochdichte hybride Sterne sind kompakter als gewöhnliche Neutronensterne und können deshalb schneller rotieren. Die absolute Obergrenze der Rotationsfrequenz (Keplerfrequenz  $\Omega_K$  siehe



Kapitel 2) kann durch die empirische Gleichung 2.76 abgeschätzt werden. Vergleicht man z.B. die Keplerfrequenzen eines Neutronensternmodells, eines hybriden Modells und eines reinen Quarksternmodells miteinander, so berechnen sich die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \text{Neutronensternmodell} & : \Omega_K^{CHM} = 7787 \text{ rad/s}, \\ \text{Hybrides Modell} & : \Omega_K^{CHM-B180} = 9864 \text{ rad/s}, \\ \text{Quarksternmodell} & : \Omega_K^{NJL(\xi=0)} = 11045 \text{ rad/s}. \end{aligned}$$

Würde man demnach eine Rotationsperiode  $P = 2\pi/\Omega$  eines kompakten Sterns im Submillisekundenbereich ( $P \leq 0.6 \text{ ms}$ ) finden, so könnte dieser Stern nicht aus gewöhnlicher Neutronensternmaterie bestehen.

Ein weiterer Indiz eines Phasenübergangs wäre gegeben bei der Beobachtung eines 'Superglitches', d.h. bei der Messung eines beachtlichen Sprunges der Rotationsfrequenz bedingt durch einen Zwillingsternkollaps.

Weitere, in der Literatur erwähnte Beweise der Existenz eines Phasenübergangs im Sterninneren sind der 'Spin-up' Effekt eines nichtakkretierenden kompakten Sterns (näheres siehe [75]) und der Effekt der Clusterung der Rotationsperioden in akkretierenden LMXB durch die Umkehrung des 'Spin-up' Effekts (siehe [76, 77]).<sup>21</sup>

- Indizien des Phasenüberganges anhand der Zwillingsterneseigenschaft  
Neben den schon geschilderten Beweisen, die durch Messungen der Rotationsfrequenz, der Masse und des Radius möglich sind, ist die Beobachtung eines Zwillingsternkollaps eine weitere Variante der indirekten astrophysikalischen Beobachtung der Entstehung des Quark-Gluon-Plasmas. Falls die Natur durch ein Modell beschrieben wird das Zwillingsterne ermöglicht, ist eine solche Beobachtung nur eine Frage der Zeit. Da ein solcher Kollaps begleitet wird von unterschiedlichsten Formen der Energieabstrahlungen (Neutrinos, elektromagnetische

---

<sup>21</sup>Die Erforschung eines inhaltlichen Zusammenhangs des 'Spin-up' Effekts und der Existenz von schnell rotierenden Zwillingsternen entstand am Ende meiner Promotionsdauer und wird der Umfangethalber in dieser Arbeit nicht dargestellt werden; eine detaillierte Beschreibung dieses Zusammenhangs ist in [78, 79] erhältlich.

Wellen (Gamma, Röntgen, sichtbar) und Gravitationswellen) sollte eine synchrone Beobachtung dieser Erscheinung mittels unterschiedlicher Detektoren möglich sein. Eine Unterscheidung eines solchen Kollaps von einem Gravitationskollaps zu einem schwarzen Loch sollte ebenfalls möglich sein, da sich beide Kollapsvarianten in ihrer Intensität, Zusammensetzung und Form unterscheiden.

- Indizien des Phasenüberganges mittels Gravitationswellen-Detektion  
Gravitationswellendetektoren bieten eine hervorragende Möglichkeit des experimentellen Studiums der natürlichen Erzeugung einer Quark-Gluon-Plasma Phase.

Die bei einer Kollision zweier Neutronensterne freigesetzten Gravitationswellen unterscheiden sich in ihrer Form, Frequenz und Intensität von den Gravitationswellen, die bei einer Quarksternkollision freigesetzt werden (siehe Kapitel 2).

Bei einem Zwillingsternkollaps oszilliert der entstehende hybride Stern mit einer ihm eigenen Frequenz, wobei sich die Oszillation durch Ausstrahlung von Gravitationswellen abdämpft. Bei einem Kollaps zu einem schwarzen Loch dagegen werden die ausgesendeten Gravitationswellen bei Erreichen des Ereignishorizontes ins unendliche hin rotverschoben.

Die Größe der induzierten Quadrupoldeformation von kompakten Sternen in engen binären Systemen hängt von der Zustandsgleichung der Materie und den globalen Eigenschaften der Sterne ab. Rotierende quadrupoldeformierte kompakte Sterne senden Gravitationswellen aus, an deren Frequenz man die Rotationsfrequenz des kompakten Stern ablesen kann; es sollten sich messbare Unterschiede für Neutronen-, Hybride und Quarksterne ergeben.

# Anhang A

## Elementare Teilchen

Einordnungshierarchie		Teilchen		Ladung	Spin	Masse	Quarkinhalt			
H A D R O N	M e s o n e n	(pseudo)- skalare Mesonen	Pion	$\pi^0$	0	0	135	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$		
				$\pi^+$	1	0	139.6	$u\bar{d}$		
				$\pi^-$	-1	0	139.6	$\bar{u}d$		
			Kaon	$K^0$	0	0	497.7	$d\bar{s}$		
				$K^+$	1	0	493.6	$u\bar{s}$		
				$K^-$	-1	0	493.6	$\bar{u}s$		
		Eta-Meson	$\eta$	0	0	548.8	$c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2s\bar{s}$			
		Vektor Mesonen	Rho-Meson	$\rho^0$	0	1	770	$u\bar{u}$		
				$\rho^+$	1	1	770	$u\bar{d}$		
				$\rho^-$	-1	1	770	$d\bar{u}$		
			Omega	$\omega$	0	1	782	$dd$		
		Phi	$\phi$	0	1	1020	$s\bar{s}$			
		Tensor Mesonen		$A_2$	0	2	1310	-		
			f-Meson	$f$	0	2	1271	-		
		Resonanzen	J/Psi	$J/\psi$	0	1	3096.9	$c\bar{c}$		
			Psi-Meson	$\psi$	0	1	3685	$c\bar{c}$		
			Upsilon	$\Upsilon$	0	1	9460	$b\bar{b}$		
		N U K L E O N E N	B a r i o n e n	Nukleonen	Neutron	$n$	0	1/2	939.57	$udd$
					Proton	$p$	1	1/2	938.27	$uud$
Hyperonen	Lambda			$\Lambda$	0	1/2	1115.6	$uds$		
				Sigma	$\Sigma^0$	0	1/2	1192.6	$uds$	
					$\Sigma^+$	1	1/2	1189.4	$uus$	
	$\Sigma^-$				-1	1/2	1197.4	$dds$		
	Xi			$\Xi^0$	0	1/2	1314.9	$uss$		
				$\Xi^-$	-1	1/2	1321.3	$dss$		
Omega				$\Omega^-$	-1	3/2	1672.4	$sss$		
Barionische Resonanzen	Delta			$\Delta^0$	0	3/2	1232	$udd$		
				$\Delta^+$	1	3/2	1232	$uud$		
				$\Delta^-$	-1	3/2	1232	$ddd$		

Tabelle A.1: Auswahl einiger hadronischer Teilchen und ihrer Eigenschaften (näheres siehe z.B. [80]). Die Ladung ist in Einheiten der elektrischen Elementarladung  $e$  angegeben und die Masse in der Einheit  $\text{MeV}/c^2$ .

Eichtheoretische Aufteilung		Teilchen		Ladung	Spin	Masse	
Elementare Materie  (Strings?)	(Eich)-Bosonen Vermittlerteilchen der Wechsel- wirkungen (Kräfte)	Starke WW	Gluonen	g	0	1	0
		Schwache WW	intermediäre	$W^+$	1	1	$(80.5 \pm 0.7) \cdot 10^3$
			Vektor- Bosonen	$W^-$	-1	1	$(80.5 \pm 0.7) \cdot 10^3$
				$Z^0$	0	1	$91.1 \cdot 10^3$
		Elektromagn. WW	Photon	$\gamma$	0	1	0
	Gravitation	Graviton	G	0	2	0	
	Fermionen	Leptonen	Elektron	$e$	-1	1/2	0.51
			$e$ -Neutrino	$\nu_e$	0	1/2	$< 0.0000002$
			Muon	$\mu$	-1	1/2	105.7
			$\mu$ -Neutrino	$\nu_\mu$	0	1/2	$< 0.17$
			Tauon	$\tau$	-1	1/2	$1784 \pm 4$
			$\tau$ -Neutrino	$\nu_\tau$	0	1/2	$< 18$
		Quarks (elementare Bestandteile der Hadronen)	up-Quark	u	2/3	1/2	8
			down-Quark	d	-1/3	1/2	13
			charm-Quark	c	2/3	1/2	1271
strange-Quark			s	-1/3	1/2	260	
top-Quark	t		2/3	1/2	$50 \cdot 10^3$		
bottom-Quark	b	-1/3	1/2	4250			

Tabelle A.2: Elementare Bestandteile der Materie, wobei zu jedem Fermion ein entsprechendes Antiteilchen existiert.

# Anhang B

## Vergleich: QCD $\Leftrightarrow$ ART

### Transformationsgruppen

- QCD

Die Quarkspinoren  $\psi_a^f$  der Farbe  $a = r, g, b$  und des Flavours  $f = u, d, s, c, t, b$  transformieren sich unter raumzeitabhängigen  $SU(3)_c$  Farbtransformationen:

$$\psi_a^{f|} = U_a^b(x^\mu) \psi_b^f, \text{ mit } U_a^b(x^\mu) = e^{i\lambda_i(x^\alpha) \tau^i_a{}^b} \quad (\text{B.1})$$

- ART

Koordinaten, Vektoren und Matrizen mit raumzeitlichen Indices  $\mu = 0..3$  transformieren sich unter raumzeitabhängigen Koordinatentransformationen:

$$x^{\nu'} = L^{\nu'}{}_\mu x^\mu, \quad L^{\nu'}{}_\mu = L^{\nu'}{}_\mu(x^\alpha) = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\mu}(x^\alpha) \quad (\text{B.2})$$

### Kovariante Ableitungen

- QCD

Die farbgeladenen gluonischen Austauschfelder  $G_{\mu a}{}^b$  koppeln minimal an die Quarkspinoren:

$$D_{\mu a}{}^b \psi_b = (\partial_\mu 1_a{}^b + ig_3 G_{\mu i} \tau^i_a{}^b) \psi_b = \psi_{a|\mu} + ig_3 G_{\mu a}{}^b \psi_b \quad (\text{B.3})$$

- ART

Die Konnexionen bzw. Christoffelsymbole  $\Gamma_{\beta\nu}^{\mu}$ , welche sich aus der Metrik  $g_{\mu\nu}$  und ihren ersten Ableitungen zusammensetzen, sind verantwortlich für die kovariante Ableitung  $D_{\mu}$  in der ART:

$$D_{\nu}v^{\mu} := v^{\mu}{}_{|\nu} = v^{\mu}{}_{|\nu} + \Gamma_{\beta\nu}^{\mu}v^{\beta} \quad (\text{B.4})$$

### Feldstärken

- QCD

Die Feldstärken  $F_{\mu\nu a}{}^b$  der gluonischen Felder in der QCD ergeben sich durch den Kommutator der kovarianten Ableitungen  $D_{\mu a}{}^b$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu a}{}^b = \frac{i}{g_3} [D_{\mu a}{}^c, D_{\nu c}{}^b] = F_{\mu\nu i} \tau^i{}_a{}^b \\ F_{\mu\nu i} &= G_{\nu i|\mu} G_{\mu i|\nu} - g_3 f^{jk}{}_i G_{\mu j} G_{\nu k} \end{aligned}$$

- ART

Der Riemanntensor  $R_{\alpha\sigma\nu\mu}$  stellt die gravitative Feldstärke in der ART dar; er ergibt sich ebenfalls aus dem Kommutator der kovarianten Ableitungen:

$$\begin{aligned} [D_{\mu}, D_{\nu}]v^{\alpha} &= v^{\alpha}{}_{||\mu|\nu} - v^{\alpha}{}_{||\nu|\mu} \\ &= -(\Gamma_{\sigma\nu|\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\mu|\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\nu}^{\beta} - \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}\Gamma_{\sigma\mu}^{\beta})v^{\sigma} \\ &=: -R^{\alpha}{}_{\sigma\nu\mu}v^{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

### Lagrangedichten

- QCD

Der Beitrag der gluonischen Eichfelder zur Lagrangedichte des Systems hat die folgende Gestalt:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu i} F^{\mu\nu i} \quad (\text{B.6})$$

- ART

Die Lagrangedichte der ART ist allein durch den Ricciskalar  $R$  bestimmt:

$$\mathcal{L}_{ART} = R \quad (\text{B.7})$$

### Homogene Feldgleichungen

- QCD

Die homogenen Feldgleichungen der QCD (homogene Yang-Mills–Gleichungen) ergeben sich aus der Jakobi Identität der kovarianten Ableitungen. Sie lässt sich wie folgt umschreiben:

$$\mathcal{F}_{[\mu\nu|\lambda]} := D_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu} + D_\mu \mathcal{F}_{\nu\lambda} + D_\nu \mathcal{F}_{\lambda\mu} = 0 \quad (\text{B.8})$$

- ART

Die homogenen Feldgleichungen der ART ergeben sich ebenfalls aus der Jakobi Identität der kovarianten Ableitungen. Die Gleichungen lassen sich wie folgt durch den Riemannschen Krümmungstensor umschreiben; man bezeichnet sie als Bianci-Identitäten:

$$R_{\mu\nu[\alpha\beta|\lambda]} := R_{\mu\nu\alpha\beta|\lambda} + R_{\mu\nu\lambda\alpha|\beta} + R_{\mu\nu\beta\lambda|\alpha} = 0 \quad (\text{B.9})$$

### Inhomogene Feldgleichungen

- QCD

Die inhomogenen Feldgleichungen der QCD (inhomogene Yang-Mills–Gleichungen) ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung der gesamten Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  hinsichtlich der gluonischen Eichfelder  $G_{\mu a}{}^b$ :

$$F^{\mu\nu}{}_{|\mu} + g_3 f^{ijk} F_j^{\mu\nu} G_{\mu k} = 4\pi j^{\nu i} \quad , \quad (\text{B.10})$$

wobei  $j^{\nu i} = g_3 \bar{\psi}_f^a \gamma^\nu \tau^i \psi_a^f$  die 8 Farbströme der Theorie repräsentieren.

