

Bachelorarbeit

METHODENVERGLEICH ZUR BESTIMMUNG
DER BETRIEBSFREQUENZ VON
CH-KAVITÄTEN

Eduard Boos
16. November 2021



Institut für Angewandte Physik
Goethe-Universität Frankfurt am Main

Methodenvergleich zur Bestimmung der Betriebsfrequenz von CH-Kavitäten
Comparison of methods for the determination of the operating frequency of CH cavities

Bachelorarbeit im Studiengang Physik von Eduard Boos aus Bad Vilbel

Abgabedatum

01.12.2021

Gutachter

Prof. Dr. Holger Podlech

Dr. Malte Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	1
2	Physikalische Grundlagen	11
2.1	Lorentzkraft	11
2.2	Feldverteilung im Hohlraumresonator	12
2.2.1	Zylindrische Geometrie	15
2.2.2	Moden	19
2.3	Prinzip der Beschleunigung durch Wechselfelder	20
2.4	Hochfrequenzparameter für Resonatoren	24
2.4.1	Gespeicherte Energie	24
2.4.2	Beschleunigungsspannung	24
2.4.3	Verlustleistung	25
2.4.4	Güte	25
2.4.5	Shuntimpedanz	27
3	Modellrechnung	29
3.1	Finite Elemente Methode	30
3.1.1	Modellproblem	32
	Diskretisierung des Raumes	33
	Variationsformulierung	34
	Matrixdarstellung	37
	Nachbearbeitung	38
3.2	Feldsimulationen der CH-Rebuncher	40
3.2.1	Feldsimulationen mit CST Studio Suite	43
3.2.2	Feldsimulationen mit FEM	50
3.3	Semi-Analytische Beschreibung von CH-Kavitäten für genäherte Felder	55
3.3.1	Bestimmung der magnetischen Feldenergie	57
3.3.2	Bestimmung der elektrischen Feldenergie	59
3.3.3	Untersuchung von r_1	61
3.4	Zusammenfassung	68
3.5	Ausblick	69
	Literatur	71

Anhang	75
A Quellcode	75

KAPITEL 1

Vorwort

In dieser Bachelorarbeit werden verschiedene Methoden zur Bestimmung der Betriebsfrequenz von CH-Kavitäten¹ untersucht. Aufgrund der geometrisch komplexen Form der Beschleunigungsstruktur, können die Eigenfrequenzen nicht mithilfe von analytischen Methoden bestimmt werden. Üblicherweise werden die Eigenfrequenzen, ihre Ladungs- und Stromdichten, sowie die elektromagnetischen Felder über numerische Methoden der Computational Electromagnetics (CEM) ermittelt. Die CEM ist eine junge Disziplin, deren Performanz und Anwendungsgebiete in den letzten 20 Jahren rapide gewachsen sind. Hauptverantwortlich hierfür ist zum einen das exponentielle Wachstum der Rechenleistung bei gleichbleibenden Kosten, zum anderen die Entwicklung und Verbesserung der Algorithmen. Bis zum Ende des letzten Jahrhunderts wurden elektronische Komponenten hauptsächlich dadurch entwickelt, indem Prototypen angefertigt und analysiert wurden. Diese zeitaufwendige und kostspielige Herangehensweise ist heutzutage nahezu vollständig durch CEM-Simulationen ersetzt worden. Die Hauptmethoden der CEM sind die Finite-Differenzen-Methode (FDM), die Momenten-Methode (MoM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM). Für die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Beschleunigungsstrukturen eignet sich aufgrund der Stabilität von diesen Dreien am besten die Methode der finiten Elemente. Da die FEM ein rechen- und speicherintensives Verfahren ist, wurde in dieser Arbeit nach einer schnelleren Methode gesucht, um die Betriebsfrequenz von CH-Kavitäten zu bestimmen. Hierfür wurden 84 CH-Kavitäten mithilfe von CST Studio Suite erstellt und simuliert. Es handelt sich hierbei um vier Grundtypen, drei wurden bei einer fixierten Sollfrequenz von 300 MHz konstruiert; die Sollfrequenz des vierten Grundtyps² betrug 175 MHz. Die Teilchengeschwindigkeit wurde jeweils in 0,01er-Schritten von $0,05c$ bis $0,25c$ variiert. Aus den Untersuchungen der EM-Felder wurde anschließend ein semi-analytisches Modell entwickelt, das aufgrund der Geometrie der CH-Kavität die Betriebsfrequenz liefern soll.

Seit der Entwicklung der Braunschen Röhre im Jahre 1897 – dem ersten Gerät, das geladene Teilchen beschleunigte – gab es bemerkenswerte Entwicklungen in der Beschleunigerphysik. Durch das Streuexperiment von Rutherford 1911 und dem daraus entwickelten Atommodell von Bohr 1913 entstand der Wunsch, detailliertere Untersuchungen der Atomkerne vorzunehmen. Inspiriert durch das Konzept des Welle-Teilchen-Dualismus von Photonen und der Kristallbeugungsexperimente von Bragg postulierte de Broglie im Jahre 1924 die

¹ CH-Kavität steht für **C**rossbar **H**-Mode-Kavität.

² Der Aufbau des vierten Grundtyps orientiert sich an dem 175 MHz-CH-Rebuncher des [FRANZ-Projekts](#) und den 176 MHz-CH-Kavitäten des [MYRRHA-Injektors](#).

Theorie der Materiewelle. In seinem Postulat schlug er vor, dass auch massebehafteten Teilchen wie Elektronen eine Wellenlänge zugeschrieben werden kann. Die sogenannte de Broglie-Wellenlänge λ_{dB} steht dabei über folgende Relation in Beziehung zur Energie E und dem Impuls p

$$\lambda_{dB} = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$$

wobei h die plancksche Konstante und c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Demzufolge muss die de Broglie-Wellenlänge der Teilchen, mit denen atomare und subatomare Strukturen aufgelöst werden sollen, in derselben Größenordnung liegen wie die Ausmaße der zu untersuchenden Strukturen. Aus der reziproken Proportionalität zwischen der de Broglie-Wellenlänge und dem Impuls wird ersichtlich, dass für die Untersuchung immer kleinerer Strukturen, Teilchen mit immer höheren Impulsen erforderlich sind. Die Hauptmotivation bei der Entwicklung von Beschleunigern war es daher, geladene Teilchen auf immer höhere Energien zu beschleunigen, um so die Struktur der Materie sowie deren Wechselwirkungen zu erforschen. Von entscheidender Bedeutung ist dabei, neben der Energie des Teilchenstrahls, seine Qualität und Intensität. Die longitudinale Qualität des Strahls wird durch seine Energieverteilung und seine zeitliche Struktur bestimmt. Die transversale Strahlqualität wird durch seine Emittanzen $\pi\varepsilon_x$ und $\pi\varepsilon_y$, also den geometrischen Bündelungen in horizontaler und vertikaler Richtung, beschrieben. Die Intensität des Strahlstroms entspricht der Zahl der Teilchen pro Sekunde im Beschleuniger.

Ab Mitte der 1920er Jahre kam es so zur Entwicklung einer Vielzahl von Teilchenbeschleunigern und Beschleunigerkomponenten¹. So gelang es Cockroft und Walton [Coc32] 1932 die erste beschleunigergetriebene Kernreaktion ${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2\,{}^4\text{He}$ künstlich zu erzeugen und nachzuweisen. Begünstigt durch die Forschungsanstrengungen zur Zeit des Zweiten Weltkrieges und der Entdeckung des Positrons [And33] und des Myons [Ned37; Str37; Yuk35] aus der komischen Strahlung, entstanden immer neue nationale und internationale Forschungszentren mit immer ausgeklügelteren Beschleunigungsanlagen. Teilchen aus der kosmischen Strahlung besitzen Energien von bis zu 10^{20} eV, sind jedoch wegen ihrer geringen Teilchenstromdichten von $j \sim 1 \cdot 10^{-13} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ und ihrer volatilen Natur für systematische Experimente ungeeignet. Im Jahre 1952 nahm am Brookhaven National Laboratory mit dem Cosmotron der erste moderne Teilchenbeschleuniger seinen Betrieb auf. Die steigende Anzahl der neuentdeckten Hadronen führte zum Teilchenzoo der Teilchenphysik. Aus diesem entstand das Quark-Modell [Gal64; Zwe64] und letztendlich das Standardmodell² der Elementarteilchenphysik, das seine abschließende Bestätigung durch den experimentellen Nachweis des Higgs-Bosons im Jahre 2012 am CERN [Aad12; Col13; Col12; Hig64] erhielt. Parallel zur Grundlagenforschung der Physik etablierten sich Beschleunigungsanlagen im Bereich der angewandten Forschung, der industriellen Anwendung und der Medizin. Eine besondere Rolle spielen dabei die aus Beschleunigungsanlagen erzeugten sekundären Teilchen, die Photonen und Neutronen. Auf diese wird im Folgenden näher eingegangen.

1 Für eine detaillierte Übersicht der Entwicklung sei auf [Hin08] verwiesen.

2 Das Standardmodell liefert keine vollständige Beschreibung der Physik, es fehlen unter anderem Erklärungen für die Dominanz der Materie gegenüber der Antimaterie, sowie der Existenz der dunklen Materie und der dunklen Energie.

Photonen

Anfänglich wurde die bei der Beschleunigung geladener Teilchen entstehende Synchrotronstrahlung als rein störender Energieverlust betrachtet, der gerade bei Elektronen zur Limitierung der Teilchenenergie führt. Aufgrund ihrer hohen Brillanz und Leistung bei gleichzeitig geringer Divergenz und Quellgröße erkannte man jedoch schnell ihren Nutzen als ausgezeichnetes Werkzeug in der Physik, Biologie, Chemie, Materialforschung und Medizin [Möl10]. Da die Energieverluste durch die Synchrotronstrahlung reziprok mit der 4. Potenz der Ruhemasse m_0 einhergehen, eignen sich Elektronen und Positronen als Synchrotronstrahlungsquellen. Dafür durchlaufen die hochenergetischen Elektronenpakete eine Reihe von periodischen Dipolmagneten mit abwechselnder Nord-Süd-Polarisierung, meistens Wiggler oder Undulatoren, und erzwingen so eine sinusförmige Teilchenbahn. Historisch unterteilt man Synchrotronquellen nach ihrer Generation:

1. *Generation*: Parasitäre Nutzung von Elektronenspeicherringen. Spitzenbrillanz¹ von 10^{16} Sch bis 10^{18} Sch.
2. *Generation*: Niederemittanz-Elektronenspeicherringe die ausschließlich zur Produktion von Synchrotronstrahlung entwickelt und gebaut wurden. Die erste Anlage Tantalus entstand am Synchrotron Radiation Center in Stoughton Wisconsin, USA 1968 [Lyn97]. Spitzenbrillanz von 10^{18} Sch bis 10^{22} Sch.
3. *Generation*: Positronen- und Elektronenspeicherringe mit double-bend- (DBA) oder triple-bend-Achromaten (TBA). Die achromatische Magnetanordnung liefert dispersionsfreie Driftstrecken für die Wiggler und Undulatoren. Im Vergleich zu der 2. Generation besitzen sie niedrigere Emittanzen und mehr gerade Strecken für Wiggler oder Undulatoren. Die erste Anlage ESRF entstand am Institut Laue-Langevin in Grenoble, Frankreich 1992 [Fac21]. Spitzenbrillanz von 10^{22} Sch bis 10^{24} Sch.
4. *Generation*: Hierzu zählen Speicherringe mit multi-bend-Achromaten (MBA), Freielektronen-Laser (FEL) und Linearbeschleuniger mit Energierückgewinnung (ERL). Sie besitzen die geringsten Emittanzen und im Fall des FEL kohärente Strahlung. Der erste Elektronenspeicherring, der MBA verwendet, war der MAX IV 2015 in Lund, Schweden [Lab21]. Der erste FEL wurde 1976 am Stanford Linear Accelerator Center in Palo Alto, USA, in Betrieb genommen [Dea77]. Spitzenbrillanz von 10^{24} Sch bis 10^{34} Sch.

Neutronen

Neutronen sind aufgrund ihrer elektrischen Neutralität wichtige Sonden zur Erforschung magnetischer Eigenschaften in Materialien. Grundsätzlich existieren keine freien Neutronen, da diese innerhalb einer Halbwertszeit von etwa 10 Minuten durch den Beta-Minus-Zerfall in ein Proton, ein Elektron und ein Anti-Elektronenneutrino² zerfallen. Zur Erzeugung von Neutronen existieren zwei Methoden. Die spontane Kernspaltung radioaktiver Atomkerne und die induzierte Kernspaltung. Bei der spontanen Kernspaltung ist der Kern instabil

¹ Die Brillanz beschreibt die Bündelung des Photonenstrahls; sie wird in der Einheit Schwinger angegeben.

² Bis heute ist die Frage, ob das Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist ungeklärt [Ago18; Kla06].

und zerfällt spontan, die Neutronen werden mit anderen Spaltfragmenten freigesetzt; diese besitzen ein kontinuierliches Energiespektrum. Die am häufigsten verwendete Neutronenquelle sind Forschungsreaktoren. Diese werden üblicherweise mit hoch angereichertem ^{235}U (HEU)¹ betrieben. Die Neutronenflussdichte dieser Forschungsreaktoren steigt etwa proportional zur Dichte der ^{235}U Kerne in den Brennstäben. Bei der induzierten Kernspaltung werden energiereiche Teilchen als Projektil verwendet, um eine Kernreaktion hervorzurufen. Hierbei muss die Energie der Einschussteilchen mindestens der Bindungsenergie des Neutrons im Kern entsprechen. Die verwendeten Teilchen können aus radioaktiven Kernen oder einem Teilchenbeschleuniger stammen. Die Neutronenflussdichte ist abhängig vom Teilchenstrom, der Teilchenenergie und dem verwendeten Target. So erzeugt ein Proton mit einer Energie von 0,8 GeV in einem Blei-Bismut-Eutektikum in Erwartung 27 Neutronen mit einer durchschnittlichen Energie von 30 MeV [Bar16]. Drei Neutronenquellen, bei deren Entwicklung das Institut für Angewandte Physik der Goethe-Universität in Frankfurt am Main beteiligt ist, ist die MYRRHA-Anlage in Mol, Belgien, die FRANZ-Anlage in Frankfurt am Main, Deutschland und die HBS am FZ Jülich, Deutschland. Diese werden im Folgenden vorgestellt.

