

Endliche Überlagerungen von Varietäten und der Satz von Belyi

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften vorgelegt beim Fachbereich Mathematik

der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Andreas Weng
aus Frankfurt am Main

Frankfurt am Main
2004

(D F 1)

vom Fachbereich Mathematik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität
als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. K. Johannson

Gutachter: Prof. Dr. J. Wolfart und
Prof. Dr. F. Constantinescu

Datum der Disputation: 19. Mai 2004

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit der Verallgemeinerung des Satzes von Belyi [B]. Dieser besagt, dass eine Riemannsche Fläche Y genau dann als algebraische Kurve über einem Zahlkörper definiert ist, wenn es auf Y eine nicht-konstante holomorphe Funktion gibt, die über höchstens drei Punkten verzweigt. Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Wir untersuchen darin jeweils die Verallgemeinerung einer der beiden Implikationen aus dem Satz von Belyi auf Varietäten der Dimension zwei und höher.

Im ersten Teil der Arbeit zeigen wir, dass eine n -dimensionale projektive komplex algebraische Varietät über einem Zahlkörper definiert ist, falls sie den \mathbb{P}^n (oder eine beliebige projektive über \mathbb{Q} definierte Varietät) endlich und höchstens über einem rationalen Divisor verzweigt überlagert.

Dazu beschreiben wir im ersten Kapitel den Zusammenhang zwischen Varietäten und komplex analytischen Räumen. Wir zeigen, dass die Kategorie der endlichen algebraischen Überlagerungen einer projektiven komplexen Varietät äquivalent zur Kategorie der endlichen verzweigten analytischen Überlagerungen des assoziierten komplex analytischen Raumes ist. Außerdem erläutern wir den Zusammenhang zwischen topologisch unverzweigten Überlagerungen und deren Algebraisierung, den étalen Morphismen zwischen Varietäten.

Im zweiten Kapitel führen wir Definitionskörper und Modulkörper von Varietäten ein. Anschließend untersuchen wir die Operation von Körperautomorphismen $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ auf komplexen Varietäten.

Im dritten Kapitel zeigen wir zunächst, dass der Modulkörper einer endlichen Überlagerung eines geeigneten Grundraumes ein Zahlkörper ist. Danach stellen wir das Resultat von Derome [D] vor, nachdem es einen Definitionskörper im algebraischen Abschluss des Modulkörpers gibt. Daraus folgern wir die Verallgemeinerung dieser Richtung des Satzes von Belyi.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit der Frage, wie der Verzweigungsdivisor D im \mathbb{P}^n aussehen sollte, damit jede über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Varietät ein Modell besitzt, das \mathbb{P}^n endlich und nur über D verzweigt überlagert.

Im vierten Kapitel stellen eine Heuristik zur Korrespondenz zwischen topologischen Überlagerungen und Körpererweiterungen von \mathbb{Q} vor. Daraus leitet sich folgende Vermutung ab:

Zu jeder über einem Zahlkörper definierten n -dimensionalen Varietät \tilde{Y} gibt es eine birational äquivalente normale Varietät Y und einen Morphismus $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$, der nur über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,n+3}$ verzweigt.

Die Vermutung steht im Einklang mit dem eindimensionalen Satz von Belyi. Alle Modulräume erfüllen die Voraussetzung für die im dritten Kapitel bewiesene Umkehrung.

Im letzten Kapitel beschäftigen wir uns mit komplex algebraischen Flächen. Wir zeigen, dass die Vermutung aus dem vierten Kapitel für abelsche Flächen richtig ist. Dieses Ergebnis haben wir gemeinsam mit Horst Hammer (Karlsruhe) erzielt. Anschließend geben wir einen Überblick über weitere Resultate in dieser Richtung. Schließlich beschreiben wir die topologischen Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$ und stellen eine Verallgemeinerung der Dessins d'Enfants vor.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Varietäten und analytische Räume	1
1.1 Lokal geringte Räume	1
1.1.1 Klassische algebraische Varietäten	2
1.1.2 Abstrakte Varietäten	3
1.1.3 Analytische Räume	6
1.2 Der Funktor $()^{an}$	7
1.3 Modelle eines Funktionenkörpers	8
1.4 Verzweigte Überlagerungen	9
1.5 Etale Morphismen	11
1.6 Verzweigte Überlagerungen von Varietäten	13
2 Definitionskörper und Modulkörper	15
2.1 Der Definitionskörper	15
2.2 Der Modulkörper	17
2.2.1 Operation auf affinen Varietäten	18
2.3 Einige Eigenschaften des Modulkörpers	21
3 Heuristik zur Verallgemeinerung	25
3.1 Der Satz von Belyi	25
3.2 Konfigurationsräume von n geordneten Punkten auf \mathbb{P}^1	27
3.3 Die Verallgemeinerung	28
3.4 Diskussion	30
4 Komplexe Flächen	33
4.1 Belyi-Morphismen	33

4.1.1	Das direkte Produkt zweier Belyi-Kurven und Jacobi-Varietäten . .	34
4.1.2	Das Resultat von Braungardt	39
4.2	Zur Klassifikation der Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$	39
4.2.1	Fundamentalgruppe des Modulraums	41
4.2.2	Topologische Invarianten von Überlagerungen	42
4.2.3	Dessin d'Enfants	44
Literaturverzeichnis		51

Einleitung

Überblick

Die Riemannsche Sphäre \mathbb{P}^1 ist die eindeutig bestimmte kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht Null. Entfernen wir die drei Punkte $0, 1$ und ∞ , so läßt sich jede endliche Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ zu einer verzweigten Überlagerung $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ kompakter Riemannscher Flächen fortsetzen. Die komplex analytische Struktur auf Y ist durch die topologische Struktur der Überlagerung eindeutig bestimmt. In diesem Fall gibt es auf Y eine nicht-konstante holomorphe Funktion, die über höchstens drei Punkten verzweigt. Solche Funktionen nennen wir Belyi-Funktionen.

Kompakte Riemannsche Flächen besitzen auch eine algebraische Beschreibung als nicht-singuläre, projektive, komplex algebraische Kurven. Eine Kurve ist durch Polynome aus dem Polynomring $\mathbb{C}[x, y]$ gegeben. Man kann sich nun fragen, wann die Koeffizienten dieser Polynome aus einem Zahlkörper sind.

Ein Zahlkörper ist ein endlicher algebraischer Erweiterungskörper von \mathbb{Q} . Eine wichtige Rolle für die Klassifikation spielen die Automorphismengruppen der Zahlkörper. Sie bilden ein induktiv geordnetes System von Galoisgruppen und der Limes ist eine profinite Gruppe, die absolute Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. In ihr sind alle wesentlichen Informationen über die endlichen Körpererweiterungen von \mathbb{Q} enthalten.

Sind die Koeffizienten der definierenden Polynome einer algebraischen Kurve aus einem Körper K , so sagen wir, die zugehörige Riemannsche Fläche ist über K definiert. Es gilt der [B]

Satz von Belyi: *Eine Riemannsche Fläche Y ist genau dann über einem Zahlkörper definiert, wenn es auf Y eine Belyi-Funktion gibt.*

Sei \mathfrak{Belyi} die Kategorie der kompakten Riemannschen Flächen mit einer Belyi-Funktion.

Die drei folgenden Kategorien stehen somit in direktem Zusammenhang:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{nicht-singuläre projektive} \\ \text{Kurven, die über} \\ \overline{\mathbb{Q}} \text{ definiert sind} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \mathfrak{Belyi} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche topologische} \\ \text{Überlagerungen} \\ \text{von } \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \end{array} \right\}$$

Nach dem Satz von Belyi ist die erste Zuordnung surjektiv. Da eine Riemannsche Fläche jedoch viele Belyi-Funktionen besitzt, ist sie nicht injektiv. Der zweite Pfeil ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Sei σ ein Automorphismus von $\overline{\mathbb{Q}}$ und p ein Polynom mit Koeffizienten aus $\overline{\mathbb{Q}}$. Wenden wir σ^{-1} auf die Koeffizienten von p an, so bezeichnen wir das Bild mit p^σ . Lassen wir den Automorphismus σ auf die beschreibenden Polynome einer Riemanschen Fläche Y aus \mathfrak{Belyi} operieren, dann ist die zugehörige Riemannsche Fläche Y^σ weiterhin in \mathfrak{Belyi} enthalten. Die absolute Galoisgruppe operiert also auf den Elementen von \mathfrak{Belyi} . Diesen sind Überlagerungen von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ zugeordnet. Endliche Überlagerungen von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ werden durch die Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ klassifiziert. Wir erhalten so eine Operation von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf der Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$.

Zwei mathematische Objekte stehen nach dem Satz von Belyi nun in direkter Verbindung:

- die absolute Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$
- die topologische Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$.

In seiner „Esquisse d’un Programme“ entwickelte Grothendieck [G] die Theorie der Kinderzeichnungen oder Dessins d’Enfants. Ein Dessin beschreibt die Struktur einer Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ mit Hilfe eines Graphen. Zeichnet man das Urbild des Intervalls $[0, 1]$ auf die Überlagerungsfläche und markiert die Urbilder von 0 und 1 durch weiße und schwarze Punkte, so erhält man einen zusammenhängenden bipartiten Graphen, der die Fläche in einfach zusammenhängende 2-Zellen zerschneidet. Aus diesem Graphen läßt sich die Monodromiegruppe der Überlagerung mit ihren Erzeugern, also die zur Überlagerung assoziierte Darstellung der Fundamentalgruppe, direkt ablesen. Zu solch einem bipartiten Graphen gehört genau eine Kurve mit Belyi-Funktion, die den ursprünglichen Graph induziert.

In einigen Spezialfällen ist es nun möglich, den Zusammenhang aus dem Satz von Belyi zwischen der topologischen Überlagerung und der Kurve explizit herzustellen. Streit [St] hat einen Algorithmus gefunden, mit dem sich die Definitionsgleichung der algebraischen Kurve zu einem bestimmten Typ der Überlagerung bestimmen läßt.

Es lassen sich auch andere interessante Fragen stellen. Diese stehen in Zusammenhang

mit der Operation der Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf der Kategorie \mathfrak{Bel}_η . So ist bislang ungeklärt, wie ein vollständiges Invariantensystem für die Operation auf den topologischen Überlagerungen aussieht. Bekannte Invarianten sind etwa der Grad der Überlagerung und die Monodromiegruppe, sowie die Ordnungen der Erzeuger der Monodromiegruppe [JSt]. Eine interessante Aufgabe ist auch, Aussagen über Definitionskörper oder den Modulkörper der Überlagerungsfläche abzuleiten. Weitere Probleme eröffnen sich im Zusammenhang mit der Uniformisierungstheorie von Riemannschen Flächen.

In dieser Arbeit suchen wir nach einer Verallgemeinerung des Satzes von Belyi in höhere Dimensionen. Dabei sind zwei Richtungen zu bearbeiten, in die der Satz von Belyi zerfällt:

1. Jede Riemannsche Fläche mit Belyi-Funktion ist über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert.
2. Jede über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Riemannsche Fläche besitzt eine Belyi-Funktion.

In den ersten drei Kapiteln beweisen wir eine direkte Verallgemeinerung der ersten Aussage. Das Resultat folgt aus allgemeinen Aussagen von Grothendieck über die algebraische Fundamentalgruppe, wir präsentieren hier jedoch einen neuen Beweis. Dieser ist eng an Köcks Beweis des Satzes von Belyi im Eindimensionalen [K] orientiert.

In den beiden letzten Kapiteln beschäftigen wir uns mit einer Verallgemeinerung der zweiten Aussage. Die Schwierigkeit besteht hierbei darin, einen geeigneten Ersatz für den Grundraum $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ zu finden.

Wir geben nun eine kurze Übersicht über den Inhalt der fünf Kapitel:

1. Kapitel: In diesem Kapitel beschreiben wir den Zusammenhang zwischen Varietäten und komplex analytischen Räumen. Der Funktor $(\)^{an}$ ordnet jeder algebraischen Varietät X einen analytischen Raum X^{an} zu. Da wir später sowohl algebraische als auch analytische Methoden verwenden, suchen wir zwei unter $(\)^{an}$ äquivalente Kategorien.

Nicht jede n -dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist eine algebraische Varietät. Nach dem Satz von Chow sind analytische Untervarietäten eines projektiven Raumes \mathbb{P}^n stets algebraisch. Ist X eine projektive Varietät und $f : \mathcal{Y} \rightarrow X^{an}$ eine endliche verzweigte analytische Überlagerung, so ist nach einem Satz von Grauert der Überlagerungsraum \mathcal{Y} projektiv, also algebraisch. Die Kategorie der endlichen algebraischen Überlagerungen einer projektiven komplexen Varietät ist somit äquivalent zur Kategorie der endlichen verzweigten analytischen Überlagerungen des assoziierten komplex analytischen Raumes.

In den Abschnitten 1.5 und 1.6 erläutern wir den Zusammenhang zwischen topologisch unverzweigten Überlagerungen und deren Algebraisierung, den étalen Morphismen zwischen Varietäten.

- 2. Kapitel:** Wir definieren, wann ein Körper Definitionskörper einer Varietät ist. Dann führen wir die Operation von Körperautomorphismen $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ auf komplexen Varietäten ein. Zum besseren Verständnis rechnen wir einige Beispiele dieser Operation auf affinen Varietäten vor. Schließlich erklären wir, was der Modulkörper einer Varietät ist und beweisen einige Eigenschaften.
- 3. Kapitel:** In diesem Kapitel beweisen wir die Verallgemeinerung des ersten Teils des Satzes von Belyi. Zunächst zeigen wir, dass der Modulkörper einer endlichen Überlagerung eines geeigneten Grundraumes ein Zahlkörper ist. Danach stellen wir das Resultat von Derome [D] vor, nachdem es einen Definitionskörper im algebraischen Abschluss des Modulkörpers gibt.
- 4. Kapitel:** In diesem Kapitel diskutieren wir, wie die Verallgemeinerung des zweiten Teils des Satzes von Belyi aussehen könnte. Wir stellen eine Heuristik zur Korrespondenz zwischen topologischen Überlagerungen und Körpererweiterungen von \mathbb{Q} vor. Daraus leitet sich folgende Vermutung ab:

Zu jeder über einem Zahlkörper definierten n -dimensionalen Varietät \tilde{Y} gibt es eine birational äquivalente normale Varietät Y und einen Morphismus $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$, der nur über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,n+3}$ verzweigt.

Der Modulraum 4-fach punktierter Kurven vom Geschlecht Null $\mathcal{M}_{0,4}$ ist gerade $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, so dass die Vermutung im Einklang mit dem Satz von Belyi steht. Alle Modulräume erfüllen die Voraussetzung für die im 3. Kapitel bewiesene Umkehrung.

- 5. Kapitel:** Im diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit komplex algebraischen Flächen. Wir zeigen, dass die Vermutung aus dem vierten Kapitel für abelsche Flächen richtig ist. Der Beweis dieses Resultats beruht auf Techniken, die Horst Hammer (TH Karlsruhe) erarbeitet hat und ist entstanden aus einer Diskussion mit dem Autor an der Universität Frankfurt. Anschließend geben wir einen Überblick über weitere Resultate in dieser Richtung. An dem Thema arbeitet Horst Hammer in Fortsetzung der Dissertation von Volker Braungardt [Braun]. Schließlich beschreiben wir die topologischen Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$ und stellen eine Verallgemeinerung der Dessins d'Enfants vor.

In dieser Arbeit haben alle Körper Charakteristik Null.

Grothendieck und die algebraische Fundamentalgruppe

Der erste Teil des Satzes von Belyi geht auf Resultate von Grothendieck zurück. Mit dem verallgemeinerten Riemannschen Existenzsatz lassen sich daraus auch direkt Aussagen in höheren Dimensionen ableiten. Wir wollen nun einen kurzen Überblick über die allgemeine Theorie geben.

In „Revêtements Etales et Groupe Fondamental“ [SGA1] beschreibt Grothendieck die Algebraisierung der Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes. Ausgangspunkt hierfür ist die Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern von endlichen Überlagerungsmorphismen:

Sei S ein wegzusammenhängender, lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum und \mathfrak{C} die Kategorie der endlichen topologischen Überlagerungen von S . Zu einem Basispunkt $s_0 \in S$ bilden wir den *Fundamentalfunktor* $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Cns}$ in die Kategorie der endlichen Mengen wie folgt: Jeder Überlagerung $f : R \rightarrow S$ aus \mathfrak{C} ordnet F die Menge der Urbilder $f^{-1}(s_0)$ des Basispunkts zu. Da die Morphismen in \mathfrak{C} die Fasern erhalten, definiert diese Zuordnung einen Funktor.

Die endlichen Überlagerungen werden über die topologische Fundamentalgruppe $\pi_1^{top}(S, s_0)$ von S mit Basispunkt s_0 klassifiziert. Jedes Element $\gamma \in \pi_1^{top}(S, s_0)$ wird durch einen geschlossenen Weg $\hat{\gamma}$ mit Anfangs- und Endpunkt s repräsentiert. Liften wir den Weg $\hat{\gamma}$ auf den Überlagerungsraum R , so liegen auf $f^{-1}(\hat{\gamma})$ Zykeln aus Urbildern von s_0 . Diese Zykeln bestimmen eine Permutation von $F(R)$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(S, s_0)$ besitzt so für jede Überlagerung $f : R \rightarrow S$ eine Permutationsdarstellung auf der Menge $F(R)$.

Die profinite Vervollständigung $\hat{\pi}_1^{top}(S, s_0)$ der Fundamentalgruppe läßt sich darüber abstrakt charakterisieren. Sei π eine topologische Gruppe, dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}(\pi)$ die Kategorie der endlichen Mengen mit einer stetigen π -Operation. Es gilt:

Es gibt genau eine profinite Gruppe π , so dass F eine Äquivalenz zwischen der Kategorie \mathfrak{C} und der Kategorie $\mathfrak{C}(\pi)$ ist.

Eine solche profinite Gruppe existiert in jeder *Galois-Kategorie*. Eine Galois-Kategorie \mathfrak{C} enthält zwei wichtige Strukturen, Faserprodukte und Quotienten unter Automorphismen (für Details siehe [SGA1, Mur]). Zudem gibt es einen Fundamentalfunktor $F : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{Cns}$ in die Kategorie der Mengen, der die Struktur von \mathfrak{C} erhält.

In der algebraischen Geometrie entsprechen *étale* Morphismen den unverzweigten Überlagerungen aus der Topologie. Die étalen Überlagerungen einer Varietät X bilden eine Galois-Kategorie [SGA1, Mur], wobei wir bei der Definition des Fundamentalfunktors einen geometrischen Punkt x_0 auswählen müssen. Die zugehörige profinite Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ heißt *algebraische Fundamentalgruppe* von X . Die Isomorphieklasse der Funda-

mentalgruppe ist unabhängig von der Wahl des Basispunktes. Wir verzichten deshalb von nun an darauf, den Basispunkt mit anzugeben.