- ART

Die inhomogenen Feldgleichungen der ART (Einstein Gleichungen) ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung der gesamten Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  hinsichtlich der Raumzeit-Metrik  $g_{\mu\nu}$

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g^{\mu\nu} = 8\pi\kappa T^{\mu\nu} \quad , \quad (\text{B.11})$$

wobei der Tensor  $T^{\mu\nu}$  den Energieimpuls Betrag aller im System befindlicher Teilchen und Felder darstellt (ausgenommen der gravitativen Raumzeitkrümmungsenergie selbst).

### Bewegungsgleichungen

- QCD

Die Bewegungsgleichungen der QCD (Diracgleichung der Quarks) ergeben sich aus dem Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung der gesamten Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  hinsichtlich der Quarkspinoren  $\psi_a^f$ :

$$i \gamma^\mu D_{\mu a}{}^b \psi_b^f - m^f \psi_a^f = 0 \quad (\text{B.12})$$

- ART

Die Bewegungsgleichungen der ART, d.h. die Beschreibung der Bewegung von klassischen, punktförmigen Teilchen in einer durch Gravitationskräften gekrümmten Raumzeit ergibt sich durch die geodätischen Linien in dieser Raumzeit :

$$v^\alpha \parallel_\nu v^\nu = \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (\text{B.13})$$



# Anhang C

## Beobachtungsgrößen von kompakten Sternen

Im ersten Teil dieses Anhangs wird zunächst auf die generelle Entstehung von kompakten Sternen in Supernova Explosionen eingegangen und der Mechanismus erklärt, mit denen Pulsare elektromagnetische Strahlung aussenden. Im zweiten Teil werden die wichtigsten charakteristischen Größen angegeben, die man anhand von Radio- und Röntgenmessungen der Pulsare gewinnen kann (näheres siehe [15]). Im letzten Teil wird auf die  $\gamma$ -Strahlenausbrüche eingegangen, und deren möglicher Zusammenhang mit kompakten Sternen diskutiert. Im Anschluss werden Gravitationslinsen Effekte von kompakten Sternen besprochen, und dargestellt, wie man anhand dieses Effektes observable Größen der Sterne gewinnen kann. Des weiteren werden am Ende dieses Kapitels geplante Gravitationswellendetektoren vorgestellt und die möglichen Erkenntnisse diskutiert, die man von dieser neuen Art von astronomischen Geräten erwarten kann.

### Entstehung von kompakten Sternen und generelle Eigenschaften

Am Ende der Lebensdauer einer Sonne, wenn sie ihren nuklearen Brennstoff aufgebraucht hat, gibt es, abhängig von ihrer Gesamtmasse unterschiedliche Sterbenswege (Neugeburtswegen). Liegt die Masse des Sterns zwischen 0.1

198 ANHANG C. BEOBACHTUNGSGRÖSSEN VON KOMPAKTEN STERNEN

und 8 Sonnenmassen, so endet dieser in einem planetarischen Nebel, in dem Zentrum sich ein weißer Zwerg mit einem Radius von mehreren tausend Kilometer befindet (siehe Abb. C.1).

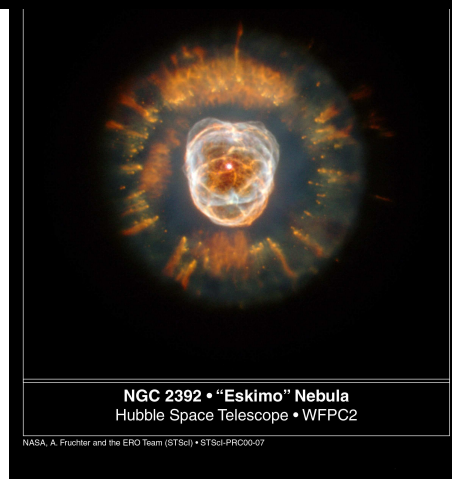
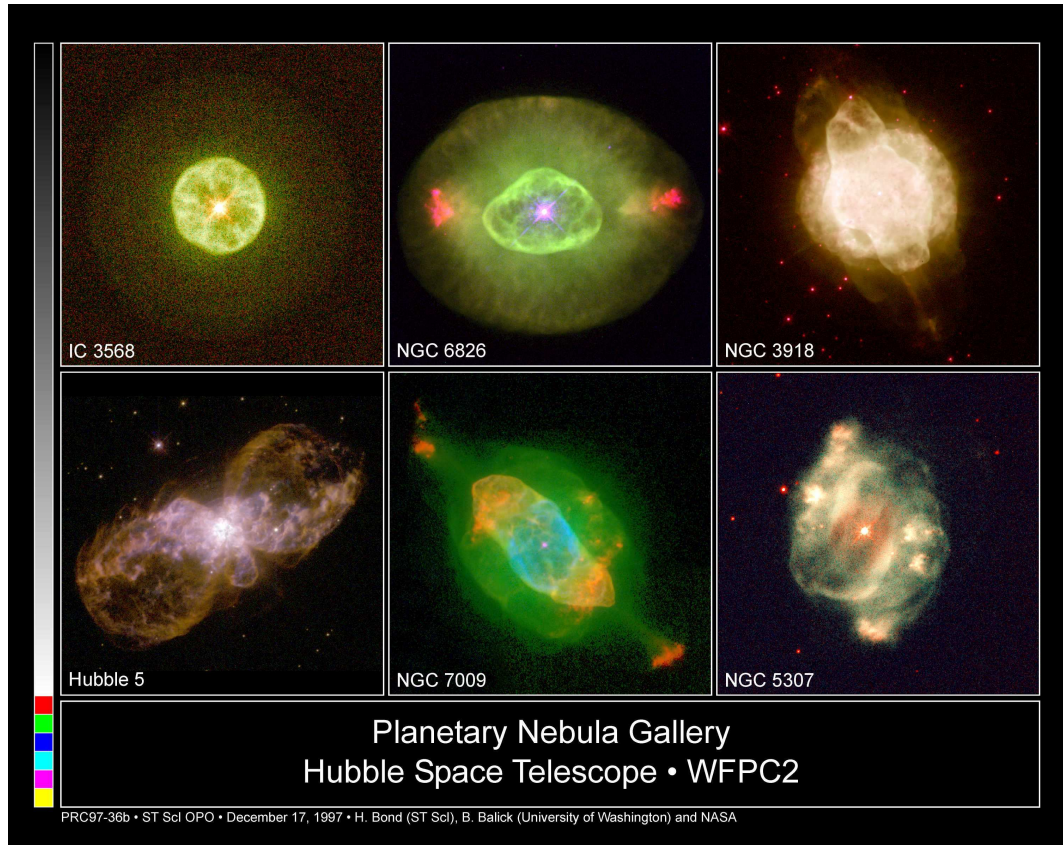


Abbildung C.1: Oben: Auswahl einiger planetarische Nebel. Unten: Entstehung eines "Weißen Zwerges" im Zentrum des "Eskimo Nebels".

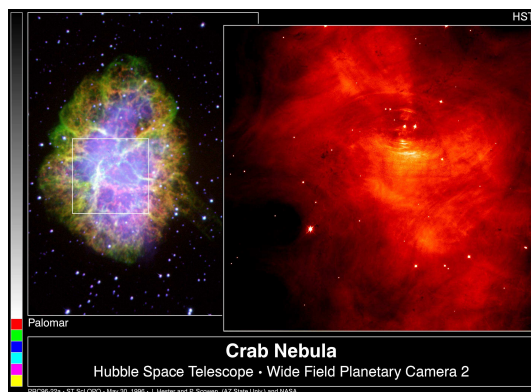
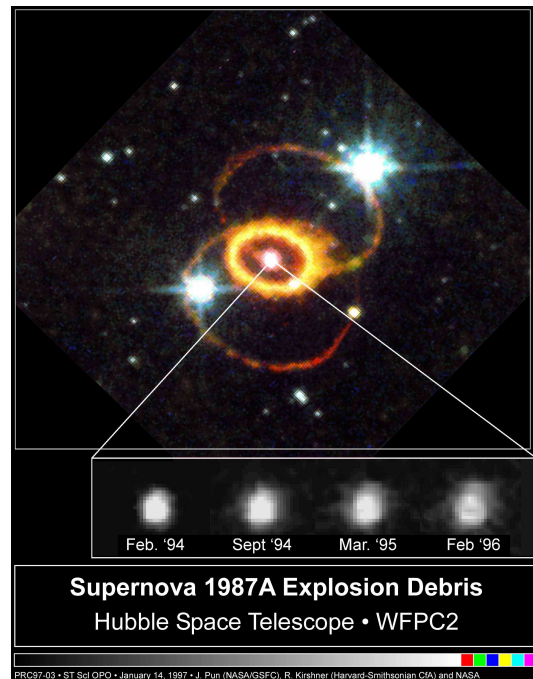
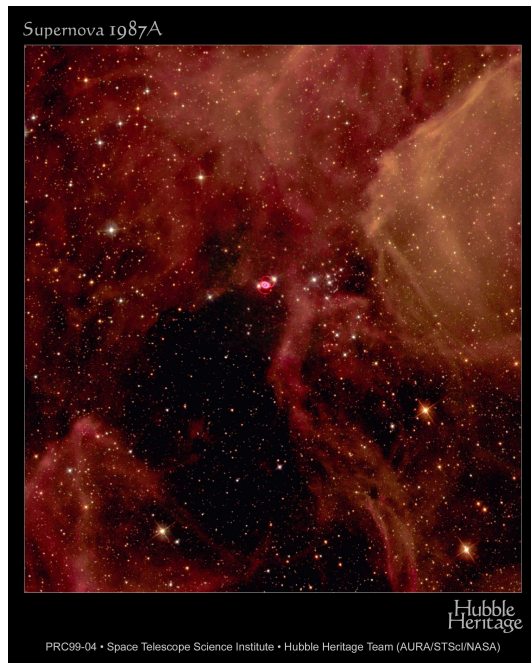


Abbildung C.2: Oben: Im Zentrum der "Supernova 1987A" ist sehr wahrscheinlich ein ultradichter Quarkstern oder ein schwarzes Loch erzeugt worden (siehe [81, 82, 83]). Unten: Im Zentrum des "Krebs Nebels" befindet sich der "Krabben-Pulsar"; die Bilder unterscheiden sich in den unterschiedlichen Frequenzbereichen der beobachteten Strahlung.

Ist die Masse des Sterns jedoch schwerer als 8 Sonnenmassen, so endet dieser in einer Supernova Explosion (Typ II oder Ib,c), in deren Zentrum sich ein kompakter Stern (Neutronenstern, Hybridstern, Quarkstern oder Hyperstern) oder ein schwarzes Loch befindet [84, 85, 81, 82, 86] (siehe Abb. C.2). Zu welchem Objekt der Stern kollabiert hängt auch hier von seiner ursprünglichen Gesamtmasse ab. Anhand von numerischen Supernova-Simulationen lässt sich vermuten, dass ein schwarzes Loch erzeugt wird, wenn die Masse des ursprünglichen Sterns über 15 Sonnenmassen liegt [85]. Die wohl bekannteste Supernova Explosion ist der Krabbennebel. Diese Himmelserscheinung wurde am 4. Juli 1054 von chinesischen Astronomen beobachtet und war ca. drei Wochen lang mit dem bloßen Auge tagsüber zu erkennen. Im Zentrum des Nebels befindet sich der Krabben Pulsar, den man sich als einen rotierenden Neutronenstern mit einem starken magnetischen Dipol vorstellt.

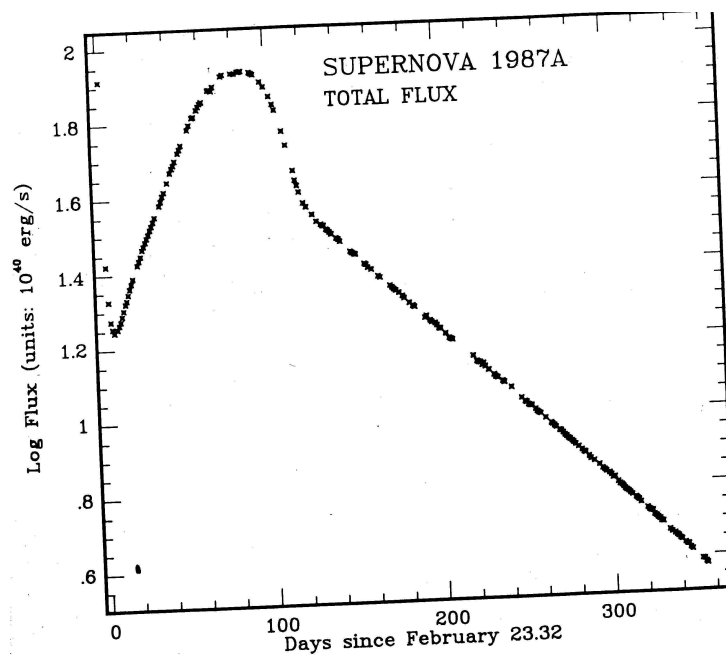


Abbildung C.3: Bolometrische Lichtkurve der Supernova Explosion SN 1987A, die sich im Februar 1987 ereignete (aufgenommen vom astronomischen Observatorium in Süd Afrika).