Das MYRRHA-Projekt

Beim MYRRHA-Projekt, **M**ulti-purpose **hY**brid **R**esearch **R**eactor for **H**igh-tech **A**pplications, handelt es sich um einen im Bau befindlichen Mehrzweck-Hybrid-Reaktor, der zum einen den BR2-Reaktor am SCK • CEN ersetzen soll und zum anderen als Demonstrationsanlage für die Transmutation von langlebigem radioaktivem Abfall dient. Der Bau und Betrieb werden in drei Phasen unterteilt (siehe Abbildung 1.1). In Phase 1 entstehen die zwei als redundant angelegten Injektoren, der erste LINAC-Abschnitt, der den Protonenstrahl bis zu 100 MeV beschleunigt, sowie die Protonen-Target-Anlage zur Herstellung der Radioisotope für die Grundlagenforschung und die Anwendung in der Nuklearmedizin. Komplettiert wird der Bauabschnitt durch die Materialforschungsstation für Fusionsreaktoren. In der zweiten Phase wird die Beschleunigungssektion erweitert. Zusätzlich ergänzt ein Hochleistungsmassenspektrometer für die Grundlagenforschung den Bauabschnitt. In der finalen Phase erfolgt der Bau und die Inbetriebnahme des unterkritisch betriebenen Blei-Bismut-Reaktors für die Transmutation von langlebigen radioaktiven Abfällen, sowie der nötigen Primärsysteme und der Anschluss der Beschleunigeranlage. Mit der Fertigstellung der einzelnen Phasen wird in den Jahren 2026, 2033 und 2036 zu rechnen sein [myr]. Das MYRRHA-Projekt hat vier Forschungsschwerpunkte [SCKa].

Nukleare Abfallbehandlung: Mit wachsender Bevölkerung der Erde und dem gleichzeitigen Wunsch nach besseren Lebensbedingungen, ist ein erhöhter Gesamtenergiebedarf abzusehen. Um gleichzeitig den wachsenden Wohlstand der Weltbevölkerung und die Erfüllung der Klimaziele zu garantieren, muss die Dekarbonisierung der globalen Energieversorgung weiter vorangetrieben werden. Dabei spielt neben den erneuerbaren Energien die Kernenergie eine zentrale Rolle. Vielversprechende Ansätze liefert

¹ Von HEU (engl. **H**ighly **E**nriched **U**ranium) spricht man bei einer Anreicherung der Brennelemente mit ^{235}U von mindestens 20%.

dabei das Programm der Kernkraftwerke der IV. Generation [Sch04]. Hierbei müssen Lösungen für den Umgang mit bereits vorhanden, wie auch den zukünftig entstehenden abgebrannten Brennstäben (SNF) gefunden werden. In der Vergangenheit wurden vier Konzepte in Betracht gezogen: die Endlagerung im Ozean, die direkte geologische Endlagerung, die Transmutation und die Entsorgung im All. Heutzutage werden nur noch die direkte geologische Endlagerung und die geologische Endlagerung nach Aufbereitung oder Transmutation ernsthaft verfolgt. Hier setzt der MYRRHA-Reaktor an: Der beschleunigergetriebene Reaktor (ADS) kann mit MOX-Brennstäben¹ mit einem MA-Anteil² von bis zu 30% unterkritisch betrieben werden. Dabei wird ein Protonenstrahl im Dauerstrichbetrieb mit einer Energie von 600 MeV und einem maximalen Strom von 4 mA auf ein flüssiges Blei-Bismut-Eutektikum-Target geschossen. Die dabei entstehenden Neutronen erhöhen den Neutronenfluss innerhalb der Brennstäbe wodurch es dort zu einer kontrollierten Spaltung kommt, durch die die langlebigen Kerne der Brennstäbe in Kerne mit kürzeren Halbwertszeiten umgewandelt werden. Vergleicht man die Zeit, die die unbehandelten abgebrannten Brennstäbe benötigen, um die Radioaktivität von natürlichem Uran zu erreichen (300 000 Jahre) mit der Zeit, die die transmutierten Brennstäbe benötigen (300 Jahre), ergibt sich eine Reduktion um den Faktor 1 000. Für das stabile Betreiben des ADS darf der Strahl maximal 10 Strahlausfälle von mehr als 3 Sekunden pro 3 monatigem Betriebszyklus aufweisen. Die Energie des Teilchenstrahls darf nur um etwa 1% schwanken, der Teilchenstrom um etwa 2%. Ein Ausfall von etwa einer Sekunde würde die Temperatur des Targets um mehrere Hundert Kelvin reduzieren. Bei wiederholtem Eintreten würde das zu einer nicht hinnehmbaren Ermüdung der Ummantelung der Brennstäbe führen. Um diese hohe Zuverlässigkeit zu garantieren, werden zwei redundante 17-MeV-Injektoren parallel betrieben. Diese laufen im Fault-Tolerance Concept. Ein Kontrollsystem ermöglicht hierbei, dass bei einer Fehlererkennung der redundante Injektor innerhalb von drei Sekunden seinen Betrieb aufnimmt und den Strahlverlust des ausgefallenen Injektors kompensiert [Ait12; Höll19; myr21].

Nukleare Medizin: Produktion von Radioisotopen für die Diagnostik und Behandlung in der Nuklearmedizin. Hierbei ersetzt der MYRRHA-Reaktor den BR2-Reaktor am SCK • CEN, der eine wichtige Rolle für die internationale Versorgung mit ⁹⁹Tc spielt.

Physikalische Grundlagenforschung: Parallel zur Produktion radioaktiver Isotope für die Nuklearmedizin werden Radioisotope für die Grundlagenforschung erzeugt. So soll die schwache Wechselwirkung durch detaillierte Untersuchungen des Beta-Zerfalls von Radioisotopen überprüft werden. Durch die Radioisotope lassen sich verzögerte Neutronen sehr genau studieren, um so eine verbesserte Steuerung von kritischen Kernreaktoren zu gewährleisten. Des Weiteren können durch die Implementierung von Radioisotopen in verschiedene Materialien Rückschlüsse auf die Materialeigenschaften gezogen werden.

1 MOX steht für Mischoxid. MOX-Brennstäbe bestehen neben Uranoxid aus weiteren radioaktiven Oxiden, hauptsächlich Plutonium oder Thorium.

2 MA steht für Minore Actinoide. Diese umfassen folgende Elemente: ⁹³Np, ⁹⁵Am, ⁹⁶Cm, ⁹⁷Bk und ⁹⁸Cf.

Fusionsreaktorforschung: Im MYRRHA-Projekt werden ähnlich hohe Neutronenflussdichten wie sie im **DEMO**nstration Power Plant, kurz DEMO¹, vorkommen erzeugt. Diese soll zur Materialforschung für Fusionsreaktoren genutzt werden [Bar16; Rub].

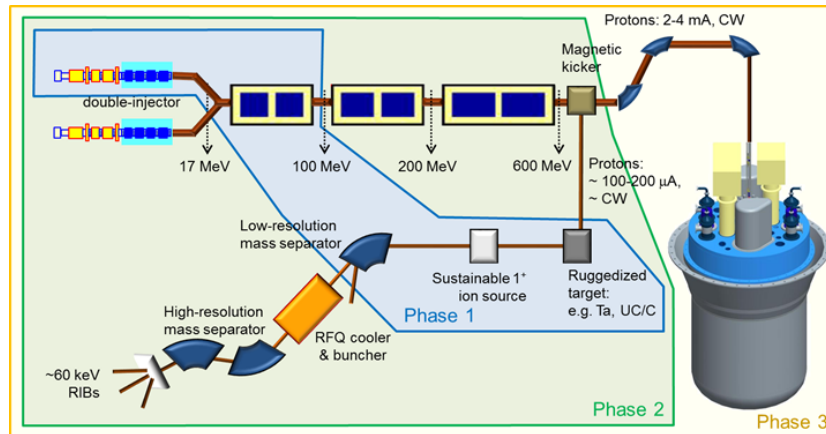


Abbildung 1.1: Übersicht über die drei Phasen des MYRRHA-Projekts. Entnommen aus [SCKb].

Das FRANZ-Projekt

Bei der **FR**Ankfurter Neutronenquelle am Stern-Gerlach-**Z**entrum (FRANZ) handelt es sich um einen Hochstrom-Niederenergie-Protonenbeschleuniger zur Herstellung von Neutronen. Die Neutronen entstehen beim Prozess des Protoneneinfangs, in welchem Lithium zu Beryllium umgewandelt wird. Hierbei wird ein Neutron ausgesendet. Diese Nukleosynthese besitzt im Niederenergiebereich die größte Neutronenausbeute. Die Hauptmotivation für den Bau des FRANZ ist die Erforschung der neutroneninduzierten Nukleosynthese der nuklearen Astrophysik. Nahezu alle schweren Elemente in unserem Universum stammen aus Neutroneneinfangprozessen in Sternen, wobei etwa die Hälfte auf die s-Prozesse im Asymptotic-Giant-Branch (AGB) Stadium der Sternentwicklungsphase zurückzuführen sind. Zur Bestimmung des Neutroneneinfangquerschnitts läuft der FRANZ in zwei Betriebsmodi: dem Modus für die Aktivierungsmethode und dem für die Flugzeitmethode (TOF).

In der Aktivierungsmethode wird das Produktionstarget mit einem Dauerstrich-Protonenstrahl bei einer Energie von 1912 keV bestrahlt. Um die Neutroneneinfangquerschnitte des s-Prozesses zu untersuchen, müssen die Neutronen ein ähnliches Energiespektrum aufweisen, wie es im AGB-Stadium vorliegt. Dieses entspricht einer Maxwell-Boltzmann-Verteilung bei 25 keV. Die an der ${}^7\text{Li}(p,n){}^7\text{Be}$ -Reaktion beteiligten Protonen benötigen eine Energie

¹ Bei DEMO handelt es sich um ein mögliches Nachfolgeprojekt des im Bau befindlichen Fusionsreaktors ITER.

von mindestens 1882 keV, der Überschuss von 30 keV führt, nach

$$\Phi_n(E) = E \cdot \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

quasi zum gewünschten stellaren Spektrum. Hierbei steht E für die Überschussenergie der Kernreaktion, k_B für die Boltzmann-Konstante und T für die Temperatur. Wegen der Impulserhaltung werden die Neutronen in einem vorwärts gerichteten Strahlkegel mit einem Öffnungswinkel von etwa 120° vom Li-Target ausgesendet, was eine direkte Platzierung der Probe am Target ermöglicht. Der aus diesem Aufbau entstehende hohe Neutronenfluss ermöglicht es, Proben mit einem extrem kleinen Neutroneneinfangspektrum, sowie sehr kleine Proben zu untersuchen. Bei der Aktivierungsmethode ist die Untersuchung auf radioaktive Isotope mit einer Halbwertszeit von mindestens einer Sekunde beschränkt, die über entsprechende Detektoren nachgewiesen werden. Bei der TOF-Methode werden die Neutronen durch einen gepulsten Teilchenstrahl am Produktionstarget annähernd gleichzeitig¹ erzeugt, dadurch lässt sich die Flugzeit t der Neutronen zwischen dem Produktionstarget und der Probe, in der der Neutroneneinfang stattfindet, bestimmen. Das TOF-Spektrum besteht aus einem scharfen γ -Flash Peak, der bei der Neutronenerzeugung am Lithium-Target entsteht und dem breit gestreuten Neutronenenergiespektrum, welches üblicherweise durch ein 4π -BaF₂-Kalorimeter aufgenommen wird. Aus dem TOD-Spektrum lassen sich die energieabhängigen Neutroneneinfangquerschnitte bestimmen [Rei14].

Abbildung 1.2 skizziert den Aufbau des FRANZ-Projekts. Der Protonenstrahl für die FRANZ-Beschleunigungsanlage wird aus einer CHORDIS-Ionenquelle² extrahiert, welche bei 10 Hz einen gepulsten Strom mit einer Pulslänge von 1 ms liefert. Die Quelle erzeugt einen Strahlenstrom von 51 mA bei einer Strahlenenergie von 35 keV. Anschließend trennen zwei Solenoiden die Protonen von den H_2^+ - und H_3^+ -Molekülonen. Die Protonen werden anschließend auf 60 keV nachbeschleunigt und liefern einen Strahlgesamtstrom von 30 mA. Die darauf folgenden zwei Solenoiden fokussieren den gepulsten Strahl und führen ihn in den gekoppelten RFQ-IH-DTL³, der mit einer Hochfrequenz von 175 MHz betrieben wird. Der 1,7 m lange Four-Rod-RFQ beschleunigt den Bunch auf 700 keV. Durch den RFQ bilden sich im 50 ns-Makrobunch neun Mikrobunche aus. Die nachfolgende IH-DTL-Sektion erhöht die Energie auf 2 MeV. Anschließend durchläuft der Strahl ein Quadrupol-Triplett, gefolgt von dem CH-Rebuncher und einem weiteren Quadrupol-Triplett. Die Quadrupol-Triplets dienen der transversalen Fokussierung, wohingegen der Rebuncher der Energievariation⁴ von bis zu ± 200 keV und der longitudinalen Fokussierung des Protonenstrahl dient. Durch die Variation der Energie des Protonenstrahls lässt sich das Energiespektrum der Neutronen anpassen. Bis jetzt war die Beschleunigungsanlage für die beiden Betriebsmodi gleich. Im Aktivierungsmodus wird der Teilchenstrahl zum Experiment geleitet. Im ToF-Modus

1 Gleichzeitig bedeutet hier, dass die Neutronen innerhalb der Bunchbreite des Protonenstrahls erzeugt werden. Im FRANZ-Projekt beläuft sich diese im Flugzeitmodus auf etwa 1 ns.

