

# MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

UNTER MITWIRKUNG

VON

LUDWIG BIEBERBACH, HARALD BOHR, MAX BORN, L. E. J.  
BROUWER, RICHARD COURANT, CONSTANTIN CARATHÉODORY,  
WALTHER v. DYCK, OTTO HÖLDER, THEODOR v. KÁRMÁN,  
CARL NEUMANN, MAX NOETHER, ARNOLD SOMMERFELD

HERAUSGEGEBEN

VON

FELIX KLEIN

IN GÖTTINGEN

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

ALBERT EINSTEIN

IN BERLIN

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN.

83. BAND



BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1921

# Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher.

Von

Karl Reinhardt in Frankfurt a. M.

---

## Einleitung.

Deutet man ein Paar komplexer Größen  $z_1, z_2$  bzw.  $w_1, w_2$  als Punkt eines vierdimensionalen Raumes, so werden zwei analytische Funktionen  $w_1$  und  $w_2$  von  $z, z_2$  eine Abbildung eines gewissen Bereiches aus jenem Raum auf einen zweiten Bereich vermitteln. Da bei einer solchen Abbildung die Winkel im allgemeinen nicht erhalten bleiben, spricht man besser nicht von einer konformen, sondern einfach von einer analytischen Abbildung. Über eine solche lassen sich dann dieselben Fragestellungen aufwerfen, wie bei der konformen Abbildung der Ebene. Aus der vorliegenden Arbeit ergibt sich nun, daß ein dem Riemannschen entsprechender allgemeiner Abbildungssatz jedenfalls nicht existiert.

Es soll nämlich im folgenden gezeigt werden, daß sich gewisse vierdimensionale schlichte Bereiche, die hier an die Stelle des Kreises in der Ebene treten, analytisch und umkehrbar eindeutig nicht aufeinander abbilden lassen. Zu diesem Zweck werden in einem ersten Teil die geometrischen Verhältnisse in jenem vierdimensionalen Raum, welchen wir unter Zuhilfenahme eines komplexen Koordinatensystems zur Deutung der analytischen Abbildungen verwenden, untersucht und die oben erwähnten Kreisbereiche definiert (§ 5). Im zweiten Teil handelt es sich dann um die Übertragung gewisser Hilfssätze aus der konformen Abbildung der Ebene — des Schwarzschen Lemmas und des Spiegelungsprinzips — auf die vierdimensionalen analytischen Abbildungen. Die so erhaltenen Hilfsmittel setzen uns in den Stand, im dritten Teil den Beweis für die Nichtexistenz jener Abbildungen zu führen (§ 4). Dabei ergeben sich gleichzeitig noch einige Sätze über die analytischen Abbildungen der betrachteten Bereiche in sich (§ 5).

Ein mit dem vorstehenden eng zusammenhängendes Problem hat

H. Poincaré früher behandelt<sup>1)</sup>. Er untersucht (übrigens mit völlig andersartigen Methoden) die analytische Abbildbarkeit (dreidimensionaler) Räume des vierdimensionalen Raumes aufeinander und kommt im Verfolg dieser Betrachtungen zu der Erkenntnis, daß vierdimensionale von solchen Räumen umschlossene Bereiche nicht immer analytisch aufeinander abgebildet werden können, wenn die Abbildungsfunktionen noch auf dem Rande regulär sind. Unsere Behandlung setzt diese wesentliche Einschränkung nicht voraus<sup>2)</sup>.

## I. Teil.

### Der analytische Raum.

In einem vierdimensionalen Euklidischen Raum seien zwei zueinander orthogonale Ebenen als Koordinatenebenen gegeben. Die eine sei die komplexe Zahlenebene der  $z_1$  ( $z_1 = x_1 + i \cdot y_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ ), die zweite diejenige der  $z_2$  ( $z_2 = x_2 + i \cdot y_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$ ). Der Nullpunkt  $z_1 = z_2 = 0$  möge der Schnittpunkt beider Ebenen sein. Die beiden reellen ( $x_1, x_2$ ) und die beiden imaginären ( $y_1, y_2$ ) Achsen bilden dabei ein gewöhnliches vierdimensionales orthogonales Cartesisches Koordinatensystem.

Die eindeutigen analytischen Funktionszweige  $z_2 = f(z_1)$  und  $z_1 = g(z_2)$  können dann als (zweidimensionale) Flächenstücke im vierdimensionalen Raum gedeutet werden. Solche Flächenstücke mögen im folgenden kurz *analytische Flächenstücke* heißen. Insbesondere nennen wir die durch lineare analytische Funktionen dargestellten Gebilde ( $a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 + a = 0$ ) *analytische Ebenen*. Zu diesen gehören offenbar die Koordinatenebenen.

Den Inbegriff der Punkte und der analytischen Flächenstücke des vierdimensionalen Raumes nennen wir den *analytischen Raum*. Der analytische Raum enthält als solcher weder dreidimensionale Räume noch eindimensionale Kurven (vgl. dazu Satz 5, S. 218 u. Satz 9, S. 223).

Zwei in einem (vierdimensionalen) Bereich eindeutige analytische Funktionszweige  $w_1$  und  $w_2$  ( $w_1 = u_1 + i \cdot v_1 = s_1 \cdot e^{i\gamma_1}$ ,  $w_2 = u_2 + i \cdot v_2 = s_2 \cdot e^{i\gamma_2}$ ) der beiden Veränderlichen  $z_1$  und  $z_2$ :

$$w_1 = f_1(z_1, z_2),$$

$$w_2 = f_2(z_1, z_2),$$

deren Funktionaldeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{vmatrix}$$

<sup>1)</sup> H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rend. Circ. Matem. Palermo 23 (1907).

<sup>2)</sup> Die vorstehende Abhandlung hat der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Frankfurt am Main im März 1921 als Habilitationsschrift vorgelegen.

nicht identisch verschwindet, vermitteln eine eindeutige Abbildung dieses Bereiches auf einen anderen solchen Bereich. Wir nennen sie *analytische Abbildung*.

Jede analytische Abbildung führt jedes analytische Flächenstück des abgebildeten Bereiches in ein analytisches Flächenstück des Bildbereiches über.

## § 1.

## Die Bewegungen.

Wir untersuchen zunächst die einfachsten Abbildungen des vierdimensionalen Raumes hinsichtlich ihres analytischen Charakters.

Die allgemeinste *Parallelverschiebung* wird durch die reellen linearen Funktionen:

$$(1') \quad \begin{aligned} u_1 &= x_1 + p_1, & u_2 &= x_2 + p_2, \\ v_1 &= y_1 + q_1, & v_2 &= y_2 + q_2 \end{aligned}$$

vermittelt. Setzen wir  $p_1 + iq_1 = r_1$ ,  $p_2 + iq_2 = r_2$ , so sind diese Funktionen den beiden analytischen Funktionen:

$$(1) \quad \begin{aligned} w_1 &= z_1 + r_1, \\ w_2 &= z_2 + r_2 \end{aligned}$$

vollkommen äquivalent und wir erhalten daher den

Satz 1. *Jede Parallelverschiebung ist eine analytische Abbildung.*

Wir betrachten ferner die durch die reellen linearen Funktionen:

$$(2') \quad \begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}y_1 + e_{13}x_2 + e_{14}y_2, \\ v_1 &= e_{21}x_1 + e_{22}y_1 + e_{23}x_2 + e_{24}y_2, \\ u_2 &= e_{31}x_1 + e_{32}y_1 + e_{33}x_2 + e_{34}y_2, \\ v_2 &= e_{41}x_1 + e_{42}y_1 + e_{43}x_2 + e_{44}y_2, \end{aligned}$$

deren Koeffizienten den Bedingungen:

$$(2') \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^4 e_{ik}^2 &= 1 \\ \sum_{k=1}^4 e_{ik} \cdot e_{lk} &= 0 \end{aligned} \quad (i, l = 1, 2, 3, 4; i \neq l)$$

genügen, vermittelte allgemeinste *Drehung* um den Nullpunkt. Setzen wir:

$$\begin{aligned} (e_{11} + e_{22}) + i \cdot (e_{21} - e_{12}) &= 2a_1, & (e_{31} + e_{42}) + i \cdot (e_{41} - e_{32}) &= 2b_1, \\ (e_{11} - e_{22}) + i \cdot (e_{21} + e_{12}) &= 2c_1, & (e_{31} - e_{42}) + i \cdot (e_{41} + e_{32}) &= 2d_1, \\ (e_{13} + e_{24}) + i \cdot (e_{23} - e_{14}) &= 2a_2, & (e_{33} + e_{44}) + i \cdot (e_{43} - e_{34}) &= 2b_2, \\ (e_{13} - e_{24}) + i \cdot (e_{23} + e_{14}) &= 2c_2, & (e_{33} - e_{44}) + i \cdot (e_{43} + e_{34}) &= 2d_2, \end{aligned}$$

so sind die Funktionen (2') den beiden Funktionen:

$$(2) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_1 \cdot z_1 + c_1 \cdot \bar{z}_1 + a_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \bar{z}_2 \\ w_2 &= b_1 \cdot z_1 + d_1 \cdot \bar{z}_1 + b_2 \cdot z_2 + d_2 \cdot \bar{z}_2 \end{aligned}$$

völlig äquivalent<sup>3)</sup>. Dabei können die Bedingungen (2'), wie man sich leicht überzeugt, durch die folgenden ersetzt werden:

$$(2_1) \quad \begin{aligned} |a_1|^2 + |c_1|^2 + |a_2|^2 + |c_2|^2 &= 1, \\ |b_1|^2 + |d_1|^2 + |b_2|^2 + |d_2|^2 &= 1, \\ a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 &= 0, \\ b_1 \cdot d_1 + b_2 \cdot d_2 &= 0, \\ a_1 \cdot \bar{b}_1 + c_1 \cdot \bar{d}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2 + c_2 \cdot \bar{d}_2 &= 0, \\ a_1 \cdot d_1 + b_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot d_2 + b_2 \cdot c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich sofort der

Satz 2. *Eine Drehung um den Nullpunkt ist im allgemeinen keine analytische Abbildung.*

Sie ist offenbar dann und nur dann eine analytische Abbildung, wenn in (2):

$$c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$$

ist. Eine solche Drehung wollen wir kurz eine *analytische Drehung* nennen. Die anderen Drehungen mögen im Gegensatz hierzu *nicht-analytische Drehungen* heißen. Als allgemeine Form einer analytischen Drehung um den Nullpunkt erhalten wir also:

$$(3) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2, \\ w_2 &= b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten nach (2<sub>1</sub>) den Bedingungen:

$$(3_1) \quad \begin{aligned} |a_1|^2 + |a_2|^2 &= 1, \\ |b_1|^2 + |b_2|^2 &= 1, \\ a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2 &= 0 \end{aligned}$$

genügen müssen. Eine der einfachsten dieser Drehungen ist die doppelte Rotation um die Koordinatenebenen:

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\psi_1} \cdot z_1, \\ w_2 &= e^{i\psi_2} \cdot z_2. \end{aligned}$$

<sup>3)</sup>  $\bar{z}$  bedeutet hier und im folgenden in der üblichen Weise die zur komplexen Zahl  $z$  konjugierte Zahl.

Die Auflösungen der Gleichungen (2) nach  $z_1$  und  $z_2$  sind die folgenden:

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{a}_1 \cdot w_1 + c_1 \cdot \bar{w}_1 + \bar{b}_1 \cdot w_2 + d_1 \cdot \bar{w}_2, \\ z_2 &= \bar{a}_2 \cdot w_1 + c_2 \cdot \bar{w}_1 + \bar{b}_2 \cdot w_2 + d_2 \cdot \bar{w}_2, \end{aligned}$$

deren Koeffizienten den sich auch aus (2<sub>1</sub>) ergebenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} |a_1|^2 + |c_1|^2 + |b_1|^2 + |d_1|^2 &= 1, \\ |a_2|^2 + |c_2|^2 + |b_2|^2 + |d_2|^2 &= 1, \end{aligned}$$

$$a_1 \cdot \bar{c}_1 + b_1 \cdot \bar{d}_1 = 0,$$

$$a_2 \cdot \bar{c}_2 + b_2 \cdot \bar{d}_2 = 0,$$

$$a_1 \cdot \bar{a}_2 + \bar{c}_1 \cdot c_2 + b_1 \cdot \bar{b}_2 + \bar{d}_1 \cdot d_2 = 0,$$

$$a_1 \cdot \bar{c}_2 + a_2 \cdot \bar{c}_1 + \bar{b}_1 \cdot \bar{d}_2 + b_2 \cdot \bar{d}_1 = 0$$

genügen. Für analytische Drehungen wird insbesondere:

$$z_1 = \bar{a}_1 w_1 + \bar{b}_1 w_2,$$

$$z_2 = \bar{a}_2 w_1 + \bar{b}_2 w_2,$$

mit den Bedingungen:

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1,$$

$$|a_2|^2 + |b_2|^2 = 1,$$

$$a_1 \cdot \bar{a}_2 + b_1 \cdot \bar{b}_2 = 0.$$

Im übrigen folgt aus (2<sub>1</sub>):

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & c_1 & a_2 & c_2 \\ \bar{c}_1 & \bar{a}_1 & \bar{c}_2 & \bar{a}_2 \\ b_1 & d_1 & b_2 & d_2 \\ \bar{d}_1 & \bar{b}_1 & \bar{d}_2 & \bar{b}_2 \end{array} \right\|^2 = 1,$$

und für analytische Drehungen:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & \bar{a}_1 & 0 & \bar{a}_2 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & \bar{b}_1 & 0 & \bar{b}_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right\|^2 = 1.$$

Eine beliebige Bewegung des analytischen Raumes ist nach dem Vorangegangenen im allgemeinen keine analytische Abbildung; sie ist es nur dann, wenn der in ihr enthaltene rotative Teil eine analytische Drehung ist.

## § 2.

## Die analytischen Ebenen.

Um einen genaueren Einblick in die Struktur des analytischen Raumes zu gewinnen, betrachten wir jetzt die Gesamtheit der durch den Nullpunkt des vierdimensionalen Raumes gehenden (zweidimensionalen) Ebenen. Jede dieser Ebenen kann als Schnittgebilde einer einparametrischen Schar von Paaren zueinander orthogonaler (dreidimensionaler) Räume aufgefaßt werden. Sind die Gleichungen eines solchen Raumpaars die folgenden:

$$(4') \quad \begin{aligned} e_{11}x_1 + e_{12}y_1 + e_{13}x_2 + e_{14}y_2 &= 0, \\ e_{21}x_1 + e_{22}y_1 + e_{23}x_2 + e_{24}y_2 &= 0, \end{aligned}$$

mit den Bedingungen:

$$(4'_1) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^4 e_{ik}^2 &= 1 & (i=1, 2), \\ \sum_{k=1}^4 e_{1k} \cdot e_{2k} &= 0, \end{aligned}$$

so haben die anderen Raumpaare die Gleichungen:

$$(4'_2) \quad \begin{cases} (m_1 \cdot e_{11} + m_2 \cdot e_{21}) \cdot x_1 + (m_1 \cdot e_{12} + m_2 \cdot e_{22}) \cdot y_1 \\ \quad + (m_1 \cdot e_{13} + m_2 \cdot e_{23}) \cdot x_2 + (m_1 \cdot e_{14} + m_2 \cdot e_{24}) \cdot y_2 = 0, \\ (n_1 \cdot e_{11} + n_2 \cdot e_{21}) \cdot x_1 + (n_1 \cdot e_{12} + n_2 \cdot e_{22}) \cdot y_1 \\ \quad + (n_1 \cdot e_{13} + n_2 \cdot e_{23}) \cdot x_2 + (n_1 \cdot e_{14} + n_2 \cdot e_{24}) \cdot y_2 = 0, \end{cases}$$

wobei die Multiplikatoren  $m_1, m_2, n_1, n_2$  die Beziehungen:

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 &= 1, \\ n_1^2 + n_2^2 &= 1, \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllen müssen, so daß man:

$$\begin{aligned} m_1 &= \pm n_2 = \cos \psi, \\ m_2 &= \mp n_1 = -\sin \psi \end{aligned}$$

setzen kann.  $\psi$  ist dann der Winkel, den beide Raumpaare miteinander bilden.

