

Stochastische Subgitterskalen-Parametrisierung der
Flachwasserdynamik mittels stochastischer Modenreduktion

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Geowissenschaften / Geographie
der Johann Wolfgang Goethe - Universität
in Frankfurt am Main

von
Matthias Zacharuk
aus Frankfurt am Main

Frankfurt 2019

D 30

vom Fachbereich Geowissenschaften / Geographie der
Johann Wolfgang Goethe - Universität als Dissertation angenommen.

Dekan: Prof. Dr. Georg Rümpker

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Achatz
Institut für Atmosphäre und Umwelt
Johann Wolfgang Goethe - Universität Frankfurt am Main

PD Dr. Christian Franzke
Meteorologisches Institut
Universität Hamburg

Prof. Dr. Bodo Ahrens
Institut für Atmosphäre und Umwelt
Johann Wolfgang Goethe - Universität Frankfurt am Main

Prof. Dr. Jürg Schmidli
Institut für Atmosphäre und Umwelt
Johann Wolfgang Goethe - Universität Frankfurt am Main

Datum der Disputation: 11.11.2019

Zusammenfassung

In dieser Dissertation wird die Parametrisierung von *subgitterskaligen* (SGS) Prozessen in Atmosphärenmodellen untersucht. Die Arbeit befasst sich mit den stochastisch angetriebenen Flachwassergleichungen, im ersten Teil in einer räumlichen Dimension und im zweiten Teil in zwei Dimensionen. Die Einteilung in aufgelöste und SGS-Variable erfolgt in beiden Fällen über lokale räumliche Mittel der Ursprungsvariable und deren Abweichungen vom lokalen Mittel.

Im eindimensionalen Fall liegt zwischen den Variablen eine deutliche Separation der charakteristischen Zeitskalen vor, wodurch die Anwendung der *stochastischen Moden Reduktion* (SMR) ermöglicht wird. Die SMR generiert ein reduziertes Modell der aufgelösten Variable mit einer stochastischen SGS-Parametrisierung, im Folgenden auch Schließung genannt. Die SMR-Schließung basiert auf den Grundgleichungen des Flachwassermodells und ist numerisch effizient einsetzbar, da sie nur eine geringe Anzahl von benachbarten Zellen koppelt. Sie verbessert die Ergebnisse des reduzierten Modells und übertrifft die Ergebnisse zweier zum Vergleich untersuchter empirischer stochastischer Schließungen. Den größten Zugewinn liefert sie im Energiespektrum, insbesondere für kleine Skalen. Das Ergebnis der SMR-Schließung kann verbessert werden, indem die Amplitude der stochastischen Schließungskomponente gedämpft wird. Die SMR-Schließung ist skalenabhängig im Sinne der räumlichen Modellauflösung. Untersucht wird die Schließung bei Halbierung und Viertelung der räumlichen Auflösung, wo sie ihre Überlegenheit gegenüber den empirischen Schließungen wiederholt bestätigt.

Im Unterschied zum eindimensionalen Fall ist in zwei Dimensionen auch die Corioliskraft enthalten und eine räumliche Divergenz der Schwerewellen möglich. Zwischen der aufgelösten und der SGS-Variable kommt es erneut zu einer Separation der charakteristischen Zeitskalen. Die Separation ist allerdings weniger stark ausgeprägt als im eindimensionalen Fall. Grund hierfür ist das Auftreten einer lang korrelierten geostrophisch balancierten Mode, welche auch auf die SGS-Variable projiziert. Das Vorgehen zur Bestimmung der SMR-Schließung für das zweidimensionale Modell verläuft analog zum eindimensionalen Fall. Es werden die Ergebnisse des hoch aufgelösten Referenzmodells und zweier Modelle ohne SGS-Schließung verglichen.

Haftungsausschluss

Die Dissertation basiert bei der Einführung der SMR und der Darstellung des eindimensionalen Flachwassermodells in weiten Teilen auf Zacharuk et al. (2018). Um die Lesbarkeit der Dissertation zu erleichtern ist nicht jedes Zitat von Zacharuk et al. (2018) getrennt hervorgehoben. Bilder, Tabellen und in Teilen Formeln sind Zacharuk et al. (2018) direkt entnommen. Sinngemäß sind einzelne Textstellen dem Englischen aus Zacharuk et al. (2018) entnommen.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Stochastische Modenreduktion	11
1.1 Zeitskalenseparation	13
1.2 Zugehörige Fokker-Planck Gleichung	14
1.3 Asymptotische Entwicklung nach ϵ	15
1.4 Explizite Form der effektiven Fokker-Planck Gleichung	17
1.5 SGS-Parametrisierung für allgemeine Funktionen	19
1.6 SGS-Parametrisierung für beliebige Polynome	20
1.7 SGS-Parametrisierung für quadratische Polynome	24

Teil I Eindimensionales Flachwassermodell

2 Flachwassermodell	29
2.1 Eindimensionale Flachwassergleichungen	29
2.2 Flachwassergleichungen in Flussform	31
2.3 Diskretisierung mittels finiter-Differenzen	31
2.4 Lokale Mittelung	32
2.5 Quadratische Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$	36
2.6 Empirischer Ornstein-Uhlenbeck Prozess der SGS-Kopplung	37
2.6.1 Fouriertransformation der SGS-Variable	38
2.6.2 Ersetzung der SGS-Kopplung	38
2.6.3 Transformation in den Ornstein-Uhlenbeck- Eigenwertraum	39

2.7	Stochastische Modenreduktion, Schließung im eindimensionalen Flachwassermodell	42
2.7.1	Lösbarkeitsbedingung	42
2.7.2	Lokalität	43
2.7.3	Konstanter Term $K_i = L_{mj}^{xy} B_{imk}^{xy} (C_S)_{jk}$	43
2.7.4	Räumliche Skalenadaptivität der Schließung	44
3	Modellbeschreibung	47
3.1	Setup	47
3.1.1	Parameter	47
3.1.2	Stochastischer Antriebsterm	48
3.1.3	Schwerewellenzyklus	48
3.2	Modelle	49
3.2.1	Hoch aufgelöste Simulationen	49
3.2.2	Niedrig aufgelöste Simulationen	51
3.3	Erhaltungseigenschaften	52
4	Ergebnisse	55
4.1	Hoch aufgelöste Simulationen	55
4.2	Niedrig aufgelöste Simulationen ohne SGS-Parametrisierung	60
4.3	Niedrig aufgelöste Simulationen mit SGS-Parametrisierung	61
4.4	Skalenabhängigkeit der Schließung	64

Teil II Zweidimensionales Flachwassermodell

5	Methodenteil	69
5.1	Flachwassergleichungen in zwei Dimensionen	69
5.2	Diskretisierung mittels finiter-Differenzen	70
5.3	Lokale Mittelung	71
5.4	Wechselwirkungsterme durch Projektion	72
5.5	Stochastische Modenreduktion, Schließung im zweidimensionalen Flachwassermodell	74

6	Modellbeschreibung	77
6.1	Setup	77
6.1.1	Parameter	77
6.1.2	Stochastischer Antriebsterm	78
6.1.3	Schwerewellengeschwindigkeit	78
6.2	Modelle	79
6.2.1	Hoch aufgelöste Simulation	79
6.2.2	Niedrig aufgelöste Simulationen	79
6.3	Erhaltungseigenschaften	79
7	Ergebnisse	81
7.1	DNS des Flachwassermodells	81
7.2	Niedrig aufgelöste Simulationen ohne SGS-Parametrisierung	87
	Schlussfolgerung & Ausblick	91

Teil III Anhang

A	Heuristische Formulierung der Zeitskalenseparation	99
B	Projektionsoperator P und Pseudoinverse L_1^{-1}	103
C	Ornstein-Uhlenbeck Prozess	111
C.1	Bestimmung der empirischen OU-Schließung	111
C.1.1	Maximum Likelihood Methode	111
C.1.2	Bestimmung aus integrierter Autokorrelation	113
C.1.3	Schließungskorrektur	115
C.2	Statistische Eigenschaften des OU-Prozesses	116
D	Wechselwirkungsterme des eindimensionalen Modells	119
E	Alternative Methoden der SGS-Parametrisierung	123
E.1	Vollständig empirische Methode	123
E.2	Averaging Methode: $\mathcal{O}(\mathbf{c}^y) = \epsilon^{-1}$	124

E.3	Averaging Methode: $\mathcal{O}(\mathbf{b}^y + \mathbf{c}^y) = \epsilon^{-1}$	125
F	Adaptives Zeitintegrationsverfahren	127
G	Ergebnisse des zweidimensionalen Modells ohne Rotation	129
H	Aufspaltung in geostrophische und ageostrophische Moden	135
	Literatur	139
	Curriculum Vitae	149

Einleitung

Atmosphärische Prozesse umfassen ein weites Spektrum an räumlichen und zeitlichen Skalen. Diese reichen von wenigen Millimetern und Sekunden, bei Turbulenzphänomenen in der Grenzschicht, bis zu 10^7 Metern und mehreren Wochen, bei planetaren Wellen. Bei letztgenannten können sogar noch weitaus längere zeitliche Skalen beteiligt sein. Aufgrund der begrenzten Rechenleistung, der für Wettersimulationen eingesetzten Großrechner, ist es unmöglich all diese Prozesse zeitgleich zu simulieren, wodurch ein Teil der Prozesse aufgelöst bleibt. Durch die wechselseitigen Einflüsse aller Prozesse aufeinander, bedingt das Fehlen der nicht aufgelösten Prozesse, im Folgenden *Subgitterskalen-* (SGS) Prozesse genannt, zwangsläufig einen Simulationsfehler in den aufgelösten Skalen. Die Minimierung dieses Fehlers wird erreicht, indem eine Parametrisierung des Einflusses der SGS-Prozesse auf die aufgelösten Prozesse eingeführt wird. Der Einfluss der SGS-Prozesse ist mitunter hoch kompliziert, was die Parametrisierung zu einer anspruchsvollen Aufgabe macht. Nachfolgend wird die SGS-Parametrisierung auch *Schließung* genannt. Dieser Begriff kommt aus der Betrachtung der verwendeten Grundgleichungen. Durch die Einführung der SGS-Parametrisierung hängen diese Grundgleichungen ausschließlich von der aufgelösten Variable ab und bilden damit ein geschlossenes System.

In der Entwicklung effizienter Modelle der Atmosphäre wurden bereits unterschiedliche Ansätze zur Parametrisierung von SGS-Prozessen verwendet. Zum Beispiel wurde in Petoukhov et al. (2000) ein gekoppeltes Atmosphären-Ozean-Seeis-Vegetations Modell mittlerer Komplexität untersucht, wobei für das Atmosphärenmodell ein statistisch dynamischer Ansatz gewählt wurde, bei dem unter anderem SGS-Wellen durch deren Mittel dargestellt werden. In Weaver et al. (2001) wurde ein Atmosphären-Ozean-Seeis-Landeis Modell ebenfalls mittlerer Komplexität

untersucht, bei dem die Atmosphäre durch eine Energie-Feuchtigkeits-Balance simuliert wird und Windanomalien anhand von Oberflächentemperaturanomalien parametrisiert werden. Die Anwendung in den turbulenten Gleichungen der atmosphärischen Grenzschicht wird zum Beispiel in Stull (1988) diskutiert, wobei Parametrisierungen unterschiedlicher Ordnungen von statistischen Momenten der Flussterme zusammengefasst werden. In Pope (2001) wird die SGS-Parametrisierung für allgemein turbulente Flüsse diskutiert, wobei auch das Ausnutzen der zu Grunde liegenden Verteilung vorgestellt wird.

Die Einführung stochastischer Anteile in der Modellierung von SGS-Prozessen in Atmosphärenmodellen bildet eine effiziente Möglichkeit eine fehlende SGS-Variabilität nachzubilden (z.B., Palmer 2001). Hierbei ist von Vorteil, dass sie zum einen systematische Fehler reduzieren können, so kann durch den Energieeintrag der Energieinhalt auf kleinen Skalen angehoben werden, siehe Abschnitt 4, zum anderen wird eine gewisse Unsicherheit der SGS-Parametrisierung dargestellt. Außerdem können durch die SGS-Parametrisierung wichtige Regimeübergänge angestoßen werden. Dieses Verhalten wurde bereits anhand unterschiedlicher Modelle beobachtet, so zum Beispiel bei dem Lorenz '96 Modell (Lorenz 1996) in Christensen et al. (2015), welches oftmals als einfaches Testmodell zur Untersuchung neuer Methoden im meteorologischen Kontext verwendet wird. Aber auch bei komplexeren Modellen tritt das Verhalten auf, beispielsweise im quasi-geostrophischen Annulus (Williams et al. 2010) oder in einem komplexen vom ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) verwendeten Atmosphärenmodell (Berner et al. 2017).

Als Möglichkeit zur Bestimmung einer stochastischen Schließung kann eine vorhandene Parametrisierung stochastisch modifiziert werden. Dies wurde zum Beispiel anhand einer SGS-Tendenzparametrisierung (SPPT = Stochastically Perturbed Parametrization Tendencies Scheme) in einem spektralen Modell von Jarraud et al. (1983) untersucht (Buizza et al. 1999), für das eine Vergrößerung des Ensemblespread und eine verbesserte Niederschlagsvorhersage erreicht wurde. In einer alternativen stochastischen Methode wird die Stromfunktion stochastisch gestört, wobei die Störung vorgegebene spektrale Eigenschaften erfüllt. Damit wird der fehlende Energieinput der SGS-Prozesse dargestellt (SKBS = stochastic kinetic energy backscatter scheme) (Shutts 2005). Durch eine erweiterte Kontrolle des Spektrums

der Störungen, kann der Ansatz weiter verbessert werden, wie in Berner et al. (2009) anhand eines komplexen Modells des ECMWF gezeigt wird. Verglichen wurden beide Ansätze, SPPT und SKBS, in Palmer et al. (2009). Hier zeigt sich, dass beide einen ähnlich positiven Einfluss haben.

Ein stochastischer Prozess ist der *Ornstein-Uhlenbeck* (OU)-Prozess (Uhlenbeck et al. 1930). Er besteht aus einem Wiener Prozess (z.B. Gardiner 2009), der eine Brownsche Bewegung simuliert, und einem linear dämpfenden Driftterm. Empirisch optimierte OU-Prozesse (LIM = linear inverse modeling) wurden bereits in großskaligen, niedrig frequenten Atmosphärenmodellen angewendet (z.B. Winkler et al. 2001; Newman et al. 2003; Pegion et al. 2011). Diese können auch um quadratische Nichtlinearitäten, sowie um einen korrelierten stochastischen Antrieb, anhand multipler polynomialer Regressionen, erweitert werden (siehe Kravtsov et al. 2005; Kondrashov et al. 2005).

Typischerweise wird bei der *ad hoc* Parametrisierung angenommen, dass der SGS-Einfluss auf die aufgelösten Prozesse durch eine spezielle mathematische Funktion darstellbar ist. Die Koeffizienten der Parametrisierung werden dabei empirisch so bestimmt, dass sie ein optimales Ergebnis liefern, wobei als Referenz entweder Beobachtungsdaten verwendet werden oder Ergebnisse einer hoch aufgelösten Simulation. Der Ansatz, die SGS-Parametrisierung an ein Referenzklima anzupassen, stellt allerdings auch ein Problem dar. So kann die ursprünglich erfolgreiche Parametrisierung scheitern, wenn sich das Klima, beispielsweise durch einen äußeren Antrieb, ändert, da die Parameter in diesem Fall nicht mehr der optimalen Wahl entsprechen. Dieses Problem wurde anhand eines lokalen, für den europäischen Raum optimierten, Klimamodells gezeigt, welches in anderen Regionen der Erde deutlich schlechtere Ergebnisse lieferte (Rockel et al. 2008). Auch eine Schwellenparametrisierung zeigte bei ähnlichen Untersuchungen diese Problematik (Schirber et al. 2015). Das *Fluktuations-Dissipations Theorem* (FDT) (Leith 1975; Marconi et al. 2008) bietet eine mögliche Lösung für dieses Problem. Basierend auf statistischer Mechanik liefert das FDT eine lineare Approximation der geänderten Parameter. Im meteorologischen Kontext wurde der Ansatz bereits auf die barotrope Vorticitygleichung mit einer deterministischen Schließung (Achatz et al. 2013) und ein baroklines quasi-geostrophisches Modell mit einer stochastischen Schließung (Pieroth et al. 2018) angewendet. Nachteil des FDT ist, dass die lineare

re Approximation der geänderten Parameter nur für einen hinreichend schwachen Antrieb korrekte Ergebnisse liefert. Zusätzlich dazu muss der Antriebsterm in eine instabile Richtung der Attraktors zeigen (Gritsun et al. 2017).

Ein weiteres Problem der rein empirischen Schließungen ist ihre fehlende Skalenabhängigkeit. So liegt keine Adaptionsregel vor, welche vorgibt wie die Schließung angepasst werden muss, wenn beispielsweise die Modellauflösung variiert wird. Genau diese Adaptionsregel wird allerdings in der Meteorologie benötigt, da die räumliche Auflösung der verwendeten Wettermodelle sukzessive zunimmt und eine Neuberechnung der Parameter bei jeder Auflösungserhöhung umständlich ist.

Motiviert durch diese beiden Probleme, die fehlende Klimasensitivität und die fehlende Skalenabhängigkeit, wurden neue Methoden zur Bestimmung einer SGS-Parametrisierung entwickelt, bei denen die Schließung rigoros aus den zu Grunde liegenden Gleichungen hergeleitet wird. Nach Möglichkeit wird dabei auf den Einsatz empirischer Parameter vollständig verzichtet. Zum Beispiel ermöglicht die direct-interaction approximation (DIA) von Kraichnan (1959) die statistische Herleitung einer dynamischen Turbulenzschließung aus den Grundgleichungen für schwache Abhängigkeiten der Fouriermoden. Die DIA wurde sowohl in barotropen (J. Frederiksen et al. 1997) und primitiven Gleichungen (J. S. Frederiksen et al. 2003) spektraler Modelle erfolgreich angewendet, als auch für einen barotropen Strom über eine Topographie (Frederiksen 1999).

Eine weitere Methode, welche die Herleitung der Schließung aus den Grundgleichungen erlaubt, ist die maximum Entropy Methode. Sie ist anwendbar, wenn die SGS-Variable auf einer deutlich schnelleren Zeitskala variiert, als die aufgelöste Variable. Außerdem wird zur Herleitung angenommen, dass die mittlere Energie der SGS-Variable erhalten bleibt und die Informationsentropie maximiert. Die Schließung wurde erstmals in den in Lorenz (1996) vorgestellten Modellen untersucht (Verkley 2011; Verkley et al. 2014). Die Anwendung auf das Modell eines einfachen geophysikalischen Flusses, beschrieben durch die Vorticitygleichung, erfordert zusätzlich zur Energieerhaltung der SGS-Variable auch die Erhaltung der Enstrophie der SGS-Variable. Die resultierende Schließung ist in der Lage den Einfluss der fehlenden SGS-Prozesse auf die aufgelöste Variable realistisch nachzustellen (Verkley et al. 2016). Der Vorteil der Methode ist, dass auf jedweden empirischen

Anteil verzichtet wird. Allerdings wurde sie bisher nur in relativ simplen Modellen angewendet.

Eine alternative Methode zur Herleitung einer SGS-Parametrisierung, basierend auf der Response-Theorie, wurde in Wouters et al. (2012, 2013) entwickelt. Bei dieser Methode wird angenommen, dass eine schwache Kopplung zwischen der aufgelösten und der nicht aufgelösten Variable existiert. Auf einfache Triadenmodelle wurde sie in Wouters et al. (2016) angewendet, aber auch in einem einfachen Ozean-Atmosphärenmodell zeigt die Schließung gute Resultate (Demaeyer et al. 2017). Eine Skalenabhängigkeit der Schließung, im Rahmen des Lorenz '96 Modells, wurde in Vissio et al. (2018) eingeführt.

Im Falle einer deutlichen Separation, der im System auftretenden relevanten Zeitskalen, kann auch die Averaging Methode (Hasselmann 1976; Imkeller et al. 2001) angewendet werden. Hierbei handelt es sich um ein asymptotisches Verfahren, bei dem der Einfluss der SGS-Variable auf die aufgelöste Variable gemittelt wird, indem das invariante Maß der SGS-Variable verwendet wird. Dazu wird angenommen, dass zwei charakteristische Zeitskalen in dem System existieren, eine langsame der aufgelösten Variable und eine schnelle der SGS-Variable. Die Methode wurde bereits in einfachen (Hasselmann 1976), moderat-komplexen (Arnold et al. 2003), aber auch komplexeren Ozean-Atmosphärenmodellen (Monahan et al. 2011) angewendet.

In dieser Arbeit wird die Methode der *stochastischen Modenreduktion* (SMR) verwendet. Sie wurde in Majda et al. (2001) eingeführt. Es handelt sich um eine Homogenisierungsmethode ähnlich dem Averaging (Papanicolaou 1976) für Multi-Skalensysteme (Khas'minskii 1966a, 1966b). Eine Übersicht der Averaging- und Homogenisierungsmethoden, angewendet auf unterschiedliche Systeme, liefert Pavliotis et al. (2008). Die Methoden basieren auf der Annahme, dass unterschiedliche charakteristische Größenordnungen, welche als Zeitskalen interpretiert werden, in dem System existieren. Im Grenzwert einer unendlichen Zeitskalenseparation wird eine Schließung aus den Kopplungstermen der Variablen hergeleitet. Die SMR unterscheidet sich von der Averaging Methode in einer abweichenden Skalierung der charakteristischen Zeitskalen der verschiedenen Kopplungsterme. In der SMR ist ein empirischer Schritt notwendig für den die Statistik der SGS-Selbstwechselwirkungen benötigt wird. In dieser Dissertation geschieht dies durch

das Ersetzen mittels eines empirischen OU-Prozesses. Im Anschluss wird die Schließung analytisch bestimmt. Die so bestimmte SGS-Schließung besitzt sowohl deterministische, als auch stochastische Anteile.

Erste Untersuchungen der SMR wurden in A. Majda et al. (2002) für Triadenmodelle und die Burgersgleichung unternommen. Hier wurden zusätzlich a-priori Tests des Einflusses der SMR-Schließung durchgeführt, indem eine erweiterte Trennung der Zeitskalen simuliert wurde. Die Anwendung der SMR-Schließung für ein balanciertes barotropes quasi-geostrophisches Modell über Topographie basierend auf der Vorticitygleichung ermöglichte in der Folge eine deutlich realistischere Autokorrelationsfunktion, im Vergleich zum entsprechenden rein linearen Modell (Majda et al. 2003).

Die SMR wurde auch in weiteren balancierten spektralen Modellen der Atmosphäre angewendet, so zum Beispiel in einem barotropen (Franzke et al. 2005), wie auch in einem quasi-geostrophischen (Franzke et al. 2006) Modell. Die Trennung zwischen aufgelösten und nicht aufgelösten Skalen wurde in diesen Arbeiten mittels *empirischer orthogonaler Funktionen* (EOFs; auch PCA genannt) (Preisendorfer et al. 1988) durchgeführt. Eine hinreichende Separation der zu Grunde liegenden Zeitskalen ist mittels EOFs allerdings nicht garantiert (siehe kontinuierlich abfallendes Spektrum der Autokorrelationszeitskala bei steigender EOF, aus Abbildung 3 in Franzke et al. 2006). Das Ziel der beiden Studien war die Freiheitsgradreduktion der Modelle auf möglichst niederdimensionale Systeme. Im barotropen Modell war eine Reduktion von 231 auf nur vier Freiheitsgrade und im quasi-geostrophischen Modell von 1449 auf 10 Freiheitsgrade möglich, bei gleichzeitiger Reproduktion der Referenzstatistik. Durch die Verwendung globaler Basisfunktionen liefert die SMR in der Folge auch eine global koppelnde Schließung. Die Berechnung der Schließung in hochdimensionalen Systemen mit vielen aufgelösten Moden stellt dann allerdings, aufgrund der auftretenden kubischen Terme, einen numerisch signifikanten Aufwand dar.

Dieses Problem kann gelöst werden, indem die Diskretisierung im physikalischen Raum mittels finiter-Volumen (z.B. Durran 2010) stattfindet. Finite-Volumen-Methoden wurden traditionell für Ozeanmodelle eingesetzt (z.B. Haidvogel et al. 1999), aber auch schon bei der regionalen Atmosphärenmodellierung (z.B. Skamarock et al. 2008) und in globalen Atmosphärenmodellen (z.B. Rípodas et al. 2009;

Majewski et al. 2002; Satoh et al. 2008; Zängl et al. 2015). Der Vorteil, verglichen mit der Spektralmethode, liegt in der einfacheren Anwendbarkeit bei komplizierten Randbedingungen im physikalischen Raum, wie z.B. bei der Ozeanmodellierung über kontinentalen Platten oder bei nicht periodischen Randbedingungen in regionalen Atmosphärenmodellen.

Mit der Diskretisierung im physikalischen Raum wurde in Dolaptchiev et al. (2013b) ein lokaler Ansatz zur Definition der SGS-Variable im Rahmen der Burgersgleichung eingeführt. Die aufgelöste Variable wurde als lokal-räumliches Mittel der Ursprungsvariable definiert und die SGS-Variable als deren Abweichung vom lokalen Mittel, was einer typischen Konfiguration in der Turbulenzsimulation entspricht (Pope 2001). In der Konsequenz stellt sich in diesem System, durch die klare Trennung der räumlichen Skalen der beiden Variablen eine ausgeprägte Trennung der charakteristischen zeitlichen Skalen ein, was für andere Systeme allerdings nicht zwangsläufig der Fall sein muss. Durch die Separation der Zeitskalen ist eine Grundvoraussetzung zur Anwendung der SMR erfüllt. Durch das Verwenden des finite-Volumen Verfahrens ist die resultierende, durch die SMR gewonnene, SGS-Parametrisierung lokal und koppelt in der untersuchten nicht-viskosen Burgersgleichung nur nächste Nachbarn. Aufgrund der lokalen Form ist sie numerisch effizient einsetzbar und ermöglicht damit die Anwendung auch bei einer größeren Anzahl aufgelöster Variablen.

Die Burgersgleichung kann allerdings nur als ein stark vereinfachtes Modell der Atmosphäre betrachtet werden, da sie lediglich Advektion und Diffusion modelliert. Komplexe Atmosphärenmodelle beinhalten deutlich mehr physikalische Prozesse. Um die Komplexität des untersuchten Systems zu steigern, wurde die Burgersgleichung in Dolaptchiev et al. (2013a) um einen stochastischen Antriebs- und einen Diffusionsterm erweitert. Die entsprechende SGS-Parametrisierung koppelte nur nächste und übernächste Nachbarn. Auch in diesem Modell zeigte die SMR-Schließung, dass sie, insbesondere bei der Betrachtung des Energiespektrums, die fehlenden SGS-Prozesse modellieren kann.

In dieser Dissertation wird ein weiterer Schritt in der Erhöhung des Komplexitätsgrads des verwendeten Modells hin zu realistischen Atmosphärenmodellen durchgeführt. Dazu wird die SMR im Rahmen eines Modells der Flachwasserdynamik verwendet. Zuerst wird die SMR für die Flachwassergleichungen unter der

Vereinfachung von nur einer räumlichen Dimension ohne Rotation (1DSW = *1-dimensional shallow water model*) verwendet. Anschließend wird das zweidimensionale Modell mit Rotation (2DSW = *2-dimensional shallow water model*) vorgestellt, wobei dieser Schritt zum Zeitpunkt der Abgabe dieser Arbeit noch nicht abgeschlossen ist. Im Unterschied zur Burgersgleichung kommen bei den Flachwassergleichungen mindestens zwei Herausforderungen hinzu. Zum einen beinhalten sie Schwerewellen (gegebenenfalls auch Rotation im 2DSW), zum anderen nicht-polynomiale Nichtlinearitäten aufgrund der Flussformulierung.

Bisher wurde die SMR nur auf Modelle mit höchstens quadratischen Nichtlinearitäten angewendet. Ob dies auch für die Flachwassergleichungen durch eine Approximation der entsprechenden Terme in den Gleichungen erreicht werden kann, ist ad hoc nicht klar. Aus diesem Grund wird die SMR-Schließung in Kapitel 1 zunächst für allgemeine Gleichungen eingeführt. Als Approximation der nichtlinearen Terme kann ein Polynom beliebiger Ordnung verwendet werden, für das die resultierende SMR-Schließung ebenfalls angegeben wird. In der Untersuchung des eindimensionalen Modells stellt sich die quadratische Approximation als ausreichend genau heraus. Die für die Approximation resultierende SMR-Schließung ist ebenfalls angegeben ist.

Nach dem ersten Kapitel über die SMR unterscheidet die Dissertation bei der Dimension des Modells, wobei der erste Teil das 1DSW und der zweite Teil das 2DSW behandelt. In Kapitel 2 des ersten Teils wird das durch finite-Volumen diskretisierte hoch aufgelöste eindimensionale Flachwassermodell eingeführt. Mittels räumlicher lokaler Mittel und deren Abweichungen wird eine grobe (aufgelöste), langsame Variable und eine feine (nicht aufgelöste / SGS), schnelle Variable eingeführt. Außerdem wird die Lösbarkeitsbedingung der SMR analytisch bestätigt. In Kapitel 3 werden die untersuchten Modelle genauer spezifiziert. Zum Vergleich werden zusätzlich zur SMR-Schließung zwei rein empirische Schließungen für die niedrig aufgelösten Modelle eingeführt. Die Ergebnisse werden in Kapitel 4 vorgestellt. Eine Separation der charakteristischen Zeitskalen der beiden Variablen wird empirisch bestätigt, was die Anwendung der SMR erst ermöglicht. Der Einfluss der SMR-Schließung wird mit zwei Modellen verglichen, welche rein empirische Schließungen verwenden. Die zugehörigen empirischen Schließungsverfahren sind in Abschnitt E vorgestellt. Im Weiteren wird die Skalenabhängigkeit der SMR-

Schließung genauer untersucht. Dabei wird die räumliche Auflösung der Modelle verändert, die SMR-Schließung entsprechend der Bestimmungsgleichung angepasst und mit den unmodifizierten empirischen Schließungen verglichen.

Im zweiten Teil wird das Modell auf zwei räumliche Dimensionen erweitert. Methodisch ist das Vorgehen äquivalent zum eindimensionalen Fall. Unterschiede, die zum 1DSW auftreten, sind in Kapitel 5 aufgeführt. In Kapitel 6 werden die verwendeten zweidimensionalen Modelle genauer beschrieben. In Kapitel 7 werden die Ergebnisse für das Referenzmodell und zwei niedrig aufgelöste Modelle ohne SGS-Parametrisierung verglichen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist in „Schlussfolgerung & Ausblick“ zu finden. Hier sind auch mögliche Folgeschritte benannt, die nicht mehr Teil dieser Arbeit sind.

Kapitel 1

Stochastische Modenreduktion

Das Ziel dieser Dissertation ist es eine SGS-Parametrisierung aus ersten Prinzipien herzuleiten. Die Idee für das hierzu verwendete asymptotische Verfahren für Multi-Skalensysteme (Khas'minskii 1966a, 1966b) stammt aus den 70'er Jahren und wurde in Papanicolaou et al. (1974) eingeführt. Die *stochastische Modenreduktion* (SMR), in der Form wie sie hier verwendet wird, wurde in Majda et al. (2001) vorgestellt und liefert eine asymptotische Näherung einer SGS-Parametrisierung. Die Schließung wird dabei aus den Gleichungen eines hoch aufgelösten Referenzmodells analytisch abgeleitet. Die Auflösung des Referenzmodells ist hierbei so hoch gewählt, dass eine Unterteilung in eine aufgelöste Variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M_c}$ und eine SGS-Variable $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{M_f}$ möglich ist. Beide Variablen $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ sind zeitabhängig, wobei die Abhängigkeit von t im Folgenden nicht mehr ausgeschrieben ist.

Betrachtet wird das Referenzmodell

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= g_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \\ \dot{y}_i &= b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Lambda_{ij} y_j + \Sigma_i \dot{W}_i , \end{aligned} \tag{1.1}$$

mit der zeitlichen Ableitung $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. Es wird die heuristische Schreibweise $\dot{\mathbf{W}} = \frac{d\mathbf{W}}{dt}$ mit dem Wienerinkrement $d\mathbf{W}$ im *Ornstein-Uhlenbeck* (OU)-Prozess $c_i^y(\mathbf{y}) = \Lambda_{ij} y_j + \Sigma_i \dot{W}_i$ verwendet. In der Gleichung von \mathbf{x} kommt ein Antriebsterm g^x vor, darüber hinaus gibt es in beiden Gleichungen verschiedene Wechselwirkungen der Variablen.

Das Ziel der SMR ist, für die effektive stochastische Differenzialgleichung (SDE) (im Ito Sinne vgl. Gardiner (2009))

$$dx_i = [\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \beta_i(\mathbf{x})] dt + d\xi_i(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

die Schließung, bestehend aus der deterministischen Funktion β und dem stochastischen Prozess $d\xi$, herzuleiten, wobei beide Schließungsterme nur von der aufgelösten Variable \mathbf{x} abhängen. Mit der Schließung sollen die fehlenden Terme des Referenzmodells Gleichung (1.1) simuliert werden, sodass das Modell Gleichung (1.2) nach Möglichkeit das Referenzmodell in der aufgelösten Variable \mathbf{x} reproduziert.

Um die SMR anwenden zu können, muss für Gleichung (1.1) die fundamentale Annahme getroffen werden, dass deutlich unterschiedliche Größenordnungen auf der rechten Seite der SDE vorliegen und mit dem Parameter $\varepsilon < 1$ skalierbar sind. Dieser Parameter kann in physikalischen Systemen als ein Faktor interpretiert werden, der die Separation unterschiedlicher, dem Modell innewohnender, zeitlicher Skalen quantifiziert (siehe Anhang A).

Einen ersten Hinweis, ob die angenommene Skalierung in dem verwendeten Modell auftritt, können die Dekorrelationszeiten der beiden Variablen \mathbf{x} und \mathbf{y} liefern, wobei die aufgelöste Variable \mathbf{x} hierbei deutlich langsamer sein sollte als die SGS-Variable \mathbf{y} . Ein stärkeres Indiz liefert die numerische Untersuchung des Referenzmodells im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$, welches gegen das Modell aus Gleichung (1.2) konvergiert. Bleibt im Grenzwert das Verhalten des Modells in der aufgelösten Variable \mathbf{x} hinreichend unverändert, so ist davon auszugehen, dass in diesem Modell die angenommene Skalierung herrscht und damit die SMR anwendbar ist.

Die SMR nutzt aus, dass jeder SDE eine rückwärts *Fokker-Planck Gleichung* (FPE) für die *Wahrscheinlichkeitsdichte* (PDF) $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t < 0 \mid \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, t = 0)$ des Systems eindeutig zugeordnet werden kann.¹ Im weiteren Verlauf wird die FPE im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ asymptotisch approximiert. Es folgt eine effektive FPE der führenden PDF $p^0(\mathbf{x})$ in Ordnungen von ε , welche ausschließlich von der aufgelösten Variable \mathbf{x} abhängt. Anschließend wird der effektiven FPE wiederum eine

1. Die Diskussion der SMR erfolgt anhand der *rückwärts* FPE, wobei dies nicht zwingend notwendig ist, da die resultierende Schließung unabhängig von dieser Wahl sein muss. Im Folgenden wird die Abhängigkeit der PDF vom Endzustand nicht mehr erwähnt.

effektive SDE Gleichung (1.2) mit der SGS-Parametrisierung aus den Gleichungen (1.24) und (1.27) zugeordnet.

In Abschnitt 1 wird die SMR für eine allgemeine SDE diskutiert und die Bestimmungsgleichung der Schließung genannt. Anschließend wird in diesem Kapitel eine schrittweise Spezifizierung der SMR in Bezug auf das verwendete Referenzmodell durchgeführt. Grund hierfür ist, dass die Funktionen \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y im verwendeten Flachwassermodell durch quadratische Polynome approximiert werden können, ohne die Modellergebnisse signifikant zu verfälschen. In der Folge wird die Schließung in Abschnitt 1.6 für beliebige Polynome und anschließend in Abschnitt 1.7 für quadratische Polynome genauer spezifiziert. Alternative Methoden zur Bestimmung einer SGS-Parametrisierung, die in dieser Arbeit zum Vergleich ebenfalls analysiert werden, sind in Anhang E dargestellt.

1.1 Zeitskalenseparation

Die Grundannahme der SMR ist die Präsenz verschiedener Skalen im System. Auf der rechten Seite der SDE Gleichung (1.1) werden die einzelnen Terme nach unterschiedlichen Größenordnungen eingeteilt. Der *Bare-Truncation* (BRT) Anteil $\varrho^x + \mathbf{a}^x$ ist von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$, die Kopplungsterme beider Variablen \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y sind von der Größenordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ und die SGS-Selbstwechselwirkungen \mathbf{c}^y von der Größenordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$. Dem Modell liegt dabei ein messbarer fester intrinsischer Parameter $\epsilon = \varepsilon$ zu Grunde, für den $\varepsilon \ll 1$ gelten muss. Im Unterschied dazu ist ϵ ein veränderbarer Faktor, für den später der Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ untersucht wird.

Um zu gewährleisten, dass alle Wechselwirkungsterme der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ sind, werden die Wechselwirkungsterme neu skaliert, wodurch $\mathbf{b}^x \rightarrow \frac{\mathbf{b}^x}{\epsilon}$, $\mathbf{b}^y \rightarrow \frac{\mathbf{b}^y}{\epsilon}$, und $\Lambda_{ij}y_j + \Sigma_i \dot{W}_i \rightarrow \frac{\Lambda_{ij}y_j}{\epsilon^2} + \frac{\Sigma_i \dot{W}_i}{\epsilon}$ (der Leser beachte die Skalierung des Wiener Prozesses mit \sqrt{dt} , dadurch skaliert der OU-Prozess in FPE mit $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \frac{1}{\epsilon} b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{y}_i &= \frac{1}{\epsilon} b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\epsilon^2} \Lambda_{ij} y_j + \frac{1}{\epsilon} \Sigma_i \dot{W}_i \end{aligned} \tag{1.3}$$

Für den modellintrinsischen Skalenseparationsfaktor $\epsilon = \varepsilon$ entspricht Gleichung (1.3) genau Gleichung (1.1). Der Faktor ϵ kann als ein Separationsfaktor unterschiedlicher Zeitskalen in dem Modell interpretiert werden. Diese Skalierung bedingt, dass der Bare-Truncation Anteil $\varrho^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x})$ auf der langsamsten Zeitskala variiert, die SGS-Selbstwechselwirkungen auf der schnellsten Zeitskala und die Kopplungsterme \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y auf einer zwischengelagerten Zeitskala. Für die aufgelöste Variable \mathbf{x} folgt damit, dass diese deutlich langsamer ist als die SGS-Variable \mathbf{y} .