Für eine Varietät X über \mathbb{C} ist die algebraische Fundamentalgruppe isomorph zur profiniten Vervollständigung der topologischen Fundamentalgruppe des analytischen Raumes X^{an} . Dies ist eine Folgerung aus dem *Verallgemeinerten Riemannschen Existenzsatz* [SGA1, H]. In voller Allgemeinheit lautet dieser:

Satz: *Sei X ein normales Schema von endlichem Typ über \mathbb{C} . Sei \mathcal{Y} ein normaler komplex analytischer Raum und $g : \mathcal{Y} \rightarrow X^{an}$ ein endlicher Morphismus. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes normales Schema Y und einen endlichen Morphismus $f : Y \rightarrow X$, so dass $Y^{an} \simeq \mathcal{Y}$ und $f^{an} = g$.*

Eine étale Überlagerung $f : Y \rightarrow X$ einer komplexen Varietät X induziert eine unverzweigte Überlagerung des analytischen Raumes X^{an} . Nach dem Verallgemeinerten Riemannschen Existenzsatz ist die Galois-Kategorie der topologischen Überlagerungen von X^{an} äquivalent zur Galois-Kategorie der étalen Überlagerungen von X . Also ist die profinite Vervollständigung $\hat{\pi}_1^{top}(X^{an})$ isomorph zur algebraischen Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$. In [SGA1] wird ebenfalls bewiesen, dass die algebraische Fundamentalgruppe einer Varietät invariant unter Körpererweiterungen algebraisch abgeschlossener Körper ist. Sei $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ eine Varietät über dem algebraischen Abschluss von \mathbb{Q} und $X_{\mathbb{C}} = X_{\overline{\mathbb{Q}}} \times_{\overline{\mathbb{Q}}} \text{Spec } \mathbb{C}$ die zugehörige komplexe Varietät. Dann ist

$$\pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}) \simeq \pi_1(X_{\mathbb{C}}) \simeq \hat{\pi}_1^{top}(X^{an}).$$

Damit ist jeder topologischen Überlagerung $g : \mathcal{Y} \rightarrow X_{\mathbb{C}}^{an}$ also eine étale Überlagerung $f : Y_{\overline{\mathbb{Q}}} \rightarrow X_{\overline{\mathbb{Q}}}$ zugeordnet. Daraus folgt eine Richtung des Satzes von Belyi. Da $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, gibt es zu jeder endlichen Überlagerung eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Kurve mit dem entsprechenden Überlagerungsmorphismus.

Die Operation von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf $Y_{\overline{\mathbb{Q}}}$ liefert eine Varietät $Y_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\sigma}$, die nun $X_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\sigma}$ étal überlagert. Interessant wird es, falls $X_{\overline{\mathbb{Q}}}^{\sigma} \simeq X_{\overline{\mathbb{Q}}}$, da die Galoisgruppe dann auf den Überlagerungen operiert. Sei X ein Schema über \mathbb{Q} , so dass $X_{\overline{\mathbb{Q}}} = X \times_{\mathbb{Q}} \text{Spec } \overline{\mathbb{Q}}$ eine Varietät über $\overline{\mathbb{Q}}$ ist. Dann ist folgende Sequenz von Grothendieck exakt:

$$1 \rightarrow \pi_1(X_{\overline{\mathbb{Q}}}) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1.$$

Die Sequenz beschreibt die Operation von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf den étalen Überlagerungen der Varietät $X_{\overline{\mathbb{Q}}}$.

Allgemein erhält man aus einer kurzen exakten Sequenz von Gruppen

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{r} \Gamma \rightarrow 1,$$

einen Homomorphismus R von Γ in die Gruppe der äußeren Automorphismen $\text{Out}(N) := \text{Aut}(N)/\text{Inn}(N)$ von N . Sei dazu $\sigma' \in \Gamma$ und $\sigma \in G$ mit $r(\sigma) = \sigma'$. Dann definieren wir $R : \Gamma \rightarrow \text{Out}(N)$ durch die Vorschrift:

$$R(\sigma')x := \sigma x \sigma^{-1}$$

für alle $x \in N$. Da N ein Normalteiler ist, gilt $\sigma x \sigma^{-1} \in N$. Wählen wir einen anderen Lift $\tilde{\sigma}$ von σ' , dann ändert sich die Wirkung nur um einen inneren Automorphismus. Der Homomorphismus R ist also wohldefiniert.

In der Sequenz finden wir nun auch die Operation der absoluten Galoisgruppe auf den Überlagerungen von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ wieder. Wie wir bereits gesehen haben, gilt

$$\pi_1\left(\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}\right) \simeq \pi_1\left(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}\right) \simeq \hat{\pi}_1^{\text{top}}\left(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}\right).$$

Damit erhalten wir einen Homomorphismus R von der absoluten Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ in Gruppe der äußeren Automorphismen der profiniten Vervollständigung der topologischen Fundamentalgruppe $\hat{\pi}_1^{\text{top}}(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$. Dies ist die abstrakte Beschreibung dessen, was wir anhand des Satzes von Belyi über die Wirkung von Körperautomorphismen auf Überlagerungen festgestellt hatten.

In der „Esquisse d'un Programme“ beschreibt Grothendieck, welche Bedeutung er der Untersuchung dieser Operation der absoluten Galoisgruppe beimißt [G].

Parmi ces multiplicités modulaires, ce sont celles de Mumford-Deligne pour les courbes algébriques „stables“ de genre g , à ν points marqués, que je note $\hat{\mathcal{M}}_{g,\nu}$ (compactification de la multiplicité „ouverte“ $\mathcal{M}_{g,\nu}$ correspondant aux courbes lisses), qui depuis quelques deux ou trois années ont exercé sur moi une fascination particulière, plus forte peut-être qu'aucun autre objet mathématique à ce jour. A vrai dire, il s'agit plutôt du système de toutes les multiplicités $M_{g,\nu}$ pour g, ν variables,

liées entre elles par un certain nombre d'opérations fondamentales (telles les opérations de „bouchage de trous“ i.e. de „gommage“ de points marqués, celle de „recollement“, et les opérations inverses), qui sont le reflet en géométrie algébrique absolue de caractéristique zéro (pour le moment) d'opérations géométriques familières du point de vue de la „chirurgie“ topologique ou conforme des surfaces. La principale raison sans doute de cette fascination, c'est que cette structure géométrique très riche sur le système des multiplicités modulaires „ouvertes“ $\mathcal{M}_{g,\nu}$ se reflète par une structure analogue sur les groupoïdes fondamentaux correspondants, les „groupoïdes de Teichmüller“ $\hat{T}_{g,\nu}$, et que ces opérations au niveau des $\hat{T}_{g,\nu}$ ont un caractère suffisamment intrinsèque pour que le groupe de Galois Γ de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ opère sur toute cette „tour“ de groupoïdes de Teichmüller, en respectant toutes ces structures. Chose plus extraordinaire encore, cette opération est fidèle - à vrai dire, elle est fidèle déjà sur le premier „étage“ non trivial de cette tour, à savoir $\hat{T}_{0,4}$ - ce qui signifie aussi, essentiellement, que l'action extérieure de Γ sur le groupe fondamental $\hat{\pi}_{0,3}$ de la droite projective standard \mathbb{P}^1 sur \mathbb{Q} , privée des trois points $0, 1, \infty$, est déjà fidèle. Ainsi le groupe de Galois Γ se réalise comme un groupe d'automorphismes d'un groupe profini des plus concrets, respectant d'ailleurs certaines structures essentielles de ce groupe.

Der Verweis auf den vollen „Teichmüller Turm“ legt nahe, die endlichen Überlagerungen der Modulräume $\mathcal{M}_{g,\nu}$ im Hinblick auf die Operation der absoluten Galoisgruppe zu untersuchen, siehe auch [HS].

Bis auf den Satz von Belyi gelten alle Sätze nicht nur für algebraische Kurven, sondern ganz allgemein für Varietäten. Die Modulräume $\mathcal{M}_{0,n}$ sind von der Dimension $n - 3$ und über \mathbb{Q} definiert. Es gilt:

Sei Y eine n -dimensionale komplexe Varietät und $f : Y \rightarrow \mathcal{M}_{0,n+3}$ ein endlicher étaler Morphismus, dann ist Y über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert.

Das folgt wieder direkt aus der Invarianz der Fundamentalgruppe unter Erweiterungen des Konstantenkörpers. Mit dem Verallgemeinerten Riemannschen Existenzsatz ließe sich auch die Korrespondenz zu topologischen Überlagerungen des analytischen Raumes $\mathcal{M}_{0,n}^{an}$ ableiten. Da beide Sätze jedoch schwer zugänglich sind, führen wir in dieser Arbeit einen neuen unabhängigen Beweis für folgenden Satz:

Satz: Sei \overline{X} eine projektive nicht-singuläre Varietät über \mathbb{C} und X eine offene Untervarietät von \overline{X} . Sowohl \overline{X} als auch X seien über \mathbb{Q} definiert und die topologische Fundamentalgruppe von $X(\mathbb{C})$ endlich erzeugt. Sei \overline{Y} eine Varietät und $f: \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$ ein endlicher Morphismus. Ist f étal über X , dann ist \overline{Y} über einem Zahlkörper definiert.

Für die Modulräume $\mathcal{M}_{0,n+3}$ beziehen wir also eine geeignete Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ in die Betrachtung mit ein. Der Vorteil besteht darin, dass wir dann in der Kategorie der projektiven Varietäten arbeiten. Hier reicht der Satz von Chow, um sowohl algebraische als auch analytische Methoden anwenden zu können.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen haben.

Professor Jürgen Wolfart danke ich für die Einführung in das Thema und fortwährende Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit. Auch konnte ich sehr von dem internationalen Umfeld seiner Arbeitsgruppe profitieren. Hier möchte ich auch gleich meinen Dank an Professor Hironori Shiga und Professor Kenichi Sugiyama aus Chiba, sowie Professor Makoto Namba aus Osaka ausdrücken, die mir während eines zweimonatigen von der JSPS (Japan Society for the Promotion of Sciences) unterstützten Japanaufenthaltes sehr geholfen haben.

Ich möchte mich herzlich bei Professor Joachim Weidmann und Professor Hans Peter Schlickewei bedanken, für die ich während meiner Promotionszeit arbeiten durfte.

Anregende Diskussionen führte ich mit Kenji Koike, Ernesto Gironde, Hessel Posthuma, Manfred Streit und Jörn Steuding, die zusammen mit Professor Jürgen Wolfart und Professor Wolfgang Schwarz eine lebendige Arbeitsgruppe Algebra und Zahlentheorie bildeten, in der ich mich immer wohlfühlt habe. Ich danke den Professoren Ramūnas Garunkštis und Artūras Dubickas, wie auch allen anderen Professoren der Partneruniversität in Vilnius, für ihre Gastfreundlichkeit während eines dreiwöchigen Forschungsaufenthalts.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Matthias Schork, der trotz ungewohntem Thema weiter viel mit mir diskutierte und schließlich die Arbeit Korrektur gelesen hat.

Ich danke auch meinen Eltern für ihre fortwährende Unterstützung. Zuletzt danke ich meiner Frau Annegret, die wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

Kapitel 1

Varietäten und analytische Räume

In diesem Kapitel beschreiben wir den Zusammenhang zwischen der Kategorie der komplex algebraischen Varietäten und der Kategorie der komplex analytischen Räume. Wir erinnern zunächst an die Definition eines lokal geringten Raumes und definieren dann die beiden Kategorien. Danach erklären wir, wie der Funktor $(\)^{an}$ jeder Varietät einen analytischen Raum zuordnet und diskutieren das Verhältnis zwischen den Kategorien.

Im vierten Abschnitt wenden wir uns den Überlagerungen analytischer Räume zu. Wir erläutern zwei Eigenschaften, die für die Arbeit von fundamentaler Bedeutung sind:

- Jede unverzweigte Überlagerung eines dichten Teilraums läßt sich eindeutig zu einer verzweigten Überlagerung fortsetzen.
- Jeder endliche Überlagerungsraum eines projektiven analytischen Raumes ist selbst wieder projektiv und damit algebraisch.

Danach definieren wir étale Überlagerungen algebraischer Varietäten und beweisen schließlich die Äquivalenz zwischen algebraischen und analytischen Überlagerungen von projektiven komplexen Varietäten.

1.1 Lokal geringte Räume

Die Objekte der Kategorie der algebraischen Varietäten sind, wie auch die Objekt der Kategorie der analytischer Räume, lokal geringte Räume.

Definition 1.1. Ein *geringter Raum* (X, \mathcal{O}_X) ist eine topologischer Raum X mit einer Garbe von Ringen \mathcal{O}_X . Ein *Morphismus von geringten Räumen*

$$(f, f^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

ist eine stetige Abbildung $f : Y \rightarrow X$ mit einem Ringmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*(\mathcal{O}_Y)$ von der Garbe \mathcal{O}_X in die direkte Bildgarbe $f_*(\mathcal{O}_Y)$ von \mathcal{O}_Y auf X .

Ein *lokal geringter Raum* ist ein geringter Raum, dessen Halme lokale Ringe sind und ein Morphismus zwischen lokal geringten Räumen hat die Eigenschaft, dass das Bild des maximalen Ideals von \mathcal{O}_Y unter f^\sharp im maximalen Ideal von $f_*(\mathcal{O}_X)$ enthalten ist.

Ein lokal geringter Raum heißt *reduziert*, falls die lokalen Ringe der Halme keine nilpotenten Elemente besitzen.

1.1.1 Klassische algebraische Varietäten

Unser erstes Beispiel lokal geringter Räume sind die klassischen komplex algebraischen Varietäten. Diese setzen sich lokal aus affinen Varietäten zusammen. Wir wiederholen kurz, wie diese definiert werden. Für eine ausführliche Beschreibung siehe [Mum] oder [Shafa].

Eine *algebraische Menge* in \mathbb{C}^n ist die Nullstellenmenge

$$V(f_1, \dots, f_m) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid f_1(z) = \dots = f_m(z) = 0\}$$

einer endlichen Anzahl von Polynomen $f_i \in \mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$. Die Einschränkung eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[z]$ auf V definiert eine reguläre Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{C}$. Der affine Koordinatenring von V ist die Algebra $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[z]/I(V)$, wobei $I(V)$ das Radikal $\sqrt{(f_1, \dots, f_m)}$ des von den f_i erzeugten Ideals ist. Die algebraischen Mengen bilden die Familie der abgeschlossenen Mengen der *Zariski-Topologie* auf \mathbb{C}^n und die Relativtopologie liefert eine Topologie auf V .

Eine algebraische Menge V heißt *irreduzibel*, falls es auf V keine zwei disjunkte, nichtleere offene Mengen gibt. In diesem Fall ist ihr affiner Koordinatenring ein Integritätsbereich und der Quotientenkörper $\mathbb{C}(V)$ heißt Funktionenkörper von V . Die Elemente von $\mathbb{C}(V)$ sind *rationale Funktionen*, das sind Äquivalenzklassen f/g von Polynomen mit $g \notin I(V)$ und $f_1/g_1 \sim f_2/g_2$ falls $f_1g_2 - f_2g_1 \in I(V)$. Eine rationale Funktion $\varphi \in \mathbb{C}(V)$ heißt *regulär* im Punkt $x \in V$, falls es eine offene Umgebung U von x in V gibt, so dass $\varphi = f/g$ auf U mit $f, g \in \mathbb{C}[V]$ und $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$. Eine in allen Punkten reguläre Funktion ist ein Element des Koordinatenringes $\mathbb{C}[V]$.

Ordnen wir jeder offenen Teilmenge U von V den Ring der rationalen, auf U überall regulären Funktionen zu, so erhalten wir eine Garbe \mathcal{O}_V von Ringen, die Strukturgarbe von V . Eine *affine Varietät* ist ein geringter Raum (V, \mathcal{O}_V) , bestehend aus einer irreduziblen algebraischen Menge und ihrer Strukturgarbe.

Die algebraische Struktur der Morphismen affiner Varietäten läßt sich leicht beschreiben.

Ein Morphismus affiner Varietäten ist eine reguläre Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ zwischen den algebraischen Mengen $V_1 \subset \mathbb{C}^n$ und $V_2 \subset \mathbb{C}^m$, also ein m -Tupel regulärer Funktionen $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[V_1]$ mit $f(a) = (f_1(a), \dots, f_m(a)) \in V_2$ für alle $a \in V_1$. Äquivalent dazu ist der Ringhomomorphismus $f^* : \mathbb{C}[V_2] \rightarrow \mathbb{C}[V_1]$, der die Koordinatenfunktionen $z_i \in \mathbb{C}[V_2]$ auf die Funktionen $f_i \in \mathbb{C}[V_1]$ abbildet. Es gilt:

Die Kategorie der affinen Varietäten ist äquivalent zur Kategorie der über \mathbb{C} endlich erzeugten nullteilerfreien Ringe mit \mathbb{C} -Homomorphismen.

Klassische algebraische Varietäten setzen sich lokal aus affinen Varietäten zusammen.

Definition 1.2. Ein geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) ist eine *klassische algebraische Varietät*,

- falls X von endlich vielen offenen dichten Teilmengen V_i überdeckt wird, so dass die $(V_i, \mathcal{O}_X|_{V_i})$ isomorph zu affinen Varietäten sind, und
- X separiert ist. D.h. das Bild von X ist unter der Abbildung $\Delta = (\text{id}, \text{id}) : X \rightarrow X \times X$ abgeschlossen in $X \times X$.

Die Halme von affinen Varietäten sind lokale Ringe und die Morphismen respektieren die maximalen Ideale. Damit sind klassische algebraische Varietäten stets lokal geringte Räume.

Alle Konstruktionen lassen sich nicht nur über \mathbb{C} , sondern mit jedem algebraisch abgeschlossenen Körper k durchführen. Die Quotientenkörper der Koordinatenringe einer affinen offenen Teilmenge einer klassischen algebraischen Varietät X sind isomorph und definieren den *Funktionskörper* $k(X)$ der Varietät (X, \mathcal{O}_X) .

1.1.2 Abstrakte Varietäten

Die Kategorie der klassischen algebraischen Varietäten läßt sich auch in der Sprache der Schemata charakterisieren. Dieser Zugang bietet im Zusammenhang mit dem Definitions- und dem Modulkörper von Varietäten einige Vorteile, auf die wir später nicht verzichten wollen. Eine Schema ist wieder ein lokal geringter Raum, der sich lokal aus affinen Schemata zusammensetzt. Ausführlich wird das Folgende in der Standardliteratur [H, Mum, Shafa] behandelt.

Jedem kommutativen Ring A mit Eins können wir einen topologischen Raum $\text{Spec } A$ zuzuordnen. Die Punkte von $\text{Spec } A$ sind die Primideale von A . Die *abgeschlossenen Mengen* von $\text{Spec } A$ sind von der Form

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

wobei \mathfrak{a} eine beliebiges Ideal von A ist. Die abgeschlossenen Mengen erzeugen die Zariski-Topologie auf $X = \text{Spec } A$. Ist $f \in A$, so heißt

$$X_f := \text{Spec } A - V((f)) = \text{Spec } A_f$$

eine *ausgezeichnete offene Teilmenge*. (Erinnerung: Ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von A , so erhalten wir über Äquivalenzklassenbildung den Ring $A_S = S^{-1}A$. Beispiele hierfür sind A_f mit $S = \{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $A_{\mathfrak{p}}$ mit $S = A \setminus \mathfrak{p}$.) Wir ordnen $X = \text{Spec } A$ eine Garbe von Ringen \mathcal{O}_X wie folgt zu: Der Ring der globalen Schnitte $\mathcal{O}_X(X)$ ist gerade A selbst und auf den ausgezeichneten offenen Mengen X_f ist $\mathcal{O}_X(X_f) = A_f$. Ist $X_g \subset X_f$, so ist eine Potenz von g ein Vielfaches von f und die Lokalisierung $A_f \rightarrow A_{fg} = A_g$ liefert den Einschränkungsmorphismus $\text{res}_{X_f, X_g} : \mathcal{O}_X(X_f) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_g)$. Hieraus läßt sich die *Strukturgarbe* \mathcal{O}_X konstruieren. Die Halme der Garbe (X, \mathcal{O}_X) von X sind lokale Ringe.