Setzen wir nun wieder:

$$\begin{aligned} (e_{11} + e_{22}) + i \cdot (e_{21} - e_{12}) &= 2a_1, & (e_{13} + e_{24}) + i \cdot (e_{23} - e_{14}) &= 2a_2, \\ (e_{11} - e_{22}) + i \cdot (e_{21} + e_{12}) &= 2c_1, & (e_{13} - e_{24}) + i \cdot (e_{23} + e_{14}) &= 2c_2, \end{aligned}$$

so werden die Gleichungen (4') der folgenden äquivalent:

$$(4) \quad a_1 \cdot z_1 + c_1 \cdot \bar{z}_1 + a_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \bar{z}_2 = 0,$$

während die Bedingungen  $(4'_1)$  in:

$$(4_1) \quad a_1|^2 + c_1|^2 + |a_2|^2 + |c_2|^2 = 1, \quad a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = 0$$

übergehen. Die Gleichungen  $(4'_2)$  lassen sich dabei so zusammenfassen:

$$(4_2) \quad e^{i\psi} \cdot (a_1 \cdot z_1 + c_1 \cdot \bar{z}_1 + a_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \bar{z}_2) = 0.$$

Jeder Ebene entspricht also eine bis auf den Faktor  $e^{i\psi}$  (bei Erfülltsein der Bedingungen  $(4_1)$ ) eindeutig bestimmte komplexe Gleichung (4) und jeder solchen Gleichung eine bestimmte Ebene. Wir erhalten gleichzeitig den

*Satz 3. Die durch den Nullpunkt gehenden Ebenen sind im allgemeinen keine analytischen Ebenen.*

Die Ebene (4) ist dann und nur dann eine analytische Ebene, wenn entweder  $c_1 = c_2 = 0$  oder  $a_1 = a_2 = 0$  ist. Die bis auf den Faktor  $e^{i\psi}$  eindeutig bestimmte Gleichung einer analytischen Ebene durch den Nullpunkt ist demnach:

$$(5) \quad a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 = 0,$$

mit der Bedingung:

$$(5_1) \quad |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1.$$

Die anderen Ebenen mögen im Gegensatz hierzu *nichtanalytische Ebenen* heißen.

Die Frage nach dem analytischen Charakter der nicht durch den Nullpunkt gehenden Ebenen beantwortet vollständig der

*Satz 4. Die zu einer analytischen Ebene parallelen Ebenen sind wieder analytische Ebenen. Die zu einer nichtanalytischen Ebene parallelen Ebenen sind wieder nichtanalytische Ebenen.*

Denn es ist klar, daß eine jede nicht durch den Nullpunkt gehende Ebene eine bis auf den Faktor  $e^{i\psi}$  eindeutig bestimmte komplexe Gleichung von der Form:

$$a_1 \cdot z_1 + c_1 \cdot \bar{z}_1 + a_2 \cdot z_2 + c_2 \cdot \bar{z}_2 + r = 0$$

besitzt, deren Koeffizienten wieder den Bedingungen  $(4_1)$  genügen. Da diese Ebene der Ebene (4) parallel ist, so ergibt sich damit der Beweis von Satz 4 ohne weiteres.

Die analytischen Ebenen zeichnen sich vor den allgemeinen Ebenen des vierdimensionalen Raumes durch manche besonderen Eigenschaften aus, die nunmehr hergeleitet werden sollen.

Zunächst haben zwei beliebige Ebenen des vierdimensionalen Raumes entweder keinen (eigentlichen) Punkt gemeinsam oder sie treffen sich in mindestens einem Punkt. Im ersten Fall können sie parallel oder windschief sein; im zweiten Fall schneiden sie sich entweder nur in dem Punkt



oder in einer ganzen Geraden, so daß sie in einem (dreidimensionalen) Raume liegen, oder sie fallen ganz zusammen. Dagegen gilt der

**Satz 5.** *Zwei analytische Ebenen schneiden sich stets nur in einem Punkte, wofern sie nicht parallel sind oder zusammenfallen.*

Zwei verschiedene analytische Ebenen liegen also nur dann in einem (dreidimensionalen) Raum, wenn sie parallel sind. Der Beweis ergibt sich für durch den Nullpunkt gehende Ebenen einfach daraus, daß die beiden linearen analytischen Ebenengleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 &= 0, \\ b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2 &= 0 \end{aligned}$$

lediglich die gemeinsame Lösung  $z_1 = z_2 = 0$  besitzen, wenn die durch sie dargestellten Ebenen nicht zusammenfallen und die aus den Koeffizienten gebildete Determinante daher von Null verschieden ist. Zwei beliebige analytische Ebenen aber können sich weder in einer Geraden schneiden noch windschief sein, weil sonst die zu ihnen parallelen, durch den Nullpunkt gehenden und nach Satz 4 ebenfalls analytischen Ebenen eine Gerade gemeinsam haben müßten, was eben unmöglich ist.

Eine Ebene ist stets durch drei (nicht in einer Geraden liegende) Punkte bestimmt. Es besteht jedoch der

**Satz 6.** *Eine analytische Ebene ist durch zwei Punkte bestimmt.*

Denn ist  $\zeta_1, \zeta_2$  ein vom Nullpunkt verschiedener Punkt, so werden die Koeffizienten der Ebenengleichung  $a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$  durch die Beziehung:

$$a_1 \zeta_1 + a_2 \zeta_2 = 0$$

unter Berücksichtigung der Bedingung (5<sub>1</sub>) bis auf den gemeinsamen Faktor  $e^{i\psi}$  eindeutig bestimmt. Durch jeden vom Nullpunkt verschiedenen Punkt geht also eine und nur eine zugleich durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene.

Zwei sich schneidende Ebenen des vierdimensionalen Raumes bilden nach den Ergebnissen der mehrdimensionalen Geometrie zwei wesentliche (als relative Extremwerte definierte) spitze Winkel  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  miteinander. Ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , so fallen beide Ebenen zusammen, ist  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 \neq 0$ , so schneiden sie sich in einer Geraden und liegen in einem (dreidimensionalen) Raum, ist  $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$ , so stehen sie halborthogonal zueinander, ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\pi}{2}$ , so stehen beide Ebenen ganz orthogonal aufeinander<sup>4</sup>). Bei analytischen Ebenen liegen die Dinge wesentlich einfacher. Hierüber gilt der wichtige

<sup>4</sup>) Über alle diese Fragen aus der Geometrie des vierdimensionalen Raumes vgl. man etwa P. H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie, I. Teil, insbesondere S. 69 ff.

Satz 7. *Zwei nicht parallele analytische Ebenen bilden stets zwei gleiche Winkel miteinander.*

Zum Beweise dieses Satzes denken wir uns die beiden (etwa durch den Nullpunkt gehenden) Ebenen zunächst derart analytisch gedreht, daß die eine mit der  $z_1$ -Ebene zusammenfällt. Dabei ändern sich die Winkel nicht. Wir stützen uns dann auf eine von P. H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie, erster Teil, S. 175 ff. ausgeführte Bestimmung der Winkel  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  zwischen zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  eines vierdimensionalen Raumes.

Sind die Gleichungen von  $E_1$  und  $E_2$  die folgenden:

$$\begin{aligned} E_1: \quad & x_2 = 0, \\ & y_2 = 0, \\ E_2: \quad & x_2 = e_{11}x_1 + e_{12}y_1, \\ & y_2 = e_{21}x_1 + e_{22}y_1, \end{aligned}$$

so ergeben sich nach Schouten, S. 176,  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  aus der Beziehung:

$$(6) \quad \cos^2 \varepsilon = \frac{\lambda^2 + 1}{(e_{11} \cdot \lambda + e_{12})^2 + (e_{21} \lambda + e_{22})^2 + \lambda^2 + 1},$$

wenn man für  $\lambda$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned} (e_{11} \cdot e_{12} + e_{21} \cdot e_{22}) \cdot \lambda^2 - ((e_{11}^2 + e_{21}^2) - (e_{12}^2 + e_{22}^2)) \cdot \lambda \\ - (e_{11} \cdot e_{12} + e_{21} \cdot e_{22}) = 0 \end{aligned}$$

einsetzt. Nun lauten die Ebenengleichungen in unserem Fall:

$$\begin{aligned} E_1: \quad & z_2 = 0, \\ E_2: \quad & z_2 = m \cdot z_1; \end{aligned}$$

daher wird<sup>5)</sup>:

$$\begin{aligned} e_{11} = R(m), \quad e_{12} = -J(m), \\ e_{21} = J(m), \quad e_{22} = R(m). \end{aligned}$$

Die quadratische Gleichung für  $\lambda$  ist dann identisch erfüllt, während die Beziehung (6) von  $\lambda$  unabhängig wird und sich für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  die Bestimmungsgleichung:

$$(7) \quad \cos^2 \varepsilon = \frac{1}{|m|^2 + 1}$$

ergibt. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zwei nicht parallele Ebenen, deren beide Winkel einander gleich sind, bilden (s. a. a. O.) eine einparametrische Schar von gleichen Neigungswinkeln miteinander. Wir sprechen daher bei zwei analytischen Ebenen im folgen-

<sup>5)</sup>  $R(a)$  und  $J(a)$  bedeuten dabei bzw. den reellen und den imaginären Teil der komplexen Zahl  $a$ .

den kurz von „dem“ Winkel  $\varepsilon$ , den sie miteinander bilden. Lauten die Gleichungen der beiden Ebenen:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 &= 0, & |a_1|^2 + |a_2|^2 &= 1, \\ b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2 &= 0, & |b_1|^2 + |b_2|^2 &= 1, \end{aligned}$$

so werden sie durch die analytische Drehung:

$$\begin{aligned} w_1 &= \bar{a}_2 \cdot z_1 - \bar{a}_1 \cdot z_2, \\ w_2 &= a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2 \end{aligned}$$

in die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  übergeführt. Dann wird aber:

$$m = \frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{\bar{a}_2 \cdot b_2 + \bar{a}_1 \cdot b_1},$$

und aus den vorhergehenden Betrachtungen (s. Gleichung (7)) folgt, daß sich ihr Neigungswinkel  $\varepsilon$  aus den Beziehungen:

$$\begin{aligned} \cos \varepsilon &= |a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2|, \\ \sin \varepsilon &= |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| \end{aligned}$$

bestimmt. Insbesondere stehen zwei solche analytische Ebenen also orthogonal zueinander, wenn:

$$a_1 \cdot \bar{b}_1 + a_2 \cdot \bar{b}_2 = 0$$

ist. Übrigens ist auch Satz 5 offenbar nur ein Spezialfall unseres Satzes.

Um zum Schlusse noch die Richtigkeit einer gewissen Umkehrung des Satzes 7 zu beweisen, stellen wir zunächst folgende Überlegung an. Wir setzen in jeder Koordinatenebene denjenigen Umlaufssinn, welcher die positiv reelle Achse durch  $\frac{\pi}{2}$  in die positiv imaginäre Achse überführt, als den positiven fest. Dadurch wird auf jeder beliebigen durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene ein positiver Umlaufssinn bestimmt, nämlich derjenige, dessen Projektionen auf die Koordinatenebenen mit deren Umlaufssinn übereinstimmen<sup>6)</sup>. Eine beliebige analytische Ebene möge den gleichen Umlaufssinn haben, wie die ihr parallele durch den Nullpunkt gehende Ebene.

Liegt nun eine beliebige Ebene  $E_2$  vor, welche eine analytische Ebene  $E_1$  in einem Punkte  $P$  schneidet und mit ihr zwei und damit unendlich viele gleiche Winkel  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ) bildet, so denken wir uns die einparametrische Schar der sämtlichen zu  $E_1$  und  $E_2$  halborthogonalen und den Winkel  $\varepsilon$  enthaltenden Ebenen konstruiert. Drehen wir dann die Schnitt-

<sup>6)</sup> Aus  $z_2 = m \cdot z_1$  folgt, daß  $\arcsin z_1$  und  $\arcsin z_2$  beide zugleich wachsen oder abnehmen.

linie einer dieser Ebenen mit  $E_1$  in deren positivem Umlaufssinn, so dreht sich die Schnittlinie derselben Ebene mit der zu  $E_1$  in  $P$  orthogonalen und daher ebenfalls analytischen Ebene  $E_3$  gleichzeitig in einem bestimmten Umlaufssinn. Je nachdem dieser mit dem positiven Umlaufssinn der Ebene  $E_3$  übereinstimmt oder nicht, sagen wir, die Ebene  $E_2$  habe den gleichen oder den entgegengesetzten Umlaufssinn wie die Ebene  $E_1$ . Ist  $E_2$  selbst analytisch, so hat sie stets denselben Umlaufssinn wie  $E_1$ .

Wir beweisen nun noch folgenden

*Satz 8. Alle Ebenen, welche mit einer analytischen Ebene zwei gleiche Winkel bilden und denselben Umlaufssinn besitzen, sind ebenfalls analytische Ebenen.*

Zum Beweise denken wir uns die gegebene analytische Ebene  $E_1$  analytisch so gedreht, daß sie mit der  $z_1$ -Ebene zusammenfällt. Die Umlaufsrichtungen der analytischen Ebenen sind invariant gegen analytische Drehungen. Die Gleichung der Ebene  $E_1$  ist dann:

$$z_2 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = y_2 = 0,$$

diejenige der anderen Ebene  $E_2$  sei:

$$\begin{aligned} x_2 &= e_{11} x_1 + e_{12} y_1, \\ y_2 &= e_{21} x_1 + e_{22} y_1 \end{aligned}$$

Sollen  $E_1$  und  $E_2$  zwei gleiche Winkel miteinander bilden, so muß die rechte Seite von (6) von  $\lambda$  unabhängig und die quadratische Gleichung für  $\lambda$  identisch erfüllt sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn:

$$\begin{aligned} e_{11} \cdot e_{12} + e_{21} \cdot e_{22} &= 0, \\ (e_{11}^2 + e_{21}^2) - (e_{12}^2 + e_{22}^2) &= 0 \end{aligned}$$

ist. Hieraus folgt aber:

$$\begin{aligned} e_{22} &= \pm e_{11}, \\ e_{21} &= \mp e_{12}. \end{aligned}$$

Setzen wir  $e_{11} - i \cdot e_{12} = m$ , so kann die Gleichung von  $E_2$  also in eine der beiden Formen:

$$\begin{aligned} z_2 &= m \cdot z_1, \\ z_2 &= \bar{m} \cdot \bar{z}_1 \end{aligned}$$

gebracht werden. Da die zweite dieser Ebenen einen zur  $z_1$ -Ebene entgegengesetzten Umlaufssinn besitzt, so kommt hier nur die erste in Frage. Diese ist aber analytisch.

Um einen Überblick über die geometrische Lagerung der durch den

<sup>7)</sup> Diese Darstellung ist bei einer Ebene  $E_2$ , die mit der  $z_1$ -Ebene zwei gleiche Winkel bildet, stets möglich.

Nullpunkt gehenden analytischen Ebenen zu bekommen, stellen wir deren Gleichungen in der (nicht normierten) Form:

$$z_2 = m \cdot z_1$$

dar. Ist dann  $\varepsilon$  der Neigungswinkel einer solchen Ebene gegen die  $z_1$ -Ebene, so erhalten wir auf Grund unserer vorangegangenen Überlegungen zur Bestimmung von  $\varepsilon$  die Beziehung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = m.$$

Zu jedem Neigungswinkel  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ) gehört hiernach ein einparametrischer Kranz von analytischen Ebenen:

$$z_2 = m \cdot e^{i\psi} \cdot z_1,$$

die mit der  $z_1$ -Ebene sämtlich den gleichen Winkel  $\varepsilon$  bilden. Wir greifen zwei Ebenen eines solchen Kranzes heraus und berechnen den Winkel  $\eta$ , den sie miteinander einschließen. Ihre Gleichungen seien:

$$z_2 = m \cdot z_1,$$

$$z_2 = m \cdot e^{i\psi} \cdot z_1.$$

Dann ergibt sich  $\eta$  aus der Gleichung:

$$\sin \eta = \frac{m}{1+|m|^2} |e^{i\psi} - 1| = \frac{m}{1+|m|^2} \cdot 2 \cdot \sin \frac{\psi}{2} = \sin 2\varepsilon \cdot \sin \frac{\psi}{2}.$$

Wenn also  $\psi$  von 0 bis  $2\pi$  wächst, so wächst  $\eta$  erst von 0 bis  $2\varepsilon$  für  $\varepsilon \leq \frac{\pi}{4}$  und von 0 bis  $\pi - 2\varepsilon$  für  $\varepsilon \geq \frac{\pi}{4}$ , um sodann wieder von  $2\varepsilon$  bzw.  $\pi - 2\varepsilon$  bis 0 zu fallen. Die Ebenen eines solchen Kranzes bilden daher mit einer bestimmten von ihnen alle Winkel von 0 bis  $2\varepsilon$  bzw.  $\pi - 2\varepsilon$ .