2 Cold or HOt Reflex Discharge Ion Source.

3 RFQ-IH-DTL steht für Radio-Frequency Quadrupole Interdigital H-Mode Drift Tube Linac.

4 Die Variation der Teilchenenergie ist von der Phase des elektromagnetischen Feldes am Eintrittsort des Teilchenstrahls abhängig.

wird der Makrobunch in einen Bunchkompressor vom Mobley-Typen über einen 2,5 MHz-Kicker geleitet. Im Bunchkompressor werden die neun Mikrobunche zu einem 1 ns-Bunch zusammengeführt, über einen weiteren CH-Rebuncher final fokussiert und zum Experiment geleitet [Alz].

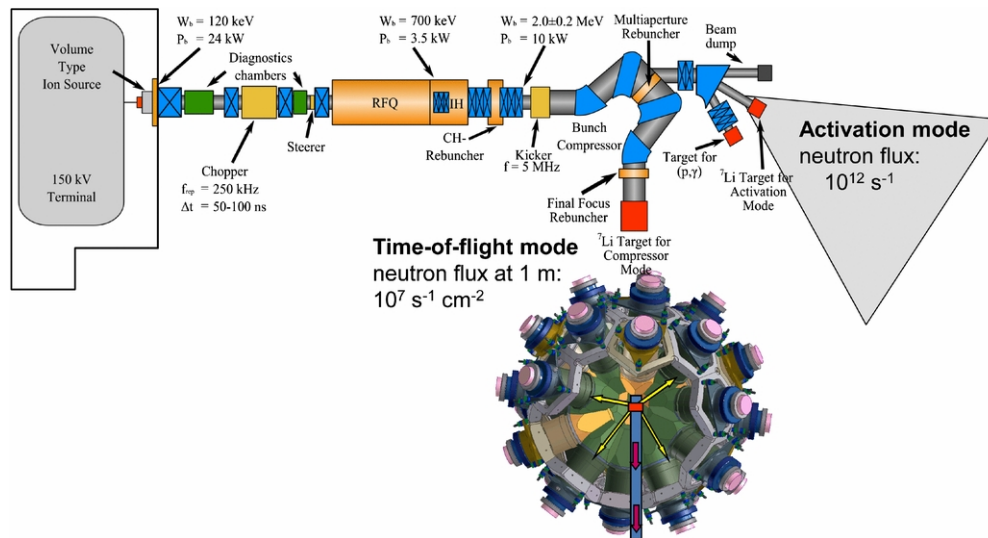


Abbildung 1.2: Schema der Neutronenanlage FRANZ, entnommen aus [Rei14]. Es ist zu beachten, dass mittlerweile die in dieser Abbildung dargestellte Ionenquelle durch eine CHORDIS-Quelle ersetzt worden ist.

Das HBS-Projekt

Das Jülich **H**igh **B**rilliance Accelerator-based Neutron **S**ource (HBS) Projekt, demonstriert das Konzept einer kompakten hochbrillanten beschleunigergetriebenen Neutronenquelle¹ am JCNS². Der prinzipielle Aufbau der HBS-Anlage ist in Abbildung 1.3 skizziert.

Der Neutronenfluss der Anlage ist im mittleren Bereich ($\sim 1 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$) angesiedelt und stellt eine Ergänzung zu den Hochfluss-Neutronenquellen ($\sim 1 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1}$) wie dem ILL³, MLZ⁴ oder dem im Bau befindlichen ESS⁵, dar. Die Neutronen am HBS sollen durch die Kernreaktionen eines gepulsten Hochstrom-Niederenergie-Protonenstrahls (100 mA, 70 MeV bei einem cw-Wert von 4,2%), der auf Tantal-Targets trifft, erzeugt werden. Hierbei besitzt der Teilchenstrahl eine mittlere Strahlleistung von 420 kW, die sich gleichmäßig auf drei einzelne Tantal-Targetstationen verteilen. Der Teilchenstrahl bildet je 504 Protonenbunche pro Sekunde aus, die aus drei unterschiedlichen Gruppen bestehen. Die erste Gruppe besteht aus 96 Bunche mit einer Pulslänge von 208 μm . Diese liefert nach der Kollision mit dem Target bei anschließender Moderation der Neutronen thermische Neutronen

1 Compact Accelerator driven Neutron Source.

2 Jülich Centre for Neutron Science.

3 Institut Laue-Nangevin.

4 Heinz Maier-Leibnitz Zentrum.

5 European Spallation Source.

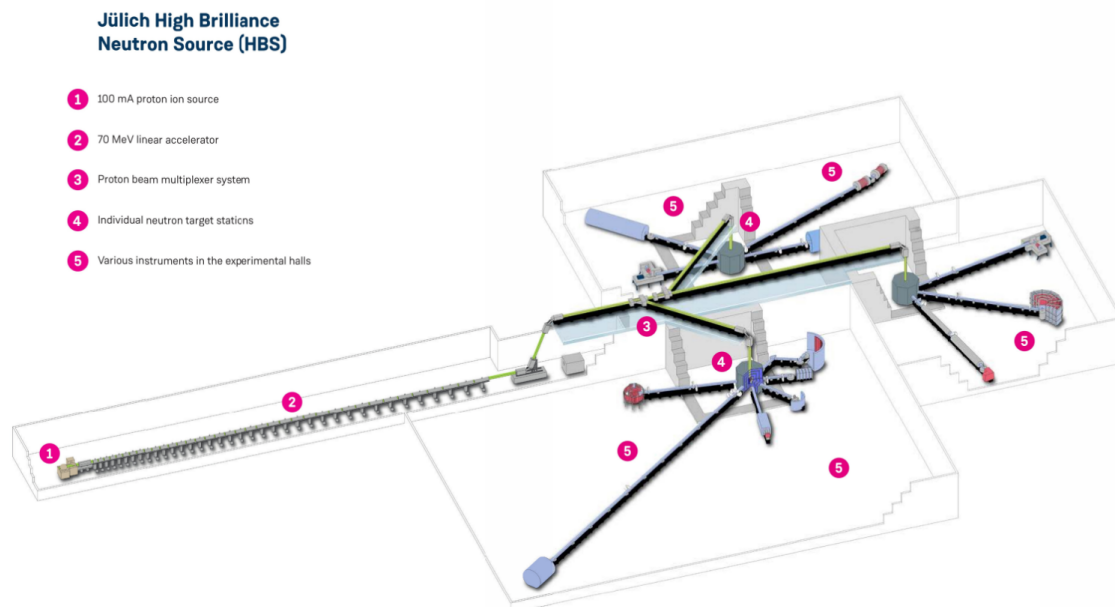


Abbildung 1.3: Übersicht über die HBS-Anlage, entnommen aus [Brü20].

für 6 Experimentierstationen. Die zweite Gruppe besteht aus 384 Bunchen mit einer Pulslänge von $52 \mu\text{m}$. Der Strahl für diese Targetstation ist für Experimente mit schnellen Neutronen gedacht und beliefert vier Experimentierstationen. Die letzte Gruppe besteht aus 24 Bunchen mit einer Pulslänge von $833 \mu\text{m}$ und beliefert drei Experimentierstationen mit kalten Neutronen. Die Aufteilung des Protonenstrahls in seine drei Repräsentanten erfolgt sukzessiv durch ein Multiplexsystem (siehe Abbildung 1.4).

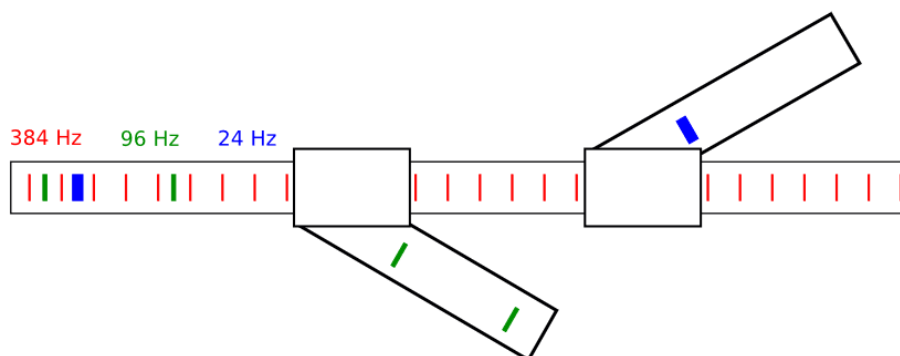


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung des Multiplexsystems der HBS-Anlage, entnommen aus [Brü20]. Die drei Bunchgruppen sind in grün (Gruppe 1), blau (Gruppe 2) und rot (Gruppe 3) abgebildet.

Die grundlegende Bunchstrukturierung des Protonenstrahls erfolgt im Coppersystem in der LEBT-Sektion. Durch diese Konfiguration ist es möglich, gleichzeitig drei unterschiedliche hochbrillante Neutronenquellen mit nur einer Beschleunigungsanlage zu betreiben, was

eine breite Neutronenforschung bei geringen Kosten ermöglicht.

Der Protonenstrahl des HBS wird aus einer ECR¹-Plasmaionenquelle mit einem Protonenanteil von 90% extrahiert und liefert einen Gleichstrom von 110 mA bei einer Strahlenergie von 100 keV. Anschließend trennen zwei Solenoiden die Protonen von ihren Molekülen (H_2^+ und H_3^+) und führen den Strahl in das Choppersystem. Um das Risiko von Spannungsdurchschlägen, verursacht durch den hohen Strahlstrom, zu reduzieren, verwendet man ein $E \times B$ -Choppersystem, bestehend aus einem gepulsten elektrischen Kompensationsfeld mit einem statischen magnetischen Ablenkkfeld. Dieses formt aus dem kontinuierlichen Strahl die charakteristische Bunchstruktur der HBS-Anlage. Den Abschluss der LEBT-Sektion bilden zwei weitere Solenoiden die den Teilchenstrahl fokussieren und anschließend in die RFQ-Sektion überführen. Die RFQ-Sektion besteht aus zwei 3 m langen 4-Rod-RFQs die bei einer Frequenz von 176,1 MHz laufen und die Protonen auf eine Energie von 2-3 MeV beschleunigen. Der Aufbau der RFQs entspricht im Wesentlichen dem Aufbau des RFQs des MYRRHA-Projekts. Die anschließende MEBT²-Sektion passt den Teilchenstrahl den Anforderungen der folgenden Driftröhren-Linac-Struktur an. Hierbei durchläuft der Teilchenstrahl einen Quarter-Wave-Rebuncher, einen Quadrupol-Triplett, verschiedene Strahldiagnostikelemente, einen weiteren Quarter-Wave-Rebuncher und einen finalen Quadrupol-Dublett. Die Rebuncher werden ebenfalls mit einer Frequenz von 176,1 MHz betrieben und fokussieren den Strahl longitudinal; die Quadrupole sind für die transversale Fokussierung bestimmt. Darüber hinaus verfügt die MEBT-Sektion über zwei Steererpaare, die einen möglichen transversalen Versatz des Teilchenstrahls, verursacht durch die RFQ-Sektion, zu kompensieren. Die finale Teilchenbeschleunigung von 2-3 MeV auf 70 MeV findet durch etwa 35 CH-Kavitäten bei einer Frequenz von 176,1 MHz statt — die genaue Anzahl an CH-Kavitäten des 90 m langen Abschnitts muss durch exakte Simulationen bestimmt werden. Zwischen je zwei CH-Kavitäten wird der Strahl durch ein Quadrupol-Dublett transversal fokussiert. Anschließend werden die Protonenbunche durch den Multiplex separiert und in ihre jeweiligen Forschungsterminale geleitet.

1 **E**lectron **C**yclotron **R**esonance.

2 **M**edium **E**nergy **B**eam **T**ransport.

KAPITEL 2

Physikalische Grundlagen

2.1 Lorentzkraft

Durchläuft ein elektrisch geladenes Teilchen mit Ladung q und Geschwindigkeit \vec{v} ein elektromagnetisches Feld, wirkt auf es die Lorentzkraft \vec{F}_L

$$\vec{F}_L = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

mit dem elektrischen Feld \vec{E} und dem magnetischen Feld \vec{B} . Die Lorentzkraft wird in der Theorie der Elektrodynamik axiomatisch eingeführt, ihr Nachweis kann nur über Experimente erfolgen. Diese Kraft nutzt man, um geladene Teilchen zu beschleunigen. Aus Gleichung (2.1) wird ersichtlich, dass nur das elektrische Feld in Flugrichtung zur Energiegewinnung von geladenen Teilchen genutzt werden kann. Die vom magnetischen Feld verursachte Kraftkomponente steht senkrecht zur Geschwindigkeit des geladenen Teilchens und ist von dessen Geschwindigkeit abhängig. Unter der Annahme, dass die Teilchengeschwindigkeit \vec{v} orthogonal zum magnetischen Feld \vec{B} steht, zeigt sich für die Gleichheit der beiden Kraftkomponenten der Lorentzkraft folgender Zusammenhang: $\vec{E} = v\vec{B}$. Für schnelle Teilchen $v > 0,1c$ wäre somit eine unrealistisch hohe elektrische Feldstärke von $\vec{E} > 30 \text{ MV m}^{-1}$ nötig um die gleiche Kraft zu erhalten, die ein Magnetfeld von 1 Tesla zu erzeugt. Aus diesem Grund werden hauptsächlich magnetische Felder zur Ablenkung und zur transversalen Fokussierung von schnellen geladen Teilchen verwendet.