Ein *affines Schema* ist ein lokal geringter Raum, der isomorph zu $\text{Spec } A$ eines kommutativen Ringes A mit Eins und seiner Strukturgarbe ist. Die affinen Schemata verallgemeinern die klassische Äquivalenz von Kategorien

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{ affine Varietäten} \} & \leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \text{endlich erzeugte, nullteilerfreie Ringe} \\ \text{über einem algebraisch abgeschlossen Körper } k, \\ k\text{-Algebrenhomomorphismen} \end{array} \right\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{ \text{ affine Schemata} \} & \leftrightarrow & \{ \text{kommutative Ringe mit Eins, Ringhomomorphismen} \} \end{array}$$

Definition 1.3. Ein *Schema* ist ein lokal geringter Raum (X, \mathcal{O}_X) , in dem jeder Punkt eine offene Umgebung U besitzt, so dass $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ ein affines Schema ist.

Ein Schema heißt *ganz*, falls $\mathcal{O}_X(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ ein Integritätsbereich ist. Ein Schema ist genau dann ganz, wenn es irreduzibel und reduziert ist. Wir beschreiben nun, wie wir die Kategorie der klassischen Varietäten in der Kategorie der Schemata wiederfinden. Hierzu betrachten wir nicht länger nur einzelne Schemata, sondern Schemata mit einem Morphismus in ein Basisschema.

Definition 1.4. Sei S ein Schema. Ein *Schema über S* oder *S -Schema* ist ein Schema X mit einem Morphismus $X \rightarrow S$. Sind X und Y Schemata über S , dann ist ein S -Morphismus ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$, der mit den Morphismen nach S kommutiert.

Die S -Schemata mit S -Morphismen bilden Unterkategorien der Kategorie der Schemata. In dieser Kategorie gibt es ein Produkt.

Definition 1.5. Seien X und Y zwei S -Schemata. Ein Tripel $(X \times_S Y, p, q)$ heißt *Faserprodukt* von X und Y über S , falls

- $X \times_S Y$ ein S -Schema ist,
- $p : X \times_S Y \rightarrow X$ und $q : X \times_S Y \rightarrow Y$ S -Morphismen sind und
- für alle S -Schemata T die natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(T, X \times_S Y) &\rightarrow \text{Hom}_S(T, X) \times \text{Hom}_S(T, Y) \\ \varphi &\mapsto (p \circ \varphi, q \circ \varphi) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

Abstrakte Varietäten sollen die Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit besitzen. Da die Zariski-Topologie nicht hausdorffsch ist, müssen wir diese Eigenschaft durch eine algebraische Bedingung ersetzen. In der Definition von klassischen algebraischen Varietäten entspricht das der Forderung, dass die Varietät separiert, also die Diagonalabbildung abgeschlossen ist. In die Sprache der Schemata verallgemeinert sich diese wie folgt: Ist S ein affines Schema $\text{Spec } B$, so ist das *diagonale Unterschema* $\Delta \subset X \times_{\text{Spec } B} X$ auf einer affinen Teilmenge $\text{Spec } A \times_{\text{Spec } B} \text{Spec } A \subset X \times_{\text{Spec } B} X$ durch das von den Elementen

$$a \otimes 1 - 1 \otimes a \in A \otimes_B A$$

erzeugte Ideal gegeben. Ist Δ ein abgeschlossenes Unterschema von $X \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}} X$, so heißt das Schema X *separiert*. Wir wollen auch noch fordern, dass Varietäten endlich-dimensional sind. Dazu dient folgender Begriff:

Definition 1.6. Ein Morphismus $f : X \rightarrow S$ heißt *von endlichem Typ*, falls es eine Überdeckung $\{V_\alpha\}$ von S mit offenen affinen Teilmengen $V_\alpha = \text{Spec } B_\alpha$ gibt, so dass $f^{-1}(V_\alpha)$ von endlich vielen offenen affinen Teilmengen $U_{\alpha,i} = \text{Spec } A_{\alpha,i}$ überdeckt wird, wobei die $A_{\alpha,i}$ endlich erzeugte B_α -Algebren sind.

Nun sind wir bereit, abstrakte Varietäten zu definieren.

Definition 1.7. Eine *abstrakte Varietät* ist ein ganzes separiertes Schema X von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossen Körper k . Der Morphismus $p : X \rightarrow \text{Spec } k$ von endlichem Typ heißt *Strukturmorphismus*.

Die klassischen Varietäten und die abstrakten Varietäten beschreiben dieselben mathematischen Objekte.

Satz 1.8. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gibt es eine Äquivalenz von Kategorien zwischen:*

- *der Kategorie der ganzen separierten Schemata von endlichem Typ über k mit k -Morphismen und*
- *der Kategorie der klassischen algebraischen Varietäten über k und deren Morphismen.*

1.1.3 Analytische Räume

Die Bausteine komplex algebraischer Varietäten sind die algebraischen Mengen, also Unterräume des \mathbb{C}^n , versehen mit der Zariski-Topologie. Wählen wir stattdessen die gewöhnliche euklidische Topologie auf Teilmengen des \mathbb{C}^n als Ausgangspunkt so erhalten wir analytische Räume.

Sei \mathbb{C}^n mit der euklidischen Topologie versehen. Eine Basis der Topologie besteht aus den Polyscheiben vom Radius $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\Delta_{a,\varepsilon}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_i - a_i| < \varepsilon_i\}.$$

Eine auf einer offenen Umgebung U_a von $a \in \mathbb{C}^n$ definierte komplexwertige Funktion f heißt *holomorph* oder *analytisch* in a , falls es eine Polyscheibe $\Delta_{a,\varepsilon}^n \subset U_a$ gibt, in der f durch eine Potenzreihe der Form

$$f(z) = \sum_{\alpha \geq 0} c_\alpha (z - a)^\alpha,$$

mit Multi-Index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ beschrieben wird.

Zu einem Gebiet $W \subset \mathbb{C}^n$ assoziieren wir einen geringten Raum (W, \mathcal{H}_W) mit der Strukturgarbe \mathcal{H}_W der holomorphen Funktionen auf W .

- Ein geringter Raum (X, \mathcal{H}_X) ist eine *komplexe Mannigfaltigkeit*, falls X hausdorffsch mit abzählbarer Basis der Topologie ist und jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U besitzt, so dass (U, \mathcal{H}_U) isomorph zum geringten Raum (W, \mathcal{H}_W) eines Gebiets $W \subset \mathbb{C}^n$ ist.
- Sei $B \subset \mathbb{C}^n$ ein offener Ball, sowie $X \subset B$ die Nullstellenmenge von holomorphen Funktionen $\{f_i\}_{i \in I}$ auf B und $\mathcal{H}_X = \mathcal{H}_B/\mathcal{I}$, wobei \mathcal{I} die von den f_i als \mathcal{H}_B -Modul erzeugte Untergarbe von \mathcal{H}_B ist. Dann heißt (X, \mathcal{H}_X) eine *abgeschlossene analytische Menge* von B .

- Sei X hausdorffsch mit abzählbarer Basis. Ein *analytischer Raum* ist eine geringter Raum (X, \mathcal{H}_X) , der überall lokal isomorph zu einer abgeschlossenen analytischen Menge ist.

1.2 Der Funktor $(\)^{an}$

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, in welchem Verhältnis komplex algebraische Varietäten und analytischen Räumen zueinander stehen. Der Ausgangspunkt dafür ist der Funktor $(\)^{an}$, der jeder komplex algebraischen Varietät einen analytischen Raum zuordnet.

Eine algebraische Teilmenge V von \mathbb{C}^n ist natürlich auch eine analytische Menge und es gibt einen Morphismus geringter Räume

$$(V(\mathbb{C}), \mathcal{H}) \rightarrow (V, \mathcal{O}),$$

wobei $V(\mathbb{C})$ der topologische Raum bestehend aus der Menge der komplexen Punkte von V versehen mit der euklidischen Topologie ist. Ganz allgemein gilt (siehe [SGA1]):

Sei X ein Schema von (lokal) endlichem Typ über \mathbb{C} und sei Φ der Funktor von der Kategorie der analytischen Räume in die Kategorie der Mengen, der einem analytischen Raum \mathcal{X} die Menge der Morphismen $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X)$ geringter Räume mit der Struktur von \mathbb{C} -Algebren zuordnet.

Proposition 1.9. *Der Funktor Φ ist durch einen analytischen Raum X^{an} und einen Morphismus $\varphi : X^{an} \rightarrow X$ darstellbar, d.h. $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X^{an}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}, X)$.*

Sei $X(\mathbb{C})$ der topologische Raum von X^{an} , dann induziert φ eine Bijektion von $X(\mathbb{C})$ in die Menge der \mathbb{C} -wertigen abgeschlossenen Punkte von X .

Ist X eine algebraische Varietät, so konstruieren wir den analytischen Raum wie folgt: Sei $X = \bigcup X_i$ eine Überdeckung mit offenen affinen Teilmengen X_i . Für jedes i erhalten wir eine analytische Menge $(X_i(\mathbb{C}), \mathcal{H}_i)$ und einen Morphismus

$$(X_i(\mathbb{C}), \mathcal{H}_i) \rightarrow (X_i, \mathcal{O}_i).$$

Diese Abbildung ist kanonisch, da je zwei Darstellungen einer affinen Teilmenge durch eine bireguläre Abbildung verbunden sind. Diese setzt sich dann zu einer biholomorphen Abbildung der zugeordneten analytischen Mengen fort. Dies gilt auch für die Schnittmengen der affinen Teilmengen. Durch Zusammenkleben erhalten einen analytischen Raum $X^{an} = (X(\mathbb{C}), \mathcal{H})$ und einen Morphismus

$$(X(\mathbb{C}), \mathcal{H}) \rightarrow (X, \mathcal{O}).$$

Die Zuordnung $X \mapsto X^{an}$ ist funktoriell, d.h. ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ definiert einen Morphismus $f^{an} : X^{an} \rightarrow Y^{an}$ in der Kategorie der analytischen Räume.

Ein lokal geringter Raum heißt *normal*, wenn die lokalen Ringe der Halme normal sind, d.h. ganz abgeschlossen in ihrem Quotientenkörper. Die Eigenschaften „reduziert“ und „normal“ bleiben unter dem Funktor $()^{an}$ erhalten.

Ein Punkt $x \in X$ eines reduzierten analytischen Raumes (X, \mathcal{H}_X) heißt *nicht-singulärer Punkt*, falls es eine Umgebung von x gibt, die eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Eine Varietät ist nicht-singulär, falls ihr zugeordneter analytische Raum eine Mannigfaltigkeit ist. Die Menge der singulären Punkte eines normalen analytischen Raumes hat Kodimension ≥ 2 .

Der Funktor $()^{an}$ ist keine Äquivalenz von Kategorien. Die folgenden drei Fragen illustrieren die Problematik:

- Ist jede komplexe Mannigfaltigkeit von der Form X^{an} ?
- Ist jede holomorphe Abbildung $\varphi : X^{an} \rightarrow Y^{an}$ von der Form f^{an} ?
- Sind X^{an} und Y^{an} isomorph als komplexe Mannigfaltigkeiten, folgt dann, dass X und Y (sofern sie existieren) isomorph als algebraische Varietäten sind?

Während die Aussagen im eindimensionalen noch alle richtig sind, so sind sie im allgemeinen alle falsch. So gibt es z.B. Gitter Γ , so dass der komplexe Torus \mathbb{C}^n/Γ nicht algebraisch ist. Schränken wir uns jedoch auf die Kategorie der projektiven Varietäten ein, so gilt [GA]:

Satz 1.10. (Chow): *Jeder kompakte analytische Unterraum von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ ist algebraisch.*

In diesem Fall lassen sich auch alle anderen Fragen mit ja beantworten. Es gilt: Jede holomorphe Abbildung zwischen den analytischen Räumen einer projektiven Varietät ist algebraisch. Ist $\varphi : X \rightarrow X'$ eine algebraische Abbildung zwischen Varietäten, die analytisch ein Isomorphismus ist, dann ist φ auch ein algebraischer Isomorphismus. Damit erhalten wir also eine Äquivalenz zwischen projektiven komplexen Varietäten und projektiven analytischen Räumen.

1.3 Modelle eines Funktionenkörpers

Bei der Klassifikation von Varietäten interessieren wir uns vor allem für den Funktionenkörper. Die Quotientenkörper des Koordinatenringes der offenen affinen Teilmengen einer Varietät X stimmen überein und definieren den Funktionenkörper $k(X)$. Damit ist also der Funktionenkörper von X gleich dem Funktionenkörper einer offenen Teilmenge

U . Im allgemeinen sind X und U allerdings nicht isomorph, d.h. der Funktionenkörper bestimmt nicht die Isomorphieklasse einer Varietät. Wir sprechen deshalb von *Modellen* eines Funktionenkörpers. Diese sind durch birationale Korrespondenzen miteinander verbunden. Surjektive Abbildungen werden in diesem Zusammenhang durch dominante Morphismen ersetzt. Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ zwischen Varietäten heißt *dominant*, wenn das Bild $f(Y)$ dicht in X ist. In diesem Fall induziert f^* eine Einbettung

$$k(X) \xrightarrow{f^*} k(Y).$$

Der Morphismus ist birational, wenn f^* ein Isomorphismus ist. In diesem Fall gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $U \subset X$, so dass f ein Isomorphismus zwischen $f^{-1}(U)$ und U ist.

Funktionenkörper vom Transzendenzgrad eins über \mathbb{C} besitzen nur genau ein glattes kompaktes Modell. Im allgemeinen gibt es jedoch unendlich viele glatte Modelle, die durch Auf- und Niederblasen von Punkten bzw. (-1) -Kurven ineinander überführt werden. Beim Aufblasen ersetzen wir einen Punkt durch den projektiven Raum der Tangenten durch diesen Punkt. Dies ist im zweidimensionalen eine (-1) -Kurve. Die Umkehrung dieses Prozesses ist das Niederblasen.

1.4 Verzweigte Überlagerungen

Wir erinnern nun an die Fortsetzbarkeit und lokale Struktur endlich verzweigter Überlagerungen komplexer Mannigfaltigkeiten (siehe [BPV] und [BHH]).

Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich*, falls das Urbild jeder kompakten Menge wieder kompakt ist.

Definition 1.11. Eine *verzweigte Überlagerung* einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine endliche surjektive eigentliche holomorphe Abbildung $f : Y \rightarrow X$ eines zusammenhängenden normalen komplexen Raumes Y auf X .

Der *Grad* von f ist die Gesamtzahl der Blätter, die Verzweigungsordnung in $y \in Y$ die Anzahl der in y zusammenfallenden Blätter. Unverzweigte Überlagerungen sind genau die endlichen topologischen Überlagerungen von X . Eine *Decktransformation* von f ist eine biholomorphe Abbildung $\varphi : Y \rightarrow Y$ mit $f \circ \varphi = f$. Operiert die Gruppe der Decktransformationen transitiv auf den Blättern, so heißt f *Galois-Überlagerung*.

Wir brauchen im übrigen nicht zu fordern, dass der Überlagerungsraum Y normal ist, da

jede analytische verzweigte Überlagerung eines normalen analytischen Raumes bereits normal ist. Der nächste Satz beschreibt, wie sich unverzweigte Überlagerungen eines dichten Teilraumes fortsetzen lassen.

Satz 1.12. • Sei $f : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung der komplexen Mannigfaltigkeit X . Dann gibt es eine echte analytische Teilmenge Z von X , über deren Komplement die Funktion f eine unverzweigte Überlagerung ist.

- Umgekehrt sei Z eine echte analytische Teilmenge der komplexen Mannigfaltigkeit X und $\check{f} : \check{Y} \rightarrow X \setminus Z$ eine unverzweigte Überlagerung. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau eine verzweigte Überlagerung $f : Y \rightarrow X$, die \check{f} fortsetzt.
- Jede Decktransformation von \check{f} läßt sich zu einer Decktransformation von f fortsetzen und f ist eine Galois-Überlagerung, falls \check{f} eine Galois-Überlagerung ist.

Die lokale Struktur einer verzweigten Überlagerung außerhalb der Singularitäten des Verzweigungsortes beschreibt der folgende Satz.

Satz 1.13. Für eine Überlagerung $f : Y \rightarrow X$ der komplexen Mannigfaltigkeit X gilt:

- Der Verzweigungsort Z ist eine 1-kodimensionale analytische Teilmenge von X oder leer.
- Singularitäten von Y können höchstens über denen von Z liegen. Wenn f in $y \in Y$ mit Ordnung n verzweigt ist und $z = f(y)$ ein regulärer Punkt von Z ist, dann gibt es lokale Koordinaten (v_1, \dots, v_m) von Y um y und (u_1, \dots, u_m) von X um z , so dass f durch

$$u_1 = v_1, \dots, u_{m-1} = v_{m-1}, \quad u_m = v_m^n$$

beschrieben wird.

- Sei X eine Fläche und z ein gewöhnlicher Doppelpunkt von Z . Dann ist Y in $y \in f^{-1}(z)$ genau dann nicht-singulär, wenn es lokale Koordinaten wie oben gibt, so dass f die Form

$$u_1 = v_1^{n_1} \quad \text{und} \quad u_2 = v_2^{n_2}$$

hat.

Wir zeigen noch, dass der Überlagerungsraum Y projektiv ist, falls die Mannigfaltigkeit X projektiv ist. Ein kompakter komplexer Raum Y ist projektiv, wenn es ein *sehr amplex* Linienbündel \mathcal{L} auf Y gibt. Hierzu überprüfen wir folgendes Kriterium von Grauert [Grau, Wav, BPV]:

Satz 1.14. *Sei Y ein kompakter komplexer Raum und \mathcal{L} ein holomorphes Linienbündel auf Y . Das Linienbündel \mathcal{L} ist genau dann sehr ampel, wenn es für jede irreduzible analytische Teilmenge $A \subset Y$ ohne isolierte Punkte ein k gibt, so dass $\mathcal{L}^{\otimes k}|_A$ einen nichttrivialen Schnitt besitzt, der mindestens eine Nullstelle hat.*

Sei X eine komplex analytische Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^N$. Dann induziert das triviale Linienbündel \mathcal{E} auf \mathbb{P}^N ein Linienbündel \mathcal{F} auf X . Zu jeder Hyperebene H in \mathbb{P}^n finden wir einen Schnitt σ_H von \mathcal{E} , dessen Nullstellen gerade der Schnitt von H und X ist. Sei $f : Y \rightarrow X$ eine endliche verzweigte Überlagerung, $\mathcal{L} = \mathcal{F}^\#$ der Pullback von \mathcal{F} auf Y und A eine irreduzible analytische Teilmenge von Y ohne isolierte Punkte. Das Bild $f(A)$ ist ebenfalls eine analytische Teilmenge ohne isolierte Punkte, also insbesondere algebraisch. Eine generische Hyperebene H wird $f(A)$ treffen, aber nicht komplett enthalten. Sei s der Pullback des Schnitts σ_H auf $\mathcal{L}|_A$ über A . Dann hat s Nullstellen in A , verschwindet jedoch nicht vollständig auf A . Also ist \mathcal{L} ein sehr amples Linienbündel und Y projektiv. Wir erhalten:

Satz 1.15. *Sei $f : Y \rightarrow X$ eine endliche verzweigte Überlagerung einer projektiven komplexen Mannigfaltigkeit X . Dann ist Y ein normaler und projektiver komplexer Raum, also insbesondere algebraisch.*

1.5 Etale Morphismen

In diesem Abschnitt erläutern wir, welche Bedingungen ein algebraischer Morphismus erfüllen muss, damit er eine topologische Überlagerung in der Kategorie der komplexen Räume induziert.