In der hier beschriebenen Methode wird der Separationsfaktor ϵ , motiviert durch den modellintrinsischen Parameter ε , eingeführt und anschließend in Abschnitt 1.5 wieder eliminiert. Alternativ dazu können ad hoc unterschiedliche Zeitskalen für die einzelnen Wechselwirkungsterme angenommen und Gleichung (1.3) über das totale Differenzial hergeleitet werden, siehe Anhang A.

1.2 Zugehörige Fokker-Planck Gleichung

Die rückwärts Fokker-Planck Gleichung (FPE) für die Wahrscheinlichkeitsdichte p , welche Gleichung (1.3) zugeordnet werden kann, lautet

$$\partial_t p = L_3 p + \frac{1}{\epsilon} L_2 p + \frac{1}{\epsilon^2} L_1 p \quad (1.4)$$

mit der partiellen zeitlichen Ableitung ∂_t und den Operatoren

$$L_3 = -(\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x})) \partial_{x_i}, \quad (1.5)$$

$$L_2 = -b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \partial_{x_i} - b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \partial_{y_i}, \quad (1.6)$$

$$L_1 = -\Lambda_{ij} y_j \partial_{y_i} - \frac{\Sigma_i^2}{2} \partial_{y_i}^2, \quad (1.7)$$

wobei ∂_{x_i} und ∂_{y_i} die partiellen Ableitungen nach den Zustandsvektoren x_i und y_i sind.

1.3 Asymptotische Entwicklung nach ϵ

Für $\epsilon \ll 1$ ist es möglich die Wahrscheinlichkeitsdichte p in Ordnungen von ϵ zu entwickeln

$$p = p^0 + \epsilon p^1 + \epsilon^2 p^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) . \quad (1.8)$$

Dies eingesetzt in Gleichung (1.4) liefert in den ersten drei Ordnungen die Gleichungen

$$\mathcal{O}(\epsilon^{-2}) \quad \rightarrow \quad 0 = L_1 p^0 , \quad (1.9)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^{-1}) \quad \rightarrow \quad 0 = L_2 p^0 + L_1 p^1 , \quad (1.10)$$

$$\mathcal{O}(\epsilon^0) \quad \rightarrow \quad \partial_t p^0 = L_3 p^0 + L_2 p^1 + L_1 p^2 . \quad (1.11)$$

Die führende Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-2})$, Gleichung (1.9), besagt, dass die führende Ordnung der Wahrscheinlichkeitsdichte p^0 im Kern von L_1 liegt. An dieser Stelle wird der Projektionsoperator P eingeführt, welcher auf den Kern von L_1 projiziert. Verwendet man die Ergebnisse aus Anhang B, in dem der Projektionsoperator explizit hergeleitet wird, und wendet den Projektionsoperator P auf eine beliebige Funktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ an, so eliminiert P jegliche Abhängigkeit von der SGS-Variable \mathbf{y} , $Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle(\mathbf{x})$. Da p^0 innerhalb des Kerns von L_1 liegt, ist p^0 identisch mit der Projektion von p^0 auf den Kern

$$Pp^0 = p^0 . \quad (1.12)$$

In der Folge ist p^0 unabhängig von der schnellen Variable \mathbf{y}

$$p^0 = p^0(\mathbf{x}) . \quad (1.13)$$

Aus der nächst kleineren Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, Gleichung (1.10), folgen zwei Ergebnisse. Zum einen kann die Gleichung mit dem Pseudoinversen L_1^{-1} von L_1 , welches in Anhang B genauer aufgeführt ist, invertiert werden

$$p^1 = -L_1^{-1}L_2p^0, \quad (1.14)$$

wodurch p^1 aus p^0 bestimmt wird. Allerdings ist die Invertierung nur möglich, wenn die Abbildung von L_2p^0 durch das Pseudoinverse L_1^{-1} eindeutig ist. Dies ist der Fall, wenn L_2p^0 nicht innerhalb des Kerns von L_1 liegt. Verschwindet L_2p^0 in der Projektion mittels P , so ist eine verschwindende Komponente im Kern sichergestellt. Diese Bedingung wird auch **Lösbarkeitsbedingung** genannt

$$PL_2p^0 = -Pb_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y})\partial_{x_i}p^0 \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.15)$$

Die Lösbarkeitsbedingung stellt die Anforderung, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren Pb^x und $\nabla_x p^0$ verschwinden muss, was der Fall ist, wenn sie orthogonal zueinander stehen $Pb^x \perp \nabla_x p^0$. In jedem Fall von p^0 ist die Bedingung erfüllt, wenn

$$Pb_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (1.16)$$

Das zweite Ergebnis der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^{-1})$, Gleichung (1.10), ergibt sich durch die Anwendung des Projektionsoperators. Hierbei fällt der erste Term auf der rechten Seite aufgrund der Lösbarkeitsbedingung weg, es bleibt

$$PL_1p^1 = 0. \quad (1.17)$$

Da p^1 eine beliebige PDF sein kann, muss das Produkt von Projektionsoperator P und L_1 Operator verschwinden. In umgekehrter Reihenfolge ausgeführt ist dies ebenfalls der Fall, da P gerade auf den Kern von L_1 projiziert. Es folgt

$$PL_1\dots = L_1P\dots = 0. \quad (1.18)$$

Aus der nächsten Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, Gleichung (1.11), folgt die effektive FPE für die führende Ordnung der Wahrscheinlichkeitsdichte p^0 .

$$\partial_t p^0 = L_3 p^0 - PL_2 L_1^{-1} L_2 p^0 \quad (1.19)$$

Hierzu wird Gleichung (1.11) mit P multipliziert und die Gleichungen (1.18) und (1.14) verwendet. Außerdem wird verwendet, dass $P\partial_t p^0 = \partial_t Pp^0 = \partial_t p^0$ aufgrund von Gleichung (1.13) gilt und $PL_3 p^0 = L_3 Pp^0 = L_3 p^0$, da L_3 nur in \mathbf{x} und P nur in \mathbf{y} wirken. Die effektive FPE des niedrig aufgelösten Modells besteht aus dem BRT Anteil $L_3 p^0$ und einer SGS-Parametrisierung $PL_2 L_1^{-1} L_2 p^0$, welche im Weiteren genauer diskutiert wird.

1.4 Explizite Form der effektiven Fokker-Planck Gleichung

Die effektive FPE (1.19) kann für die zu Grunde liegenden Gleichungen genauer angegeben werden. Für den BRT Anteil ist das leicht möglich

$$L_3 p^0 = -(\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x})) \partial_{x_i} p^0. \quad (1.20)$$

Für den Schließungsanteil von Gleichung (1.19) ist

$$\begin{aligned} PL_2 L_1^{-1} L_2 p^0 &= P b_j^x \partial_{x_j} L_1^{-1} b_i^x \partial_{x_i} p^0 + P b_j^y \partial_{y_j} L_1^{-1} b_i^x \partial_{x_i} p^0 \\ &= P b_j^x L_1^{-1} b_i^x \partial_{x_j} \partial_{x_i} p^0 + \left(P b_j^x L_1^{-1} \frac{\partial b_i^x}{\partial x_j} + P b_j^y \frac{\partial L_1^{-1}}{\partial y_j} b_i^x \right) \partial_{x_i} p^0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$ erhält man die beiden Operatoren P und L_1^{-1} , wie in Anhang B ausgeführt. Hierbei ist $(Pf(\mathbf{x}, \mathbf{y}))(\mathbf{x}) = \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$ der Erwartungswert, basierend auf der stationären OU-Statistik und $(L_1^{-1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)))(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^\infty d\tau \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) | \mathbf{y}(0) = \mathbf{y} \rangle$. Da L_1^{-1} nur innerhalb von \mathbf{y} wirkt, kommutieren die Operatoren $\partial_{x_i} L_1^{-1} = L_1^{-1} \partial_{x_i}$.

Um den letzten Term von Gleichung (1.21) zu bestimmen betrachten wir fol-

genden Fall für die beliebigen Funktionen f und g

$$\begin{aligned}
Pf \frac{\partial L_1^{-1}}{\partial y_i} g &= \int dy p_s f \frac{\partial L_1^{-1}}{\partial y_i} g \\
&= [p_s f L_1^{-1} g]_{\mathbf{y}=-\infty}^{\mathbf{y}=\infty} - \int d\mathbf{y} \left(\frac{\partial p_s}{\partial y_i} f + p_s \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) L_1^{-1} g \\
&= \int d\mathbf{y} \left(\langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{ij}^{-1} y_j p_s f - p_s \frac{\partial f}{\partial y_i} \right) L_1^{-1} g \\
&= \int_0^\infty d\tau \langle \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{ij}^{-1} y_j f g \rangle - \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_i} g \right\rangle. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

Im ersten Schritt wird die Definition von P eingesetzt und im zweiten partiell integriert, wobei die Randterme im Unendlichen, aufgrund der verschwindenden PDF $p_s(\mathbf{y} \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, keinen Beitrag leisten. Im dritten Schritt wird die Ableitung der normal verteilten PDF, p_s aus Gleichung (C.26), verwendet. Im letzten Schritt wird die Definition aus Gleichung (B.43) eingesetzt.

Es folgt für Gleichung (1.21)

$$\begin{aligned}
&PL_2 L_1^{-1} L_2 p^0 \\
&= \int_0^\infty d\tau \langle b_j^x b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \rangle \partial_{x_j} \partial_{x_i} p^0 + \left(\int_0^\infty d\tau \left\langle b_j^x \frac{\partial b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau))}{\partial x_j} \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{jl}^{-1} \int_0^\infty d\tau \langle y_l b_j^y b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \rangle - \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial b_j^y}{\partial y_j} b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \right\rangle \right) \partial_{x_i} p^0. \tag{1.23}
\end{aligned}$$

Die in Abschnitt 1.1 eingeführte Skalierung der Wechselwirkungsterme mit ϵ kann durch $L_2 \rightarrow \epsilon L_2$ und $L_1 \rightarrow \epsilon^2 L_1$ wieder rückgängig gemacht werden. Die resultierende Schließung ändert sich dadurch nicht. Dies zeigt, dass beide Herangehensweisen, sowohl die direkte Skalierung aus Abschnitt 1.1, als auch der heuristische Ansatz unterschiedlicher Zeitskalen aus Anhang A, äquivalent sind.

1.5 SGS-Parametrisierung für allgemeine Funktionen

Der effektiven FPE (1.19), mit den Gleichungen (1.20) und (1.23), kann eine effektive SDE (1.2), mit den beiden Schließungstermen β und $d\xi$, zugeordnet werden. Für den deterministischen Schließungsanteil β gilt

$$\begin{aligned} \beta_i = & \int_0^\infty d\tau \left\langle b_j^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau))}{\partial x_j} \right\rangle \\ & + \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{jm}^{-1} \int_0^\infty d\tau \langle y_m b_j^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \rangle - \int_0^\infty d\tau \left\langle \frac{\partial b_j^y(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_j} b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \right\rangle . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Der stochastische Schließungsanteil

$$d\xi_i = \sqrt{2} B_{ij} dW_j \quad (1.25)$$

wird über die Zerlegung

$$B_{ik} B_{jk} = \int_0^\infty d\tau \langle b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(0)) b_j^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \rangle \quad (1.26)$$

gefunden. Er beinhaltet sowohl additive, als auch multiplikative Rauschterme.

Diese Zerlegung ist möglich (Pavliotis et al. 2008) und verwendet einen niedrigdimensionalen Prozess $B \in \mathbb{R}^{M_c \times M_c}$. Allerdings muss bei der numerischen Integration der SDE (1.2) mit den Schließungstermen aus Gleichungen (1.24) und (1.25) die Zerlegung für jeden Zeitschritt separat durchgeführt werden. Eine einmalige Zerlegung wird durch die Einführung eines effektiven stochastischen Prozesses erreicht, welcher die selbe Varianz wie der ursprüngliche Prozess aufweist, allerdings Kreuzkorrelationen vernachlässigt

$$\begin{aligned} d\xi_i & \approx \sqrt{2 B_{ij} B_{ij}} dW_i \\ & = \sqrt{2 \int_0^\infty d\tau \langle b_i^x b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tau)) \rangle} dW_i . \end{aligned} \quad (1.27)$$

1.6 SGS-Parametrisierung für beliebige Polynome

Die Schließung aus den Gleichungen (1.24) und (1.27) basiert auf den Funktionen \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y . Anwendbar ist die Schließung nur, wenn beide Funktionen stetig differenzierbar sind und die zu bestimmenden Erwartungswerte beschränkt sind. Die Flüsse auf der rechten Seite der Flachwassergleichungen (2.16) und (2.17) enthalten allerdings $\frac{1}{h}$ Terme über die kein beschränkter Erwartungswert gebildet werden kann, wenn die SGS-Selbstwechselwirkungen auf einem normalverteilten Prozess basieren, wie in dieser Arbeit dem OU-Prozess $\Lambda_{ij}y_j + \Sigma_i \dot{W}_i$. In der Folge kann die Schließung nicht berechnet werden. Gelöst wird das Problem, indem die $\frac{1}{h}$ Terme mittels einer Taylorreihe polynomiell approximiert werden.

Die Funktionen \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y lauten in polynomieller Form

$$\begin{aligned} b_i^x &= \sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=1}^{M_2} C_i^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X \zeta^Y, \\ b_i^y &= \sum_{X=1}^{N_3} \sum_{Y=0}^{M_3} C_i^{y^X x^Y} \mathcal{X}^X \zeta^Y. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Hier werden N_2 , die höchste Ordnung von \mathbf{x} in \mathbf{b}^x , und M_2 , die höchste Ordnung von \mathbf{y} in \mathbf{b}^x , verwendet, sowie N_3 , die höchste Ordnung von \mathbf{y} in \mathbf{b}^y , und M_3 , die höchste Ordnung von \mathbf{x} in \mathbf{b}^y . Außerdem kommen die Wechselwirkungsterme $C_i^{x^X y^Y}$ und $C_i^{y^X x^Y}$ und Produkte der Zustandsvariablen vor

$$\mathcal{X}^X = \prod_{k=1}^X x_{n_k}, \quad \text{wobei } \mathcal{X}^0 = 1, \quad (1.29)$$

$$\zeta^Y = \prod_{k=1}^Y y_{m_k}, \quad \text{wobei } \zeta^0 = 1. \quad (1.30)$$

Exemplarisch kann man für lineare, quadratische und kubische Terme, die auf \mathbf{x}

wirken, schreiben:

$$\begin{aligned}
X = 0; Y = 1 & & C_i^{x^0 y^1} \mathcal{X}^0 \zeta^1 &= L_{im_2}^{xy} y_{m_2} \\
X = 1; Y = 1 & & C_i^{x^1 y^1} \mathcal{X}^1 \zeta^1 &= B_{in_1 m_1}^{xxy} x_{n_1} y_{m_1} \\
X = 0; Y = 2 & & C_i^{x^0 y^2} \mathcal{X}^0 \zeta^2 &= B_{im_1 m_2}^{xyy} y_{m_1} y_{m_2} \\
X = 1; Y = 2 & & C_i^{x^1 y^2} \mathcal{X}^1 \zeta^2 &= N_{in_1 m_1 m_2}^{xxyy} x_{n_1} y_{m_1} y_{m_2} \\
& & \vdots & \\
& & \vdots &
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Für eine normalverteilte SGS-Variable verschwinden alle ungeraden Momente

$$\sum_{Y=1,3,5,\dots}^{M_2} \langle \zeta^Y \rangle = 0, \tag{1.32}$$

wodurch die Lösbarkeitsbedingung Gleichung (1.16) für polynomielle Funktionen lautet

$$\begin{aligned}
Pb_i^x &= P \sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=1}^{M_2} C_i^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X \zeta^Y \\
&= \sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=2,4,6,\dots}^{M_2} C_i^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X \langle \zeta^Y \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

An dieser Stelle wird die Notation

$$\partial_{x_m} \{ \mathcal{X}^X \} = \sum_{i=1}^X \mathcal{X}^X \frac{\delta_{n_i; m}}{x_{n_i}} = \mathcal{X}_{\neq m}^X, \quad \mathcal{X}_{\neq m}^0 = 0 \tag{1.34}$$

verwendet. Hier ergibt sich beispielsweise für

$$X = 2, Y = 1, m = 1: \quad C_i^{x^2 y^1} \mathcal{X}_{\neq k}^2 = C_{ikn_2 m_1}^{xxy} x_{n_2} y_{m_1}. \tag{1.35}$$

Die resultierende deterministische Komponente, sowie die stochastische Komponente der Schließung lauten damit

$$\begin{aligned}
\beta_i = & \left[\sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=1,3,5,\dots}^{M_2} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=1,3,5,\dots}^{M_2} C_m^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}_{\neq m}^{\tilde{X}} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) \rangle \right. \\
& + \sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=2,4,6,\dots}^{M_2} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=2,4,6,\dots}^{M_2} C_m^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}_{\neq m}^{\tilde{X}} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) \rangle \left. \right] dt \\
& + \left[\sum_{X=1}^{N_3} \sum_{Y=1,3,5,\dots}^{M_3} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=2,4,6,\dots}^{M_2} C_m^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}^{\tilde{X}} \langle yy^t \rangle_{ml}^{-1} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) y_l \rangle \right. \\
& + \sum_{X=1}^{N_3} \sum_{Y=0,2,4,\dots}^{M_3} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=1,3,5,\dots}^{M_2} C_m^{y^X x^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}^{\tilde{X}} \langle yy^t \rangle_{ml}^{-1} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) y_l \rangle \\
& - \sum_{X=1}^{N_3} \sum_{Y=1,3,5,\dots}^{M_3} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=2,4,6,\dots}^{M_2} C_{m;m}^{y^X x^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}^{\tilde{X}} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta_{\neq m}^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) \rangle \\
& - \sum_{X=1}^{N_3} \sum_{Y=2,4,6,\dots}^{M_3} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=1,3,5,\dots}^{M_2} C_{m;m}^{y^X x^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}^{\tilde{X}} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta_{\neq m}^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) \rangle \left. \right] dt , \tag{1.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\xi_i = & \sqrt{\sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=2,4,6,\dots}^{M_2} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=2,4,6,\dots}^{M_2} C_i^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}^{\tilde{X}} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) \rangle} dW_i \\
& + \sqrt{\sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=1,3,5,\dots}^{M_2} \sum_{\tilde{X}=0}^{N_2} \sum_{\tilde{Y}=1,3,5,\dots}^{M_2} C_i^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X C_i^{x^{\tilde{X}} y^{\tilde{Y}}} \tilde{\mathcal{X}}^{\tilde{X}} \int_0^\infty d\tau \langle \zeta^Y \tilde{\zeta}^{\tilde{Y}}(\tau) \rangle} dW_i . \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Die Schließung setzt sich aus unterschiedlichen Produkten der basierenden Funktionen und statistischer Momente zusammen. Daraus können zwei wichtige Folgerungen getroffen werden:

Polynomielle Ordnung der Schließung: Der deterministische Anteil der Schließung β ist ein Polynom der Ordnung $\max(N_2 + N_2 - 1; N_3 + N_2)$. Für ein beliebiges

Anfangspolynom der Ordnung k sind $N_2 = k - 1$ und $N_3 = k$, womit β höchstens von der Ordnung $2k - 1$ ist. Für eine ursprünglich quadratische Gleichung liefert die SMR somit lineare, quadratische und kubische deterministische Schließungsterme.

Der stochastische Anteil der Schließung $d\xi$ ist die Summe der Quadratwurzeln zweier Polynome der Ordnungen $2N_2$ und $2(N_2 - 1)$. Eine allgemein gültige Zerlegung nach einem Polynom mit ganzzahligen Potenzen in \mathbf{x} ist nicht möglich. Für den speziellen Fall, dass eine Zerlegung möglich ist, hat das resultierende Polynom die Ordnung N_2 .

Höchstes statistisches Moment: In allen Termen der Schließung werden integrierte statistische Momente der SGS-Variable verwendet. Durch die Annahme, dass die SGS-Selbstwechselwirkungen sich wie ein OU-Prozess verhalten, siehe Gleichung (1.1), können die gesuchten Momente aus den OU-Parametern Λ und Σ bestimmt werden. Alternativ dazu kann der Seamless-Approach (siehe Franzke et al. 2005) zur Bestimmung der Schließung verwendet werden, bei dem die gesuchten integrierten Momente empirisch bestimmt werden. In diesem Fall ist es von Bedeutung, wie hoch die Ordnung der benötigten Momente ist, da die Berechnung anspruchsvoller wird, je höher die Ordnung der benötigten Momente.

Das höchste statistische Moment ist von der Ordnung $\max(2M_2; \hat{M}_3 + \tilde{M}_2 + 1; \tilde{M}_3 + \hat{M}_2 + 1)$, wobei

$$\begin{aligned}\hat{M}_i &= \text{die höchste gerade Zahl} \leq M_i, \\ \tilde{M}_i &= \text{die höchste ungerade Zahl} \leq M_i.\end{aligned}$$

Für ein beliebiges Polynom der Ordnung k sind die Parameter $M_2 \leq k$ und $M_3 \leq k - 1$. Damit folgt, dass für die stochastische Modenreduktion statistische Momente bis zur Ordnung $2k$ benötigt werden.

1.7 SGS-Parametrisierung für quadratische Polynome

Für die Flachwassergleichungen stellt sich heraus, dass die führende Ordnung in der Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ (siehe Abschnitt 2.5) zur Reproduktion der Dynamik des nicht-approximierten Modells ausreichend ist. Die dadurch resultierenden Funktionen \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y sind quadratische Polynome

$$\begin{aligned} b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L_{ij}^{xy} y_j + B_{ijk}^{xxy} x_j y_k + B_{ijk}^{xyy} y_j y_k, \\ b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L_{ij}^{yx} x_j + B_{ijk}^{yxx} x_j x_k + B_{ijk}^{yxy} x_j y_k, \end{aligned} \quad (1.38)$$

welche sich aus Gleichung (1.28) mit

$$\begin{aligned} N_2 &= 1, & N_3 &= 2, \\ M_2 = M_2(X) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } X = 1 \\ 2, & \text{falls } X = 0, \end{cases} & M_3 = M_3(X) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } X = 1 \\ 0, & \text{falls } X = 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.39)$$

ergeben.

Die Lösbarkeitsbedingung ist

$$Pb_i^x = \sum_{X=0}^{N_2} \sum_{Y=2,4,6,\dots}^{M_2} C_i^{x^X y^Y} \mathcal{X}^X \langle \zeta^Y \rangle = B_{ijk}^{xyy} \langle y_j y_k \rangle = 0. \quad (1.40)$$

Die deterministische Schließung ergibt sich aus Gleichung (1.36) zu

$$\begin{aligned} \beta_i &= (L_{mj}^{xy} + B_{mlj}^{xxy} x_l) B_{imk}^{xxy} (C_S)_{jk} \\ &\quad + (L_{mo}^{yx} x_o + B_{mop}^{yxx} x_o x_p) (L_{ik}^{xy} + B_{ijk}^{xxy} x_j) \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{mn}^{-1} (C_S)_{nk} \\ &\quad + B_{ijk}^{xyy} B_{mpo}^{xyy} x_p \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{mn}^{-1} (C_T)_{onjk} \end{aligned} \quad (1.41)$$

und die effektive stochastische Schließung aus Gleichung (1.37) zu

$$d\xi_i = \sqrt{2B_{ijn}^{xyy}(C_T)_{jnkl}B_{ikl}^{xyy}} dW_i^1 + \sqrt{2(L_{in}^{xy} + B_{ijn}^{xxy}x_j)(C_S)_{nk}(L_{ik}^{xy} + B_{ilk}^{xxy}x_l)} dW_i^2. \quad (1.42)$$

Die Wiener Prozesse $d\mathbf{W}^1$ und $d\mathbf{W}^2$ sind unabhängig und es werden die Tensoren C_S und C_T verwendet

$$(C_S)_{jk} = \int_0^\infty d\tau \langle y_j(0)y_k(\tau) \rangle, \quad (1.43)$$

$$(C_T)_{onjk} = \int_0^\infty d\tau (\langle y_o(0)y_j(\tau) \rangle \langle y_k(\tau)y_n(0) \rangle + \langle y_o(0)y_k(\tau) \rangle \langle y_j(\tau)y_n(0) \rangle). \quad (1.44)$$

Proportionalität zu OU-Eigenwerten γ : Mit den Zwischenschritten aus Anhang C.2 können die Schließungsterme auch direkt durch den OU-Prozess ausgedrückt werden. Hierzu wird die Eigenwertmatrix Λ von Γ aus Gleichung (2.39) mit den reellen und komplexen Eigenwerten γ_i und ω_i verwendet. Für die Schließung folgt

$$\begin{aligned} \beta_i &= [L_{mj}^{xy} + B_{mlj}^{xxy}x_l] B_{imk}^{xxy} \frac{\Sigma_j^2}{2\hat{\gamma}_j(\hat{\gamma}_j^2 + \omega_j^2)} \Lambda_{kj} \\ &\quad - \left[(L_{mo}^{yx}x_o + B_{mop}^{yxx}x_o x_p) (L_{ik}^{xy} + B_{ijk}^{xxy}x_j) \frac{1}{(\hat{\gamma}_m^2 + \omega_m^2)} \Lambda_{km} \right. \\ &\quad \left. - B_{ijk}^{xxy} B_{mpo}^{yxy} x_p \frac{\Sigma_o^2}{2\hat{\gamma}_o} P_{jokm} \right], \end{aligned} \quad (1.45)$$

$$d\xi_i = \sqrt{2B_{ijn}^{xyy}(C_T)_{jnkl}B_{ikl}^{xyy}} dW_i^1 + \sqrt{2(L_{in}^{xy} + B_{ijn}^{xxy}x_j) \frac{\Sigma_n^2}{2\hat{\gamma}_n(\hat{\gamma}_n^2 + \omega_n^2)} \Lambda_{kn} (L_{ik}^{xy} + B_{ilk}^{xxy}x_l)} dW_i^2. \quad (1.46)$$

Mit $\Lambda \sim \gamma$ ist es möglich für einen OU-Prozess mit $\gamma_i < -1$ unterschiedliche Ordnungen der SMR-Schließung in γ zu unterscheiden und eine führende Ordnung zu identifizieren. Die erste Zeile von Gleichung (1.45) ist proportional zu γ^{-2} , die zweite Zeile proportional zu γ^{-1} und die dritte proportional zu γ^{-2} (anhand von

Dolaptchiev et al. (2013a) erkennt man, dass der Tensor P_{ijkl} proportional zu γ^{-1} ist). Es folgt, dass betragsmäßiges Vergrößern der reellen OU-Eigenwerte die Amplitude der SMR-Schließung verkleinert.

Dieses Verhalten ist konsistent mit dem zu erwartenden Verhalten des Referenzmodells Gleichung (1.1). Der Grund hierfür ist, dass durch das Vergrößern von γ , die Varianz des OU-Prozesses abnimmt, mit einer verschwindenden Varianz im Grenzfall von $\gamma_i \rightarrow -\infty$. In der Folge wird im Grenzfall $\dot{\mathbf{y}} \rightarrow 0$ die Dynamik mit $\mathbf{y} \rightarrow konst.$ unterdrückt. Dieses Verhalten kann verhindert werden, indem der stochastische OU-Anteil Σ entsprechend einer gleichbleibenden Varianz angepasst wird.

Teil I

Eindimensionales Flachwassermodell

Kapitel 2

Flachwassermodell

In diesem Kapitel wird das *Flachwassermodell in einer räumlichen Dimension* (1DSW = 1-dimensional shallow water model) vorgestellt. Hierzu werden die Grundgleichungen zuerst eingeführt und im Raum diskretisiert. Anschließend wird die ursprüngliche Zustandsvariable in eine grobe aufgelöste und eine feine aufgelöste Variable aufgespalten, welche im Folgenden *aufgelöste* und *SGS-Variable* genannt werden. Die nachfolgenden zwei Schritte dienen der Vorbereitung zur Anwendung der SMR. Dazu werden die Gleichungen approximiert und SGS-Selbstwechselwirkungen durch einen OU-Prozess ersetzt. Im letzten Abschnitt wird die resultierende SMR-Schließung für das 1DSW diskutiert.

2.1 Eindimensionale Flachwassergleichungen

Die Flachwassergleichungen (z.B. Vallis 2006) beschreiben eine hydrostatische Wasserschicht, deren vertikale Ausdehnung klein ist im Vergleich zur horizontalen Ausdehnung. Mit den Gleichungen wird eine Abhängigkeit der Säulenhöhe h der Wasserschicht mit dem horizontalen Wind $\mathbf{u} = (u, v)^T$ ausgedrückt. Beide Variablen h und \mathbf{u} weisen in den Gleichungen keine vertikale Abhängigkeit auf, sondern ausschließlich eine horizontale zweidimensionale Abhängigkeit. Man spricht daher von den zweidimensionalen Flachwassergleichungen.

Sie bestehen aus einer Impulsgleichung

$$\partial_t \mathbf{u} + \overbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}^{\text{Advektion}} = \overbrace{-g \nabla \eta}^{\text{Druckgradient}} + \overbrace{\nu^{\mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}}^{\text{Diffusion}} + \overbrace{\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{u}}}^{\text{Antrieb}} \quad (2.1)$$

und einer Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t h + \overbrace{\nabla \cdot (h \mathbf{u})}^{\text{Divergenz}} = \overbrace{\nu^h \Delta h}^{\text{Diffusion}} + \overbrace{\varrho^h}^{\text{Antrieb}} . \quad (2.2)$$

In den Gleichungen wird der Nablaoperator $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ und der Laplaceoperator $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ mit den partiellen räumlichen Ableitungen ∂_x und ∂_y verwendet. Als physikalischer Parameter kommt die Erdbeschleunigung g vor. Darüber hinaus wird die Diffusion mit den Parametern $\nu^{\mathbf{u}}$ und ν^h und ein stochastischer Antriebs-term mit den Parametern $\boldsymbol{\varrho}^{\mathbf{u}} = (\varrho^u, \varrho^v)^T$ und ϱ^h verwendet.

Mit der mittleren Wasserhöhe \mathcal{H} und der orographischen Höhe des unteren Randes der Wasserschicht z_0 wird die Abweichung η des oberen Wasserrandes von der Gleichgewichtslage bestimmt

$$\eta = z_0 + h - \mathcal{H} . \quad (2.3)$$

Bei verschwindender Orographie, wodurch der untere Rand der Wasserschicht eben ist $z_0 = 0$, folgt $\eta = h - \mathcal{H}$. Komponentenweise ausgeschrieben haben die Grundgleichungen die Form

$$(\partial_t + u \partial_x + v \partial_y) u = -g \partial_x \eta + \varrho^u + \nu^u \Delta u , \quad (2.4)$$

$$(\partial_t + u \partial_x + v \partial_y) v = -g \partial_y \eta + \varrho^v + \nu^v \Delta v , \quad (2.5)$$

$$\partial_t h + \partial_x h u + \partial_y h v = \varrho^h + \nu^h \Delta h . \quad (2.6)$$

Ein Spezialfall der Flachwassergleichungen liegt vor, wenn angenommen wird, dass in allen Variablen keine y -Abhängigkeit vorliegt und v , die Windkomponente in y -Richtung, verschwindet. Es bleiben die Gleichungen des eindimensionalen Flachwassersmodells (1DSW)

$$(\partial_t + u \partial_x) u = -g \partial_x \eta + \varrho^u + \nu^u \partial_x \partial_x u , \quad (2.7)$$

$$\partial_t h + \partial_x hu = \varrho^h + \nu^h \partial_x \partial_x h . \quad (2.8)$$

2.2 Flachwassergleichungen in Flussform

Zur Vereinfachung der numerischen Integration werden die eindimensionalen Flachwassergleichungen, bestehend aus der Impulsgleichung (2.7) und der Kontinuitätsgleichung (2.8), in Flussform umgeformt. Die neue Variable in der Impulsgleichung ist der Impuls hu .

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung, erhält man aus der Impulsgleichung mit dem entsprechenden Antriebsterm $\varrho^{hu} = u\varrho^h + h\varrho^u$

$$\partial_t (hu) + \partial_x \left(\frac{(hu)^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 \right) = \varrho^{hu} + \nu^u h \partial_x \partial_x u + \nu^h u \partial_x \partial_x h . \quad (2.9)$$

Zur einfacheren numerischen Integration des Modells wird der Diffusionsanteil in der Impulsgleichung durch eine massengewichtete Diffusion ersetzt

$$\nu^u h \partial_x \partial_x u + \nu^h u \partial_x \partial_x h \approx \nu^{hu} \partial_x \partial_x hu \quad (2.10)$$

und eine einheitliche Diffusionskonstante $\nu = \nu^{hu} = \nu^h$ in beiden Variablen verwendet.

Die Flachwassergleichungen können dann mit $\boldsymbol{\varrho} = (\varrho^h, \varrho^{hu})^T$ kompakt geschrieben werden

$$\underbrace{\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}}_{\partial_t \boldsymbol{\phi}} = - \underbrace{\partial_x \begin{pmatrix} hu - \nu \partial_x h \\ \frac{(hu)^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 - \nu \partial_x hu \end{pmatrix}}_{\partial_x \mathbf{F}(\boldsymbol{\phi})} + \boldsymbol{\varrho} . \quad (2.11)$$

2.3 Diskretisierung mittels finiter-Differenzen

Zur numerischen Bestimmung der räumlichen Ableitungen ist der Raum mittels eines hoch aufgelösten Gitters diskretisiert. Das Modellgebiet der Länge L ist dabei in N feine Intervalle der Länge $\Delta x = \frac{L}{N}$ unterteilt. Die kontinuierliche Variable x wird durch eine diskrete Variable x_i ersetzt, welche die Zellenmitte mit

$x_i = x_0 + i\Delta x$ bezeichnet. Die Nummerierung der Intervalle erfolgt über den Index $i \in s = \{0, 1, \dots, N-1\}$. Für die diskretisierten Variablen werden die Abkürzungen $hu_i = hu(x_i)$ und $h_i = h(x_i)$, sowie $u_i = u(x_i)$ und $\boldsymbol{\rho}_i = \boldsymbol{\rho}(x_i)$ verwendet.

Zur Diskretisierung der Gleichungen wird ein symmetrisches finite-Volumen Schema verwendet

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} h_i \\ hu_i \end{pmatrix} = -\frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} \right) + \boldsymbol{\rho}_i \quad (2.12)$$

mit dem Flussterm $\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}}$ an der Intervallgrenze bei $x_i \pm \frac{\Delta x}{2}$

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (hu)_{i\pm 1} + (hu)_i - 2\nu \frac{h_{i\pm 1} - h_i}{\Delta x} \\ \frac{(hu)_{i\pm 1}^2}{h_{i\pm 1}} + \frac{(hu)_i^2}{h_i} + \frac{g}{2} h_{i\pm 1}^2 + \frac{g}{2} h_i^2 - 2\nu \frac{(hu)_{i\pm 1} - (hu)_i}{\Delta x} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

In späteren Simulationen wird eine räumliche Auflösung des Modells verwendet, die sicherstellt, dass für die gewählte Diffusion und den gewählten Antrieb alle relevanten Prozesse aufgelöst sind. Das Modell aus Gleichung (2.12) wird im Folgenden *direkte numerische Simulation* (DNS) genannt.

2.4 Lokale Mittelung

Typischerweise ist die räumliche Auflösung von Atmosphärenmodellen nicht ausreichend hoch, um alle atmosphärischen Prozesse hinreichend genau darstellen zu können. Das zuvor eingeführte DNS repräsentiert in dieser Arbeit die atmosphärische Realität, welche möglichst fehlerfrei durch ein deutlich niedriger aufgelöstes Modell reproduziert werden soll.

Das niedrig aufgelöste Modell ist auf dem groben Gitter mit $N_c = \frac{N}{n}$ Zellen definiert, wodurch jede grobe Gitterzelle n feine Zellen des ursprünglichen Gitters enthält. Die groben Zellen werden durch den Index $I \in \{0, 1, \dots, N_c - 1\}$ charakterisiert. Auf dem groben Gitter werden die Variablen H und HU eingeführt. Im Folgenden werden sie *aufgelöste Variablen* genannt. Sie sind über das lokale Mittel

der ursprünglichen Variablen h_i und hu_i innerhalb einer groben Zelle definiert

$$\begin{pmatrix} H_I \\ HU_I \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{k=nI}^{n(I+1)-1} \begin{pmatrix} h_k \\ hu_k \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Die Abweichungen von dem lokalen Mittel definieren die feinen Variablen h' und hu' . Im Folgenden werden diese auch *nicht aufgelöste* oder *SGS-Variablen* genannt

$$\begin{pmatrix} h'_i \\ hu'_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_i \\ hu_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{I[i]} \\ HU_{I[i]} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Der Index $I[i]$ benennt die grobe Zelle innerhalb der die i -te feine Zelle liegt. Mit den beiden neu eingeführten aufgelösten und nicht aufgelösten Variablen kann das Modell aus Gleichung (2.12) ausgedrückt werden

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} H_I \\ HU_I \end{pmatrix} = - \frac{\mathbf{F}_{(I+1)n-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{nI-\frac{1}{2}}}{n\Delta x} + \boldsymbol{\rho}_I, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} h'_i \\ hu'_i \end{pmatrix} = - \frac{\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{\mathbf{F}_{(I[i]+1)n-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{I[i]n-\frac{1}{2}}}{n\Delta x}, \quad (2.17)$$

wobei der Antriebsterm $\boldsymbol{\rho}_I$ nur auf die aufgelösten Variablen wirkt.