Eine weitere Supernova Explosion (SN 1987A), die man 1987 mit bloßem Auge aufleuchten sehen konnte, ereignete sich in unserer Nachbargalaxie

der großen magellanischen Wolke. Abb. C.3 zeigt den Verlauf der Lichtkurve dieser Supernova Explosion. Neuere astrophysikalische Beobachtungen legen nahe, dass einige der am Ende dieses Anhangs besprochenen  $\gamma$ -Strahlenausbrüche in engem Zusammenhang mit Supernova Explosion auftreten (siehe [87, 88]). Von den ca. 1400 bekannten Pulsaren ist es bei einigen Dutzend gelungen, sie mit Supernova Explosionen in Zusammenhang zu bringen [16, 15, 89].

Der Abstrahlmechanismus von Radiopulsaren lässt zwar noch immer im Detail einige Fragen offen, wird aber im Prinzip gut mit dem "Leuchtturm-Modell" erklärt [90, 91] (siehe Abb C.4).

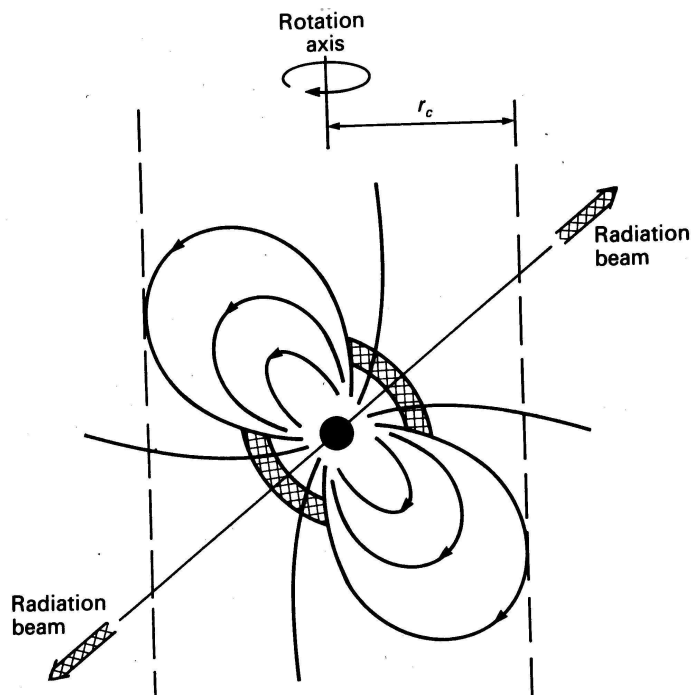


Abbildung C.4: Skizze des Pulsar Abstrahlmechanismus beschrieben durch das "Leuchtturm-Modell". Da die Rotations- und Magnetfeldachse des Pulsars im allgemeinen nicht zusammenfallen, entsteht ein Doppelkegel der Radioabstrahlung in Richtung der Magnetfeldachse.

Hierbei nimmt man an, dass die Rotationsachse und die Magnetfeldachse des Neutronensterns im allgemeinen nicht zusammenfallen. Aufgrund der extrem starken Magnetfeldstärken ( $10^{11} - 10^{13}$  G) strahlt der Pulsar die elektromagnetischen Wellen nur in Form eines Doppelkegels in beide Richtungen

der Magnetfeldachse ab (näheres siehe [90, 91]), so dass sich durch die Rotation ein "Leuchtturmeffekt" ergibt. Damit man den Pulsar von der Erde aus beobachten kann, ist es nötig, dass einer dieser Kegel in Richtung der Erde zeigt.

## Observable Größen von kompakten Sternen

### Rotationsfrequenz der Pulsare

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wurde der erste Pulsar im Jahre 1967 von J. Bell entdeckt. Dieser Pulsar, der heute die Bezeichnung PSR 1919+21 trägt, zeigt eine periodisch wiederkehrende Radiostrahlung der Periode  $P = 1.3337s$ . Nach dieser Entdeckung erkannte man schnell, dass dieser Pulsar kein Einzelfall ist und entdeckte in den folgenden Jahren weitere solcher periodisch wiederkehrender Radiointensitäten, darunter auch die bekanntesten Pulsare – der Krabben(Crab)- und Vela Pulsar. 1981 publizierte Manchester und Taylor einen Pulsar Katalog, der die Eigenschaften von 330 Pulsaren auflistete. 1990 erweiterte A.G. Lyne [90] diesen Katalog um weitere 120 Pulsare. Gerade in den letzten Jahren stieg, aufgrund des neuen "Parkes multibeam Pulsar Survey" Teleskopes die Zahl der bekannten Pulsare extrem an (siehe [92, 93, 94]). Zur Zeit sind ca. 1400 Pulsare bekannt, deren Rotationsperioden man sehr präzise bestimmen kann. Abbildung C.5 zeigt die Rotationsperiodenverteilung von 750 Pulsaren, die 1997 bekannt waren und Abbildung C.6 zeigt die Verteilung von 100 Pulsaren, die im Jahre 2000 mit Hilfe des "Parkes multibeam Pulsar Survey" gefunden wurden. In beiden Verteilungen ist auffällig, dass sie sich grob in zwei Arten von Pulsaren gliedern lassen. Die

- Sekundenpulsare  
Der maßgebliche Teil der bekannten Pulsare besitzt eine Rotationsperiode von ungefähr einer Sekunde.
- Millisekundenpulsare  
Eine der Pulsare rotieren viel schneller, mit einer Periode im Millisekundenbereich.

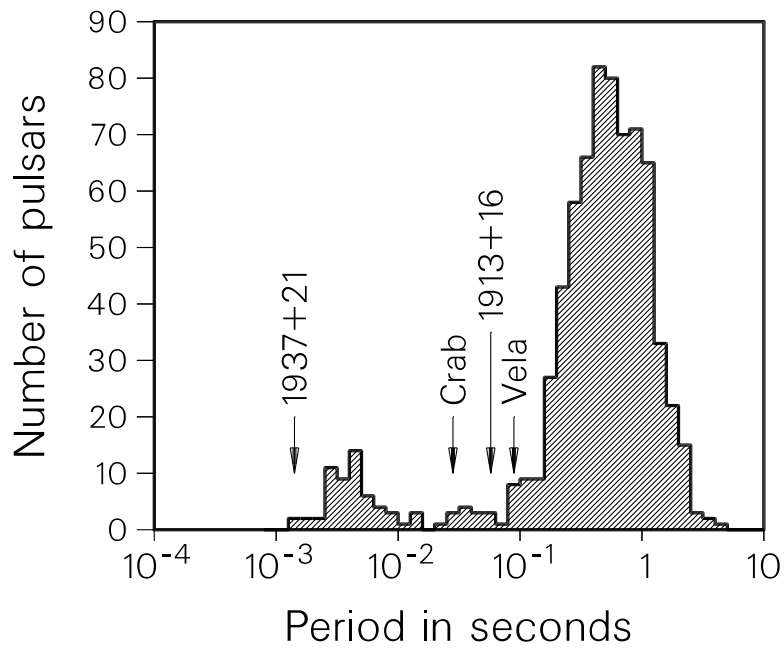


Abbildung C.5: Verteilung der Pulsarperioden um ca. 1997.

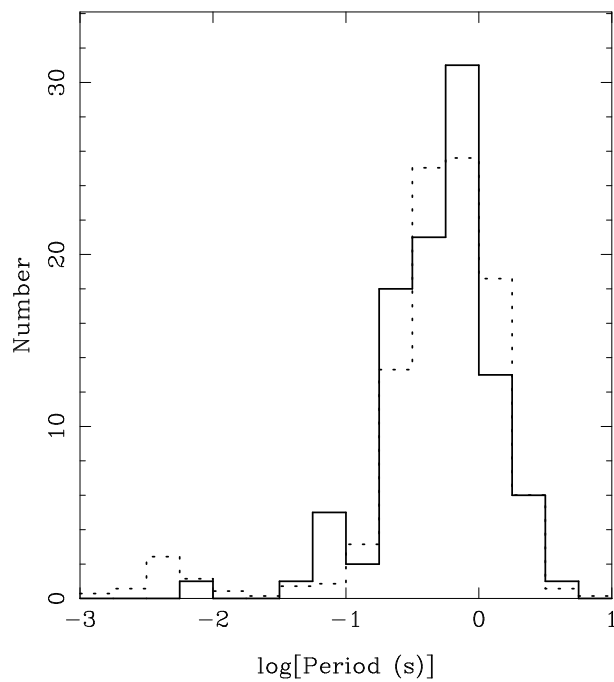


Abbildung C.6: Verteilung der Pulsarperioden die mit Hilfe des "Parkes multibeam Pulsar Survey", die im Jahre 2000 entdeckt wurden.

Der am schnellsten rotierende Pulsar (PSR 1957+20) rotiert 622.1 mal ( $P = 1.6$  ms) in einer Sekunde um seine Achse [95]. Nimmt man an, dass dieser Pulsar einen Radius von 15 km hat, so bewegt sich am Äquator die Oberfläche des Sterns aufgrund der Rotation mit zwanzig Prozent der Lichtgeschwindigkeit. Da die meisten Radiowellenobservatorien keine hohe Empfindlichkeit für Radiowellen im Millisekundenbereich besitzen, spiegeln die in den Abbildungen C.5 und C.6 gezeigten Verteilungen nicht die wirkliche Periodenverteilung existierender Pulsare wider, sondern es ist zu erwarten, dass es weit mehr Millisekunden Pulsare gibt, als die, die zur Zeit bekannt sind ([15]). Neue Experimente versuchen in diesem Wellenlängenbereich empfindlicher zu werden und man hofft noch weit schneller rotierende Pulsare zu finden [15, 93, 96, 97].

Aufgrund unterschiedlichster Energieabstrahlungen verliert ein einzelner Pulsar Drehimpuls, was eine zeitliche Abnahme der Rotationsperiode zur Folge hat. In Abb. C.7 ist die zeitliche Abnahme der Periode gegen die Rotationsperiode selbst aufgetragen. Man erkennt, dass obwohl die Millisekunde Pulsare viel schneller rotieren als die Sekunden Pulsare, sie doch weniger Energie pro Zeit abstrahlen und deshalb ihre Periode nur langsam abnimmt. Diese Eigenschaft wird durch die Lebensgeschichte der Pulsare erklärt. Pulsare werden in Supernova Explosionen mit hohen Magnetfeldstärken ( $B \sim 10^{12} - 10^{13}$  G) geboren. Aufgrund der Energieabstrahlung verlangsamen sie sich ("Spin-down") und gelangen in den grauen Bereich von Abb. C.7 ( $P \sim 1$  s,  $\dot{P} \sim 10^{15}$ ) wo sich die meisten bekannten Pulsare befinden. Bei einer noch weiteren Verlangsamung der Rotation können Pulsare keine Radiowellen mehr abstrahlen und werden im Radiowellenbereich unsichtbar [16, 15, 90, 91]. Die Eigenschaften der Millisekunden Pulsare können durch eine stille Entwicklung dieser unsichtbar gewordenen Sekunden Pulsare erklärt werden, indem sie von einem Begleitobjekt (z.B. weißer Zwerg) durch Massentransfer beschleunigt werden. Dieser Begleiter kann bereits direkt nach der Entstehung des Pulsars existiert haben oder später eingefangen worden sein. Aufgrund des Massentransfers wird erwartet, dass sich einerseits das Magnetfeld des Pulsars verringert ( $B \sim 10^8$  G) und deshalb weniger Energie pro Zeit abgestrahlt wird ( $dP/dt \sim 10^{20}$ ), andererseits wird seine Rotation beschleunigt und er kann wieder die Grenze der Radiosichtbarkeit (turn-of



line) überschreiten. Man interpretiert deshalb die Millisekunden Pulsare als "alte, recykelte", durch Massentransfer beschleunigte Neutronensterne.

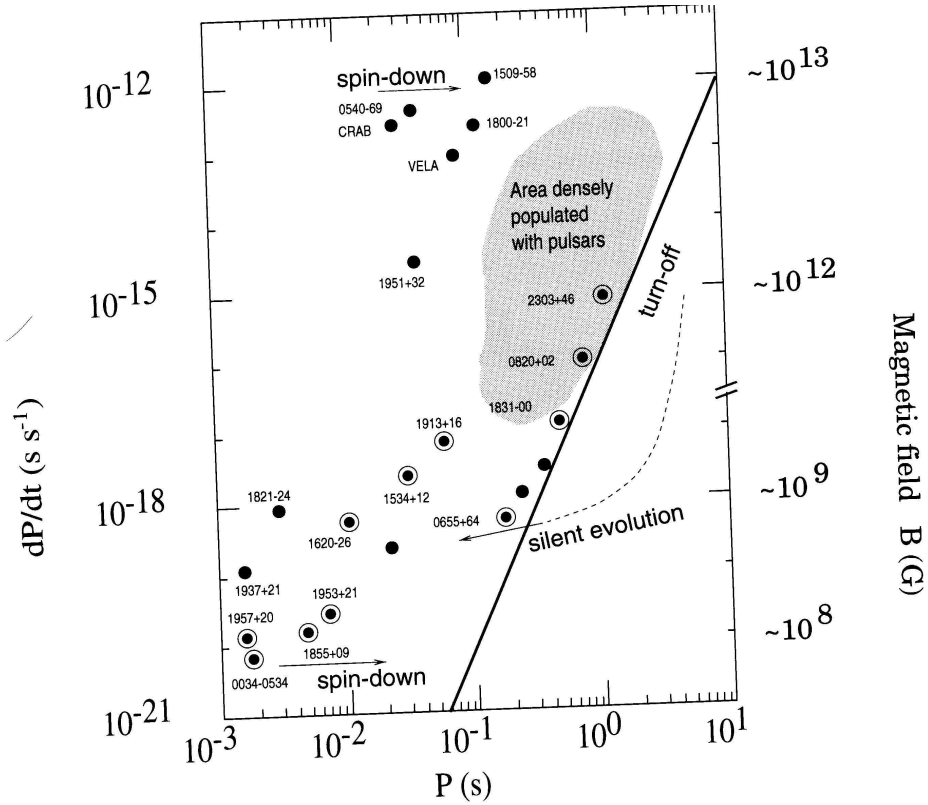


Abbildung C.7: Erste zeitliche Ableitung der Pulsarperiode  $\dot{P}$  gegen die Pulsarperiode  $P$  selbst. Die "stille Evolution" der Sekundenpulsare hin zu den Millisekunden Pulsaren vollzieht sich jenseits der "turn-off line". Binäre Pulsare sind mit einem umringten Punkt gekennzeichnet. Die Stärke des Magnetfeldes des Pulsars kann man anhand der rechten Achse ablesen.