Sei A ein Ring und M ein A -Modul. Dann heißt M *flach* über A , falls der Funktor $N \mapsto M \otimes_A N$ exakt in $\mathfrak{Mod}(A)$ ist. Ist $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, dann heißt B *flach* über A , falls B flach als A -Modul ist.

Proposition 1.16. *Ein Modul M ist genau dann flach über A , falls $M_{\mathfrak{p}}$ flach über $A_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$.*

Damit können wir die Eigenschaft *flach* auf Morphismen von Schemata übertragen.

Definition 1.17. Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ ist *flach im Punkt* $y \in Y$, falls der lokale Homomorphismus $\mathcal{O}_{f(y),X} \rightarrow \mathcal{O}_{y,Y}$ flach ist, d.h. \mathcal{O}_y ist ein flacher $\mathcal{O}_{f(y)}$ -Modul.

Ist $f : Y \rightarrow X$ ein endlicher surjektiver Morphismus zwischen nicht-singulären Varietäten, so ist f flach ([H], S. 266). Allgemein garantiert die Eigenschaft „flach“, dass die

Dimensionen der Fasern des Morphismus f gleich sind.

Sei X ein Schema mit Strukturgarbe \mathcal{O}_X und $x \in X$ ein Punkt. Der Ring $\mathcal{O}_{x,X}$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_{x,X}$ und $k(x)$ bezeichne den Körper $\mathcal{O}_{x,X}/\mathfrak{m}_{x,X}$.

Definition 1.18. Seien X und Y zwei Schemata. Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ von endlichem Typ ist im Punkt $y \in Y$ *unverzweigt*, wenn

- $f^\#(\mathfrak{m}_{f(y)})\mathcal{O}_{y,Y} = \mathfrak{m}_y$ und
- $k(y)/k(f(y))$ eine endliche separable Körpererweiterung ist.

Ob ein Morphismus in einem Punkt unverzweigt ist, läßt sich auch an der Faser des Morphismus ablesen. Die Faser $f^{-1}(x)$ ist das $\text{Spec } k(x)$ Schema

$$f_{\text{Spec } k(f(x))} : X \times_Y \text{Spec } k(f(x)) \rightarrow \text{Spec } k(f(x)).$$

Lemma 1.19. *Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ ist unverzweigt in $y \in Y$ genau dann, wenn $f_{\text{Spec } k(f(y))}$ unverzweigt ist.*

Der Bildraum von $f_{\text{Spec } k(f(x))}$ ist ein Körper. In diesem Fall können wir genauer charakterisieren, wann ein Morphismus unverzweigt ist (siehe [Mur], S. 29):

Sei k ein Körper. Der Morphismus $f : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } k$ ist genau dann unverzweigt, wenn $A = \bigoplus_{i=1}^r K_i$, wobei die K_i endliche separable Erweiterungen von k sind. Damit sind die Fasern eines im Punkt x unverzweigten Morphismus f von der Form $\text{Spec } \bigoplus_{i=1}^r K_i$, wobei die K_i endliche separable Erweiterungen von $k(f(x))$ sind.

Definition 1.20. Ein Morphismus $f : Y \rightarrow X$ ist *étale* im Punkt $y \in Y$, falls er sowohl unverzweigt als auch flach ist.

Die Fasern über abgeschlossenen Punkten eines étalen Morphismus zwischen Varietäten sind gerade endliche Mengen von reduzierten Punkten. Für den Funktionenkörper gilt (siehe [Mum], S. 177):

Proposition 1.21. *Sei $f : Y \rightarrow X$ ein étaler Morphismus zwischen Varietäten. Dann ist f dominant und $k(Y)$ ist eine endliche separable Erweiterung von $k(X)$.*

Der *Grad* eines endlichen dominanten Morphismus $f : Y \rightarrow X$ zwischen Varietäten ist der Grad der Körpererweiterung $k(Y)/k(X)$. Den Zusammenhang zu topologischen Überlagerungen liefert folgende Proposition (siehe [Mum], S. 182):

Proposition 1.22. *Seien X und Y Varietäten über \mathbb{C} und sei $f : Y \rightarrow X$ ein Morphismus. Seien X^{an} und Y^{an} die zugehörigen analytischen Räume und $f^{an} : Y^{an} \rightarrow X^{an}$ die zugehörige analytische Abbildung. Dann ist f étale genau dann, wenn f^{an} ein lokaler Isomorphismus ist.*

Damit haben wir die algebraische Bedingung an Morphismen von Varietäten gefunden, die eine topologische Überlagerung der assoziierten analytischen Räume impliziert. Ist f ein étaler Morphismus, so stimmt der Grad von f mit dem Grad von f^{an} überein.

1.6 Verzweigte Überlagerungen von Varietäten

Wir fassen nun all das zusammen, was wir über endliche verzweigte Überlagerungen projektiver komplexer Varietäten aus den bisherigen Überlegungen ableiten können.

Definition 1.23. Sei X eine nichtsinguläre Varietät und Y eine normale Varietät. Ein endlicher surjektiver Morphismus $f : Y \rightarrow X$ heißt *endliche verzweigte Überlagerung von X* .

Ist X projektiv, so ist nach dem Satz von Grauert auch Y projektiv. Nun ist jeder endliche Morphismus f^{an} eigentlich ([Brod], S. 162) und somit erhalten wir eine endliche verzweigte Überlagerung einer komplexen Mannigfaltigkeit. Nach Satz 1.12 gibt es eine dichte Teilmenge $X^{an} \setminus Z \subset X^{an}$, so dass f^{an} eingeschränkt auf das Urbild von $X^{an} \setminus Z$ unverzweigt ist. Also ist f eingeschränkt auf das Urbild von $X \setminus Z$ étale.

Es ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen verzweigten Überlagerungen von Varietäten und topologischen Überlagerungen:

Proposition 1.24. *Sei \overline{X} eine komplexe, nicht-singuläre, projektive Varietät und X eine offene Untervarietät. Ist $f^{top} : Y^{top} \rightarrow X(\mathbb{C})$ eine endliche unverzweigte topologische Überlagerung von $X(\mathbb{C})$, dann gibt es eine projektive normale Varietät \overline{Y} und einen Morphismus $f : \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$, so dass die Einschränkung von f^{an} auf $Y(\mathbb{C})$ der gegebenen topologischen Überlagerung f^{top} entspricht.*

Beweis. Die komplexe Struktur von $X(\mathbb{C})$ induziert eine eindeutige komplexe Struktur auf Y^{top} und nach Satz 1.12 können wir die Überlagerung eindeutig zu einer Überlagerung von \overline{X}^{an} fortsetzen. Damit erhalten wir eine endliche verzweigte Überlagerung von analytischen Räumen. Die Vervollständigung \overline{Y}^{an} ist ein projektiver analytischer Raum, da \overline{X}^{an} projektiv ist. Nach dem Satz von Chow ist dieser algebraisch, d.h. es gibt eine eindeutig bestimmte algebraische Varietät \overline{Y} und einen Morphismus $f : \overline{Y} \rightarrow \overline{X}$, so dass f^{an} gerade die gegebene Überlagerung ist.

$$\begin{array}{ccccc} \overline{Y} & \dashrightarrow & \overline{Y}^{an} & \dashrightarrow & Y^{top} \\ \downarrow f & & \downarrow f^{an} & & \downarrow f^{top} \\ \overline{X} & & \overline{X}^{an} & & \\ \cup & & \cup & & \\ X & \longrightarrow & X^{an} & \longrightarrow & X(\mathbb{C}) \end{array}$$

□

Kapitel 2

Definitionskörper und Modulkörper

Nachdem wir uns im letzten Kapitel hauptsächlich mit der analytischen Struktur komplexer Varietäten beschäftigt haben, wollen wir uns nun die algebraische Seite näher ansehen. Wir führen zwei arithmetische Größen komplexer Varietäten ein, den Definitionskörper und den Modulkörper. Im Zusammenhang mit dem Modulkörper untersuchen wir die Rolle des Strukturmorphismus bei der Operation von Körperautomorphismen $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ auf komplexen Varietäten.

2.1 Der Definitionskörper

Zunächst führen wir Basiswechsel ein und legen die Notation für Faserprodukte fest, für Details siehe [H] oder [EGA].

Seien X und Y zwei Schemata über S . Dann existiert das Faserprodukt $X \times_S Y$ (siehe Definition 1.5) in der Kategorie der S -Schemata, sowie die zwei Projektionsmorphisme $p : X \times_S Y \rightarrow X$ und $p' : X \times_S Y \rightarrow Y$. Sei $S' \rightarrow S$ ein Morphismus, dann verstehen wir unter einem *Basiswechsel* den Wechsel in die Kategorie der S' -Schemata durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & X \times_S S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longleftarrow & S'. \end{array}$$

Seien S, S' Schemata und $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus zwischen S -Schemata und $S' \rightarrow S$ ein Morphismus. Für den Basiswechsel schreiben wir $X_{S'} := X \times_S S'$ bzw. $Y_{S'} := Y \times_S S'$

und $f_{S'} : X_{S'} \rightarrow Y_{S'}$ für den Pullback des S -Morphismus f über S' . Ist $S' = \text{Spec } R$ so kürzen wir die Basiswechsel auch mit X_R ab. Basiswechsel sind transitiv, d.h. sind $S'' \rightarrow S' \rightarrow S$ zwei Morphismen, so ist

$$(X \times_S S') \times_{S'} S'' \simeq X \times_S S''$$

über S'' .

Definition 2.1. Ein Varietät $p : X \rightarrow \text{Spec } k$ ist über einem Teilkörper $K \subset k$ definiert, falls es ein Schema X' mit einem Morphismus $p' : X' \rightarrow \text{Spec } K$ gibt, so dass

$$X \simeq X' \times_K \text{Spec } k$$

über $\text{Spec } k$.

Ist eine Varietät X über einem Körper K definiert, so nennen wir K einen *Definitionskörper* von X . Es gibt also nicht einen eindeutig bestimmten Definitionskörper, im allgemeinen auch keinen „kleinsten“ Definitionskörper. Allerdings sind wir an möglichst kleinen Definitionskörpern interessiert.

Für ein affines Schema $\text{Spec } A$ gibt es auch eine Charakterisierung des Definitionskörpers auf der Ebene der Algebra A . So ist $\text{Spec } A$ über dem Körper K definiert, falls für die Algebra A gilt

$$A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f_1, \dots, f_q) \simeq (K[X_1, \dots, X_n] / (g_1, \dots, g_r)) \otimes_K \mathbb{C},$$

wobei die Koeffizienten der Polynome g_j aus K sind. Die Einbettung $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ spielt hierbei eine wichtige Rolle, da sie beim Tensorprodukt die Struktur von \mathbb{C} als K -Algebra bestimmt. Darauf gehen wir gleich im Zusammenhang mit dem Modulkörper ausführlicher ein.

Komplexe Varietäten sind stets über einem Körper von endlichem Transzendenzgrad über \mathbb{Q} definiert. Es genügt sogar eine endlich erzeugte $\overline{\mathbb{Q}}$ -Algebra, um eine komplexe Varietät vollständig zu beschreiben. Für den Beweis dieser Aussage benötigen wir eine Eigenschaft von separierten Schemata (siehe [EGA], Chap. I, Prop. 5.3.6 + Cor. 5.3.8.):

Lemma 2.2. *Sei X ein separiertes Schema über einem affinen Schema S und seien U und V affine offene Teilmengen von X . Dann ist auch der Schnitt $U \cap V$ affin.*

Die nun folgende Proposition spielt eine wichtige Rolle im nächsten Kapitel. Die Beweismethode können wir auch verwenden, um zu zeigen, dass Morphismen bereits über endlich erzeugten Algebren definiert sind.

Proposition 2.3. *Sei X eine komplexe Varietät. Dann gibt es eine endlich erzeugte $\overline{\mathbb{Q}}$ -Algebra A und ein Schema X_A von endlichem Typ über A mit*

$$X_A \times_A \text{Spec } \mathbb{C} \simeq X.$$

Beweis. Sei $p : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ der Strukturmorphismus der komplexen Varietät. Da p von endlichem Typ ist, wird X durch eine endliche Menge affiner offener Teilmengen $\text{Spec } A_i$ überdeckt, wobei die A_i endlich erzeugte \mathbb{C} -Algebren sind. Eine solche Algebra ist von der Form $A_i = \mathbb{C}[T_1^{(i)}, \dots, T_m^{(i)}]/I_i$ mit einem endlich erzeugten Ideal I_i . Diese Ideale I_i sind also durch endlich viele Polynome gegeben. Erweitern wir $\overline{\mathbb{Q}}$ zunächst mit den Koeffizienten all dieser erzeugenden Polynome, so erhalten wir eine endlich erzeugte $\overline{\mathbb{Q}}$ -Unteralgebra von \mathbb{C} . Um das Schema X vollständig zu beschreiben, müssen wir noch die Verklebomorphismen an den Schnitten der offenen affinen Teilmengen $\text{Spec } A_i$ angeben. Nach dem Lemma sind aber die Schnitte selbst wieder affin und können samt ihrer Einbettungen in die $\text{Spec } A_i$ wieder durch endlich viele Polynome beschrieben werden. Erweitern wir mit den Koeffizienten dieser Polynome, so erhalten wir eine endlich erzeugte $\overline{\mathbb{Q}}$ -Algebra A , über der X bereits vollständig gegeben ist. \square

Ist ein Schema über einem affinen Schema separiert, dann reichen endlich viele Polynome zur Beschreibung aus. Entsprechendes gilt auch für die Morphismen in der zugehörigen Kategorie.

2.2 Der Modulkörper

Neben dem Definitionskörper interessieren wir uns für den Modulkörper einer komplexen Varietät. Dieser ist im Gegensatz zum Definitionskörper eindeutig bestimmt. Bevor wir ihn definieren können, müssen wir zunächst die Operation der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ auf Varietäten einführen.

Definition 2.4. Sei $p : X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ eine Varietät und sei $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Dann induziert σ einen Morphismus $\bar{\sigma} : \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$. Sei X^σ die Varietät bestehend aus dem Schema X und dem Strukturmorphismus

$$p^\sigma = \bar{\sigma} \circ p : X \xrightarrow{p} \text{Spec } \mathbb{C} \xrightarrow{\bar{\sigma}} \text{Spec } \mathbb{C}.$$

Wir definieren die Operation von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ auf komplexen Varietäten als die Zuordnung:

$$\sigma_V : X \mapsto X^\sigma.$$

Obwohl den Varietäten X und X^σ das gleiche Schema zugrunde liegt, sind X und X^σ nicht isomorph in der Kategorie der \mathbb{C} -Schemata. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id} & X^\sigma \\ p \searrow & & \swarrow p^\sigma \\ & \text{Spec } \mathbb{C} & \end{array}$$

kommutiert nicht, d.h. die Identität ist kein Morphismus in der Kategorie der \mathbb{C} -Schemata. Sei

$$U(X) := \{\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \mid X^\sigma \simeq X\}$$

die Untergruppe der $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, die die Isomorphieklasse von X nicht verändern.

Definition 2.5. Der *Modulkörper* $\mathcal{M}(X)$ einer komplexen Varietät X ist der Fixkörper von $U(X)$.

Es ist offensichtlich, dass der Modulkörper einer Varietät X in jedem Definitionskörper von X enthalten ist.

2.2.1 Die Operation von Körperautomorphismen auf affinen Varietäten

Auch wenn X und X^σ als Varietäten nicht isomorph sind, so sind zumindest die Funktionenkörper von X und X^σ als Körper isomorph. Diese unterscheiden sich jedoch in der Einbettung des Konstantenkörpers \mathbb{C} , also in ihrer Struktur als \mathbb{C} -Algebren.

Um die Operation von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ besser zu verstehen, wollen wir sie in den unterschiedlichen Beschreibungen einer affinen Varietät untersuchen. Gegeben sei

1. ein kommutativer, nullteilerfreier Ring A mit Eins, der als \mathbb{C} -Algebra endlich erzeugt ist,
2. die Nullstellenmenge $V(f)$ eines Polynoms $f \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ in \mathbb{C}^n mit $A \simeq \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]/(f)$ und
3. das ganze, separierte Schema $p : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ von endlichem Typ über \mathbb{C} .

Zunächst wollen wir uns mit dem Zusammenhang zwischen Schema und Ring beschäftigen. Der Strukturmorphismus p korrespondiert zu einem Ringmorphismus $p^\sharp : \mathbb{C} \rightarrow A$. Diese Einbettung beschreibt gerade die Struktur von A als \mathbb{C} -Algebra. Umgekehrt erhalten wir den Strukturmorphismus durch die Zuordnung

$$p^\sharp(\lambda) = \lambda \cdot 1,$$

wobei \cdot die Skalarmultiplikation in der Algebra ist. Der Automorphismus operiert durch Vorschalten des Automorphismus auf den Skalaren \mathbb{C} , d.h. $p_\sigma^\sharp : \mathbb{C} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow{p^\sharp} A$. Den Ring A mit Einbettung p_σ^\sharp bezeichnen wir mit A^σ .

Wir wollen uns nun überlegen, warum die Algebren A und A^σ nicht zu isomorphen Varietäten gehören müssen. Zunächst einmal stellen wir fest, dass die Ringe wieder isomorph sind, die Abbildung ist auch hier die Identität. Verändert hat sich die Algebrenstruktur der Ringe.

Beispiel 1: Das einfachste Beispiel ist die Algebra $A = \mathbb{C}[X]$. Sie besitzt den Strukturmorphimus

$$p^\sharp : \mathbb{C} \rightarrow A, \quad p^\sharp(\lambda) = \lambda \cdot 1.$$

und die Algebrenbasis $\{1, X\}$. Gleiches gilt für A^σ mit $p_\sigma^\sharp(\lambda) = \sigma(\lambda) \cdot 1$. Sei $\sigma_V : A \rightarrow A^\sigma$ die Identität in der Kategorie der Ringe. In der Algebrenstruktur verändert sich nun etwas. So ist

$$A \ni p^\sharp(a)X + p^\sharp(b) = aX + b \xrightarrow{\sigma_V} aX + b = p_\sigma^\sharp(\sigma^{-1}(a))X + p_\sigma^\sharp(\sigma^{-1}(b)) \in A^\sigma.$$

Trotzdem sind A und A^σ auch als \mathbb{C} -Algebren isomorph. Die \mathbb{C} -lineare Zuordnung

$$\varphi : \text{Lin}_{\mathbb{C}}(1, X) \rightarrow \text{Lin}_{\mathbb{C}}(1, X), \quad p^\sharp(a)X + p^\sharp(b) \mapsto p_\sigma^\sharp(a)X + p_\sigma^\sharp(b)$$

ist bijektiv und induziert einen Algebrenmorphimus $A \rightarrow A^\sigma$, wenn auch nicht länger die Identität in der Kategorie der Ringe (hier ist: $\varphi(aX + b) = \sigma(a)X + \sigma(b)$). Das sieht zunächst eher trivial und verwirrend aus, wird aber im zweiten Beispiel deutlicher.