Das Zusammenfassen aller aufgelösten Variablen H_I und HU_I in einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M_c}$ und aller SGS-Variablen h'_i und hu'_i in einem weiteren Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^M$ mit $M_c = 2N_c$ und $M = 2N$, ermöglicht eine kompakte Form der Gleichungen (2.16) und (2.17)

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \quad (2.18)$$

$$\dot{z}_i = b_i^z(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + c_i^z(\mathbf{z}), \quad (2.19)$$

wobei

$$\mathbf{x} = (H_1, HU_1, H_2, HU_2, \dots)^T, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{z} = (h_1, h_2, \dots, h_n, hu_1, \dots, hu_n, h_{n+1}, \dots, h_{2n}, hu_{n+1}, \dots)^T. \quad (2.21)$$

Die *Differenzialgleichung* (DGL) besteht aus einem Antriebsterm ϱ^x , welcher nur auf die aufgelöste Variable \mathbf{x} wirkt, aus Selbstwechselwirkungsterme \mathbf{a}^x der aufgelösten Variable \mathbf{x} und Selbstwechselwirkungsterme $\mathbf{c}^z(\mathbf{z})$ der SGS-Variable \mathbf{z} . Außerdem kommen Mischterme beider Variablen vor. Wechselwirkungen, welche von \mathbf{x} und \mathbf{z} auf \mathbf{x} oder ausschließlich von \mathbf{z} auf \mathbf{x} wirken, sind durch $\mathbf{b}^{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ repräsentiert. Wechselwirkungen, welche von \mathbf{x} und \mathbf{z} auf \mathbf{z} oder ausschließlich von \mathbf{x} auf \mathbf{z} wirken, sind durch $\mathbf{b}^z(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ dargestellt.

Bei vollständiger Elimination der SGS-Variable erhält man das sogenannte *Bare-Truncation Modell* (BRT), welches auf dem groben Gitter mit N_c Zellen definiert ist und über keine Parametrisierung der fehlenden SGS-Prozesse verfügt

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) . \quad (2.22)$$

Damit das BRT möglichst das DNS reproduziert, müssen die fehlenden Terme durch eine Schließung modelliert werden. Hierzu werden ein deterministischer Schließungsterm β und ein stochastischer Schließungsterm ξ gesucht. Beide Terme der Schließung dürfen von der aufgelösten Variable \mathbf{x} abhängen, jedoch nicht von der SGS-Variable

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \beta_i(\mathbf{x}) + \dot{\xi}_i(\mathbf{x}) . \quad (2.23)$$

Diese Arbeit betrachtet verschiedene Strategien zur Bestimmung der beiden Terme β und ξ . Dies kann über stochastischen Modenreduktion erfolgen, welche in Kapitel 1 für allgemeine Funktionen, beliebige Polynome und quadratische Polynome diskutiert ist. Alternative Verfahren sind in Anhang E vorgestellt.

Varianz der SGS-Variable \mathbf{z} im Raum: Anhand der Definitionen der SGS- und der aufgelösten Variable kann man die räumliche Form der Varianz der SGS-Variable \mathbf{z} abschätzen. Hierzu fasst man die Variablen als Funktion im kontinuierlichen Raum x auf, wobei sich die aufgelöste Variable $\mathbf{x}(x)$ über das Integral der stetigen ursprünglichen Variable $\phi(x)$ ergibt und die SGS-Variable über die

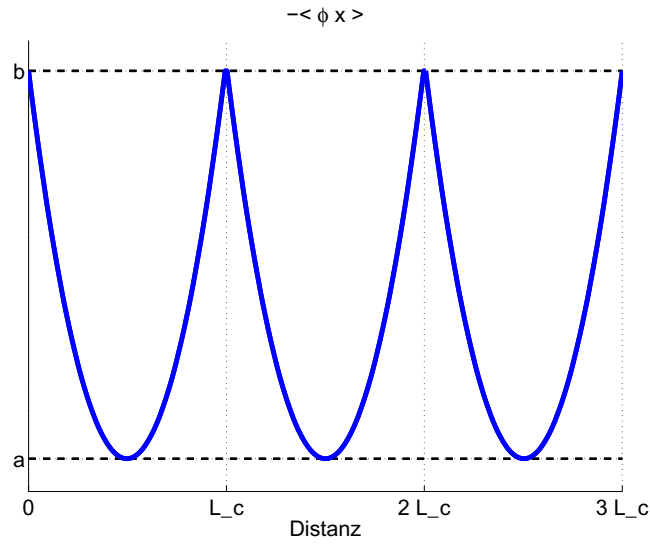


Abbildung 2.1: Gezeigt ist das räumliche Verhalten von $-\langle\phi(x)\mathbf{x}(x)\rangle$ innerhalb der ersten drei groben Zellen $x \in [0, 3L_c]$ mit $a = \frac{2}{\alpha L_c} \left(1 - e^{-\frac{\alpha L_c}{2}}\right)$, $b = \frac{1}{\alpha L_c} (1 - e^{-\alpha L_c})$ und $\alpha = 1$.

Differenz. Für die erste grobe Zelle folgt dann mit $L_c = n\Delta x$

$$\mathbf{x}(x \in [0, L_c]) = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \phi(\tilde{x}) d\tilde{x}, \quad \mathbf{z}(x) = \phi(x) - \mathbf{x}(x). \quad (2.24)$$

Die Varianz ist

$$\text{Var}(\mathbf{z}(x)) = \overline{\mathbf{z}(x)^2} - \overline{\mathbf{z}(x)}^2 = \overline{\phi(x)^2} - 2\overline{\phi(x)\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}^2} - \overline{\mathbf{z}}^2, \quad (2.25)$$

wobei das zeitliche Mittel $\overline{(\cdot)}$ verwendet wird. Innerhalb der groben Zelle ist \mathbf{x} konstant, und damit auch $\overline{\mathbf{x}^2}$. Der Mittelwert von \mathbf{z} verschwindet

$$\overline{\mathbf{z}(x)} = \overline{\phi(x) - \mathbf{x}} = \overline{\phi(x)} - \overline{\mathbf{x}} = \overline{\phi(x)} - \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \phi(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \left(\overline{\phi(x)} - \phi(\tilde{x})\right) d\tilde{x} = 0 \quad (2.26)$$

und ist damit konstant innerhalb der groben Zelle. Dies gilt auch für $\overline{\phi(x)^2}$, wodurch der Term $2\overline{\phi(x)\mathbf{x}}$ der einzige nicht konstante Term auf der rechten Seite von

Gleichung (2.25) ist

$$\text{Var}(\mathbf{z}(x)) \sim -\overline{\boldsymbol{\phi}(x)\mathbf{x}(x)}. \quad (2.27)$$

Nimmt man eine mit dem Abstand exponentiell abfallende räumliche Autokorrelation $\overline{\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x')} \sim \exp(-\alpha|x-x'|)$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\phi}(x)\mathbf{x}(x)} &= \frac{1}{L_c} \int_0^{L_c} \overline{\boldsymbol{\phi}(x)\boldsymbol{\phi}(x')} dx' \\ &\sim \frac{1}{L_c} \left\{ \int_0^x \exp[\alpha(x'-x)] dx' + \int_x^{L_c} \exp[\alpha(x-x')] dx' \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha L_c} \{2 - e^{-\alpha x} - e^{\alpha(x-L_c)}\} \\ &= \frac{2}{\alpha L_c} \left\{ 1 - e^{-\frac{\alpha L_c}{2}} \cosh \left[\alpha \left(x - \frac{L_c}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Graphisch dargestellt entspricht dies einer U-Form, siehe Abb. 2.1. Das gleiche Ergebnis erhält man für alle groben Zellen.

2.5 Quadratische Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$

Die Schließung wird anhand der SMR bestimmt, welche in Abschnitt 1 beschrieben ist. Allerdings kann sie auf die Grundgleichungen (2.18) und (2.19) nicht direkt angewendet werden. Problematisch ist der Term $\frac{1}{h}$ im dem Fluss (2.13). In bisherigen Arbeiten wurde die SMR nur für Grundgleichungen mit einer Nichtlinearität quadratischer Ordnung verwendet. Anwendbar ist sie allerdings auch für beliebige polynomielle Formen. Es liegt daher nahe den Term $\frac{1}{h}$ überall, außer im BRT-Anteil, polynomiell zu entwickeln. Als Entwicklungspunkt kann entweder die mittlere Säulenhöhe \mathcal{H} oder die lokal gemittelte Säulenhöhe H verwendet werden:

- $\frac{1}{h} = \frac{1}{\mathcal{H}} - \frac{1}{\mathcal{H}^2}\eta + \mathcal{O}(\eta^2) = \frac{1}{\mathcal{H}} - \frac{1}{\mathcal{H}^2}(H + h' - \mathcal{H}) + \mathcal{O}(\eta^2)$
- $\frac{1}{h} = \frac{1}{H} - \frac{1}{H^2}h' + \mathcal{O}((h')^2)$

In dieser Arbeit stellt sich heraus, dass die einfachste Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ ausreicht, um die Ergebnisse des DNS hinreichend genau zu reproduzieren. Die Approximation, angewendet auf die Gleichungen (2.18) und (2.19), liefert nichtlineare

Terme in denen die Variablen höchstens in quadratischer Ordnung auftreten. Für die i -te Komponente von $\dot{\mathbf{x}}$ und $\dot{\mathbf{z}}$ erhält man

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + (L_{ij}^{xz} z_j + B_{ijk}^{xxx} x_j z_k + B_{ijk}^{xzz} z_j z_k) , \quad (2.29)$$

$$\dot{z}_i = (L_{ij}^{zx} x_j + B_{ijk}^{zxx} x_j x_k + B_{ijk}^{zxx} x_j z_k) + (L_{ij}^{zz} z_j + B_{ijk}^{zzz} z_j z_k) . \quad (2.30)$$

Es wird, wie im Folgenden auch, die Einsteinsche Summenkonvention verwendet, wobei die Indizes entweder über M_c oder M Einträge laufen, je nachdem ob über \mathbf{x} oder \mathbf{z} summiert wird. Die linearen und quadratischen Wechselwirkungsterme L_{ij}^{xz} , L_{ij}^{zx} , L_{ij}^{zz} , B_{ijk}^{xxx} , B_{ijk}^{xzz} , B_{ijk}^{zxx} , B_{ijk}^{zxx} , B_{ijk}^{zxx} sind in Anhang D explizit aufgeführt.

2.6 Empirischer Ornstein-Uhlenbeck Prozess der SGS-Kopplung

Zur Anwendung der SMR wird die Statistik der SGS-Selbstwechselwirkungen benötigt. Hierzu wird ein OU-Prozess empirisch aus einem Referenzlauf bestimmt (siehe Anhang C), welcher die SGS-Selbstwechselwirkungen reproduziert. Voraussetzung dafür ist die Unabhängigkeit aller Komponenten der SGS-Variable. In der Variable \mathbf{z} treten, aufgrund der verschwindenden lokalen Mittel, innerhalb jeder groben Zelle Abhängigkeiten auf. Die Unabhängigkeit wird durch eine lokale Fouriertransformation innerhalb jeder groben Zelle und anschließender Elimination der verschwindenden nullten Fouriermode gewährleistet. Daraufhin werden die OU-Parameter aus der unabhängigen Fouriertransformierten SGS-Variable $\boldsymbol{\theta}$ und die gesuchten statistischen Momente direkt aus den OU-Parametern bestimmt. Hierzu erlaubt die Diagonalisierung des OU-Driftterms die analytische Berechnung der gesuchten statistischen Momente (siehe Anhang C).

2.6.1 Fouriertransformation der SGS-Variable

Die eingeführte SGS-Variable \mathbf{z} ist nicht unabhängig, da das lokale Mittel von \mathbf{z} über je eine grobe Zelle verschwindet

$$\frac{1}{n} \sum_{k=ni}^{n(i+1)-1} z_k = 0. \quad (2.31)$$

Diese Eigenschaft wird verwendet, um innerhalb jeder groben Zelle einen Freiheitsgrad von \mathbf{z} zu eliminieren. Dazu wird der Vektor komponenten- und blockweise Fouriertransformiert und die verschwindende nullte Wellenzahl eliminiert. Die neu entstehende unabhängige SGS-Variable $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{M_f}$ ist mittels der Transformation

$$\theta_i = \hat{T}_{ij} z_j, \quad (2.32)$$

$$z_i = \hat{R}_{ij} \theta_j, \quad (2.33)$$

mit der ursprünglichen Variable \mathbf{z} verknüpft. Die Matrizen $\hat{R} \in \mathbb{R}^{M \times M_f}$ und $\hat{T} \in \mathbb{R}^{M_f \times M}$ stellen dabei jeweils die inverse und die vorwärts Fouriertransformation in diskreter Form dar, wobei $M_f = M - M_c$ die Anzahl der unabhängigen SGS-Freiheitsgrade ist. Die Transformationsmatrizen haben jeweils eine blockdiagonale Struktur

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{r} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{r} \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} \hat{t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{t} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

wobei auf den Diagonalen die Matrizen \hat{r} und \hat{t} jeweils $2N_c$ -mal auftauchen und die blockweisen Transformationen repräsentieren.

2.6.2 Ersetzung der SGS-Kopplung

Der nächste Schritt zur Anwendung der SMR verlangt die Ersetzung der SGS-Selbstwechselwirkungen $L_{ij}^{zz} z_j + B_{ijk}^{zzz} z_j z_k$ durch einen empirischen OU-Prozess. Die

SGS-Gleichung (2.30) für θ wird dann zu

$$d\theta_i = \hat{T}_{ik} \left(L_{kj}^{zx} x_j + B_{kjl}^{zxx} x_j x_l + B_{kjl}^{zxx} x_j \hat{R}_{lm} \theta_m \right) dt + \Gamma_{ij} \theta_j dt + \sigma_i dW_i, \quad (2.35)$$

wobei Γ_{ij} der negativ-definite OU-Driftterm ist und $\sigma_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}$ der diagonale Diffusionstensor mit den Wienerinkrementen dW_i . Es ist zu beachten, dass bei dem Wiener Prozess in Gleichung (2.35) nicht über i summiert wird. Darüber hinaus soll Γ nur innerhalb je einer groben Zelle SGS-Moden koppeln. In der Folge hat Γ eine blockdiagonale Struktur. Für die SMR-Schließung hat dies eine Lokalität der Schließung zur Folge, bei der nur Nachbarn und nächste Nachbarn koppeln.

Zur Bestimmung der OU-Parameter sind verschiedene empirische Methoden möglich. Zwei dieser Methoden werden in Anhang C beschrieben. Bei der Maximum Likelihood Methode werden die SGS-Selbstwechselwirkungen durch den OU-Prozess modelliert $\hat{T}_{ij} \hat{c}_j^z(\hat{R}_{kl} \theta_l) \approx \Gamma_{ij} \theta_j dt + \sigma_i dW_i$. Es stellt sich allerdings heraus, dass die zweite Methode, bei der die OU-Parameter basierend auf der zeitversetzten Kovarianzfunktion bestimmt werden, das DNS besser reproduzieren kann. Im Unterschied zur Maximum Likelihood Methode wird hier die SGS-Variable vollständig modelliert $d\theta_i \approx \Gamma_{ij} \theta_j dt + \sigma_i dW_i$. Dies hat den Vorteil, dass bei der Anwendung der SMR im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ die Statistik (Varianz und zeitversetzte Kovarianz) von θ unverändert bleibt, wodurch die in der SMR angenommene Dominanz des OU-Prozesses in der SGS-Variable garantiert ist. Darüber hinaus generiert das Verfahren einen negativ-definiten OU-Drifttensor Γ , welcher zur Anwendung der SMR vorausgesetzt ist.

2.6.3 Transformation in den Ornstein-Uhlenbeck-Eigenwertraum

Bei der Beschreibung der Atmosphäre durch einen linearen und einen stochastischen Prozess stellt sich heraus, dass der lineare Operator diagonalisierbar ist (Delsole 2004). Diese Eigenschaft ist bei der Anwendung der SMR hilfreich, weil hierdurch die benötigten statistischen Momente aus dem Drifttensor Γ und dem Diffusionstensor σ_{ij} des OU-Prozesses analytisch ermittelbar sind (siehe Anhang C).

Es wird die SGS-Variable y_i eingeführt

$$y_i = U_{ij}^{-1} \theta_j, \quad (2.36)$$

wobei die reelle invertierbare Matrix U durch die reelle Jordansche Normalform von Γ zustande kommt

$$\Gamma = U \Lambda U^{-1}. \quad (2.37)$$

Die Eigenwertmatrix $\Lambda \in \mathbb{R}^{M_f \times M_f}$ hat eine blockdiagonale Struktur, wie auch die Transformationsmatrizen $U \in \mathbb{R}^{M_f \times M_f}$ und $U^{-1} \in \mathbb{R}^{M_f \times M_f}$. Die Blöcke sind jeweils $2(n-1) \times 2(n-1)$ groß

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda} & & 0 \\ & \hat{\Lambda} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \hat{U} & & 0 \\ & \hat{U} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{U}^{-1} & & 0 \\ & \hat{U}^{-1} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Durch die geforderte räumliche Homogenität der Schließung sind alle Blöcke innerhalb einer Matrix identisch. In $\hat{\Lambda}$ stehen die Eigenwerte von Γ . Es kommen \tilde{N} reelle Eigenwerte und $2(n-1) - \tilde{N}$ komplexe Eigenwertpaare vor. Der Realteil steht auf der Diagonalen und der Imaginärteil auf den Off-Diagonalen

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_1 & & & & & & & 0 \\ & \hat{\gamma}_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \hat{\gamma}_{\tilde{N}} & & & & \\ & & & & \hat{\gamma}_{\tilde{N}+1} & -\omega_{\tilde{N}+1} & & \\ & & & & \omega_{\tilde{N}+1} & \hat{\gamma}_{\tilde{N}+1} & & \\ & & & & & & \hat{\gamma}_{\tilde{N}+3} & -\omega_{\tilde{N}+3} \\ & & & & & & \omega_{\tilde{N}+3} & \hat{\gamma}_{\tilde{N}+3} \\ & & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Mit den Transformationsmatrizen $R = \hat{R}U$ und $T = U^{-1}\hat{T}$ für

$$\mathbf{z} = R\mathbf{y} = \hat{R}U\mathbf{y}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{y} = T\mathbf{z} = U^{-1}\hat{T}\mathbf{z} \quad (2.41)$$

erhält man die Modellgleichungen (2.29) und (2.35) ausgedrückt mit der neuen Variable

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (2.42)$$

$$\dot{y}_i = b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Lambda_{ij}y_j + \Sigma_i \dot{W}_i, \quad (2.43)$$

wobei hier die heuristische Schreibweise $\dot{\mathbf{W}} = d\mathbf{W}/dt$ verwendet wird. Für die stochastische Diffusion wird der effektive stochastische Prozess $\Sigma_i = \sqrt{U_{ij}^{-1}U_{ij}^{-1}\sigma_j^2}$ verwendet. Dieser weist die selbe Varianz wie $\tilde{\sigma}_{ij} = U_{ij}^{-1}\sigma_j$ auf und vernachlässigt Kreuzkorrelationen, welche durch die Transformation in den OU-Eigenwertraum zustande kommen. Für komplexe Eigenwerte sind die Koeffizienten paarweise identisch. Die beiden Kopplungsterme lauten

$$\begin{aligned} b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= L_{ij}^{xz} R_{jk} y_k + B_{ijk}^{xxz} R_{kl} x_j y_l + B_{ijk}^{xzz} R_{jl} R_{km} y_l y_m \\ &= L_{ij}^{xy} y_j + B_{ijk}^{xxy} x_j y_k + B_{ijk}^{xyy} y_j y_k, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= T_{ij} \left(L_{jk}^{zx} x_k + B_{jkl}^{zxx} x_k x_l + B_{jkl}^{zxx} R_{lm} x_k y_m \right) \\ &= L_{ij}^{yx} x_j + B_{ijk}^{yxx} x_j x_k + B_{ijk}^{yxy} x_j y_k. \end{aligned} \quad (2.45)$$

2.7 Stochastische Modenreduktion, Schließung im eindimensionalen Flachwassermodell

Die gesuchte Schließung in Gleichung (2.23) für das 1DSW ist anhand der SMR durch die Gleichungen (1.41) und (1.42) mit den Wechselwirkungstermen aus den Gleichungen (2.44) und (2.45) gegeben. Die Wechselwirkungsterme sind in Anhang D explizit angegeben. Hierbei besteht der stochastische Term der Gleichung (1.42) aus unterschiedlichen Einzeltermen. Der erste Einzelterm beschreibt ein rein additives Rauschen, der zweite ein multiplikatives Rauschen. Aus der expliziten Form der Wechselwirkungsterme folgt, dass der additive Anteil auf H und HU wirkt, der multiplikative Anteil nur auf HU .

2.7.1 Lösbarkeitsbedingung

Grundvoraussetzung für die Anwendung der SMR ist die Erfüllung der Lösbarkeitsbedingung Gleichung (1.16). Für die numerische Überprüfung muss gezeigt werden, dass $B_{ijk}^{xyy} \langle y_j y_k \rangle \leq \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ gilt, wobei für den modellintrinsic Parameter $\varepsilon \ll 1$ gelten muss. Für kleine ε kann die numerische Überprüfung allerdings problematisch sein. Daher wird in dieser Arbeit der Beweis für die quadratisch approximierten Flachwassergleichungen analytisch durchgeführt.

Analytischer Beweis: Setzt man $\kappa_{jk} = R_{jl} R_{km} \langle y_l y_m \rangle$ mit der Transformation $\mathbf{z} = R\mathbf{y}$ in Gleichung (1.40) ein, erhält man

$$B_{ijk}^{xyy} \langle y_j y_k \rangle = B_{ijk}^{xzz} \kappa_{jk} = B_{ijj}^{xzz} \kappa_{jj}. \quad (2.46)$$

Im zweiten Schritt wird ausgenutzt, dass der Wechselwirkungsterm B_{ijk}^{xzz} immer nur quadratisch von einem Punkt wirkt und keine Mischprodukte aufweist, womit die Indizes j und k immer identisch sind $B_{ijk}^{xzz} = B_{ijk}^{xzz} \delta_{jk}$, siehe Gleichung (D.12). Summiert über alle groben Zellen i verschwindet der Term

$$\sum_i B_{ijj}^{xzz} \kappa_{jj} = 0. \quad (2.47)$$

Dies ist der Fall, da der Operator aufgrund der Flussformulierung antisymmetrisch in j ist und die Varianzmatrix $\langle y_i y_j \rangle$ eine homogene Blockstruktur aufweist. Da kein Ort speziell ausgezeichnet ist, verschwindet damit auch jeder Term in der Summe individuell. \square

2.7.2 Lokalität

Die Kopplung durch die Diskretisierung, dargestellt mit den Wechselwirkungstermen aus Anhang D, betrifft jeweils nur benachbarte grobe Zellen. In den Schließungstermen der Gleichungen (1.41) und (1.42) kommen immer Produkte von zwei Wechselwirkungstermen und einem statistischen Moment des OU-Prozesses vor. Die statistischen Momente weisen, wie der OU-Prozess, eine blockdiagonale Struktur auf. In der Folge koppelt die Schließung jeweils fünf grobe Zellen (Nachbarn und nächste Nachbarn) miteinander. Die resultierende Lokalität der Schließung ermöglicht eine hohe Effizienz in der Anwendung, welche sich insbesondere bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden bemerkbar macht.

2.7.3 Konstanter Term $K_i = L_{mj}^{xy} B_{imk}^{xxy} (C_S)_{jk}$

Im deterministischen Schließungsanteil in Gleichung (1.41) kommt der konstante Term K_i vor. Dieser ist, wie in Abschnitt 3.3 bewiesen, gesamtmassen- und impulserhaltend, wodurch das räumliche Mittel von K_i verschwindet. Es folgt aus Abschnitt 3.3 allerdings nicht, dass jede Komponente von K_i individuell verschwindet. Würde nicht jede Komponente individuell verschwinden, wären die sich in der Schließung ergebenden räumlich abhängigen und zeitlich konstanten Quell- und Senkterme kontraintuitiv, da in den ursprünglichen Gleichungen kein Ort speziell

ausgezeichnet ist. An dieser Stelle wird bewiesen, dass der Term K_i nicht nur im räumlichen Mittel, sondern auch individuell für jede Komponente verschwindet.

Beweis: In Abschnitt 3.3 ist beschrieben, dass kein Massen- und Impulsaustausch zwischen den einzelnen Wechselwirkungstermen existiert, wodurch

$$0 = \sum_{i=0}^{N-1} B_{ijk}^{xxy} x_j y_k = \sum_{i=0}^{N-1} B_{ijk}^{xxz} x_j z_k = \sum_{i=0}^{N-1} B_{ijk}^{xxz} \hat{\Omega}_{jk} . \quad (2.48)$$

Der konstante Schließungsterm K_i kann zusammengefasst werden zu

$$K_i = L_{mj}^{xz} B_{imk}^{xxz} \int_0^\infty \langle z_j(0) z_k(\tau) \rangle d\tau = B_{imk}^{xxz} \Omega_{mk} . \quad (2.49)$$

Die Gleichung (2.48) gilt für ein beliebiges $\hat{\Omega}$, wodurch im Vergleich mit Gleichung (2.49) folgt, dass das räumliche Mittel des konstanten Schließungsterms verschwindet

$$\sum_{i=0}^{N-1} K_i = \sum_{i=0}^{N-1} B_{ijk}^{xxz} \Omega_{jk} = 0 . \quad (2.50)$$

Damit bleiben die Gesamtmasse und der Gesamtimpuls unverändert. Die Wechselwirkungsterme und der OU-Prozess sind homogen im Raum, wodurch kein Ort speziell ausgezeichnet ist. Es folgt, dass alle Komponenten des Terms identisch sind $K_i = K_j = 0$ und verschwinden. \square

2.7.4 Räumliche Skalenadaptivität der Schließung

Das Prinzip der SMR erlaubt es, ohne eine erneute Berechnung des OU-Prozesses, die Schließung an eine geänderte räumliche Auflösung des reduzierten Modells anzupassen. Erreicht wird diese Skalenadaptivität indem die Wechselwirkungsterme auf ihre Abhängigkeit von dem Mittelungsintervall n untersucht werden und n in den entsprechenden Termen ausgeklammert wird.

So kann beispielsweise der lineare Term $L^{h'x}$ ausgedrückt werden als

$$L^{h'x} = \tilde{L}^{h'x} + \frac{1}{n} \hat{L}^{h'x} , \quad (2.51)$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{L}^{h'x} &= -\frac{1}{2\Delta x} (HU_{I[i+1]} - HU_{I[i-1]}) + \frac{\nu}{\Delta x^2} (H_{I[i-1]} - 2H_{I[i]} + H_{I[i+1]}) , \\ \frac{1}{n}\hat{L}^{h'x} &= \frac{1}{2n\Delta x} (HU_{I[i+1]} - HU_{I[i-1]}) - \frac{\nu}{n\Delta x^2} (H_{I[i+1]} - 2H_{I[i]} + H_{I[i-1]}) .\end{aligned}\quad (2.52)$$

Eine analoge Aufspaltung für die hu' Komponente $L^{hu'x} = \tilde{L}^{hu'x} + \frac{1}{n}\hat{L}^{hu'x}$ ermöglicht den kombinierten Tensor L^{yx} ebenfalls aufzuspalten

$$L^{yx} = \tilde{L}^{yx} + \frac{1}{n}\hat{L}^{yx} . \quad (2.53)$$

Selbes ist auch für die anderen Wechselwirkungsterme möglich

$$\begin{aligned}L^{xy} &= \tilde{L}^{xy} + \frac{1}{n}\hat{L}^{xy} , & B^{xyy} &= \frac{1}{n}\hat{L}^{xyy} , & B^{xxy} &= \frac{1}{n}\hat{L}^{xxy} , \\ B^{yxx} &= \tilde{B}^{yxx} + \frac{1}{n}\hat{L}^{yxx} , & B^{yxy} &= \tilde{B}^{yxy} + \frac{1}{n}\hat{L}^{yxy} .\end{aligned}\quad (2.54)$$

Die deterministische Schließung ist damit

$$\begin{aligned}\beta_i &= \left(\frac{1}{n}\hat{L}_{mj}^{xy} + \frac{1}{n}\hat{B}_{mlj}^{xxy} x_l \right) \frac{1}{n}\hat{B}_{imk}^{xxy} (C_S)_{jk} \\ &\quad + \left(\left[\tilde{L}_{mo}^{yx} + \frac{1}{n}\hat{L}_{mo}^{yx} \right] x_o + \left[\tilde{B}_{mop}^{yxx} + \frac{1}{n}\hat{B}_{mop}^{yxx} \right] x_o x_p \right) \\ &\quad \frac{1}{n} \left(\hat{L}_{ik}^{xy} + \hat{B}_{ijk}^{xxy} x_j \right) \langle \mathbf{y}\mathbf{y}^T \rangle_{mn}^{-1} (C_S)_{nk} \\ &\quad + \frac{1}{n}\hat{B}_{ijk}^{xyy} \left[\tilde{B}_{mpo}^{yxy} + \frac{1}{n}\hat{B}_{mpo}^{yxy} \right] x_p \langle \mathbf{y}\mathbf{y}^T \rangle_{mn}^{-1} (C_T)_{onjk} \\ &= \frac{1}{n}\tilde{\beta}_i + \frac{1}{n^2}\hat{\beta}_i ,\end{aligned}\quad (2.55)$$

wobei im letzten Schritt die Terme entsprechend ihrer Potenz von n zusammengefasst werden. Für den effektiven stochastischen Prozess folgt

$$\begin{aligned}d\xi_i &\approx \frac{1}{n} \sqrt{2\hat{B}_{ijn}^{xyy} (C_T)_{jnkl} \hat{B}_{ikl}^{xyy}} dW_i^1 \\ &\quad + \frac{1}{n} \sqrt{2 \left(\hat{L}_{in}^{xy} + \hat{B}_{ijn}^{xxy} x_j \right) (C_S)_{nk} \left(\hat{L}_{ik}^{xy} + \hat{B}_{ilk}^{xxy} x_l \right)} dW_i^2 .\end{aligned}\quad (2.56)$$

Ändert sich die Auflösung N_c des grob aufgelösten Modells, so ist mit dem entsprechenden Mittelungsintervall $n = \frac{N}{N_c}$ die Skalierung der Schließungsterme β und $d\xi$ gegeben. Eine Änderung der OU-Statistik mit n ist bei der vorgestellten Skalierung nicht berücksichtigt.

Kapitel 3

Modellbeschreibung

In diesem Kapitel wird zuerst das allgemeine Setup, welches allen nachfolgenden Modellen zu Grunde liegt, vorgestellt. Anschließend werden alle untersuchten Modelle detailliert beschrieben und schließlich ihre Erhaltungseigenschaften diskutiert.

3.1 Setup

3.1.1 Parameter

Das Modellgebiet weist periodische Ränder auf und ist $L = 10^4$ km lang. Die mittlere Wassersäulenhöhe ist $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} h_i = \mathcal{H} = 10$ km. Die Diffusionskonstante ist $\nu = 10^5 \text{ km}^2 \text{ Tag}^{-1}$. Alle Modellintegrationen laufen über 10^4 Tage mit einem Ausgabezeitschritt von 10^{-3} Tage. Mit Ausnahme der ersten 100 Integrationstage (spin-up) gehen alle Zustände in die vorgestellte Auswertung ein.

In den hier betrachteten Modellen ist die Diffusionskonstante entsprechend groß genug gewählt, um eine zu weite Auslenkung der Säulenhöhe zu vermeiden. In der Folge ist die Verwendung eines Slope-Limiters (siehe z.B. Vater et al. 2015) überflüssig, welcher gewährleisten würde, dass die Säulenhöhe keine negativen Werte aufweist. In späteren Anwendungen mit einer nicht homogenen Orographie ist ein solcher Slope-Limiter vermutlich notwendig.

3.1.2 Stochastischer Antriebsterm

Der Antriebsterm ist ein großskaliger stochastischer Antrieb (Chekhlov et al. 1995), welcher ausschließlich auf die aufgelöste Variable \mathbf{x} projiziert und nur in der Impulsgleichung wirkt

$$\varrho_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\mu \alpha_k}{\sqrt{k} \Delta t} \cos \left(2\pi \left(\frac{kin\Delta x}{L} + \psi_k \right) \right) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

mit der Amplitude $\mu = 10^5 \text{ km}^2 \text{ Tag}^{-\frac{3}{2}}$. Die Zufallszahlen α_k und ψ_k werden zu jedem Integrationszeitschritt neu gewählt und sind normalverteilt $\mathcal{N}(0, 1)$.

Der Antrieb projiziert nur auf die führenden Fouriermoden $1 \leq k \leq 3$, wodurch das räumliche Mittel nicht angetrieben wird. Im Fall $4 \leq k \leq 7$ bildete sich, für die untersuchte Konfiguration, keine Zeitskalenseparation zwischen der aufgelösten und der SGS-Variable heraus.

3.1.3 Schwerewellenzyklus

Linearisiert man die eindimensionalen Flachwassergleichungen, unter Vernachlässigung des Antriebs- und des Diffusionsterms, um einen ruhenden Zustand

$$u = u_0 + u' \quad u_0 = \frac{1}{L} \int_0^L u \, dx \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.2)$$

$$h = h_0 + h' \quad h_0 = \frac{1}{L} \int_0^L h \, dx = \mathcal{H}, \quad (3.3)$$

so liefert die Vernachlässigung aller nichtlinearen Anteile

$$0 = \partial_t u' + g \partial_x h', \quad (3.4)$$

$$0 = \partial_t h' + \mathcal{H} \partial_x u'. \quad (3.5)$$

Durch Fouriertransformation der Gleichungen findet man die Dispersionsrelation $\omega^2 = g\mathcal{H}k^2$. Für die Phasengeschwindigkeit (Holton et al. 1973) der Schwerewellen folgt $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g\mathcal{H}} \approx 313 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Ein Schwerewellenzyklus, bei dem die Welle einmal durch das periodische Modellgebiet läuft dauert damit $\tau = L/\sqrt{g\mathcal{H}} \approx 0.37$ Tage.

3.2 Modelle

In diesem Abschnitt werden die untersuchten Modellkonfigurationen des 1DSW beschrieben. Hierbei wird mit dem Referenzmodell auf einer hohen räumlichen Auflösung begonnen. Schrittweise werden die Annahmen, welche die Anwendung der SMR voraussetzen, eingeführt. Zuerst wird die Approximation von $\frac{1}{h}$ eingeführt, gefolgt von den ersetzten SGS-Selbstwechselwirkungen und einer anschließenden approximativen Untersuchung des Grenzwertes $\epsilon \rightarrow 0$. Darauf folgend werden, zur Überprüfung der Notwendigkeit einer SGS-Parametrisierung, zwei niedrig aufgelöste Modelle ohne eine SGS-Parametrisierung eingeführt. Anschließend wird das Modell mit SMR-Schließung mit zwei Vergleichsmodellen, mit rein empirischen Schließungen, vorgestellt.

3.2.1 Hoch aufgelöste Simulationen

Es werden drei hoch aufgelöste Modelle untersucht. Unterschieden wird zwischen einem Referenzmodell, welches für die nachfolgenden Modelle die atmosphärische Realität darstellt, und zwei Modellen mit der Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ und parametrisierten SGS-Selbstwechselwirkungen, wobei eines der Modelle den Grenzwert einer unendlichen Zeitskalenseparation simuliert.

Referenz Modell (DNS)

Als Referenz dient ein hoch auflösendes Modell der Gleichung (2.12) mit $N = 512$ Zellen. Im Folgenden wird dieses Modell *direkte numerische Simulation* (DNS) genannt. Die zeitliche Integration erfolgt mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 10^{-4}$ Tagen.

DNS-h und OU-DNS

Als hilfreicher Vorabtest für die SMR werden zwei Modelle untersucht, wodurch die Auswirkungen der Approximationen näher betrachtet werden können. Im ersten Schritt wird das DNS-h aus den Gleichungen (2.29) und (2.30) verwendet, welches die Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ in allen Termen, außer dem BRT Anteil, verwendet. Anschließend werden die SGS-Selbstwechselwirkungen im DNS-h durch

DNS	Direkte numerische Simulation mit einer räumlichen Auflösung von N Zellen $\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{z}); \dot{z}_i = b_i^z(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + c_i^z(\mathbf{z})$
BRT	Bare-Truncation Modell mit einer räumlichen Auflösung von $N_c = \frac{N}{n}$ $\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x})$
LRM	Low-Resolution Modell, DNS mit einer niedrigen räumlichen Auflösung von $N_c = \frac{N}{n}$
DNS-h	DNS mit $\frac{1}{h}$ -Approximation im nicht BRT-Anteil $\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + (L_{ij}^{xz} z_j + B_{ijk}^{xxx} x_j z_k + B_{ijk}^{xxx} z_j z_k)$ $\dot{z}_i = (L_{ij}^{zx} x_j + B_{ijk}^{zxx} x_j x_k + B_{ijk}^{zxx} x_j z_k) + (L_{ij}^{zz} z_j + B_{ijk}^{zzz} z_j z_k)$
OU-DNS	DNS mit $\frac{1}{h}$ -Approximation im nicht BRT-Anteil und durch OU-Prozess ersetzten SGS-Selbstwechselwirkungen $\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dot{y}_i = b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \Lambda_{ij} y_j + \Sigma_i \dot{W}_i$
OU-DNS-TSF	OU-DNS mit Zeitskalenseparationsfaktor $\epsilon = 0.05$ $\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \frac{1}{\epsilon} b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \dot{y}_i = \frac{1}{\epsilon} b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\epsilon^2} \Lambda_{ij} y_j + \frac{1}{\epsilon} \Sigma_i \dot{W}_i$
BRT-OU	BRT mit empirischer OU-Schließung $dx_i = \left(\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \tilde{\Gamma}_{ij} \hat{x}_j^I \right) dt + \tilde{\sigma}_i dW_i$
LRM-OU	LRM mit empirischer OU-Schließung
BRT-SMR	BRT mit der SMR-Schließung $dx_i = [\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \beta_i(\mathbf{x})] dt + d\xi_i(\mathbf{x})$
BRT-SMR-0.6	BRT-SMR mit 60% stochastischem Schließungsterm $dx_i = [\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \beta_i(\mathbf{x})] dt + 0.6 d\xi_i(\mathbf{x}).$
BRT-SMR-0.0	BRT-SMR mit rein deterministischer Schließung $dx_i = [\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \beta_i(\mathbf{x})] dt$

Tabelle 3.1: Zusammenfassung der unterschiedlichen Modelle.

einen empirischen OU-Prozess ersetzt, Gleichungen (2.42) und (2.43), wodurch das OU-DNS definiert ist.