Eine weitere interessante Größe in diesem Zusammenhang ist der dimensionslose Brechungsindex  $n(\Omega)$  der sich aus der Rotationsfrequenz  $\Omega$  und ihren ersten und zweiten zeitlichen Ableitungen  $\dot{\Omega}$ ,  $\ddot{\Omega}$  zusammensetzt:

$$n(\Omega) = \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} \quad (\text{C.1})$$

Würde der Energieverlust eines Pulsars ausschließlich durch magnetische Dipolstrahlung verursacht, wäre  $n = 3$ . Während einige der bekannten Pulsare einen Brechungsindex nahe dieses Wertes haben, unterschreitet der Vela Pulsar diesen Wert ( $n_{Vela} = 1.4_{-0.2}^{+0.2}$ ) und andere überschreiten ihn weit (B2127+11A:  $n = 1.5 \cdot 10^6$ , B1757-24:  $n = 38$ ).

Eine auffällige "Clustering" der Rotationsperiode beobachtet man bei den Leichtmassen-Röntgenpulsaren in binären Systemen (LMXB's). Die Rotationsfrequenz der kompakten Sterne in den meisten dieser binären Systemen befindet sich in einem schmalen Bereich zwischen 200 und 400 Hz (siehe gefülltes Histogramm in Abb. C.8). N.K. Glendenning und F. Weber konnten zeigen [76, 77], dass eine solche Clustering sich auf natürliche Weise ergibt, wenn man während der Evolution des kompakten Sterns einen Quark-Hadron Phasenübergang im Sterninneren berücksichtigt (siehe ungefülltes Histogramm in Abb. C.8).

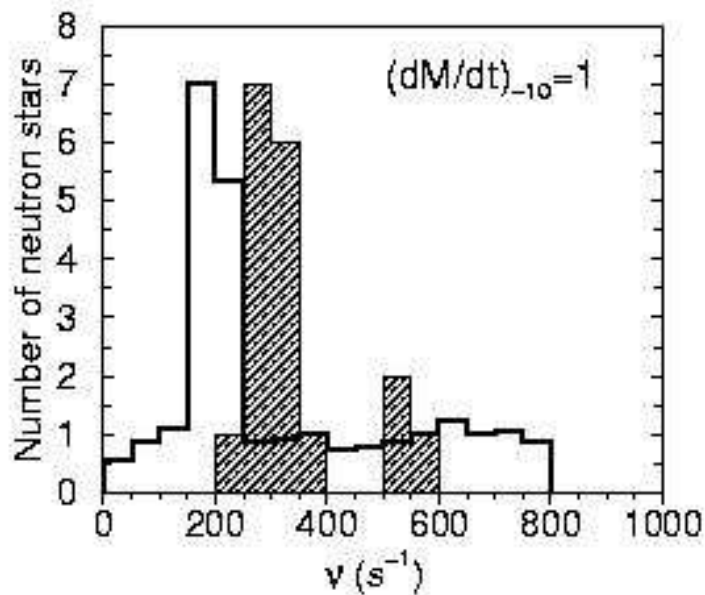


Abbildung C.8: Rotationsfrequenz-Verteilung von kompakten Sternen in LMXB's. Das ausgefüllte Histogramm zeigt die beobachteten Daten, wohingegen das ungefüllte Histogramm die theoretischen Berechnungen der Frequenz-Clustering zeigen, die sich auf natürliche Weise durch Einbeziehung eines Quark-Hadron Phasenübergang ergeben.

Die LMXB's stellen des weiteren eine wichtige mögliche Quelle von Gravitationswellen emittierenden Systemen dar, die man mittels der erdgebundenen Gravitationswellen Detektoren nachweisen könnte (siehe [98, 99, 100, 101, 102, 103]).

Eine weitere interessante Tatsache, die bei einigen der bekannten Pulsare entdeckt wurde sind die spontanen, teilweise wiederkehrenden Sprünge in der Rotationsperiode ("Pulsar Glitches"). Allein mit dem Parkes 64-m Radio Teleskop fand man zwischen Januar 1990 und Dezember 1998 30 Glitche in 11 Pulsaren (siehe [104]). Abb. C.9 zeigt den Sprung in der Rotationsperiode des Crab Pulsars der sich 1975 ereignete.<sup>1</sup>

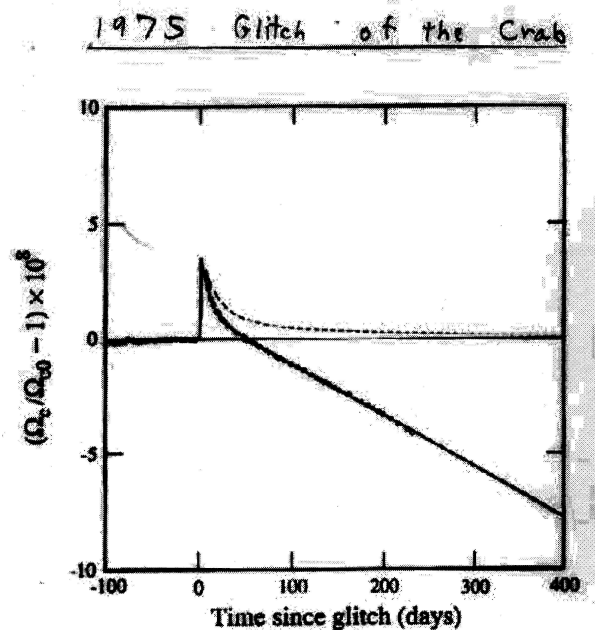


Abbildung C.9: Beobachtung des Sprungs in der Rotationsperiode des Krebs Pulsars am 4. Februar 1975. Die durchgezogene Kurve veranschaulicht die beobachteten Frequenz-Residuen  $\Omega_c/\Omega_{c0} - 1$ , wobei die gestrichelte Kurve numerische Berechnungen darstellt, die im "vortex creep model" gemacht wurden.

<sup>1</sup>Die Beschreibung und das Bild entstammt einem Vortrag von A.G. Lyne (Physics of Neutron Star Interiors, Juni 2000, Trento); <http://www.mpg.uni-rostock.de/people/david.dir/NSI/index.html>

Man sieht einerseits den spontanen Sprung in der Rotationsperiode und andererseits erkennt man, dass nach dem Glitch zunächst ein exponentielles Abfallen der Rotationsperiode entsteht, dass sich dann (ca. 50 Tage nach Ereignen des Glitches) in eine lineare Abnahme der Rotationsperiode mündet. Eine qualitative Erklärung dieses Effektes liefert ein Modell, das eine differenzielle Rotation des Sterns benutzt [15, 105, 106]. In diesem Modell ist die Neutronenstern Kruste von dem Inneren des Neutronensterns zeitweise entkoppelt und rotiert langsamer. Der superfluide Teil der Inneren Kruste kann jedoch durch Vortex-Linien an die äußere Kruste ankoppeln und diese spontan beschleunigen, so dass man als äußerer Beobachter einen Glitch erkennt. Quantitative Rechnungen in solchen Modellen versagen jedoch meist und können das veränderte Abfallen der Rotationsperiode nach dem Glitch nicht erklären (siehe gestrichelte Kurve in Abb. C.9). Neuere Ideen, die das Auftreten der Glitche in Zusammenhang mit einem Quark-Hadron Phasenübergang bringen, sind leider von quantitativen Berechnungen noch weit entfernt [107, 108].

## Masse

Ca. 50 der bekannten Pulsare befinden sich in binären Systemen, wobei mindestens 5 davon doppelte kompakte Stern Systeme sind [95]. Die Gesamtmasse eines kompakten Sterns kann bei einigen binären Röntgen- und Radiopulsarsystemen direkt bestimmt werden (näheres siehe [15]). Die Massen, der in Abb. C.10 dargestellten binären Systeme halten sich alle in einem begrenzten Massenbereich zwischen 1.1 und 1.6 Sonnenmassen auf ( $1.1 < M/M_{\odot} < 1.6$ ). Während die untere Schranke heuristisch durch den Supernovaprozeß festgelegt wird, ist die obere Schranke durch theoretische Berechnungen von kompakten Sternen festgelegt und ist abhängig von dem verwendeten Elementarteilchenmodell (siehe 3). Im Laufe der Jahre konnte die Statistik der gemessenen Massenwerte der Radiopulsarsysteme enorm verbessert werden. Die observablen Massenwerte von 21 existierenden Radiopulsaren sind konsistent mit einer sehr engen Gaus'schen Massenverteilung, wobei  $M = 1.35 \pm 0.04$  (siehe [95] und Abb. C.11).

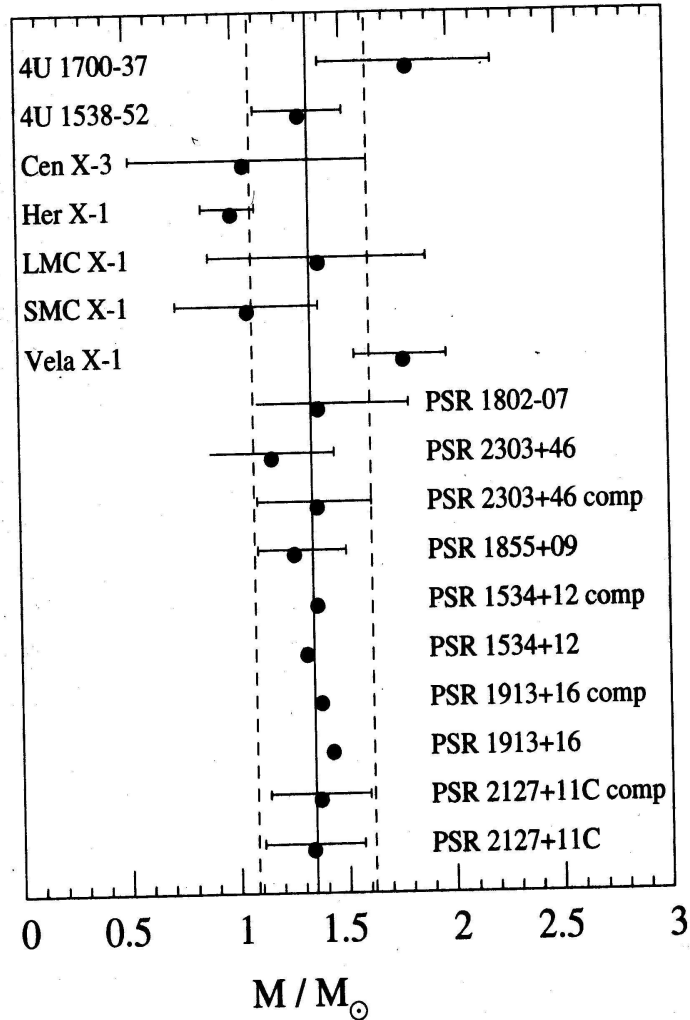


Abbildung C.10: Beobachtete Massen von binären Pulsaren. Der obere Teil der Pulsare befindet sich in binären Röntgenstrahl Systemen (binary X-ray pulsars), wobei der untere Teil aus Radiopulsaren und deren Begleitern besteht.

In binären Pulsarsystemen ist die Bestimmung der Massen extrem genau. Der Hulse-Taylor Pulsar (PSR 1913+16) hat z.B. eine Masse von  $M = (1.444 \pm 0.003)M_{\odot}$  [26, 15]. Das Pulsarsystem PSR J0737-3039A/B liefert die folgenden Massen [24]: J0737-3039A ( $M = 1.337(5)M_{\odot}$ ), J0737-3039B ( $M = 1.250(5)M_{\odot}$ ).