Beispiel 2: Sei $A = \mathbb{C}[X, Y] / (f = Y^2 - X^3 + \zeta_3)$ und $\sigma(\zeta_3) = \zeta_3^2$. Als Basis der Algebra wählen wir $\{1, X, Y\}$ und $p^\sharp(\lambda) = \lambda \cdot 1$, bzw. $p_\sigma^\sharp(\lambda) = \sigma(\lambda) \cdot 1$. Dann ist A^σ isomorph zu $\mathbb{C}[X, Y] / (Y^2 - X^3 + \zeta_3^2)$ als \mathbb{C} -Algebra mit der gewöhnlichen Einbettung ohne Galois-Transformation. Im Ring gilt ja weiterhin $Y^2 - X^3 + \zeta_3 = 0$, in der Algebra ist dies nun aber gerade $p^\sharp(1)Y^2 + p^\sharp(-1)X^3 + p^\sharp(\zeta_3)$.

Die triviale \mathbb{C} -lineare Abbildung $\varphi : \text{Lin}_{\mathbb{C}}(1, X, Y) \rightarrow \text{Lin}_{\mathbb{C}}(1, X, Y)$ aus dem vorherigen Beispiel mit Vertauschung der Skalarmultiplikation ist kein Isomorphismus mehr, da

$$\begin{aligned} \varphi\left(p^\sharp(1)Y^2 - p^\sharp(1)X^3 + p^\sharp(\zeta_3)\right) &= p_\sigma^\sharp(1)Y^2 - p_\sigma^\sharp(1)X^3 + p_\sigma^\sharp(\zeta_3) \\ &= Y^2 - X^3 + \zeta_3^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Trotzdem gibt es auch hier einen Algebrenisomorphismus. Es sei

$$\varphi' : \begin{cases} 1 & \mapsto 1 \\ X & \mapsto (\zeta_3)^{\frac{1}{3}} X \\ Y & \mapsto \sqrt{\zeta_3} Y \end{cases}$$

und die Skalarmultiplikation wie vorher vertauscht. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi' \left(p^\#(1) Y^2 - p^\#(1) X^3 + p^\#(\zeta_3) \right) = p_\sigma^\#(1) \left(\sqrt{\zeta_3} Y \right)^2 - p_\sigma^\#(1) \left((\zeta_3)^{\frac{1}{3}} X \right)^3 + p_\sigma^\#(\zeta_3) \\ &= \zeta_3 (Y^2 - X^3 + \zeta_3) = 0. \end{aligned}$$

Beispiel 3: Ist die Varietät durch $Y^2 = X^3 + X + \zeta_3$ gegeben, dann funktioniert auch diese Variablensubstitution nicht mehr. Man kann zeigen, dass die Algebren A und A^σ nicht isomorph sind

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den maximalen Idealen $\text{Spec}_m A$ und der Nullstellenmenge beschreiben. Ein abgeschlossener Punkt von $\text{Spec } A$ ist durch die Werte der rationalen Funktionen, also durch ein Auswertungsfunktional auf dem Koordinatenring bestimmt. Sei $f(a, b) = 0$, dann ist $(X - a)(Y - b)$ ein maximales Ideal in A . Diesem entspricht ein abgeschlossener Punkt im affinen Schema $\text{Spec } A$. Auf dem Ring A wirkt σ_V als Identität, d.h.

$$\begin{aligned} \sigma_V : \mathbb{C}[X, Y] / (f) &\rightarrow \mathbb{C}^\sigma[X, Y] / (f) \\ (X - a)(Y - b) &\mapsto (X - a)(Y - b). \end{aligned}$$

Die Identifizierung mit der Nullstellenmenge machen wir nur, falls die Einbettung $\mathbb{C} \rightarrow A$ gerade die Standardeinbettung ist. Da dies auf der rechten Seite nicht der Fall ist, gehen wir zur isomorphen Algebra $\mathbb{C}[X, Y] / (\sigma^{-1}(f))$ über. Dabei werden alle Elemente von A auf Polynome mit Koeffizienten σ^{-1} abgebildet, d.h. das Bild von $(X - a)(Y - b)$ ist $(X - \sigma^{-1}(a))(Y - \sigma^{-1}(b))$. Und der zugehörige Punkt ist $(\sigma^{-1}(a), \sigma^{-1}(b))$. Den Übergang zur Algebra $\mathbb{C}[X, Y] / (\sigma^{-1}(f))$ können wir auch noch einmal ganz formal nachrechnen.

Proposition 2.6. *Sei X die abstrakte Varietät zur affinen Varietät $V(f) \subset \mathbb{C}^n$. Dann ist die Varietät X^σ gegeben durch die affine Varietät $V(\sigma^{-1}(f))$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass es einen Isomorphismus ψ der \mathbb{C} -Schemata gibt, so dass

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f) & \xrightarrow{\psi} & \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (\sigma^{-1}(f)) \\ p \downarrow & & \swarrow p \\ \text{Spec } \mathbb{C} & & \\ \bar{\sigma} \searrow & & \text{Spec } \mathbb{C} \end{array}$$

kommutiert. Der Strukturmorphismus p ist auf beiden Seiten durch die kanonische Inklusion $i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ bestimmt. Nun induziert σ einen Algebrenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \psi^\sharp : \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (\sigma^{-1}(f)) &\rightarrow \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f) \\ \sum a_{ij} X_i^j + (\sigma^{-1}(f)) &\mapsto \sum \sigma(a_{ij}) X_i^j + (f). \end{aligned}$$

Der Morphismus ψ ist gerade der assoziierte Morphismus

$$\psi : \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (\sigma^{-1}(f)).$$

Dann kommutiert obiges Diagramm, da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (\sigma^{-1}(f)) \xrightarrow{\psi^\sharp} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f); & \lambda \mapsto \lambda + \sigma^{-1}(f) \mapsto \sigma(\lambda) + (f) \\ \mathbb{C} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow{i} \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f); & \lambda \mapsto \sigma(\lambda) \mapsto \sigma(\lambda) + (f). \end{array}$$

□

2.3 Einige Eigenschaften des Modulkörpers

Zunächst zeigen wir, dass $X^\sigma \simeq X$ für alle $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, falls X über \mathbb{Q} definiert ist. Wir benötigen dazu eine weitere Eigenschaft des Faserprodukts [H]:

Lemma 2.7. *Seien X, Y, Y' drei S Schemata und $f : Y \rightarrow Y'$ ein Morphismus. Dann gibt es einen Lift \tilde{f} , so dass folgendes Diagramm über S kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & X \times_S Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & Y'. \end{array}$$

Sei X ein Schema über \mathbb{Q} und $\bar{\sigma} : \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ der Pullback eines Automorphismus $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$. Dann ist $\bar{\sigma}$ ein Morphismus über $\text{Spec } \mathbb{Q}$ und es existiert ein Lift $\tilde{\sigma}$ von $\bar{\sigma}$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathbb{Q}} \text{Spec } \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & X \times_{\mathbb{Q}} \text{Spec } \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \text{Spec } \mathbb{C} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \text{Spec } \mathbb{Q}. & \end{array}$$

Nach diesem Diagramm ist $\tilde{\sigma}$ der Isomorphismus zwischen $(X \times_{\mathbb{Q}} \text{Spec } \mathbb{C})^{\sigma}$ und $X \times_{\mathbb{Q}} \text{Spec } \mathbb{C}$.

Wir überprüfen nun noch zwei Eigenschaften der Menge

$$U(X) := \{\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}) \mid X^{\sigma} \text{ ist isomorph zu } X\}.$$

Zunächst überlegen wir, warum $U(X)$ eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ ist. Diese Übung dient lediglich dazu, sich mit der Operation von Körperautomorphismen weiter anzufreunden. Ist $X^{\sigma} \simeq X$ dann gibt es einen Isomorphismus f_{σ} , so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_{\sigma}} & X \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \swarrow \tilde{\sigma} & \text{Spec } \mathbb{C} \end{array}$$

Seien $\sigma, \nu \in U(X)$, dann gilt

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f_{\sigma}} & X & \xrightarrow{f_{\nu}} & X \\ & & \downarrow p & & \downarrow p \\ \downarrow p & & \text{Spec } \mathbb{C} & \swarrow \tilde{\nu} & \text{Spec } \mathbb{C} \\ & & \swarrow \tilde{\sigma} & & \\ & & \text{Spec } \mathbb{C} & & \end{array}$$

In der Diagonale finden wir $(X^{\nu})^{\sigma} = X^{\sigma \circ \nu} \simeq X$, also ist auch $\sigma \circ \nu \in U(X)$. Das Inverse σ^{-1} finden wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f_{\sigma^{-1}}} & X \\ \downarrow p & & \downarrow p \\ \text{Spec } \mathbb{C} & \swarrow \tilde{\sigma} & \text{Spec } \mathbb{C} \\ \downarrow \tilde{\sigma}^{-1} & & \\ \text{Spec } \mathbb{C} & & \end{array}$$

Also ist $U(X)$ eine Untergruppe von $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

Zuletzt widmen wir uns der Frage, welcher Zusammenhang zwischen $U(X)$ und $U(X^{\sigma_\alpha})$ besteht, falls σ_α nicht in $U(X)$ enthalten ist. Wir behaupten, dass die Stabilisatoren zueinander konjugiert sind:

Lemma 2.8. *Es gilt:*

$$\sigma_\alpha U(X) \sigma_\alpha^{-1} = U(X^{\sigma_\alpha}).$$

Beweis. Sei $\nu \in U(X)$, dann ist $(X^\nu)^{\sigma_\alpha} \simeq X^{\sigma_\alpha}$. Nun ist $(X^\nu)^{\sigma_\alpha} = (X^{\sigma_\alpha})^{\nu'}$ mit $\nu' = \sigma_\alpha \circ \nu \circ \sigma_\alpha^{-1}$. Also ist $\nu' \in U(X^{\sigma_\alpha})$. Daraus folgt

$$\sigma_\alpha U(X) \sigma_\alpha^{-1} \subset U(X^{\sigma_\alpha}).$$

Vertauschen wir die Rollen von X und X^{σ_α} , so folgt die Behauptung. \square

Kapitel 3

Heuristik zur Verallgemeinerung des Satzes von Belyi

3.1 Der Satz von Belyi

Im letzten Kapitel haben wir bewiesen, dass eine Varietät Y über einem Zahlkörper definiert ist, falls sie eine endliche Überlagerung einer über \mathbb{Q} definierten projektiven nicht-singulären Varietät X ist, die nur über einem rationalen Divisor D verzweigt. In Dimension eins gibt es hierzu auch eine Umkehrung, den Satz von Belyi [B].

Satz 3.1. *Eine komplexe Kurve Y ist genau dann über einem Zahlkörper definiert, wenn es eine rationale Funktion $\beta : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ gibt, die nur über den Punkten $0, 1$ und ∞ verzweigt.*

Wir beschreiben kurz, wie sich eine Belyi-Funktion β finden läßt. Da Y über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, gibt es eine Funktion, deren kritische Werte in $\overline{\mathbb{Q}}$ liegen. Schalten wir die Minimalpolynome der kritischen Werte als Funktionen dahinter, erhalten wir eine Funktion, die nur noch über \mathbb{Q} verzweigt. Schließlich reduziert ein Algorithmus die kritischen Werte auf die drei Punkte $0, 1$ und ∞ . Ein Beweis von Satz 3.1 im Rahmen der in dieser Arbeit verwendeten Sprache findet sich in [K].

Jede topologische Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ bestimmt eindeutig eine komplexe Kurve Y . Das heißt, es gibt genau eine Kurve Y und eine Funktion $\beta : Y \rightarrow \mathbb{P}^1$, so dass die Einschränkung von β auf das Urbild von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ die vorgegebene topologische Überlagerung ist. Wir können die über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Kurven nach dem Satz von Belyi in der Form von Überlagerung des \mathbb{P}^1 untersuchen. Diese lassen sich leicht beschreiben, etwa über die Monodromiegruppe oder bipartite Graphen, den Dessins d'Enfants. Wir verfolgen folgendes Prinzip:

*Nutze die Beschreibung von topologischen Überlagerungen,
um assoziierte algebraische Objekte zu studieren.*

Dazu benötigen wir allerdings nicht notwendigerweise beide Richtungen des Satzes von Belyi. Es reicht vielmehr die Tatsache, dass jede endliche topologische Überlagerung des analytischen Raumes einer Basisvarietät X bereits eindeutig eine Varietät Y bestimmt. Dies ist aber für nicht-singuläre projektive Varietäten X stets der Fall.

Es stellt sich die Frage, welche Basisvarietät wir verwenden sollen, um die Kategorie der über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Varietäten als Überlagerungen zu untersuchen. Jede über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Varietät einer vorgegebenen Dimension sollte als Überlagerung einer Basisvarietät X auftreten. Wir suchen also einen geeigneten Raum für einen verallgemeinerten Satz von Belyi. Dazu analysieren wir die Eigenschaften von $X = \mathbb{P}^1$ und dem Verzweigungsort $L = \{0, 1, \infty\}$ unter dem Aspekt einer Korrespondenz zwischen topologischen Überlagerungen und algebraischen Körpererweiterungen von \mathbb{Q} . Wir stellen drei Eigenschaften fest:

- Der Funktionenkörper von X ist der rationale Funktionenkörper $\mathbb{C}(z) = \mathbb{Q}(z) \otimes \mathbb{C}$, also der kleinste Funktionenkörper in einer Variablen.
- Der Verzweigungsort L ist in folgendem Sinne rein topologisch charakterisiert:
 L besitzt die Eigenschaft (E):
Sei M eine abgeschlossene Teilmenge des topologischen Raumes X^{top} von Kodimension eins, dann gibt es einen algebraischen Automorphismus g von X , so dass $g(M)$ über \mathbb{Q} definiert ist.
- Bezüglich (E) ist L maximal.

Die beiden letzten Eigenschaften folgen aus der Tatsache, dass die Automorphismengruppe von \mathbb{P}^1 dreifach transitiv wirkt. Das heißt, wir können ein Tripel von Punkten immer auf das Tripel $\{0, 1, \infty\}$ abbilden. Für vier Punkte ist das nicht mehr möglich.

Als Heuristik zur Verallgemeinerung des Satzes von Belyi fordern wir:

Eine n -dimensionale Verallgemeinerung des Satzes von Belyi sollte eine nicht-singuläre projektive Basisvarietät X und einen Verzweigungsort L mit folgenden Eigenschaften besitzen:

- *Der Funktionenkörper von X ist $\mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n) \otimes \mathbb{C}$.*
- *Der Verzweigungsort L ist topologisch charakterisiert, d.h. er besitzt die Eigenschaft (E).*
- *Bezüglich (E) ist L maximal.*

Natürlicher Kandidat für die Basisvarietät ist der projektive Raum \mathbb{P}^n mit Funktionenkörper $\mathbb{C}(z_1, \dots, z_n)$. Die Automorphismengruppe von \mathbb{P}^n operiert $(n+2)$ -fach transitiv auf Punkten in allgemeiner Lage [GH]. Der Verzweigungsort L sollte deshalb durch $n+2$ Punkte bestimmt sein. Damit sind bereits alle Forderungen der Heuristik erfüllt. Nun gibt es allerdings einige Möglichkeiten, eine Hyperfläche aus $n+2$ Punkten zu gewinnen. Wir können die Punkte durch Hyperebenen, aber auch durch Kubiken, Quartiken, usw. verbinden. Um die Komplexität möglichst niedrig zu halten, fordern wir zusätzlich:

- *Der Verzweigungsort L soll aus einer Konfiguration von Hyperebenen bestehen.*

Zur Beschreibung des Verzweigungsdivisors sollen also lineare Gleichungen ausreichen. Wir werden diese Forderung später noch diskutieren.

3.2 Konfigurationsräume von n geordneten Punkten auf \mathbb{P}^1

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Konfigurationsräume $X(n+3)$ die Anforderungen aus der Heuristik an den Grundraum eines verallgemeinerten Satzes von Belyi für die Dimension n erfüllen.

Seien (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) zwei Tripel von paarweise verschiedenen Punkten der Riemannschen Sphäre \mathbb{P}^1 . Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathbb{P}^1) = PGL(2)$ operiert dreifach transitiv auf den Punkten. Es gibt also einen Automorphismus g von \mathbb{P}^1 , so dass

$$(y_1, y_2, y_3) = (g(x_1), g(x_2), g(x_3)).$$

Für mehr als drei Punkte ist das im allgemeinen nicht mehr möglich.

Sei Δ die Menge aller n -Tupel von Punkten aus \mathbb{P}^1 , die mindestens zwei gleiche Einträge besitzen. Dann ist

$$X[n] = \overbrace{\mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1}^{n\text{-mal}} - \Delta$$

die Menge aller n -Tupel aus verschiedenen Punkten des \mathbb{P}^1 . Die Automorphismengruppe $PGL(2)$ operiert komponentenweise auf $X[n]$. Den Quotientenraum unter dieser Operation bezeichnen wir als Konfigurationsraum $X(n)$.

Wir wollen nun ein Modell für den Konfigurationsraum $X(n)$ konstruieren. Dazu wählen wir eine Normalform. Die ersten drei Punkte bilden wir mit einem Automorphismus auf $0, 1$ und ∞ ab. Die Automorphismengruppe ist damit aufgebraucht. Sind die Punkte in homogenen Koordinaten gegeben, dann besteht $X(n)$ nun aus den n -Tupeln

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_{n-3} \end{pmatrix},$$

wobei die λ_i paarweise und von 0 resp. 1 verschieden sind. Der Konfigurationsraum $X(n)$ ist ein Teilraum von \mathbb{C}^{n-3} . Für $n = 4$ kann λ_1 alle Werte außer 0 und 1 annehmen und wir erhalten $X(4) = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Dies ist der Grundraum für den eindimensionalen Satz von Belyi. Im Fall $n = 5$ gilt:

$$\lambda_{1,2} \neq 0, 1 \text{ und } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Hilfreich ist nun, auch die Konfigurationen aus Δ , die entarteten Konfigurationen, in die Betrachtung mit einzubeziehen. Abhängig davon, wie häufig Punkte mehrfach auftreten, können wir verschiedenen Stufen der Entartung unterscheiden. Hier sind zwei oder bei maximaler Entartung drei Punkte identisch. Letzteres gilt offensichtlich für $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ oder 1, bzw. dem unendlich fernen Punkt. Im Produkt $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ entspricht dies der linken Seite von Abbildung 4.1. Alternativ können wir $X(5)$ durch die Zuordnung $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (1 : \lambda_1 : \lambda_2)$ in den \mathbb{P}^2 mit Koordinaten $(x : y : z)$ einbetten. Nicht im Konfigurationsraum enthalten sind die Geraden $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$, die Diagonale $(1 : y : y)$ sowie die unendlich ferne Gerade $(0 : y : z)$. Die Schnittpunkte von jeweils drei Geraden interpretieren wir als maximal entartete Punkte. Neben $(1 : 0 : 0)$ und $(1 : 1 : 1)$ finden wir zwei weitere Punkte von maximaler Entartung. Die im endlichen parallelen Geraden $y = 0$ und $y = 1$ resp. $z = 0$ und $z = 1$ treffen sich im Unendlichen in den Punkten $(0 : 0 : 1)$ und $(0 : 1 : 0)$. In \mathbb{P}^2 ist der Konfigurationsraum $X(5)$ also das Komplement von vier Punkten in allgemeiner Lage und deren Verbindungsgeraden (siehe Abbildung 4.1). Für n Punkte finden wir im Endlichen stets maximal entartete Punkte $\lambda_i = 0, 1$ für alle $i = 1, \dots, n-3$. Dazu kommen im Unendlichen die Schnitte der beiden Geraden $\lambda_i = 0$ und $\lambda_i = 1$ mit $\lambda_j = \lambda_k$ für alle $j, k \neq i$ im Punkt $(0 : 1 : \dots : 1 : 0 : 1 : \dots : 1)$ mit der Null an der $(i+1)$ sten Stelle. Diese $n-1$ maximal entarteten Punkte bestimmen eine Konfiguration von Hyperebenen, die das Komplement von $X(n)$ in \mathbb{P}^{n-3} bilden.