Die Parameter des Prozesses werden anhand der integrierten Kovarianzfunk-

tion bestimmt, siehe Gleichungen (C.13) und (C.14). Die alternativ vorgestellte Maximum Likelihood Methode aus Anhang C.1.1 liefert schlechtere Ergebnisse für das OU-DNS und das BRT-SMR (nicht gezeigt).

Es stellt sich heraus, dass das OU-DNS mit den OU-Parametern aus den Gleichungen (C.13) und (C.14) nicht stabil ist. Die Instabilität wird durch eine zusätzliche skalenabhängige Dämpfung (Achatz et al. 1999) behoben, welche zum OU-Prozess hinzuaddiert wird (siehe Anhang C.1.3).

Wie in allen weiteren stochastischen Modellen erfolgt die zeitliche Integration über eine Split-Step-Methode, bei der der deterministische Anteil mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und der stochastische Anteil mit einem Euler-Mayurama Verfahren (Kloeden et al. 1992) integriert werden. Die Zeitschrittweite ist $\Delta t = 10^{-4}$ Tage, wie auch beim DNS.

Asymptotischer Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$

Der Einfluss der SMR-Schließung kann vorab untersucht werden, indem der Grenzwert von $\epsilon \rightarrow 0$ in Gleichung (1.3) für das OU-DNS in den Gleichungen (2.42) und (2.43) numerisch simuliert wird. Hierzu wird $\epsilon = 0.05$ gewählt. Entsprechend muss der Zeitschritt verkürzt werden zu $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$ Tagen. Das Modell wird im Folgenden OU-DNS-TSF genannt ($TSF = \text{time scale separation factor}$).

3.2.2 Niedrig aufgelöste Simulationen

Mit dem hoch aufgelösten DNS als Referenz können die folgenden niedrig aufgelösten Modelle evaluiert werden. Es wird ein Modell mit der SMR-Schließung eingeführt, im weiteren BRT-SMR genannt. Das BRT-SMR wird mit zwei niedrig aufgelösten Modellen mit und ohne Schließungen verglichen, wobei die verwendeten Schließungen vollständig empirisch sind. Die Modelle werden auf dem groben Gitter mit $N_c = 64$ integriert. In abweichenden Fällen ist dies explizit erwähnt.

Niedrig aufgelöste Simulationen ohne SGS-Parametrisierung

Niedrig aufgelöste Modelle können auf verschiedene Weisen definiert werden. In dieser Arbeit werden zwei unterschieden. Das erste Modell verwendet die ur-

sprünglichen Gleichungen (2.12) des DNS mit einer niedrigeren räumlichen Auflösung $N_c = \frac{N}{n}$ und wird im Weiteren *Low-Resolution Modell* (LRM) genannt.

Als Alternative definiert der Bare-Truncation Anteil (BRT) des DNS (2.22) ebenfalls ein Modell mit niedriger Auflösung N_c . Der Unterschied zwischen BRT und LRM liegt in einer unterschiedlichen effektiven Diffusion. Für das BRT ist diese proportional zu $\frac{\nu}{n\Delta x^2}$ und für das LRM $\frac{\nu}{(n\Delta x)^2}$. In der Folge weist das BRT eine um den Faktor n stärkere Diffusion auf.

Niedrig aufgelöste Simulationen mit SGS-Parametrisierung

BRT mit SMR-Parametrisierung: Gleichung (2.23) definiert das *Bare-Truncation Modell mit SMR-Schließung* (BRT-SMR). Die SMR-Schließung besitzt sowohl deterministische Anteile aus Gleichung (1.41) als auch stochastische Anteile aus Gleichung (1.42) und koppelt lokal fünf benachbarte Zellen, basierend auf Wechselwirkungstermen der Gleichungen (2.44) und (2.45). Zur Stabilisierung des Modells ist es notwendig die Diffusion im BRT-Anteil auf $\nu = 2 \cdot 10^5 \text{ km}^2\text{Tag}^{-1}$ zu verstärken. Der Integrationszeitschritt ist mit $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ Tagen kürzer als im DNS.

BRT und LRM mit empirischer OU-Parametrisierung: Das BRT und das LRM, ergänzt durch jeweils eine empirische Schließung, definiert das *BRT-OU* und das *LRM-OU*. In beiden Fällen handelt es sich um OU-Schließungen basierend auf der Maximum Likelihood Methode, welche in Anhang E.1 beschrieben sind. Beide Schließungen koppeln, analog zur SMR-Schließung, lokal fünf benachbarte Zellen.

3.3 Erhaltungseigenschaften

Unter der Voraussetzung, dass der Antriebsterm ein verschwindendes räumliches Mittel aufweist, erhält das Referenzmodell Gleichung (2.12) sowohl die Gesamtmasse (äquivalent zur mittleren Säulenhöhe) $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h_k$, als auch den Gesamtpuls $\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} hu_k$.

Man kann auch für die Zustandsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{z} Erhaltungseigenschaften

herleiten. So folgt aus der Definition der SGS-Variable, dass das räumliche Mittel von \mathbf{z} innerhalb jeder groben Zelle verschwindet, wodurch auch das räumliche Mittel von \mathbf{z} im gesamten Gebiet verschwindet $\sum_{i=0}^{N-1} z_i = 0$. Aufgrund dessen muss auch die Summe der zeitlichen Tendenzen verschwinden

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{N-1} z_i = 0. \quad (3.6)$$

Aus der Symmetrie der Diskretisierung folgt, dass auch die mittlere Tendenz der aufgelösten Variable verschwinden muss

$$0 = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{N-1} \phi_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{I(i)} + z_i) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{N-1} x_{i(i)} = 0, \quad (3.7)$$

wodurch folgt, dass der BRT-Anteil $\boldsymbol{\rho}^x + \mathbf{a}^x$ die Erhaltungseigenschaften erfüllt. Betrachtet man die linearen und quadratischen Wechselwirkungsterme aus Anhang D erkennt man, dass jeder Wechselwirkungsterm, aufgrund seiner Symmetrie, ein verschwindendes räumliches Mittel aufweist. Es gibt daher keinen Impuls- oder Massenaustausch zwischen den einzelnen Termen.

Die Ersetzung der Selbstwechselwirkungsterme von \mathbf{z} durch einen OU-Prozess verletzt diese Erhaltungseigenschaften nicht, da der OU-Prozess nicht auf die nullte Fouriermode in der jeweiligen groben Gitterzelle wirkt. Das Modell mit ersetzten Selbstwechselwirkungstermen (siehe OU-DNS in Abschnitt 3.2) ist damit auch impuls- und massenerhaltend. Diese Eigenschaft gilt auch nach Einführung des Zeitskalenseparationsfaktors ϵ , da kein Impuls- oder Massenaustausch zwischen den einzelnen Termen vorkommt.

Das BRT-SMR, welches den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ abbildet, muss diese Eigenschaft folglich ebenso erfüllen. Durch genaue Betrachtung der vorkommenden Wechselwirkungsterme kann dies auch analytisch gezeigt werden. Exemplarisch wird die Argumentation hier an einem Term vorgestellt. Man betrachtet

$$B_{ijk}^{xyy} B_{mno}^{yxy} x_p \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{mn}^{-1} (C_T)_{onjk} = B_{ijk}^{xyy} \alpha_{jk}^y = B_{ijk}^{xzz} \alpha_{jk}^z. \quad (3.8)$$

Im ersten Schritt werden alle Summen (hier über die Komponenten m, n, o) zusam-

mengefasst zu α_{jk}^y und anschließend in den z -Raum transformiert. Bei Betrachtung des Operators in seiner expliziten Form in Gleichung (D.12) fällt auf, dass sich die einzelnen Terme, summiert über die i -te Komponente, aufheben, wodurch die Erhaltungseigenschaften erfüllt sind. Für alle weiteren Terme der Schließung verläuft die Argumentation analog.

Für den effektiven stochastischen Term gilt die Erhaltung offensichtlich nicht, da der Wiener Prozess nicht zwangsläufig ein verschwindendes räumliches Mittel aufweist. Durch Subtraktion des Mittels der stochastischen Komponente wird in der Praxis die Erhaltung gewährleistet. Für den hochdimensionalen stochastischen Schließungsterm aus Gleichung (1.25), angewendet auf das quadratische 1DSW, sind die Erhaltungseigenschaften, aufgrund obiger Argumentation, ohne Subtraktion des Mittels erfüllt.

Die Gesamtenergie, zusammengesetzt aus der verfügbaren potentiellen Energie $\frac{1}{2} \int_0^L g(h^2 - \mathcal{H}^2) dx$ und der kinetischen Energie $\frac{1}{2} \int_0^L hu^2 dx$, ist für die Diskretisierung in keinem der untersuchten Modelle erhalten. Es kommt zwischen den einzelnen Modelltermen zu einem Austausch von Energie und damit auch zwischen SGS- und aufgelösten Variablen. Die Modelle bewegen sich jeweils innerhalb eines Energieregimes, welches über den Energieeintrag durch den Antriebsterm auf großen Skalen, die Energiesenke durch Diffusion bei kleinen Skalen und den Energietransport zwischen den Skalen festgelegt ist. Die Reproduktion des Energiespektrums anhand der SMR-Schließung ist nur möglich, wenn die Schließung diese Energieflüsse korrekt darstellt.

Kapitel 4

Ergebnisse

Im Folgenden Kapitel werden die Ergebnisse der unterschiedlichen Simulationen vorgestellt. Die Autokorrelation und das Energiespektrum sind jeweils qualitativ identisch für die Impulsvariable hu und die Wassersäulenhöhe h . Es werden daher nur die Ergebnisse für h gezeigt und diskutiert.

4.1 Hoch aufgelöste Simulationen

DNS: Einen ersten Eindruck von dem Verhalten des Modells liefert Abbildung 4.1. Dort ist der Zustand der hochaufgelösten Variablen h und u sowie der aufgelösten Variablen H und HU gezeigt. Man erkennt die deutlich niedrigere räumliche Auflösung der aufgelösten Variablen anhand der sichtbaren Treppengebilde bei großen Steigungen. Es ist ein Schockwellen-ähnliches Verhalten zu beobachten, wie zum Beispiel nach 300 Tagen bei 100 km. Man erkennt das Auseinanderlaufen eines Wellenberges zwischen 300.05 und 300.1 Tagen in der Region um sechs km und das Entstehen eines Wellenberges zwischen 300.1 und 300.15 Tagen zwischen drei und vier km.

Die linke Graphik von Abbildung 4.2 zeigt die zeitliche Abhängigkeit der Autokorrelation der aufgelösten Variable H und der SGS-Variable h' im DNS Modell. Man erkennt eine langsam abklingende Oszillation der Autokorrelation von H mit einer Periode von $\tau = \frac{L}{\sqrt{gH}} \approx 0.37$ Tage. Diese kann durch einen Schwerkwellenzyklus erklärt werden, bei dem eine Welle die Zeit τ benötigt, um einmal

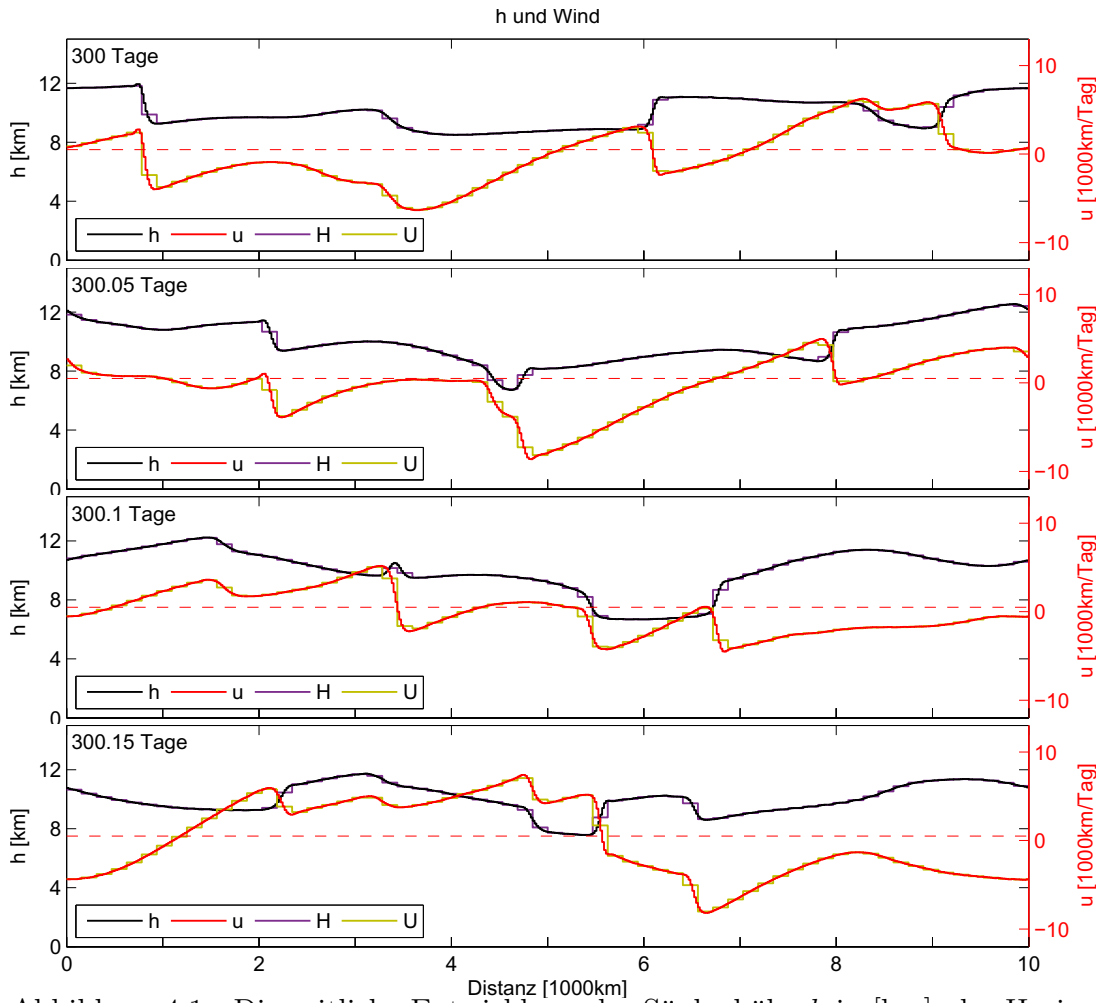


Abbildung 4.1: Die zeitliche Entwicklung der Säulenhöhe h in [km], des Horizontalwindes u in $\frac{1000 \text{ km}}{\text{Tag}}$ und der aufgelösten Variablen H und U zu den Zeitpunkten 300 Tagen (erste Zeile), 300.05 Tagen (zweite Zeile), 300.1 Tagen (dritte Zeile) und 300.15 Tagen (vierte Zeile).

durch das periodische Gebiet zu wandern. Man kann schlussfolgern, dass das Modell durch die Dynamik der Schwerewellen dominiert ist. Die Autokorrelation der SGS-Variable h' klingt deutlich schneller ab als die Autokorrelation von H . Der große Unterschied zwischen den Dekorrelationszeiten der aufgelösten Variable und der SGS-Variable bestätigt die Annahme der Zeitskalenseparation zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} im Modell.

Die räumliche Form der Varianz von h' ist in der rechten Graphik von Abb. 4.3 abgebildet. Die Amplitude der Varianz von h' ist deutlich kleiner als die mittlere Varianz von H , siehe Tabelle 4.1. Die Varianz von h' ist konsistent mit der

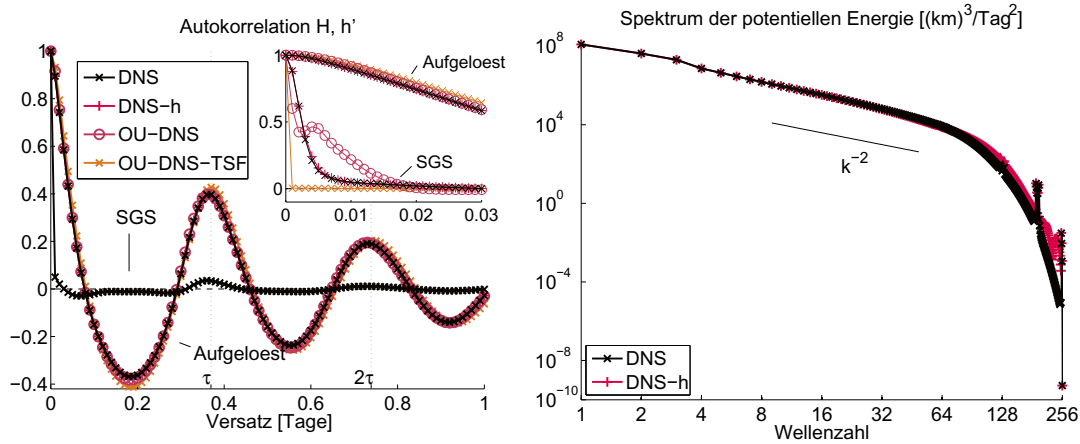


Abbildung 4.2: **Links:** Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation der aufgelösten Variable H und der SGS-Variable h' . Im großen Fenster ist die Autokorrelation für beide Variablen gezeigt, sowie die Autokorrelation von H des DNS-h, OU-DNS und des OU-DNS-TSF. Auf der Zeitachse ist die charakteristische Zeitskala eines Schwerewellenzyklus τ angegeben, siehe Abschnitt 3.1.3. Im kleinen Fenster ist ein kürzerer Zeitabschnitt dargestellt. Hier sind die Autokorrelationskurven aller Modelle in jeweils beiden Variablen gezeigt. **Rechts:** Das Spektrum der potentiellen Energie des DNS und DNS-h berechnet aus h .

in Abschnitt 2.4 diskutierten U-Form. Sie steigt dabei von der Mitte der jeweiligen groben Zelle zu den Rändern hin an. Erklärbar ist das Verhalten durch eine räumlich abklingende Autokorrelation von h (Abschnitt 2.4).

Das Spektrum der potentiellen Energie im DNS ist im rechten Teil von Abb. 4.2 aufgeführt. Für die hier getroffene Wahl des Antriebsterms und des Diffusionsparameters bildet sich im Inertialbereich für die ersten 64 Wellenzahlen ein k^{-2} Abfall aus. Zwischen Wellenzahl drei und vier liegt eine kleine Stufe, die durch den Antrieb hervorgerufen wird, welcher nur auf die ersten drei Wellenzahlen wirkt.

Die beiden Variablen H und HU sind nahezu normalverteilt. Dies kann aus zwei Gründen gefolgert werden. Zum einen können die in Tabelle 4.1 gezeigten vierten statistischen Momente von H und HU durch die entsprechenden Gauß-vierten Momente mit einem Fehler von nur 4% und 2% erklärt werden. Zum anderen sind die ungeraden statistischen Momente im Vergleich zu den geraden statistischen Momenten verschwindend klein (nicht gezeigt).

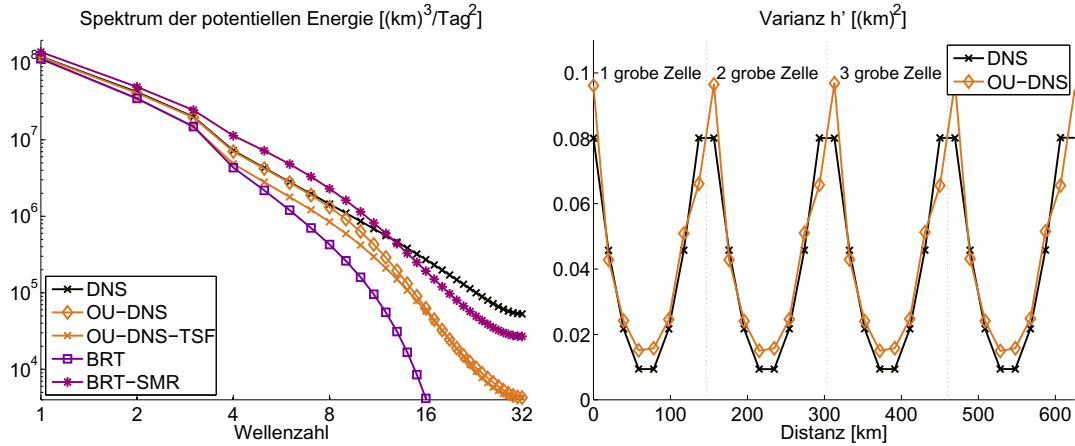


Abbildung 4.3: **Links:** Das Spektrum der potentiellen Energie bestimmt aus H des DNS, OU-DNS und des OU-DNS-TSF mit $\epsilon = 0.05$. Außerdem ist das Spektrum des BRT, sowie des BRT-SMR gezeigt. **Rechts:** Die räumliche Verteilung der Varianz der SGS-Variable h' in 32 feinen Gitterzellen (bzw. vier grobe Gitterzellen) mit einem Mittelungsintervall $n = 8$. Gezeigt sind die Ergebnisse des DNS und OU-DNS Modells.

Approximationen zur Vorbereitung der SMR: Die Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$, beschrieben in Abschnitt 2.5, ist der erste Schritt, der zur Anwendung der SMR notwendig ist. Die Approximation hat nur geringfügige Auswirkungen auf das Modell. Das resultierende DNS-h reproduziert das DNS sowohl in der Autokorrelation von h' und H , als auch im Spektrum (siehe Abb. 4.2).

Zusätzlich zur Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ werden die SGS-Selbstwechselwirkungen durch einen empirischen OU-Prozess ersetzt (siehe Abschnitt 2.6). Das resultierende OU-DNS-Modell in den Gleichungen (2.42) und (2.43) reproduziert die Autokorrelation des DNS in H mit geringfügigen Unterschieden (siehe Abb. 4.2). In der Autokorrelation von h' kommt es zu einer Oszillation, welche die zeitlich integrierte Autokorrelation $\int_0^{\hat{\tau}} \langle h'(0)h'(\tau) \rangle d\tau$ mit $\hat{\tau} = 0.02$ um den Faktor 1.44 vergrößert.

Das Energiespektrum des OU-DNS, projiziert auf das grobe Gitter, ist in der linken Grafik von Abb. 4.3 dargestellt. Das Spektrum der ersten sieben Wellenzahlen kann das OU-DNS reproduzieren, erst für höhere Wellenzahlen fällt es merklich ab. Dieses Verhalten deutet auf eine zu starke Dämpfung des deterministischen Schließungsterms in den hohen Wellenzahlen hin. Die räumliche Verteilung der Varianz von h' des OU-DNS ist in der rechten Grafik von Abb. 4.3 dargestellt und

Tabelle 4.1: Die erste Spalte in beiden Tabellen gibt die räumlich gemittelten zweiten ($k = 2$) und vierten ($k = 4$) zentrierten statistischen Momente des DNS an. Die weiteren Spalten zeigen für das jeweilige Modell den relativen Fehler zum DNS Moment. Die **obere** Tabelle zeigt die Momente von H , die **untere** von HU . Es sind $\mathcal{U}_1 = (10^3(\text{km})^2\text{Tag}^{-1})^2$ und $\mathcal{U}_2 = 10^7\mathcal{U}_1^2$.

H	DNS	LRM	BRT	LRM-OU	BRT-OU	BRT-SMR	BRT-SMR-0.6	BRT-SMR-0.0
$k = 2$	2.846 (km) ²	0.138	-0.167	-0.589	-0.125	0.195	0.029	-0.049
$k = 4$	23.56 (km) ⁴	0.542	-0.290	-0.821	-0.207	0.455	0.080	-0.079

HU	DNS	LRM	BRT	LRM-OU	BRT-OU	BRT-SMR	BRT-SMR-0.6	BRT-SMR-0.0
$k = 2$	2082 \mathcal{U}_1	0.255	-0.159	-0.597	-0.141	0.099	-0.052	-0.124
$k = 4$	1.277 \mathcal{U}_2	1.119	-0.274	-0.834	-0.251	0.185	-0.119	-0.247

folgt dem Ergebnis des DNS mit kleinen Unterschieden.

A priori Test der SMR-Schließung: Das spätere Verhalten des Modells mit der SMR-Schließung kann vorab simuliert werden. Hierzu wird ausgenutzt, dass das BRT-SMR dem asymptotischen Grenzwert von $\epsilon \rightarrow 0$ der Gleichung (1.3) entspricht. Dieser Grenzwert wird numerisch durch ein kleines $\epsilon = 0.05$ simuliert, womit das OU-DNS-TSF definiert ist.

In der Autokorrelation von H ist ein marginaler Unterschied zum DNS zu erkennen, welcher allerdings deutlich größer ist als der Unterschied zwischen DNS und OU-DNS (siehe Abb. 4.2). Die Autokorrelation des OU-DNS-TSF in h' fällt deutlich schneller ab als die Autokorrelation des DNS. Dies ist nachvollziehbar, da durch die verstärkte Zeitskalenseparation die charakteristische Zeitskala der SGS-Variable verkleinert wird.

Das Energiespektrum des OU-DNS-TSF liegt in allen Wellenzahlen unterhalb vom OU-DNS. Bis zur dritten Wellenzahl folgt das Spektrum des OU-DNS-TSF dem Spektrum des BRT. Für höhere Wellenzahlen nähert sich der Energieinhalt dem OU-DNS an. Die geringen Änderungen im Schritt vom OU-DNS zum OU-DNS-TSF zeigen, dass die in der SMR gewählte Skalierung der Kopplungsterme mit ϵ (Abschnitt 1.1) dem Verhältnis der Wechselwirkungstermamplituden im OU-DNS entspricht. Darüber hinaus deutet dies sinnvolle Ergebnisse der SMR-Schließung an.

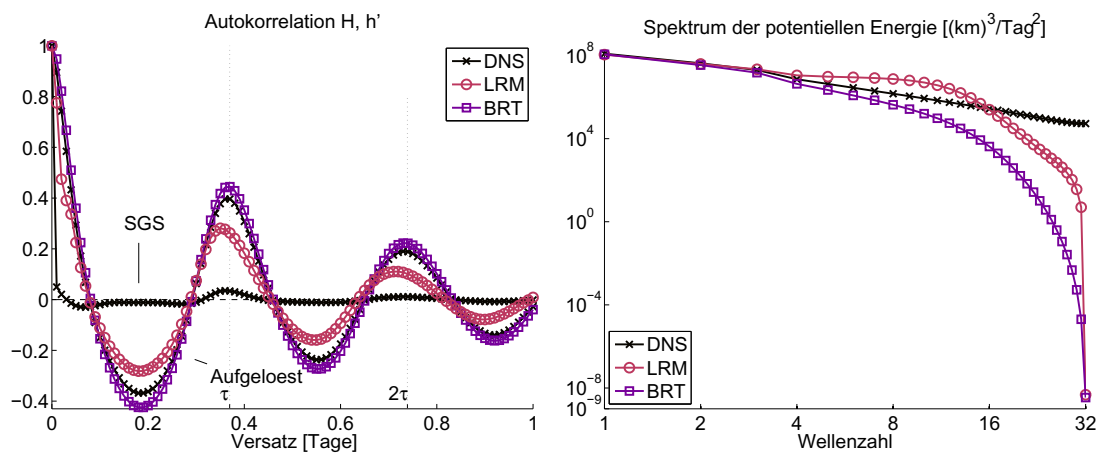


Abbildung 4.4: **Links:** Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation in H für das DNS und beide niedrig aufgelösten Modelle ohne SGS-Parametrisierung (LRM, BRT), sowie die Autokorrelation von h' für das DNS. **Rechts:** Das Spektrum der potentiellen Energie aus H für das DNS, LRM und BRT.

4.2 Niedrig aufgelöste Simulationen ohne SGS-Parametrisierung

Um einordnen zu können inwiefern, ein Gewinn durch eine Schließung möglich ist, werden in diesem Abschnitt die Ergebnisse der niedrig aufgelösten Modelle ohne SGS-Parametrisierung diskutiert. Die zeitliche Autokorrelation dieser Simulationen ist für H in der linken Graphik von Abb. 4.4 gezeigt. Die Amplitude der Korrelations-Oszillation im LRM ist etwas schwächer als im DNS mit einem relativen Fehler von 6.3%. Dieser wurde aus den gezeigten Kurven für einen Zeitversatz zwischen 0 und 1 Tag berechnet. Das BRT weist leicht stärkere Oszillationen auf als im DNS und einen relativen Fehler von 2.3%. Die Periode des DNS kann das BRT reproduzieren. Das LRM weist eine kürzere Periode auf.

Die Energiespektren sind in der rechten Graphik von Abb. 4.4 gezeigt. Das BRT besitzt auf allen Skalen eine niedrigere Energie als das DNS und weist auch einen steileren Abfall auf. Im Unterschied dazu besitzt das LRM im mittleren Wellenzahlenregime zwischen den Wellenzahlen vier und 15 einen Energieüberschuss und auf kleinen Skalen einen Energiemangel. Das LRM weist auf allen Skalen mehr Energie auf, als das BRT. Die statistischen Momente des LRM überschätzen das DNS, im

vierten Moment von HU sogar mit 111.9%, siehe Tabelle 4.1. Das BRT generiert zu kleine Momente und das vierte Moment von H wird um 29% unterschätzt.

Es wurden auch Simulationen des LRM mit höheren Auflösungen $N_c \in \{128, 256\}$ durchgeführt. Dabei wurde festgestellt, dass mindestens eine Auflösung von $N_c = 256$ notwendig ist, um das Spektrum in den ersten 32 Wellenzahlen zu reproduzieren. Dies belegt die Notwendigkeit einer SGS-Parametrisierung, wenn die Auflösung auf unter $N_c = 256$ Punkte reduziert wird.

4.3 Niedrig aufgelöste Simulationen mit SGS-Parametrisierung

Energiespektren: Die Spektren der potentiellen Energie für die Modelle mit einer SGS-Parametrisierung sind in der rechten Graphik von Abb. 4.5 gezeigt. Das qualitative Verhalten des DNS kann mit der SMR-Schließung reproduziert werden. Allerdings generiert sie im Vergleich zum DNS einen Energieüberschuss in den ersten 12 Wellenzahlen und einen Mangel für größerer Wellenzahlen.

Die empirischen Schließungen für das Bare-Truncation Model (BRT-OU) und das niedrig aufgelöste DNS (LRM-OU) sind nicht in der Lage das Spektrum des DNS zu reproduzieren. Insbesondere das LRM-OU Spektrum weist zu wenig Energie auf allen Skalen auf. Das BRT-OU reproduziert das DNS Spektrum auf den ersten 15 Wellenzahlen, für höhere Wellenzahlen ist es aber zu dämpfend.

Statistische Momente: In Tabelle 4.1 sind die relativen Fehler der statistischen Momente der unterschiedlichen Simulationen aufgeführt. Alle Schließungen generieren hier große Fehler. Die empirischen Schließungen unterschätzen die Momente und das BRT-SMR überschätzt diese, was sich mit der Beobachtung im Energiespektrum deckt. Eine mögliche Erklärung wäre, dass die Energierückstreuung von den kleinen Skalen, parametrisiert durch den stochastischen Term, zu stark ist. Bei den Momenten in HU liefert die SMR-Schließung die kleinsten Fehler von knapp 10%. In H weist das BRT-SMR größere absolute Fehler auf als das BRT-OU, jedoch kleinere als das LRM-OU. Bemerkenswert ist, dass nur die BRT-OU Schließung in der Lage ist, im Vergleich zum unparametrisierten BRT-Modell, in

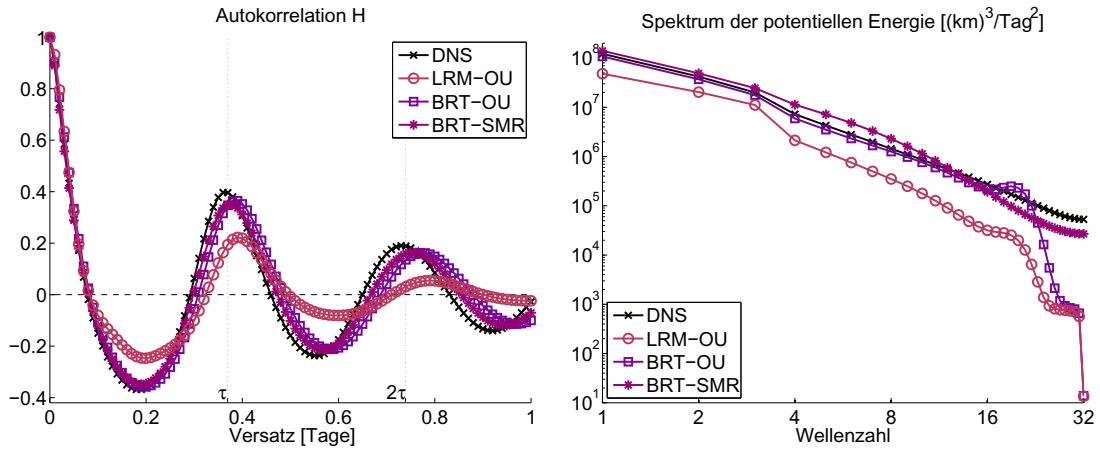


Abbildung 4.5: Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation in H (**links**) und das Spektrum der potentiellen Energie (**rechts**) für das DNS und drei Modelle mit SGS-Parametrisierung (LRM-OU, BRT-OU, BRT-SMR).

allen Momenten eine Verbesserung zu erzielen. Das BRT-SMR liefert, im Vergleich zum BRT, ein indifferentes Bild und das LRM-OU vergrößert die Fehler in allen Momenten, verglichen mit dem LRM.

Verbesserung der Energiebilanz: Verglichen mit dem DNS besitzt das BRT-SMR zu viel Energie, wie man sowohl am Spektrum, als auch der Varianz (dem zweiten statistischen Moment) sieht. Dies trifft auch im Vergleich mit dem OU-DNS-TSF zu (siehe Abb. 7.4). Der Fehler kann daher nicht von den unterschiedlichen, auch dem OU-DNS-TSF inne wohnenden, Approximationen her rühren, wie zum Beispiel der Zeitskalenseparation, der OU-Ersetzung der SGS-Selbstwechselwirkungen oder der polynomiellen Approximation der Wechselwirkungsterme durch $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ in der Impulsgleichung.

Der Energieüberschuss muss durch einen zu großen Energieeintrag der SMR-Schließung zustande kommen. Der stochastische Schließungsterm $d\xi$ stellt einen Term dar, der einen Energieeintrag in das Modell liefert. Um die Überschätzung der Varianz vom BRT-SMR zu verringern, werden Simulationen durchgeführt in denen die Amplitude dieses Terms verkleinert wird. Es werden zwei Fälle vorgestellt. Im einen Fall wird der Term um 40% reduziert und im anderen Fall vollständig. Die Reduktion erfolgt in beiden Variablen H und HU jeweils um den selben Faktor.

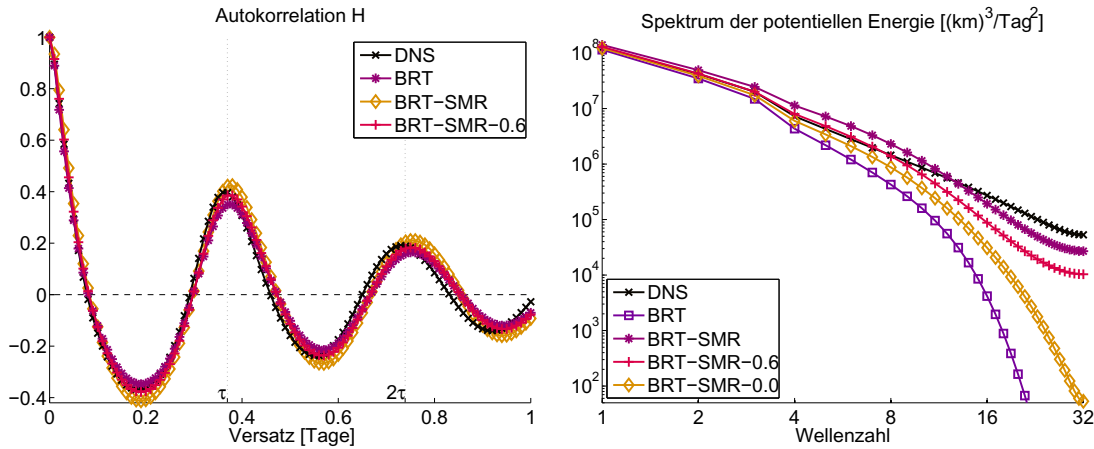


Abbildung 4.6: Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation in H (**links**) und das Spektrum der potentiellen Energie (**rechts**) von DNS, BRT, BRT-SMR und BRT-SMR mit gedämpftem stochastischem Schließungsterm $d\xi \rightarrow 0.6d\xi$ (BRT-SMR-0.6) bzw. unterdrücktem stochastischem Schließungsterm $d\xi \rightarrow 0$ (BRT-SMR-0.0).

Die stochastischen Terme in der SMR-Schließung parametrisieren zum Teil die Energierückstreuung von den kleinen Skalen zu den aufgelösten Skalen. Die Parametrisierung dieses Prozesses ist insbesondere bei Wetter- und Klimamodellen bedeutend (siehe z.B. Palmer 2001; Palmer et al. 2009; Berner et al. 2009).

Die Reduktion des stochastischen Schließungsterms auf 60% (BRT-SMR-0.6) reduziert den Varianzfehler deutlich, in H auf 2.9% und in HU auf -5.2% , siehe Tabelle 4.1. Im Energiespektrum führt sie zu einer Verbesserung bei den ersten acht Wellenzahlen, siehe Abb. 4.6, welche ca. 97% der gesamten potentiellen Energie beinhalten. Für höhere Wellenzahlen kommt es zu einem verringerten Energieinhalt. In Abb. 4.6 sieht man außerdem, dass der deterministische Schließungsterm allein zu einer Verbesserung des Energiespektrums, verglichen mit dem BRT, führt. Für die Energierückstreuung ist allerdings der stochastische Term dominant.