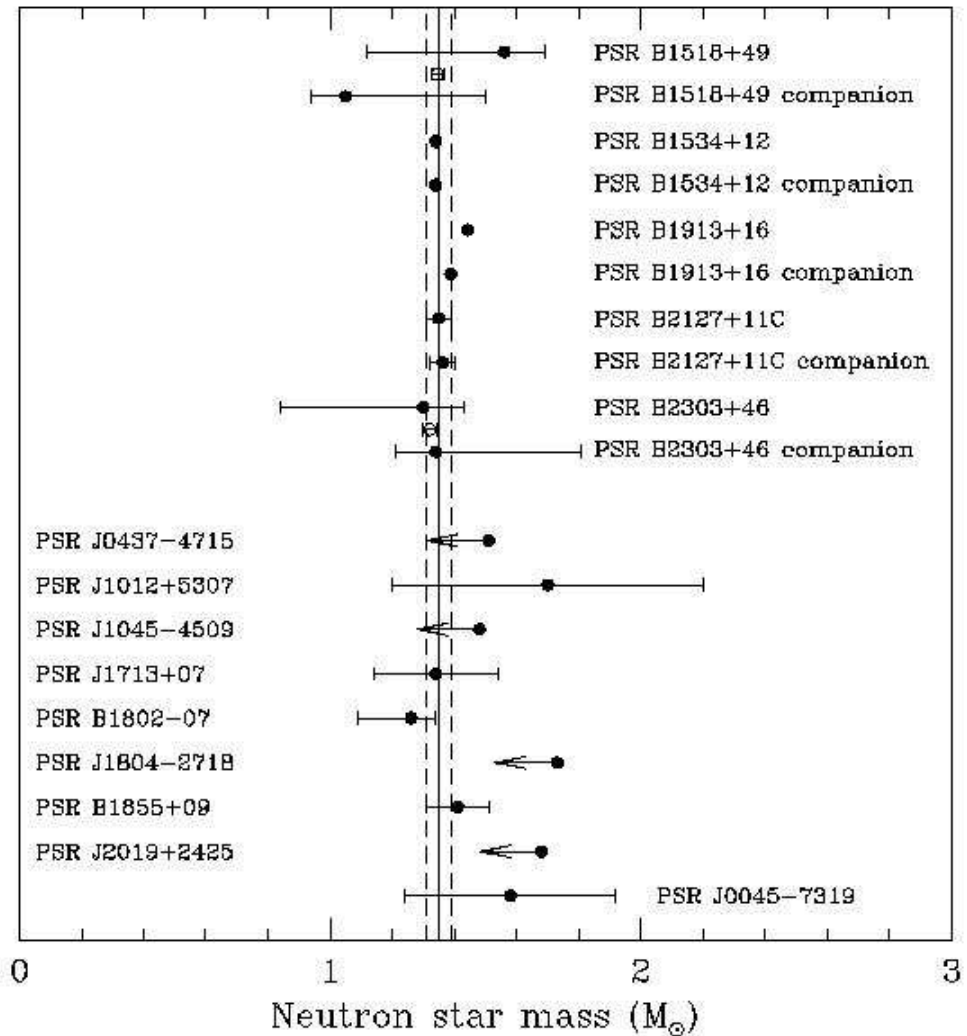


Abbildung C.11: Massenwerte von 21 Radiopulsaren (näheres siehe [95]).

Im Vergleich zu diesen "gesicherten Massenwerten" von Binärpulsaren wurden in den letzten Jahren davon abweichende Werte gefunden. Anhand der quasi periodisch oszillierenden Röntgenstrahlungen (QPO's) in einigen "Leichtmassen Binärsystemen" (LMXB: Low-Mass X-ray Binaries) extrahierte man die Masse eines Röntgenpulsars von  $M \sim 2 M_{\odot}$  [15, 109, 110]. Des weiteren fand man, dass viele der gemessenen schwarze Loch Kandidaten mit Massen im Bereich  $5 < M/M_{\odot} < 15$  ähnliche Eigenschaften in den experimentellen Daten aufweisen, wie kompakte Sterne in Röntgenpulsaren.

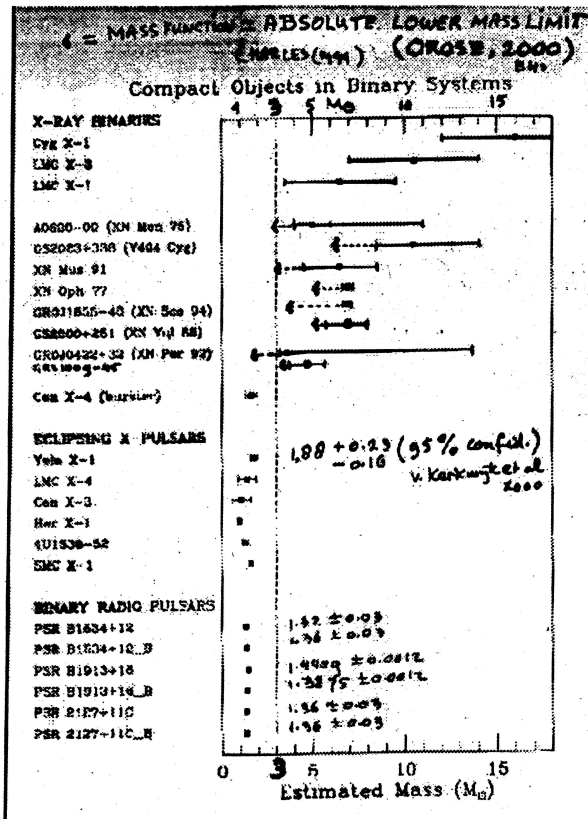


Abbildung C.12: Massen von schwarzen Loch Kandidaten und kompakten Sternen in LMXB's im Vergleich zu den in Abb. C.10 veranschaulichten Massenwerten.

In Abb. C.12 sind die Massen der binären Radio- und Röntgenpulsare im Vergleich zu den neueren Messungen in LMXB-Systemen und den Massenwerten für Kandidaten für schwarze Löcher aufgetragen. Eine Erklärung der "Kandidaten für schwarze Löcher" als sehr massive Neutronensterne ist in realistischen Elementarteilchen Modellen unter Verwendung der ART nicht möglich, da die maximal erreichbare Sternmasse in allen bekannten Modellen unterhalb von drei Sonnenmassen liegt. Falls es sich dennoch in Zukunft durch astrophysikalische Beobachtungen herausstellen sollte, dass es sich bei diesen sehr massiven Objekten nicht um schwarze Löcher, sondern um kompakte Sterne handelt, so kann man daraus folgern, dass die ART in ihrer

derzeitigen Formulierung falsch ist und man muß zu alternativen Gravitationstheorien übergehen (z.B. Yilmaz-Metrik [111]).

## Radius

Da kompakte Sterne für astronomische Größenordnungen extrem kleine Objekte darstellen und gleichzeitig die Abstände zu ihnen sehr groß sind, ist jede Radiusbestimmung äußerst schwierig. Die Beobachtungsmöglichkeiten von kompakten Sternen haben sich jedoch in den letzten Jahren enorm verbessert, so dass eine wirkliche Radiusbestimmung einiger bekannter kompakter Sterne, nun im Bereich des möglichen liegt. Eine solche Radiusbestimmung beruht auf dem folgenden Prinzip:

Bei einigen kompakten Sternen beobachtet man eine thermische Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen an ihrer Oberfläche. Das Maximum des abgestrahlten Spektrums der Wellen hängt von der Temperatur  $T$  des Sterns ab. Wie wir im Kapitel 2 sahen, werden die von der Oberfläche des Sterns emittierten elektromagnetischen Wellen auf ihrem Weg zur Erde gravitativ rotverschoben. In gleicher Weise, wie sich die Frequenz der ausgesandten Strahlung gravitativ rotverschiebt (gemessen von einem unendlich weit entfernten Beobachter (siehe Gleichung 2.92)), wird auch das Maximum des emittierten Frequenzspektrums rotverschoben. Die von einem unendlich entfernten Beobachter aus dem Frequenzspektrum extrahierte Temperatur  $T_\infty$  ist somit die gravitativ rotverschobene, anscheinende Temperatur; sie setzt sich wie folgt aus der wirklichen Temperatur  $T$  des Sterns zusammen:

$$T_\infty = \sqrt{\frac{g_{tt}(R)}{g_{tt}(r_B \rightarrow \infty)}} T = \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} T \quad (\text{C.2})$$

mit:  $g_{tt}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$

Die gemessene totale Luminosität  $L$ , d.h. die pro Zeit durch eine Kugeloberfläche strömende elektromagnetische Energie ergibt sich durch das Stefan Boltzmann Gesetz. Der von einem unendlich weit entfernten Beobachter gemessene Strahlungsfluss  $f_\infty$  erscheint wiederum rotverschoben, so dass sich die totale Luminosität  $L_\infty$  wie folgt schreibt



$$L_\infty = 4\pi D^2 f_\infty = L \left(1 - \frac{2M}{R}\right) = 4\pi\sigma_{SB} R_\infty^2 T_\infty^4 \quad , \quad (\text{C.3})$$

wobei  $\sigma_{SB}$  die Stefan Boltzman Konstante,  $D$  den Abstand zum Stern und  $R_\infty$  den anscheinenden, durch die gemessene Luminosität berechneten Sternradius (Strahlungsradius) beschreibt

$$R_\infty = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \quad (\text{C.4})$$

Kennt man den Abstand  $D$  zum Stern, so kann man durch die gemessene Luminosität die totale Luminosität  $L_\infty$  berechnen. Durch das gemessenen Frequenzspektrum lässt sich  $T_\infty$  festlegen und somit durch Gleichung C.3  $R_\infty$  berechnen.

Trägt man im Radius-Masse Diagramm die jeweiligen  $R_\infty = \text{const}$ -Kurven auf, so erkennt man, daß jede Kurve eine maximale Masse des Sterns impliziert (siehe Abb. C.13). Diese maximale Masse wird unabhängig von dem jeweiligen  $R_\infty$ -Wert stets bei einem Radius von  $R_T = 3M$  erzeugt, wie man leicht mit Hilfe von Gl. C.4 zeigt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dR} M(R, R_\infty) \right|_{R=R_T} & \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{mit :} \quad M(R, R_\infty) = -\frac{R^3}{2R_\infty^2} + \frac{R}{2} \\ \Rightarrow R_T = \frac{R_\infty}{\sqrt{3}}, \Rightarrow M(R_T, R_\infty) & = \frac{R_\infty}{\sqrt{27}} \Rightarrow R_T = 3M \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Das Maximum der  $R_\infty = \text{const}$ -Kurven wird demnach stets bei einem Radius erreicht, der dem entsprechenden Radius der Photonensphäre des Sterns entspricht (siehe Kapitel 2).

Norman Glendenning konnte mittels numerischer Rechnungen zeigen, dass eine allgemeine nichtselbstgebundene, kausale Zustandsgleichung polytroper Struktur, an die bei niedrigen Dichten die Krustenzustandsgleichung von Baym, Pethick und Sutherland [49] hinzugefügt wird, einen minimal möglichen Radius der Sterne impliziert. In Abb. C.13 ist diese Untergrenze als braune Funktion dargestellt.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Diese Untergrenze des Radius gilt somit für alle Neutronen-, und Hybridsterne mit äußerer Kruste.

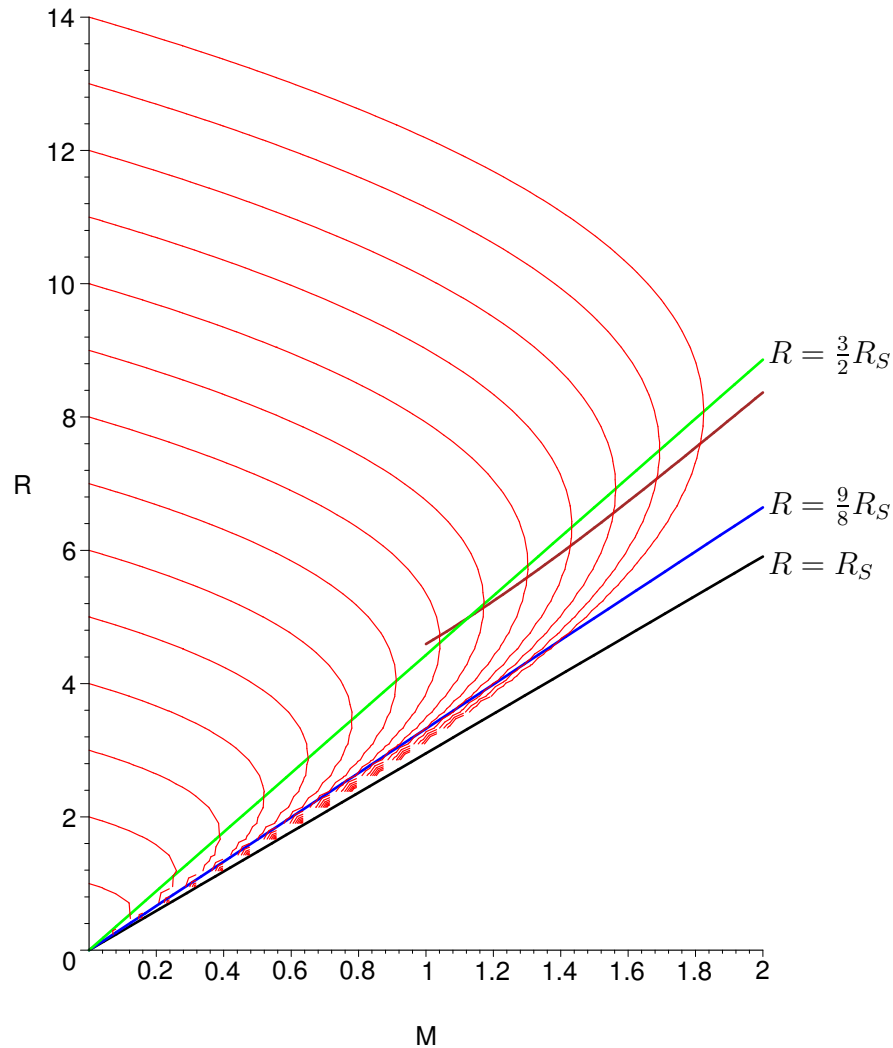


Abbildung C.13: Masse(in  $M_\odot$ )-Radius(in km) Diagramm. Die roten Funktionen beschreiben  $R_\infty = \text{const}$ -Kurven, wobei der jeweilige konstante Wert bei  $R(M = 0)$  abgelesen werden kann. Die schwarze Gerade kennzeichnet den entsprechenden Radius-Wert des Ereignishorizontes bei gegebener Masse ( $R = R_S = 2M$ ). Die blaue Gerade beschreibt den minimal möglichen Radius eines kompakten Sterns; die absolute Stabilitätsgrenze ( $R = 9/8 R_S$ , siehe Kapitel 2). Die grüne Gerade beschreibt den Radius der Photonensphäre bei gegebener Masse ( $R = 3/2 R_S$ , siehe Kapitel 2). Die Photonensphäre schneidet die Maximalwerte der  $R_\infty = \text{const}$ -Kurven. Die braune Kurve, die sehr nahe an der entsprechenden Photonensphäre liegt, beschreibt den minimalen Radius von kompakten Sternen, die eine kausale, nichtselbstgebundene Zustandsgleichung besitzen [112].