Die Konfigurationsräume lassen sich also als \mathbb{P}^{n-3} minus einer Konfiguration von Hyperebenen realisieren. Die Hyperebenen sind durch $n-1$ Punkte in allgemeiner Lage auf \mathbb{P}^{n-3} bestimmt. Somit erfüllen die Konfigurationsräume $X(n+3)$ die Forderungen aus der Heuristik zur Verallgemeinerung des Satzes von Belyi.

Die Konfigurationsräume $X(n)$ bezeichnet man auch als Modulräume $\mathcal{M}_{0,n}$ der n -fach punktierten Kugeln vom Geschlecht Null. Der \mathbb{P}^{n-3} ist eine mögliche Kompaktifizierung $\overline{\mathcal{M}_{0,n}}$. Wir werden im Folgenden diese Bezeichnung übernehmen.

3.3 Die Verallgemeinerung

Der naive Ansatz für eine Verallgemeinerung des Satzes von Belyi wäre nun:

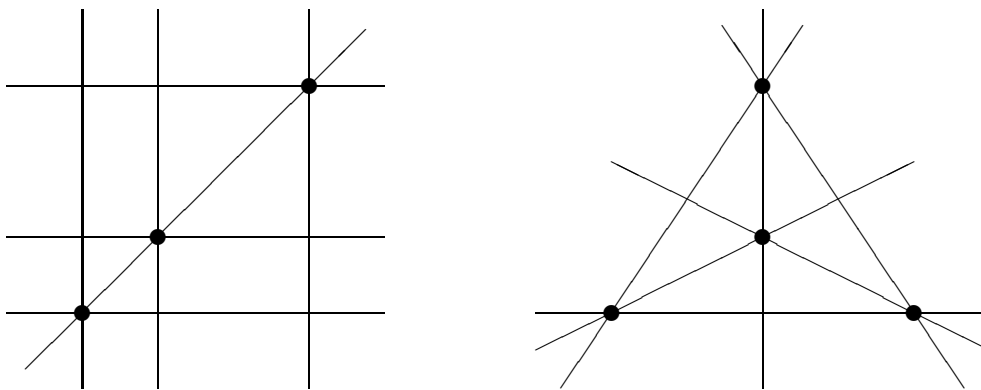


Abbildung 3.1: Einbettungen des Konfigurationsraums in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und \mathbb{P}^2

Jede normale über einem Zahlkörper definierte n -dimensionale projektive Varietät ist eine endliche Überlagerung von \mathbb{P}^n , die über $\mathcal{M}_{0,n+3}$ unverzweigt ist.

Diese Aussage kann jedoch nicht richtig sein. Blasen wir etwa den \mathbb{P}^2 in einem Punkt zu einer Fläche $\tilde{\mathbb{P}}$ auf, so gibt es keine endliche Überlagerung $\tilde{\mathbb{P}} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Durch Aufblasen von Punkten oder Kontrahieren von (-1) -Kurven ändert sich der Funktionenkörper einer Varietät nicht. Für den Funktionenkörper von $\tilde{\mathbb{P}}$ gibt es also ein Modell, das den \mathbb{P}^2 endlich überlagert, den \mathbb{P}^2 selbst. Auch im Hinblick auf den Zusammenhang zu der angestrebten Beziehung zu Zahlkörpern ist es deshalb sinnvoll, sich auf die Äquivalenzklasse des Funktionenkörpers einzuschränken. Das heißt, wir fordern, dass es ein Modell des Funktionenkörpers gibt, das den \mathbb{P}^n mit dem gewünschten Verzweigungsverhalten endlich überlagert. So hilft es etwa bei der Jacobischen $J(C)$ einer Kurve C vom Geschlecht zwei, das birational äquivalente zweifache symmetrische Produkt $\text{Sym}_2 C$ zu betrachten. Dieses überlagert das symmetrische Produkt $\text{Sym}_2 \mathbb{P}^1$ endlich, das wiederum isomorph zu \mathbb{P}^2 ist. Mehr dazu im nächsten Kapitel.

Bevor wir erneut eine Verallgemeinerung des Satzes von Belyi formulieren, vergewissern wir uns, dass die Einschränkung auf die Birationalitätsklassen von Varietäten immer eine Überlagerung des \mathbb{P}^n liefert.

Lemma 3.2. *Sei \tilde{Y} eine n -dimensionale Varietät, die über einem Zahlkörper definiert ist. Dann gibt es eine birational äquivalente normale projektive Varietät Y und einen endlichen Überlagerungsmorphismus $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$, der nur über einem rationalen (d.h. über \mathbb{Q} definierten) Divisor verzweigt.*

Beweis. Sei x_1, \dots, x_n eine Transzendenzbasis des Funktionenkörpers $\mathbb{C}(\tilde{Y})$ und A der ganze Abschluss von $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ in $\mathbb{C}(\tilde{Y})$. Dann ist $Y^0 = \text{Spec } A$ eine endliche Überlagerung des affinen Raumes $\text{Spec } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, die birational zu \tilde{Y} ist. Wir erhalten also eine endliche verzweigte Überlagerung des analytischen Raumes \mathbb{C}^n . Diese läßt sich eindeutig zu einer verzweigten Überlagerung $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$ fortsetzen, so dass Y normal, projektiv und birational äquivalent zu \tilde{Y} ist.

Da \tilde{Y} über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, können wir alternativ auch den ganzen Abschluss von $\overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$ betrachten. Damit ist der Verzweigungsort durch eine Polynom $g(x_1, \dots, x_n)$ gegeben, das in $\overline{\mathbb{Q}}[x_1, \dots, x_n]$ enthalten ist. Ist K der durch die Koeffizienten von f erzeugte Teilkörper von $\overline{\mathbb{Q}}$, dann ist das Polynom

$$h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})} g^\sigma(x_1, \dots, x_n)$$

in $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$. Der Verzweigungsort der Überlagerung ist also in einer rationalen Hyperfläche $h(x_1, \dots, x_n)$ enthalten. Durch die Fortsetzung dieser Überlagerung auf die Kompaktifizierung \mathbb{P}^n kommt nur noch die Hyperebene im Unendlichen als möglicher Verzweigungsort hinzu. \square

Nach diesem Lemma sollte eine Verallgemeinerung des Satzes von Belyi gemäß unserer Heuristik wie folgt lauten:

Zu jeder über einem Zahlkörper definierten n -dimensionalen Varietät \tilde{Y} gibt es eine birational äquivalente normale Varietät Y und einen Morphismus $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$, der nur über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,n+3}$ verzweigt.

3.4 Diskussion

Wir wollen kurz diskutieren, wo die Schwierigkeit beim Beweis dieser verallgemeinerten Version des Satzes von Belyi liegt. Zu zeigen ist, dass es eine Überlagerung mit dem vorgegebenen Verzweigungsverhalten gibt. Mit der Struktur des Verzweigungsorts von endlichen Überlagerungen von \mathbb{P}^n beschäftigt sich Ueno [Ueno]. Er beweist folgenden Satz:

Satz 3.3. *Sei \tilde{Y} eine n -dimensionale Varietät über \mathbb{C} . Dann existiert eine zu \tilde{Y} birationale normale projektive Varietät Y und eine endliche verzweigte Überlagerung $f : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$, deren Verzweigungsort in der Vereinigung der Hyperebene H_∞ im Unendlichen und einer endlichen Anzahl affiner Hyperflächen in $\mathbb{P}^n \setminus H_\infty$ enthalten ist. Die Hyperflächen sind durch Gleichungen der Form*

$$x_n = h_i(x_1, \dots, x_{n-1})$$

gegeben, wobei die x_i affine Koordinaten von $\mathbb{P}^n \setminus H_\infty$ sind. Ist \tilde{Y} über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, dann finden wir ein f , so dass die Koeffizienten der h_i aus \mathbb{Q} sind.

Die Polynome zur Beschreibung des Verzweigungsortes sind hier bezüglich der affinen Koordinaten x_n vereinfacht. Allerdings ist der Grad von h_i im allgemeinen größer als Eins. Der Verzweigungsort besteht also nicht aus Hyperebenen. Der Beweis verwendet einen Algorithmus, der den Grad der beschreibenden Polynome in x_n verringert, den Gesamtgrad jedoch erhöht. Leider ist das der einzige bisher bekannte Algorithmus, der sich auf beliebige Varietäten anwenden läßt.

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, kann man die Verallgemeinerung in einigen Spezialfällen beweisen. Allerdings sind die dafür verwendeten Methoden nur begrenzt einsetzbar. Eine Verallgemeinerung des Belyi-Algorithmus, der den Grad aller Komponenten des Verzweigungsdivisors reduziert, ist bislang nicht in Sicht.

Kapitel 4

Komplexe Flächen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit komplex algebraischen Flächen. Nach der Heuristik aus dem letzten Kapitel sollte der Funktionenkörper einer über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten komplex algebraischen Fläche ein Modell besitzen, das \mathbb{P}^2 über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt und endlich überlagert. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir uns mit der Existenz solcher Überlagerungsabbildungen beschäftigen.

Im zweiten Teil stellen wir die Frage, wie wir die endlichen über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigten Überlagerungen von \mathbb{P}^2 beschreiben können.

4.1 Belyi-Morphismen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Existenz von Belyi-Morphismen beschäftigen. Wir suchen Klassen von über Zahlkörpern definierten algebraischen Flächen, die ein Modell besitzen, das \mathbb{P}^2 über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt überlagert. Den Überlagerungsmorphismus bezeichnen wir wie im Eindimensionalen als Belyi-Morphismus.

Im letzten Kapitel haben wir zwei Realisierungen des Modulraums $\mathcal{M}_{0,5}$ gefunden. Zum einen die Einbettung

$$\mathcal{M}_{0,5} \simeq (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \times \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \setminus \{\text{Diagonale}\},$$

wobei der Rand von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ aus den Geraden über 0, 1 und ∞ in beiden Faktoren, sowie der Diagonalen besteht. Blasen wir in den Punkten $(0, 0)$, $(1, 1)$ und (∞, ∞) auf, so erhalten wir eine Fläche, in der der Rand von $\mathcal{M}_{0,5}$ nur aus einer Konfiguration von (-1) Kurven mit einfachen transversalen Schnittpunkten besteht. Durch Niederblasen von drei sich nicht schneidenden (-1) Kurven erhalten wir die Einbettung von $\mathcal{M}_{0,5}$ in den \mathbb{P}^2 ,

die wir im letzten Kapitel beschrieben haben. Hier besteht der Rand von $\mathcal{M}_{0,5}$ aus der Konfiguration von 6 Geraden, von denen sich jeweils drei in vier Punkten in allgemeiner Lage schneiden. Diese Konfiguration ist durch die Nullstellenmenge

$$L = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 \mid xyz(x-y)(x-z)(y-z) = 0\}$$

in homogenen Koordinaten gegeben. Alle drei Kompaktifizierungen $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ von $\mathcal{M}_{0,5}$ sind birational äquivalent. Jede über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigte Überlagerung läßt sich zu einer Überlagerung eines beliebigen Modells von $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ fortsetzen. Die entsprechenden Überlagerungsflächen sind dann ebenfalls birational äquivalent. Für Existenzaussagen über Belyi-Morphismen genügt es, eine Überlagerung mit dem richtigen Verzweigungsverhalten für ein beliebiges Modell von $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ zu finden.

4.1.1 Das direkte Produkt zweier Belyi-Kurven und Jacobi-Varietäten

Sei $Y = C \times C'$ das direkte Produkt zweier über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierter Kurven C und C' mit Belyi-Funktionen β und β' . Das direkte Produkt (β, β') der Belyi-Funktionen ist eine Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, die nur über den Geraden mit den Werten 0, 1 oder ∞ in einem der beiden Faktoren verzweigt. Also ist (β, β') ein Belyi-Morphismus auf Y .

Der naive Ansatz, eine vorhandene Belyi-Funktion zu benutzen, funktioniert im Beispiel der Jacobi-Varietäten nicht. Sei C eine Kurve vom Geschlecht zwei. Die Jacobi-Varietät von C ist eine abelsche Fläche $\mathcal{J}(C)$, die genau dann über einem Zahlkörper definiert ist, falls C über einem Zahlkörper definiert ist. Sie ist birational äquivalent zum zweifachen symmetrischen Produkt $\text{Sym}_2 C$. Sei ι die hyperelliptische Involution auf C , Kontrahieren wir den Divisor $[p, \iota(p)]_2$ in $\text{Sym}_2 C$, so ist das Bild isomorph zur Jacobi-Varietät. Die Belyi-Funktion β auf C läßt sich zu einer Überlagerung

$$[\beta, \beta]_2 : \text{Sym}_2 C \rightarrow \text{Sym}_2 \mathbb{P}^1$$

fortsetzen. Ist β vom Grad n , so hat ein Punkt $[P, Q]_2 \in \text{Sym}_2 \mathbb{P}^1$, über dem $[\beta, \beta]_2$ nicht verzweigt, n^2 Urbilder

$$\{[p_i, q_j]_2 \mid \beta^{-1}(P) = \{p_1, \dots, p_n\}, \beta^{-1}(Q) = \{q_1, \dots, q_n\}\}.$$

Die Abbildung $[\beta, \beta]_2$ ist über $[(1:0), \mathbb{P}^1]_2$, $[(1:1), \mathbb{P}^1]_2$ und $[(0:1), \mathbb{P}^1]_2$ verzweigt. Allerdings kommen weitere Verzweigungspunkte hinzu. Zu Punkten der Diagonalen $[P, P]_2$ gibt es wegen der Symmetrisierung nur $\frac{n(n+1)}{2}$ Urbilder.

Der Isomorphismus zwischen $\text{Sym}_2 \mathbb{P}^1$ und \mathbb{P}^2 ist durch

$$\psi : \text{Sym}_2 \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2, \quad [(s:t), (u:v)]_2 \mapsto (su : tv : sv + ut)$$

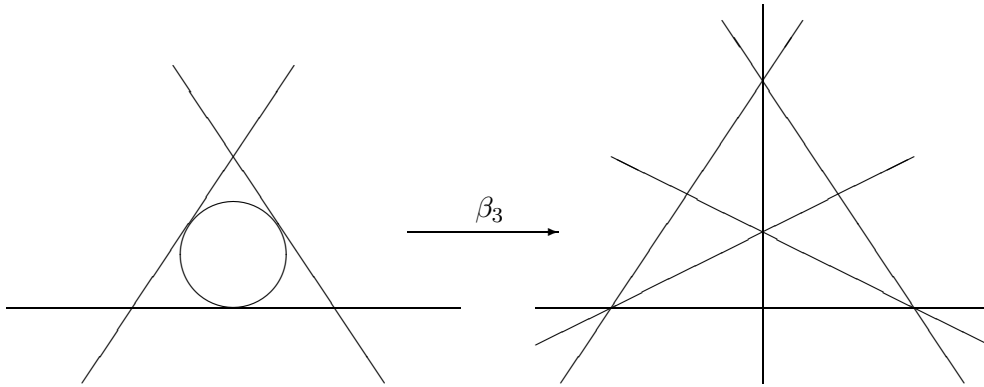


Abbildung 4.1: Die Überlagerung $\beta_3 : \mathbb{P}^2 \setminus V(f^h) \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus L$

wobei die Matrix aus m Spalten mit den Koeffizienten von r und l Spalten mit den Koeffizienten von s besteht. Sie ist ein ganzes Polynom in den Koeffizienten von r und s . Die Resultante verschwindet genau dann, wenn r und s einen gemeinsamen Faktor in $\mathbb{C}[x]$ haben.

Für festes $z \in \mathbb{C}$ betrachten wir das Polynom $f(y, z) = f_z(y)$ als eine Abbildung $f_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Die Nullstellen von $f_z(y)$ werden trivialerweise auf die Null abgebildet. Ist a eine Nullstelle von $f'_z(y)$, also f_z in a verzweigt, und $v_0 = f_z(a)$, so hat $f_z(y) - v_0$ eine Nullstelle in a . Die beiden Polynome f'_z und $f_z - v_0$ haben also einen gemeinsamen Faktor. Damit hat die Resultante

$$g_z(v) = \text{Res}_y (f'_z(y), f_z(y) - v).$$

in v_0 eine Nullstelle. Also ist das Bild von $V(f'_z)$, d.h. der Verzweigungsort von f_z , in $V(g_z(v))$ enthalten.

Die Resultante $g_z(v)$ ist ein Polynom vom Grad zwei in v . Fassen wir sie wieder als eine Abbildung $g_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auf, so verzweigt diese über $V(h_z(w))$ mit

$$h_z(w) = \text{Res}_v (g'_z(v), g_z(v) - w).$$

Das Polynom $h_z(w)$ ist vom Grad eins. Die Komposition $\beta_1 = h_z \circ g_z \circ f_z$ hat folgende Eigenschaften:

- Die Menge $V(f_z)$ wird auf $q(z) = h_z(g_z(0))$ abgebildet.
- Die Abbildung β_1 verzweigt über dem Bild des Verzweigungsortes von f_z

$$p(z) = h_z(0),$$

sowie 0, dem Bild des Verzweigungsortes von g_z .