Autokorrelation: Die zeitlichen Autokorrelationsfunktionen der Modelle mit empirischer oder SMR-Schließung sind in der linken Graphik von Abb. 4.5 dargestellt. Das BRT-SMR ist in der Lage das DNS mit kleinen Unterschieden zu reproduzieren. Der relative Fehler der Korrelationskurve liegt bei 3.4%. Die empirischen Schließungen führen zu einem ähnlichen Ergebnis, im Falle des BRT-OU

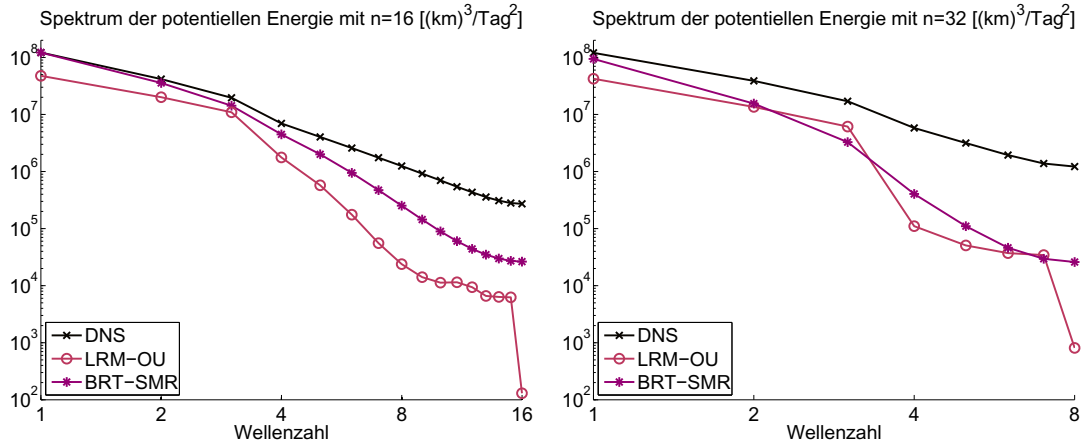


Abbildung 4.7: Das Spektrum der potentiellen Energie für die veränderten Mittelungsintervalle von $n = 16$; $N_c = 32$ (**links**) und $n = 32$; $N_c = 16$ (**rechts**) von DNS, LRM-OU und BRT-SMR.

mit einem relativen Fehler von 6.6%. Das LRM-OU weist eine schwächere Autokorrelation und einen Periodenfehler auf, der relative Fehler der Korrelationskurve beträgt 10.5%.

Durch die Reduktion der Amplitude des stochastischen Schließungsterms kommt es zu keiner signifikanten Änderung der Korrelationsfunktion (siehe Abb. 4.6). Dies hängt damit zusammen, dass die Korrelationsfunktion in stochastischen Modellen typischerweise durch den deterministischen Anteil bestimmt ist.

4.4 Skalenabhängigkeit der Schließung

Der Vorteil der SMR-Schließung ist, dass sie aus den zu Grunde liegenden Gleichungen rigoros abgeleitet wird, mit der Einschränkung der empirisch ersetzten SGS-Selbstwechselwirkungen. Das erlaubt die direkte Anpassung der Schließung ohne aufwendige Neuberechnung, wenn Parameter des Modells geändert werden.

Der Fall einer Änderung des Mittelungsintervalls zu $n = 16$, 32 und damit zu einer niedrigeren räumlichen Auflösung $N_c = \frac{N}{n} = 32, 16$ der reduzierten Modelle wird hier untersucht. Um die Modelle an die geänderte räumliche Auflösung anzupassen, werden die Gleichungen (2.55) und (2.56) verwendet. Im Unterschied dazu liegt für die rein empirischen Schließungen keine Adaptionsregel vor, weshalb die-

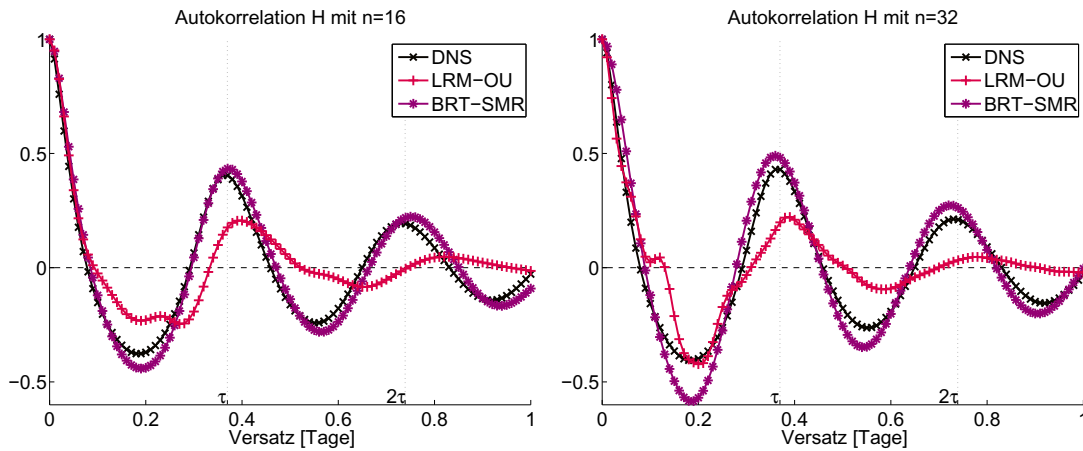


Abbildung 4.8: Autokorrelation für veränderte Mittelungsintervalle von $n = 16$; $N_c = 32$ (links) und $n = 32$; $N_c = 16$ (rechts) von DNS, LRM-OU und BRT-SMR.

se Schließungen unverändert bei anderen Auflösungen angewendet werden. In der Folge bleibt das LRM-OU bei den geänderten Auflösungen stabil, das BRT-OU ist jedoch in beiden untersuchten Auflösungen instabil.

Die Spektren des LRM-OU und des BRT-SMR für die veränderten Auflösungen sind in Abb. 4.7 dargestellt. Zum Vergleich ist jeweils das entsprechend projizierte Spektrum des DNS aufgeführt. In beiden Fällen beinhalten das LRM-OU und das BRT-SMR zu wenig Energie auf allen Skalen. Für $n = 16$ ist das Spektrum des BRT-SMR deutlich näher am Spektrum des DNS als das LRM-OU. Für $n = 32$ beinhalten beide Modelle, BRT-SMR und LRM-OU, ähnlich viel Energie, allerdings ist die Form des BRT-SMR-Spektrums deutlich realistischer, da mit steigenden Wellenzahlen ein kontinuierlicher Energieabfall vorliegt.

Die zeitliche Autokorrelation der Modelle ist in Abb. 4.8 gezeigt. Das BRT-SMR kann die qualitative Form der Autokorrelation des DNS reproduzieren, wobei es in beiden Fällen, $n = 16$ und $n = 32$, zu einer leichten Überschätzung der Korrelations-Oszillation und einem kleinen Phasenversatz kommt. Das LRM-OU kann nur den ersten Korrelationsabfall bis 0.08 Tage annähernd nachbilden. Für größere Zeitversätze unterscheidet sich sowohl die Korrelationsamplitude, als auch das qualitative Verhalten der Autokorrelation des LRM-OU deutlich von dem DNS.

Teil II

Zweidimensionales Flachwassermodell

Kapitel 5

Methodenteil

In diesem Kapitel wird das *Flachwassermodell in zwei räumlichen Dimensionen* (2DSW) vorgestellt. Hierzu werden die Grundgleichungen eingeführt und im Raum diskretisiert. Anschließend wird die ursprüngliche Zustandsvariable in eine aufgelöste und eine SGS-Variable aufgespalten. Nachfolgend wird die SMR-Schließung für das 2DSW vorgestellt und näher erläutert, wie die Wechselwirkungsterme im 2DSW bestimmt werden.

5.1 Flachwassergleichungen in zwei Dimensionen

Im Unterschied zum ersten Teil dieser Dissertation werden im zweiten Teil die Flachwassergleichungen in zwei räumlichen Dimensionen betrachtet. In der Folge sind Schwerewellen in der Lage, nicht nur in eine räumliche Richtung zu propagieren, sondern in zwei. Damit ist eine räumliche Zerstreuung durch eine vom Wellenursprung radial abnehmende Wellenamplitude, aber auch eine komplexe Interaktion der Wellen, möglich. Zusätzlich zu diesem Prozess beinhalten die zweidimensionalen Gleichungen auch einen Rotationsterm, welcher in der Impulsgleichung hinzu kommt

$$\partial_t \mathbf{u} + \overbrace{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}^{\text{Advektion}} = \overbrace{-g \nabla \eta}^{\text{Druckgradient}} + \overbrace{\nu^u \Delta \mathbf{u}}^{\text{Diffusion}} + \overbrace{\boldsymbol{\rho}^u}^{\text{Antrieb}} - \overbrace{\mathbf{f} \times \mathbf{u}}^{\text{Rotation}} . \quad (5.1)$$

Als physikalischer Parameter kommt der Coriolis Parameter f im Rotationsterm $\mathbf{f} \times \mathbf{u} = (-vf, uf)^T$ hinzu. Der Coriolis Parameter wird über einen konstanten Term anhand der f -Ebene approximiert, $f \approx f_0 = 2\Omega \sin \vartheta_0$. Hier ist Ω die Rotationsgeschwindigkeit der Erde und ϑ_0 der Breitengrad an dem die tangentielle f -Ebene anliegt.

Die Kontinuitätsgleichung bleibt unverändert. Damit lauten die Grundgleichungen komponentenweise

$$\begin{aligned} \overbrace{\partial_t \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}}^{\partial_t \phi} &= \overbrace{\begin{pmatrix} \varrho^h \\ \varrho^{hu} \\ \varrho^{hv} \end{pmatrix}}^{\mathbf{e}^{x^2}} - \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -hvf \\ huf \end{pmatrix}}^{\hat{\mathbf{f}}(\phi)} \\ &\quad - \underbrace{\partial_x \begin{pmatrix} hu - \nu \partial_x h \\ \frac{(hu)^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 - \nu \partial_x hu \\ huv - \nu \partial_x hv \end{pmatrix}}_{\partial_x \mathbf{F}_x(\phi)} - \underbrace{\partial_y \begin{pmatrix} hv - \nu \partial_y h \\ huv - \nu \partial_y hu \\ \frac{(hv)^2}{h} + \frac{g}{2} h^2 - \nu \partial_y hv \end{pmatrix}}_{\partial_y \mathbf{F}_y(\phi)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 Diskretisierung mittels finiter-Differenzen

Zur numerischen Bestimmung der räumlichen Ableitungen wird der Raum mittels eines zweidimensionalen Gitters diskretisiert. Der Definitionsbereich der Fläche $L_x \times L_y$ wird dabei in $N_{\Delta x} \times N_{\Delta y}$ feine Teilflächen der Größe $\Delta x \times \Delta y$ mit den Kantenlängen $\Delta x = \frac{L_x}{N_{\Delta x}}$ und $\Delta y = \frac{L_y}{N_{\Delta y}}$ unterteilt. Die Nummerierung der Intervalle erfolgt über die Indizes $i \in \{0, 1, \dots, N_{\Delta x} - 1\}$ und $j \in \{0, 1, \dots, N_{\Delta y} - 1\}$. Für den Ort gilt damit $x_{i,j} = x_0 + i\Delta x + j\Delta y$ und für die anderen Variablen die Abkürzungen $h_{i,j} = h(x_{i,j})$, $hu_{i,j} = hu(x_{i,j})$, $hv_{i,j} = hv(x_{i,j})$.

Zur Approximation des Flussterms wird die Diskretisierung im eindimensionalen Fall auf zwei Dimensionen übertragen

$$\partial_t \phi_{i,j} = -\frac{1}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j}^x - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j}^x \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(\mathbf{F}_{i,j+\frac{1}{2}}^y - \mathbf{F}_{i,j-\frac{1}{2}}^y \right) + \mathbf{e}_{i,j}^{x^2} - \hat{\mathbf{f}}_{i,j} \quad (5.3)$$

mit $\hat{\mathbf{f}}_{i,j} = (0, -hv_{i,j}f, hu_{i,j}f)^T$ und

$$\mathbf{F}_{i\pm\frac{1}{2},j}^x = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} (hu)_{i\pm 1,j} + (hu)_{i,j} - 2\nu \frac{h_{i\pm 1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \\ \frac{(hu_{i\pm 1,j})^2}{h_{i\pm 1,j}} + \frac{(hu_{i,j})^2}{h_{i,j}} + \frac{g}{2}h_{i\pm 1,j}^2 + \frac{g}{2}h_{i,j}^2 - 2\nu \frac{hu_{i\pm 1,j} - hu_{i,j}}{\Delta x} \\ \frac{hu_{i\pm 1,j}hv_{i\pm 1,j}}{h_{i\pm 1,j}} + \frac{hu_{i,j}hv_{i,j}}{h_{i,j}} - 2\nu \frac{hv_{i\pm 1,j} - hv_{i,j}}{\Delta x} \end{array} \right) \quad (5.4)$$

$$\mathbf{F}_{i,j\pm\frac{1}{2}}^y = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} hv_{i,j\pm 1} + hv_{i,j} - 2\nu \frac{h_{i,j\pm 1} - h_{i,j}}{\Delta y} \\ \frac{hu_{i,j\pm 1}hv_{i,j\pm 1}}{h_{i,j\pm 1}} + \frac{hu_{i,j}hv_{i,j}}{h_{i,j}} - 2\nu \frac{hu_{i,j\pm 1} - hu_{i,j}}{\Delta y} \\ \frac{(hv_{i,j\pm 1})^2}{h_{i,j\pm 1}} + \frac{(hv_{i,j})^2}{h_{i,j}} + \frac{g}{2}h_{i,j\pm 1}^2 + \frac{g}{2}h_{i,j}^2 - 2\nu \frac{hv_{i,j\pm 1} - hv_{i,j}}{\Delta y} \end{array} \right). \quad (5.5)$$

Durch die symmetrische Form der Diskretisierung ist das Verfahren, wie im eindimensionalen Fall, gesamtmassen- und gesamtimpulserhalten. Im Folgenden wird ein quadratischer Definitionsbereich $L_x = L_y = L$ mit quadratischen Teilflächen $\Delta x = \Delta y$ verwendet, wodurch $N_{\Delta x} = N_{\Delta y} = N$.

5.3 Lokale Mittelung

Das hoch aufgelöste quadratische Gitter dient der Berechnung eines Modells, welches in dieser Arbeit das Referenzmodell repräsentiert. Ziel ist es dieses Referenzmodell mit einem Modell zu simulieren, welches eine niedrigere räumliche Auflösung verwendet. Die Unterscheidung zwischen niedrig aufgelösten Variablen und SGS-Variablen erfolgt, analog zum eindimensionalen Fall, durch lokale räumliche Mittelung. Dazu wird der Definitionsbereich mit einem groben ebenfalls quadratischen Gitter mit einer Maschenweite von $n\Delta x$ überzogen. Es gibt damit $N_c = \frac{N}{n}$ grobe Gitterintervalle in beiden räumlichen Richtungen, in denen jeweils n feine Intervalle liegen.

Für die aufgelösten Variablen $H_{I,J}$, $HU_{I,J}$ und $HV_{I,J}$ gilt

$$\begin{pmatrix} H_{I,J} \\ HU_{I,J} \\ HV_{I,J} \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=nI}^{n(I+1)-1} \sum_{l=nJ}^{n(J+1)-1} \begin{pmatrix} h_{k,l} \\ hu_{k,l} \\ hv_{k,l} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Die SGS-Variablen $h'_{i,j}$, $hu'_{i,j}$ und $hv'_{i,j}$ werden als Abweichungen vom lokalen räumlichen Mittel definiert

$$\begin{pmatrix} h'_{i,j} \\ hu'_{i,j} \\ hv'_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{i,j} \\ hu_{i,v} \\ hv_{i,j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{I[i],J[j]} \\ HU_{I[i],J[j]} \\ HV_{I[i],J[j]} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

$I[i], J[j] \in \{0, 1, \dots, N_x - 1\}$ bezeichnen die Indizes der groben Zelle in welcher die feine Zelle mit den Indizes (i, j) liegt.

Es wird der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{M_c^2}$ eingeführt, der die aufgelösten Variablen $H_{I,J}$, $HU_{I,J}$, $HV_{I,J}$ beinhaltet, wobei $M_c = 3N_c$. Entsprechend beinhaltet $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{M^2}$ die SGS-Variablen $h'_{i,j}$, $hu'_{i,j}$, $hv'_{i,j}$, wobei $M = 3N$. Damit kann das Modell (5.3), analog zum eindimensionalen Fall, in der Form der Gleichungen (2.18) und (2.19) kompakt geschrieben werden, wobei der Antriebsterm $\boldsymbol{\varrho}^x$ nur auf die aufgelöste Variable \mathbf{x} projiziert.

5.4 Wechselwirkungsterme durch Projektion

Die explizite analytische Berechnung der Wechselwirkungsterme \mathbf{b}^x und \mathbf{b}^y , welche für die Berechnung der SMR-Schließung benötigt werden, ist für die zweidimensionalen Flachwassergleichungen, durch Erweiterung der Resultate des 1DSW in Anhang D, möglich. Effizienter ist es den Stencil (Diskretisierung aus Gleichung (5.3)) zu verwenden und durch Projektion mit dem Mittelungsoperator \mathcal{M} die entsprechenden Wechselwirkungsterme herauszufiltern.

Hierzu wird Gleichung (5.3) in der Kurzform verwendet

$$\dot{\boldsymbol{\phi}} = G(\boldsymbol{\phi}). \quad (5.8)$$

Der Operator \mathcal{M} bestimmt die lokalen Mittel von ϕ aus Gleichung (5.6), wodurch die Gleichungen (5.6) und (5.7) kompakt geschrieben werden als

$$\mathbf{x} = \mathcal{M}\phi, \quad \mathbf{z} = (1 - \mathcal{M})\phi. \quad (5.9)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (5.9) in (5.8) kann das DNS aus Gleichung (5.3) mittels der aufgelösten Variable \mathbf{x} und der SGS-Variable \mathbf{z} ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathcal{M}G(\phi) = \boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x}) + \mathbf{b}^{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ \dot{\mathbf{z}} &= (1 - \mathcal{M})G(\phi) = \mathbf{b}^z(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \mathbf{c}^z(\mathbf{z}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Die unterschiedlichen Wechselwirkungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x}) &= \mathcal{M}G(\mathcal{M}\phi), \\ \mathbf{b}^{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \dot{\mathbf{x}} - [\boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x})] &= \mathcal{M}[G(\phi) - G(\mathcal{M}\phi)], \\ \mathbf{c}^z(\mathbf{z}) &= (1 - \mathcal{M})G([1 - \mathcal{M}]\phi), \\ \mathbf{b}^z(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \dot{\mathbf{z}} - \mathbf{c}^z(\mathbf{z}) &= (1 - \mathcal{M})[G(\phi) - G([1 - \mathcal{M}]\phi)]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ist man an den Wechselwirkungen mit der Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{H}$ interessiert, muss die Funktion $G \rightarrow G^{\frac{1}{H}}$ entsprechend ersetzt werden, wobei $G^{\frac{1}{H}}$ die Funktion G mit der Approximation $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{H}$ ist.

Im speziellen Fall, dass $G(a+b) = G(a) + G(b)$ linear ist, können die Gleichungen in (5.11) vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\varrho}^x + L^{xx}\mathbf{x} = \mathcal{M}G(\mathcal{M}\phi), \\ \mathbf{b}^{xz}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= L^{xz}\mathbf{z} = \mathcal{M}[G([1 - \mathcal{M}]\phi)], \\ \mathbf{b}^z(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= L^{zx}\mathbf{x} = (1 - \mathcal{M})G([\mathcal{M}\phi]), \\ \mathbf{c}^z(\mathbf{z}) &= L^{zz}\mathbf{z} = (1 - \mathcal{M})G([1 - \mathcal{M}]\phi). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Für die Bestimmung der SMR werden die Wechselwirkungsterme \mathbf{b}^{xz} und \mathbf{b}^z benötigt. Hierzu werden die entsprechenden Tensoren wegen des benötigten Speicherplatzes nicht in einem vorgelagerten Schritt bestimmt und abgespeichert. Stattdessen berechnet die entsprechende Routine, hier am Beispiel von L^{xz} , die

Indizes $\hat{i} \in \hat{I}$, bei denen für ein gegebenes k der Tensor nicht verschwindet $L_{ik}^{xz} \neq 0$ anhand der Gleichungen (5.12). Anschließend gibt die Routine \hat{I} zusammen mit den Werten L_{ik}^{xz} des Tensors aus.

5.5 Stochastische Modenreduktion, Schließung im zweidimensionalen Flachwassermodell

Das weitere Vorgehen, welches zur Anwendung der SMR notwendig ist, verläuft analog zum eindimensionalen Fall. Zur Eliminierung des Terms $\frac{1}{h}$ aus der Impulsgleichung, wird in allen Termen, außer dem *Bare-Truncation Anteil* $\mathbf{g}^x + \mathbf{a}^x$ (BRT), $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\bar{h}}$ ersetzt. Damit folgt eine quadratische Form in den Kopplungstermen der beiden Variablen \mathbf{x} und \mathbf{y} , sowie den SGS-Selbstwechselwirkungen, wie in den Gleichungen (2.29) und (2.30).

Durch die anschließende Fouriertransformation innerhalb jeder groben Zelle und Eliminierung der nullten Mode der SGS-Variable \mathbf{z} , wird ein Freiheitsgrad pro grober Zelle reduziert. Die SGS-Selbstwechselwirkungen werden durch einen OU-Prozess approximiert. Mittels der Transformation $\mathbf{z} = R\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$ in den Eigenwertraum des OU-Driftterms, erhält man die Modellgleichungen in der Form der Gleichungen (2.42) und (2.43). Die SMR-Schließung aus den Gleichungen (1.41) und (1.42) kann anschließend für das zweidimensionale Modell bestimmt werden.

Im eindimensionalen Fall wurden zuerst, in der entsprechenden Routine, die Wechselwirkungsterme in Matrixform abgespeichert und anschließend durch ein Matrixprodukt in den \mathbf{y} -Raum transformiert. Die Wechselwirkungstermmatrizen waren dünn besetzt, wodurch ein großer Teil der verwendeten Rechenkapazität unnötig eingesetzt wurde. Für den zweidimensionalen Fall muss aus Komplexitätsgründen das hier vorhandene Optimierungspotenzial ausgenutzt werden. Dazu werden die Wechselwirkungsterme als Objekte in funktionaler Form im Gitterraum (\mathbf{z} -Raum) definiert, siehe Abschnitt 5.4. Eine anschließende Transformation in den \mathbf{y} -Raum würde dicht besetzte Tensoren erzeugen und dem Ziel einer optimierten Speichernutzung zuwiderlaufen.

Daher wird die SMR-Schließung, basierend auf den Wechselwirkungstermen im

Gitterraum (\mathbf{z} -Raum), formuliert

$$\begin{aligned} \beta_i &= (L_{mj}^{xz} + B_{mlj}^{xxz} x_l) B_{imk}^{xxz} (C_S^z)_{jk} \\ &+ (L_{mo}^{zx} x_o + B_{mop}^{zxx} x_o x_p) (L_{ik}^{xz} + B_{ijk}^{xxz} x_j) (C_{Sy})_{mk} , \\ &+ B_{ijk}^{xxz} B_{mpo}^{zxx} x_p (C_{Ty})_{omjk} . \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$d\xi_i = \sqrt{2B_{ijn}^{xxz} (C_T^z)_{jnk} B_{ikl}^{xxz}} dW_i^1 + \sqrt{2(L_{in}^{xz} + B_{ijn}^{xxz} x_j) (C_S^z)_{nk} (L_{ik}^{xz} + B_{ilk}^{xxz} x_l)} dW_i^2 . \quad (5.14)$$

Die dazu verwendeten Tensoren ergeben sich aus

$$(C_S^z)_{ij} = R_{ik} (C_S)_{kl} R_{lj} , \quad (5.15)$$

$$(C_T^z)_{ijkl} = R_{io} R_{jp} (C_T)_{opqr} R_{kq} R_{lr} , \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} (C_{Sy})_{mk} &= T_{ml} \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{ln}^{-1} T_{np} R_{pq} (C_S)_{qo} R_{ok} \\ &= \widetilde{\langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle}^{-1}_{mo} (C_S^z)_{ok} , \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} (C_{Ty})_{omjk} &= T_{mr} \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle_{rn}^{-1} R_{ol} (C_T)_{lnst} R_{sj} R_{tk} \\ &= \widetilde{\langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle}^{-1}_{mq} (C_T^z)_{oqjk} , \end{aligned} \quad (5.18)$$

wobei die Matrizen R und T die Transformation in den OU-Eigenwertraum darstellen ($\mathbf{z} = R\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = T\mathbf{z}$). In der Folge gilt $TR = \mathbb{1}$ und $RT \neq \mathbb{1}$. Außerdem werden die Tensoren C_S und C_T , definiert in Abschnitt 1.7, für das 2DSW und das Pseudoinverse $\widetilde{\langle \mathbf{z} \mathbf{z}^T \rangle}^{-1} = T \langle \mathbf{y} \mathbf{y}^T \rangle^{-1} T$ verwendet.

Kapitel 6

Modellbeschreibung

In diesem Kapitel wird zuerst das allgemeine Setup, welches allen nachfolgenden Modellen zu Grunde liegt, vorgestellt. Anschließend werden alle untersuchten Modelle beschrieben und ihre Erhaltungseigenschaften kurz diskutiert.

6.1 Setup

6.1.1 Parameter

Das Modellgebiet ist quadratisch mit einer jeweiligen Kantenlänge von $L = 10^4$ km und in beiden räumlichen Richtungen periodisch. Die mittlere Wassersäulenhöhe ist $\mathcal{H} = 10$ km. Die f-Ebene wird in den mittleren Breiten bei $\theta_0 = 45^\circ$ angelegt.

Die Diffusionskonstante ist $\nu = 5 \cdot 10^4 \text{ km}^2 \text{ Tag}^{-1}$. Alle Modellintegrationen laufen über 100 Tage mit einem Ausgabezeitschritt von 10^{-2} Tagen.

Die gezeigten Ergebnisse jedes Modells basieren auf einem Ensemble aus je 12 Modellintegrationen, welche sich durch unterschiedliche Realisierungen der Zufallszahlen des Antriebsterms unterscheiden. Als Anfangszustand des Ensembles wird der Endzustand nach einer Anlaufzeit von 100 Tagen verwendet. Die Anlaufzeit wird mit $h_{i,j} = \mathcal{H}$ und $hu_{i,j} = hv_{i,j} = 0$ initialisiert. Je nach untersuchtem Modell kommt es vor, dass Ensemblemitglieder divergieren. Diese werden in der Auswertung nicht berücksichtigt.

6.1.2 Stochastischer Antriebsterm

Der Antriebsterm vom eindimensionalen Fall aus Abschnitt 3.1.2 wird auf zwei räumliche Dimensionen erweitert

$$\mathbf{e}_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k=-3}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{\mu \alpha_{k,l}^{hu}}{\sqrt{\sqrt{k^2 + l^2} \Delta t}} \cos \left(2\pi \left(\frac{(ki + li) n \Delta x}{L} + \psi_k^{hu} \right) \right) \\ \sum_{k=-3}^3 \sum_{l=0}^3 \frac{\mu \alpha_{k,l}^{hv}}{\sqrt{\sqrt{k^2 + l^2} \Delta t}} \cos \left(2\pi \left(\frac{(ki + lj) n \Delta x}{L} + \psi_k^{hv} \right) \right) \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Hier werden die normalverteilten Zufallszahlen α_k^{hu} , α_k^{hv} and ψ_k^{hu} , ψ_k^{hv} verwendet. Die Amplitude des Antriebsparameters ist $\mu = 5 \cdot 10^3 \text{ km}^2 \text{ Tag}^{-\frac{3}{2}}$. Wie im eindimensionalen Fall hat der Antrieb keinen Beitrag in der nullten Wellenzahl $\alpha_{0,0}^{hu} = \alpha_{0,0}^{hv} = 0$, wodurch der mittlere Impuls $\int (hu, hv)^T dx dy$ nicht verändert wird.

6.1.3 Schwerewellengeschwindigkeit

Für das 2DSW auf der f-Ebene findet man die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = f_0^2 + g\mathcal{H}\mathbf{k}^2 \quad (6.2)$$

für die horizontale Wellenzahl \mathbf{k} (siehe Vallis 2006, Abschnitt 3.7.2). Die Wellen sind dispersiv, was man leicht an den Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten \mathbf{c}_p und \mathbf{c}_g erkennt

$$\mathbf{c}_p(\mathbf{k}_0) = \frac{\omega \mathbf{k}_0}{\mathbf{k}_0^2} = \mathbf{k} \frac{\sqrt{f_0^2 + g\mathcal{H}\mathbf{k}_0^2}}{\mathbf{k}^2}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{c}_g(\mathbf{k}_0) = \nabla_{\mathbf{k}} \omega |_{\mathbf{k}_0} = \mathbf{k} \frac{g\mathcal{H}}{\sqrt{f_0^2 + g\mathcal{H}\mathbf{k}^2}}. \quad (6.4)$$

Im Vergleich zum rotationsfreien Fall sind die Wellengruppen langsamer. Die Gruppengeschwindigkeit variiert zwischen $c_g = [91.02, 313.18] \frac{\text{m}}{\text{s}}$ für die Wellenzahlen $|\mathbf{k}| = [1, 256] \frac{1}{\text{L}}$. Ein Wellenzyklus dauert damit zwischen $\tau \approx [1.80, 0.37]$ Tagen,

wobei der kürzeste Zyklus eine parallel zur x- oder y-Achse laufende Welle ist und der längste Zyklus eine diagonal laufende Welle.

6.2 Modelle

6.2.1 Hoch aufgelöste Simulation

Die *direkte numerische Simulation* (DNS) von Gleichung (5.3) dient als Referenz. Die Auflösung beträgt $N = 512$ Zellen in beiden räumlichen Richtungen. Es wird ein adaptives Zeitschrittverfahren angewendet, welches in Anhang F genauer beschrieben ist.

6.2.2 Niedrig aufgelöste Simulationen

Die im Folgenden genannten niedrig aufgelösten Modelle verwenden eine Auflösung von $N_c = 64$ Zellen und einem Mittelungsintervall von $n = 8$ in beiden räumlichen Richtungen.

Niedrig aufgelöste Simulationen ohne SGS-Parametrisierung

Wie bei der Untersuchung des 1DSW werden zwei niedrig aufgelöste Modelle unterschieden. Zum einen wird das *Bare-Truncation* (BRT) Modell untersucht, welches ausschließlich die Selbstwechselwirkungen der aufgelösten Variable $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x$ beinhaltet. Zum anderen wird das *Low-Resolution Modell* (LRM) verwendet, welches die Zustandsgleichungen des DNS (5.3) bei niedriger räumlicher Auflösung bestimmt.

6.3 Erhaltungseigenschaften

Mit der selben Argumentation, wie in Abschnitt 3.3 für die eindimensionalen Modelle, lässt sich zeigen, dass die oben eingeführten zweidimensionalen Modelle ebenfalls massen- und impulserhaltend sind.

Kapitel 7

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der unterschiedlichen Simulationen vorgestellt. Wie im 1DSW sind im 2DSW die Autokorrelation und das Energiespektrum jeweils für die Impulsvariablen hu , hv und die Wassersäulenhöhe h qualitativ identisch. Selbes gilt auch für die diskutierten Wahrscheinlichkeitsdichten. Es werden daher nur die Ergebnisse für h diskutiert.

7.1 DNS des Flachwassermodells

Bei der Ensemblesimulation des DNS liegen von 10 der 12 gestarteten Simulationen Ergebnisse vor, welche in die folgende Auswertung eingehen. Bei zwei Simulationen divergieren die Trajektorien, nachdem ein unphysikalischer Überschlag der Wassersäulenhöhe zu negativen Werten auftritt. Das Auftreten solcher Ereignisse kann mittels eines Slope-Limiters (siehe z.B. Vater et al. 2015) verhindert werden. Die entsprechende Diskretisierung ist allerdings deutlich komplexer und würde den Rahmen dieser Dissertation sprengen.

Einen ersten Eindruck des DNS liefert Abbildung 7.1, in der die Felder der Säulenhöenschwankungen η und des Windfeldes \mathbf{u} (linke Spalte) zu mehreren aufeinanderfolgenden Zeitpunkten dargestellt sind. Man erkennt zu allen Zeitpunkten zyklonale Windfelder um Wellenberge und antizyklonale Windfelder um Wellentäler. Darüber hinaus ist das Entstehen und Verschwinden eines Wellentals bei (7000, 9000) km und eines Wellenberges bei (2000, 5000) km im zeitlichen

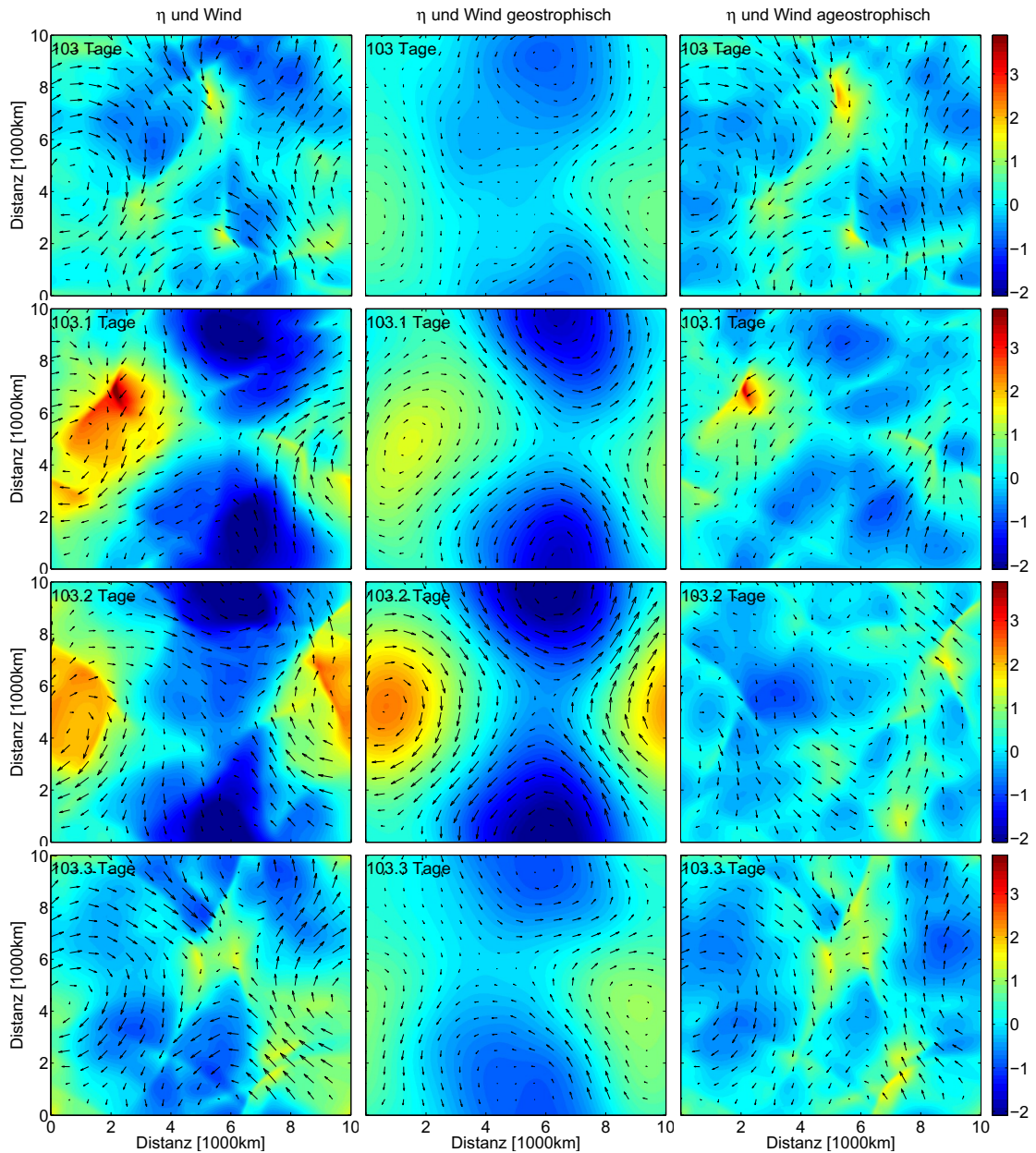


Abbildung 7.1: Die zeitliche Entwicklung Säulenhöhenabweichungen (**farbig**) in [km] und des Windfeldes (**Pfeile**) in $\frac{1000 \text{ km}}{\text{Tag}}$ des ersten Ensemblemitgliedes zu den Zeitpunkten 103 Tagen (erste Zeile), 103.1 Tagen (zweite Zeile), 103.2 Tagen (dritte Zeile) und 103.3 Tagen (vierte Zeile) nach der Initialisierung. Die **linke** Spalte zeigt η und \mathbf{u} des DNS, die **mittlere** Spalte die geostrophische Mode η_g und \mathbf{u}_g des DNS und die **rechte** Spalte die ageostrophische Mode η_a und \mathbf{u}_a des DNS.

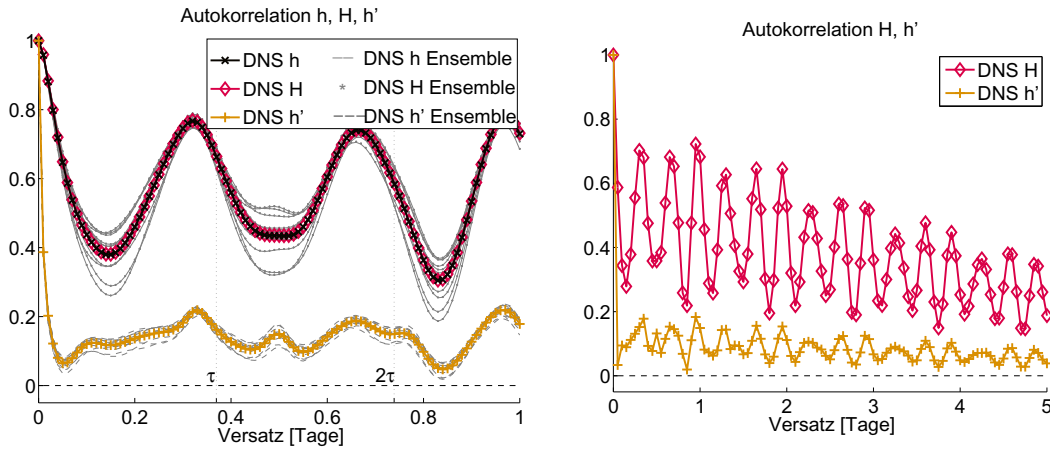


Abbildung 7.2: **Links:** Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation (des Ensemblemittels) der hoch aufgelösten Variable h , der aufgelösten Variable H und der SGS-Variable h' für das DNS. In grau sind die Autokorrelationen der einzelnen Ensemblemitglieder (durchgezogen für h , gestrichelt für h' und gepunktet für H) dargestellt. Diese sind nahezu überlappend für h und H . Auf der Zeitachse ist die charakteristische Zeitskala des schnellsten Schwerewellenzykluses τ angegeben, siehe Abschnitt 6.1.3. **Rechts:** Die Autokorrelation von H und h' des DNS auf der längeren Zeitskala von fünf Tagen.