Die Resultate von Glendenning liegen sehr nahe der Photonensphäre der Sterne und zeigen, dass kompakte Sterne, die einen Radius unterhalb ihrer Photonensphäre haben, nur stabil sein können, wenn sie durch eine selbstgebundene Zustandsgleichung beschrieben werden.<sup>3</sup>

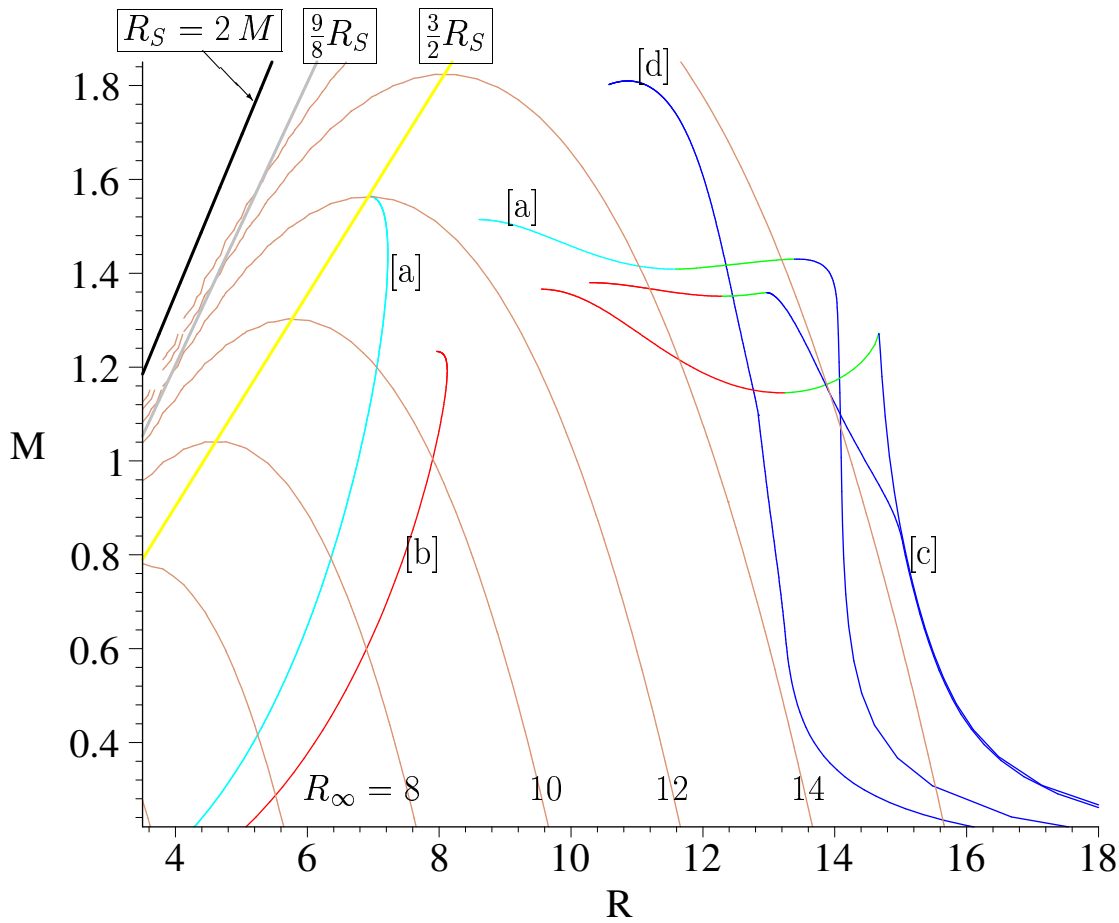


Abbildung C.14: Masse(in  $M_{\odot}$ )-Radius(in km) Diagramm. a: Stark gebundene Hyperonensterne, b: Nackte Quarksterne im NJL( $\xi = 0$ ) Modell, c: Hybride Sterne im NLZBag180 Modell, d: Hybride Sterne mit farbsupraleitenden inneren Quarkkern

Abb. C.14 zeigt einige der im Ergebnisteil besprochenen Resultate im Masse-Radiusdiagramm (näheres siehe [113]).

<sup>3</sup>Die weitere Möglichkeit einer nichtkausalen Zustandsgleichung ist unrealistisch.

Bis vor einigen Jahren gingen die größten Unsicherheiten bei einer solchen Radiusbestimmung durch die Abstandsangaben in die Rechnungen ein. Durch das seit einigen Jahren existierende 'Very Long Baseline Array (VLBA)', das Abstandsmessungen von kompakten Sternen durch Parallaxe-Angaben möglich machte, ist nun eine präzise Angabe des Abstandes möglich. Die derzeitigen größten Unsicherheiten liegen in der Unkenntnis der genauen Beschaffenheit der äusseren Atmosphärenschicht der kompakten Sterne. Obwohl die Ausdehnung der Atmosphärenschicht verschwindend gering ist, verändert sie das thermisch emittierte Frequenzspektrum der vom kompakten Stern ausgehenden Strahlung. Nimmt man z.B. an, dass der Pulsar 'PSR B0656+14' eine einfache schwarzkörper Strahlung von seiner Oberfläche emittiert, so berechnet sich sein anscheinender Radius zu  $R_\infty \approx 7 - 8.5$  km,<sup>4</sup> fittet man das Spektrum jedoch unter der Annahme einer magnetisierten hydrogenen Atmosphäre an, so berechnet sich  $R_\infty \approx 13 - 20$  km.

Neben der Radiusabschätzung des Pulsars PSR B0656+14 wurden weitere kompakte Sterne gefunden, bei denen man Radiusbestimmungen vornehmen konnte (siehe z.B. [114]).

## Abstand, Verteilung und "Kick"-Geschwindigkeiten

Aufgrund der Dispersionsverschiebung des Radiopulses ist eine Abstandsmessung bei vielen Pulsaren schon seit längerem möglich. Die Verteilung der gemessenen Pulsare in unserer Galaxie veranschaulicht Abb. C.15.

Aufgrund der gravitativen Anziehungskraft des Sterns wird außerdem das Radiosignal in den roten Frequenzbereich verschoben (siehe Kapitel 2). Diese Gravitationsrotverschiebung  $z$  hängt wie folgt mit der Masse und dem Radius des Sterns zusammen:

$$z = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} - 1 \quad (\text{C.6})$$

---

<sup>4</sup>Nimmt man eine Masse des Pulsars von  $0.9M_\odot$  an, so würde sich sein Radius zu  $R \approx 4 - 5$  km bestimmen. Die untere Schranke  $R = 4.3$  km ist theoretisch nicht möglich, da sie unterhalb der absoluten Stabilitätsgrenze von  $9/8R_g$  liegt.

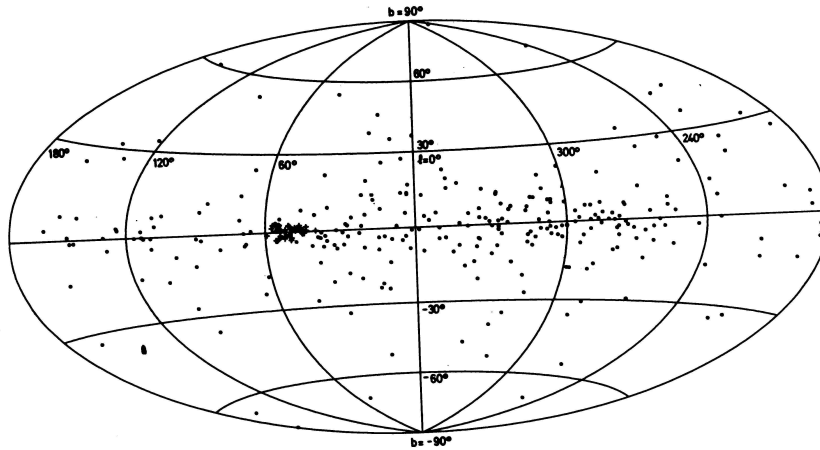


Abbildung C.15: Räumliche Verteilung von 316 Pulsaren in unserer Galaxie.

Die transversale Geschwindigkeit des Pulsars ist ebenfalls in einigen Systemen messbar. Bei vielen Pulsaren fand man eine sehr hohe Geschwindigkeitskomponente transversal zur Rotationsachse unserer Galaxie ("Kick-Geschwindigkeit"). Bei dem erdnächsten kompakten Stern, der zuerst 1992 mit dem Röntgenteleskop ROSAT gefunden wurde und seit 1995 im sichtbaren Wellenlängenbereich mit dem HST beobachtet wird, fand man eine transversale Geschwindigkeit von ca.  $1/3$  Bogensekunden. Dieser Stern, der keine Pulsareigenschaften zeigt, aber eine thermische Strahlung von ca.  $49eV$  besitzt, ist  $61_{-8}^{+9}$  pc entfernt und besitzt bemerkenswerte Radius und Masse Eigenschaften. Man fand, durch eine Zurückverfolgung seiner Bewegung im Raum, dass sein Geburtsort, sehr genau mit der Position einer Supernova Explosion zusammenfällt, die sich ca. vor einer Millionen Jahren ereignet hatte. Aus seiner derzeitigen Position und dem Ort der Supernova Explosion berechnet man, dass er mit einer Geschwindigkeit von ca. 200 km/s aus der (anscheinend asymmetrischen) Explosion herausgeschleudert wurde. Die Kick-Geschwindigkeiten von kompakten Sternen sind jedoch nicht einheitlich, sondern unterteilen sich in zwei separate Gruppen (ähnlich der Unterteilung bei Sekunden- und Millisekunden Pulsaren). Die eine Gruppe der kompakten Sterne besitzt transversale Geschwindigkeiten zwischen 200 – 300 km/s während die zweite Gruppe sich mit ca. 800 km/s durch den Raum bewegen.

Dieser Effekt scheint im Zusammenhang mit der Unterteilung von Supernova und Hypernova Explosionen zu stehen.

### Sonstige Größen

Des weiteren ist es in einigen Systemen möglich das Magnetfeld, das Trägheitsmoment und die Temperatur des Pulsars zu bestimmen (näheres siehe [15]).

## Neuere und zukünftige Erkenntnisse

### $\gamma$ -Strahlenausbrüche und kompakte Sterne

Mit Hilfe der neuen  $\gamma$ -Wellen Teleskope BEPOSAX und CHANDRA fand man, dass durchschnittlich drei mal pro Tag sich irgendwo im Universum extrem energiereiche Strahlungsausbrüche ereignen. Diese so genannten "  $\gamma$ -Ray-Burster" dauern von einigen Millisekunden bis hin zu einigen Minuten an und emittieren in einem Mal mehr Energie als unsere Sonne in ihrer gesamten Lebensdauer abstrahlt. Da man bei einigen dieser Ereignisse ein Nachglühen im Röntgen-, optischen und Radio Spektrum beobachtete, konnte man den Durchmesser des emittierenden Gebietes auf einen sehr kleinen Raumzeitbereich einschränken. Bei einem dieser Strahlungsausbrüche (GRB 991216) gelang es, über die kosmologische Rotverschiebung der ausgesandten Strahlung eine Abschätzung des Abstandes zu erhalten, bei der man einen Wert von  $z=1$  (Entfernung von ca. 7 Milliarden Lichtjahren) fand. Bei diesem und einem weiteren  $\gamma$ -Ray-Burst (GRB 990705) schloss man aufgrund von Eisen-Absorptionslinien in der empfangenen Strahlung, dass sich größere Mengen von Eisen in der Umgebung des emittierenden Bereichs befinden müssen. Aufgrund dieser Indizien schlossen Amati und Piro [87], dass die  $\gamma$ -Strahlenausbrüche und die sehr energiereichen Supernova Explosionen (Hypernova) in Zusammenhang stehen. In diesem Szenario ereignet sich der  $\gamma$ -Strahlenausbruch wenige Tage nach der Hypernova Explosion und es entstanden dadurch die Eisenabsorptionslinien in der gemessenen  $\gamma$ -Strahlung. Ein weiteres Szenario, was zwar die Eisenabsorptionslinien nicht erklären kann, jedoch eine gute Abschätzung der Häufigkeit der Strahlungsausbrüche liefert

ist die Kollision von Neutronensternen als Ursache der  $\gamma$ -Ray-Bursts. Im Kapitel 3 dieser Arbeit wurde ein alternativer Erklärungsversuch der Ursache der  $\gamma$ -Ray-Bursts aufgezeigt, der die Sichtweise von Amati und Piro unterstützt, jedoch als primäre Ursache für die millisekunden andauernden  $\gamma$ -Ray-Bursts den Kollaps zu einem Quark- oder Hyperstern sieht.