Die explizite Form von β_1 , $q(z)$ und $p(z)$ berechnet man z.B. mit Maple:

$$\begin{aligned} \beta_1(y, z) = & -78732y^6 + (157464z + 39366z^2 - 157464)y^5 \\ & + (-78732 + 157464z - \frac{19683}{4}z^4 - 78732z^3)y^4 \\ & + (11664 + 78732z^2 - 34992z + 32805z^4 - 99144z^3 - \frac{729}{4}z^6 + 10935z^5)y^3 \\ & + (-46656z + 11664 + \frac{729}{16}z^8 + \frac{35721}{4}z^4 + 71442z^2 - \frac{56133}{8}z^6 \\ & - 51030z^3 - \frac{729}{8}z^7 + \frac{25515}{2}z^5)y^2 \\ & + (-2916z^2 - \frac{37179}{2}z^4 - \frac{729}{16}z^9 + 11664z^3 + \frac{2187}{4}z^7 \\ & - \frac{47385}{8}z^6 + \frac{29889}{2}z^5 + \frac{5103}{16}z^8)y \\ & + 2592z - \frac{27}{256}z^{12} - 432 + 10260z^3 - \frac{15093}{8}z^6 + \frac{81}{64}z^{11} \\ & - 6804z^2 - \frac{38799}{4}z^4 - \frac{1485}{32}z^9 + \frac{891}{8}z^7 + 5751z^5 + \frac{9801}{64}z^8, \\ q(z) = & -\frac{27}{256}z^{12} + \frac{81}{64}z^{11} - \frac{729}{64}z^{10} + \frac{135}{2}z^9 - \frac{2511}{8}z^8 + \frac{4455}{4}z^7 \\ & - \frac{12285}{4}z^6 + 6480z^5, \\ p(z) = & -\frac{27}{256}z^{12} + \frac{81}{64}z^{11} - \frac{1485}{32}z^9 + \frac{9801}{64}z^8 + \frac{891}{64}z^7 + \frac{15093}{8}z^6 \\ & + 5751z^5 - \frac{38799}{4}z^4 + 10260z^3 - 6804z^2 + 2592z - 432. \end{aligned}$$

Die Polynome p und q definieren eine nicht-konstante rationale Abbildung

$$\frac{q(z)}{p(z)} : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Da alle Koeffizienten aus \mathbb{Q} sind, verzweigt $\frac{q}{p}$ nur über algebraischen Punkten. Der Belyi-Algorithmus liefert eine Funktion $\beta_2 : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, so dass $\beta_2 \circ \frac{q}{p}$ nur über $\{0, 1, \infty\}$ verzweigt

und $\beta_2(0) = \beta_2(1) = 0$.

Sei $D := \{(y, z) \in \mathbb{C}^2 \mid p(z) = 0\}$. Dann definieren wir auf $\mathbb{C}^2 \setminus D$

$$\beta_3 : \mathbb{C}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \beta_3(y, z) = \left(\beta_2 \left(\frac{\beta_1(y, z)}{p(z)} \right), \beta_2 \left(\frac{q(z)}{p(z)} \right) \right).$$

Proposition 4.1. *Die Abbildung $\beta_3 : \mathbb{P}^2 \setminus (D \cup V(f^h) \cup \beta_3^{-1}(L)) \rightarrow \mathbb{P}^2 \setminus L$ ist eine unverzweigte Überlagerung.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $V(f^h)$ auf die affine Diagonale $y - z = 0$ abgebildet wird. Sei $a = (1 : y_0 : z_0) \in \mathbb{P}^2$ mit $f^h(a) = 0$. Dann ist $\beta_1(y_0, z_0) = q(z_0)$, also

$$\beta_3(a) = \left(\beta_2 \left(\frac{q(z_0)}{p(z_0)} \right), \beta_2 \left(\frac{q(z_0)}{p(z_0)} \right) \right).$$

Also liegt $\beta_3(a)$ in L . Als nächstes müssen wir uns überlegen, wo β_3 verzweigt. Dazu sehen wir uns die Determinante der Jacobi-Matrix an:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \beta_2 \left(\frac{\beta_1(y, z)}{p(z)} \right) & * \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \beta_2 \left(\frac{q(z)}{p(z)} \right) \end{vmatrix}$$

Da β_2 in der zweiten Komponente nicht von y abhängt, verschwindet die Determinante genau dann, wenn einer der beiden Diagonaleinträge verschwindet. Der zweite Faktor $\frac{\partial}{\partial z} \beta_2 \left(\frac{q(z)}{p(z)} \right)$ verzweigt nach Definition von β_2 über 0 und 1. Da β_1 ein Polynom in y ist, besteht der Verzweigungsort aus den Geraden $(\mathbb{C}, 0) \cup (\mathbb{C}, 1)$.

Die Abbildung $\beta_1(y, z)$ hat in der Variablen y Grad sechs für alle $z \in \mathbb{C}$ und die Verzweigungspunkte liegen über 0 und $p(z)$. Nach Konstruktion von β_2 besteht der Verzweigungsort bezüglich des ersten Faktors aus den Geraden $(0, \mathbb{C})$.

Die Punkte $\{(y, z) \mid p(z) = 0\}$ werden alle nach unendlich abgebildet, da p und q teilerfremd sind. Schließlich überprüfen wir, ob alle Urbilder von $\mathbb{P}^2 \setminus L$ endlich sind, also in $\mathbb{P}^2 \setminus (D \cup V(f^h) \cup \beta_3^{-1}(L))$ liegen. Geht $z \rightarrow \infty$, so konvergiert $\frac{q(z)}{p(z)}$ gegen 1. Dies gilt bis auf eine Ausnahme auch für $\frac{\beta_1(y, z)}{p(z)}$. Die unendlich ferne Gerade wird mit Ausnahme eines Punktes auf den Punkt $(1 : 0 : 0)$ abgebildet. An der Stelle $(0 : 1 : 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 : cn^2 : n)$ ist β_3 nicht definiert, da $\frac{\beta_1(y, z)}{p(z)}$ die Werte von c abhängige Werte annimmt. Die Werte von β_3 liegen auf der Geraden $(\mathbb{C}, 0)$. Da diese in L liegt, ist β_3 über $\mathbb{P}^2 \setminus L$ eine unverzweigte Überlagerung. \square

Die Komposition $\beta_3 \circ [\beta, \beta]_2$ liefert eine unverzweigte Überlagerung von $\mathcal{M}_{0,5}$. Kompaktifizieren führt jedoch nicht auf das zweifache symmetrische Produkt $\text{Sym}_2 C$ zurück,

sondern auf eine birational äquivalente Fläche. Damit besitzt jede zweidimensionale über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Jacobi-Varietät ein Modell, das \mathbb{P}^2 endlich und über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt überlagert.

Horst Hammer von der TH Karlsruhe verwendet die Konstruktionsmethode für β_3 , um weitere Verzweigungskonfigurationen auf das vollständige Viereck zu reduzieren. Im Rahmen eines Aufenthalts in Frankfurt konnten wir dies gemeinsam auf die hier vorliegende Situation anwenden und Proposition 5.1 beweisen. Seine Dissertation wird die Arbeit von Braungardt [Braun] fortsetzen.

4.1.2 Das Resultat von Braungardt

Ein Kriterium für die Existenz unverzweigter Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$ hat Braungardt [Braun] in seiner Dissertation an der TH Karlsruhe bewiesen.

Satz 4.2. *Sei Y eine nicht-singuläre irreduzible Fläche über $\overline{\mathbb{Q}}$ und $Y \rightarrow C$ ein Morphismus mit zusammenhängenden Fasern auf eine Kurve C über $\overline{\mathbb{Q}}$. Sei $K = K(C)$ der Funktionenkörper der Kurve. Wenn die generische Faser Y_K einen Morphismus $Y_K \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ zulässt, der höchstens über vier K -rationalen Punkten verzweigt, dann gibt es eine Fläche Y' , die birational zu Y ist, \mathbb{P}^2 endlich überlagert und höchstens über dem Rand von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt.*

Die Konstruktion von β_3 aus dem vorherigen Abschnitt läßt sich aus dem Beweis dieses Satzes ableiten. Eine Folgerung ist, dass alle über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Faserbündel und elliptisch gefaserten Flächen ein Modell besitzen, das \mathbb{P}^2 mit dem vorgeschriebenen Verzweigungsverhalten endlich überlagert.

Nach der Klassifikation von algebraischen Flächen ist die Verallgemeinerung des Satzes von Belyi für alle elliptischen, hyperelliptischen und Enriques Flächen, sowie allen abelschen und einigen $K3$ Flächen richtig.

4.2 Zur Klassifikation der Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$

Die Attraktivität des Satzes von Belyi liegt darin, dass er unterschiedliche mathematische Objekte miteinander in Beziehung setzt. Auf einer endlichen Überlagerungen von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ ist eindeutig eine algebraische Struktur gegeben, so dass der Überlagerungsmorphismus algebraisch ist. Lassen wir die absolute Galoisgruppe auf der algebraischen Struktur der Überlagerungsfläche operieren, so induziert das eine Operation auf der Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Es stellt sich die Frage, inwiefern wir diese Zusammenhänge explizit angeben können.

Ausgehend von der Struktur einer unverzweigten Überlagerung würden wir gerne konkrete Aussagen über die geometrische und algebraische Struktur der kompaktifizierten verzweigten Überlagerungsfläche erzielen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die topologische Struktur zu beschreiben. Klassifizierend sind z.B. Darstellungen der Fundamentalgruppe, bzw. die Monodromiegruppen. Dies sind endliche Permutationsgruppen, also eine kombinatorisch einfach zugängliche Struktur. Wir können die Überlagerung auch geometrisch in Form eines Dessins vorgeben. Hier ergeben sich zusätzlich einige Querverbindungen zu elementargeometrischen Fragestellungen, etwa nach Pflasterungen von Flächen mit regelmäßigen Polyedern. Da die analytische und algebraische Struktur der Riemannschen Fläche durch die topologische Überlagerung eindeutig bestimmt ist, stellt sich die Frage, welche Informationen wir explizit ableiten können. Riemannsche Flächen besitzen selbst zwei gute Beschreibungen. Zum einen können wir sie als algebraische Varietät, also als Nullstellenmenge endlich vieler Polynome, vorgeben, zum anderen folgt aus der Uniformisierungstheorie, dass Fuchssche Gruppen zur Beschreibung eingesetzt werden können.

Ein Resultat von Wolfart [W] zeigt, welche Fuchsschen Gruppen bei endlichen, über drei Punkten verzweigten Überlagerungen von \mathbb{P}^1 möglich sind. Damit sind die Fuchsschen Gruppen klassifiziert, die bei der Beschreibung von über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Riemannschen Flächen auftreten. Interessant wird es, wenn wir versuchen, die arithmetische Struktur der Fuchsschen Gruppen aus der Monodromiegruppe abzuleiten.

Im Hinblick auf die algebraische Struktur würden wir gerne Definitionsgleichungen aus der Monodromiegruppe ableiten [St]. Dies ist im allgemeinen jedoch nicht möglich.

Umgekehrt interessieren wir uns dafür, wie die Operation der Galoisgruppe auf den Monodromiegruppen aussieht. Ein immer noch offenes Problem ist, ein vollständiges Invarianzensystem anzugeben.

Im Wechselspiel zwischen den beiden Zugängen stehen Aussagen über den Definitionskörper und Modulkörper der Überlagerungsfläche. Hier sind in einigen speziellen Fällen interessante Ergebnisse bekannt.

In unserer Verallgemeinerung sind solche Fragestellungen noch viel zu schwer. Wir werfen daher nur einen kurzen Blick auf wesentlich eine einfachere Fragen: Wie lassen sich die Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$ kombinatorisch zu beschreiben und welche topologischen Invarianten können wir berechnen? Diese beantworten wir teilweise in den nächsten beiden Abschnitten. Im letzten Abschnitt analysieren wir, wie eine geometrische Beschreibung der Überlagerung aussehen könnte. Dies verstehen wir als Verallgemeinerung der Dessins d'Enfants.

4.2.1 Fundamentalgruppe des Modulraums

Die endlichen verzweigten Überlagerungen von $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ lassen sich topologisch klassifizieren. Da die Kompaktifizierung des Überlagerungsraums eindeutig ist, beschränken wir uns auf die unverzweigten Überlagerungen von $\mathcal{M}_{0,5}$. Hierzu benötigen wir die Fundamentalgruppe des Modulraums $\mathcal{M}_{0,5}$.

Sei L die Geradenkonfiguration aus 6 Geraden in $\mathbb{P}^2 = \{(x : y : z)\}$ gegeben durch

$$L = V(xyz(x-y)(x-z)(y-z)).$$

Die irreduziblen Komponenten von L bezeichnen wir wie folgt:

$$\begin{array}{lll} L(12) : & y = 0 & L(13) : & x = 0 & L(23) : & x = y \\ L(14) : & z = 0 & L(24) : & y = z & L(34) : & x = z. \end{array}$$

Zur Bestimmung der Fundamentalgruppe wählen wir eine Gerade $C \subset \mathbb{P}^2$, die keine singulären Punkt, das sind die Schnittpunkte der irreduziblen Komponenten, der Geradenkonfiguration enthält (siehe Abbildung 4.2.1). Seien q_1, \dots, q_6 die Schnittpunkte von C

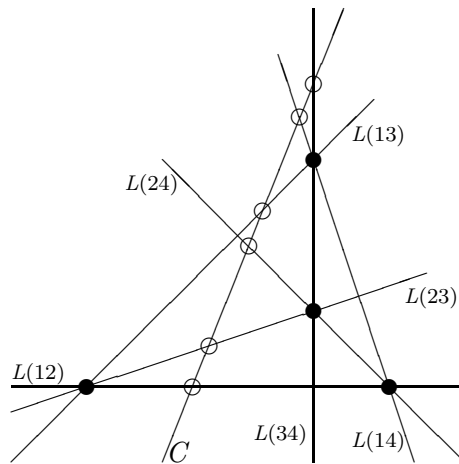


Abbildung 4.2: Schnitt der Geraden C mit der Geradenkonfiguration L

mit den Geraden $L(ij)$, $1 \leq i < j \leq 4$ und $C^0 := C \setminus \{q_1, \dots, q_6\}$. Es gilt [BHH]:

Satz 4.3. Sei q ein Punkt in C^0 . Dann induziert die Inklusion $C^0 \rightarrow \mathcal{M}_{0,5}$ einen Epimorphismus

$$\pi_1(C^0, q) \rightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{0,5}, q),$$

der einen Isomorphismus auf der Ebene der Homologiegruppen induziert.

Die Bilder der Erzeugenden der Fundamentalgruppe von C^0 erzeugen also die Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}_{0,5}$. Es seien $\rho(ij)$ Repräsentanten von Wegen um die Geraden $L(ij) \subset L$. Es gilt die Relation $\rho(12)\rho(13)\rho(23)\rho(14)\rho(24)\rho(34) = 1$ aus der Fundamentalgruppe von C^0 .

Satz 4.4. *Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus L)$ wird erzeugt von $\rho(ij)$, $i < j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ und die definierenden Relationen sind*

$$\rho(12)\rho(13)\rho(23)\rho(14)\rho(24)\rho(34) = 1 \quad (4.1)$$

$$\rho(12)\rho(13)\rho(23) = \rho(13)\rho(23)\rho(12) = \rho(23)\rho(12)\rho(13) \quad (4.2)$$

$$\rho(12)\rho(14)\rho(24) = \rho(14)\rho(24)\rho(12) = \rho(24)\rho(12)\rho(14) \quad (4.3)$$

$$\rho(13)\rho(14)\rho(34) = \rho(14)\rho(34)\rho(13) = \rho(34)\rho(13)\rho(14) \quad (4.4)$$

$$\rho(23)\rho(24)\rho(34) = \rho(24)\rho(34)\rho(23) = \rho(34)\rho(23)\rho(24). \quad (4.5)$$

Die zusätzlichen Relationen werden z.B. in Sekiguchi [Sek] explizit hergeleitet. Die Produkte in der zweiten bis vierten Zeile der Relationen repräsentieren Wege um die singulären Punkten der Geradenkonfiguration. Hier treffen sich jeweils die drei assoziierten Geraden:

$$L(04) = \{(0 : 0 : 1)\} \leftrightarrow \rho(12)\rho(13)\rho(23)$$

$$L(03) = \{(1 : 0 : 0)\} \leftrightarrow \rho(12)\rho(14)\rho(24)$$

$$L(02) = \{(0 : 1 : 0)\} \leftrightarrow \rho(13)\rho(14)\rho(34)$$

$$L(01) = \{(1 : 1 : 1)\} \leftrightarrow \rho(23)\rho(24)\rho(34).$$

4.2.2 Topologische Invarianten von Überlagerungen

Zu jeder endlichen transitiven Permutationsdarstellung von $\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})$ gibt es eine endliche verzweigte Überlagerung von $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$. Nun möchten wir gerne etwas mehr über die verzweigten Überlagerungen erfahren. Zumindest über die Chernzahlen der Überlagerungsfläche können wir einige Aussagen machen, sofern wir uns auf glatte Überlagerungen beschränken. Dies ist als eine Art Verallgemeinerung der Hurwitz-Formel zu verstehen. In diesem Fall gelten einige Restriktionen für die Ordnungen von Wegen um die singulären Punkten der Konfiguration. Zur Beschreibung eignet sich die Sprache der Orbifolds am besten, siehe [U].

Sei M eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit, $G \subset \text{Aut}(M)$ eine eigentlich diskontinuierlich wirkende Untergruppe und $X := M/G$. Die Projektion $\varphi : M \rightarrow X$ ist

eine verzweigte Galois-Überlagerung. Wir erhalten eine Abbildung $\beta_\varphi : X \rightarrow \mathbb{N}$, die jedem Punkt p die Ordnung der Isotropiegruppe G_q eines Urbilds $q \in \varphi^{-1}(p)$ zuordnet. Ist $|G| < \infty$, so sagen wir, das Paar (X, β_φ) werde durch die Abbildung $\varphi : M \rightarrow (X, \beta_\varphi)$ endlich *uniformisiert*. Ein *Orbifold* ist ein Paar (X, β) bestehend aus einem irreduziblen normalen analytischen Raum X mit einer Funktion $\beta : X \rightarrow \mathbb{N}$, so dass (X, β) lokal endlich uniformisierbar ist.

Sei (X, β) ein Orbifold und $B_\beta := \text{supp}(\beta - 1)$ die Teilmenge der Punkte in X , an denen β größer eins ist. Diese zerlegt sich in irreduzible Komponenten B_1, \dots, B_n . Die Menge der Schnittpunkte der B_i bezeichnen wir als singuläre Punkte $\text{Sing}(B_\beta)$ von B_β . Die Abbildung β ist konstant auf $B_i \setminus \text{Sing}(B_\beta)$ und sei b_i diese Konstante. Wir nennen b_i das *Gewicht* der Komponent B_i .

Ein Orbifold (X, β) heißt *glatt*, falls es eine nichtsinguläre Uniformisierung gibt. In diesem Fall bestimmen die b_i die Abbildung β bereits eindeutig. Die beiden für uns interessanten Fälle sind:

1. Ist $p = B_i \cap B_j$ der transversale (d.h. die Tangenten sind disjunkt) Schnitt von zwei glatten Komponenten, dann ist $\beta(p) = b_i b_j$.
2. Ist $p = B_i \cap B_j \cap B_k$ der transversale Schnitt von drei glatten Komponenten, dann ist $\beta(p) = 4 \left(b_i^{-1} + b_j^{-1} + b_k^{-1} - 1 \right)^{-2}$.

Es reicht aus, die Gewichte b_i auf den irreduziblen Komponenten zu kennen. Sei (\mathbb{P}^2, B) ein Orbifold und $B = b_1 B_1 + \dots + b_n B_n$, wobei die B_i irreduzible Kurven vom Grad d_i sind.

Definition 4.5. Die Orbifold Chern-Zahlen von (\mathbb{P}^2, B) sind definiert als

$$c_1^2(\mathbb{P}^2, B) := \left[-3 + \sum_{1 \leq i \leq n} d_i (1 - b_i^{-1}) \right]^2$$

$$e(\mathbb{P}^2, B) := 3 - \sum_{1 \leq i \leq n} (1 - b_i^{-1}) e(B_i \setminus \text{Sing}(B)) - \sum_{p \in \text{Sing}(B)} (1 - \beta(p))^{-1}.$$

Diese topologischen Invarianten sind rationale Zahlen. Gibt es eine glatte Überlagerung $f : \bar{Y} \rightarrow \mathbb{P}^2$ vom Grad N , so hat \bar{Y} die Chern-Zahlen:

$$e(\bar{Y}) = N \cdot e(\mathbb{P}^2, B) \quad \text{und} \quad c_1^2(\bar{Y}) = N \cdot c_1^2(\mathbb{P}^2, B).$$

Hier ist e die Eulerzahl und c_1^2 die Selbstschnittzahl eines kanonischen Divisors auf \bar{Y} . Beide Invarianten sind ganze Zahlen. Mehr dazu findet man in z.B. in [BHH] oder [U].