Verlauf zu beobachten. Zum Zeitpunkt 103.3 Tagen ist ein Schockwellen-ähnliches Verhalten bei (6000, 9000) km zu erkennen .

Die zeitliche Autokorrelation des DNS in den Variablen h , H und h' ist in Abb. 7.2 dargestellt. Gezeigt ist zum einen die über alle Ensemblerealisierungen gemittelte Autokorrelation von h , H und h' und zum anderen die Korrelationen der individuellen Ensemblemitglieder. Es liegt eine Streuung des Ensembles um das Mittel vor. Das qualitative Verhalten ist jedoch identisch. Dies zeigt, dass sich die grundlegende Dynamik aller Ensemblerealisierungen sehr ähnlich ist. Die Autokorrelation der Variablen h und H ist sowohl für das Ensemblemittel, als auch individuell für jedes Ensemblemitglied nahezu identisch.

Im Ensemblemittel kommt es weder in H noch in h' zu einer ähnlich schnellen Dekorrelation, wie im 1DSW. H ist hierbei deutlich länger korreliert als h' . Darüber hinaus kommt es in der Autokorrelation von H zu Oszillationen, die erkennbar schneller sind, als der schnellste Schwerewellenzyklus, beschrieben in Abschnitt 6.1.3. In beiden Variablen H und h' ist der Korrelationsabfall erst auf

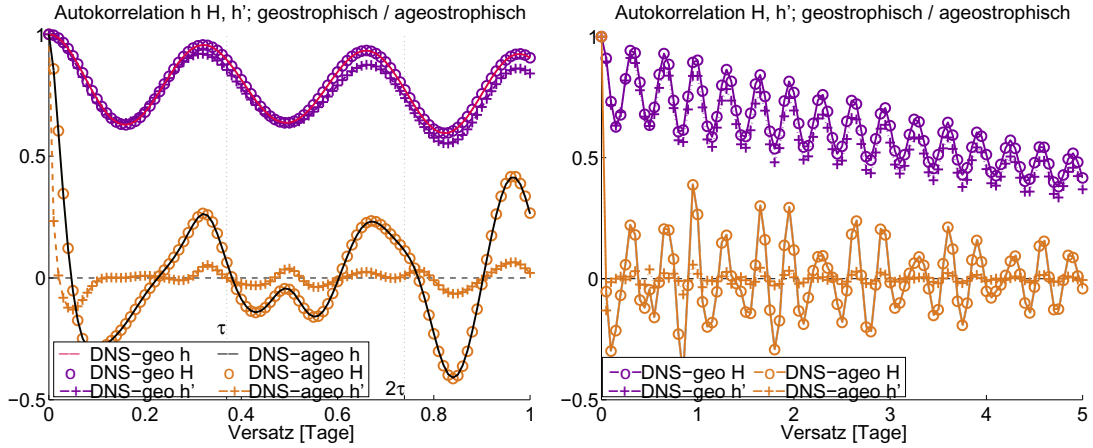


Abbildung 7.3: Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation (des Ensemblemittels) der hoch aufgelösten Variable h , der aufgelösten Variable H und der SGS-Variable h' für die geostrophische und die ageostrophische Mode des DNS. Die Autokorrelation von h ist in beiden Moden (geostrophisch und ageostrophisch) nahezu überlappend ist mit der Autokorrelation von H . **Links** ist das Zeitintervall bis zu einem Versatz von einem Tag gezeigt, dabei ist auf der Zeitachse die charakteristische Zeitskala des schnellsten Schwerewellenzykluses τ angegeben, siehe Abschnitt 6.1.3. **Rechts** ist das längere Zeitfenster von 5 Tagen gezeigt.

der längeren Zeitskala von fünf Tagen in Abb. 7.2 sichtbar. Ursächlich für die langen Korrelationszeiten ist der Rotationsterm in dem Modell, da ohne Rotation h' deutlich schneller dekorreliert und die Oszillationen in H nicht um ein langsam abfallendes Korrelationsplateau verlaufen, siehe Abb. G.1 in Anhang G.

Die Aufspaltung in eine geostrophische und eine ageostrophische Mode $h = h_g + h_a$, $u = u_g + u_a$ und $v = v_g + v_a$, siehe Anhang H, erlaubt hier eine nähere Analyse. Die geostrophische Mode ist typischerweise großskalig und langlebig, wohingegen die ageostrophische Mode kleinskaliger und kurzlebiger ist. Dieses Verhalten tritt auch im DNS ein, wie man am Vergleich der Autokorrelationskurven in Abbildung 7.3 sieht. Die Variablen h_g , H_g und h'_g der geostrophischen Mode zeigen alle ein sehr ähnliches langlebiges Verhalten und dekorrelieren selbst auf der langsamen Zeitskala von fünf Tagen nur langsam. Anders ist die Korrelation von h_a und H_a der ageostrophischen Mode, welche ausgeprägte Oszillationen um den Nullpunkt aufweise. Die Oszillationen sind auch nach fünf Tagen nicht vollständig dekorreliert. h'_a der ageostrophischen Mode dekorreliert sehr schnell nach 0.1 Tagen

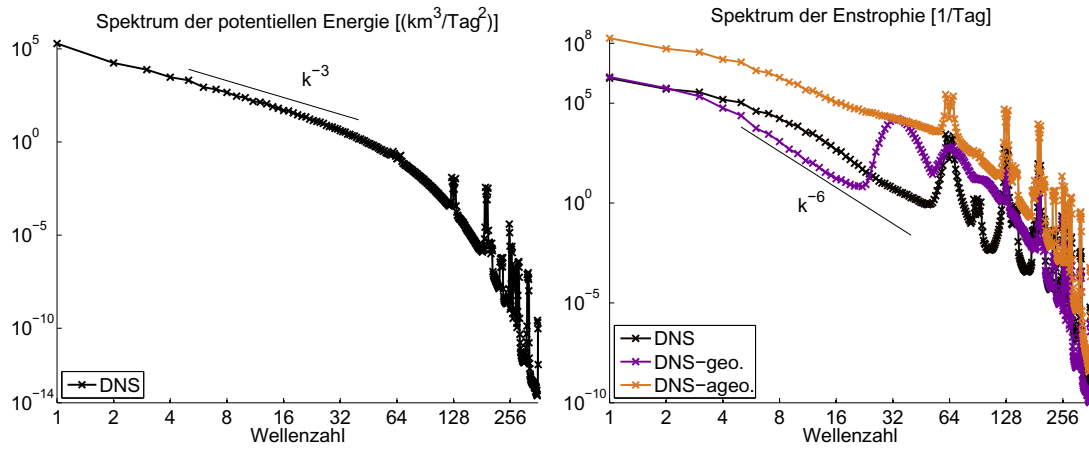


Abbildung 7.4: **Links:** Das Spektrum der potentiellen Energie des DNS, berechnet aus h (Ensemblemittel). **Rechts:** Das Spektrum der Enstrophie (Ensemblemittel). Gezeigt ist die Enstrophie des DNS $\mathcal{Z} = \zeta^2$, mit der Vorticity $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$, die Enstrophie der geostrophischen Mode $\mathcal{Z}_g = \zeta_g^2$, mit der Vorticity $\zeta_a = \partial_x v_g - \partial_y u_g$, sowie die Enstrophie der ageostrophischen Mode $\mathcal{Z}_a = \zeta_a^2$, mit der Vorticity $\zeta_a = \partial_x v_a - \partial_y u_a$, vgl. Anhang H.

und bleibt anschließend nahezu unkorreliert.

Das Spektrum der potentiellen Energie (oder Enstrophie) wird in Abhängigkeit von der totalen Wellenzahl ($k_{total} = |\mathbf{k}|$) diskutiert. Die Wellenzahl ist diskretisiert auf ganze Zahlen. Gezeigt wird immer die akkumulierte Energie (oder Enstrophie) der Wellen, die in dem jeweiligen Intervall liegen. Für $k_{total} = 1$ setzt sich beispielsweise der gezeigte Wert aus der akkumulierten Energie (oder Enstrophie) der Wellen mit den Wellenzahlvektoren $\mathbf{k} = (1, 1)^T; (2, 1)^T; (1, 2)^T$ zusammen.

Das Spektrum der potentiellen Energie des DNS in Abb. 7.4 zeigt im Inertialbereich bis zur Wellenzahl 32 einen k^{-3} Abfall. Anschließend folgt im Diffusionsbereich eine deutlich stärkere Dämpfung des Energieinhalts. Für hohe Wellenzahlen kommt es zu Ausschlägen um mehrere Größenordnungen. Die Ausschläge werden durch räumliche Unstetigkeiten im Antriebsterm ausgelöst, da dieser nur auf die aufgelöste Variable wirkt.

Die Enstrophie $\mathcal{Z} = \zeta^2$ kann als Maß für die Wellenaktivität interpretiert werden. In Abbildung 7.4 erkennt man, dass das Spektrum von \mathcal{Z} des DNS bis zur 64-ten Wellenzahl abfällt. Für größere Wellenzahlen setzt sich der Trend mit großen Ausschlägen weiter fort. Die Ausschläge werden, wie im Energiespektrum,

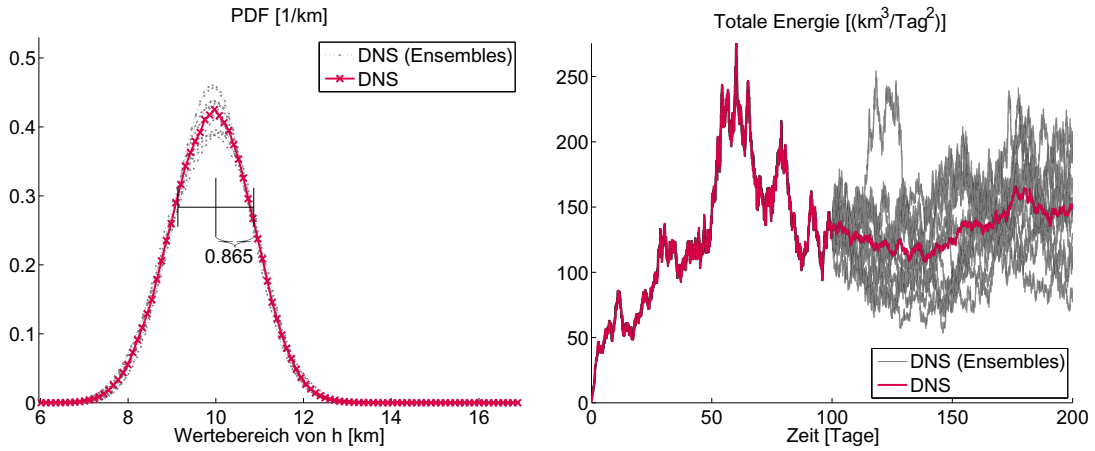


Abbildung 7.5: **Links:** Die PDF der Variable h des DNS (Ensemblemittel) ist in rot dargestellt, gepunktet sind die PDFs der einzelnen Ensembles. Durch die Klammer ist das Mittel $\bar{h} = \mathcal{H} = 10$ km und die Standardabweichung $(\overline{h - \mathcal{H}})^{1/2}$ im Ensemblemittel dargestellt, letztere ist auch numerisch gegeben. **Rechts:** Die zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie des DNS. Gezeigt ist die Anlaufzeit von 100 Tagen und die zeitliche Entwicklung aller Ensemblemitglieder im Zeitraum 100 – 200 Tage.

durch Unstetigkeiten des Antriebsterms ϱ an den Rändern der groben Gitterzellen generiert.

Die ageostrophische Mode des DNS weist eine deutlich höhere Wellenaktivität auf als das gesamte DNS, wie man am Spektrum der Enstrophie der ageostrophischen Mode $\mathcal{Z}_a = \zeta_a^2$ in Abbildung 7.4 erkennt. Das Spektrum der Enstrophie der geostrophischen Mode $\mathcal{Z}_g = \zeta_g^2$ hingegen folgt dem \mathcal{Z} -Spektrum in den ersten zwei Wellenzahlen und fällt anschließend bis zur 23-ten Wellenzahl ab. Für höhere Wellenzahlen liegt das \mathcal{Z}_g -Spektrum zwischen den Spektren von \mathcal{Z} und \mathcal{Z}_a .

Die PDF des DNS in der Variable h ist in Abb. 7.5 gezeigt. Zum einen ist die PDF im Ensemblemittel dargestellt, zum anderen die der einzelnen Ensemblemitglieder. Der Wertebereich der Darstellung erstreckt sich über den kompletten vom DNS in h angenommenen Wertebereich. Die Tails der PDF stellen zwar sehr seltene Ereignisse dar, jedoch sind die maximalen Ausschläge der Säulenhöhe mit 5.96 km bis 16.94 km im Vergleich zur mittleren Säulenhöhe $\mathcal{H} = 10$ km groß. Die Annahme der Flachwassergleichungen, dass die Fluktuationen um \mathcal{H} klein sind, wird an diesen wenigen Realisierungen verletzt.

Die extremen Ausreißer sind ein Problem bei der zeitlichen Integration des Modells. Ein einmaliges Überspringen der Säulenhöhe zu negativen Werten generiert einen unphysikalischen Zustand, welcher in der Regel mit einer folgenden Divergenz der Simulation einhergeht. Es fällt zusätzlich auf, dass die Maximalauslenkungen nicht symmetrisch zum Mittel \mathcal{H} sind. Der überwiegende Teil der Modellrealisierungen befindet sich im Bereich relativ kleiner Fluktuationen mit einer Standardabweichung von 0.865 km. Für diesen Bereich ist die Annahme der Flachwassergleichungen gerechtfertigt. Die einzelnen Ensemblemitglieder weisen eine Streuung um das Mittel auf. Das qualitative Verhalten ist bei allen Ensemblemitgliedern sehr ähnlich.

Die totale Energie des DNS ist in Abb. 7.5 aufgeführt. Gezeigt ist sowohl die Anlaufzeit des Modells von 100 Tagen, als auch das Zeitfenster von 100 – 200 Tagen, für das die Ensemblesimulation vorliegt. Die totale Energie des DNS nimmt innerhalb der ersten 10 Tage sukzessive zu. Anschließend zeigt sich das chaotische Verhalten des Modells mit deutlichen Ausschlägen der Gesamtenergie. Die Ensemblemitglieder weisen unterschiedliche Trajektorien auf, verlassen allerdings nicht den Energiebereich zwischen $53 \frac{\text{km}^3}{\text{Tag}^2}$ und $255 \frac{\text{km}^3}{\text{Tag}^2}$. Trajektorien divergierender Ensemblemitglieder sind nicht gezeigt.

7.2 Niedrig aufgelöste Simulationen ohne SGS-Parametrisierung

Zum späteren Vergleich werden die beiden niedrig aufgelösten Modelle LRM und BRT untersucht, welche beide keine SGS-Parametrisierung verwenden. Beide Modelle sind nicht in der Lage die Autokorrelation des DNS in H aus Abb. 7.6 zu reproduzieren. Sie zeigen beide, im Vergleich zum DNS, eine signifikant schnellere Dekorrelation. Es kommt darüber hinaus zu deutlich schnelleren Oszillationen der Autokorrelation als im DNS. Aufgrund der Überlegung zur Schwerewellengeschwindigkeit in Abschnitt 6.1.3 ist ausgeschlossen, dass diese Oszillationen durch Schwerewellenzyklen zustande kommen. Es liegt nahe, dass ihr Ursprung in der fehlenden SGS-Parametrisierung liegt.

Das LRM und BRT umfassen beide deutlich weniger Energie als das DNS. Dies

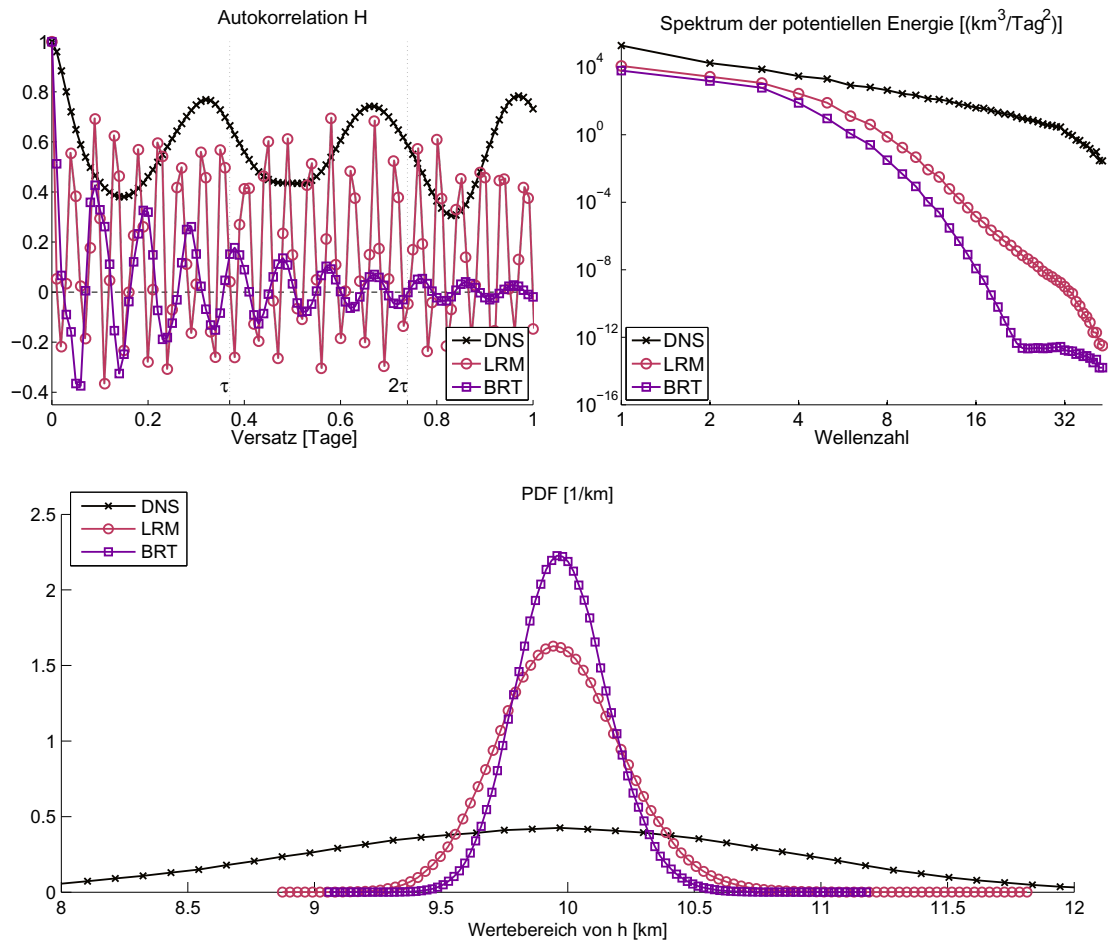


Abbildung 7.6: Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation (**links**) und das Spektrum der potentiellen Energie bestimmt aus H (**rechts**) für das DNS, LRM und BRT. **Unten:** Die Wahrscheinlichkeitsdichten des DNS, LRM und BRT. Es ist immer das Ensemblemittel gezeigt.

ist aus den Spektren in Abb. 7.6 zu erkennen, welche beide klar unterhalb des DNS Spektrums liegen. Das LRM weist auf allen Skalen deutlich weniger Energie auf als das BRT. Diese Eigenschaft ist, insbesondere mit Blick auf die Erfahrung mit dem 1DSW in Abschnitt 4, überraschend. Im 1DSW ist der Energieinhalt der kleinen Wellenzahlen in allen Modellen identisch und der Energieinhalt der niedrig aufgelösten Modelle fällt erst für steigende Wellenzahlen abfällt. Für hohe Wellenzahlen kommt es beim im BRT-Spektrum des 2DSW zu einer Plateaubildung,

ohne einen weiteren Energieabfall für steigende Wellenzahlen. Das Plateau erklärt sich durch die Ungenauigkeit der Datenausgabe, welche auf 16 Nachkommastellen genau ist.

Der unterschiedliche Energieinhalt des LRM und BRT wird auch im Vergleich der Wahrscheinlichkeitsdichten deutlich. Die Streuung der beiden Modelle ist deutlich geringer als beim DNS. Im Zuge dessen sind auch die auftretenden Maximalamplituden kleiner, wodurch in beiden Fällen keine der unterschiedlichen Ensemblesimulationen divergiert.

Schlussfolgerung & Ausblick

Es existieren verschiedene Methoden zur Bestimmung einer SGS-Parametrisierung für Atmosphärenmodelle. Ist man daran interessiert die SGS-Parametrisierung möglichst flexibel einsetzbar zu halten, sodass sie an geänderte Rahmenbedingungen des Modells leicht angepasst werden kann, bietet sich die stochastische Modenreduktion (Majda et al. 2001) an, welche eine Schließung rigoros aus den Grundgleichungen und der Ornstein-Uhlenbeck Statistik der SGS-Selbstwechselwirkungen ableitet.

Die SMR-Methode wurde bereits auf Atmosphärenmodelle angewendet (Franzke et al. 2005; Franzke et al. 2006; Demaeyer et al. 2018), allerdings wurden in diesen Fällen immer spektrale Modelle genutzt. In vielen Anwendungen der Ozean- oder regionalen Wettermodellierung kommt hingegen eine Diskretisierung im physikalischen Raum zum Einsatz, die finite-Volumen Methode. Um die SMR-Methode für diese Methode anwenden zu können, führte Dolaptchiev et al. (2013b) und Dolaptchiev et al. (2013a) lokale Mittelungen für die Burgersgleichung ein, um zwischen aufgelöster Variable und nicht aufgelöster SGS-Variable zu unterscheiden.

Grundlegende Annahme für die SMR ist die Anwesenheit einer Separation der Zeitskalen, welche den Variablen zu Grunde liegt. Unterschieden wird zwischen einer langsamen explizit aufgelösten Variable und einer schnellen SGS-Variable. Dies ermöglicht die Parametrisierung des Einflusses der SGS-Variable auf die aufgelöste Variable durch eine stochastische Schließung. Die Bestimmungsgleichung der SMR-Schließung wird in der vorliegenden Dissertation für beliebige Funktionen angegeben und schrittweise erst für beliebige polynomielle Systeme und anschließend für quadratische Systeme spezifiziert.

Um die Komplexität des verwendeten Modells schrittweise realen atmosphärischen Bedingungen anzunähern, wird die Methode in dieser Dissertation im Kon-

text der stochastisch angetriebenen Flachwassergleichungen verwendet. Im Vergleich zur Burgersgleichung kommen damit zwei Besonderheiten hinzu. Zum einen beinhaltet das 1DSW Schwerewellen. Zum anderen kommen, wie typischerweise in kompressiblen Flüssigkeiten, Nichtlinearitäten mit hoher polynomieller Ordnung vor. Darüber hinaus beinhaltet das Modell in zwei räumlichen Dimensionen auch Rotationseffekte.

Im ersten Teil der Dissertation wird die Separation der Zeitskalen für das 1DSW in der angewendeten Konfiguration empirisch überprüft. Anschließend werden alle Nichtlinearitäten, die durch das Inverse der Wassersäulenhöhe auftreten und von der SGS-Variable beeinflusst werden, durch das Inverse der global gemittelten Wassersäulenhöhe ersetzt. Die Nichtlinearitäten sind damit auf quadratische Ordnung beschränkt. Die Ersetzung der SGS-Selbstwechselwirkungen durch einen empirischen OU-Prozess ermöglicht eine hohe Übereinstimmung mit einem hoch aufgelösten Referenzmodell des 1DSW. Dies wiederum erlaubt die Anwendung der SMR, welche eine räumlich lokale Schließung für das niedrig aufgelöste Modell generiert, die nur eine kleine Zahl von Nachbarzellen koppelt.

Die gewählte Diskretisierung ermöglicht die exakte Erfüllung der Lösbarkeitsbedingung der SMR, welche analytisch bewiesen wird. Diese mathematische Voraussetzung an die Modellgleichungen erlaubt erst den in der SMR durchgeführten mathematischen Grenzwert. Wäre dies nicht möglich und die Bedingung nur empirisch approximativ "beweisbar", dann wäre die korrekte Anwendbarkeit der SMR nicht gegeben. Es muss in diesem Fall die Möglichkeit in Betracht gezogen werden, dass das Verschwinden der nicht-führenden Ordnungen in der SMR nicht gewährleistet ist und in der Folge die korrekte Schließung nicht abgeleitet werden kann.

Das Modell mit der SMR-Schließung wird anhand eines hoch aufgelösten Referenzmodells des 1DSW evaluiert. Die Schließung ist in der Lage insbesondere das Spektrum der potentiellen Energie für kleine Skalen zu verbessern, verglichen mit Modellen ohne eine SGS-Parametrisierung und Modellen mit lokalen empirischen OU-Schließungen. In den statistischen Momenten ergibt sich keine deutliche Verbesserung, was allerdings nachträglich durch eine Abschwächung des stochastischen Schließungsterms korrigiert wird. Dies reduziert den Varianzfehler in H auf nur 2.9%, sorgt im Gegenzug aber für einen reduzierten Ener-

gieinhalt der kleinen Skalen. Eine weitere empirische Amplitudenanpassung der SGS-Schließungsparameter dürfte hier eine zusätzliche Optimierung des Modells ermöglichen.

Ein großer Vorteil der SMR-Methode ist die Skalierbarkeit der berechneten Schließung mit der räumlichen Auflösung des niedrig aufgelösten Modells. Diese Anpassung ist für die empirischen OU-Schließungen nicht möglich. Im Vergleich erweist sich die skalenabhängige SMR-Schließung den empirischen Schließungen, bei reduzierten räumlichen Auflösungen, als überlegen. Insbesondere die Autokorrelation des Referenzmodells kann durch das Modell mit SMR-Schließung reproduziert werden.

Es ist offen, ob die Schließung bei der ursprünglichen Auflösung auch zu einem Bare-Truncation Anteil hinzu addiert werden kann, der auf einer anderen Diskretisierung basiert. Bei der Verwendung der energieerhaltenden Diskretisierung von Fjordholm et al. (2011) konnte kein stabiles Modell gefunden werden. Dies lag vermutlich an dem Fehlen eines Slope-Limiters (siehe z.B. Vater et al. 2015), da die Modelldivergenz immer mit dem Auftreten negativer Säulenhöhen einherging. Eine weitergehende Untersuchung wurde in dieser Dissertation nicht durchgeführt.

In einer ähnlichen Studie untersuchte Vissio et al. (2018) ebenfalls eine parameterabhängige Schließung, welche auf der Response-Theorie (Wouters et al. 2012) basiert. In dieser Studie wurde allerdings nicht eine Änderung der räumlichen Auflösung untersucht, sondern eine Änderung des Zeitskalenseparationsfaktors. Entsprechend skaliert die adaptive Schließung nicht, wie in dieser Dissertation, mit der räumlichen Auflösung, sondern mit der Zeitskalenseparation. In Wouters et al. (2016) wird die Methode anhand von Triadenmodellen (oszillierend, nicht-oszillierend und multiplikativ) mit der SMR-Methode verglichen. Dort zeigt sich, dass die Methode von Wouters et al. (2012) bei der Betrachtung der Trajektorien auf kurzen Zeitabständen der SMR-Methode überlegen ist. Für längere Zeitabstände konvergiert die Lösung an die Lösung der SMR. Hier wäre eine Fortsetzung der Arbeit von Demaeyer et al. (2018), welche beide Methoden anhand eines gekoppelten Ozean-Atmosphärenmodells mittlerer Komplexität untersucht, für komplexere Modelle, wie z.B. das Flachwassermodell, interessant. Es stellt sich darüber hinaus die Frage, inwieweit die zuvor genannte Form der Zeitskalenadaptivität auch auf das 1DSW bzw. 2DSW Modell angewendet werden

kann.

Ein Problem der in dieser Dissertation vorgestellten Methode ist, dass die Diffusion für das Modell mit der SMR-SGS-Parametrisierung verstärkt werden musste. Dieses Problem tritt häufig bei empirischen SGS-Parametrisierungen auf (z.B. Achatz et al. 1997). Möglicherweise kann es durch die Wahl einer energieerhaltenden Diskretisierung (z.B. Fjordholm et al. 2011) gelöst werden. In Majda et al. (2009) wurde hierzu eine Verbindung zwischen der Energieerhaltung der quadratischen Nichtlinearitäten des Referenzmodells und dem kubischen Dämpfungsterm der SMR-Schließung gezogen. Diese Verbindung tritt allerdings nur ein, wenn eine energieerhaltende Diskretisierung gewählt wird, wie zum Beispiel in Franzke et al. (2005), Franzke et al. (2006) und Dolaptchiev et al. (2013a), was eine stabile SMR-Schließung ermöglicht.

Im zweiten Teil betrachtet die vorliegende Dissertation die Anwendung der SMR auf das zweidimensionale Flachwassermodell. Als ein Zwischenschritt kann hier angenommen werden, dass die Modellvariablen von einer räumlichen Komponente (z.B. y -Komponente) unabhängig sind. Dadurch wird das 1.5DSW Modell definiert. Hierbei stellt sich allerdings heraus, dass sich eine Windkomponente (im Beispiel die in y -Richtung zeigende v -Komponente) deutlich langsamer verhält, als die anderen Variablen, wodurch die Anwendung der SMR unter Verwendung der lokalen Mittel nicht möglich ist.

Aus diesem Grund fokussiert sich diese Arbeit direkt auf das 2DSW. Bei diesem Modell kommt es im Vergleich zum 1DSW zu einer zusätzlichen räumlichen Dispersion der Schwerewellen und durch Rotation zu geostrophisch balancierten Strömen. Die geostrophische Mode weist eine deutlich längere Dekorrelationszeit auf, als die ageostrophische Mode. Da beide Moden sowohl in der aufgelösten als auch in der SGS-Variable Beiträge leisten dekorreliert die SGS-Variable nicht ähnlich schnell wie im 1DSW. Die niedrig aufgelösten Modelle des 2DSW ohne eine empirische Schließung können das Referenzmodell nicht nachbilden. Weitere Untersuchungen des 2DSW mit der SMR-Schließung sind noch nicht abgeschlossen und bleiben im Rahmen dieser Arbeit offen.

Die hier präsentierten Ergebnisse stimmen zuversichtlich, dass die Anwendung der SMR auch bei noch komplexeren Modellen, z.B. kompressiblen Flüssigkeiten, einen Mehrwert bringt. Ein schrittweises Vorgehen bei der Erhöhung der Komple-

xität ist allerdings ratsam. Eine Möglichkeit besteht darin das vorhandene 1DSW, oder später auch das 2DSW, unter speziellen Konfigurationen zu untersuchen. So könnte das Verhalten der SMR unter dem Einfluss einer nicht homogenen Orographie, nicht periodischen Randbedingungen oder einer Heizung, welche in den Modellen in Massenquell- und Senktermen ihre Analogie finden, untersucht werden.

Teil III

Anhang

Anhang A

Heuristische Formulierung der Zeitskalenseparation

In Abschnitt 1.1 wird der Separationsfaktors ϵ eingeführt und anschließend als Zeitskalenseparationsfaktor interpretiert. Alternativ kann man im ersten Schritt heuristisch annehmen, dass die Prozesse auf unterschiedlichen Zeitskalen variieren. Beide Ansätze führen zum selben Ergebnis, allerdings ermöglicht die heuristische Methode eine anschauliche physikalische Interpretation dieses Schrittes.

Motiviert ist die Zeitskalenseparation durch empirische Beobachtungen, bei denen die Zeitskala von räumlich kleinskaligen Prozessen typischerweise schneller ist, als die Zeitskala von räumlich großskaligen Prozessen, siehe Fortak (1982) (auch Taylor Hypothese genannt (Taylor 1938)). Dieser Beobachtung wird in den Modellgleichungen Rechnung getragen, indem drei Zeitskalen eingeführt werden. Es wird angenommen, dass eine Zeitskala T_0 der Prozesse der groben Gitterstruktur \mathbf{x} existiert. Außerdem wird eine Zeitskala T_1 von Prozessen, die zu kleinskalig sind, um sie ausschließlich mit der groben Gitterstruktur zu beschreiben, eingeführt. Darüber hinaus wird eine dritte Zeitskala T_2 eingeführt, auf der die SGS-Selbstwechselwirkungen variieren.

In den Gleichungen (1.1) kann man die einzelnen Terme nach ihrer Zeitskala

charakterisieren

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \overbrace{\boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x})}^{T_0} + \overbrace{\mathbf{b}^x(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^{T_1}, \\ \dot{\mathbf{y}} &= \overbrace{\mathbf{b}^y(\mathbf{x}, \mathbf{y})}^{T_1} + \overbrace{\mathbf{c}^y(\mathbf{y})}^{T_2}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Die unterschiedlichen Zeitskalen sind über den Parameter $\epsilon \ll 1$ verknüpft, wobei

$$T_1 = \epsilon T_0, \quad T_2 = \epsilon^2 T_0.\tag{A.2}$$

Auf diese Weise lassen sich verschiedene entdimensionalisierte Zeiten

$$\tau_0 = \frac{t}{T_0}, \quad \tau_1 = \frac{t}{T_1} = \frac{t}{\epsilon T_0}, \quad \tau_2 = \frac{t}{T_2} = \frac{t}{\epsilon^2 T_0}\tag{A.3}$$

bestimmen.

Die zeitliche Änderung der Variable \mathbf{x} in den Gleichungen (A.1) hängt sowohl von langsamen Prozessen \mathbf{x} , als auch von schnellen Prozessen \mathbf{y} ab, wodurch das totale Differenzial bestimmt werden kann

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau_0, \tau_1),\tag{A.4}$$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_1} d\tau_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_1} d\tau_0.\tag{A.5}$$

Hier gilt

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_0} = \boldsymbol{\varrho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_1} = \mathbf{b}^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}).\tag{A.6}$$

Analog lautet das totale Differenzial für die schnellen Moden

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\tau_1, \tau_2),\tag{A.7}$$

$$d\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau_1} d\tau_1 + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau_2} d\tau_2 = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau_1} d\tau_0 + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau_2} d\tau_0,\tag{A.8}$$

wobei

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau_1} = \mathbf{b}^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau_2} = \mathbf{c}^y(\mathbf{y}). \quad (\text{A.9})$$

Durch Identifikation der einzelnen Terme aus den Gleichungen (A.1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau_0} &= \boldsymbol{\rho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x}) + \frac{1}{\epsilon} \mathbf{b}^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \frac{d\mathbf{y}}{d\tau_0} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbf{b}^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{c}^y(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

Projektionsoperator P und Pseudoinverse L_1^{-1}

Um die effektive FPE auszurechnen, müssen der Projektionsoperator P und das Inverse von L_1^{-1} bestimmt werden. Hierzu wird folgendes Anfangswertproblem konstruiert

$$\begin{aligned}\partial_\tau g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) &= L_1 g - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \\ g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau = 0) &= s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S ,\end{aligned}\tag{B.1}$$

wobei S den Lösungsraum von p aus Gleichung (1.4) aufspannt. Die Funktion f ist stellvertretend für die restlichen Terme in Gleichung (1.4). Für $f = 0$ handelt es sich genau um einen OU-Prozess.

Für die weitere Rechnung wird das Fundamentalsystem des Operators L_1 mit den Eigenfunktionen e_α und Eigenwerten λ_α betrachtet

$$L_1 e_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha .\tag{B.2}$$

Da L_1 nur in \mathbf{y} wirkt, liegen dessen Eigenfunktionen in \mathbf{y}

$$e_\alpha = e_\alpha(\mathbf{y}) .\tag{B.3}$$

Infolgedessen können g , f und s durch e_α dargestellt werden

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \sum_{\alpha} g_{\alpha}(\mathbf{x}, \tau) e_{\alpha}(\mathbf{y}) , \quad (\text{B.4})$$

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(\mathbf{x}) e_{\alpha}(\mathbf{y}) , \quad (\text{B.5})$$

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\alpha} s_{\alpha}(\mathbf{x}) e_{\alpha}(\mathbf{y}) . \quad (\text{B.6})$$

Der Kern von L_1 setzt sich aus den Eigenfunktionen zusammen, die zu verschwindenden Eigenwerten gehören. Der Projektionsoperator projiziert damit genau auf diesen Satz von Eigenfunktionen

$$Pe_{\alpha} = e_{\alpha} \delta_{\lambda_{\alpha}, 0} \quad \rightarrow \quad Pg = P \sum_{\alpha} g_{\alpha} e_{\alpha} = \sum_{\alpha | \lambda_{\alpha} = 0} g_{\alpha} e_{\alpha} . \quad (\text{B.7})$$

Die Zerlegung eingesetzt in das Anfangswertproblem (B.1) liefert

$$\partial_{\tau} g_{\alpha} = \lambda_{\alpha} g_{\alpha} - f_{\alpha} . \quad (\text{B.8})$$

Die Lösung dieser DGL lautet

$$g_{\alpha} = \begin{cases} s_{\alpha} - f_{\alpha} \tau & \text{falls } \lambda_{\alpha} = 0 \\ s_{\alpha} e^{\lambda_{\alpha} \tau} - \frac{f_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}} (e^{\lambda_{\alpha} \tau} - 1) & \text{sonst .} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Es können zwei Lösungen unterschieden werden:

$f = 0$ Es handelt sich um den OU-Prozess, charakterisiert durch L_1 . Im Grenzwert von $\tau \rightarrow -\infty$ konvergieren die Lösungen von g_{α} mit $\lambda_{\alpha} \neq 0$ gegen Null. Es leisten nur noch die Lösungen einen Beitrag, welche innerhalb des Kerns liegen

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \sum_{\alpha | \lambda_{\alpha} = 0} s_{\alpha} e_{\alpha} = Ps(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (\text{B.10})$$

$s = 0$ Im Grenzwert von $\tau \rightarrow -\infty$ divergieren die Beiträge von f , welche innerhalb des Kerns liegen. Mit der Forderung, dass f außerhalb des Kerns liegt $Pf =$

0, konvergiert die Lösung, da alle Eigenwerte λ_α positiv sind

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \sum_{\alpha | \lambda_\alpha \neq 0} \frac{f_\alpha}{\lambda_\alpha} e_\alpha = L_1^{-1} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (\text{B.11})$$

Die gesuchten Operatoren P und L_1^{-1} können mit den Gleichungen (B.10) und (B.11) durch das Bilden des Grenzwertes von $\tau \rightarrow -\infty$ bestimmt werden. Die Grenzwertbildung ist dabei äquivalent zu der Aussage, dass der OU-Prozess auf der mittleren Zeitskala immer bereits in seinen stationären Zustand konvergiert ist.