Teilchenbeschleuniger können nach den Prinzipien, nach denen das elektrische Feld für die Beschleunigung zur Verfügung gestellt wird, unterschieden werden. Zu den bekanntesten Vertretern der elektrostatischen Beschleuniger gehören der Van-de-Graaff-Generator und der Cockroft-Walton-Generator. Im Betatron wird das elektrische Beschleunigungsfeld durch die zeitliche Veränderung des Magnetfeldes bereitgestellt. Eine andere Methode ist die Nutzung von hochfrequenten elektromagnetischen Wellen. Hierbei besteht die besondere Herausforderung darin, die Teilchen so mit dem Feld zu synchronisieren, dass der Teilchenstrahl stabil beschleunigt wird. Man verwendet Wanderwellen, bei denen die Teilchen mit der Ausbreitung der EM-Welle permanent beschleunigt werden. Hierbei muss die Phasengeschwindigkeit der Teilchengeschwindigkeit entsprechen, was nur durch Einbauten¹ und relativistische Teilchengeschwindigkeiten gewährleistet werden kann. Darüber hinaus können elektromagnetische Stehwellen² zur Beschleunigung verwendet werden. Dabei

¹ Die Einbauten führen zur Reduktion der Phasengeschwindigkeit, beispielsweise durch Irisblenden.

² Bei Stehwellen handelt es sich um eine Überlagerung von phasengleichen hin- und zurücklaufenden Wellen, die sich nur mit speziellen Frequenzen ausbilden.

werden durch den Einbau von Driftröhren die Teilchen von den abbremsenden Anteilen der EM-Welle abgeschirmt. Im Folgenden liegt der Fokus der Betrachtung nur auf den hochfrequenten elektromagnetischen stehenden Wellen, da die in dieser Arbeit betrachteten Beschleuniger nach diesem Prinzip arbeiten.

2.2 Feldverteilung im Hohlraumresonator

Um elektromagnetische Feldkomponenten für die Beschleunigung zur Verfügung zu stellen, eignen sich elektromagnetische Wellen. Ausgangspunkt für die Beschreibung der Dynamik von elektromagnetischen Feldern sind die Maxwell-Gleichungen.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.2a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2d)$$

Wobei hier \vec{D} die elektrische Flussdichte, \vec{H} die magnetische Feldstärke, ρ die elektrische Ladungsdichte und \vec{J} die elektrische Stromdichte bezeichnen. Aus ihnen ergeben sich für die normalen und die tangentialen elektromagnetischen Feldkomponenten an den Grenzflächen zweier Materialien folgende Randbedingungen; die Indizes der Feldkomponenten beschreiben dabei das jeweilige Material (siehe Abbildung 2.1).

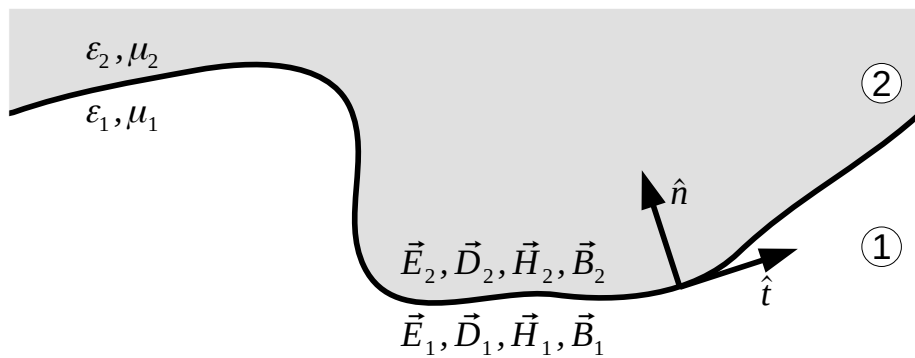


Abbildung 2.1: Grenzfläche zweier Materialien, mit Normalenvektor \hat{n} und Tangentialvektor \hat{t} . Der Tangentialvektor ist definiert über sein Kreuzproduktverhalten im Bezug auf den Normalvektor $\hat{t} := \hat{n} \times (\hat{t} \times \hat{n})$.

Aus der Poisson-Gleichung (2.2a) und dem gaußschen Integralsatz¹ folgt:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_S \quad (2.3)$$

Aus dem Faraday'schen Gesetz (2.2b) und dem stokeschen Integralsatz² folgt:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.4)$$

Analog folgen die Randbedingungen für die magnetischen Feldkomponenten.

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.5)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S \quad (2.6)$$

Hierbei ist ρ_S die Oberflächenladungsdichte an der Grenzfläche und \vec{J}_S der Oberflächenstrom der Grenzfläche zwischen den beiden Materialien. Üblicherweise werden für den Bau von Kavitäten Materialien mit hoher Leitfähigkeit³ verwendet und im Vakuum betrieben. Betrachten wir einen idealisierten Fall, in dem eine elektromagnetische Welle aus dem Vakuum (Medium 1) auf die Innenwand der Kavität, bestehend aus PEC⁴ (Medium 2), trifft. Da sich im Inneren eines perfekten elektrischen Leiters kein elektrisches Feld ausbilden kann, vereinfacht sich Gleichung (2.4) zu $\hat{n} \times \vec{E}_1 = 0$ und Gleichung (2.3) zu $\hat{n} \cdot \vec{D}_1 = \rho_S$. Des Weiteren muss nach dem Faraday'schen Gesetz (2.2b) für endliche Frequenzen die magnetische Flussdichte \vec{B}_2 und somit auch das Magnetfeld \vec{H}_2 im Inneren des PECs verschwinden. Somit vereinfacht sich Gleichung (2.5) zu $\hat{n} \cdot \vec{B}_1 = 0$ und Gleichung (2.6) zu $\hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_S$. Ein Vektorfeld kann in seine Normalkomponente $F_\perp := \hat{n} \cdot \vec{F}$ und seine Tangentialkomponente mit $F_\parallel := \hat{n} \times \vec{F}$ zerlegt werden. Somit gelten die folgenden Randbedingungen an den Innenwänden der Kavität: $E_\parallel = 0$ und $\Delta D_\parallel = \rho_s$, sowie $H_\parallel = \vec{J}_s$ und $B_\perp = 0$. Da für die Beschleunigung nur monochromatische Wellen mit reellen Wellenzahlen von Interesse sind, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Ausbreitungsrichtung der Welle in z -Richtung mit einer konstanten Frequenz ω und dem Wellenvektor k_z gewählt werden. Die Feldkomponenten haben somit folgende Allgemeinform:

1 Der Fundamentalsatz für die Divergenz besagt, dass für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} , die Quellen innerhalb des Volumens V dem Fluss durch die sie umschließende Oberfläche ∂V entsprechen.

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \oint_{\partial V} \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

2 Der Fundamentalsatz über die Rotation besagt, dass für ein stetig differenzierbares Vektorfeld \vec{F} der Fluss der Rotation durch seine Oberfläche S dem Fluss durch das ihn umschließende Wegintegral ∂S entspricht. $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

3 Beispielsweise werden verkupferte Innenwände für den normalleitenden Betrieb oder Niob für den supraleitenden Betrieb verwendet.

4 PEC, engl. perfect electrical conductor.

$$\vec{E}(x,y,z|t) = \vec{E}(x,y)e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (2.7a)$$

$$\vec{H}(x,y,z|t) = \vec{H}(x,y)e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (2.7b)$$

Setzt man die allgemeine Form des elektrischen Feldes (2.7a) in die Poissongleichung (2.2a) und das Faraday'schen Gesetz (2.2b), sowie die allgemeine Form des magnetischen Feldes (2.7b) in das Gauß'sche Gesetz für Magnetfelder (2.2c) und das Ampere'sche Gesetz (2.2d) unter Berücksichtigung der Randbedingungen ein, erhält man:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + -ik_z E_z = 0 \quad (2.8a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik_z E_y = -i\omega\mu_0 H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -ik_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu_0 H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0 H_z \end{array} \right\} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.8b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + -ik_z H_z = 0 \quad (2.8c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} + ik_z H_y = i\omega\varepsilon_0 E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -ik_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\varepsilon_0 E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0 E_z \end{array} \right\} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.8d)$$

Die x- und y-Komponenten der Gleichungen (2.8d) und (2.8b) lassen sich so verknüpfen, dass sie nach den transversalen Feldkomponenten E_x , E_y , H_x , H_y aufgelöst werden können:

$$E_x = \frac{i}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (2.9a)$$

$$E_y = \frac{i}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2} \left(k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.9b)$$

$$H_x = \frac{i}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2} \left(\omega \varepsilon_0 \frac{-\partial E_z}{\partial y} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.9c)$$

$$H_y = \frac{i}{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_z^2} \left(\omega \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_z \frac{\partial H_z}{\partial y} \right) \quad (2.9d)$$

Wobei μ_0 die magnetische Feldkonstante und ε_0 die elektrische Feldkonstante ist. Für sie gilt $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$. Hieraus wird ersichtlich, dass für eine vollständige Feldbeschreibung nur die longitudinalen Feldkomponenten E_z und H_z zu bestimmen sind. Um eine Entkoppelung der Feldgleichungen (2.9) zu erhalten, setzt man diese in Gleichung (2.8a) und Gleichung (2.8c) ein und erhält:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right] E_z = 0 \quad (2.10a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right] \mu_0 H_z = 0 \quad (2.10b)$$

Es existieren hierfür drei Grundtypen von Lösungen; die allgemeine Lösung ($E_z \neq 0$ und $H_z \neq 0$) und die zwei speziellen Lösungen: die transversal-magnetische Welle ($E_z \neq 0$ und $H_z = 0$; TM/E-Mode) und die transversal-elektrische Welle ($E_z = 0$ und $H_z \neq 0$; TE/H-Mode). Da die H-Mode kein longitudinales elektrisches Feld aufweist, ist sie für die Beschleunigung von Teilchen ungeeignet. Eine transversal-elektromagnetische Welle ($E_z = 0$ und $H_z = 0$; TEM-Mode) kann im ladungs- und stromfreien Hohlraumresonator nicht auftreten. Um eine TEM-Mode zu erzeugen, muss mindestens eine weitere Randbedingung gesetzt werden. Ein prominentes Beispiel hierfür ist der Koaxialleiter, bei dem der innere Leiter auf einem anderem Potential liegt als der äußere Leiter. Die Wellengleichungen (2.10) liefern die Grundlage für die numerischen Lösungen der Eigenwertgleichungen im CEM, auf die in Kapitel 3.1.1 näher eingegangen wird. Sie gelten unabhängig von der Geometrie der Kavität und sind für die Diskretisierung in dieser Form besonders stabil.

2.2.1 Zylindrische Geometrie

Da die meisten Linearbeschleuniger eine zylindersymmetrische Geometrie besitzen, die Ähnlichkeiten mit denen von zylindrischen Wellenleitern aufweisen (siehe Abbildung 2.2), lassen sich viele Beschleunigerresonatoren aus diesen ableiten. Üblicherweise sind für den



Abbildung 2.2: Schematische Darstellung der Entwicklung von Beschleunigerresonatoren aus dem Wellenleiter. Die linke Darstellung zeigt einen Wellenleiter, in der Mitte ist ein Wellenleiter mit Irisblenden zu sehen, rechts ist ein Driftröhrenbeschleuniger mit zunehmender Länge abgebildet.

zylindrischen Wellenleiter nur die magnetischen oder die elektrischen Moden von Bedeutung. Hierfür ist es günstig, die Wellengleichung (2.7) in Zylinderkoordinaten im zeitharmonischen Fall zu betrachten:

$$\Delta F_z + \frac{\omega^2}{c^2} F_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} F_z = 0 \quad (2.11)$$

Die Gleichung (2.11) kann mittels dem Separationsansatz $F_z = A(r)B(\phi)C(z)$ vereinfacht werden, und liefert:

$$\frac{1}{rA(r)} \frac{\partial(rA'(r))}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{B''(\phi)}{B(\phi)} + \frac{C''(z)}{C(z)} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.12)$$

Hierbei besitzt der erste Ausdruck eine radiale, der zweite Ausdruck eine radiale sowie eine azimutale, der dritte Ausdruck nur eine longitudinale Abhängigkeit. Der letzte Term ist eine Konstante. Da die Lösung¹ mit dem Wellenvektor in seiner Allgemeinform (2.7) konsistent sein muss, gilt $\frac{C''(z)}{C(z)} + k_z^2 = 0$, mit $C(z) = F_0 \cos(ik_z z)$ oder $C(z) = F_0 \sin(ik_z z)$. Hieraus lässt sich (2.12) umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{rA(r)} \frac{\partial(rA'(r))}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{B''(\phi)}{B(\phi)} + \underbrace{\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right)}_{:=k_c^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{r}{A(r)} \frac{\partial(rA'(r))}{\partial r} + r^2 k_c^2 &= -\frac{B''(\phi)}{B(\phi)} \end{aligned}$$

Dabei weist die linke Seite der Formel nur eine radiale Abhängigkeit und die rechte Seite nur eine azimutale Abhängigkeit auf. Da die Gleichung für beide Seiten unabhängig voneinander dieselbe Lösung aufweisen muss, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{B''(\phi)}{B(\phi)} + k_r^2 &= 0 \Leftrightarrow B''(\phi) + k_r^2 B(\phi) = 0 \\ r^2 A''(r) + rA'(r) + (k_c^2 r^2 - k_r^2) &= 0 \end{aligned}$$

Da für den Wertebereich des Azimutalwinkels gelten muss: $\phi \in [0; 2\pi)$, kommen nur ganzzahlige periodisch Lösungen² für $B(\phi) = e^{\pm im\phi}$ in Frage. Bei der linken Seite der Gleichung handelt es sich um eine Besselsche Differentialgleichung³, mit der Substitution $\chi := k_c r$ ergibt sich für

$$\chi^2 A''(r) + \chi A'(r) + (\chi^2 - k_r^2) = 0$$

folgende Lösung:

$$A(r) = J_{k_r}(k_c r) = J_m(k_c r)$$

wobei $J_m(k_c r)$ die Besselfunktion m-ter Ordnung ist. Fasst man nun die Lösungen von $A(r)$, $B(\phi)$ und $C(z)$ in $F_z = A(r)B(\phi)C(z)$ zusammen, erhält man folgende Lösungen für

1 k_z^2 wird durch die Randbedingungen bestimmt.