Für  $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$  kommen gerade sämtliche Winkel von 0 bis  $\frac{\pi}{2}$  vor.

Im übrigen geht durch jede analytische Bewegung die Gesamtheit der analytischen Ebenen in sich über. Insbesondere dreht die analytische Rotation:

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$

$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$$

für  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$  jede durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene in sich um den Winkel  $\varphi$ , während für  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  die Ebenen jedes einzelnen der eben betrachteten Kränze untereinander vertauscht werden.

### § 3.

#### Die analytischen Flächen.

Im Anschluß an unsere Untersuchungen über analytische Ebenen notieren wir noch einige Sätze über analytische Flächenstücke.

Satz 9. *Zwei analytische Flächenstücke schneiden sich höchstens in Punkten, niemals in Kurven.*

Dieser Satz ist die geometrische Interpretation des funktionentheoretischen Theorems, daß zwei analytische Funktionen, die längs eines Kurvenstückes übereinstimmen, identisch sind.

Satz 10. *Jedes analytische Flächenstück besitzt in jedem Punkte eine eindeutig bestimmte Tangentialebene, welche zu den analytischen Ebenen gehört.*

Sei:

$$z_2 = f(z_1)$$

die Gleichung des Flächenstücks; nehmen wir dann auf demselben zwei benachbarte Punkte  $(z'_1, z'_2)$  und  $(z'_1 + \Delta z'_1, z'_2 + \Delta z'_2)$  an, so lautet die Gleichung der durch diese beiden Punkte nach Satz 6, S. 218, bestimmten analytischen Ebene:

$$z_2 - z'_2 = \frac{\Delta z'_2}{\Delta z'_1} \cdot (z_1 - z'_1).$$

Nach den Ausführungen von S. 222 bestimmt sich der Winkel  $\varepsilon$ , den diese Ebene mit der  $z_1$ -Ebene bildet, aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \left| \frac{\Delta z'_2}{\Delta z'_1} \right|.$$

Lassen wir nun den Punkt  $(z'_1 + \Delta z'_1, z'_2 + \Delta z'_2)$  auf einem beliebigen Wege in der Fläche gegen den Punkt  $(z'_1, z'_2)$  gehen, so nähert sich die eben genannte Ebene einer eindeutig bestimmten Grenzebene, die ebenfalls eine analytische Ebene sein muß. Ihre Gleichung lautet:

$$z_2 - z'_2 = \left( \frac{df(z_1)}{dz_1} \right)_{z_1=z'_1} \cdot (z_1 - z'_1),$$

und der Winkel  $\varepsilon$ , den sie mit der  $z_1$ -Ebene bildet, ergibt sich aus der Beziehung:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \left| \frac{df(z_1)}{dz_1} \right|.$$

Der absolute Betrag der Ableitung bestimmt also die Größe des Winkels  $\varepsilon$ , während ihr Arcus die Lage der Tangentialebene innerhalb des Kranzes derjenigen analytischen Ebenen charakterisiert, die alle diesen selben Winkel mit der  $z_1$ -Ebene bilden.

Satz 11. *Zwei analytische Flächenstücke, die einen Punkt gemeinsam haben, schneiden sich in demselben unter einem eindeutig bestimmten Winkel.*

Dieser Satz folgt aus Satz 10, S. 223, in Gemeinschaft mit Satz 7, S. 219.

## § 4.

## Über gewisse nichtanalytische Ebenen.

Wir wollen jetzt gewisse Scharen nichtanalytischer Ebenen betrachten, welche in den späteren Untersuchungen eine wichtige Rolle spielen werden.

Wir legen zunächst durch eine Gerade  $\varphi_1 = \text{konst.}$  der  $z_1$ -Ebene und eine Gerade  $\varphi_2 = \text{konst.}$  der  $z_2$ -Ebene eine Ebene, die nichtanalytischen Charakter haben muß, da sie die beiden analytischen Koordinatenebenen in Geraden schneidet. Lassen wir  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  unabhängig voneinander alle möglichen Werte durchlaufen, so erhalten wir eine zweiparametrische Ebenenschar, die wir aus einem sogleich ersichtlichen Grunde die Schar der *absoluten Ebenen* nennen wollen. Die Gleichung der durch die Parameter  $\varphi_1, \varphi_2$  charakterisierten Ebene dieser Schar ist offenbar:

$$(8) \quad \frac{i}{2} \cdot e^{-i\varphi_1} \cdot z_1 - \frac{i}{2} \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \bar{z}_1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-i\varphi_2} \cdot z_2 + \frac{1}{2} \cdot e^{i\varphi_2} \cdot \bar{z}_2 = 0.$$

Für  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  geht hieraus die Gleichung der durch beide reelle Achsen gehenden *reellen Ebene* hervor:

$$(8_1) \quad \frac{i}{2} \cdot (z_1 - \bar{z}_1) - \frac{1}{2} \cdot (z_2 - \bar{z}_2) = 0,$$

die mit den beiden Beziehungen:

$$z_1 = \bar{z}_1, \quad z_2 = \bar{z}_2$$

äquivalent ist. Die reelle Ebene ist das Bild der Gesamtheit derjenigen Punkte des analytischen Raumes, welche reelle Koordinaten besitzen.

Ebenso erhält man für  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  die Gleichung der durch beide imaginäre Achsen gehenden *imaginären Ebene*:

$$(8_2) \quad \frac{1}{2} (z_1 + \bar{z}_1) + \frac{i}{2} (z_2 + \bar{z}_2) = 0,$$

die mit den beiden Beziehungen:

$$z_1 = -\bar{z}_1, \quad z_2 = -\bar{z}_2$$

äquivalent ist.

Über die absoluten Ebenen gilt folgender

**Satz 12.** *Durch jeden nicht auf einer Koordinatenebene liegenden Punkt geht eine und nur eine absolute Ebene.*

Fällen wir nämlich von dem Punkte  $P(z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2})$  die Lote auf die beiden Koordinatenebenen und verbinden wir deren Fußpunkte mit dem Nullpunkte, so müssen die beiden Lote und die beiden

Verbindungslinien in einer Ebene liegen. Denn sie bilden zusammen ein Viereck mit vier rechten Winkeln. Da bei jedem räumlichen Viereck die Winkelsumme kleiner als  $2\pi$  ist, so kann ein solches Viereck nur ein ebenes sein. Diese Ebene ist aber gerade die durch die Parameterwerte  $\varphi_1, \varphi_2$  bestimmte absolute Ebene. Legen wir in ihr ein rechtwinkliges Cartesisches Achsenkreuz fest, dessen Achsen mit den Schnittlinien der absoluten Ebene mit den Koordinatenebenen zusammenfallen, so besitzt der Punkt  $P$  als Cartesische Koordinaten in der Ebene — abgesehen vom Vorzeichen — offenbar gerade die absoluten Werte seiner komplexen Koordinaten  $r_1 = |z_1|$ ,  $r_2 = |z_2|$ , womit sich unsere Bezeichnungsweise dieser Ebenen erklärt.

Der Punkt  $P$  kann aber nicht noch auf einer zweiten absoluten Ebene liegen. Denn jede absolute Ebene steht halborthogonal zu jeder Koordinatenebene. Deshalb müßten die Lote, welche wir von  $P$  aus in einer solchen zweiten absoluten Ebene auf deren Spuren mit den Koordinatenebenen fällen könnten, zugleich senkrecht zu den Koordinatenebenen selbst stehen, d. h. aber, die zweite Ebene wäre mit der absoluten Ebene  $\varphi_1, \varphi_2$  identisch.

Durch die analytische Drehung:

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$

$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$$

kann die reelle Ebene in jede beliebige absolute Ebene übergeführt werden. Bei jeder solchen Drehung geht die Gesamtheit der absoluten Ebenen in sich über.

Wir notieren noch den

*Satz 13. Ein Punkt wird an der reellen Ebene gespiegelt, indem man seinen Koordinaten die konjugierten Werte erteilt.*

An der reellen Ebene spiegeln heißt nämlich, von dem gegebenen Punkte  $P$  auf diese Ebene das Lot fällen und es um sich selbst bis zum Punkte  $Q$  verlängern. Projizieren wir die das Lot tragende Gerade auf die  $z_1$ -Ebene, so muß bewiesen werden, daß die Projektionen  $P'$  und  $Q'$  von  $P$  und  $Q$  spiegelbildlich zur reellen Achse der  $z_1$ -Ebene liegen. Dies ist aber klar; denn bezeichnen wir den auf der reellen Ebene liegenden Mittelpunkt von  $PQ$  mit  $R$  und seine auf der reellen Achse der  $z_1$  liegende Projektion mit  $R'$ , so ist  $R'$  offenbar die Mitte von  $P'Q'$  und ferner steht  $R'P'$  senkrecht auf der reellen Achse nach dem leicht zu beweisenden geometrischen Satz: Projiziert man einen Punkt  $P$  des vierdimensionalen Raumes auf zwei sich in einer Geraden schneidende Ebenen, so projizieren sich die erhaltenen Projektionen  $R$  und  $P'$  auf die Schnitt-



gerade in demselben Punkte  $R'$ . Da dieselbe Überlegung für die  $z_2$ -Ebene gilt, so ist unser Satz damit bewiesen<sup>6)</sup>.

Eine weitere Schar nichtanalytischer Ebenen erhalten wir auf folgende Weise. Wir betrachten die Gesamtheit der Punkte, für welche  $r_1 = r_2$  und  $\varphi_1 + \varphi_2 = \text{konst.} = \varphi$  ist. Diese Gesamtheit muß offenbar eine Ebene von der Gleichung:

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_2 = 0$$

erfüllen. Lassen wir  $\varphi$  alle möglichen Werte durchlaufen, so bekommen wir eine einparametrische Ebenenschar, die wir die Schar der *Diagonalebene*n nennen wollen.

Zwei Diagonalebene n können sich niemals schneiden. Dagegen schneidet jede Diagonalebene eine einparametrische Schar von absoluten Ebenen, nämlich diejenigen durch die Parameter  $\varphi_1, \varphi_2$  charakterisierten Ebenen, für welche  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$  ist. Umgekehrt schneidet jede absolute Ebene zwei Diagonalebene n, nämlich die durch den Parameter  $\varphi$  charakterisierten Ebenen, für die  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  und  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \pi$  ist. Außerdem gilt der

Satz 14. *Jede Diagonalebene kann durch eine analytische Drehung in die reelle Ebene übergeführt werden.*

Ist nämlich (9) die Gleichung der Diagonalebene, so transformiert die analytische Drehung:

$$z_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot w_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot w_2,$$

$$z_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi} \cdot w_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{i\varphi} w_2$$

diese Ebene in die reelle Ebene (8<sub>1</sub>), wie man durch Einsetzen sofort erkennt.

Wir notieren schließlich den

Satz 15. *Die Diagonalebene n stehen auf denjenigen absoluten Ebenen, von denen sie geschnitten werden, halborthogonal.*

Zum Beweise denken wir uns zunächst die Diagonalebene und eine sie schneidende absolute Ebene durch eine Transformation:

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$

$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2$$

<sup>6)</sup> Mittels des Begriffes der absoluten Ebenen und des geometrisch leicht zu beweisenden Satzes, daß jede (durch den Nullpunkt gehende) analytische Ebene halborthogonal zu jeder sie schneidenden absoluten Ebene steht, ergibt sich übrigens auch rein geometrisch leicht die Richtigkeit der Sätze 7 und 8 von § 2.

so gedreht, daß die letztere in die reelle Ebene übergeht. Dann muß wegen  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$  die Diagonalebene in die andere Diagonalebene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \bar{z}_2 = 0$$

übergehen, welche die reelle Ebene schneidet. Die letztere geht aber durch Spiegelung an der reellen Ebene (Satz 13, S. 225) in sich über, wie man sofort sieht. Sie ist daher zur reellen Ebene in der Tat halborthogonal.

## § 5.

### Die Kreisbereiche.

Es sollen jetzt diejenigen speziellen vierdimensionalen Bereiche definiert werden, auf welche sich die später aufgestellten Abbildungssätze beziehen. Wir betrachten dazu einen Bereich von folgender Beschaffenheit: Er möge von der  $z_1$ -Ebene und von jeder zu ihr parallelen und nicht außerhalb verlaufenden Ebene in einem Kreise geschnitten werden, dessen Mittelpunkt auf der  $z_2$ -Ebene liegt; und umgekehrt möge er von der  $z_2$ -Ebene und jeder zu ihr parallelen nicht außerhalb verlaufenden Ebene in einem Kreise geschnitten werden, dessen Mittelpunkt auf der  $z_1$ -Ebene liegt. Einen solchen Bereich wollen wir einen *Kreisbereich* nennen. Er spielt bei analytischen Funktionen zweier Veränderlicher in mancher Beziehung dieselbe Rolle, wie der Kreis der  $z$ -Ebene bei Funktionen der einen Veränderlichen  $z$ . Besondere Kreisbereiche sind die vierdimensionale Kugel:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq r^2,$$

und der vierdimensionale Doppelzylinder:

$$|z_1| \leq r_1, \quad |z_2| \leq r_2.$$

Über die Kreisbereiche gelten folgende Sätze:

Satz 16. *Jeder Kreisbereich wird durch die analytischen Drehungen:*

$$(10) \quad \begin{aligned} w_1 &= e^{i\psi_1} \cdot z_1, \\ w_2 &= e^{i\psi_2} \cdot z_2 \end{aligned}$$

*in sich transformiert.*

Denn durch die Transformationen:

$$\begin{aligned} w'_1 &= e^{i\psi_1} z_1, & w_1 &= w'_1, \\ w'_2 &= z_2, & w_2 &= e^{i\psi_2} \cdot w'_2 \end{aligned}$$

wird jede zur  $z_1$ -Ebene bzw. zur  $z_2$ -Ebene parallele Ebene um ihren Schnittpunkt mit der Koordinatenebene in sich gedreht.

Aus diesem Satz folgt, daß mit jedem Punkte  $z_1, z_2$ , welcher der Oberfläche eines Kreisbereiches angehört, auch jeder Punkt  $e^{i\psi_1} \cdot z_1, e^{i\psi_2} \cdot z_2$  auf dieser Oberfläche liegt. Damit ergibt sich der

Satz 17. *Jeder Kreisbereich geht durch Spiegelung an jeder absoluten Ebene in sich über.*

Er geht nämlich zunächst durch Spiegelung an der reellen Ebene in sich über, denn aus dem Punkte  $z_1, z_2$  der Oberfläche wird bei einer solchen Spiegelung nach Satz 13, S. 225, der Punkt  $\bar{z}_1 = e^{-2i\varphi_1} \cdot z_1$ ,  $\bar{z}_2 = e^{-2i\varphi_2} \cdot z_2$ . Jede absolute Ebene aber kann nach S. 225 durch eine Drehung (10) stets in die reelle Ebene übergeführt werden.

Satz 18. *Jeder Kreisbereich wird von jeder durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene in einem Kreise geschnitten.*

Denn nach Satz 16 geht jeder Kreisbereich durch jede Drehung:

$$w_1 = e^{i\psi} \cdot z_1,$$

$$w_2 = e^{i\psi} \cdot z_2$$

in sich über. Dabei wird aber nach S. 222 jede der fraglichen analytischen Ebenen in sich um den Winkel  $\psi$  gedreht, und da  $\psi$  beliebig ist, muß die Schnittfigur ein Kreis sein. Übrigens folgt offenbar entsprechend, daß die Schnittkreise, welche die Ebenen eines der S. 222 erwähnten Ebenenkränze erzeugen, sämtlich denselben Radius besitzen müssen.