Zur Bestimmung der Operatoren ist die Lösung des Anfangswertproblems (B.1) gesucht. Dazu wird im ersten Schritt die homogene Lösung betrachtet und in einem zweiten Schritt die inhomogene:

Homogene Lösung: Die homogene Lösung für $f = 0$ mit dem Zeitentwicklungsoperator $\phi_{\mathbf{y}}^\tau$ lautet

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \phi_{\mathbf{y}}^\tau s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (\text{B.12})$$

Mit den Gleichungen (B.1) folgt

$$\partial_\tau \phi_{\mathbf{y}}^\tau s - L_1 \phi_{\mathbf{y}}^\tau s = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_\tau \phi_{\mathbf{y}}^\tau \alpha = L_1 \phi_{\mathbf{y}}^\tau \alpha \quad (\text{B.13})$$

für ein $\alpha \in S$.

Inhomogene Lösung: Für die inhomogene Lösung mit $f \neq 0$ wird der Ansatz

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \phi_{\mathbf{y}}^\tau C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) \quad (\text{B.14})$$

verwendet. Eingesetzt in die Gleichungen (B.1) erhält man

$$\partial_\tau (\phi_{\mathbf{y}}^\tau C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)) = L_1 \phi_{\mathbf{y}}^\tau C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \quad (\text{B.15})$$

Allerdings ist die Differenziation der linken Seite vorerst nicht definiert. Um diese zu bestimmen, wird das Fouriertransformierte des Problems untersucht.

Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
 g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) &= \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau), \\
 g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau),
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

wobei $\kappa = 2(N - N_c)$ und $d\mathbf{k} = dk^\kappa$. Der Ansatz für das homogene Problem

$$\partial_\tau g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau) = \int d\mathbf{k}' \tilde{L}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') g_{\mathbf{k}'} , \tag{B.17}$$

mit $\tilde{L}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} L_1 e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}}$ und der Fouriertransformierten Anfangsbedingung $s_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} s(\mathbf{y})$, lautet damit

$$\begin{aligned}
 g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau) &= \int d\mathbf{k}' \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\tau s_{\mathbf{k}'} , \\
 \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\tau &= \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \phi_{\mathbf{y}}^\tau e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} .
 \end{aligned} \tag{B.18}$$

Hier erkennt man, dass der Fouriertransformierte Propagator eine Funktion von k und k' ist. Der Ansatz für die inhomogene Gleichung lautet

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau) = \int d\mathbf{k}' \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\tau C_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}, \tau) , \tag{B.19}$$

$$C_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) . \tag{B.20}$$

Mit dem Ansatz folgt für die inhomogene Gleichung mit $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d^\kappa y e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und der homogenen Lösung

$$\begin{aligned}
 \partial_\tau g_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau) &= \int d\mathbf{k}' \tilde{L}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') g_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}, \tau) - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\
 &= \int d\mathbf{k}' (\cancel{\partial_\tau \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\tau}) C_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}, \tau) + \int d\mathbf{k}' \phi_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\tau (\partial_\tau C_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}, \tau)) \\
 &= \int d\mathbf{k}' \tilde{L}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \int d\mathbf{k} \phi_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}^\tau C_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \tau) - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) .
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Diese Gleichung zurück transformiert liefert

$$\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \int d\mathbf{k}' \phi_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^\tau (\partial_\tau C_{\mathbf{k}'}(\mathbf{x}, \tau)) = - \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \int d\mathbf{k}' \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\tilde{\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{y}}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\tilde{\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\tilde{\mathbf{y}}} \partial_\tau C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tau) \\ = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\tilde{\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{y}}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau}_{\delta_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}} \underbrace{\int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \frac{1}{(2\pi)^\kappa} \int d\tilde{\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\tilde{\mathbf{y}}} \partial_\tau C(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tau)}_{\delta_{\mathbf{y},\tilde{\mathbf{y}}}} \\ = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau \partial_\tau C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\text{B.25})$$

wodurch

$$\begin{aligned} \partial_\tau C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) &= -\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-\tau} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \rightarrow C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) &= C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) - \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Mit $C(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0) = s$ folgt

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau s - \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (\text{B.27})$$

Überprüfung der Lösung

$$\partial_\tau g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = L_1 g - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left(\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau s - \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) \\ = L_1 \left(\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau s - \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \cancel{\partial_\tau (\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau)} s - \left((\partial_\tau \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau) \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-\tilde{\tau}} + \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau \partial_\tau \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-\tilde{\tau}} \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ = \cancel{L_1 \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau} s - L_1 \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

$$\begin{aligned}
& \cancel{-L_1 \phi_{\mathbf{y}}^\tau \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\mathbf{y}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \phi_{\mathbf{y}}^{\tau-\tau} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \\
& = \cancel{-L_1 \int_0^\tau d\tilde{\tau} \phi_{\mathbf{y}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \quad (\text{B.31})
\end{aligned}$$

qed.

Schreibt man g , f und s als Integral mit einer Deltafunktion $\delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}}$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \int d\tilde{\mathbf{y}} \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} g(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}, \tau) , \quad (\text{B.32})$$

$$\phi_{\mathbf{y}}^\tau s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d\tilde{\mathbf{y}} \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau s(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) , \quad (\text{B.33})$$

$$\phi_{\mathbf{y}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int d\tilde{\mathbf{y}} \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) , \quad (\text{B.34})$$

so folgt

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) &= \int d\tilde{\mathbf{y}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau s(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} - \int_0^\tau d\tilde{\tau} \int d\tilde{\mathbf{y}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{\tau-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} \\
&= \int d\tilde{\mathbf{y}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau s(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} + \int_0^{-\tau} d\tilde{\tau} \int d\tilde{\mathbf{y}} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-\tilde{\tau}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} . \quad (\text{B.35})
\end{aligned}$$

Für $f = 0$ entspricht die DGL (B.1) der FPE des Prozesses \mathbf{c}^y . Der Operator ϕ^τ wird damit als der Propagator dieses Prozesses identifiziert. Zu beachten ist, dass es sich um eine rückwärts FPE handelt

$$\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} = p(\tilde{\mathbf{y}}, 0 \mid \mathbf{y}, \tau) , \quad (\text{B.36})$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^\tau \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} p(\tilde{\mathbf{y}}, 0 \mid \mathbf{y}, \tau) = p_\tau(\tilde{\mathbf{y}}) , \quad (\text{B.37})$$

$$\phi_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-\tau} \delta_{\tilde{\mathbf{y}};\mathbf{y}} = p(\tilde{\mathbf{y}}, 0 \mid \mathbf{y}, -\tau) = p(\tilde{\mathbf{y}}, \tau \mid \mathbf{y}, 0) , \quad (\text{B.38})$$

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \int d\tilde{\mathbf{y}} s(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) p_s(\tilde{\mathbf{y}}) + \int_0^\infty d\tilde{\tau} \int d\tilde{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) p(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\tau} | \mathbf{y}, 0) . \quad (\text{B.39})$$

Hiermit können die Operatoren P und L_1^{-1} identifiziert werden. Der Projektionsoperator gibt den Erwartungswert $\langle \dots \rangle$ in Bezug auf die invariante Wahrscheinlichkeitsdichte p_s des zu L_1 gehörigen Prozesses an

$$(P s(\mathbf{x}, \mathbf{y}))(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{y} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_s(\mathbf{y}) = \langle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle . \quad (\text{B.40})$$

Der L_1^{-1} Operator bildet das zeitliche Integral über den Erwartungswert mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte des Prozesses L_1

$$(L_1^{-1} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}))(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_0^\infty d\tilde{\tau} \int d\tilde{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) p(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\tau} | \mathbf{y}, 0) \quad (\text{B.41})$$

$$= \int_0^\infty d\tilde{\tau} \langle f(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\tilde{\tau}) | \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}) \rangle . \quad (\text{B.42})$$

Beide Operatoren nacheinander angewendet liefern

$$\begin{aligned} (P s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) L_1^{-1} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}))(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{y} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_s(\mathbf{y}) \int_0^\infty d\tau \int d\tilde{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) p(\tilde{\mathbf{y}}, \tau | \mathbf{y}, 0) \\ &= \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{y} s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_s(\mathbf{y}) \int d\tilde{\mathbf{y}} f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}) p(\tilde{\mathbf{y}}, \tau | \mathbf{y}, 0) \\ &= \int_0^\infty d\tau \langle s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}(\tau)) \rangle , \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

wobei die zeitversetzte Kovarianz der letzten Zeile als OU-Trajektorie mit der Anfangsbedingung $\tilde{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}$ zu verstehen ist.

Teilweise Abhängigkeit in \mathbf{y} : Um eine Unabhängigkeit aller Komponenten von \mathbf{y} zu gewährleisten, wird in dieser Dissertation eine Komponente mittels Fouriertransformation eliminiert. Es stellt sich die Frage, ob dies zwingend notwendig ist. Betrachtet man den Fall, dass zwei Komponenten immer identisch sind $y_1 = y_2$, sollte der Projektionsoperator eine Deltafunktion beinhalten $\delta(y_1 - y_2)$. Für die

restlichen unabhängigen Variablen und eine der beiden abhängigen ist zu erwarten, dass das obige Ergebnis unverändert bleibt.

Anhang C

Ornstein-Uhlenbeck Prozess

C.1 Bestimmung der empirischen OU-Schließung

C.1.1 Maximum Likelihood Methode

Bei der Berechnung der Schließung mit der Maximum Likelihood Methode (Honerkamp 1993) wird die DGL (2.35) zeitlich über ein Intervall Δt mit der Euler Methode approximiert integriert

$$\int_t^{t+\Delta t} d\theta_i \approx \theta_i^{t+\Delta t} - \theta_i^t = \Delta\theta_i^t = \beta_i^t \Delta t + \Gamma_{ij} \theta_j^t \Delta t + \sigma_i \Delta W_i^t. \quad (\text{C.1})$$

Es wird das Wiener Inkrement $\Delta \mathbf{W}^t = \mathbf{W}^{t+1} - \mathbf{W}^t$ verwendet, wobei der „ obere Index t“ die Zeit darstellt.

Gesucht sind die Parameter Γ und σ , die eine Wahrscheinlichkeitsdichte erzeugen, welche die Realisierung von θ optimal ermöglicht. Hierzu wird die Likelihood-Funktion

$$L(\Gamma, \sigma) = \frac{1}{[(2\pi)^m \det(\Delta t \sigma)]^{\frac{N_d}{2}}} \exp \left(- \sum_{t=1}^{N_d} [\Delta \mathbf{U}^t - \Gamma \boldsymbol{\theta}^t \Delta t]^T \frac{\sigma^{-1}}{2\Delta t} [\Delta \mathbf{U}^t - \Gamma \boldsymbol{\theta}^t \Delta t] \right), \quad (\text{C.2})$$

mit der Anzahl der Zeitpunkte N_d und der Funktion $\Delta \mathbf{U}^t = \Delta \boldsymbol{\theta}^t - \boldsymbol{\Phi}^t \Delta t$, verwendet. Das Maximieren der Likelihood-Funktion liefert eine Bestimmungsgleichung der

beiden OU-Parameter

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{\Gamma} = \frac{1}{\Delta t} \overline{\Delta \mathbf{U} \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T}^{-1}, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\sigma}_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \tilde{\sigma}_i^2 = \frac{1}{\Delta t} \overline{[\Delta U_i - \tilde{\Gamma}_{ij} \theta_j \Delta t]^2}. \quad (\text{C.4})$$

Dabei stellt $\overline{(\cdot)}$ die zeitliche Mittelung $\overline{\boldsymbol{\theta}^t} = \frac{1}{N_d} \sum_{n=1}^{N_d} \boldsymbol{\theta}^t$ dar. Die so ausgerechnete Schließung $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\sigma}$ koppelt alle Komponenten der SGS-Variable $\boldsymbol{\theta}$ miteinander. Die Schließung wird daher *globale Schließung* genannt.

Die Aufteilung in aufgelöste und SGS-Variable legt allerdings eine lokale Schließung Γ^k, σ^k nahe, bei der die SGS-Variable einer groben Zelle nur mit der SGS-Variablen der selben groben Zelle gekoppelt wird. Auf diese Weise kann für jede grobe Zelle k eine lokale Schließung Γ^k, σ^k bestimmt werden. Da in dem Modell kein Ort ausgezeichnet ist, muss die Schließung homogen im Raum sein, wodurch die Schließung für alle groben Zellen identisch ist. Zur Bestimmung werden die Schließungsterme über alle groben Zellen gemittelt

$$\hat{\Gamma} = \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_c} \tilde{\Gamma}^k, \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N_x} \sum_{k=1}^{N_c} \tilde{\sigma}^k, \quad (\text{C.5})$$

wobei $\tilde{\Gamma}^k = \tilde{\Gamma}_{2k(n-1)...2kn+1; 2k(n-1)...2kn+1}$. Die lokale Schließung hat eine blockdiagonale Struktur

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \hat{\Gamma} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{\Gamma} \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \hat{\sigma} \\ \vdots \\ \hat{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Bestimmung von Φ^t : Es stehen prinzipiell zwei Möglichkeiten zur Verfügung den Term Φ^t zu bestimmen. Eine ist die Wechselwirkungsterme explizit auszurechnen und damit Φ^t für gegebene \mathbf{x}^t und $\boldsymbol{\theta}^t$ aus der Trajektorie zu bestimmen. Vorteil dieser Methode ist, dass die Berechnung von Φ^t sehr schnell ist. Allerdings müssen die Wechselwirkungsterme vorher explizit ausgerechnet werden, was bei komplexen Systemen aufwendig sein kann.

Alternativ ist auch eine Projektion ohne die explizite Definition der Wechsel-

wirkungsterme, analog zu Abschnitt 5.4, möglich. Für den entsprechenden Mittelungsoperator \mathcal{M} und die Funktion $G^{\frac{1}{h}}$ mit der Approximation von $\frac{1}{h} \approx \frac{1}{\mathcal{H}}$ erhält man

$$\Phi^t = \hat{T} b^{z, \frac{1}{h}}(\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t) = \hat{T} (1 - \mathcal{M}) [G(\phi^t) - G([1 - \mathcal{M}] \phi^t)] , \quad (\text{C.7})$$

wobei

$$b_i^{z, \frac{1}{h}}(\mathbf{x}^t, \mathbf{z}^t) = L_{ij}^{zx} x_j^t + B_{ijk}^{zxx} x_j^t x_k^t + B_{ijk}^{zxx} x_j^t z_k^t . \quad (\text{C.8})$$

Modelldefinierte Dämpfung: Der dominante Term im linearen Anteil L^{zz} ist der Diffusionsanteil mit dem Parameter ν . Anstatt diesen Anteil durch das Maximum Likelihood Verfahren abzuschätzen, kann er direkt durch $\nu \hat{\Delta}^k$ im Fourierraum mit $k = 1$ approximiert werden

$$\hat{\Delta}^k = \begin{pmatrix} \gamma & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma \end{pmatrix} , \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1^{2k} & & \\ & \ddots & \\ & & (n-1)^{2k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)} . \quad (\text{C.9})$$

Der deterministische Schließungsanteil ist dann $\Gamma - \nu \hat{\Delta}$, wobei Γ hier mit

$$\Phi_i = \hat{T}_{ik} \left(L_{kj}^{zx} x_j + B_{kjl}^{zxx} x_j x_l + B_{kjl}^{zxx} x_j \hat{R}_{lm} \theta_m + L_{kj}^{zz} \hat{R}_{jl} \theta_l \right) \quad (\text{C.10})$$

bestimmt wird.

C.1.2 Bestimmung aus integrierter Autokorrelation

In der SMR wird angenommen, dass der OU-Prozess die Tendenz der \mathbf{y} Variable dominiert

$$d\theta_i \approx \Gamma_{ij} \theta_j dt + \sigma_i dW_i . \quad (\text{C.11})$$

Der gesuchte OU-Prozess ist negativ definit, da andernfalls die nicht divergierende Trajektorie von θ nicht modelliert werden kann. Der Driftparameter Γ wird aus der Autokorrelation von θ (Gardiner 2009)

$$\overline{\boldsymbol{\theta}(t)\boldsymbol{\theta}^T(t+\tau)} = C(\tau) = C(0)e^{\Gamma^T\tau} \quad (\text{C.12})$$

durch zeitliche Integration gewonnen

$$C(0)^{-1} \int_0^\infty C(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{\Gamma^T\tau} d\tau = -(\Gamma^T)^{-1} . \quad (\text{C.13})$$

Im letzten Schritt wird ausgenutzt, dass es sich um einen gedämpften OU-Prozess mit negativen reellen Eigenwerten von Γ handelt.

Die Schließung ist lokal, wodurch nur die Variablen h'_i und hu'_i innerhalb der selben groben Zelle durch je einen Matrixblock gekoppelt sind. Da die Koeffizienten von Γ im Raum homogen sind (alle Blöcke sind identisch), werden die gesuchten Koeffizienten durch Mittelung der oben bestimmten Werte über alle groben Zellen gewonnen, analog zur Schließung mittels Maximum Likelihood Methode aus Abschnitt C.1.1.

Der deterministische und der stochastische Term des OU-Prozesses sind über die Lyapunov-Gleichung (Gardiner 2009, 4.5.64) anhand der Kovarianz verknüpft $\Gamma C(0) + C(0)\Gamma^T = -\sigma\sigma^T$. Für einen diagonalen Diffusionskoeffizient $\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_i$ kann diese gelöst werden zu

$$\sigma_i = \sqrt{-2\Gamma_{ik}C(0)_{ki}} . \quad (\text{C.14})$$

Durch anschließende Mittelung über die jeweiligen Blöcke der groben Zellen erhält man eine homogene Schließung, die in allen groben Zellen identisch ist.

Cooper-Haynes Algorithmus: Zur effizienten numerischen Berechnung des Zeitintegrals in Gleichung (C.13) wird eine leichte Abwandlung des in Lutsko et al. (2015) beschriebenen Algorithmus verwendet:

$$\int_0^\infty C(\tau) d\tau \approx \int_0^{\hat{\tau}} C(\tau) d\tau \quad (\text{C.15})$$

$$\approx \sum_{i=0}^{\frac{\hat{\tau}}{\Delta\tau}-1} \frac{1}{\frac{T-\tau}{\Delta\tau} + 1} \sum_{j=0}^{\frac{T-\tau}{\Delta\tau}} \boldsymbol{\theta}(t_j) \boldsymbol{\theta}^T(t_j + \tau_i) \Delta\tau \quad (\text{C.16})$$

$$= \frac{\Delta\tau}{\frac{T-\tau}{\Delta\tau} + 1} \sum_{j=0}^{\frac{T-\tau}{\Delta\tau}} \boldsymbol{\theta}(t_j) A^T(t_j) \quad (\text{C.17})$$

mit $\tau_i = t_0 + i\Delta\tau$. Zur Approximation des Zeitintegrals wird die Untersumme (Press et al. 1992) verwendet. Die Funktion $A(t_j)$ wird dabei iterativ bestimmt

$$A(t_0) = \sum_{i=0}^{\frac{\hat{\tau}}{\Delta\tau}-1} \boldsymbol{\theta}(t_0 + \tau_i), \quad (\text{C.18})$$

$$A(t_j) = A(t_{j-1}) - \boldsymbol{\theta}(t_{j-1}) + \boldsymbol{\theta}(t_{j+\frac{\hat{\tau}}{\Delta\tau}-1}). \quad (\text{C.19})$$

C.1.3 Schließungskorrektur

Die OU-Parameter können durch das OU-DNS Modell, bevor man die SMR-Schließung bestimmt, antizipativ getestet werden. In dieser Arbeit ist das besagte Modell instabil, wodurch ein zusätzlicher Dämpfungsterm eingeführt werden muss. Es handelt sich um einen Term, der den Laplace der k -ten Ordnung approximiert. Dieser wird zum deterministischen Schließungsanteil hinzu addiert

$$\Gamma \rightarrow \Gamma - \alpha \hat{\Delta}^k = L \quad (\text{C.20})$$

mit $\hat{\Delta}^k$ aus Gleichung (C.9).

Die Dämpfung ist skalenselektiv, da sie höhere Wellenzahlen stärker dämpft als kleine Wellenzahlen. Die nullte Mode wird nicht gedämpft, wodurch Massen- und Impulserhaltung nicht beeinträchtigt sind. In vorliegenden Fall wurde der einfache Laplace verwendet $k = 1$ mit $\alpha = 90 \text{ Tag}^{-1}$.

Durch die Veränderung des deterministischen Anteils kommt es zu einer Änderung der Varianz des OU-Prozesses, da der stochastische Anteil σ nicht nachträglich mit dem deterministischen angepasst wird. Eine nachträgliche Anpassung von σ wird in dieser Arbeit nicht vorgenommen.

C.2 Statistische Eigenschaften des OU-Prozesses

Erwartungswert $\langle \mathbf{y} \rangle$:

$$\langle \mathbf{y}(\tau) \rangle = e^{\Lambda\tau} \mathbf{y}(0) . \quad (\text{C.21})$$

Kovarianzmatrix $D_\infty = \langle \mathbf{y}\mathbf{y}^T \rangle$: Durch die paarweise Wahl des stochastischen Terms für jeden komplexwertigen Eigenwert, ist die Kovarianz und dessen Inverses diagonal (Gardiner 2009)

$$D_\infty = - \begin{pmatrix} \frac{\Sigma_1^2}{2\hat{\gamma}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad D_\infty^{-1} = - \begin{pmatrix} \frac{2\hat{\gamma}_1}{\Sigma_1^2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

bzw.

$$(D_\infty)_{ij} = -\delta_{ij} \frac{\Sigma_i^2}{2\hat{\gamma}_i}, \quad (D_\infty)_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{(D_\infty)_{ii}} \quad (\text{C.23})$$

mit

$$\hat{\gamma}_i = \begin{cases} \hat{\gamma}_i & \text{falls } i \leq \tilde{N} \\ \hat{\gamma}_{i-1} & \text{falls } i = \tilde{N} + 2k \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

Wahrscheinlichkeitsdichte: Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte lautet

$$p(\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\tau) \mid \mathbf{y} = \mathbf{y}(0)) = \frac{1}{(2\pi)^M \det(D_\tau)} \exp \left(-\frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{y}} - e^{-\Lambda\tau} \mathbf{y})^T D_\tau^{-1} (\tilde{\mathbf{y}} - e^{-\Lambda\tau} \mathbf{y}) \right). \quad (\text{C.25})$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte des stationären Zustands lautet

$$p_s(\tilde{\mathbf{y}}) = p(\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\infty) \mid \mathbf{y}(0)) = \frac{1}{(2\pi)^M \det(D_\infty)} \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{y}}^T D_\infty^{-1} \tilde{\mathbf{y}} \right). \quad (\text{C.26})$$

Zeitversetzte Kovarianzmatrix $\langle \mathbf{y}(\tau)\mathbf{y}(0)^T \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{y}(\tau)\mathbf{y}(0)^T \rangle &= \int d\mathbf{y} p_s(\mathbf{y}) \int d\tilde{\mathbf{y}} p(\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\tau) \mid \mathbf{y} = \mathbf{y}(0)) \tilde{\mathbf{y}} \mathbf{y}^T \\
&= \int d\mathbf{y} p_s(\mathbf{y}) e^{\Lambda\tau} \mathbf{y} \mathbf{y}^T \\
&= e^{\Lambda\tau} D_\infty \\
&= \begin{pmatrix} e^{\hat{\gamma}_1\tau} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\hat{\gamma}_{\tilde{N}+1}\tau} \begin{pmatrix} \cos(\omega_{\tilde{N}+1}\tau) & -\sin(\omega_{\tilde{N}+1}\tau) \\ \sin(\omega_{\tilde{N}+1}\tau) & \cos(\omega_{\tilde{N}+1}\tau) \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} D_\infty .
\end{aligned} \tag{C.27}$$

Integrierte Kovarianzmatrix $\int \langle \mathbf{y}(\tau)\mathbf{y}^T(0) \rangle d\tau$:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \langle \mathbf{y}(\tau)\mathbf{y}(0)^T \rangle d\tau &= -D_\infty \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\gamma}_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\hat{\gamma}_{\tilde{N}+1}^2 + \omega_{\tilde{N}+1}^2} \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{\tilde{N}+1} & -\omega_{\tilde{N}+1} \\ \omega_{\tilde{N}+1} & \hat{\gamma}_{\tilde{N}+1} \end{pmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \\
&= -D_\infty \Lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\gamma}_1^2} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\hat{\gamma}_{\tilde{N}+1}^2 + \omega_{\tilde{N}+1}^2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{C.28}$$

bzw.

$$\int_0^\infty \langle y(\tau)_i y(0)_j \rangle d\tau = -\frac{1}{\hat{\gamma}_j^2 + \omega_j^2} \Lambda_{ij} (D_\infty)_{ii} \tag{C.29}$$

mit

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \leq \tilde{N} \\ \omega_{i-1} & \text{falls } i = \tilde{N} + 2k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{C.30})$$

Integrierte vierte Momente C_T :

$$\begin{aligned} (C_T)_{kl ij} &= \int_0^\infty d\tau (\langle y_k(0)y_i(\tau) \rangle \langle y_j(\tau)y_l(0) \rangle + \langle y_k(0)y_j(\tau) \rangle \langle y_i(\tau)y_l(0) \rangle) \\ &= - (D_\infty)_{kk} (D_\infty)_{ll} P_{ijkl} , \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

mit dem Tensor

$$\begin{aligned} P_{ijkl} &= \Theta(\Lambda_{ik}) \Theta(\Lambda_{jl}) \kappa_{ij} \\ &= ((\gamma_i + \gamma_j) [(\gamma_i + \gamma_j)^2 + \omega_i^2 + \omega_j^2] \delta_{ik} \delta_{jl} + 2\omega_i \omega_j (\gamma_i + \gamma_j) \delta_{ik}^{-1} \delta_{jl}^{-1} \\ &\quad + \omega_i [(\gamma_i + \gamma_j)^2 + \omega_i^2 - \omega_j^2] \delta_{ik}^{-1} \delta_{jl} + \omega_j [(\gamma_i + \gamma_j)^2 + \omega_j^2 - \omega_i^2] \delta_{ij} \delta_{jl}^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

aus Dolaphtchiev et al. (2013a) und der Abkürzung

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{[(\gamma_i + \gamma_j)^2 + (\omega_i + \omega_j)^2] [(\gamma_i + \gamma_j)^2 + (\omega_i - \omega_j)^2]} , \quad (\text{C.33})$$

sowie der Deltafunktion und deren Inverses

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases} , \quad \delta_{ij}^{-1} = 1 - \delta_{ij} , \quad (\text{C.34})$$

und der Funktion Θ , welche das Vorzeichen des verwendeten Arguments liefert

$$\Theta(a) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a > 0 \\ 0 & \text{wenn } a = 0 \\ -1 & \text{wenn } a < 0 \end{cases} . \quad (\text{C.35})$$

Anhang D

Wechselwirkungsterme des eindimensionalen Modells

Zur Definition der Wechselwirkungsterme aus den Gleichungen (2.29) und (2.30) wird die folgende Definition verwendet

$$(L_{lm}^{xz} z_m, B_{lmn}^{xxz} x_m z_n, B_{lmn}^{xzz} z_m z_n) = \begin{cases} (L^{Hz}, B^{Hxz}, B^{Hzz}) & \text{falls } x_l \leftrightarrow H_I \\ (L^{HUz}, B^{HUxz}, B^{HUzz}) & \text{falls } x_l \leftrightarrow HU_I \end{cases}, \quad (\text{D.1})$$

$$(L_{lm}^{zz} z_m, L_{lm}^{zx} x_m) = \begin{cases} (L^{h'z}, L^{h'x}) & \text{falls } z_l \leftrightarrow h'_i \\ (L^{hu'z}, L^{hu'x}) & \text{falls } z_l \leftrightarrow hu'_i \end{cases}, \quad (\text{D.2})$$

$$(B_{lmn}^{zxx} x_m x_n, B_{lmn}^{zxx} x_m z_n, B_{lmn}^{zxx} z_m z_n) = \begin{cases} (B^{h'xx}, B^{h'xz}, B^{h'zz}) & \text{falls } z_l \leftrightarrow h'_i \\ (B^{hu'xx}, B^{hu'xz}, B^{hu'zz}) & \text{falls } z_l \leftrightarrow hu'_i \end{cases}. \quad (\text{D.3})$$

Die linearen Wechselwirkungsterme lauten

$$L^{Hz} = -\frac{1}{2n\Delta x} (hu'_{n(I+1)} + hu'_{n(I+1)-1} - hu'_{nI} - hu'_{nI-1}) + \frac{\nu}{n\Delta x^2} (h'_{n(I+1)} - h'_{n(I+1)-1} - h'_{nI} + h'_{nI-1}), \quad (\text{D.4})$$

$$L^{HUz} = \frac{\nu}{n\Delta x^2} (hu'_{n(I+1)} - hu'_{n(I+1)-1} - hu'_{nI} + hu'_{nI-1}), \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned}
L^{h'x} &= -\frac{1}{2\Delta x} (HU_{I[i+1]} - HU_{I[i-1]}) + \frac{\nu}{\Delta x^2} (H_{I[i-1]} - 2H_{I[i]} + H_{I[i+1]}) \\
&\quad + \frac{1}{2n\Delta x} (HU_{I[i]+1} - HU_{I[i]-1}) - \frac{\nu}{n\Delta x^2} (H_{I[i]+1} - 2H_{I[i]} + H_{I[i]-1}) ,
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
L^{hu'x} &= \frac{\nu}{\Delta x^2} (HU_{I[i-1]} - 2HU_{I[i]} + HU_{I[i+1]}) \\
&\quad - \frac{\nu}{n\Delta x^2} (HU_{I[i]+1} - 2HU_{I[i]} + HU_{I[i]-1}) ,
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$L^{h'z} = -\frac{1}{2\Delta x} (hu'_{i+1} - hu'_{i-1}) + \frac{\nu}{\Delta x^2} (h'_{i-1} - 2h'_i + h'_{i+1}) - L^{Hz} , \tag{D.8}$$

$$L^{hu'z} = \frac{\nu}{\Delta x^2} (hu'_{i-1} - 2hu'_i + hu'_{i+1}) - L^{HUz} . \tag{D.9}$$

Die in den Gleichungen (D.8) und (D.9) verwendeten Terme L^{Hz} und L^{HUz} sind in den Gleichungen (D.4) und (D.5) gegeben, allerdings wird der Index I durch $I[i]$ ersetzt.

Die nichtlinearen Wechselwirkungsterme lauten

$$B^{Hxz} = B^{Hzz} = B^{h'xx} = B^{h'xz} = B^{h'zz} = 0 , \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
B^{HUxz} &= -\frac{1}{n\Delta x} \left[\frac{1}{\mathcal{H}} \left(HU_{I+1} hu'_{n(I+1)} + HU_I hu'_{n(I+1)-1} - HU_I hu'_{nI} - HU_{I-1} hu'_{nI-1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{g}{2} (H_{I+1} h'_{n(I+1)} + H_I h'_{n(I+1)-1} - H_I h'_{nI} - H_{I-1} h'_{nI-1}) \right] ,
\end{aligned} \tag{D.11}$$

$$\begin{aligned}
B^{HUzz} &= -\frac{1}{2n\Delta x} \left[\frac{1}{\mathcal{H}} \left((hu'_{n(I+1)})^2 + (hu'_{n(I+1)-1})^2 - (hu'_{nI})^2 - (hu'_{nI-1})^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{g}{2} \left((h'_{n(I+1)})^2 + (h'_{n(I+1)-1})^2 - (h'_{nI})^2 - (h'_{nI-1})^2 \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{D.12}$$

$$\begin{aligned}
B^{hu'xx} &= -\frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{1}{\mathcal{H}} (HU_{I[i+1]}^2 - HU_{I[i-1]}^2) + \frac{g}{2} (H_{I[i+1]}^2 - H_{I[i-1]}^2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2n\Delta x} \left[\frac{1}{\mathcal{H}} (HU_{I[i]+1}^2 - HU_{I[i]-1}^2) + \frac{g}{2} (H_{I[i]+1}^2 - H_{I[i]-1}^2) \right] ,
\end{aligned} \tag{D.13}$$

$$\begin{aligned}
B^{hu'xz} &= -\frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{\mathcal{H}} (HU_{I[i+1]} hu'_{i+1} - HU_{I[i-1]} hu'_{i-1}) + \frac{g}{2} (H_{I[i+1]} h'_{i+1} - H_{I[i-1]} h'_{i-1}) \right] \\
&\quad - B^{HUxz} ,
\end{aligned} \tag{D.14}$$

$$\begin{aligned}
B^{hu'zz} = & -\frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{1}{\mathcal{H}} \left((hu'_{i+1})^2 - (hu'_{i-1})^2 \right) + \frac{g}{2} \left((h'_{i+1})^2 - (h'_{i-1})^2 \right) \right) \\
& - B^{HUzz} .
\end{aligned} \tag{D.15}$$

Die in den Gleichungen (D.14) und (D.15) verwendeten Terme B^{HUxz} und B^{HUzz} sind durch die Gleichungen (D.11) und (D.12) gegeben, allerdings wird der Index I durch $I[i]$ ersetzt.

Anhang E

Alternative Methoden der SGS-Parametrisierung

E.1 Vollständig empirische Methode

Die Auswirkungen von \mathbf{y} auf \mathbf{x} können direkt durch einen OU-Prozess parametrisiert werden. Die Methode verläuft analog zur Ersetzung der SGS-Selbstwechselwirkungen aus Abschnitt 2.6

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{y}_i &= b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + c_i^y(\mathbf{y}) \end{aligned} \approx dx_i = \left(\varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \tilde{\Gamma}_{ij} \hat{x}_j^I \right) dt + \tilde{\sigma}_i dW_i . \quad (\text{E.1})$$

Hierbei beinhaltet der Vektor $\hat{\mathbf{x}}^I$ zehn Komponenten von H und HU aus fünf groben Zellen von $I-2$ bis $I+2$, wobei I der Zellenindex der betrachteten Variable x_i ist. Mit dieser Wahl ist gewährleistet, dass die rein empirische Schließung genau wie die SMR-Schließung der Gleichungen (1.41) und (1.42) nur lokal fünf grobe Zellen koppelt und somit beide Schließungen vergleichbar sind.

Die OU-Parameter $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\sigma}$, zur Modellierung von $\mathbf{b}^x(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, werden über die Maximum Likelihood Methode bestimmt

$$\tilde{\Gamma}_{ij} = \overline{b_i^x \hat{x}_k} \left(\overline{\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{x}}^T}^{-1} \right)_{kj} , \quad (\text{E.2})$$

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \Delta t \overline{\left[b_i^x - \tilde{\Gamma}_{ij} \hat{x}_j^I \right]^2} . \quad (\text{E.3})$$

E.2 Averaging Methode: $\mathcal{O}(\mathbf{c}^y) = \epsilon^{-1}$

Bei der Averaging-Methode (Hasselmann 1976) werden, im Unterschied zur SMR, nicht drei Zeitskalen verwendet, sondern nur zwei, wobei die SGS-Selbstwechselwirkungen $\mathbf{c}^y(\mathbf{y})$ auf der schnelleren Zeitskala variieren

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \dot{y}_i &= b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\epsilon} c_i^y(\mathbf{y}).\end{aligned}\tag{E.4}$$

Für jede Zeitskala kann ein Operator in der FPE definiert werden. Zum einen der Operator L_1 des schnellen Prozesses und zum anderen der Operator L_2 der restlichen Wechselwirkungen

$$\partial_t p = \hat{L}_2 p + \frac{1}{\epsilon} L_1 p.\tag{E.5}$$

Mit der Entwicklung von p in Ordnungen von ϵ , analog zu Gleichung (1.8), folgen zwei Gleichungen

$$O(\epsilon^{-1}) \quad \rightarrow \quad 0 = L_1 p^0 \quad \rightarrow \quad p^0 = p^0(\mathbf{x}),\tag{E.6}$$

$$O(\epsilon^0) \quad \rightarrow \quad \partial_t p^0 = \hat{L}_2 p^0 + L_1 p_1.\tag{E.7}$$

Der Projektionsoperator P hat die selbe Form wie in der SMR aus Anhang B mit

$$P L_1 = 0.\tag{E.8}$$

Die effektive FPE für p^0 lautet dann

$$\partial_t p_0 = P \hat{L}_2 p_0.\tag{E.9}$$

Vergleicht man Gleichung (E.9) mit der Lösbarkeitsbedingung der stochastischen Modenreduktion Gleichung (1.15), so kann hierdurch ein Entscheidungskriterium gefunden werden, welche Methode angewendet werden kann (man beachte, dass L_2 in der SMR den Bare-Truncation Anteil bei diesem Entscheidungskriteri-

um nicht enthält)

$$PL_2p^0 \begin{cases} = 0 & \rightarrow \text{SMR} \\ \neq 0 & \rightarrow \text{Averaging} \end{cases} . \quad (\text{E.10})$$

Die resultierende effektive Zustandsgleichung lautet

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \langle b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle . \quad (\text{E.11})$$

Für Gleichung (1.38) folgt damit beispielsweise

$$\langle b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle = B_{ijk}^{xyy} \langle y_j y_k \rangle . \quad (\text{E.12})$$

Bei der Averaging Methode kommt es zu einer einfachen Mittelung der schnellen Variable, daher auch der Name der Methode. Für eine deterministische Funktion \mathbf{b}^x ist die Schließung ebenfalls deterministisch.