2 $2\pi k_r = 2\pi m, m \in \mathbb{N}_0$.

3 Siehe [Bro08, Kapitel 9.1.2.6, S. 565] $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ besitzt für ganzzahlige m die Lösung $y = J_m(x)$.

die longitudinale Feldkomponente:

$$F_z(r, \phi, z|t) = F_0 J_m(k_c r) e^{\pm im\phi} \cos(ik_z z) e^{i\omega t} \quad (2.13)$$

$$F_z(r, \phi, z|t) = F_0 J_m(k_c r) e^{\pm im\phi} \sin(ik_z z) e^{i\omega t} \quad (2.14)$$

Die Lösung von k_z hängt der gesetzten Randbedingung ab, somit erhält man für den transversal magnetischen Fall (2.13):

$$\begin{aligned} E_z(r, \phi, z|t) &= E_0 J_m(k_c r) e^{\pm im\phi} \cos(k_z z) e^{i\omega t} \\ &= E_0 J_m(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.15a)$$

$$H_z(r, \phi, z|t) = 0 \quad (2.15b)$$

Da die anderen Feldkomponenten nur von E_z abhängen, besitzen sie folgende Form:

$$E_r(r, \phi, z|t) = -i \frac{k_z}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{k_z R}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \sin(k_z z) e^{i\omega t} \quad (2.15c)$$

$$E_\phi(r, \phi, z|t) = -i \frac{k_z}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -\frac{k_z m R^2}{k_c^2 r} E_0 J_m(k_c r) \sin(m\phi) \sin(k_z z) e^{i\omega t} \quad (2.15d)$$

$$H_r(r, \phi, z|t) = i \frac{\omega \varepsilon_0}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} = -i \varepsilon_0 \omega \frac{m R^2}{k_c^2 r} E_0 J_m(k_c r) \sin(m\phi) \cos(k_z z) e^{i\omega t} \quad (2.15e)$$

$$H_\phi(r, \phi, z|t) = i \frac{\omega \varepsilon_0}{k_c^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} = -i \varepsilon_0 \omega \frac{R}{k_c} E_0 J'_m(k_c r) \cos(m\phi) \cos(k_z z) e^{i\omega t} \quad (2.15f)$$

Die Innenwände des Hohlraumresonators bestehen aus PEC, daher muss E_z am den Zylinderinnenflächen verschwinden. Damit die Bedingung am Zylindermantel ($r = R$) erfüllt ist, muss die Besselfunktion m-ter Ordnung bei $k_c R$ eine Nullstelle aufweisen. Dabei wird γ_{mn} als die n-te Nullstelle der Besselfunktion m-ter Ordnung bezeichnet, für die gilt:

$$k_c R =: \gamma_{mn} \text{ mit } J_m(\gamma_{mn}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Tabelle 2.1 und Tabelle 2.2 listen die ersten 7 Nullstellen¹ der ersten 5 Besselfunktionen J_m bzw. der Ableitung der Besselfunktion J'_m auf. Für den Zylinderanfang ($z = 0$) bzw. das Zylinderende ($z = L$) muss der Kosinusterm in (2.15a) verschwinden. Somit muss k_z ein ganzes Vielfaches von π sein: $k_z L \stackrel{!}{=} p\pi$ mit $p \in \mathbb{N}_0$. Somit ergibt sich aus den Randbedingungen für k_c und k_z die Dispersionsrelation der Resonanzfrequenzen des zylindrischen Hohlraumresonators im transversal magnetischen Fall:

$$\omega_{mnp}^2 := c^2 k_{mnp}^2 = c^2 (k_c^2 + k_z^2) = c^2 \left(\left(\frac{\gamma_{mn}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \right) \quad (2.17)$$

¹ Die Berechnung der Nullstellen erfolgte durch die Pythonfunktion `jn_zeros` und `jnp_zeros` aus dem Paket `scipy.special`.

Im transversal elektrischen Fall muss wegen der Erfüllung der Randbedingungen am Zylindermantel E_ϕ verschwinden. Daher gilt:

$$k_c R =: \gamma'_{mn} \text{ mit } J'_m(\gamma'_{mn}) \stackrel{!}{=} 0$$

und man erhält die folgenden Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} H_z(r, \phi, z|t) &= H_0 J_m(k_c r) e^{\pm i m \phi} \sin(k_z z) e^{i \omega t} \\ &= H_0 J_m(k_c r) \cos(m \phi) \sin(k_z z) e^{i \omega t} \end{aligned} \quad (2.18a)$$

$$H_r(r, \phi, z|t) = -i \frac{k_z}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} = -\frac{k_z R}{k_c'} H_0 J'_m(k_c r) \cos(m \phi) \cos(k_z z) e^{i \omega t} \quad (2.18b)$$

$$H_\phi(r, \phi, z|t) = -i \frac{k_z}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} = -\frac{k_z m R^2}{k_c'^2 r} H_0 J_m(k_c r) \sin(m \phi) \cos(k_z z) e^{i \omega t} \quad (2.18c)$$

$$E_z(r, \phi, z|t) = 0 \quad (2.18d)$$

$$E_r(r, \phi, z|t) = -i \frac{\omega \mu_0}{k_c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} = i \omega \mu_0 \frac{m R^2}{k_c'^2 r} H_0 J_m(k_c r) \sin(m \phi) \sin(k_z z) e^{i \omega t} \quad (2.18e)$$

$$E_\phi(r, \phi, z|t) = i \frac{\omega \mu_0}{k_c^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} = i \omega \mu_0 \frac{r^{max}}{k_c'} H_0 J'_m(k_c r) \cos(m \phi) \sin(k_z z) e^{i \omega t} \quad (2.18f)$$

Daher findet man für die Dispersionsrelation der Resonanzfrequenzen des zylindrischen Hohlraumresonators im transversal elektrischen Fall:

$$\omega_{mnp}^2 := c^2 k_{mnp}^2 = c^2 (k_c^2 + k_z^2) = c^2 \left(\left(\frac{\gamma'_{mn}}{R} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L} \right)^2 \right) \quad (2.19)$$

Tabelle 2.1: Nullstellen der Besselfunktion m-ter Ordnung $J_m(\gamma_{mn})$.

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
m = 0	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	21,2116
m = 1	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	22,7601
m = 2	5,1356	8,4172	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	24,2701
m = 3	6,3802	9,7610	13,0152	16,2235	19,4094	22,5827	25,7482
m = 4	7,5883	11,0647	14,3725	17,6160	20,8269	24,0190	27,1991

Tabelle 2.2: Nullstellen der abgeleiteten Besselfunktion m-ter Ordnung $J'_m(\gamma'_{mn})$.

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7
m = 0	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	22,7601
m = 1	1,8412	5,3314	8,5363	11,7060	14,8636	18,0155	21,1644
m = 2	3,0542	6,7061	9,9695	13,1704	16,3475	19,5129	22,6716
m = 3	4,2012	8,0152	11,3459	14,5858	17,7887	20,9725	24,1449
m = 4	5,3176	9,2824	12,6819	15,9641	19,196	22,4010	25,5898

2.2.2 Moden

Die Feldverteilungen, die sich bei den Resonanzfrequenzen (siehe Gleichung (2.17) und Gleichung (2.19)) ausbilden, werden als Moden bezeichnet. Diese werden je nach Ausprägung ihrer longitudinalen und transversalen Feldverteilung als elektrische E-Mode (TM-Mode gilt Gleichung (2.15)) bzw. magnetische H-Mode (TE-Mode gilt Gleichung (2.18)) bezeichnet und über drei Indizes m, n, p ¹ gekennzeichnet. Für die Nomenklatur TM_{mnp} der E-Mode gilt:

m : Anzahl der Doppelnulldstellen von E_z im Intervall $\phi \in [0; 2\pi)$

n : Anzahl der Nullstellen von E_z im Intervall $r \in (0; R]$

p : Anzahl der Halbperioden von E_z im Intervall $z \in [0; L]$

Für die Nomenklatur TE_{mnp} der H-Mode gilt:

m : Anzahl der Doppelnulldstellen von H_z im Intervall $\phi \in [0; 2\pi)$

n : Anzahl der Nullstellen von H_z im Intervall $r \in (0; R]$

p : Anzahl der Halbperioden von H_z im Intervall $z \in [0; L]$

Die drei wichtigsten Moden für die Beschleunigung sind in Abbildung 2.3 dargestellt.

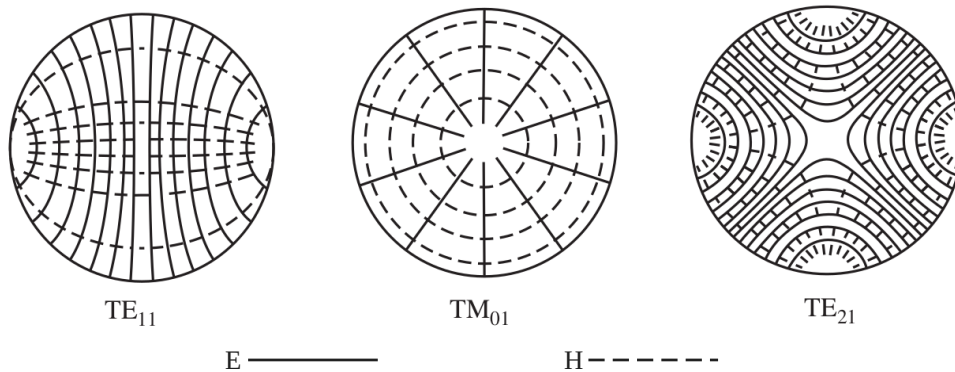


Abbildung 2.3: Feldkonfiguration der TE_{11p} , TM_{01p} und TE_{21p} Moden, entnommen aus [Lee85].

Für die Beschleunigung geladener Teilchen eignen sich ohne Einbauten nur die TM_{0np} -Moden, da sie als einzige ein um das Zentrum zentriertes E-Feld in Flugrichtung der Teilchen aufweisen. Zu den E-Moden-Beschleunigern gehören die Alvarez-Strukturen und die elliptischen Resonatoren. Da die H-Moden nur transversale elektrische Felder aufweisen, kommt es bei den geladenen Teilchen zu keiner Energieaufnahme durch das Feld. Der Einbau von Stützen und Driftröhren im Tank führt zu einem im Zentrum fokussierten

¹ $m, p \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

longitudinalen elektrischen Feld, das sich zum Beschleunigen von Teilchen eignet. Zur Familie der H-Moden-Beschleuniger gehören die Multi-Spoke-Strukturen, die IH-Strukturen und die CH-Strukturen. Durch die Einbauten in den Hohlleiter kommt es zu einem Anstieg der Kapazität, was zu einer Herabsetzung der Resonanzfrequenz führt [Pod09, Kapitel 4].

2.3 Prinzip der Beschleunigung durch Wechselfelder

Da die Beschleunigungsspannung im elektrostatischen Fall aufgrund von elektrischen Durchschlägen auf etwa 10 MV beschränkt ist, verwenden moderne Beschleuniger Wechselfelder. Durchläufe ein geladenes Teilchen ein homogenes elektrisches Wechselfeld mit longitudinaler Feldkomponente würde es in jeder Periode einen gleichgroßen beschleunigenden wie abbremsenden Anteil erfahren, was zu keiner Nettobeschleunigung führen würde. Die Idee zum Einbau von Driftröhren, durch die die Teilchen vom abbremsenden Anteil des Wechselfeldes abgeschirmt werden, wurde 1924 von Ising [Isi24] vorgeschlagen und 1928 von Widerøe [Wid28] erfolgreich demonstriert. Im Beschleuniger von Widerøe (siehe Abbildung 2.4) werden die metallischen Driftröhren an einer hochfrequenten Wechselspannungsquelle angeschlossen, bei der je zwei benachbarte Driftröhren eine andere Polarität aufweisen. Wie beim Plattenkondensator bildet sich zwischen je zwei Driftröhren ein elektrisches Feld aus, das zur Beschleunigung der Teilchen verwendet werden kann. Im Inneren der Driftröhre existiert aufgrund ihrer zylindrischen Geometrie kein elektrisches Feld. Da bei zwei benachbarten Beschleunigungsstrecken der elektrische Feldvektor entgegengesetzt ist, kann nur jede zweite Beschleunigungsstrecke zur Beschleunigung von Teilchen verwendet werden. Durchläuft das Teilchen die Driftröhre, wird die Polarität der Spannung umgedreht, wodurch das Teilchen beim Austritt aus der Driftröhre wieder eine Beschleunigung durch das Feld erfährt. Für nicht relativistische Teilchen nimmt die Teilchengeschwindigkeit durch die Beschleunigung von Driftröhre zu Driftröhre zu und somit muss bei gleichbleibender Frequenz f die Periodenlängen L_i zwischen den Driftröhren zunehmen. Folglich gilt für die Synchronisierungsbedingung zwischen der Teilchengeschwindigkeit v_i und der Periodenlänge L_i bei fester Frequenz f :

$$L_i := \frac{v_i}{2f} \quad (2.20)$$

Diese Synchronisierungsbedingung ist als Widerøe'sche Bedingung bekannt. Beschleuniger, die die Widerøe'sche Bedingung erfüllen, laufen in der sogenannten π -Mode und werden als Widerøe-Struktur bezeichnet. Eine andere Möglichkeit der Synchronisierung zwischen der Teilchengeschwindigkeit und der Frequenz bieten Alvarez-Strukturen (siehe Abbildung 2.5). 1946 schlug Alvarez [Alv46] vor, die Driftröhren in eine Kavität einzubauen und die Resonanzfrequenz durch ein externes Hochfrequenzfeld einzukoppeln¹. Die Feldverteilung im Alvarez-Beschleuniger entspricht in etwa der TM_{010} -Schwingungsmode im leeren Zylinderresonator mit einer stärkeren transversalen elektrischen Feldkomponente im radialen Zentrum, die durch den Einbau der Driftröhren entsteht. Wie bei den Widerøe-Strukturen wird der abbremsende Anteil des Wechselfeldes durch die Driftröhren abgeschirmt. Die

¹ Zwei Jahre später erfolgte die Realisierung des Konzeptes in Berkeley.