Die Schnittbereiche, welche ein Kreisbereich mit den absoluten Ebenen bildet, sind alle kongruent, zentrisch symmetrisch zum Nullpunkt und spiegelbildlich zu den Schnittgeraden der absoluten Ebenen mit den Koordinatenebenen. Wir können uns jeden Kreisbereich dadurch entstanden denken, daß wir einen beliebigen, von den Achsen und einer Kurve, die von jeder zu den Achsen parallelen Geraden höchstens einmal geschnitten wird, begrenzten und im ersten Quadranten liegenden Bereich einer absoluten Ebene um beide Koordinatenebenen unabhängig je um den Winkel  $2\pi$  rotieren lassen. Dabei wird jeder Punkt des Kreisbereiches einmal und (mit Ausnahme der Punkte auf den Koordinatenebenen) infolge von Satz 12, S. 224, auch nur einmal erhalten. Die Randkurve des rotierenden Bereiches wird durch eine funktionale Beziehung zwischen den absoluten Werten der Koordinaten dargestellt:

$$\Phi(|z_1|, |z_2|) = 0.$$

Den Schnittbereich eines Kreisbereiches mit einer absoluten Ebene, durch welchen umgekehrt der Kreisbereich eindeutig bestimmt ist, wollen wir seinen *Leitbereich* nennen (s. Fig. 1). Der Leitbereich der Kugel ist ein Kreis, derjenige des Doppelzylinders ein Rechteck.

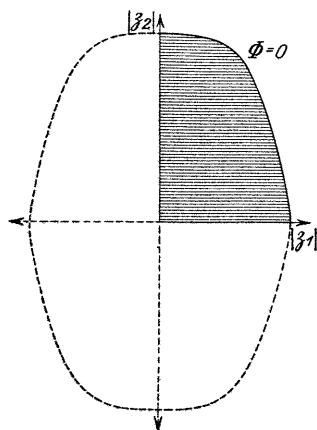


Fig. 1.

wir seinen *Leitbereich* nennen (s. Fig. 1). Der Leitbereich der Kugel ist ein Kreis, derjenige des Doppelzylinders ein Rechteck.

Jeder Leitbereich und damit auch jeder Kreisbereich ist in bezug auf den Nullpunkt ein Stern, wie man sofort sieht. Dabei verstehen wir unter einem Stern in der üblichen Weise einen Bereich, der von jeder durch den Nullpunkt gehenden Geraden nur in einer Strecke geschnitten wird. Bei unseren späteren Betrachtungen (im II. und III. Teil) werden wir uns jedoch auf konvexe Kreisbereiche beschränken. Jeder konvexe Kreisbereich besitzt auch einen konvexen Leitbereich.

Wir beweisen noch folgende Sätze über die Transformation von Kreisbereichen:

Satz 19. *Jeder Kreisbereich geht durch jede Transformation von der Form:*

$$(11) \quad \begin{aligned} w_1 &= R_1 \cdot z_1 \\ w_2 &= R_2 \cdot z_2 \end{aligned} \quad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

*in einen anderen Kreisbereich über.*

Denn jede absolute Ebene geht bei einer solchen Abbildung in sich über, und alle Leitbereiche in diesen Ebenen werden auf dieselbe Weise ähnlich transformiert.

Satz 20. *Jeder Kreisbereich geht durch die Transformation:*

$$(12) \quad \begin{aligned} w_1 &= z_2, \\ w_2 &= z_1 \end{aligned}$$

*wieder in einen Kreisbereich über.*

Denn diese Transformation stellt einfach eine Vertauschung der beiden Koordinatenebenen dar.

Alle Kreisbereiche, welche aus einem beliebigen durch die Transformationen (11) und (12), sowie die Kombinationen dieser Substitutionen (auch mit den Drehungen (10)) hervorgehen, bilden eine *Klasse von Kreisbereichen*. In jeder solchen Klasse kommen zwei Bereiche vor, deren Schnittkreise mit den Koordinatenebenen Einheitskreise sind. Einen dieser beiden Bereiche wollen wir als Repräsentanten einer solchen Klasse ansehen und ihren *Normalbereich* nennen.

Es kann auch der Fall eintreten, daß jene beiden Bereiche einer Klasse, die als Normalbereiche dienen können, identisch sind. Dann geht der Normalbereich durch die Transformation (12) in sich über. Einen solchen Bereich und jeden aus ihm durch die Ähnlichkeitstransformation  $w_1 = R \cdot z_1$ ,  $w_2 = R \cdot z_2$  hervorgehenden Bereich wollen wir einen *symmetrischen Kreisbereich* nennen. Der Leitbereich eines symmetrischen Kreisbereiches muß offenbar spiegelbildlich zu den beiden Diagonalen  $|z_1| = |z_2|$

sein. Liegt umgekehrt ein solcher spiegelbildlicher Leitbereich vor, so ist der zugehörige Kreisbereich stets symmetrisch. So sind die Einheitskugel:

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 \leq 1$$

und der Einheitszylinder:

$$|z_1| \leq 1, \quad |z_2| \leq 1$$

symmetrische Normalbereiche der zugehörigen Klassen. Eine sich auf einen symmetrischen Normalbereich aufbauende Klasse wollen wir kurz eine *symmetrische Klasse*, die zur Einheitskugel gehörige insbesondere die *Kugelklasse* nennen.

Für die Bereiche einer symmetrischen Klasse gilt der

Satz 21. *Jeder Kreisbereich einer symmetrischen Klasse wird durch eine Transformation von der Form:*

$$\begin{aligned} w_1 &= R \cdot z_2 \\ w_2 &= \frac{1}{R} \cdot z_1 \end{aligned} \quad (R \text{ pos. reell})$$

in sich transformiert.

Denn ein solcher Bereich kann durch eine Substitution:

$$\begin{aligned} w_1 &= R_1 \cdot z_1 \\ w_2 &= R_2 \cdot z_2 \end{aligned} \quad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

in den Normalbereich übergeführt werden, und dieser wird durch (12) auf sich selbst abgebildet. Dann wird  $R = \frac{R_2}{R_1}$ .

Ferner besteht der

Satz 22. *Jeder symmetrische Kreisbereich geht durch Spiegelung an jeder Diagonalebene in sich über.*

Sei die Diagonalebene durch den Parameter  $\varphi$  charakterisiert. Wir spiegeln an ihr dann zunächst eine Gerade  $\varphi_1 = \text{konst.}$  der  $z_1$ -Ebene. Dazu legen wir durch sie diejenige stets existierende und durch die Parameterwerte  $\varphi_1, \varphi_2$  charakterisierte absolute Ebene, welche die Diagonalebene schneidet, so daß also  $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$  ist. Infolge von Satz 15, S. 226. geht diese bei der Spiegelung in sich über, indem sie selbst an der Diagonalen  $|z_1| = |z_2|$  gespiegelt wird. Aus jeder Geraden  $\varphi_1 = \text{konst.}$  der  $z_1$ -Ebene wird bei der Spiegelung daher eine Gerade  $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1 = \text{konst.}$  der  $z_2$ -Ebene und umgekehrt. Da gleichzeitig alle Ebenen wieder Ebenen werden, so geht jede absolute Ebene in eine andere oder sich selbst derart über, daß die Schnittlinien mit beiden Koordinatenebenen vertauscht werden. Dabei müssen aber die nach Voraussetzung spiegelbildlichen Leitbereiche ineinander und mithin der ganze Kreisbereich in sich übergehen.

Eine solche Spiegelung besitzt ersichtlich folgende Darstellung:

$$w_1 = e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_2,$$

$$w_2 = e^{i\varphi} \cdot \bar{z}_1.$$

Wir notieren zum Schluß noch folgende Sätze:

Satz 23. *Die Einheitskugel wird durch jede analytische Drehung* (3), (3<sub>1</sub>), S. 214) *in sich transformiert.*

Satz 24. *Die Einheitskugel wird durch die linear gebrochenen analytischen Funktionen:*

$$w_1 = \frac{a_1 z_1 + a_2 z_2 + a}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c},$$

$$w_2 = \frac{b_1 z_1 + b_2 z_2 + b}{c_1 z_1 + c_2 z_2 + c}$$

mit den Bedingungen:

$$|a_1|^2 + |b_1|^2 + |a|^2 + |b|^2 = |c_1|^2 + |c|^2,$$

$$|a_2|^2 + |b_2|^2 + |a|^2 + |b|^2 = |c_2|^2 + |c|^2,$$

$$a_1 \cdot \bar{a} + b_1 \cdot \bar{b} = c_1 \cdot \bar{c},$$

$$a_2 \cdot \bar{a} + b_2 \cdot \bar{b} = c_2 \cdot \bar{c},$$

$$a_1 \cdot \bar{a}_2 + b_1 \cdot \bar{b}_2 = c_1 \cdot \bar{c}_2$$

derart in sich transformiert, daß der Nullpunkt in den Punkt  $w_1 = \frac{a}{c}$ ,  $w_2 = \frac{b}{c}$  übergeht.

Man kann also stets eine umkehrbar eindeutige analytische Abbildung der Einheitskugel in sich angeben, welche einen beliebigen inneren Punkt der Kugel in den Nullpunkt überführt. Das Entsprechende gilt für den Einheitszylinder, denn es besteht der

Satz 25. *Der Einheitszylinder wird durch die linear gebrochenen analytischen Funktionen:*

$$w_1 = \frac{a_1 \cdot z_1 + b_1}{\bar{b}_1 \cdot z_1 + \bar{a}_1} \quad (|a_1|^2 - |b_1|^2 > 0),$$

$$w_2 = \frac{a_2 \cdot z_2 + b_2}{\bar{b}_2 \cdot z_2 + \bar{a}_2} \quad (|a_2|^2 - |b_2|^2 > 0)$$

derart in sich transformiert, daß der Nullpunkt in den Punkt  $w_1 = \frac{b_1}{\bar{a}_1}$ ,  $w_2 = \frac{b_2}{\bar{a}_2}$  übergeht.

Den Transformationen der Sätze 23, 24 und 25 entsprechende Abbildungen existieren natürlich für alle der Kugelklasse bzw. der Zylinderklasse angehörigen Kreisbereiche.

## II. Teil.

### Die Übertragung des Schwarzschen Lemmas und des Spiegelungsprinzips.

Es soll sich in diesem Teil um die Herleitung zweier Hilfssätze handeln, die als Übertragungen des Schwarzschen Lemmas und des Spiegelungsprinzips bei analytischen Funktionen einer Veränderlichen anzusehen sind und sich bei der Behandlung unserer Abbildungsprobleme ebenfalls als äußerst „zugkräftig“ erweisen.

#### § 1.

##### Das Lemma.

Wenn dem Kreis in der Ebene der Kreisbereich des analytischen Raumes entsprechen soll, werden wir erwarten können, einen dem Lemma entsprechenden Satz für Kreisbereiche zu erhalten. Wir beschränken uns dabei jedoch auf konvexe Bereiche. Dann besteht ein solcher Satz in der Tat und wir formulieren ihn folgendermaßen:

*Satz 1. Wird ein konvexer Kreisbereich so auf einen ganz in seinem Inneren gelegenen Bereich abgebildet, daß der Nullpunkt fest bleibt, so geht jeder in bezug auf den Nullpunkt zum Kreisbereich ähnliche Teilbereich ebenfalls in einen ganz seinem Inneren angehörenden Bereich über.*

Um diesen Satz zu beweisen, stellen wir zunächst eine Hilfsbetrachtung an. Wir denken uns einen beliebigen Kreisbereich und legen durch den Nullpunkt eine willkürliche analytische Ebene  $E_1$ . In dieser ziehen wir durch den Nullpunkt einen Strahl und konstruieren nun denjenigen zu diesem Strahl orthogonalen dreidimensionalen ebenen Raum, welcher zugleich Stützraum an den Kreisbereich ist und den Strahl im Punkte  $A$  schneiden möge (s. Fig. 2). Diese Konstruktion führen wir für jeden solchen Strahl aus und erhalten so eine Menge von Punkten  $A$ , die, wie wir behaupten, einen Kreis erfüllen muß. Dies ist klar, denn durch die Transformation:

$$w_1 = e^{i\psi} \cdot z_1,$$

$$w_2 = e^{i\psi} \cdot z_2$$

geht der Kreisbereich in sich über; jeder Stützraum bleibt dabei Stützraum, und der Punkt  $A$  dreht sich in der analytischen Ebene um den Winkel  $\psi$ , der gänzlich willkürlich war. Alle Stützräume umschließen also einen (vierdimensionalen) Kreiszyylinder, der allgemein den Kreisbereich in den Schnitkreisen einer gewissen Menge analytischer durch den Nullpunkt gehender Ebenen trifft.

Jeder Stützraum kann nämlich mit dem Kreisbereich nur solche Punkte gemeinsam haben, die auf der Leitkurve derjenigen absoluten (den Stützraum in der Geraden  $g$  schneidenden) Ebene liegen, die den zugehörigen Strahl der Ebene  $E_1$  enthält. Der Stützraum hat daher mit dem Kreisbereich genau so viele Punkte gemein wie die Gerade  $g$  mit der Leitkurve, und der Stützzylinder trifft mithin den Kreisbereich in den Schnitkreisen aller derjenigen durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebenen, die jene Punkte enthalten. Ist der Kreisbereich konvex, so gehört umgekehrt auch zu jedem seiner Begrenzungspunkte mindestens eine Ebene von der Beschaffenheit, daß der zugehörige Stützzylinderraum diesen Punkt enthält.

Die Funktionen, welche die Abbildung des Satzes 1 vermitteln, seien nun<sup>9)</sup>:

$$(1) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{20}z_1^2 + a_{11}z_1z_2 + a_{02}z_2^2 + \dots, \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 + b_{20}z_1^2 + b_{11}z_1z_2 + b_{02}z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

Unser Satz behauptet dann: Legen wir durch jeden inneren Punkt des Kreisbereichs einen (dreidimensionalen) Raum, der dem Grenzraum des Bereichs (mit dem Nullpunkt als Ähnlichkeitszentrum) ähnlich ist und den wir die durch den Punkt gehende „Schale“ nennen wollen, so verbleibt bei der Abbildung jeder Punkt innerhalb oder auf seiner Schale. Wir beweisen dies für einen beliebigen inneren Punkt  $P(z_1, z_2)$  und legen zu diesem Zweck durch  $P$  die durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene  $E$  (Satz 6, S. 218), welche nach Satz 18, S. 228, von dem Kreisbereich in einem

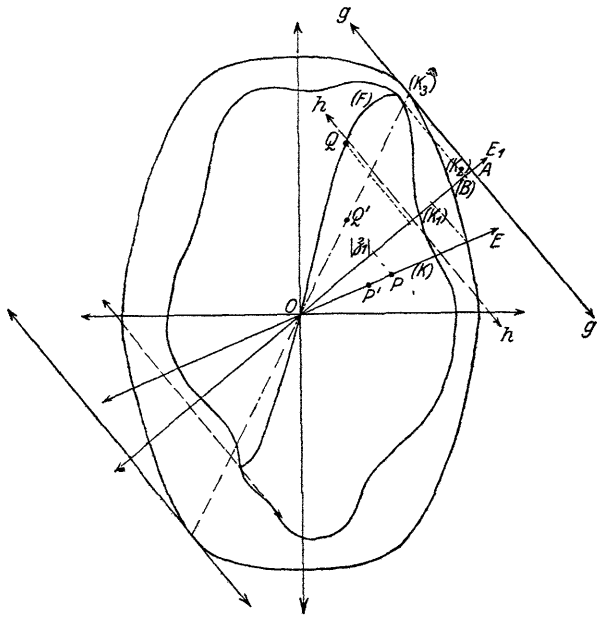


Fig. 2.

<sup>9)</sup> Wir benutzen hier und im folgenden, daß sich eine innerhalb eines konvexen Kreisbereiches reguläre Funktion in eine dort überall absolut konvergente Potenzreihe um den Mittelpunkt entwickeln läßt. Dies ergibt sich — ähnlich wie der entsprechende Satz über die Entwickelbarkeit einer innerhalb eines Kreises regulären Funktion einer Veränderlichen — sofort aus der Cauchyschen Integralformel für Funktionen zweier Veränderlicher.