E.3 Averaging Methode: $\mathcal{O}(\mathbf{b}^y + \mathbf{c}^y) = \epsilon^{-1}$

Alternativ zu der in Abschnitt E.2 eingeführten Gewichtung der Zeitskalen, können die Prozesse auch wie folgt gewichtet werden

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \\ \dot{y}_i &= \frac{1}{\epsilon} (b_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + c_i^y(\mathbf{y})) = \frac{1}{\epsilon} G_i^y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) . \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Die resultierende effektive SDE lautet dann

$$\dot{x}_i = \varrho_i^x + a_i^x(\mathbf{x}) + \langle \widetilde{b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rangle . \quad (\text{E.14})$$

Für Gleichung (1.38) ergibt sich damit beispielsweise

$$\langle \widetilde{b_i^x(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \rangle = B_{ijk}^{xyy} \langle \widetilde{y_j y_k} \rangle . \quad (\text{E.15})$$

Bei dieser Averaging Methode basiert die Mittelung $\langle \cdot \rangle$ auf der Statistik von

$$\dot{\mathbf{y}} = G^y(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (\text{E.16})$$

für ein festes $\hat{\mathbf{x}}$.

Anhang F

Adaptives

Zeitintegrationsverfahren

Die adaptive Zeitintegrationsmethode, die in dieser Arbeit im Rahmen des 2DSW verwendet wurde, basiert nicht wie übliche adaptive Verfahren auf dem Predictor-Corrector Prinzip (Press et al. 1992), da dieses Verfahren durch die möglicherweise häufigen Aufrufe der Tendenzroutine teuer ist. Stattdessen wird der angewendete Zeitschritt Δt immer aus dem aktuellen Modellzustand berechnet.

Hierzu existiert für den Zeitschritt eine konstante (nicht mit der Integration adaptive) obere Schranke, die nicht überschritten werden darf. Diese Schranke wird bestimmt, indem die höchste mögliche Frequenz $\hat{\omega}$, mit der maximalen Wellenzahl \hat{k} und der minimalen Wellenlänge $\hat{\lambda}$, des Modells betrachtet wird

$$\hat{\omega} = \sqrt{f_0^2 + g\mathcal{H}\hat{k}^2}, \quad \hat{k} = \frac{2\pi}{\hat{\lambda}} = \frac{\pi N}{L}. \quad (\text{F.1})$$

Um diese Frequenz mit dem Integrationszeitschritt Δt abtasten zu können, sind mindestens drei Zeitschritte pro Periode notwendig $\Delta t \leq \frac{1}{3}\hat{T}$, wobei $\hat{T} = \frac{2\pi}{\hat{\omega}}$ die zu $\hat{\omega}$ zugeordnete Periode ist. Für den Zeitschritt gilt damit

$$\Delta t_\omega = \frac{1}{3}\hat{T} = \frac{1}{2079} \text{ Tag}. \quad (\text{F.2})$$

Eine Abhängigkeit vom Zustandsvektor wird durch die CFL Bedingung (Courant et al. (1928), siehe auch Durran (2010)) eingeführt. Hier wird der Zeit-

schritt, basierend auf der betragsmäßig höchsten auftretenden Geschwindigkeit $\hat{v} = \max(\sqrt{u^2 + v^2})$ des vorherigen Zeitschrittes, bestimmt

$$\Delta t_{\text{CFL}} = \alpha \frac{\Delta x}{\hat{v}} . \quad (\text{F.3})$$

Das Zeitintegrationsverfahren wählt bei jedem Integrationsschritt den Zeitschritt entsprechend aus

$$\Delta t = \min(\Delta t_{\omega}, \Delta t_{\text{CFL}}) . \quad (\text{F.4})$$

Bei der Methode ist zu beachten, dass, im Unterschied zu den üblichen Predictor-Corrector basierenden adaptiven Verfahren, keine numerische Stabilität garantiert ist. Der Parameter α ist zur Gewährleistung der Stabilität entsprechend zu wählen und muss empirisch überprüft werden. Im Fall des 2DSW erweist sich $\alpha = 0.1$ als ausreichend.

Anhang G

Ergebnisse des zweidimensionalen Modells ohne Rotation

In diesem Kapitel sind die Ergebnisse des *rotationsfreien 2DSW* (2DSW-f) aufgeführt, welches durch Gleichung (5.2) mit $f = 0$ definiert ist. Das *rotationsfreie DNS* (DNS-f) ergibt sich aus Gleichung (5.3) mit $f = 0$.

Die Autokorrelation des DNS-f (Abb. G.1) unterscheidet sich von der Autokorrelation des DNS insbesondere darin, dass die Korrelationskurven nicht wie im

DNS	Direkte numerische Simulation von Gleichung 5.3, mit einer räumlichen Auflösung von N in beiden räumlichen Richtungen
BRT	Bare-Truncation Modell $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\rho}^x + \mathbf{a}^x(\mathbf{x})$, mit einer räumlichen Auflösung von $N_c = \frac{N}{n}$ in beiden räumlichen Richtungen
LRM	Low-Resolution Modell, DNS mit einer niedrigen räumlichen Auflösung von $N_c = \frac{N}{n}$ in beiden räumlichen Richtungen
DNS-f	DNS ohne Rotation $f = 0$
BRT-f	BRT ohne Rotation $f = 0$
LRM-f	LRM ohne Rotation $f = 0$

Tabelle G.1: Zusammenfassung der unterschiedlichen zweidimensionalen Modelle.

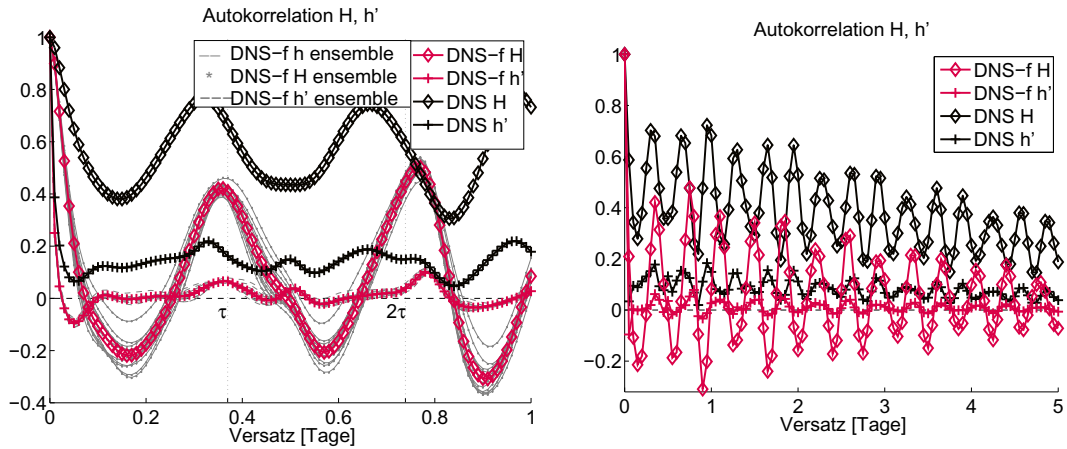


Abbildung G.1: (Analog zu Abb. 7.2) **Links:** Gezeigt sind die Korrelationsfunktionen des DNS-f (Ensemblemittel farbig, einzelne Ensemblemitglieder grau) und des DNS (nur Ensemblemittel) für den Zeitversatz von einem Tag. Auf der Zeitachse ist die charakteristische Zeitskala des schnellsten Schwerewellenzykluses τ angegeben, siehe Abschnitt 6.1.3. **Rechts:** Gezeigt sind die Korrelationsfunktionen für den Zeitversatz von fünf Tagen.

DNS in ein langsam abfallendes Korrelationsplateau konvergieren. Es kommt in der aufgelösten Variabel H des DNS-f zu Oszillationen. Die Periode der Oszillationen ist länger als im DNS und stimmt nahezu mit der Periode des schnellsten Schwerewellenzyklus, beschrieben in Abschnitt 6.1.3, überein. Die SGS-Variable h' im DNS-f dekorreliert deutlich schneller als die aufgelöste Variable H . Nach ganzen Perioden der Korrelationsoszillationen von H kommt es in der SGS-Variable h' zu einer erhöhten Autokorrelation. Dieses Verhalten war auch schon im 1DSW zu beobachten (Kapitel 4).

Die Unterschiede in den Spektren von DNS und DNS-f sind marginal, siehe Abb. G.2. Die PDF des DNS-f weist eine geringere Varianz auf als im DNS, siehe Abb. G.3. Dies zeigt sich auch in den weniger weit gestreuten Ausreißern mit 7.48 km und 15.61 km. In der Trajektorie der Gesamtenergie in Abb. G.3 ist ebenfalls kein qualitativer Unterschied zwischen DNS-f und DNS zu erkennen.

In Abb. G.4 sind die Ergebnisse der ad hoc reduzierten Modelle, *LRM ohne Rotation* (LRM-f) und *BRT ohne Rotation* (BRT-f), gezeigt. Im Vergleich zum DNS-f verhalten sich die Modelle wie die ad hoc reduzierten Modelle mit Rotation, vergleiche Abb. 7.6. Beide ad hoc reduzierten Modelle weisen zu schnelle

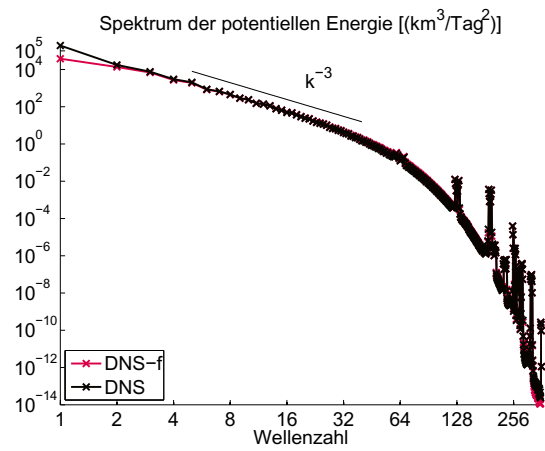


Abbildung G.2: (Analog zu Abb. 7.4) Gezeigt sind die Spektren der potentiellen Energie berechnet aus h (Ensemblemittel) des DNS-f und des DNS.

Oszillationen in der Autokorrelation auf und der Energieinhalt auf allen Skalen ist zu niedrig, was sich auch in einer kleinen Streuung der PDFs zeigt.

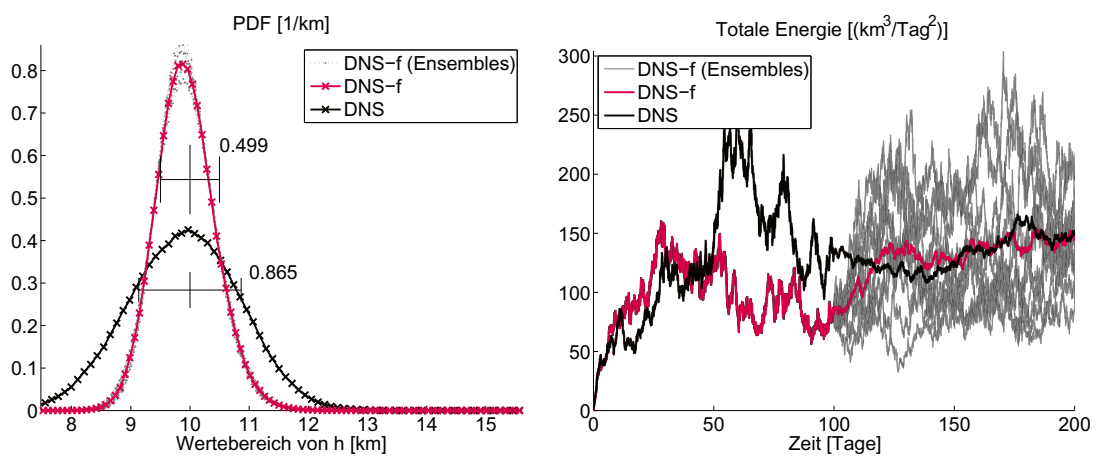


Abbildung G.3: (Analog zu Abb. 7.5) **Links:** Gezeigt sind die PDF's der Variable h des DNS-f (Ensemblemittel farbig, einzelne Ensemblemitglieder gepunktet) und des DNS (nur Ensemblemittel). Durch die Klammer ist das Mittel $\bar{h} = \mathcal{H} = 10$ km und die Standardabweichung $(\overline{(h - \mathcal{H})^2})^{\frac{1}{2}}$ beider Modelle im Ensemblemittel dargestellt, letztere ist auch numerisch gegeben. **Rechts:** Die zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie des DNS-f (Ensemblemittel farbig und einzelne Ensemblemitglieder grau) und des DNS (Ensemblemittel). Gezeigt ist die Anlaufzeit von 100 Tagen und die zeitliche Entwicklung aller Ensemblemitglieder im Zeitraum 100 – 200 Tage.

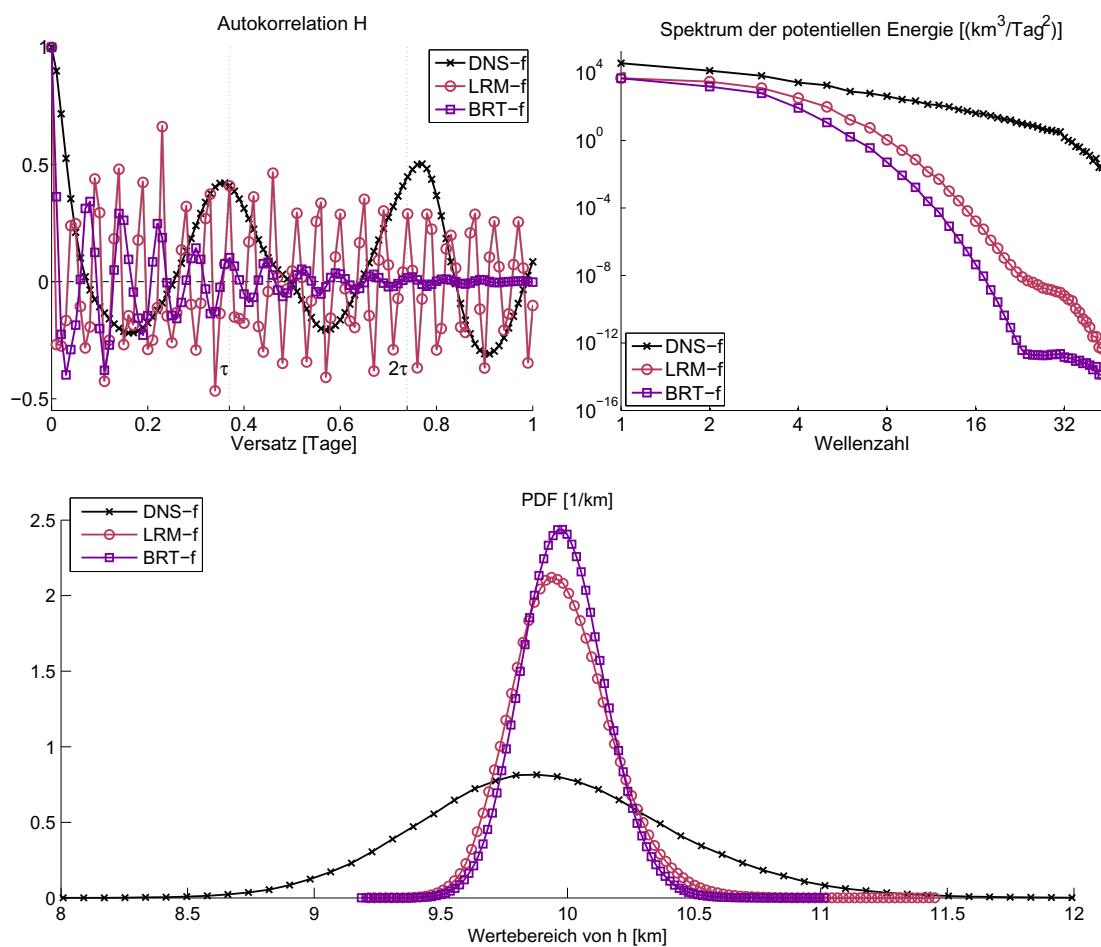


Abbildung G.4: (Analog zu Abb.7.6) Die räumlich gemittelte zeitliche Autokorrelation (**links**) und das Spektrum der potentiellen Energie bestimmt aus H (**rechts**) für das DNS-f, LRM-f und BRT-f. **Unten:** Die Wahrscheinlichkeitsdichten des DNS-f, LRM-f und BRT-f. Es ist immer das Ensemblemittel gezeigt.

Anhang H

Aufspaltung in geostrophische und ageostrophische Moden

In rotierenden Systemen ist eine Aufspaltung der Modellvariablen in eine geostrophische und eine ageostrophische Mode sinnvoll

$$h = h_g + h_a, \quad u = u_g + u_a, \quad v = v_g + v_a, \quad (\text{H.1})$$

da in beiden Moden ein unterschiedliches Verhalten zu erwarten ist. Die Aufspaltung erfolgt für alle Realisierungen der Modelltrajektorie und erlaubt die getrennte Analyse. Die Vorgehensweise, mit der die entsprechende geostrophische und damit auch ageostrophische Mode bestimmt wird, ist in diesem Abschnitt beschrieben.

Es wird ein Fluid betrachtet, welches durch die Säulenhöhenschwankungen $\eta = h - \mathcal{H}$, sowie durch die relative Vorticity $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$, basierend auf dem Windfeld u und v , gegeben ist. Diesem Fluid wird ein quasigeostrophisch balancierter Zustand zugeordnet, welcher durch die Stromfunktion ψ festgelegt ist und mit dem Rossbydeformationsradius $L_d = \frac{\sqrt{gH}}{f_0}$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{L_d^2} \right) \psi = \zeta - \frac{f_0}{\mathcal{H}} \eta \quad (\text{H.2})$$

erfüllt (siehe Vallis 2006, Abschnitt 3.8.2 Rotating Flow). Die geostrophisch balancierte Mode der Säulenhöhenschwankungen η ist über die Stromfunktion festgelegt $\eta_g = \frac{f_0}{g} \psi$, wodurch auch die geostrophisch balancierte Mode der Säulenhöhe

$h_g = \eta_g + \mathcal{H}$ gegeben ist. Die geostrophisch balancierte Mode des Windes ist über die geostrophische Windrelation im Flachwassermodell definiert

$$\mathbf{u}_g = \mathbf{e}_z \times \nabla \psi = \frac{g}{f_0} \begin{pmatrix} -\partial_y h_g \\ \partial_x h_g \end{pmatrix}, \quad (\text{H.3})$$

mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_z in vertikaler Richtung.

Um die gesuchte geostrophische Mode zu bestimmen muss die Gleichung (H.2) nach ψ invertiert werden. Bei der Invertierung liefert die ageostrophische Mode keinen Beitrag, was die Projektion auf die geostrophische Mode ermöglicht. Durchgeführt wird die Invertierung indem der räumlich diskretisierte Fall von Gleichung (H.2), mit der Diskretisierung des Laplace Operators ∇^2 aus Gleichung (5.3), betrachtet wird. Dies liefert

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\psi_{j+1,k} + \psi_{j-1,k} + \psi_{j,k+1} + \psi_{j,k-1}) - \left(\frac{4}{\Delta x^2} + \frac{1}{L_d^2} \right) \psi_{j,k} = \zeta_{j,k} - \frac{f_0}{H} \eta_{j,k}. \quad (\text{H.4})$$

Mit der Fouriertransformation der Stromfunktion

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\psi}_{l,m} \exp \left(-i \frac{2\pi}{N} (lj + mk) \right) \quad (\text{H.5})$$

und den Fouriertransformierten $\tilde{\zeta}$ und $\tilde{\eta}$ folgt

$$\left[\frac{1}{\Delta x^2} \left(e^{-i \frac{2\pi}{N} l} + e^{i \frac{2\pi}{N} l} + e^{-i \frac{2\pi}{N} m} + e^{i \frac{2\pi}{N} m} \right) - \left(\frac{4}{\Delta x^2} + \frac{1}{L_d^2} \right) \right] \tilde{\psi}_{l,m} = \tilde{\zeta}_{l,m} - \frac{f_0}{\mathcal{H}} \tilde{\eta}_{l,m}. \quad (\text{H.6})$$

Die Gleichung (H.6) kann nach $\tilde{\psi}_{l,m}$ eindeutig gelöst werden, womit auch $\psi_{j,k}$ gegeben ist. Aus der Stromfunktion wird anschließend die geostrophische Mode bestehend aus h_g und \mathbf{u}_g mit den oben genannten Gleichungen bestimmt. Die geostrophische Mode des Windfeldes \mathbf{u}_g wird in einem Zwischenschritt auf dem versetzten Arakawa-h Gitter (siehe Arakawa et al. 1977) bestimmt und durch anschließende Interpolation auf dem nicht versetzten Arakawa-a Gitter bestimmt. Die ageostrophische Mode ist über die Residuen der geostrophischen Mode von

den Modellvariablen gegeben, siehe Gleichung (H.1).

Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die mich bei der Fertigstellung dieser Dissertation unterstützt haben. Ich danke meinem Doktorvater Ulrich Achatz für die vertrauensvolle Zusammenarbeit und vielen wertvollen Ideen bei unseren Gesprächen. Mein Dank gilt auch Christian Franzke, Bodo Ahrens und Jürg Schmidli für die Begutachtung meiner Dissertation. Mein besonderer Dank gilt Stamen Dolaptchiev für die umfangreiche Unterstützung. Insbesondere bedanke ich mich für die enge Zusammenarbeit und die vielen Diskussionen, in denen er immer ein offenes Ohr für mich hatte. Ich bedanke mich bei Ilya Timofeyev für die hilfreichen Anregungen, die unsere gemeinsame Publikation erst ermöglichten. Ich danke meinen ehemaligen Bürokollegen Martin Pieroth und Steffen Hien für unsere humorvolle Gemeinschaft und Diskussionen, die mein Verständnis der Meteorologie weiter vertieften. Zuletzt möchte ich mich besonders bei meiner Frau für die Unterstützung bedanken, ohne die ich diese Arbeit nie hätte fertig stellen können.

Literaturverzeichnis

- Achatz, U., und G. Schmitz. 1997. “On the Closure Problem in the Reduction of Complex Atmospheric Models by PIPs and EOFs: A Comparison for the Case of a Two-Layer Model with Zonally Symmetric Forcing”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 54 (20): 2452–2474.
- Achatz, U., und G. Branstator. 1999. “A Two-Layer Model with Empirical Linear Corrections and Reduced Order for Studies of Internal Climate Variability”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 56, Nr. 17 (September): 3140–3160.
- Achatz, U., U. Löbl, S. I. Dolaptchiev und A. Gritsun. 2013. “Fluctuation–Dissipation Supplemented by Nonlinearity: A Climate-Dependent Subgrid-Scale Parameterization in Low-Order Climate Models”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 70, Nr. 6 (Juni): 1833–1846.
- Arakawa, A., und V. R. Lamb. 1977. “Computational Design of the Basic Dynamical Processes of the UCLA General Circulation Model”: 173–265.
- Arnold, L., P. Imkeller und Y. Wu. 2003. *Reduction of deterministic coupled atmosphere-ocean models to stochastic ocean models: A numerical case study of the Lorenz-Maas system*, 18:295–350. 4.
- Berner, J., G. J. Shutts, M. Leutbecher und T. N. Palmer. 2009. “A Spectral Stochastic Kinetic Energy Backscatter Scheme and Its Impact on Flow-Dependent Predictability in the ECMWF Ensemble Prediction System”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 66, Nr. 3 (März): 603–626.

- Berner, J., U. Achatz, L. Batté, L. Bengtsson, A. De La Cámara, H. M. Christensen, M. Colangeli, D. R. Coleman, D. Crommelin, S. I. Dolaptchiev, C. L. Franzke, P. Friederichs, P. Imkeller, H. Järvinen, S. Juricke, V. Kitsios, F. Lott, V. Lucarini, S. Mahajan, T. N. Palmer, C. Penland, M. Sakradzija, J. S. von Storch, A. Weisheimer, M. Weniger, P. D. Williams und J. I. Yano. 2017. “Stochastic parameterization toward a new view of weather and climate models”. *Bulletin of the American Meteorological Society* 98 (3): 565–587.
- Buizza, R., M. Miller und T. Palmer. 1999. “Stochastic representation of model uncertainties in the ECMWF Ensemble Prediction System”. *ECMWF Technical Memoranda* 279.
- Chekhlov, A., und V. Yakhot. 1995. “Kolmogorov turbulence in a random-force-driven Burgers equation: Anomalous scaling and probability density functions”. *Physical Review E* 52 (5): 5681–5684.
- Christensen, H. M., I. M. Moroz und T. N. Palmer. 2015. “Simulating weather regimes: impact of stochastic and perturbed parameter schemes in a simple atmospheric model”. *Climate Dynamics* 44 (7-8): 2195–2214.
- Courant, R., K. Friedrichs und H. Lewy. 1928. “Über die partiellen Differenzengleichungen der Physik”. *Mathematische Annalen* 100 (1): 32–74.
- Delsole, T. 2004. “Stochastic models of quasigeostrophic turbulence”. *Surveys in Geophysics* 25 (2): 107–149.
- Demaeyer, J., und S. Vannitsem. 2017. “Stochastic parametrization of subgrid-scale processes in coupled ocean–atmosphere systems: benefits and limitations of response theory”. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 143, Nr. 703 (Januar): 881–896.
- . 2018. “Comparison of stochastic parameterizations in the framework of a coupled ocean-atmosphere model”. *Nonlinear Processes in Geophysics* 25 (3): 605–631.

- Dolaptchiev, S. I., U. Achatz und I. Timofeyev. 2013a. “Stochastic closure for local averages in the finite-difference discretization of the forced Burgers equation”. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 27 (3-4): 297–317.
- Dolaptchiev, S. I., I. Timofeyev und U. Achatz. 2013b. “Subgrid-scale closure for the inviscid Burgers-Hopf equation”. *Communications in Mathematical Sciences* 11 (3): 757–777.
- Durrant, D. R. 2010. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Texts in Applied Mathematics. New York, NY: Springer New York.
- Fjordholm, U. S., S. Mishra und E. Tadmor. 2011. “Well-balanced and energy stable schemes for the shallow water equations with discontinuous topography”. *Journal of Computational Physics* 230 (14): 5587–5609.
- Fortak, H. 1982. *Meteorologie*. 2. Aufl. Dietrich Reimer Verlag, Berlin.
- Franzke, C., und A. J. Majda. 2006. “Low-Order Stochastic Mode Reduction for a Prototype Atmospheric GCM”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 63 (2): 457–479.
- Franzke, C., A. J. Majda und E. Vanden-Eijnden. 2005. “Low-Order Stochastic Mode Reduction for a Realistic Barotropic Model Climate”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 62, Nr. 6 (Juni): 1722–1745.
- Frederiksen, J., und A. Davies. 1997. “Eddy viscosity and stochastic backscatter parameterizations on the sphere for atmospheric circulation models”. *Journal of the atmospheric sciences* 54 (20): 2475–2492.
- Frederiksen, J. S. 1999. “Subgrid-Scale Parameterizations of Eddy-Topographic Force, Eddy Viscosity, and Stochastic Backscatter for Flow over Topography”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 56, Nr. 11 (Juni): 1481–1494.
- Frederiksen, J. S., M. R. Dix und A. G. Davies. 2003. “The effects of closure-based eddy diffusion on the climate and spectra of a GCM”. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography* 55, Nr. 1 (Januar): 31–44.
- Gardiner, C. 2009. *Stochastic methods*. 4. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

- Gritsun, A., und V. Lucarini. 2017. "Fluctuations, response, and resonances in a simple atmospheric model". *Physica D: Nonlinear Phenomena* 349:62–76.
- Haidvogel, D. B., und A. Beckmann. 1999. *Numerical Ocean Circulation Modeling*. Imperial College Press.
- Hasselmann, K. 1976. "Stochastic climate models Part I. Theory". Herausgegeben von P. Imkeller und J.-S. von Storch. *Tellus* 28, Nr. 6 (Januar): 473–485.
- Holton, J. R., und D. O. Staley. 1973. *An Introduction To Dynamic Meteorology*. FOURTH EDI, 41:535. 5. Academic Press.
- Honerkamp, J. 1993. *Stochastic Dynamical Systems: Concepts, Numerical Methods, Data Analysis*. 552. Wiley-VCH.
- Imkeller, P., und J.-S. von Storch. 2001. *Stochastic Climate Models*. Basel: Birkhäuser Basel.
- Jarraud, M., und A. Simmons. 1983. "The spectral technique". In *Seminar on Numerical Methods for Weather Prediction*, 1–59. ECMWF.
- Khas'minskii, R. Z. 1966a. "A Limit Theorem for the Solutions of Differential Equations with Random Right-Hand Sides". *Theory of Probability & Its Applications* 11, Nr. 3 (Januar): 390–406.
- . 1966b. "On Stochastic Processes Defined by Differential Equations with a Small Parameter". *Theory of Probability & Its Applications* 11, Nr. 2 (Januar): 211–228.
- Kloeden, P. E., und E. Platen. 1992. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Kondrashov, D., S. Kravtsov, A. W. Robertson und M. Ghil. 2005. "A hierarchy of data-based ENSO models". *Journal of Climate* 18 (21): 4425–4444.
- Kraichnan, R. H. 1959. "The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers". *Journal of Fluid Mechanics* 5 (04): 497.

- Kravtsov, S., D. Kondrashov und M. Ghil. 2005. "Multilevel regression modeling of nonlinear processes: Derivation and applications to climatic variability". *Journal of Climate* 18, Nr. 21 (November): 4404–4424.
- Leith, C. E. 1975. "Climate Response and Fluctuation Dissipation". *Journal of the Atmospheric Sciences* 32, Nr. 10 (Oktober): 2022–2026.
- Lorenz, E. 1996. "Predictability - a problem partly solved". *Seminar on Predictability* 1.
- Lutsko, N. J., I. M. Held und P. Zurita-Gotor. 2015. "Applying the Fluctuation–Dissipation Theorem to a Two-Layer Model of Quasigeostrophic Turbulence". *Journal of the Atmospheric Sciences* 72 (8): 3161–3177.
- Majda, A., I. Timofeyev und E. Vanden-Eijnden. 2002. "A priori tests of a stochastic mode reduction strategy". *Physica D: Nonlinear Phenomena* 170 (3-4): 206–252.
- Majda, A. J., I. Timofeyev und E. V. Eijnden. 2001. "A mathematical framework for stochastic climate models". *Communications on Pure and Applied Mathematics* 54 (8): 891–974.
- Majda, A. J., I. Timofeyev und E. Vanden-Eijnden. 2003. "Systematic Strategies for Stochastic Mode Reduction in Climate". *Journal of the Atmospheric Sciences* 60 (14): 1705–1722.
- Majda, A. J., C. Franzke und D. Crommelin. 2009. "Normal forms for reduced stochastic climate models". *Proceedings of the National Academy of Sciences* 106 (10): 3649–3653.
- Majewski, D., D. Liermann, P. Prohl, B. Ritter, M. Buchhold, T. Hanisch, G. Paul, W. Wergen und J. Baumgardner. 2002. "The Operational Global Icosahedral–Hexagonal Gridpoint Model GME: Description and High-Resolution Tests". *Monthly Weather Review* 130 (2): 319–338.
- Marconi, Puglisi, Rondoni und Vulpiani. 2008. "Fluctuation–dissipation: Response theory in statistical physics". *Physics Reports* 461, Nrn. 4-6 (Juni): 111–195.

- Monahan, A. H., und J. Culina. 2011. “Stochastic averaging of idealized climate models”. *Journal of Climate* 24 (12): 3068–3088.
- Newman, M., und P. Sardeshmukh. 2003. “A study of subseasonal predictability”. *MONTHLY WEATHER REVIEW* 131 (8): 1715–1732.
- Palmer, T. N. 2001. “A nonlinear dynamical perspective model error: A proposal for non-local stochastic-dynamic parametrization in weather and climate prediction models”. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 127 (572): 279–304.
- Palmer, Buizza, Doblas-Reyes, Jung, Leutbecher, Shutts, Steinheimer und Weisheimer. 2009. “Stochastic parametrization and model uncertainty”. *ECMWF Technical Memoranda* 598.
- Papanicolaou, G. C., und W. Kohler. 1974. “Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations”. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 27 (5): 641–668.
- Papanicolaou, G. 1976. “Some probabilistic problems and methods in singular perturbations”. *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 6 (4): 653–674.
- Pavliotis, G. A., und A. M. Stuart. 2008. “Multiscale Methods”. In *Lecture Notes in Physics*, 665:523–563. Texts Applied in Mathematics. New York, NY: Springer New York.
- Pegion, K., und P. D. Sardeshmukh. 2011. “Prospects for Improving Subseasonal Predictions”. *Monthly Weather Review* 139 (11): 3648–3666.
- Petoukhov, V., A. Ganopolski, V. Brovkin, M. Claussen, A. Eliseev, C. Kubatzki und S. Rahmstorf. 2000. “CLIMBER-2: a climate system model of intermediate complexity. Part I: model description and performance for present climate”. *Climate Dynamics* 16, Nr. 1 (Januar): 1–17.
- Pieroth, M., S. I. Dolaptchiev, M. Zacharuk, T. Heppelmann, A. Gritsun und U. Achatz. 2018. “Climate Dependence in Empirical Parameters of Subgrid-Scale Parameterizations using the Fluctuation–Dissipation Theorem”. *Journal of the Atmospheric Sciences* 75, Nr. 11 (November): 3843–3860.

- Pope, S. B. 2001. *Turbulent Flows*, 12:2020–2021. 11. Cambridge: Cambridge University Press.
- Preisendorfer, R., und C. Mobley. 1988. *Principal component analysis in meteorology and oceanography / by Rudolph W. Preisendorfer posthumously compiled and edited by Curtis D. Mobley*. 425. September. Elsevier.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery. 1992. *Numerical Recipes in Fortran 77 The Art of Scientific Computing Second Edition*.
- Rípodas, P., A. Gassmann, J. Förstner, D. Majewski, M. Giorgetta, P. Korn, L. Kornbluh, H. Wan, G. Zängl, L. Bonaventura und T. Heinze. 2009. “Icosahedral Shallow Water Model (ICOSWM): results of shallow water test cases and sensitivity to model parameters”. *Geoscientific Model Development* 2 (2): 231–251.
- Rockel, B., und B. Geyer. 2008. “The performance of the regional climate model CLM in different climate regions, based on the example of precipitation”. *Meteorologische Zeitschrift* 17 (4): 487–498.
- Satoh, M., T. Matsuno, H. Tomita, H. Miura, T. Nasuno und S. Iga. 2008. “Nonhydrostatic icosahedral atmospheric model (NICAM) for global cloud resolving simulations”. *Journal of Computational Physics* 227 (7): 3486–3514.
- Schirber, S., E. Manzini, T. Krismer und M. Giorgetta. 2015. “The quasi-biennial oscillation in a warmer climate: sensitivity to different gravity wave parameterizations”. *Climate Dynamics* 45 (3-4): 825–836.
- Shutts, G. 2005. “A kinetic energy backscatter algorithm for use in ensemble prediction systems”. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 131 (612): 3079–3102.
- Skamarock, W. C., J. B. Klemp, J. Dudhia, D. O. Gill, D. Barker, M. G. Duda, X.-y. Huang, W. Wang und J. G. Powers. 2008. *A Description of the Advanced Research WRF Version 3*. Technischer Bericht 6. NCAR.
- Stull, R. B., Hrsg. 1988. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Dordrecht: Springer Netherlands.

- Taylor, G. I. 1938. "The Spectrum of Turbulence". *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences* 164, Nr. 919 (Februar): 476–490.
- Uhlenbeck, G. E., und L. S. Ornstein. 1930. "On the Theory of the Brownian Motion". *Physical Review* 36, Nr. 5 (September): 823–841.
- Vallis, G. K. 2006. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. 747.
- Vater, S., N. Beisiegel und J. Behrens. 2015. "A limiter-based well-balanced discontinuous Galerkin method for shallow-water flows with wetting and drying: One-dimensional case". *Advances in Water Resources* 85 (August): 1–13.
- Verkley, W. T. 2011. "A maximum entropy approach to the problem of parametrization". *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 137 (660): 1872–1886.
- Verkley, W. T., P. C. Kalverla und C. A. Severijns. 2016. "A maximum entropy approach to the parametrization of subgrid processes in two-dimensional flow". *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 142 (699): 2273–2283.
- Verkley, W. T., und C. A. Severijns. 2014. "The maximum entropy principle applied to a dynamical system proposed by Lorenz". *European Physical Journal B* 87 (1).
- Vissio, G., und V. Lucarini. 2018. "A proof of concept for scale-adaptive parametrizations: the case of the Lorenz '96 model". *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144, Nr. 710 (Dezember): 63–75.
- Weaver, A. J., M. Eby, E. C. Wiebe, T. L. Ewen, A. F. Fanning, A. MacFadyen, H. D. Matthews, K. J. Meissner, O. Saenko, A. Schmittner, M. Yoshimori, C. M. Bitz, M. M. Holland, P. B. Duffy und H. Wang. 2001. "The UVic earth system climate model: Model description, climatology, and applications to past, present and future climates". *Atmosphere - Ocean* 39 (4): 361–428.

- Williams, P. D., T. W. N. Haine und P. L. Read. 2010. “Stochastic resonance in a nonlinear model of a rotating, stratified shear flow, with a simple stochastic inertia-gravity wave parameterization”. *Nonlinear Processes in Geophysics* 11 (1): 127–135.
- Winkler, C. R., M. Newman und P. D. Sardeshmukh. 2001. “A linear model of wintertime low-frequency variability. Part I: Formulation and forecast skill”. *Journal of Climate* 14 (24): 4474–4494.
- Wouters, J., S. Iankov Dolaptchiev, V. Lucarini und U. Achatz. 2016. “Parameterization of stochastic multiscale triads”. *Nonlinear Processes in Geophysics* 23 (6): 435–445.
- Wouters, J., und V. Lucarini. 2012. “Disentangling multi-level systems: Averaging, correlations and memory”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2012 (3): P03003.
- . 2013. “Multi-level Dynamical Systems: Connecting the Ruelle Response Theory and the Mori-Zwanzig Approach”. *Journal of Statistical Physics* 151 (5): 850–860.
- Zacharuk, M., S. I. Dolaptchiev, U. Achatz und I. Timofeyev. 2018. “Stochastic subgrid-scale parametrization for one-dimensional shallow-water dynamics using stochastic mode reduction”. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 144, Nr. 715 (Juli): 1975–1990.
- Zängl, G., D. Reinert, P. Rípodas und M. Baldauf. 2015. “The ICON (ICOsahedral Non-hydrostatic) modelling framework of DWD and MPI-M: Description of the non-hydrostatic dynamical core”. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141 (687): 563–579.