## Gravitationslinsen Effekte

Der maßgebliche Teil der kompakten Sterne in unserer Galaxie ist leider für elektromagnetische Teleskope unsichtbar, da entweder deren Magnetfelder nicht groß genug sind um Radiopulse auszusenden, die Abstrahlungsrichtung der Radiopulse nicht in Richtung der Erde zeigt oder sie sich jenseits der "turn-of line" der Radiosichtbarkeit befinden. Die Anzahl der Pulsare in unserer Galaxie wird derzeit auf  $10^5$  geschätzt, wohingegen die Anzahl der Neutronensterne (bzw. kompakten Sterne) auf  $10^9$  geschätzt wird. Gravitationslinsen und zukünftige Gravitationswellen Experimente stellen jedoch Möglichkeiten dar etwas über die Eigenschaften dieser "unsichtbaren" kompakten Sterne zu erfahren. Bei Gravitationslinsen Experimenten macht man sich die Eigenschaft zunutze, dass Licht, ausgesandt durch eine Quelle (z.B. ein normaler Stern in unserer oder einer benachbarten Galaxie) von massiven, kompakten Objekten (Gravitationslinsen) abgelenkt werden kann und dadurch anders wahrgenommen wird. 1979 wiesen Walsh, Carswell und Weymann den ersten Gravitationslinsen Effekt nach. Der massive Körper, der hier als Linse fungierte war eine gesamte Galaxie, die als Quasar bekannt war. Da es sich hier um eine sehr massive und weit entfernte Linse handelte, beobachtete man mehrere Bilder der gleichen Quelle, d.h. man konnte die durch den Gravitationslinsen Effekt mehrfach entstandenen Bilder der Quelle optisch auflösen. Da die Masse von kompakten Sternen viel geringer ist und deren Abstände, im Vergleich zu intergalaktischen Abständen, klein ist, ist eine optische Auflösung der Bilder der Quelle bei solchen Linsen nicht mehr möglich, so dass man lediglich eine Intensitätserhöhung der Strahlung misst (siehe Kapitel 2). Diese Art von nicht-auflösendem Gravitationslinseneffekt nennt man Mikrolensing. Durch das Intensitätsprofil eines solchen Mikrolensing Effektes ist es möglich die Masse der Linse, d.h. die Masse des als

Gravitationslinse agierenden kompakten Sterns zu bestimmen. Aufgrund der äußerst geringen Intensitätsunterschiede ist es derzeit leider nicht möglich eine Aussage über die Rotationsgeschwindigkeit des kompakten Objektes zu machen. Abschätzungen ergaben, dass man mit den zurzeit existierenden Teleskopen pro Jahr 2-3 Microlensing Ereignisse sehen könnte, die von kompakten Sternen in unserer Galaxie verursacht werden. Berechnungen der zukünftigen Bahn des erdnächsten Neutronensterns "RX J185635-3754" zeigen, dass sich dieser durch Zufall in ca. einem Jahr direkt vor einen normalen Stern schieben wird, so dass ein Mikrolensing Effekt erwartet wird. Hierbei wird eine unabhängige Messung der Masse des kompakten Sterns möglich, so dass man seinen erlaubten Masse-Radius Bereich weiter einschränken kann.

## Zukünftige Erwartungen an Gravitationswellendetektoren

In der Einsteinschen Gravitationstheorie (siehe Kapitel 2) existieren Gravitationswellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit im Raum ausbreiten. Diese Gravitationswellen werden in der Sprache der ART als Verformungen der Raumzeitstruktur beschrieben. Jegliche Art von Materie und Energieformen müssen diesen Raumzeitschwankungen folgen, da die Raumzeit den Untergrund unserer 4-dimensionalen Welt darstellt. Aufgrund der enormen Schwachheit der Gravitationswechselwirkung ist es jedoch bis heute nicht gelungen Gravitationswellen direkt nachzuweisen.

Im Prinzip entstehen bei jeglichen Bewegungen von Massen bzw. Energien Gravitationswellen.<sup>5</sup> Um experimentell überprüfbare Auswirkungen hier auf der Erde zu bewirken ist es jedoch erforderlich, dass die Quelle, die die Gravitationswelle emittiert, extreme Eigenschaften aufweist. Die Quelle muss einerseits sehr massiv sein und andererseits müssen die in ihr enthaltenen Massen bzw. Energien ihre Bewegungsrichtungen in kurzer Zeit ändern. Geeignete astrophysikalische Kandidaten solcher Quellen stellen z.B. die Wechselwirkungen zwischen schwarzen Löchern, Kollisionen in binären Systemen, Supernova Explosionen und Pulsare dar.

---

<sup>5</sup>Systeme ausgenommen, die vollkommene sphärische Symmetrie besitzen (Birkov Theorem 2) oder axialsymmetrisch, stationär rotieren (Kerr Metrik 2).



Der indirekte Nachweis von Gravitationswellen gelang bisher an zwei Systemen (Hulse Taylor Pulsar, SN1987A). 1974 erkannten Hulse und Taylor bei dem binären Pulsarsystem "PSR 1913+16", dass die Abnahme der Rotationsperiode bis auf 1 Prozent genau durch den Energieverlust erklärt werden kann, den dieses System aufgrund von Gravitationswellen aussendet. Mit Hilfe von resonanten Gravitationswellendetektoren versuchte man in den vergangenen Jahrzehnten Gravitationswellen nachzuweisen, was leider, aufgrund der begrenzten Empfindlichkeit dieser Geräte ohne Erfolg blieb. In den letzten Jahren ist es jedoch durch eine neue Art von Gravitationswellendetektoren (Laser-interferometrische Gravitationswellendetektoren) möglich geworden, die Empfindlichkeit und Frequenzabhängigkeit der Detektoren um Größenordnungen zu verbessern. In den nächsten zwei Jahren werden weltweit 6 Laser-interferometrische Gravitationswellendetektoren in Betrieb gehen. Des Weiteren befindet sich ein Gravitationswellendetektor (LISA) in Vorbereitung, der im Weltraum stationiert sein wird und der eine beachtliche Armlänge von fünf Millionen Kilometer aufweisen wird.

Das Prinzip eines Laser-interferometrischen Gravitationswellendetektors basiert auf dem Prinzip eines Michelson-Morley Experiments. Zwei orthogonal zueinander verlaufende Laserstrahle müssen sich auf geodätischen Linien bewegen. Wenn nun eine Gravitationswelle auf den Detektor trifft, so kann es (abhängig von der Frequenz und Intensität der Welle) zu Laufzeitunterschieden der Strahle kommen, da die Längen der Geodäten durch die Raumzeitverformungen der Gravitationswelle beeinflusst werden. Die Phasendifferenz der Laserstrahle wird durch Interferenz bestimmt, wobei die Empfindlichkeit des Detektors in einem bestimmten Frequenzbereich maßgeblich von der Detektorarmlänge, d.h. von dem zurückgelegten Weg des Strahls abhängt. Die erwartete und schon erreichte Empfindlichkeit des TAMA300 als Funktion der Frequenz der Welle sind in der Abb. C.16 veranschaulicht.

Im folgenden werden diejenigen astrophysikalischen Quellen diskutiert, die möglicherweise in den nächsten Jahren mit Hilfe der auf der Erde stationierten Gravitationswellendetektoren untersucht werden können.

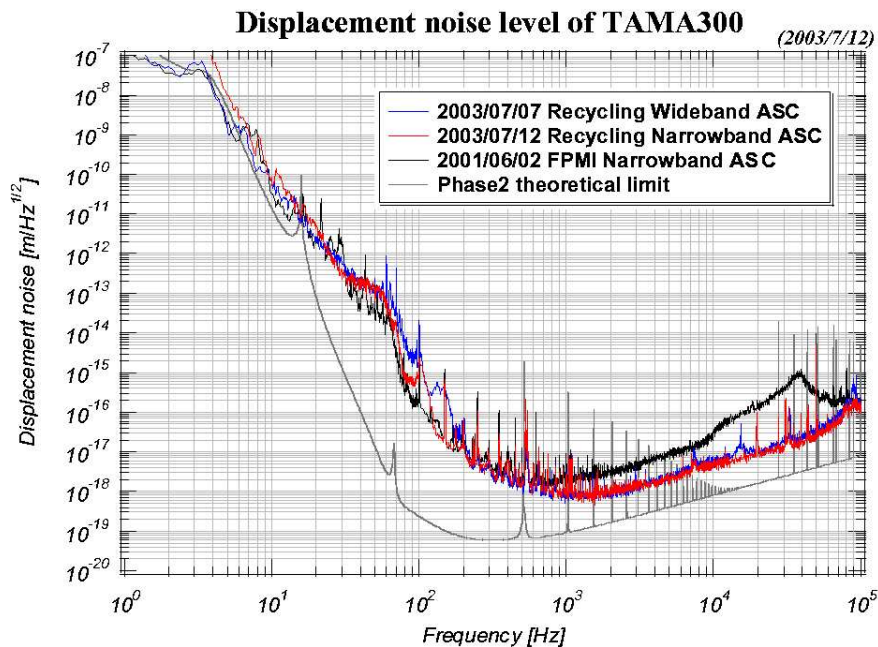


Abbildung C.16: Empfindlichkeit des Gravitationswellendetektors TAMA300 als Funktion der Frequenz der Gravitationswelle.

- Binäre Systeme

In binären Systemen (z.B. Neutronenstern- Neutronenstern, Neutronenstern- Quarkstern, Neutronenstern- schwarzes Loch, Quarkstern- schwarzes Loch) kommt es im Laufe der Zeit, aufgrund der Abstrahlung von Energie, zu einer Annäherung der Sterne, die ihr Ende in einer Kollision findet. Berechnungen zeigen, dass während einer solchen Kollision ein "Gravitationswellen-Burst" erzeugt wird, dessen Intensitäts- und Frequenzbereich geeignet ist, um mit den erdgebundenen Gravitationswellendetektoren nachgewiesen zu werden. Der Endzustand einer solchen Kollision kann (abhängig von der Gesamtmasse des binären Systems) ein schwarzes Loch, ein Quarkstern oder ein Neutronenstern sein. Es ist zu erwarten, dass sich die abgestrahlten Gravitationswellen in Dauer, Frequenz und Intensität merklich voneinander unterscheiden (näheres siehe [79]). Des Weiteren kann es in engen binären Systemen, aufgrund

der starken Gravitationskraft zwischen den Sternen oder aufgrund von Akretionseffekten, zu starken Quadrupoldeformationen der Sterne kommen, die in Verbindung mit der schnellen Eigenrotation der Sterne zu einer periodischen Abstrahlung von Gravitationswellen führen können (siehe [79]).

- Sternkollaps

Bei einem Sternkollaps (Supernova Explosion) zu einem Neutronenstern, Quarkstern oder schwarzen Loch, kann es ebenfalls zu einem Aussenden von einem "Gravitationswellen-Burst" kommen, wenn während des Kollaps der Stern große Quadrupoldeformationen aufweist. Aufgrund der großen "Kick-Geschwindigkeiten" (siehe [79]) ist eine solche starke Asymmetrie während des Kollaps zu erwarten. Anhand der Dauer, Intensität und Frequenz der empfangenen Gravitationswelle sollte es möglich sein den "Remnant" einer solchen Super- oder Hypernova Explosion zu identifizieren. Eine weitere Möglichkeit der Aussendung von Gravitationswellen, die in [79] näher beschrieben wird, ist der mögliche Kollaps von einem Neutronenstern zu einem Quarkstern, Hyperstern oder schwarzen Loch.

- Einzelne kompakte Sterne

Auch einzelne kompakte Sterne können Gravitationswellen emittieren, falls sie schnell rotieren und Quadrupoldeformationen aufweisen. Solche Quadrupoldeformationen können z.B. durch Präzession verursacht werden, falls der Spin und der Drehimpuls des Sterns nicht zusammenfallen ("Wobbling star"). Des weiteren könnten normale n- und f-Moden, die sich im Stern periodisch fortpflanzen, Quadrupoldeformationen verursachen. Pulsierende und gleichzeitig rotierende kompakte Sterne können auch Quellen von Gravitationswellen sein.

Diese Zusammenstellung von möglichen Quellen von Gravitationswellen, die in Zusammenhang mit kompakten Sternen stehen, ist sicherlich nicht vollständig und der wohl interessanteste Teil der zukünftig detektierbaren Gravitationswellenstrahlung stammt definitiv von "nicht erwarteten Quellen".

Die Nachteile einer zukünftigen Gravitationswellen-Astronomie sind durch die extrem schwache Wechselwirkung der Gravitation bedingt, was zur Folge hat, dass man nächste Generationen von Gravitationswellendetektoren im All stationieren muss, um die vielen Störquellen die sich auf der Erde befinden zu umgehen. Somit werden zukünftige Detektoren, wie LISA, sehr kosten aufwendig. Die Eigenschaften und gerade auch die Schwachheit der Gravitationskraft machen jedoch auch gleichzeitig die Vorteile einer Gravitationswellen-Astronomie aus. Die emittierten Gravitationswellen werden auf ihrem Weg zum Detektor so gut wie nicht beeinflusst (Gravitationslinsen Effekte sind jedoch auch hier möglich), so dass man Einflüsse durch das interstellare Medium vernachlässigen kann. Die emittierten Gravitationswellen werden nicht wie die elektromagnetischen Wellen von einzelnen Atomen an der Oberfläche der astrophysikalischen Objekte erzeugt, sondern tragen die Information der gesamten Energie des Objektes und dessen Dynamik. Gravitationswellen sind vielleicht die einzige Möglichkeit schwarze Löcher direkt zu beobachten. Mit LISA wird man viel tiefer in die Ursprünge des Universums sehen können ( $10^{-24}$  s), als es uns heutzutage mittels elektromagnetischer Wellen möglich ist. Selbst für den Fall, dass man keine Gravitationswellen finden sollte, entdeckt man eine Sensation, da man so beweisen würde, dass die Einsteinsche Gravitationstheorie so wie sie zur Zeit formuliert ist nicht stimmen kann.