Kreise  $K$  geschnitten wird (s. Fig. 2). Diese Kreisfläche  $K$  wird bei der Abbildung in ein durch den Nullpunkt gehendes analytisches Flächenstück  $F$  übergeführt, auf welchem der Bildpunkt  $Q(w_1, w_2)$  von  $P$  liegt<sup>10)</sup>. Wir legen ferner durch den Nullpunkt eine beliebige weitere analytische Ebene  $E_1$  und projizieren sowohl  $F$  als auch  $K$  auf dieselbe. Der Projektionsbereich von  $F$  sei  $B$ , derjenige von  $K$  ein Kreis  $K_1$ <sup>11)</sup>. Konstruieren wir nun zu der Ebene  $E_1$  den oben erwähnten Stützzyllerraum, so muß  $B$  offenbar ganz innerhalb des Kreises  $K_2$  liegen, welchen dieser Zylinder raum aus  $E_1$  ausschneidet.

Nunmehr denken wir uns das Koordinatensystem analytisch so gedreht, daß die eine Koordinatenebene mit  $E_1$  zusammenfällt. Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit  $Z_1, Z_2$  bzw.  $W_1, W_2$ , so transformieren sich die Abbildungsfunktionen (1) in die Form:

$$(2) \quad \begin{aligned} W_1 &= A_{10} \cdot Z_1 + A_{01} \cdot Z_2 + \dots, \\ W_2 &= B_{10} \cdot Z_1 + B_{01} \cdot Z_2 + \dots \end{aligned}$$

In den neuen Koordinaten hat  $E$  die Gleichung  $Z_2 = m \cdot Z_1$ , und die Funktion:

$$W_1 = (A_{10} + m \cdot A_{01}) \cdot Z_1 + \dots$$

bildet dabei offenbar den Kreis  $K_1$  auf den Bereich  $B$  so ab, daß der Nullpunkt festbleibt und  $B$  ganz innerhalb des Kreises  $K_2$  liegt. Wir können also auf diese Funktion das Schwarzsche Lemma der Ebene anwenden. Sind  $R_1$  und  $R_2$  bzw. die Radien der Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , so folgt daraus, daß stets:

$$|W_1| \leq \frac{R_2}{R_1} \cdot |Z_1|$$

sein muß, d. h. daß der Bildpunkt  $Q$  innerhalb des, mit dem Radius  $\frac{R_2}{R_1} \cdot |Z_1|$  orthogonal zu  $E_1$  konstruierten Stützzyllerraums ( $h$  in der Figur) liegen muß. Da nun die Ebene  $E_1$  willkürlich war, so muß  $Q$  innerhalb sämtlicher derart zu konstruierenden Zylinder liegen. Nun ist aber  $\frac{|Z_1|}{R_1} = \frac{OP}{R} = \lambda$  ( $R$  Radius des Kreises  $K$ ) eine konstante, lediglich vom Punkte  $P$  abhängige Zahl. Daher gehen sämtliche Zylinder, deren gemeinsames Innere  $Q$  enthalten muß, aus den Stützzyllerräumen des

<sup>10)</sup> In der Figur ist angenommen, daß der Bildbereich zunächst noch so gedreht wurde, daß der Bildpunkt  $Q$  mit dem Punkt  $P$  in derselben absoluten Ebene liegt.

<sup>11)</sup> Nach P. H. Schouten, I. Teil, S. 73, 74 projiziert sich ein Kreis einer Ebene des vierdimensionalen Raumes dann und nur dann auf einer anderen schneidenden Ebene wieder als Kreis, wenn diese zwei gleiche Winkel mit der ersten bildet; vgl. also Satz 7, S. 219.

Kreisbereiches durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis  $\lambda:1$  hervor. Sie umhüllen daher (und weil der Bereich konvex ist) einen dem Kreisbereich ähnlichen Teilbereich, dessen Grenzschale offenbar gerade durch  $P$  gehen muß. Da  $Q$  innerhalb dieses Bereiches liegen muß, so ist unser Satz damit bewiesen.

Wir sprechen zum Schlusse den Satz 1 für die Kugel noch einmal gesondert aus, und zwar in folgender Form:

Satz 1a. *Wird eine Kugel so auf einen ganz in ihrem Inneren gelegenen Bereich abgebildet, daß der Nullpunkt festbleibt, so kann die Entfernung irgendeines ihrer Punkte vom Nullpunkt nicht größer werden.*

## § 2.

### Eine Vertiefung des Lemmas.

Wir fragen jetzt, was wir aussagen können, wenn bei der im vorigen Paragraphen behandelten Abbildung gewisse der Punkte auf den durch sie bestimmten Schalen bleiben, also nicht in deren Inneres rücken. Sei  $P'$  ein solcher Punkt und  $Q'$  sein Bildpunkt. Wir legen dann durch  $Q'$  die durch den Nullpunkt gehende analytische Ebene, welche den Kreisbereich in einem Kreise  $K_3$  schneidet, und konstruieren diejenige Ebene  $E_1$  (oder eine derjenigen Ebenen), deren orthogonaler Stützzyklinderraum den Kreisbereich gerade in diesem Schnittkreise trifft.

Für das Folgende wollen wir nur noch die Voraussetzung machen, daß der Stützraum mit dem Kreisbereich keine weiteren Punkte außer denen des Kreises  $K_3$  gemein hat, oder, was dasselbe bedeutet, daß die Gerade  $g$  die Leitkurve nur in einem einzigen Punkte trifft. Dies wird immer dann der Fall sein, wenn der Punkt  $Q'$  im Inneren eines nicht geradlinigen Kurvenstückes oder auf einer durch zwei geradlinige Kurvenstücke gebildeten Ecke der durch ihn hindurchgehenden ähnlich verkleinerten Leitkurve liegt. Punkte von solcher Beschaffenheit wollen wir kurz *ordentliche Punkte* des Kreisbereiches nennen.

Wir fassen dann die Ebene  $E_1$  wieder als Koordinatenebene auf und projizieren alles auf sie. Dann wird durch die Funktionen (2) der Kreis  $K_1$  derart auf einen ganz im Inneren des Kreises  $K_2$  liegenden Bereich  $B'$  abgebildet, daß ein Punkt  $W_1$  gerade den absoluten Betrag  $\frac{R_2}{R_1} \cdot |Z_1|$  erhält; denn  $Q'$  liegt auf derselben Schale wie  $P'$ , und der dieser Schale angehörige zu  $E_1$  orthogonale Stützzyklinderraum geht durch  $Q'$ . Daher muß nach dem Schwarzschen Lemma die Abbildung in der Ebene  $E_1$  eine Drehstreckung mit dem Dehnungsverhältnis  $\frac{R_2}{R_1}$  sein. Dann müssen aber die Bildpunkte aller Punkte  $P$  der Ebene  $E$  auf den zugehörigen

Stützzyklerräumen liegen, und da sie gleichzeitig nicht außerhalb ihrer Schalen liegen dürfen, so liegen sie alle auf ihren Schalen, und zwar auf den Berührungskreisen der Stützzyklerräume mit denselben.

Da wir nun vorausgesetzt haben, daß jeder solche Raum seine Schale nur in einem Kreise trifft, so müssen die Bildpunkte  $Q$  gerade die durch  $Q'$  gehende analytische Ebene erfüllen, und diese Ebene muß aus der Ebene  $E$  durch Drehstreckung hervorgegangen sein. Wir haben daher den

*Satz 2. Bleibt bei der Abbildung, von welcher Satz 1 handelt, ein einziger Punkt auf seiner Schale, und ist sein Bildpunkt gleichzeitig ein ordentlicher Punkt, so geht die durch jenen und den Nullpunkt bestimmte analytische Ebene bei der Abbildung durch Drehstreckung in eine andere analytische Ebene über.*

Wir betrachten weiterhin eine den Bedingungen des Satzes 1 genügende Abbildung und nehmen an, daß wir von einer abzählbar unendlichen Menge von Punkten, von welchen keine zwei auf einer durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene liegen, wissen, daß sie auf ihren Schalen verbleiben, und daß ihre Bilder ordentliche Punkte des Kreisbereiches sind. Dann muß nach Satz 2 eine abzählbare Menge von analytischen Ebenen bei der Abbildung durch Drehstreckungen in eine andere solche Ebenenmenge übergeführt werden. Seien die Gleichungen jener Ebenen in der Form:

$$z_2 = m \cdot z_1$$

gegeben. Dann müssen also die Abbildungsfunktionen (1) für jede solche Ebene:

$$w_1 = (a_{10} + m \cdot a_{01}) \cdot z_1 + (a_{20} + m \cdot a_{11} + m^2 a_{02}) \cdot z_1^2 + \dots,$$

$$w_2 = \left(\frac{1}{m} \cdot b_{10} + b_{01}\right) \cdot z_2 + \left(\frac{1}{m^2} \cdot b_{20} + \frac{1}{m} \cdot b_{11} + b_{02}\right) \cdot z_2^2 + \dots$$

in Drehstreckungen übergehen, d. h. es muß für jedes derartige  $m$ :

$$a_{20} + m \cdot a_{11} + m^2 \cdot a_{02} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{m^2} \cdot b_{20} + \frac{1}{m} \cdot b_{11} + b_{02} = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

sein. Da diese Gleichungen aber für eine abzählbare Menge von Werten  $m$  bestehen müssen, so folgt:

$$a_{20} = a_{11} = a_{02} = \dots = 0,$$

$$b_{20} = b_{11} = b_{02} = \dots = 0,$$

d. h. die Abbildungsfunktionen (1) sind linear. Wir erhalten somit den

Satz 3. *Bleibt bei der Abbildung, von welcher Satz 1 handelt, jeder Punkt aus einer abzählbar unendlichen Menge von Punkten, von denen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen, auf seiner Schale, und zwar so, daß sein Bildpunkt ein ordentlicher Punkt ist, so müssen die Abbildungsfunktionen linear sein:*

$$\begin{aligned} w_1 &= a_{10} \cdot z_1 + a_{01} \cdot z_2, \\ w_2 &= b_{10} \cdot z_1 + b_{01} \cdot z_2. \end{aligned}$$

## § 3.

## Das Spiegelungsprinzip erster Art.

Das Spiegelungsprinzip bei Funktionen zweier Veränderlicher entspricht vollkommen dem bekannten Spiegelungsprinzip der Ebene. Wir sprechen es zunächst in folgender Form aus:

Satz 4. *Führt eine Abbildung ein Stück der reellen Ebene wieder in ein Stück dieser Ebene über, so werden aus zur reellen Ebene spiegelbildlichen Punkten wieder spiegelbildliche Punkte.*

Zum Beweise bedenken wir, daß nach Satz 13, S. 225, einen Punkt an der reellen Ebene spiegeln heißt, seinen Koordinaten die konjugierten Werte erteilen. Wir geben nun  $z_2$  irgendeinen festen reellen Wert aus dem betreffenden Ebenenstück. Dann nehmen die beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} w_1 &= (a_{00} + a_{01} \cdot z_2 + \dots) + (a_{10} + a_{11} \cdot z_2 + \dots) \cdot z_1 + \dots, \\ w_2 &= (b_{00} + b_{01} \cdot z_2 + \dots) + (b_{10} + b_{11} \cdot z_2 + \dots) \cdot z_1 + \dots, \end{aligned}$$

welche die Abbildung vermitteln mögen, längs eines Stückes der reellen Achse von  $z_1$  reelle Werte an. Dann müssen sie aber nach dem Spiegelungsprinzip der Ebene reelle Koeffizienten haben. Dies gilt wieder für eine kontinuierliche Menge von Werten von  $z_2$ . Für alle diese Werte müssen also die Funktionen:

$$\begin{aligned} &a_{00} + a_{01} \cdot z_2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ &b_{00} + b_{01} \cdot z_2 + \dots, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots. \end{aligned}$$

reelle Werte annehmen. Daher müssen sie selbst reelle Koeffizienten haben. Dann sind aber sämtliche Koeffizienten der ursprünglichen Funktionen reell und diese nehmen mithin für konjugierte Werte von  $z_1$ ,  $z_2$  konjugierte Werte von  $w_1$ ,  $w_2$  an.

Wir erweitern das Spiegelungsprinzip noch in folgendem

Satz 5. *Führt eine Abbildung ein Stück einer aus der reellen Ebene durch analytische Drehung oder Parallelverschiebung hervorgehen-*

den nichtanalytischen Ebene in ein Stück einer ebensolchen Ebene über, so werden aus zur einen Ebene spiegelbildlichen Punkten spiegelbildliche Punkte der anderen Ebene.

Dies folgt sofort aus Satz 4, wenn man berücksichtigt, daß analytische Drehungen und Parallelverschiebungen spiegelbildliche Punkte ebenfalls wieder in spiegelbildliche Punkte überführen. Da keineswegs sämtliche nichtanalytischen Ebenen aus der reellen Ebene durch analytische Drehungen erzeugt werden können, so ist das Spiegelungsprinzip auch nicht für alle nichtanalytischen Ebenen bewiesen. Wohl aber gilt es insbesondere für die absoluten Ebenen, da dieselben durch analytische Drehungen aus der reellen Ebene hervorgehen.

### III. Teil.

## Die Abbildungsprobleme.

Es sollen in diesem Teil nun diejenigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen zweier konvexer Kreisbereiche aufeinander untersucht werden, welche den Nullpunkt festlassen. Da die beiden Kreisbereiche auch identisch sein können, so handelt es sich gleichzeitig um die Betrachtung der umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines konvexen Kreisbereiches mit festem Mittelpunkt in sich.

#### § 1.

#### Ein Hilfssatz.

$p, q, r, s$  seien beliebig gegebene Größen und  $m$  eine gesuchte komplexe Zahl. Wir fragen nach der Zahl der Lösungen von:

$$(1) \quad p \cdot m \cdot \bar{m} + q \cdot m + r \cdot \bar{m} + s = 0.$$

Wir vereinigen die Gleichung (1) mit ihrer konjugierten:

$$\bar{p} \cdot m \cdot \bar{m} + \bar{r} \cdot m + \bar{q} \cdot \bar{m} + \bar{s} = 0$$

und eliminieren  $\bar{m}$  aus beiden. Das führt zu:

$$(p \cdot \bar{r} - \bar{p} \cdot q) \cdot m^2 + (|r|^2 - |q|^2 + p \cdot \bar{s} - \bar{p} \cdot s) \cdot m + (r \cdot \bar{s} - q \cdot s) = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $m$ , die höchstens zwei verschiedene Wurzeln besitzt, falls nicht alle Koeffizienten verschwinden. Also kann in diesem Fall auch die Gleichung (1) höchstens zwei Lösungen haben.

Verschwindet aber die linke Seite der quadratischen Gleichung identisch:

$$\begin{aligned} p \cdot \bar{r} - \bar{p} \cdot q &= 0, \\ |r|^2 - |q|^2 + p \cdot \bar{s} - \bar{p} \cdot s &= 0, \\ r \cdot \bar{s} - q \cdot s &= 0, \end{aligned}$$

so folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} |q| = |r|, \\ \text{arc } p = \begin{cases} \text{arc } s & \text{oder:} \\ \text{arc } s + \pi, \end{cases} \\ 2 \text{ arc } p = \text{arc } q + \text{arc } r. \end{cases}$$

Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn wir setzen:

$$\begin{aligned} p &= r_1 \cdot e^{i\varphi}, & q &= r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)}, \\ s &= \pm r_3 \cdot e^{i\varphi}, & r &= r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)}, \end{aligned}$$

und Gleichung (1) erhält hiermit die Form:

$$r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot |m|^2 + r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot m + r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot \bar{m} \pm r_3 \cdot e^{i\varphi} = 0,$$

oder:

$$(3) \quad r_1 \cdot |m|^2 + \varrho \cdot m + \bar{\varrho} \cdot \bar{m} \pm r_3 = 0,$$

worin  $r_1$  und  $r_3$  positiv reell und

$$\varrho = r_2 \cdot e^{i\psi}$$

ist. Wir können also der gegebenen Gleichung (1) in diesem Fall stets die Form der Gleichung (3) geben, die mit ihrer konjugierten Gleichung identisch ist. Liegt umgekehrt eine Gleichung (1) vor, welche auf eine Form gebracht werden kann, die mit der konjugierten übereinstimmt, so ist diese Form die in (3) vorliegende und die linke Seite der zugehörigen quadratischen Gleichung verschwindet somit identisch.