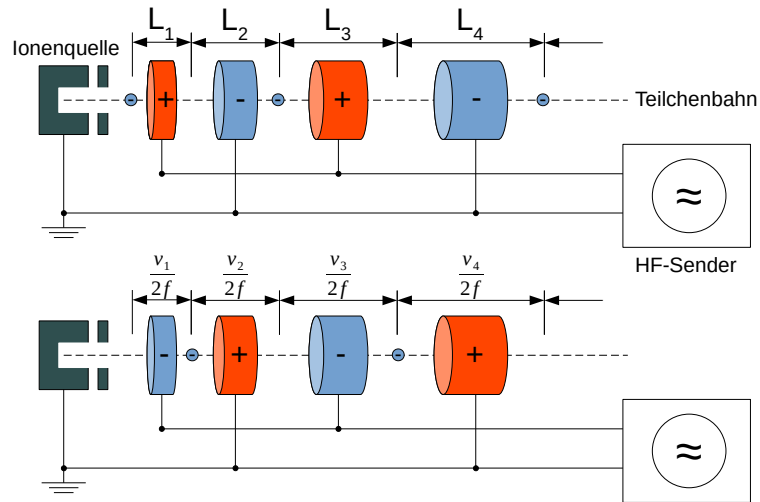


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung einer Widerøe-Struktur zum Zeitpunkt t (oben) und einer halben Periodenlänge in der Zukunft (unten).

beschleunigten Teilchen, die sich zum Zeitpunkt t in der Mitte der Beschleunigungsstrecke befinden und eine Beschleunigung widerfahren, befinden sich eine halbe Periode später in der Mitte der Driftröhren, in der kein Feld vorhanden ist. In jeder Beschleunigungsstrecke sind die elektrischen Feldvektoren gleichgerichtet, weswegen in allen Spalten Teilchen beschleunigt werden können. Es gilt daher die folgende Synchronisierungsbedingung zwischen der Teilchengeschwindigkeit v_i und der Periodenlänge L_i bei konstanter Frequenz f :

$$L_i := \frac{v_i}{f} \quad (2.21)$$

Diese Synchronisierungsbedingung ist als Alvarez'sche Bedingung bekannt und entspricht der sogenannten 2π -Mode.

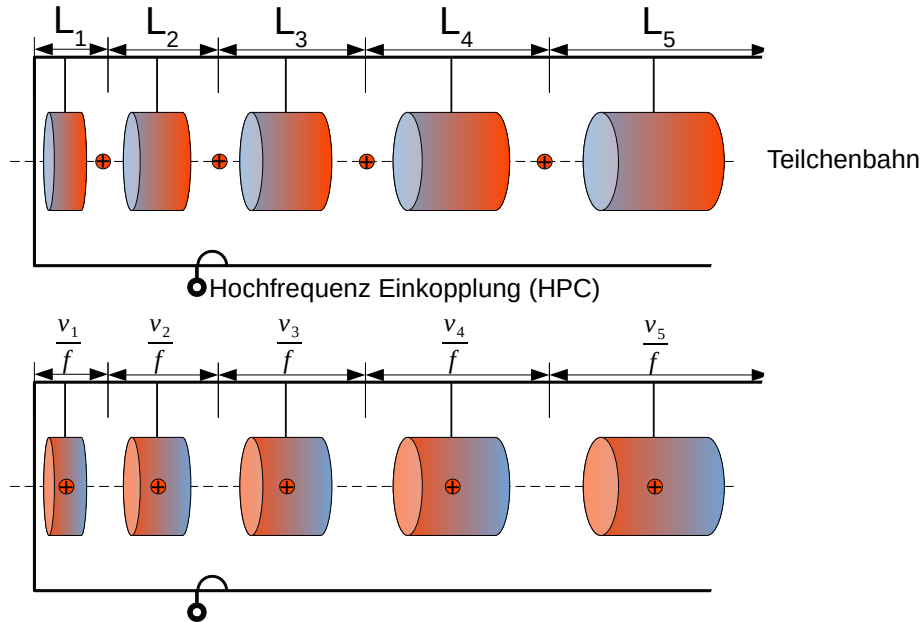


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung einer Alvarez-Struktur zum Zeitpunkt t (oben) und einer halben Periodenlänge in der Zukunft (unten).

Die in dieser Arbeit betrachteten CH-Kavitäten bilden eine Mischform der beiden obengenannten Konzepte. Wie in der Alvarez-Struktur befinden sich die Driftröhren im Inneren einer abgeschlossenen zylindersymmetrischen Kavität, deren Hochfrequenzfelder durch ein externes Hochfrequenzfeld eingekoppelt wird. Die CH-Kavität arbeitet wie die Widerøe-Struktur in der sogenannten π -Mode, bei der der elektrische Feldvektor in zwei benachbarten Beschleunigungsstrecken entgegengerichtet ist.

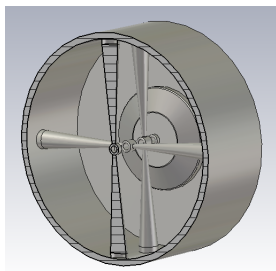


Abb. 2.6: Querschnitt einer CH-Struktur mit drei Driftröhren.

Charakteristisch für die CH-Kavitäten (siehe Abbildung 2.6) ist, dass die Driftröhren durch zwei gegenüberliegende Stützen mit den Innenwänden der Kavität verbunden sind. Die Stützen zweier benachbarter Driftröhren sind um jeweils 90° zueinander angeordnet. Die zugrunde liegende Feldverteilung der leeren Kavität entspricht der TE_{21p} -Schwingungsmode (siehe Abbildung 2.7). Durch die Einbauten rotiert das Magnetfeld um die Stützen; die Intensität des Magnetfeldes nimmt zur Stützenmitte zu. Dabei rotieren die Magnetfelder der sich gegenüberliegenden Stützen gegenläufig. Die daraus resultierenden elektrischen Ströme laden dabei je zwei benachbarte Driftröhren mit entgegengesetzter Ladung auf; dies erzeugt

ein stark fokussiertes longitudinales elektrisches Feld zwischen den Driftröhren (siehe Abbildung 2.8). Des Weiteren verursachen die Einbauten eine Erhöhung der Kapazität im Resonator, was zur Reduzierung der Betriebsfrequenz¹ führt.

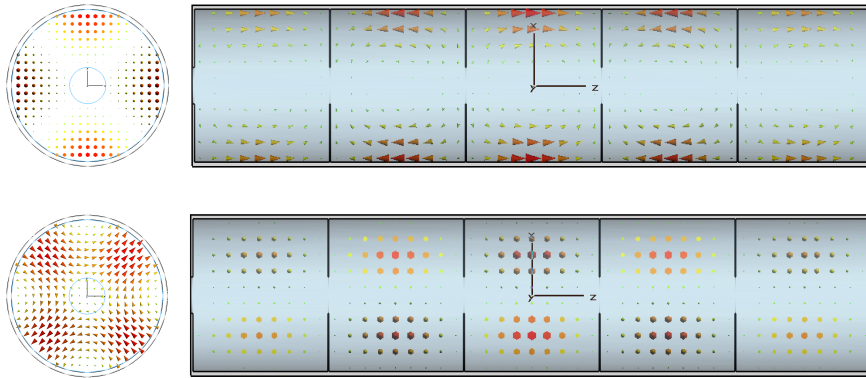


Abbildung 2.7: Feldverteilung der TE_{215} -Mode in einen leeren Hohlraumresonator. Jeweils links in der xy -Ebene und rechts in der xz -Ebene. Oben: Magnetische Feldkomponente. Unten: Elektrische Feldkomponente.

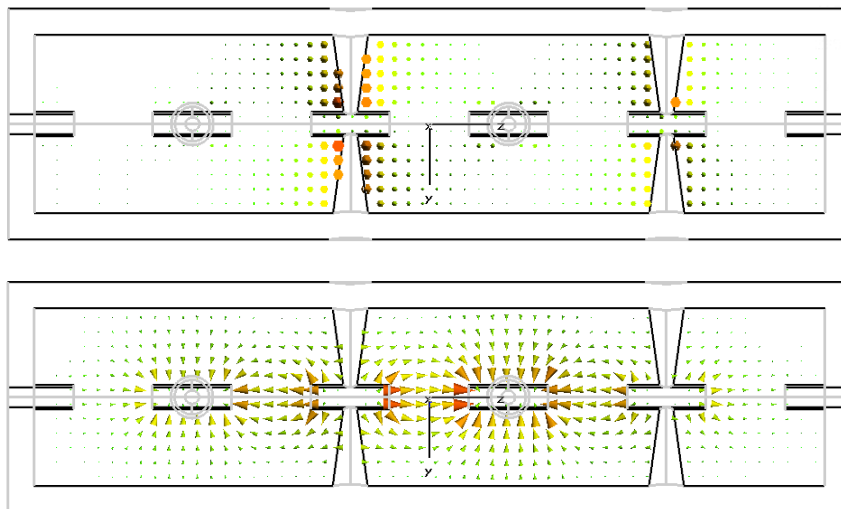


Abbildung 2.8: Feldverteilung in einer CH-Kavität. Oben: Magnetische Feldkomponente. Unten: Elektrische Feldkomponente.

¹ Für den Zusammenhang zwischen der Induktivität L , der Kapazität C und der Betriebsfrequenz f im Resonanzfall gilt: $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

2.4 Hochfrequenzparameter für Resonatoren

Die Anforderungen an Hochfrequenzresonatoren in der Beschleunigerphysik sind so vielfältig wie ihre Einsatzgebiete. Um die verschiedenen Kavitäten miteinander vergleichen zu können, werden im Folgenden die wichtigsten Hochfrequenzparameter vorgestellt. Grundsätzlich können die Parameter in zwei Kategorien unterteilt werden. Zur erste Gruppe gehören unter anderem die gespeicherte Energie W und die Beschleunigungsspannung U_a , die durch die Geometrie der Kavität festgelegt werden. In die zweite Gruppe fallen die Güte Q_0 , die Verlustleistung P_c und die Shuntimpedanz Z_a . Die Parameter dieser Gruppe sind von der Betriebsart und den Materialeigenschaften abhängig [Pod09, Kapitel 3].

2.4.1 Gespeicherte Energie

Die gespeicherte Energie im Resonator kann über die Volumenintegration der Energiedichte¹ der Felder bestimmt werden. Da die beiden Felder im zeitlichen Mittel die identische Energie in sich tragen, genügt es, entweder das elektrische Feld \vec{E} oder das magnetische Feld \vec{H} über das Resonatorvolumen V zu integrieren.

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 d\tau = \frac{1}{2}\mu_0 \int_V |\vec{H}|^2 d\tau \quad (2.22)$$

2.4.2 Beschleunigungsspannung

Der Energiegewinn ΔW , den ein geladenes Teilchen mit der Ladung q beim Durchlaufen der Strecke g des longitudinalen elektrischen Feldes $E_z(r, \phi, z|t)$ erfährt, ist wegen der zeitharmonischen Abhängigkeit des Feldes von seiner Geschwindigkeit $v = \beta c$ und der Eintrittsphase ϑ abhängig. Betrachtet man den vereinfachten Fall, in dem das elektrische Peakfeld $\tilde{E}_z(z|t) = \tilde{E}_z(z)\cos(\omega t + \vartheta)$ für die Teilchenbahn keine radiale oder azimutale Abhängigkeit aufweist, findet man

$$\Delta W = q \int_{-g/2}^{g/2} \tilde{E}_z(z)\cos(\omega t(z) + \vartheta) dz. \quad (2.23)$$

Betrachtet man zusätzlich eine rechteckige longitudinale Feldverteilung, kann die Zeitabhängigkeit $t(z) = \frac{z}{v} = \frac{z}{\beta c}$ mittels Fouriertransformation umgeschrieben werden². Die Integration führt zu:

$$\Delta W = q\tilde{E}_z(z)g\cos(\vartheta) \left[\frac{\sin(\omega g)}{2\beta c} \right] \quad (2.24)$$

dabei wird der Ausdruck in der eckigen Klammer als Transit Time Factor $T(\eta) = \frac{\sin(\eta)}{\eta}$ mit $\eta := \frac{\omega g}{2\beta c}$ bezeichnet. Betrachtet man beispielsweise ein Teilchen mit einer Geschwindigkeit von $0,05 c$, das sich zwischen zwei Driftröhren ($g = 0,043 \text{ m}$) eines Resonators mit einer

¹ $u_{em} = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2)$.

² Ein solcher Fall ergibt sich beispielsweise für ein Teilchen das zentral durch eine Kavität in der TM_{010} -Mode fliegt.

Frequenz von 175 MHz bewegt, erhält man einen Transit Time Factor von $T(0,05) \approx 0,6341$, wohingegen ein Teilchen mit relativistischer Geschwindigkeit einen Faktor von $T(1) \approx 0,9989$ hätte. Für reale Feldverteilungen und Teilchenpakete muss der TT-Faktor numerisch bestimmt werden. Er kann Werte aus dem Intervall $[-1,1]$ ¹ annehmen und ist umso näher an der 1, je höher die Teilchengeschwindigkeit oder je niedriger die Betriebsfrequenz der Lücke ist.