Wir kehren nun zu den Überlagerungen von $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ zurück. Betrachten wir Orbifolds (\mathbb{P}^2, B_L) mit Verzweigungsdivisor $B_L = \sum_{0 < i < j < 4} b_{ij} L(ij)$, dessen Komponenten alle Grad $d_{ij} = 1$ haben. Auf jeder Geraden $L(ij)$ liegen 3 singuläre Punkte, damit ist die Eulerzahl $e(L(ij) \setminus \text{Sing}(B_L)) = -1$. Die Verzweigungsordnungen an den singulären Punkten berechnen wir nach den Formeln über die lokale Uniformisierbarkeit. Es gibt drei Doppelpunkte und wir setzen:

$$\begin{aligned} D_L &= \sum_{p \in \text{Doppelpunkte}} (1 - \beta(p))^{-1} \\ &= (1 - b_{13}b_{24})^{-1} + (1 - b_{23}b_{14})^{-1} + (1 - b_{12}b_{34})^{-1}. \end{aligned}$$

Dazu kommen die vier Punkte, in denen sich jeweils drei Geraden schneiden:

$$\begin{aligned} T_L &= \frac{1}{1 - 4 \left(\frac{1}{b_{12}} + \frac{1}{b_{13}} + \frac{1}{b_{23}} - 1 \right)^{-2}} + \frac{1}{1 - 4 \left(\frac{1}{b_{12}} + \frac{1}{b_{14}} + \frac{1}{b_{24}} - 1 \right)^{-2}} \\ &+ \frac{1}{1 - 4 \left(\frac{1}{b_{13}} + \frac{1}{b_{14}} + \frac{1}{b_{34}} - 1 \right)^{-2}} + \frac{1}{1 - 4 \left(\frac{1}{b_{23}} + \frac{1}{b_{14}} + \frac{1}{b_{34}} - 1 \right)^{-2}}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Orbifold Chern-Zahlen

$$\begin{aligned} c_1^2(\mathbb{P}^2, B_L) &:= \left[-3 + \sum_{0 < i < j < 4} (1 - b_{ij}^{-1}) \right]^2, \\ e(\mathbb{P}^2, B_L) &:= 3 + \sum_{0 < i < j < 4} (1 - b_{ij}^{-1}) - D_L - T_L. \end{aligned}$$

4.2.3 Dessin d'Enfants

Aus dem Satz von Belyi leitet sich die Theorie der Dessins d'Enfants ab. In ihr wird die Struktur der topologischen Überlagerung in Form eines Graphen auf der Überlagerungsfläche kodiert. Gegeben eine Belyi-Funktion β auf einer Riemannschen Fläche Y , so zeichnet man auf Y das Urbild des Intervalls $[0, 1]$. Die Urbilder von 0 werden durch weiße Punkte, die Urbilder von 1 durch schwarze Punkte dargestellt. Dadurch entsteht ein zusammenhängender bipartiter Graph auf Y . Dieser hat die Eigenschaft, Y in einfach zusammenhängende Zellen zu zerlegen. In jeder Zelle liegt ein Urbild von ∞ . An dem Graphen können wir die Monodromiegruppe der Überlagerung und ihre Erzeuger ablesen. Jede Seite $\beta^{-1}((0, 1))$ repräsentiert einen Zweig der Überlagerung. Nummeriert man die Seiten des Graphen, so erhalten wir die Erzeuger σ_0 und σ_1 der Monodromiegruppe als Produkt der Permutationszykeln der an die weißen resp. schwarzen Punkte grenzenden Seiten gegen den Uhrzeigersinn (siehe z.B. [W1]). Dies ist eine Dualisierung dessen, was

wir im Folgenden beschreiben.

Wir erklären nun, wie wir die Monodromiegruppe einer Überlagerung von $\overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ graphisch veranschaulichen. Sei $f : \overline{Y} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{0,5}}$ eine verzweigte Überlagerung vom Grad N . Es gibt stets einen Gruppenhomomorphismus von der Fundamentalgruppe des Basisraums in die Monodromiegruppe der Überlagerung. Dieser ist durch die die Bilder der Erzeuger der Fundamentalgruppe bestimmt. Aus Abschnitt 4.2.1 wissen wir, dass die Erzeuger der Fundamentalgruppe von C^0 , das ist die Gerade durch die Geradenkonfiguration ohne Schnittpunkte, auch die Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}_{0,5}$ erzeugen. Wir schränken uns im weiteren daher auf die Überlagerung der Geraden C aus Abschnitt 4.2.1 ein. Das Urbild D von C ist eine Kurve in \overline{Y} , die C über 6 Punkten verzweigt überlagert. Nach der Hurwitz-Formel ist das Geschlecht $g(D) = -N + 1 + R/2$, wobei $R = \sum_{p \in D} (\text{ord}(p) - 1)$ und $\text{ord}(p)$ die Verzweigungsordnung von f in p ist. Ist f eine Galois-Überlagerung, so ist mit den Bezeichnungen aus dem letzten Abschnitt

$$g(D) = -N + 1 + \frac{1}{2} \sum_{0 < i < j < 4} (b_{ij} - 1).$$

Sei q in $C^0 = C \setminus \{q_1, \dots, q_6\}$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(C^0, q)$ besitzt ein Erzeugersystem $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle$, das durch einfache Wege um die Punkte q_1, \dots, q_6 repräsentiert wird. Wir können nun die Repräsentanten γ_i der Wege nach D anheben. Diese verbinden je

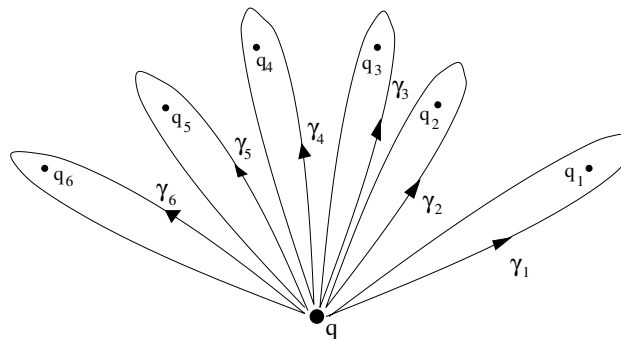


Abbildung 4.3: Erzeuger der Fundamentalgruppe

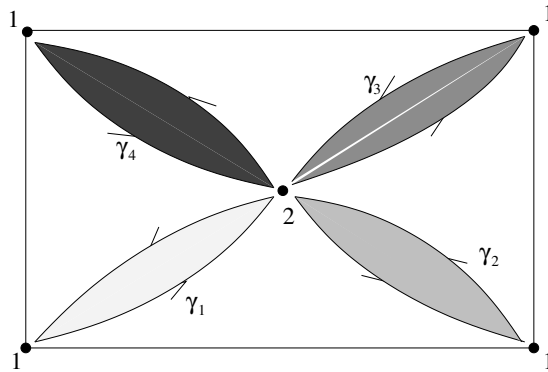
zwei Urbilder $f^{-1}(q)$, wobei auch geschlossene Wege möglich sind. Die Urbilder $f^{-1}(q)$ nummerieren wir nun beliebig durch. Folgen wir der Anhebung eines Pfades γ_i , so erhalten wir Zykel σ_i der Urbilder von q . Diese σ_i erzeugen eine Permutationsdarstellung der Monodromiegruppe.

Da wir von einer Überlagerung von $\mathcal{M}_{0,5}$ ausgehen, erfüllen sie alle Relationen der Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}_{0,5}$. Graphisch können wir die Monodromiegruppe der Überlagerung also auf D darstellen, wenn wir für jedes Urbild von q einen Punkt einzeichnen, die Punkte nummerieren, und die Anhebungen der Wege γ_i bestimmen. Es genügt, die Wege γ_1 bis γ_5 zu kennen, da γ_6 durch $\gamma_1 \cdot \dots \cdot \gamma_6 = 1$ festgelegt ist. Wir erhalten wie bei den Dessins eine Zerlegung von D in einfach zusammenhängende Zellen. Zur besseren Übersicht färben wir die Zellen noch unterschiedlich ein. Wir illustrieren das anhand von drei Beispielen:

- Das einfachste Beispiel ist eine zweifache Überlagerung mit Monodromiegruppe

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = (1, 2), & \sigma_2 = (1, 2), & \sigma_3 = (1, 2), \\ \sigma_4 = (1, 2), & \sigma_5 = (1), & \sigma_6 = (1). \end{array}$$

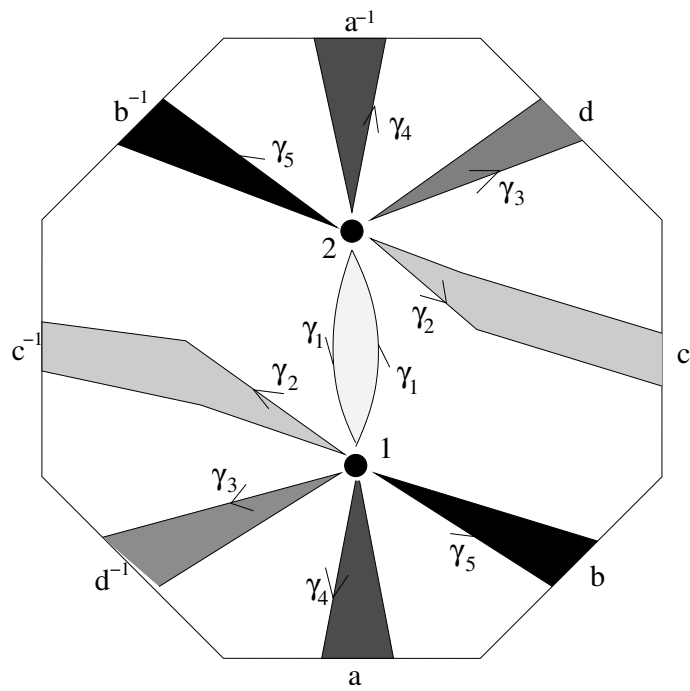
Die Erzeuger erfüllen alle Relationen der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathcal{M}_{0,5})$ und die Riemannsche Fläche D hat Geschlecht $g = 1$.

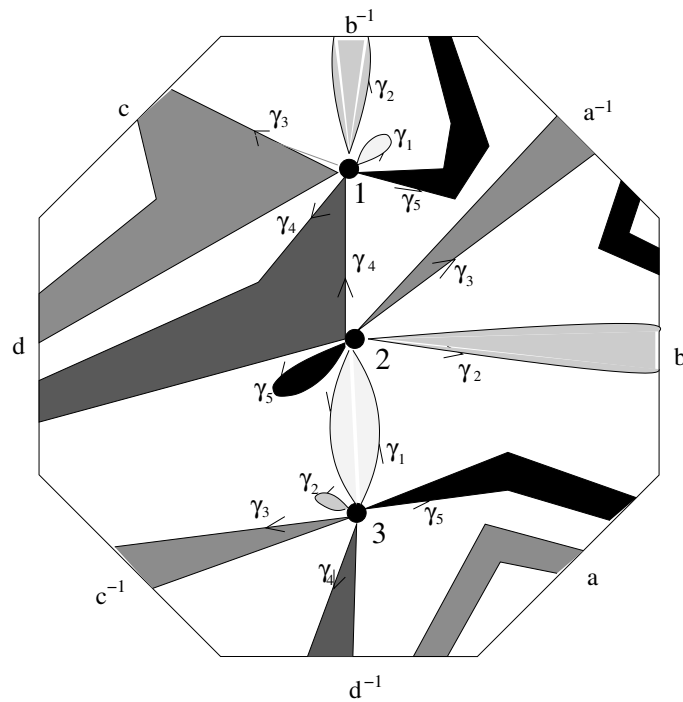


- Etwas komplizierter ist die zweifache Überlagerung, die an allen sechs möglichen Verzweigungspunkten verzweigt:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = (1, 2), & \sigma_2 = (1, 2), & \sigma_3 = (1, 2), \\ \sigma_4 = (1, 2), & \sigma_5 = (1, 2), & \sigma_6 = (1, 2). \end{array}$$

Das Geschlecht von D ist zwei.





- Als letztes Beispiel betrachten wir die Monodromiegruppe erzeugt durch Permutationen

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = (2, 3), & \sigma_2 = (1, 2), & \sigma_3 = (1, 3, 2), \\ \sigma_4 = (1, 3, 2), & \sigma_5 = (1, 3, 2), & \sigma_6 = (2, 3). \end{array}$$

Das Geschlecht von D ist $g = 2$.

Wie im eindimensionalen können wir hier die Sichtweise auch umkehren. Gegeben sei eine solche Zerlegung einer Riemannschen Fläche in einfach zusammenhängende Gebiete. Wir können wie bei den Dessins die Darstellung der Fundamentalgruppe direkt daraus ablesen. Es gibt dazu genau dann eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte algebraische Fläche \overline{Y} , die $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ überlagert, falls die Monodromiegruppe zusätzlich alle Relationen der Fundamentalgruppe von $\mathcal{M}_{0,5}$ erfüllt.

Wir wollen noch erklären, warum diese Beschreibung zur Konstruktion der Dessins dual ist. Im eindimensionalen wären nur zwei Wege, die Anhebung der Pfade um 0 und 1 einzuzichnen. Wir erhalten dann die sogenannte *Cori*-Darstellung eines Hypermaps. Ersetzen

wir die Urbilder von $q = \frac{1}{2}$ durch Wege, die sich in einem weißen (resp. schwarzen) Punkt schneiden, falls sie durch einen Lift des Pfads um 0 (resp. 1) verbunden sind, so erhalten wir ein Dessin d'Enfants.

Literaturverzeichnis

- [BPV] Barth, Peter, Van de Ven, *Complex Surfaces*, Springer, Heidelberg (1984).
- [BHH] Barthel, Hirzebruch, Höfer, *Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen*, Vieweg, Braunschweig (1987).
- [B] G.V. Belyi, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, (Russisch) *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **43**, (1979), 267-276
- [Braun] V. Braungardt, Überlagerungen von Modulräumen für Kurven, *Dissertation*, Universität Karlsruhe (2001).
- [Brod] M. Brodmann, *Algebraische Geometrie*, Birkhäuser, Basel (1989).
- [D] G. Derome, Descente algébriquement close, *J. Algebra*, **266**, (2003), 418-426.
- [EGA] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer, Berlin (1971).
- [Grau] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, *Math. Ann.* **146**, (1962), 331-368.
- [GA] P. Griffith, J. Adams, *Topics in Algebraic and Analytic Geometry*, Princeton University Press, Princeton (1974).
- [GH] P. Griffith, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York (1978).
- [G] A. Grothendieck, Esquisse d'un Programme, in *Geometric Galois Actions 1*, 5-48, *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.* **242**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

- [HS] D. Harbater, L. Schneps, Fundamental Groups of Moduli and the Grothendieck-Teichmüller Group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **352**, (2000), 3117-3148.
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York (1977).
- [JSt] G. Jones, M. Streit, Galois groups, monodromy groups and cartographic groups, in *Geometric Galois actions, 2*, 25-65, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **243**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
- [K] B. Köck, Belyi's Theorem Revisited, *Preprint*, erscheint in *Beiträge zur Algebra und Geometrie*.
- [Mum] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer, Berlin (1988).
- [Mur] J.P. Murre, *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).
- [Sek] J. Sekiguchi, The birational action of \mathfrak{S}_5 on $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ and the icosahedron, *J. Math. Soc. Japan*, **44**, (1992), 567- 589 .
- [Shafa] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer, Berlin, (1977).
- [SGA1] A. Grothendieck, *Revetements Etales et Groupe Fondamental*, Lecture Notes in Math. **224**, Springer, Berlin, (1971).
- [St] M. Streit, Homology, Belyi functions and canonical curves, *Manuscripta Math.*, **90**, (1996), no. 4, 489–509.
- [Ueno] R. Ueno, Which properties of coverings of the Riemann sphere minus three points can be found also in higher dimensional cases?, *Journal of Economics and Management*, **42**, No.2, Bulletin of Faculty of Commerce, Nagoya University of Commerce and Business Administration (1988), 177-199.
- [U] A.M. Uludağ, Covering relations between Ball-quotient orbifolds, *Preprint*, **arXiv: math.AG/0304412**.
- [Wav] J. Wavrik, Deformations of banach coverings of complex manifolds, *Amer. J. Math.* **90**, (1968), 926-960.
- [W] J. Wolfart, The obvious part of Belyi's theorem and Riemann surfaces with many automorphisms', in 'Geometric Galois Actions 1, 97-112, *London Math. Soc. Lecture Notes Ser.* **242**, Cambridge University Press, Cambridge (1997).

- [W1] J. Wolfart, Kinderzeichnungen und Uniformisierungstheorie, *Preprint*, <http://www.math.uni-frankfurt.de/~wolfart>.

Lebenslauf

von **Andreas Weng**, geb. Hoffmann, geboren am 11.4.1974 in Frankfurt am Main als Sohn von Georg Hoffmann und Gertrude Hoffmann, geb. Hörr. Seit Dezember 2002 verheiratet mit Dr. Annegret Weng.

- 1980 - 1984 Besuch der Grundschule in Schwalbach am Taunus
- 1984 - 1990 Besuch des Leibniz-Gymnasiums in Frankfurt-Höchst
- 1990 - 1993 Besuch der Albert Einstein-Schule in Schwalbach
- Juni 1993 Erwerb der allgemeinen Hochschulreife (Abitur)
- 1993 - 1994 Wehrdienst in Diez und Koblenz
- 1994 Beginn des Studiums der Physik
 zum Wintersemester 1994/95 in Frankfurt
- 1995 Doppelstudium Mathematik und Physik im SoSe 1995,
 Doppelstudium Mathematik und Psychologie ab dem WiSe 1995/96
- Juni 1996 Vordiplom in Mathematik
- Februar 1998 Vordiplom in Psychologie
- August 2000 Diplomprüfung im Studiengang Mathematik mit Nebenfach Physik,
 Diplomarbeit: *Vertex Algebren und ihre Anwendungen in der Physik*
 unter der Betreuung von Prof. Dr. Florin Constantinescu
- 2000 ab Oktober Stipendiat des Graduiertenkollegs
 „Analytische Topologie und Metageometrie“
 an der Universität Münster
- April 2001 Beginn einer Dissertation unter der Betreuung von
 Prof. Dr. J. Wolfart an der Goethe-Universität in Frankfurt
- 2001 -2002 ab April 2001: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am
 Fachbereich Mathematik der Universität Marburg
- seit April 2002 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachbereich Mathematik
 der Universität Frankfurt
- 2003 Juli-August: Forschungsaufenthalt in Chiba, Japan
 Oktober: dreiwöchiger Forschungsaufenthalt in Vilnius, Litauen

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren:

F. Constantinescu, R. Dreizler, W. Metzler, H. Shiga, W. Schwarz, J. Weidmann,
J. Wolfart