Gleichung (3) läßt sich aber leicht auflösen. Ist zunächst  $r_1 \neq 0$ , so schreiben wir:

$$|r_1 \cdot m + \bar{\varrho}|^2 - \Delta = 0,$$

wobei:

$$\Delta = |\varrho|^2 \mp r_1 \cdot r_3$$

gesetzt ist. Dann folgt:

$$m = \frac{1}{r_1} \cdot \left\{ |\sqrt{\Delta}| \cdot e^{i\lambda} - \bar{\varrho} \right\},$$

wenn  $\Delta > 0$  ist.  $\lambda$  ist dabei ein veränderlicher Parameter. In diesem Falle besitzt die Gleichung also eine einparametrische Schar von Lösungen, welche einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $-\frac{\bar{\varrho}}{r_1}$  und dem Radius  $\frac{|\sqrt{\Delta}|}{r_1}$  erfüllen. Ist  $\Delta = 0$ , so ist die Lösung eindeutig bestimmt. Ist  $\Delta < 0$ , so existiert überhaupt keine Lösung.

Ist ferner  $r_1 = 0$ , aber  $\varrho \neq 0$ , so folgt aus:

$$\varrho \cdot m + \bar{\varrho} \cdot \bar{m} \pm r_3 = 0$$

sofort:

$$R(\varrho \cdot m) = \mp \frac{1}{2} r_3.$$

Auch in diesem Falle besitzt die Gleichung daher eine einparametrische Schar von Lösungen, die hier eine Gerade erfüllen.

Wir erhalten damit den folgenden

*Hilfssatz. Bei der Auflösung der komplexen Gleichung (1) können zwei Fälle eintreten.*

*I. Die Bedingungen (2) sind nicht erfüllt. Dann besitzt sie höchstens zwei Lösungen.*

*II. Die Bedingungen (2) sind erfüllt. Dann besitzt sie*

- 1. eine einparametrische Schar von Lösungen, die einen Kreis oder eine Gerade erfüllen, wenn  $\Delta > 0$  und je nachdem  $r_1 \neq 0$  oder  $r_1 = 0$  ist;*
- 2. eine eindeutig bestimmte Lösung, wenn  $\Delta = 0$  und  $r_1 \neq 0$  ist;*
- 3. keine Lösung, wenn  $\Delta < 0$  oder  $\Delta = 0$  und  $r_1 = 0$ , also auch  $\rho = 0$ , aber  $r_3 \neq 0$  ist.*

## § 2.

### Vorbereitende Betrachtungen über die Abbildungen eines Kreisbereiches in sich.

Wir beweisen jetzt einige Sätze über diejenigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines konvexen Kreisbereiches in sich, die den Mittelpunkt festlassen; diese Sätze werden wir später anwenden.

Zunächst muß bei einer solchen Abbildung jede der früher erwähnten Schalen in sich übergehen, denn würde ein Punkt ins Innere rücken, so müßte sein Bildpunkt bei der umgekehrten Abbildung ins Äußere seiner Schale treten, was nach Satz 1 des II. Teils, S. 232, unmöglich ist. Daher bleiben sämtliche Punkte auf ihren Schalen.

Da nun die totale Leitkurve eines konvexen Kreisbereiches mindestens ein nicht geradliniges Kurvenstück oder eine Ecke, also mindestens einen ordentlichen Punkt enthält, so gibt es bei einer den Nullpunkt festlassenden Abbildung eines solchen Kreisbereiches in sich mindestens einen Punkt, der auf seiner Schale bleibt und in einen ordentlichen Punkt  $Q$  übergeht, und, falls die Leitkurve nicht gerade eine einen Punkt der  $|z_1|$ -Achse mit einem Punkt der  $|z_2|$ -Achse verbindende geradlinige Strecke ist, auch unendlich viele solcher Punkte, von denen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen. Denn wird der Bildpunkt  $Q$  den Drehungen  $w_1 = e^{i\psi_1} \cdot z_1$ ,  $w_2 = e^{i\psi_2} \cdot z_2$  unterworfen, so befinden sich unter den neu entstandenen (ebenfalls ordentlichen) Punkten unendlich viele, von welchen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen, und diese sind die Bilder solcher Punkte, die offenbar (wegen Satz 2) die gleiche Eigenschaft besitzen müssen. Dann können wir aber auf solche

Abbildungen den Satz 3 des II. Teils, S. 237, anwenden und finden, daß sie nur durch lineare Funktionen vermittelt werden können.

Wir wollen für diesen Satz noch einen zweiten Beweis geben, der gleichzeitig den eben ausgenommenen Fall mit umfaßt. Da bei jeder der in Rede stehenden Abbildungen jede Schale in sich übergehen muß, so müssen mit den abbildenden Funktionen:

$$(4) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + a_{20}z_1^2 + a_{11}z_1z_2 + a_{02}z_2^2 + \dots, \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 + b_{20}z_1^2 + b_{11}z_1z_2 + b_{02}z_2^2 + \dots \end{aligned}$$

auch sämtliche Funktionen:

$$(5) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_{10}z_1 + a_{01}z_2 + \lambda \cdot (a_{20}z_1^2 + a_{11}z_1z_2 + a_{02}z_2^2) + \dots, \\ w_2 &= b_{10}z_1 + b_{01}z_2 + \lambda \cdot (b_{20}z_1^2 + b_{11}z_1z_2 + b_{02}z_2^2) + \dots \end{aligned}$$

für  $0 < |\lambda| < 1$  eine den Nullpunkt festlassende Abbildung des betr. Kreisbereichs in sich vermitteln. Wir beweisen nun, daß die Koeffizienten sämtlicher Potenzen von  $\lambda$  in beiden Funktionen (5) mindestens für eine abzählbar unendliche Menge von Punkten  $z_1, z_2$ , von welchen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen, verschwinden müssen. Wenn dies gezeigt ist, folgt sofort, daß alle Koeffizienten  $a_{20} = a_{11} = a_{02} = \dots = b_{20} = b_{11} = b_{02} = \dots = 0$  und die Funktionen (4) daher linear sind.

Um den erwähnten Nachweis zu führen, greifen wir aus den Abbildungen (5) eine beliebige zum Parameter  $\lambda_0$  gehörige heraus. Diese bildet jeden Punkt  $P(z_1, z_2)$  auf einen Punkt  $Q_0$  ab, zu welchem wir uns diejenige oder eine derjenigen analytischen Ebenen  $E_1$  konstruiert denken, deren orthogonaler Stützzyklinderraum die zu  $P$  und  $Q_0$  gehörige Schale in solchen Punkten berührt, unter denen sich  $Q_0$  befindet. Insbesondere interessieren uns diejenigen Punkte  $P$ , für welche die zugehörige Ebene  $E_1$  nicht mit einer Koordinatenebene zusammenfällt.

Wir behaupten zunächst, daß es mindestens eine abzählbar unendliche Menge solcher Punkte geben muß, von welchen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen. Dies ist klar. Denn entweder ist der Leitbereich des Kreisbereiches kein Rechteck; dann enthält die Leitlinie ein ganzes Kurvenstück, dessen sämtliche Punkte solche Punkte  $Q_0$  sind, deren Ebenen  $E_1$  keine Koordinatenebenen sind. Oder der Leitbereich ist ein Rechteck; dann gibt es auf der Leitlinie zwar nur einen solchen Punkt  $Q_0$ , nämlich die Ecke des Rechtecks, aber die aus diesem durch die Drehungen  $w_1 = e^{i\psi_1} \cdot z_1$ ,  $w_2 = e^{i\psi_2} \cdot z_2$  hervorgehenden Punkte haben sämtlich die gleiche Eigenschaft. Und alle diese Punkte müssen bei der Abbildung aus Punkten  $P$  hervorgegangen sein, die keiner endlichen Zahl von durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebenen angehört haben können, da sie ein zweidimensionales Kontinuum bilden



Wir behaupten ferner, daß die Koeffizienten von  $\lambda^i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) in (5) für alle diese Punkte  $P$  verschwinden müssen. Denn nehmen wir an, daß gewisse dieser Koeffizienten für einen bestimmten Punkt  $P$  von Null verschieden seien. Wir drehen dann das Koordinatensystem so, daß die neue  $Z_1$ -Koordinatenebene mit der zu  $P$  gehörigen Ebene  $E_1$  zusammenfällt. Sind die neuen Koordinaten wieder  $Z_1, Z_2$  bzw.  $W_1, W_2$ , so nehmen die Funktionen (5) durch die Drehungen:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 \cdot Z_1 + a_2 \cdot Z_2, & W_1 &= \bar{a}_1 \cdot w_1 + \bar{b}_1 w_2, \\ z_2 &= b_1 \cdot Z_1 + b_2 \cdot Z_2, & W_2 &= \bar{a}_2 \cdot w_1 + \bar{b}_2 w_2 \end{aligned}$$

die Form:

$$\begin{aligned} W_1 &= A_0 + \lambda \cdot A_1 + \lambda^2 \cdot A_2 + \dots, \\ W_2 &= B_0 + \lambda \cdot B_1 + \lambda^2 \cdot B_2 + \dots \end{aligned}$$

an, in welcher je zwei Koeffizienten  $A_i, B_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) homogene lineare Funktionen der Koeffizienten von  $\lambda^i$  in den Entwicklungen (5) sind. Da aber die Determinante  $\bar{a}_1 \bar{b}_2 - \bar{b}_1 \bar{a}_2$  eines solchen linearen Funktionspaares nicht verschwindet, so sind beide Koeffizienten von  $\lambda^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) in (5) dann und nur dann gleich Null, wenn  $A_i$  und  $B_i$  verschwinden, d. h. infolge der eingangs gemachten Annahme sind  $W_1$  und  $W_2$  in bezug auf  $\lambda$  nicht beide konstant. Dies ist aber unmöglich. Denn wäre zunächst  $W_1$  von  $\lambda$  abhängig, so würden in der Umgebung von  $\lambda_0$  Werte von  $\lambda$  existieren, für welche  $|W_1| > |W_1^0|$  wäre, und dies kann nicht sein, da der Punkt  $P$  von zu solchen Werten  $\lambda$  gehörigen Abbildungsfunktionen (5) offenbar aus seiner Schale gerückt würde. Also muß  $W_1 = A_0$  sein. Nun berührt aber die in dem betr. Punkte  $W_1$  auf der  $W_1$ -Koordinatenebene errichtete orthogonale analytische Ebene die fragliche Schale höchstens in einer Strecke. Denn sie kann mit der Schale nicht mehr Punkte gemeinsam haben, als der orthogonale Stützraum, dem sie angehört. Von diesem wissen wir aber (siehe S. 233), daß er die Schale nur in den Punkten einer Leitlinie, d. h. höchstens in einer Strecke, trifft<sup>12)</sup>. Deshalb muß nun auch  $W_2$  von  $\lambda$  unabhängig sein, da andernfalls eine volle Umgebung von  $\lambda_0$  auf eine volle Umgebung von  $W_2^0$  abgebildet würde, und daher Funktionen (5) existieren müßten, welche den Punkt  $P$  außerhalb jener Berührungstrecke, also auch außerhalb der Schale abbilden würden. Nach den anfänglichen Bemerkungen ist der Beweis damit vollständig geführt.

<sup>12)</sup> Hier wird die Voraussetzung benutzt, daß die Ebene  $E_1$  nicht mit einer der ursprünglichen Koordinatenebenen identisch ist. Denn sonst wird die fragliche Leitlinie unbestimmt, da die zugehörige absolute Ebene unbestimmt wird, und aus der Strecke wird daher in diesem Fall ein Kreis.

Wir haben also den

Satz 1. *Jede umkehrbar eindeutige Abbildung eines konvexen Kreisbereiches auf sich, welche den Mittelpunkt festläßt, wird durch ganze lineare Funktionen vermittelt:*

$$(6) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot z_2, \\ w_2 &= b_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2. \end{aligned}$$

Nach diesem Satz lassen sich wohl für die einzelnen konvexen Kreisbereiche genau diejenigen den Nullpunkt festlassenden umkehrbar eindeutigen Abbildungen ausfindig machen, die den Kreisbereich in sich überführen, da die Eigenschaften der durch lineare Funktionen vermittelten Abbildungen leicht aufgestellt werden können. Diese Untersuchung soll jedoch hier nicht durchgeführt werden, da wir die sich dabei ergebenden Resultate später auf anderem Wege sowieso erhalten werden. Wir greifen jetzt lediglich eine bestimmte Gruppe der Abbildungen (6) heraus und untersuchen nur diese; das Ergebnis wird im folgenden gebraucht werden.

Es handele sich um diejenigen Drehungen, welche die reelle Ebene festlassen, oder, wie wir kurz sagen wollen, um *die reellen Drehungen*:

$$(7) \quad \begin{aligned} w_1 &= \cos \alpha \cdot z_1 - \sin \alpha \cdot z_2, \\ w_2 &= \sin \alpha \cdot z_1 + \cos \alpha \cdot z_2. \end{aligned}$$

Über diese gilt der

Satz 2. *Eine reelle Drehung führt einen Kreisbereich nur in folgenden Fällen in sich über:*

I. *Bei einem beliebigen Kreisbereich für  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \pi$ .*

II. *Bei einem symmetrischen Kreisbereich außerdem für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  und  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ .*

III. *Bei der Kugel außerdem für beliebiges  $\alpha$ .*

Daß in den genannten Fällen der betr. Kreisbereich in der Tat in sich übergeht, ist teils evident, teils folgt es aus den Sätzen 21 und 23 des I. Teils, S. 230, 231. Daß ein nicht symmetrischer Kreisbereich für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  und  $\alpha = \frac{3\pi}{2}$  nicht in sich transformiert werden kann, ist ebenfalls klar. Wir nehmen nun an, daß  $\alpha \neq 0, \neq \frac{\pi}{2}, \neq \pi, \neq \frac{3\pi}{2}$  ist. Wir betrachten dann einen Punkt  $z_1 = r_1, z_2 = r_2$  der reellen Ebene, der auf der Oberfläche des Kreisbereiches und auf keiner reellen Achse liegt, so daß also  $r_1 \neq 0$  und  $r_2 \neq 0$  ist. Dann liegen auch sämtliche Punkte  $z'_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}, z'_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$  auf der Oberfläche des Bereichs. Alle diese Punkte bilden

wir durch (7) ab. Die Bildpunkte müssen alle wieder auf der Oberfläche liegen. Wenn wir jeden Bildpunkt  $w'_1, w'_2$  durch eine Substitution  $\omega_1 = e^{i\psi_1} \cdot w_1, \omega_2 = e^{i\psi_2} \cdot w_2$  in die reelle Ebene drehen, so muß er dort auf die Leitkurve fallen. Nun haben alle Punkte  $z'_1, z'_2$  denselben Abstand vom Nullpunkt und behalten ihn bei den in Frage kommenden Drehungen auch bei. Also muß die Leitkurve an allen den Stellen vom Nullpunkt gleich weit entfernt sein, an denen gedrehte Bildpunkte  $\omega'_1, \omega'_2$  zu liegen kommen. Wir werden nun zeigen, daß solche Punkte in beliebiger Nähe des Ausgangspunktes  $r_1, r_2$  liegen müssen. Da dieser selbst beliebig war, müssen alle Punkte der Leitkurve vom Nullpunkt gleich weit entfernt, d. h. dieser muß ein Kreis sein.

Nun bildet der Radiusvektor des Punktes  $r_1, r_2$  mit der reellen Achse der  $z_1$  einen Winkel  $\beta$ , der sich aus der Gleichung  $\operatorname{tg} \beta = \frac{r_2}{r_1}$  ergibt. Der Radiusvektor des gedrehten Bildpunktes  $\omega'_1, \omega'_2$  des Punktes  $z'_1, z'_2$  aber bildet mit derselben Achse einen Winkel  $\gamma$ , der aus der Beziehung  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega'_2}{\omega'_1} = \frac{|w'_2|}{|w'_1|}$  folgt. Nun findet man mit Hilfe von (7) die Relation:

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{\sin^2 \alpha \cdot |z'_1|^2 + \cos^2 \alpha \cdot |z'_2|^2 + \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (z'_1 \cdot \bar{z}'_2 + \bar{z}'_1 \cdot z'_2)}{\cos^2 \alpha \cdot |z'_1|^2 + \sin^2 \alpha \cdot |z'_2|^2 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (z'_1 \cdot \bar{z}'_2 + \bar{z}'_1 \cdot z'_2)},$$

oder wegen  $\operatorname{tg} \beta = \frac{|z'_2|}{|z'_1|}$ :

$$\operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Lassen wir nun hierin  $\varphi_2 - \varphi_1$  stetig von 0 bis  $\pi$  variieren, so variiert  $\gamma$  offenbar stetig zwischen zwei Werten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , die sich aus den Gleichungen:

$$\gamma_1 = \beta + \alpha, \quad \gamma_2 = \beta - \alpha$$

ergeben, allerdings nur dann, wenn  $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$  und  $\operatorname{tg} \alpha \neq \infty$  ist; dies war aber vorausgesetzt. Nach unseren anfänglichen Ausführungen ist Satz 2 damit bewiesen.