# Literaturverzeichnis

- [1] G. Gamov. *Biographie der Physik*. ECON Verlag, Düsseldorf, Wien, 1965.
- [2] H. Dehnen. *Theorie der physikalischen Wechselwirkungen*. <http://kaluza.physik.uni-konstanz.de/DE/Eichfeld.ps>, Konstanz, 1997.
- [3] D.A. King. *Astronomy before the Telescope*. British Museum Press, 1996.
- [4] W. Scheid, W. Greiner, and H. Müller. *Phys. Rev. Lett.*, 32:741, 1974.
- [5] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *Klassische Feldtheorie*. Akademie Verlag GmbH, Berlin, 1992.
- [6] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [7] W. Hasse and V. Perlick. *Gen.Rel.Grav.*, 34:415, 2002.
- [8] T. Foertsch, W. Hasse, and V. Perlick. *Class.Quant.Grav.*, 20:4635, 2003.
- [9] Ray d'Inverno. *Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*. VHC Verlagsgesellschaft mbH, D-69451 Weinheim, 1995.
- [10] R. Genzel et.al. *Nature*, 425:934, 2003.
- [11] R. Dorn et.al. *Phys. Rev. Lett.*, 91:233901, 2003.
- [12] M. Greiner et.al. *Nature*, 426:537, 2003.

- [13] J.M. Miller et.al. *astro-ph/0202375, astro-ph/0312033*.
- [14] M. Hanauske. Nichtlineare erweiterung der spin-eichtheorie der gravitation. *Diplomarbeit*, <http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/physics>, 1997.
- [15] F. Weber. *Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics*. IoP, Bristol, 1999.
- [16] N.K. Glendenning. *Compact Stars*. Springer, New York, 1997.
- [17] U.M. Schaudt and H. Pfister. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3284, 1996.
- [18] N. Stergioulas. *Rotating Stars in Relativity*. Living Reviews in Relativity, <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-3>, 2003.
- [19] C. Lämmerzahl, C.W.F. Everit, and F.W. Hehl. *Gyros, Clocks, Interferometers ...: Testing Relativistic Gravity in Space*. Springer, Lecture Notes in Physics 538, 2001.
- [20] M. van der Klis. General relativity from neutron stars and stellar-mass black holes. *Proceedings: XEUS - studying the evolution of the hot Universe*, 2002.
- [21] J. Wambsganss. *Gravitational Lensing in Astronomy*. Living Reviews in Relativity, <http://www.livingreviews.org/Articles/lrr-1998-12>, 2001.
- [22] R. A. Hulse and J. H. Taylor. *Astrophys. J.*, 195, 1975.
- [23] J. H. Taylor. *Philos. Trans. Roy. Soc.*, page 117, 1992.
- [24] A.G. Lyne et. al. *astro-ph/0401086 (Science in press)*.
- [25] T. Fliessbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990.
- [26] J. H. Taylor and J.M. Weisberg. *Astrophys. J.*, 345:434, 1989.
- [27] S. Rowan and J. Hough. *Gravitational Wave Detection by Interferometry*. Living Reviews in Relativity, <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume3/2000-3hough>, 2000.

- [28] M. Hanauske, D. Zschesche, S. Pal, S. Schramm, and W. Greiner H. Stöcker. Neutron star properties in a chiral  $su(3)$  model. *Astrophys. J.*, 537:958, 2000.
- [29] S. Pal, M. Hanauske, I. Zakout, H. Stöcker, and W. Greiner. Neutron star properties in the quark-meson coupling model. *Phys. Rev. C*, 60:015802, 1999.
- [30] M. Hanauske, L.M. Satarov, I.N. Mishustin, H. Stöcker, and W. Greiner. Strange quark stars within the nambu-jona-lasinio model. *Phys. Rev. D*, 64:043005, 2001.
- [31] M. Hanauske, L.M. Satarov, I.N. Mishustin, H. Stöcker, and W. Greiner. Neutron and strange quark stars. *TESTIMONIONS: Marcos Moshinsky en la Ciencia Mexicana*.
- [32] M. Hanauske, D. Zschesche, U. Eichmann, L.M. Satarov, I.N. Mishustin, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, and W. Greiner. Theory of compact stars. *Proceedings: XEUS - studying the evolution of the hot Universe*, 2002.
- [33] M. Hanauske and W. Greiner. Neutron star properties in a qcd-motivated model. *Gen. Rel. and Grav.*, 33:739, 2001.
- [34] Igor Shovkovy, Matthias Hanauske, and Mei Huang. Presence of two-flavor color-superconductivity in compact stars. *Phys. Rev. D*, 66:1, 2003.
- [35] Igor Shovkovy, Matthias Hanauske, and Mei Huang. Two flavor color superconductivity and compact stars. *hep-ph/0310286*.
- [36] I. N. Mishustin, M. Hanauske, A. Bhattacharyya, L. M. Satarov, H. Stöcker, and W. Greiner. Catastrophic rearrangement of a compact star due to the quark core formation. *Phys. Lett. B*, 552:1, 2003.
- [37] J. Schaffner-Bielich, M. Hanauske, H. Stöcker, and W. Greiner. Phase transition to hyperon matter in neutron stars. *Phys. Rev. Lett.*, 89:171101, 2002.

- [38] P. Papazoglou. Einheitliche beschreibung von hadronen und kernen in einem chiralen  $su(3)$ -modell. *Promotionsarbeit*.
- [39] P. Papazoglou, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, and W. Greiner. *Phys. Rev. C*, 57:2576, 1998.
- [40] P. Papazoglou, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker, and W. Greiner. *Phys. Rev. C*, 59:411, 1999.
- [41] C. Beckmann. Kerne, superschwere elemente und hyperkerne in einem chiralen  $su(3)$ -modell. *Diplomarbeit*.
- [42] D. Zschesche. Exited hadronic matter in a chiral  $su(3)$ -model. *Promotionsarbeit*.
- [43] J.D. Walecka. *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*. Oxford University Press, New York, 1995.
- [44] C. Beckmann, P. Papazoglou, D. Zschesche, S. Schramm, H. Stöcker, and W. Greiner. *Phys. Rev. C*, 65:024301, 2002.
- [45] J. Schaffner-Bielich. *Lect. Notes Phys.*, 578:175, 2001.
- [46] D. Bandyopadhyay and S. Banik. *Phys. Rev. C*, 64:055805, 2001.
- [47] D. Bandyopadhyay and S. Banik. *Phys. Rev. C*, 63:035802, 2001.
- [48] D. Bandyopadhyay, S. Pal, and W. Greiner. *Nucl. Phys. A*, 674:553, 2000.
- [49] G. Baym, C. Pethick, and P. Sutherland. *Astrophys. J.*, 170:299, 1971.
- [50] J. Negele and D. Vautherin. *Nucl. Phys. A*, 207:298, 1973.
- [51] M. Rufa, P.-G. Reinhard, J. Maruhn, W. Greiner, and M.R. Strayer. *Phys. Rev. C*, 38:390, 1988.
- [52] J. Schaffner and I.N. Mishustin. *Phys. Rev. C*, 53:1416, 1996.
- [53] I.N. Mishustin, L.M. Satarov, J. Schaffner, and W. Greiner H. Stöcker. *J. Phys. G*, page 1303, 1993.



- [54] N.K. Glendenning. *Nucl. Phys. A*, 493:529, 1990.
- [55] A.R. Taurines, C.A.Z. Vasconcellos, M. Malheiro, and M. Chiapparini. *Phys. Rev. C*, 63:065801, 2001.
- [56] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. *Phys. Rev.*, 122:345, 1961.
- [57] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. *Phys. Rev.*, 124:246, 1961.
- [58] V.G. Vaks and A.I. Larkin. *Sov. J. JETP*, 13:192, 1961.
- [59] U. Vogl and W. Weise. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 27:195, 1991.
- [60] S.P. Klevansky. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649, 1992.
- [61] M. Asakawa and Y. Yazaki. *Nucl. Phys.*, page 668, 1989.
- [62] S. Klimt, M. Lutz, and W. Weise. *Phys. Lett.*, page 386, 1990.
- [63] T.M. Schwarz, S.P. Klevansky, and G. Rapp. *Phys. Rev. C*, 60:055205, 1999.
- [64] M. Buballa and M. Oertel. *Nucl. Phys.*, page 39, 1998.
- [65] M. Buballa and M. Oertel. *Phys. Lett.*, page 261, 1999.
- [66] I.N. Mishustin, L.M. Satarov, and W. Greiner H. Stöcker. *Phys. Rev. C*, 59:3343, 1999.
- [67] I.N. Mishustin, L.M. Satarov, and W. Greiner H. Stöcker. *Phys. Rev. C*, 62:034901, 2000.
- [68] K. Schertler and J. Schaffner-Bielich S. Leupold. *Phys. Rev. C*, 60:025801, 1999.
- [69] A.W. Steiner, M. Prakash, and J.M. Lattimer. *Phys. Lett.*, page 239, 2000.
- [70] P. Rehberg, S.P. Klevansky, and J. Hüfner. *Phys. Rev. C*, 53:410, 1996.
- [71] A. Polleri, R.A. Broglia, P.M. Pizzochero, and N.N. Scoccola. *Z. Phys.*, page 325, 1997.

- [72] I.N. Mishustin, L.M. Satarov, and W. Greiner H. Stöcker. *Yad. Fiz. [Phys. At. Nucl.] (hep-ph/0010223)*, 64:866, 2001.
- [73] H. Heiselberg, C.J. Pethick, and E.F. Staubo. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1355, 1993.
- [74] N.K. Glendenning and C. Kettner. Non-identical neutron star twins. *Astron. Astrophys.*, 353, 2000.
- [75] N.K. Glendenning, S. Pei, and F. Weber. *Phys. Rev. Lett.*, 79:1603, 1997.
- [76] N.K. Glendenning and F. Weber. *Astrophys. J.*, 559, 2001.
- [77] N.K. Glendenning and F. Weber. *Lect. Notes Phys.*, 578:305, 2001.
- [78] Samistha Banik, Matthias Hanauske, Debades Bandyopadhyay, and Walter Greiner. Rotating compact stars with exotic matter. <http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/physics>.
- [79] Matthias Hanauske. *Eigenschaften von inwendigen Gravitationssternen in Partikel-dynamischen Verhaltensmodellen*. <http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~hanauske/Thesis.html>, Frankfurt am Main, 2004.
- [80] Frauenfelder and Henley. *Teilchen und Kerne*. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1995.
- [81] N.K. Glendenning. *Mod. Phys. Lett.*, page 713, 1989.
- [82] H.J. Haubold, B. Kaempfer, A.V. Senatorov, and D.N. Voskresenski. *Astron. Astrophys.*, 191, 1988.
- [83] O.G. Benvenuto and J.E. Horvath. *Phys. Rev. Lett.*, 63.
- [84] A. Unsöld and B. Baschek. *Der Neue Kosmos*. Springer, 1999.
- [85] W.K. Rose. *Advanced Stellar Astrophysics*. Cambridge Univ. Press, 1998.

- [86] M. Turatto. Classification of supernovae. *astro-ph/0301107*.
- [87] S. Dado, A. Dar, and A. De Rujula. *astro-ph/0304106*.
- [88] A. Burrows. *Nature*, 403:727, 2000.
- [89] S.E Thorsett, R.A. Benjamin, W.F. Brisken, A. Golden, and W.M. Goss. *Astrophys. J.*, 592, 2003.
- [90] A.G. Lyne and F. Graham-Smith. *Pulsar astronomy*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [91] R.N. Manchester and J.H. Taylor. *Pulsars*. W.H. Freeman and Company, 1977.
- [92] R.N. Manchester and A.G. Lyne et.al. The parkes multibeam pulsar survey. *astro-ph/0106522*.
- [93] A. Possenti, N. D'Amico, R.N. Manchester, J. Sarkissian, A.G. Lyne, and F. Camilo. Searching for millisecond pulsars in globular clusters at parkes. *astro-ph/0108343*.
- [94] F. Crawford. Searches for and follow-up studies of southern radio pulsars. *phd*.
- [95] S.E. Thorsett and D. Chakrabarty. *Astrophys. J.*, 512:288, 1999.
- [96] A.G. Lyne et. al. *astro-ph/0310640*.
- [97] R.T. Edwards, W. van Straten, and M. Bailes. *Astrophys. J.*, 560:365, 2001.
- [98] D. Chakrabarty et. al. *Nature*, 424:42, 2003.
- [99] R.V. Wagoner. *Astrophys. J.*, 278:345, 1984.
- [100] L. Bildsten. *Astrophys. J.*, 501, 1998.
- [101] N. Anderson, K. Kokkotas, and N. Stergioulas. *Astrophys. J.*, 516:307, 1999.

- [102] J.S. Heyl. *astro-ph/0206174*.
- [103] J.G. Jernigan. *astro-ph/0101048*.
- [104] W. Wang, R.N. Manchester, R.T. Pace, M. Bailes, V.M. Kaspi, B.W. Stappers, and A.G. Lyne. Glitches in southern pulsars. *astro-ph/0005561*.
- [105] B. Link, R.I. Epstein, and J.M. Lattimer. Probing the neutron star interior with glitches. *astro-ph/0001245*.
- [106] R.I. Epstein and B. Link. Starquake-induced glitches in pulsars. *astro-ph/0001365*.
- [107] M. Alford, J.A. Bowers, and K. Rajagopal. (hep-ph/0009357). *Lect.Notes Phys.*, 578:235, 2001.
- [108] M. Alford, K. Rajagopal, S. Reddy, and F. Wilczek. (hep-ph/0105009). *Phys. Rev. D*, 64:074017, 2001.
- [109] P. Kaaret, E.C. Ford, and K. Chen. Strong-field general relativity and qpo's in x-ray binaries. *Astrophys. J.*, 480, 1997.
- [110] M. van der Klis. *astro-ph/9704272*, *astro-ph/9710016*, *astro-ph/9812395*.
- [111] H. Yilmaz. Toward a field theory of gravitation. *II Nuovo Cimento*, 107.
- [112] N.K. Glendenning. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1150, 2000.
- [113] Matthias Hanauske. How to detect the qgp with telescopes. *GSI Report 2003*.
- [114] W.F Biskin, A.S. Fruchter, W.M. Goss, R.S. Herrnstein, and S.E. Thorsett. *astro-ph/0309215*.