2.4.3 Verlustleistung

Die im Resonator befindlichen Magnetfelder induzieren an dessen Oberfläche Ströme, die zu einer Verlustleistung führen. Um die gesamte dissipierte Leistung P_c im Resonator zu bestimmen, muss man über alle Resonatorinnenoberflächen integrieren. Daher gilt für die Verlustleistung:

$$P_c = \frac{R_S}{2} \int_{\partial V} |H|^2 dS \quad (2.25)$$

Wobei $R_S = \frac{1}{\sigma\delta}$ der Oberflächenwiderstand ist. Dieser ist reziprok von der Leitfähigkeit σ und der Schichtdicke δ , bei der das Feld auf seinen e-ten Teil abfällt, abhängig.

2.4.4 Güte

Beschleunigungsresonatoren werden in bestimmten Moden betrieben für deren Betrieb von außen eingekoppelte Hochfrequenzfelder einer bestimmten Resonanzfrequenz erforderlich sind. Durch das externe Feld werden elektrische Ströme an den Resonatoroberflächen induziert, die ihrerseits zu hochfrequenten elektromagnetische Wechselfeldern führen. Dabei treten in jeder Periode Energieverluste auf. Die Güte² Q_0 eines Resonators ist definiert als die im Resonator gespeicherte Energie W geteilt durch den Energieverlust P_c pro Kreisschwingungsperiode ω .

$$Q_0 = \frac{W}{P_c/\omega} = \omega \frac{W}{P_c} \quad (2.26)$$

Betrachtet man einen Resonator, dessen externe Einkopplung und somit seine Energiezufuhr unterbrochen wird, nimmt das elektromagnetische Feld und somit die gespeicherte Energie (siehe Gleichung (2.22) und Gleichung (2.25)) aufgrund von Oberflächenverlusten exponentiell ab. Somit gilt:

$$\begin{aligned} |E(t)| &= \tilde{E}e^{-\frac{t}{\tau}}; & |H(t)| &= \tilde{H}e^{-\frac{t}{\tau}} & \text{und somit } W(t) &= \tilde{W}e^{-\frac{2t}{\tau}} & (2.27) \\ \frac{\partial|E(t)|}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau}|E(t)|; & \frac{\partial|H(t)|}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau}|H(t)| & \text{und } \frac{\partial W(t)}{\partial t} &= -\frac{2}{\tau}W(t) \end{aligned}$$

1 Negative Werte sind für die Energierückgewinnung vom Teilchenbunch zum Feld interessant.

2 Gemeint ist hier und im Weiteren die unbelastete Güte, bei der nur die Verluste berücksichtigt werden, die an der Resonatoroberfläche hervorgerufen werden.

Nach Ableitung von Gleichung (2.27) erhält man die Zeitkonstanten $\tau := \frac{2W}{\dot{W}} = \frac{2W}{P_c} = \frac{2Q_0}{\omega}$. Zum einen beschreibt τ die Abfallzeit bei der die gespeicherte Energie auf den e-ten Teil ihres Anfangswertes abgesunken ist, zum anderen ist τ auch als Cavity Filling Time bekannt, da die Zeitkonstante ebenso für den Anstieg des elektromagnetischen Felds im Resonator gilt. Die Güte kann experimentell bestimmt werden, indem man die eingekoppelte Frequenz in der Nähe der Resonanzfrequenz variiert und das elektrische oder magnetische Feld misst. Dabei ist $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ die Breite der Resonanzkurve bei der das Feld um 3 dB von seinem maximalen Wert abgesunken ist. Bei der Variation der Frequenz entsteht in der Nähe der Resonanzfrequenz die charakteristische Resonanzkurve (siehe Abbildung 2.9), die durch eine Lorentzkurve beschrieben wird. Für die Resonanzkurve des Feldes gilt:

$$|A(\omega)| = \frac{|A_0|}{\sqrt{1 + Q_0^2 (\Delta\omega/\omega_0)^2}} \quad (2.28)$$

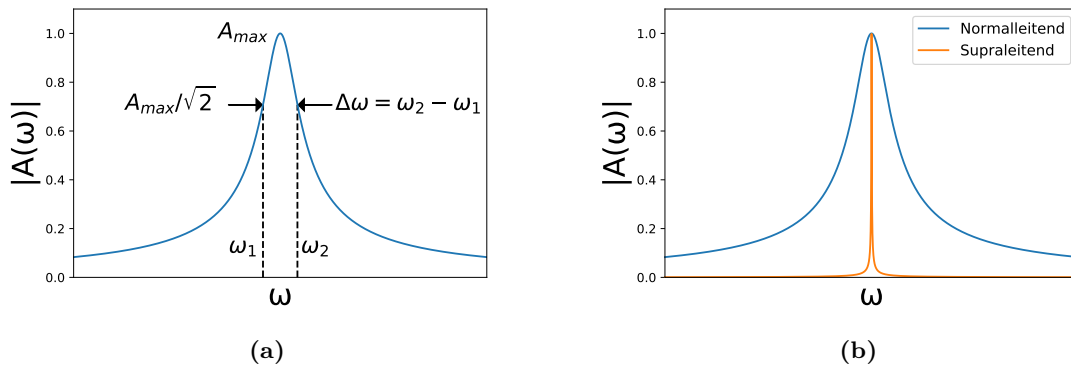


Abbildung 2.9: (a) Charakteristische Form der Resonanzkurve um ihre Eigenfrequenz ω . (b) Vergleich der Resonanzkurven von normalleitenden und supraleitenden Kavitäten.

Für die Güte gilt:

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} \quad (2.29)$$

Da die Güte reziprok vom Oberflächenwiderstand R_S abhängt und dieser bei Supraleitung im Hochfrequenzfall um 5 Größenordnungen kleiner ist als im normalleitenden Fall, sind typische Güten von supraleitenden Kavitäten um 5 Größenordnungen größer als die von normalleitenden Kavitäten. Dies führt im supraleitenden Fall zu extrem schmalen Resonanzkurven wie in Abbildung 2.9 zu sehen ist. Dadurch ist die Einkopplung und der stabile Betrieb bei supraleitenden Resonatoren schwerer zu handhaben.

2.4.5 Shuntimpedanz

Um zu beurteilen, wie effizient die eingekoppelte Hochfrequenzleistung des Resonators in Beschleunigungsspannung umgewandelt wird, wird die Impedanz R_a verwendet. Der Resonator kann über das Ersatzschaltbild des Parallelschwingkreises¹ beschrieben werden. Die Impedanz Z des Schwingkreises beträgt bei gegebener Kapazität C , Induktivität L und Ohmschen Widerstand R mit der Betriebsfrequenz ω :

$$|Z(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} = \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} \quad (2.30)$$

Dabei ist die Ähnlichkeit von Gleichung (2.30) zur Resonanzkurve der Güte (2.28) offensichtlich. Die Resonanzfrequenz des Parallelschwingkreises kann über die Thomsonsche Schwingungsgleichung bestimmt werden; es gilt $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Im Resonanzfall entspricht die Impedanz dem Ohmschen Widerstand. Ähnlich wie bei der Bestimmung der Güte, wird bei der Bestimmung der Impedanz die Frequenz ω um die Resonanzfrequenz ω_0 so lange variiert, bis die gemessene Feldamplitude — beispielsweise die Stromstärke bei festgehaltener Spannung — um 3 dB abfällt. Wendet man das Ohmsche Gesetz ($U = RI$) auf Gleichung (2.30) an, erhält man:

$$|Z(\omega)|I = \frac{U}{\sqrt{1 + R^2 (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} \quad (2.31)$$

Für die Leistung eines Schwingkreises gilt $P = RI^2 = U^2/R$. Da im Resonanzfall die Impedanz Z und der Widerstand R gleich sind folgt:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{U^2}{Z} \Leftrightarrow Z = \frac{U^2}{P} \quad (2.32)$$

Daher entspricht die Definition der Impedanz R_a im Resonator der Definition der Impedanz Z (2.32) in seinem Ersatzschaltbild:

$$R_a = \frac{U_0^2}{P} \quad (2.33)$$

Eine Verdopplung der Impedanz R_a bei gleichbleibender Leistung P liefert also eine viermal so große Beschleunigungsspannung U_0 . Bei der Shuntimpedanz Z_a handelt es sich um die längennormierte Impedanz.

$$Z_a = \frac{R_a}{l} = \frac{U_0^2}{Pl} \quad (2.34)$$

Sie wird verwendet, um Resonatoren unterschiedlicher Länge zu vergleichen.

¹ Anders als der Resonator besitzen Parallelschwingkreise nur eine Resonanzfrequenz.

KAPITEL 3

Modellrechnung

Die Maxwell-Gleichungen können im Zeitraum oder im Frequenzraum gelöst werden. Im ersten Fall spricht man von Problemen der Zeitdomäne, hierbei werden die Anfangsbedingungen in der Zeit entwickelt. Im anderen Fall spricht man von Problemen der Frequenzdomäne, hierbei wird von einer zeitharmonischen Feldabhängigkeit (i.A. $e^{i\omega t}$) ausgegangen. In beiden Domänen können Quellprobleme oder Feldprobleme gelöst werden. Für die Quellprobleme sind die Maxwellgleichungen in der Integralform am geeignetsten, für Feldprobleme in ihrer Differentialform. Da die Differential- und Integralgleichungen unabhängig für beliebig geformte Berechnungsgebiete gelten, kann die Lösung dieser Gleichungen analytisch nur in wenigen Fällen erfolgen. Die Differential- und Integraloperatoren sind in der Regel nur auf kanonischen Koordinatensystemen¹ definiert. In den anderen Fällen müssen die Lösungen der Gleichungen numerisch approximiert werden. Numerische Lösungen sind im Allgemeinen problem- und geometrieunabhängig und können somit zur Näherung von Problemen herangezogen werden, deren analytisches Lösen aufgrund von Randwertbedingungen, Materialparametern oder der Komplexität der Geometrie unmöglich oder unpraktikabel ist. Daher ist das Hauptziel der Numerik effiziente numerische Näherungen für die Gleichungen zu liefern, für die keine geschlossene analytische Lösungen existieren.

Durch die Entwicklung des Computers etablierten sich CAD²-Gestützte Verfahren in der Numerik. Ein Teilgebiet des CADs stellt die CEM³ da, bei der numerische Näherungen der Maxwellgleichungen im Vordergrund stehen. Alle numerischen Verfahren führen eine Diskretisierung des Funktionsraumes aus. Diese führt in der Regel zu einer Reduzierung der Freiheitsgrade des betrachteten Systems. Die Lösung eines unendlichdimensionalen Funktionsraumes wird in einen endlichdimensionalen Funktionsraum abgebildet. Die Hauptidee ist es, ein unlösbares kontinuierliches Problem in kleine Teile zu zerlegen; die Lösung der kleinen Teile zu bestimmen und dann die stückweisen Lösungen zu kombinieren, um eine globale Lösung zu erhalten. Die meisten numerischen Verfahren setzen für die Kombination ihrer Lösungen ein lineares System aus algebraischen Gleichungen ein, um die Lösung des kontinuierlichen Problems zu bestimmen. Somit werden letztendlich die Integral- und Differentialgleichungen durch Systeme von algebraischen Gleichungen approximiert.

In dieser Arbeit soll die Betriebsfrequenz von CH-Rebunchern berechnet werden. Dieses Eigenwertproblem kann mithilfe der Wellengleichung 2.10 gelöst werden. Diese wird auf-

1 Als kanonische Koordinatensysteme gelten im dreidimensionalen Raum die kartesischen, sphärischen und zylindrischen Koordinatensysteme.

2 CAD (engl. Computer Aided Design), computergestützte Konstruktionen.

3 CEM (engl. Computational ElectroMagnetics), Computergestützte Elektromagnetik.

grund der Komplexität der CH-Kavitäten numerisch gelöst. Des Weiteren wird mithilfe der berechneten Daten ein semianalytisches Modell (SAM) zur einfacheren Bestimmung der Betriebsfrequenzen erarbeitet.

3.1 Finite Elemente Methode

Bei der Finiten Elemente Methode (FEM) handelt es sich um ein numerisches Verfahren bei dem ein Randwertproblem, das durch eine partielle Differentialgleichung gegeben ist, in Systeme von algebraischen Gleichungen überführt wird. Mit ihrer Hilfe wird anschließend eine approximative Lösung des Randwertproblems bestimmt. Das Randwertproblem hat die folgende Allgemeinform:

$$\begin{array}{llll}
 & Lu = f & \text{in } \Omega & (3.1) \\
 \text{Dirichlet-Randwert:} & u = u_0 & \text{auf } \Gamma_D & \\
 \text{Neumann-Randwert:} & \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \Gamma_N & \\
 \text{Robin-Randwert:} & \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g & \text{auf } \Gamma_R & \\
 & \partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \dot{\cup} \Gamma_N \dot{\cup} \Gamma_R & &
 \end{array}$$

Dabei ist Ω das Berechnungsgebiet, Γ der Rand des eingeschlossenen Berechnungsgebiets, L der Differentialoperator, f der Quellterm, α eine Konstante und u die gesuchte unbekanntete Funktion. Der Rand des Berechnungsgebiets wird üblicherweise, je nach Charakteristika seiner Randbedingungen, in die disjunkten Dirichlet-, Neumann- und Robin-Ränder unterteilt. Bei der FEM wird das kontinuierliche Berechnungsgebiet Ω der Differentialgleichung in diskretisierte disjunkte Teilgebiete $\hat{\Omega} = \dot{\cup} e_i$ aufgeteilt. Für jedes der Teilgebiete wird eine lokale Lösung gesucht. Anschließend werden die lokalen Lösungen zu einer globalen Lösung kombiniert, die dann die Näherungslösung der Differentialgleichung darstellt. Die Teilgebiete werden als finite Elemente bezeichnet. Sie bilden das Verhalten der Differentialgleichung über bekannte Ansatzfunktionen nach. Bei den Ansatzfunktionen handelt es sich in der Regel um Polynome niedriger Ordnung, daher bildet diese numerische Lösung nur eine stückweise polynomiale Lösung, die nicht in der Lage ist die Differentialgleichung unter der Berücksichtigung ihren Randbedingungen punktweise exakt zu lösen¹. Daher wird die Anforderung der Lösung des Randwertproblems gelockert: Man formuliert die Differentialgleichung des Randwertproblems in ihre schwache Form um und sucht nach ihrer schwachen Lösung. Die zwei bekanntesten Ansätze, mit denen die Differentialgleichung und ihre Randbedingungen umformuliert werden können, sind die Rayleigh-Ritz-Methode und die Galerkin-Methode. Bei der Galerkin-Methode wird die gesuchte Funktion u in Gleichung (3.1) durch ihre approximative Lösung \hat{u} ersetzt und in jedem Element ausgewertet. Anders als bei der exakten Lösung ($Lu - f = 0$), verursacht die Substitution im Allgemeinen einen nicht verschwindenden Fehler, das sogenannte Residuum ($r = Lu - f \neq 0$). Die beste

¹ Die approximative Lösung des Randwertproblems wäre wegen der Unstetigkeit weder stabil noch eindeutig.