Wir behandeln nunmehr auf Grund unserer seitherigen Überlegungen folgende Frage: Es sei eine unendliche Folge von Punkten  $z_1, z_2$  eines Kreisbereiches gegeben, von denen keine zwei in einer durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene liegen. Wir fragen nach denjenigen linearen Abbildungen (6), die den Kreisbereich in sich überführen und dabei zugleich jene unendlich vielen Punkte einzeln in ihre zur reellen Ebene spiegelbildlichen konjugierten Punkte transformieren. Das Ergebnis dieser Untersuchung wird im folgenden Paragraphen angewendet werden.

Wir schicken zunächst voraus, daß für die Funktionen (6)  $|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = 1$  sein muß. Denn es ist:

$$dw_1 \cdot dw_2 = \frac{\left| \frac{dw_1}{dz_1} \frac{dw_2}{dz_2} \right|}{\left| \frac{dw_2}{dz_1} \frac{dw_1}{dz_2} \right|} \cdot dz_1 \cdot dz_2 = \left| \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \right| \cdot dz_1 \cdot dz_2,$$

und deshalb ergibt sich für die Transformation der (vierdimensionalen) Volumenelemente:

$$dw_1 \cdot \overline{dw_1} \cdot dw_2 \cdot \overline{dw_2} = \left| \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \right|^2 \cdot dz_1 \cdot \overline{dz_1} \cdot dz_2 \cdot \overline{dz_2}.$$

Da nun in unserem Falle das Volumen des Kreisbereichs bei der Abbildung erhalten bleiben muß, so folgt in der Tat:

$$\left| \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \right| = 1.$$

Soll nun (6) den Punkt  $z_1, z_2$  in den Punkt  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  überführen, so muß  $m = \frac{z_2}{z_1}$  in  $\bar{m} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$  übergehen, d. h. jede durch einen der gegebenen Punkte und den Nullpunkt gehende analytische Ebene muß in die konjugierte Ebene transformiert werden. Da keine zwei der gegebenen Punkte in einer solchen Ebene liegen sollten, so muß es unendlich viele Werte  $m$  geben, die durch (6) in die konjugierten Werte  $\bar{m}$  übergeführt werden, d. h. es muß für unendlich viele  $m$ :

$$\frac{b_1 + m \cdot b_2}{a_1 + m \cdot a_2} = \bar{m},$$

oder:

$$a_2 \cdot m^2 - b_2 \cdot m + a_1 \cdot \bar{m} - b_1 = 0$$

sein. Dies ist aber eine Gleichung von der in § 1 betrachteten Form. Nach dem Hilfssatz, S. 240, besitzt sie nur dann unendlich viele Lösungen, wenn man:

$$\begin{aligned} a_2 &= r_1 \cdot e^{i\varphi}, & b_2 &= -r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)}, \\ b_1 &= \mp r_3 \cdot e^{i\varphi}, & a_1 &= r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \end{aligned}$$

setzen kann. Die dort mit  $\Delta$  bezeichnete Größe wird hier:

$$\Delta = r_2^2 \mp r_1 \cdot r_3 = \mp |a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = \mp 1,$$

und da im Falle  $\Delta < 0$  überhaupt keine Lösung vorhanden ist, so folgt für das obere Zeichen  $r_2^2 > r_1 \cdot r_3$  und stets:

$$|a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1| = r_2^2 \mp r_1 \cdot r_3 = 1.$$

Die einzig möglichen Fälle linearer Abbildungen, die unserer Bedingung genügen, sind also die folgenden:

$$(8) \quad \begin{aligned} w_1 &= r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot z_1 + r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2, \\ w_2 &= \mp r_3 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot z_2. \end{aligned}$$

Nunmehr ziehen wir in Betracht, daß die vorgelegten Funktionen den Kreisbereich in sich überführen sollen. Falls  $r_1 \neq 0$  und  $r_3 \neq 0$  ist, betrachten wir noch denjenigen Kreisbereich derselben Klasse, welcher nach Satz 19 des I. Teils, S. 229, durch die Substitution:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{\sqrt{r_1}} \cdot z_1, \\ \zeta_2 &= \frac{1}{\sqrt{r_3}} \cdot z_2 \end{aligned}$$

aus dem vorliegenden hervorgeht. Auf diesen Kreisbereich wenden wir die Abbildung:

$$(9_1) \quad \begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r_1} \cdot e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \cdot \zeta_1, \\ z_2 &= \sqrt{r_3} \cdot e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \zeta_2 \end{aligned}$$

an, die ihn in den gegebenen überführt, diesen transformieren wir durch (8) in sich und dann durch die Abbildung:

$$(9_2) \quad \begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r_1} \cdot e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \cdot \omega_1, \\ w_2 &= \sqrt{r_3} \cdot e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdot \omega_2 \end{aligned}$$

wieder rückwärts auf den neuen Bereich. Dann liefert offenbar:

$$(10) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= r_2 \cdot \zeta_1 + r \cdot \zeta_2 \\ \omega_2 &= \mp r \cdot \zeta_1 - r_2 \cdot \zeta_2 \end{aligned} \quad (|\sqrt{r_1 \cdot r_3}| = r)$$

eine Abbildung jenes neuen Bereiches in sich, durch welche infolge der Beziehungen:

$$\frac{w_1}{\omega_1} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{\zeta}_1}, \quad \frac{w_2}{\omega_2} = \frac{\bar{z}_2}{\bar{\zeta}_2}$$

diejenige Punktmenge  $\zeta_1, \zeta_2$  in die konjugierte übergeführt wird, die vermöge der Substitutionen (9<sub>1</sub>) aus der durch (8) in die konjugierte transformierten Punktmenge  $z_1, z_2$  hervorgeht. Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem in (10) das obere oder das untere Vorzeichen gilt.

Gilt das obere Zeichen, so müssen auch die Funktionen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= r_2 \cdot \zeta_1 + r \cdot \zeta_2, \\ \omega_2 &= r \cdot \zeta_1 + r_2 \cdot \zeta_2 \end{aligned}$$

den Kreisbereich in sich transformieren. Dies ist aber unmöglich, da sie eine ungleichmäßige Dehnung darstellen, bei welcher das Quadrat des Dehnungsverhältnisses für alle Geraden  $|\zeta_2| = \lambda \cdot |\zeta_1|$  ( $0 \leq \lambda \leq \infty$ ) der reellen Ebene:

$$\frac{(r_2 + \lambda \cdot r)^2 + (r + \lambda \cdot r_2)^2}{1 + \lambda^2} = r_2^2 + r^2 + \frac{4 r_2 \cdot r \cdot \lambda}{1 + \lambda^2},$$

also wegen  $r_2^2 - r^2 = 1$  und  $r \neq 0$  größer als Eins ist.

Gilt das untere Zeichen, so bilden auch die Funktionen:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= r_2 \cdot \zeta_1 - r \cdot \zeta_2, \\ \omega_2 &= r \cdot \zeta_1 + r_2 \cdot \zeta_2 \end{aligned}$$

den Kreisbereich auf sich ab. Diese Funktionen stellen aber wegen  $r_2^2 + r^2 = 1$  eine reelle Drehung dar, und wir können daher jetzt Satz 2, S. 243, anwenden. Infolge  $r \neq 0$  kommen hier nur die Fälle in Betracht, daß unser Kreisbereich ein symmetrischer oder eine Kugel ist.

Im ersten Fall lauten die Transformationen (10):

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \zeta_2, & \omega_1 &= -\zeta_2, \\ \omega_2 &= \zeta_1, & \omega_2 &= -\zeta_1, \end{aligned}$$

und die zugehörigen Transformationen (8):

$$\begin{aligned} w_1 &= r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2, & w_1 &= -r_1 \cdot e^{i\varphi'} \cdot z_2, \\ w_2 &= r_3 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1, & w_2 &= -r_3 \cdot e^{i\varphi'} \cdot z_1, \end{aligned}$$

wobei  $r_1 \cdot r_3 = 1$  ist. Um die Punktmenge zu finden, welche durch diese Abbildungen Punkt für Punkt in die konjugierte übergeführt wird, setzen wir  $z_1 = \varrho_1 \cdot e^{i\psi_1}$ ,  $z_2 = \varrho_2 \cdot e^{i\psi_2}$ , und erhalten, wie man sofort sieht ( $\varphi' + \pi = \varphi$ ):

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= r_1 \cdot \varrho_2, & \psi_1 + \psi_2 &= -\varphi. \\ \varrho_2 &= r_3 \cdot \varrho_1, \end{aligned}$$

Diese Punktmenge erfüllt eine nichtanalytische Ebene von der Gleichung:

$$\frac{|\sqrt{r_3}|}{|\sqrt{r_1+r_3}|} \cdot z_1 - \frac{|\sqrt{r_1}|}{|\sqrt{r_1+r_3}|} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \bar{z}_2 = 0.$$

Ist der Kreisbereich selbst symmetrisch, so muß  $r_1 = r_3 = 1$  sein; in diesem Falle erfüllt die Punktmenge die Diagonalebene (s. S. 226):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot z_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \bar{z}_2 = 0.$$

Im zweiten Fall beschränken wir uns im wesentlichen auf die Kugel selbst. Die Transformationen (8) lauten dann:

$$\begin{aligned} w_1 &= r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot z_1 + r \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2, \\ w_2 &= r \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot z_2, \end{aligned}$$

wobei  $r_2^2 + r^2 = 1$  ist. Sie stellen eine doppelte Drehung um zwei zueinander orthogonale Ebenen  $z_3 = \lambda_1 \cdot z_1$  und  $z_2 = \lambda_2 \cdot z_1$  dar, deren Neigungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  sich als Wurzeln der Gleichung mit reellen Koeffizienten:

$$r \cdot \lambda^2 + r_2 \cdot (e^{-i\psi} + e^{i\psi}) \cdot \lambda - r = 0$$

ergeben. Da die Determinante:

$$r_2^2 \cdot (e^{-i\psi} + e^{i\psi})^2 + 4r^2$$

positiv ist, so haben wir stets zwei reelle Lösungen. Die beiden Drehungsebenen gehen also aus den Koordinatenebenen durch eine reelle Drehung hervor. Hier erfüllt daher die Punktmenge, welche durch die Abbildung Punkt für Punkt in die konjugierte übergeht, offenbar gerade eine nicht-analytische Ebene, die durch jene reelle Drehung aus einer absoluten Ebene hervorgeht. Alle diese Ebenen bilden eine dreiparametrische Ebenenschar.

Bei einem beliebigen Kreisbereich der Kugelklasse, der aus einer Kugel durch die Substitution:

$$(11) \quad \begin{aligned} z_1 &= \sqrt{\frac{r_3}{r}} \cdot z'_1, \\ z'_2 &= \sqrt{\frac{r_1}{r}} \cdot z'_2 \end{aligned} \quad \left( \left| \sqrt{\frac{r_3}{r}} \right| \cdot \left| \sqrt{\frac{r_1}{r}} \right| = 1 \right)$$

hervorgeht, und für welchen die Transformationen (8) selbst gültig sind:

$$\begin{aligned} w'_1 &= r_2 \cdot e^{i(\varphi - \psi)} \cdot z'_1 + r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z'_2, \\ w'_2 &= r_3 \cdot e^{i\varphi} \cdot z'_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi + \psi)} \cdot z'_2, \end{aligned}$$

gehört die Ebene, die durch die Abbildung Punkt für Punkt in die konjugierte übergeführt wird, zu einer Ebenenschar, die aus der oben erwähnten dreiparametrischen Ebenenmenge durch die Substitution (11) erzeugt wird.

Wir betrachten nun noch den Fall, daß in (8)  $r_1 = 0$  oder  $r_3 = 0$  und daher  $r_2 = 1$  ist. Nun müssen  $r_1$  und  $r_3$  gleichzeitig verschwinden, denn ist etwa  $r_1 = 0$  und  $r_3 \neq 0$ , so gelangt vermöge (8) jede Ebene  $z_1 = \text{konst.}$  in eine Ebene  $w_1 = \text{konst.}$ , wobei sie in sich eine Drehung um einen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt oder eine Parallelverschiebung erleidet. Dies ist bei Abbildung eines Kreisbereiches auf sich aber unmöglich. Die allgemeinste in diesem Fall in Betracht kommende Transformation ist daher die folgende ( $\varphi - \psi = \varphi_1$ ,  $\varphi + \psi + \pi = \varphi_2$ ):

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{i\varphi_1} \cdot z_1, \\ w_2 &= e^{i\varphi_2} \cdot z_2, \end{aligned}$$

bei welcher diejenigen Punkte, die in ihre konjugierten übergehen, die zu den Parametern  $\left(-\frac{\varphi_1}{2}, -\frac{\varphi_2}{2}\right)$  gehörige absolute Ebene erfüllen.

Die Ergebnisse dieser Untersuchung fassen wir zusammen in dem

Satz 3. *Diejenigen linearen Abbildungen, welche einen Kreisbereich mit festem Mittelpunkt so in sich überführen, daß unendlich viele Punkte, von denen keine zwei in einer durch den Nullpunkt gehenden analytischen Ebene liegen, einzeln in die konjugierten Punkte übergehen, sind die folgenden:*

I. *Bei einem beliebigen Kreisbereich:*

$$w_1 = e^{i\varphi_1} \cdot z_1,$$

$$w_2 = e^{i\varphi_2} \cdot z_2.$$

*Die Punkte erfüllen die absolute Ebene  $\left(-\frac{\varphi_1}{2}, -\frac{\varphi_2}{2}\right)$ .*

II. *Bei einem zu einer symmetrischen Klasse gehörigen Kreisbereich außerdem:*

$$w_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2,$$

$$w_2 = r_3 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1.$$

*Die Punkte erfüllen eine nichtanalytische Ebene, die beim Normalbereich der Klasse mit der Diagonalebene  $(-\varphi)$  identisch ist.*

III. *Bei einem Kreisbereich der Kugelklasse außerdem:*

$$w_1 = r_2 \cdot e^{i(\varphi-\psi)} \cdot z_1 + r_1 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_2,$$

$$w_2 = r_3 \cdot e^{i\varphi} \cdot z_1 - r_2 \cdot e^{i(\varphi+\psi)} \cdot z_2.$$

*Die Punkte erfüllen im Falle der Kugel selbst eine nichtanalytische Ebene, die aus einer absoluten Ebene durch eine reelle Drehung hervorgeht.*

### § 3.

#### Das Spiegelungsprinzip zweiter Art.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Übertragung eines über das gewöhnliche Spiegelungsprinzip hinausgehenden bekannten Theorems der konformen Abbildungen, das in der Ebene folgendermaßen lautet: Es sei ein zu einer Geraden symmetrischer Bereich und ein Kreis gegeben. Wird der Bereich umkehrbar eindeutig so auf den Kreis abgebildet, daß der Mittelpunkt des Kreises aus einem Punkt der Symmetrieachse hervorgeht, so wird die Symmetrieachse selbst auf einen Kreisdurchmesser abgebildet, und daher gehen (nach dem Spiegelungsprinzip erster Art) zur Symmetrieachse spiegelbildliche Punkte in zu jenem Durchmesser spiegelbildliche Punkte über.

Um diesen Satz zu übertragen, betrachten wir einen konvexen Kreisbereich und einen weiteren vierdimensionalen Bereich, der zur reellen Ebene spiegelbildlich sein und den Nullpunkt im Inneren enthalten möge. Wir bilden beide Bereiche umkehrbar eindeutig so aufeinander ab, daß



der Nullpunkt festbleibt. Da man jeden Kreisbereich auf den Normalbereich derselben Klasse abbilden kann, setzen wir den Kreisbereich gleich noch als Normalbereich, d. h. bei einer symmetrischen Klasse als symmetrischen Bereich und bei der Kugelklasse als Kugel voraus.

Seien nun:

$$(12_1) \quad \begin{aligned} w_1 &= f_1(z_1, z_2), \\ w_2 &= f_2^*(z_1, z_2) \end{aligned}$$

die Funktionen, welche die gewünschte Abbildung leisten. Dann müssen, da beide Bereiche zur reellen Ebene symmetrisch sind (s. Satz 17 des I. Teils, S. 228), auch die Funktionen:

$$(12_2) \quad \begin{aligned} w_1 &= \bar{f}_1(z_1, z_2), \\ w_2 &= \bar{f}_2(z_1, z_2) \end{aligned}$$

eine Abbildung mit den gleichen Eigenschaften vermitteln; denn diese Abbildung läßt sich zerlegen in die folgenden:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \bar{z}_1, & \omega_1 &= f_1(\zeta_1, \zeta_2), & w_1 &= \bar{\omega}_1, \\ \zeta_2 &= \bar{z}_2, & \omega_2 &= f_2(\zeta_1, \zeta_2), & w_2 &= \bar{\omega}_2. \end{aligned}$$

Die Abbildungen (12<sub>1</sub>) und (12<sub>2</sub>) zusammen involvieren aber eine umkehrbar eindeutige Abbildung des konvexen Kreisbereiches in sich von folgendem Charakter: Der Nullpunkt bleibt fest; die nichtanalytische Fläche, in welche die reelle Ebene durch (12<sub>1</sub>) übergeht, wird an der reellen Ebene punktweise gespiegelt. Nun kann diese Fläche mit keiner analytischen Fläche ein Flächenstück gemeinsam haben, denn jeder solchen analytischen Fläche entspricht im ursprünglichen Bereich wieder eine analytische Fläche, welche ihrerseits kein Stück mit der reellen Ebene gemeinsam haben kann, da überhaupt kein Stück einer analytischen Fläche eben sein kann, ohne daß die Fläche eine analytische Ebene ist. Nach dem eben Gesagten muß aber unsere nichtanalytische Fläche unendlich viele Punkte enthalten, von denen keine zwei mit dem Nullpunkt in einer analytischen Ebene liegen.

Nun können wir die Sätze 1 und 3 des vorigen Paragraphen, S. 243 und S. 249, nacheinander anwenden. Dann kann aber die als Bild der reellen Ebene auftretende Fläche nur mit gewissen nichtanalytischen Ebenen identisch sein. Da diese Ebenen ferner offenbar sämtlich durch analytische Drehungen in die reelle Ebene überführt werden können (in bezug auf die Diagonalebene siehe Satz 14 des I. Teils, S. 226), so können wir noch nach Satz 5 des II. Teils, S. 237, folgern, daß zur reellen Ebene spiegelbildliche Punkte des symmetrischen Bereichs in zu der betreffenden nichtanalytischen Ebene spiegelbildliche Punkte des Normalbereichs übergehen müssen. (Vgl. dazu auch noch Satz 22 des I. Teils, S. 230.) Wir erhalten somit den

Satz 4. Wird ein zur reellen Ebene symmetrischer und den Nullpunkt im Inneren enthaltender Bereich derart umkehrbar eindeutig auf einen konvexen Normalbereich abgebildet, daß der Nullpunkt festbleibt, so kann die reelle Ebene nur übergehen:

- I. bei einem beliebigen Kreisbereich in eine absolute Ebene,
- II. bei einem symmetrischen Kreisbereich außerdem in eine Diagonalebene,
- III. bei der Kugel außerdem in eine nichtanalytische Ebene, die aus einer absoluten Ebene durch eine reelle Drehung hervorgeht.

Wir fügen sofort noch eine selbstverständliche Erweiterung an in folgendem

Satz 5. Ist der in Satz 4 vorkommende Bereich zwar nicht symmetrisch zur reellen Ebene, aber zu einer nichtanalytischen Ebene, die aus der reellen Ebene durch eine analytische Drehung hervorgeht, und bleibt der Nullpunkt nach wie vor fest, so muß auch jene Ebene bei der Abbildung in eine der in Satz 4 aufgestellten Ebenen übergehen.

#### § 4.

### Über die Abbildungen zweier Kreisbereiche aufeinander.

Wir betrachten nunmehr diejenigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen zweier konvexer Kreisbereiche aufeinander, welche den Mittelpunkt festlassen. Wir wollen beweisen, daß solche Abbildungen nicht existieren, falls die Bereiche verschiedenen Klassen angehören. Da die Bereiche einer und derselben Klasse durch lineare Transformationen aufeinander abgebildet werden können, so genügt es, beim Beweise lediglich Normalbereiche ins Auge zu fassen.

Wir nehmen also an, daß zwei verschiedene konvexe Normalbereiche durch die Funktionen:

$$(13) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_{10} z_1 + a_{01} z_2 + \dots, \\ w_2 &= b_{10} z_1 + b_{01} z_2 + \dots \end{aligned}$$

umkehrbar eindeutig aufeinander abgebildet werden. Nun ist jeder Normalbereich nach Satz 17 des I. Teils, S. 228, spiegelbildlich zu jeder absoluten Ebene. Wir können daher jetzt die Sätze 4 und 5 (siehe oben) anwenden, indem wir den einen Normalbereich mit dem dort vorkommenden symmetrischen Bereich identifizieren. Dann folgt aus jenen Sätzen, daß die sämtlichen absoluten Ebenen des einen Normalbereichs in solche Ebenen des anderen Normalbereichs übergehen müssen, die zu den in Satz 4 aufgestellten Ebenenscharen gehören.

Nun ist zunächst zu bemerken, daß selbst dann, wenn der zweite Normalbereich symmetrisch ist, keine Diagonalebene in Frage kommt.

Denn ginge eine absolute Ebene  $(\varphi_1^0, \varphi_2^0)$  in eine solche Diagonalebene über, so müßten diejenigen unendlich vielen absoluten Ebenen  $(\varphi_1^0, 0 \leq \varphi_2 < \pi$ , oder  $0 \leq \varphi_1 < \pi, \varphi_2^0)$ , welche die erste in derselben Geraden schneiden, in solche absoluten oder Diagonalebenen transformiert werden, die mit jener Diagonalebene sämtlich dieselbe Gerade gemeinsam haben. Dies ist aber unmöglich, da nach den Bemerkungen von § 4 des I. Teils, S. 226, sich zwei Diagonalebenen überhaupt nicht treffen und eine absolute Ebene eine Diagonalebene nur in einer solchen Geraden schneidet, durch die keine weitere absolute Ebene geht.

Die Kugel, bei welcher die Verhältnisse allerdings komplizierter liegen können, da hier noch andere mögliche Ebenen auftreten, kann außer Betracht bleiben, da wir sie, falls einer der beiden Normalbereiche mit ihr identisch ist, als ersten Bereich ansehen können, der auf den anderen, welcher dann keine Kugel ist, abgebildet wird.

Wir erhalten so das Ergebnis, daß bei unserer Abbildung jedenfalls alle absoluten Ebenen des einen Normalbereichs in absolute Ebenen des andern Normalbereichs übergehen müssen. Dann muß es aber auch eine Abbildung geben, bei welcher die reelle Ebene fest bleibt. Es sei dies die Abbildung (13), so daß dort alle Koeffizienten reell sind. Da nun jede andere absolute Ebene  $(\varphi_1, \varphi_2)$  wieder in eine absolute Ebene  $(\psi_1, \psi_2)$  übergehen muß, so müssen auch alle Funktionen, die aus (13) durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\varphi_1} \cdot \zeta_1, & w_1 &= e^{i\psi_1} \cdot \omega_1, \\ z_2 &= e^{i\varphi_2} \cdot \zeta_2, & w_2 &= e^{i\psi_2} \cdot \omega_2 \end{aligned}$$

hervorgehen, also die Funktionen:

$$(14) \quad \begin{aligned} \omega_1 &= a_{10} \cdot e^{i(\varphi_1 - \psi_1)} \cdot \zeta_1 + a_{01} \cdot e^{i(\varphi_2 - \psi_1)} \cdot \zeta_2 + \dots, \\ \omega_2 &= b_{10} \cdot e^{i(\varphi_1 - \psi_2)} \cdot \zeta_1 + b_{01} \cdot e^{i(\varphi_2 - \psi_2)} \cdot \zeta_2 + \dots, \end{aligned}$$

reelle Koeffizienten besitzen. Dies ist aber im allgemeinen unmöglich.

Denn ist zunächst  $a_{10} \neq 0$  und  $b_{01} \neq 0$ , so muß für alle absoluten Ebenen  $(\varphi_1, \varphi_2)$ :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \psi_1 = \varphi_1 + \pi, \\ \psi_2 &= \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \psi_2 = \varphi_2 + \pi \end{aligned}$$

sein. Dann müssen aber sämtliche anderen Koeffizienten der Potenzreihen (14) verschwinden. Denn wäre etwa  $a_{kl} \neq 0$  ( $k, l$  nicht gleichzeitig bzw.  $= 1, 0$ ), so müßte  $a_{kl} \cdot e^{i(k \cdot \varphi_1 + l \cdot \varphi_2 - \psi_1)}$  reell, d. h.:

$$k \cdot \varphi_1 + l \cdot \varphi_2 - \psi_1 = (k-1) \cdot \varphi_1 + l \cdot \varphi_2 = 0 \quad \text{oder} \quad = \pi$$

sein, was unmöglich ist, da  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  unabhängig beliebig veränderlich sind; und Ähnliches gilt, falls  $b_{lk} = 0$  ist. Dann reduzieren sich die Funktionen (13) aber auf die folgenden:

$$(15) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_{10} \cdot z_1, \\ w_2 &= b_{01} \cdot z_2, \end{aligned} \quad (a_{10}, b_{01} \text{ reell})$$

und diese können keine zwei verschiedenen Normalbereiche aufeinander abbilden.

Ist aber entweder  $a_{10} = 0$  oder  $b_{01} = 0$ , so muß gleichzeitig  $a_{01} \neq 0$  und  $b_{10} \neq 0$  sein, da sonst die Funktionaldeterminante im Nullpunkt verschwinden würde. Dann muß aber für alle absoluten Ebenen  $(\varphi_1, \varphi_2)$ :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \varphi_2 \quad \text{oder} \quad \psi_1 = \varphi_2 + \pi, \\ \psi_2 &= \varphi_1 \quad \text{oder} \quad \psi_2 = \varphi_1 + \pi \end{aligned}$$

sein und es folgt genau wie vorhin, daß sämtliche anderen Koeffizienten in (13) verschwinden und diese Funktionen sich daher auf die folgenden reduzieren müssen:

$$(16) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_{01} \cdot z_2, \\ w_2 &= b_{10} \cdot z_1; \end{aligned} \quad (a_{01}, b_{10} \text{ reell})$$

auch diese bilden einen Normalbereich höchstens auf einen anderen Bereich der betreffenden Klasse ab.

Damit erhalten wir als Ziel unserer Untersuchungen das

*Theorem 1. Zwei konvexe Kreisbereiche, die verschiedenen Klassen angehören, können niemals umkehrbar eindeutig so aufeinander abgebildet werden, daß der Mittelpunkt fest bleibt.*

Im Anschluß hieran ergibt sich unter Berücksichtigung der Sätze 24 und 25 des I. Teils, S. 231, sofort noch das

*Theorem 2. Ein Bereich der Kugelklasse oder ein Bereich der Zylinderklasse kann auf einen einer anderen Klasse angehörigen konvexen Kreisbereich überhaupt nicht umkehrbar eindeutig abgebildet werden.*

## § 5.

### Über die Abbildungen eines Kreisbereiches in sich.

Wir sind nunmehr auch noch in der Lage, die Betrachtungen des Paragraphen 2, S. 240 ff., in abschließender Weise zu ergänzen, ohne daß wir die dort erforderliche Diskussion der linearen Funktionen (s. Satz 1, S. 243) durchzuführen brauchen. Denn die Untersuchungen des vorigen Paragraphen behalten offenbar auch dann ihre Gültigkeit, wenn die beiden Normalbereiche identisch sind, so daß es sich also um die Abbildungen eines Normalbereiches in sich mit festem Mittelpunkt handelt, allerdings ausgenommen den Fall, daß der Bereich eine Kugel ist.

Für jene Abbildungen kommen also ebenfalls nur die Funktionen (15) und (16) in Betracht. Sollen diese aber einen Kreisbereich in sich ab-

bilden, so muß  $|a_{10}| = |b_{01}| = 1$  bzw.  $|a_{01}| = |b_{10}| = 1$  sein. Außerdem muß ein Kreisbereich, welcher durch die Funktionen (16) in sich übergehen soll, offenbar symmetrisch sein. Die in den Sätzen 16 und 21 des I. Teils, S. 227 und S. 230, angegebenen Abbildungen sind also die einzigen, die einen konvexen Kreisbereich mit festem Mittelpunkt in sich überführen, sofern er nicht der Kugelklasse angehört.

Aber der Fall, daß der Normalbereich eine Kugel ist, läßt sich mit Hilfe von Satz 1, S. 243, ohne weiteres direkt erledigen. Denn da bei einer Abbildung der Kugel in sich mit festem Mittelpunkt jeder Punkt seine Entfernung vom Nullpunkt beibehalten muß, so kann die durch die linearen Funktionen vermittelte Abbildung nur eine Drehung sein. Die in Satz 23 des I. Teils, S. 231, für die Kugel angegebenen Abbildungen sind also ebenfalls die einzigen, die hier in Frage kommen. Entsprechende Abbildungen existieren dann für die anderen der Kugelklasse angehörigen Doppelleipsoide.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in dem

**Theorem 3.** *Die einzigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen, die einen konvexen Kreisbereich so in sich überführen, daß der Mittelpunkt fest bleibt, sind die folgenden:*

I. *Bei einem beliebigen Kreisbereich die Drehungen:*

$$(17) \quad \begin{aligned} w_1 &= e^{i\psi_1} \cdot z_1, \\ w_2 &= e^{i\psi_2} \cdot z_2. \end{aligned}$$

II. *Bei einem einer symmetrischen Klasse angehörigen Kreisbereich außerdem die Drehstreckungen:*

$$(18) \quad \begin{aligned} w_1 &= R \cdot e^{i\psi_1} \cdot z_2, \\ w_2 &= \frac{1}{R} \cdot e^{i\psi_2} \cdot z_1 \end{aligned} \quad (R \text{ positiv reell}).$$

III. *Bei einem zu der Kugelklasse gehörigen Kreisbereich die Drehstreckungen:*

$$(19) \quad \begin{aligned} w_1 &= a_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot R \cdot z_2, \\ w_2 &= b_1 \cdot \frac{1}{R} \cdot z_1 + b_2 \cdot z_2 \end{aligned} \quad (R \text{ positiv reell}).$$

$$\begin{aligned} |a_1|^2 + |a_2|^2 &= 1, \\ |b_1|^2 + |b_2|^2 &= 1, \\ a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Zuhilfenahme der Sätze 24 und 25 des I. Teils, S. 231, gleichzeitig noch das

Theorem 4. *Die einzigen umkehrbar eindeutigen Abbildungen eines konvexen Kreisbereiches in sich sind, falls er der Zylinderklasse angehört, diejenigen, welche sich aus der Transformation:*

$$w_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{a_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + b_1}{\bar{b}_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + \bar{a}_1}, \quad (|a_1|^2 - |b_1|^2 > 0)$$

$$w_2 = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{a_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + b_2}{\bar{b}_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + \bar{a}_2} \quad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

$$(|a_2|^2 - |b_2|^2 > 0)$$

*im Verein mit den Abbildungen (17) und (18) ergeben, und werden, wenn er zur Kugelklasse gehört, durch die Transformation:*

$$w_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{a_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + a_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + a}{c_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + c}, \quad (R_1, R_2 \text{ pos. reell})$$

$$w_2 = \frac{1}{R_2} \cdot \frac{b_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + b_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + b}{c_1 \cdot R_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot R_2 \cdot z_2 + c}$$

*(mit den Nebenbedingungen des Satzes 24, S. 231) zusammen mit den Drehstreckungen (19) geliefert.*

In den letzten Sätzen bedeuten  $R_1$  und  $R_2$  die reziproken Werte der Radien der Schnittkreise des Kreisbereiches mit den Koordinatenebenen, und es ist  $R = \frac{R_2}{R_1}$ .