Approximation der gesuchten Funktion \hat{u} entsteht, wenn das Residuum in allen Elementen seinen betragsmäßig kleinsten Wert annimmt. Bei der Rayleigh-Ritz-Methode wird das Randwertproblem in die Form eines Variationsproblems gebracht, das durch ein Funktional F beschrieben wird. Das Minimum des Funktionals $\partial F \stackrel{!}{=} 0$ entspricht der approximativen Lösung der Differentialgleichung. Auf die funktionale Formulierung der Eigenwertgleichung wird im Kapitel zum [Modellproblem](#) eingegangen.

Eine Hauptstärke der FEM liegt darin, dass sie sich auf komplexe Geometrien anwenden lässt. Dies geschieht in der Regel durch ein unstrukturiertes Punktgitter, welches aus den abgeschlossenen Konturen¹ eines Körpers gebildet wird. Im dreidimensionalen Fall werden aus je zwei Punkten des Punktgitters Kanten geschlossen, aus der Kombination der Kanten werden Flächenelemente generiert (z.B. aus je 3 Kanten ein Dreieck) und letztendlich wird ein Volumenelement durch die Schließung der Flächenelemente erzeugt (z.B. aus je 4 Dreiecksflächen ein Tetraeder).

Um eine Differentialgleichung über die Methode der Finiten Elemente zu lösen, sind die folgenden Schritte notwendig.

Diskretisierung des Berechnungsgebiets

Die kontinuierliche Geometrie wird in eine diskrete Geometrie umgewandelt. Aus der diskreten Geometrie wird das FEM-Netz mit den jeweiligen diskreten Lösungsräumen gebildet. Die Randbedingungen, Materialeigenschaften und Quellen werden in die Netzstruktur eingesetzt.

PDE in ihre schwache Form umwandeln

Die Basisfunktionen der Elemente werden gesetzt. Das Randwertproblem wird in seine schwachen Form gebracht.

Assembling der unkannten Funktion in die Finiten Elemente

Die unbekannte Funktion wird in jedes Element als Summe von Basisfunktionen mit unbekanntem Koeffizienten gesetzt. Die Startwerte der Koeffizienten werden zufällig uniform aus dem Intervall $[0,1)$ ausgewählt.

Formulierung der Elementmatrizen

Die Elementmatrix ist für die lokalen Wechselwirkungen der benachbarten Elemente zuständig. Je nachdem, um was für einen Elementtyp es sich handelt, (beispielsweise Nodale- oder Kantenelemente) ist die Matrix unterschiedlich. Die Elementmatrizen bilden später die lokalen approximativen Lösungen.

Einsetzen der Randwerte

Da die Werte der unbekanntem Funktion u am Rand bekannt sind, werden die Werte der Randwertelemente entsprechend ihres Randwertes gesetzt und in ihre Elementmatrix umgeschrieben. In der Regel wechselwirken die Randwertelemente anders als die inneren Elemente.

¹ Im zweidimensionalen Fall bildet beispielsweise die Fläche den Körper ab und die Umrandung der Fläche seine Kontur.

Lösen des algebraischen Gleichungssystems

Um die approximativen Werte der unbekannteten Funktion \hat{u} an den Elementen zu erhalten, muss das Gleichungssystem, das die globalen Lösungen enthält, gelöst werden. Dieses befindet sich in Form einer dünnbesetzten Matrix.

Nachbearbeitung

Es werden weitere Informationen des Systems aus der approximativen Lösung \hat{u} gewonnen.

Bevor die CH-Beschleuniger durch die FEM modelliert werden, werden die einzelnen Schritte der Finiten Elemente Methode anhand eines Modellproblems eingeführt.

3.1.1 Modellproblem

Bei dem Modellproblem¹ handelt es sich um eine Kavität mit komplexer Geometrie, deren Außenwände aus einem isotropen dispersionsfreien perfektleitenden Material besteht (PEC). Des Weiteren wird angenommen, dass im Inneren der Kavität ein ideales Vakuum herrscht, wodurch im Inneren keine Quellen existieren. Wie für die später untersuchten Beschleuniger, sollen für die Kavität die Eigenfrequenzen der Eigenmoden bestimmt werden.

Um die Feldgleichung der Eigenmoden zu erhalten, müssen die Maxwellgleichungen (siehe Gleichung (2.8)) unter Berücksichtigung der Randbedingungen erfüllt werden. Die gekoppelten partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung können mithilfe der Rotation in ihre ungekoppelte Form gebracht werden.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.2a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (3.2b)$$

Da es sich bei den Eigenmoden um zeitharmonische Feldgleichungen ($e^{i\omega t}$) handelt, die mit ihrer Eigenfrequenz ω schwingen, erhält man für (3.2):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = k^2 \vec{E} \quad (3.3a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\omega^2}{c^2} \vec{H} = k^2 \vec{H} \quad (3.3b)$$

Für die nicht triviale Lösung der Wellengleichungen ($\vec{E} = 0$ und $\vec{H} = 0$) entspricht das Quadrat der Wellenzahl k^2 dem Eigenwert, wobei \vec{E} und \vec{H} ihre korrespondierenden Eigenvektoren bilden. Für die Lösung des Eigenwertproblems wird die Selbstadjungation des $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$ -Operators verwendet. Betrachtet man zwei magnetische Felder \vec{H}_1 und \vec{H}_2 ,

¹ Das Skript zur Rechnung des Modellproblems ist im ipython-Notebook [Modellrechnung.ipynb](#) zu finden.

die die Randbedingungen erfüllen, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \vec{H}_1 \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}_2) &= \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{H}_1) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}_2) \\ &= \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}_1) \cdot \vec{H}_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Erfüllt ein magnetisches Feld \vec{H}_1 die Differentialgleichung, so auch seine komplexe Konjugation $\vec{H}_2 = \overline{\vec{H}_1}$. Multipliziert man in Gleichung (3.3b) das magnetische Feld mit seinem komplex konjugierte Feld und integriert über das Berechnungsgebiet Ω erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \overline{\vec{H}} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H}) &= \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \times \overline{\vec{H}}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \int_{\Omega} |\vec{\nabla} \times \vec{H}|^2 d\Omega \\ &= k^2 \int_{\Omega} \overline{\vec{H}} \cdot \vec{H} d\Omega = k^2 \int_{\Omega} |H|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (3.5)$$

Analog erhält man für das elektrische Feld:

$$\int_{\Omega} |\vec{\nabla} \times \vec{E}|^2 d\Omega = k^2 \int_{\Omega} |E|^2 d\Omega \quad (3.6)$$

Der Eigenwert wird dann durch die Auswertung der folgenden Integrale bestimmt:

$$k^2 = \frac{\int_{\Omega} |\vec{\nabla} \times \vec{H}|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} |H|^2 d\Omega} = \frac{\int_{\Omega} |\vec{\nabla} \times \vec{E}|^2 d\Omega}{\int_{\Omega} |E|^2 d\Omega} \quad (3.7)$$

Die Eigenwerte sind für verlustfreie Innenwände wie PEC reell. Im Fall von endlicher elektrischer Leitfähigkeit der Materialien, kommt es aufgrund der Dissipation der Felder zu einem zusätzlichen Dämpfungsterm in den Feldgleichungen. Der Eigenwert enthält einen komplexen Anteil, der den Verlusten entspricht. Für Materialien mit einer guten Leitfähigkeit und endlicher Zeit sind die Eigenwerte in beiden Fällen sehr nahe beieinander. Da das elektrische und magnetische Feld ungekoppelt sind, genügt es, eines der beiden Integrale der Eigenwertgleichung (siehe Gleichung (3.7)) für das elektrische oder magnetische Feld zu berechnen, um den Eigenwert zu bestimmen. Um eine vollständige Auflösung des elektromagnetischen Feldes zu erhalten müssen sowohl das Integral für das elektrische wie das magnetische Feld gelöst werden. Zur visuellen Vereinfachung wird das Modell-Problem auf seinen zweidimensionalen Sonderfall reduziert (siehe Abbildung 3.1). Man ist nur an den TE_{mn0} und TM_{mn0} -Moden in z-Ausbreitungsrichtung interessiert.

Diskretisierung des Raumes

Wie bei allen Methoden der CAD muss für die Geometrie des kontinuierlichen Berechnungsgebietes Ω ein diskretes Berechnungsgebiet $\hat{\Omega}$ konstruiert werden. Für die zweidimensionale xy-Schnittfläche der Kavität werden die Umrandungspunkte (siehe Abbildung 3.2 a)) definiert. Aus den Umrandungspunkten werden die Begrenzungslinien (siehe Abbildung 3.2 b)) gebildet. Aus der Kombination der Begrenzungslinien wird die abgeschlossene Fläche

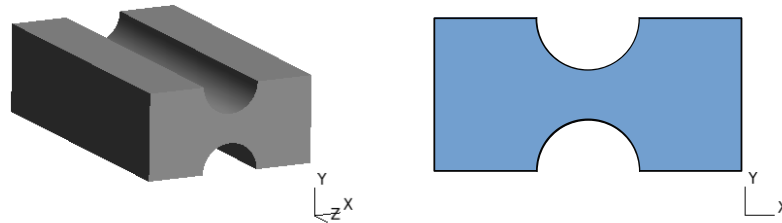


Abbildung 3.1: Darstellung der Kavität und ihrer xy-Schnittebene.

(siehe Abbildung 3.2 c)) erzeugt, die das kontinuierliche Berechnungsgebiet¹ bildet. Mithilfe des Berechnungsgebiets $\hat{\Omega}$ wird ein unstrukturiertes Punktgitter (siehe Abbildung 3.2 d)) erzeugt, aus dessen Basis die eindimensionalen (siehe Abbildung 3.2 e)) und zweidimensionalen (siehe Abbildung 3.2 f)) Finiten Elemente generiert werden. Bei den Finiten Elementen handelt es sich um simple Teilgebiete, die sich nicht überdecken. Sie bilden die Grundlage des diskreten Funktionsraumes \hat{V} . Die Finiten Elemente approximieren polynomial (siehe Abbildung 3.2: g_1) linear, g_2) quadratisch, g_3) kubisch ...) die gesuchte Funktion u . Damit die Finiten Elemente auf einem unstrukturierten Punktgitter eine Approximation liefern können, muss jedes Element in seine Master-Element-Darstellung transformiert und anschließend in das unstrukturierte Punktgitter zurücktransformiert werden (siehe Abbildung 3.2 h)). Dabei kann die lokale Auswertung der Finiten Elemente in der Nodalen-, Kanten- oder Flächenbasis stattfinden (siehe Abbildung 3.2: i_1) Nodalbasis, i_2) Kantenbasis, i_3) Flächenbasis). Durch die Basis der Elemente wird der Funktionsraum definiert. Für die vektorielle Wellengleichung muss in der Kantenbasis gerechnet werden, was zum Nédélec-Funktionsraum² ($H(\text{curl})$) führt.

Variationsformulierung

Da die FEM die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung (3.2) nicht direkt approximieren kann, muss man die Gleichung in ihre schwache Form bringen. Für das Randwertproblem (Gleichung (3.1)) gilt $L := \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Da wir per Annahme keinen Quellterm haben ($f = 0$), handelt es sich um ein homogenes Problem. Die gesuchte Funktion \vec{u} wird durch das elektrische Feld \vec{E} oder das magnetische Feld \vec{H} repräsentiert. Die Differentialgleichung $Lu = 0$ wird über das Minimum seines Funktionals $F(\vec{u})$ unter der Berücksichtigung des Randwerts approximiert. Um das Funktional herzuleiten wird eine vektorielle Hilfsfunktion \vec{v} auf die Wellengleichung (Gleichung (3.3)) multipliziert und

¹ Eine Alternative zur Bildung von komplexen Geometrien bildet die Open CASCADE Technology, bei der das Berechnungsgebiet durch Mengenoperatoren von primitiven zwei- und dreidimensionalen Körpern gebildet wird.

² Würde man die Wellengleichung approximativ in der nodalen Elementbasis und ihrem entsprechenden Sobolev-Raum (H^1) lösen, würden neben den physikalischen Moden zusätzliche Schattenmoden auftreten. Die Schattenmoden lösen mathematisch zwar die partielle Differentialgleichung unter Berücksichtigung ihrer Randwerte; diese Lösungen sind jedoch unphysikalisch.

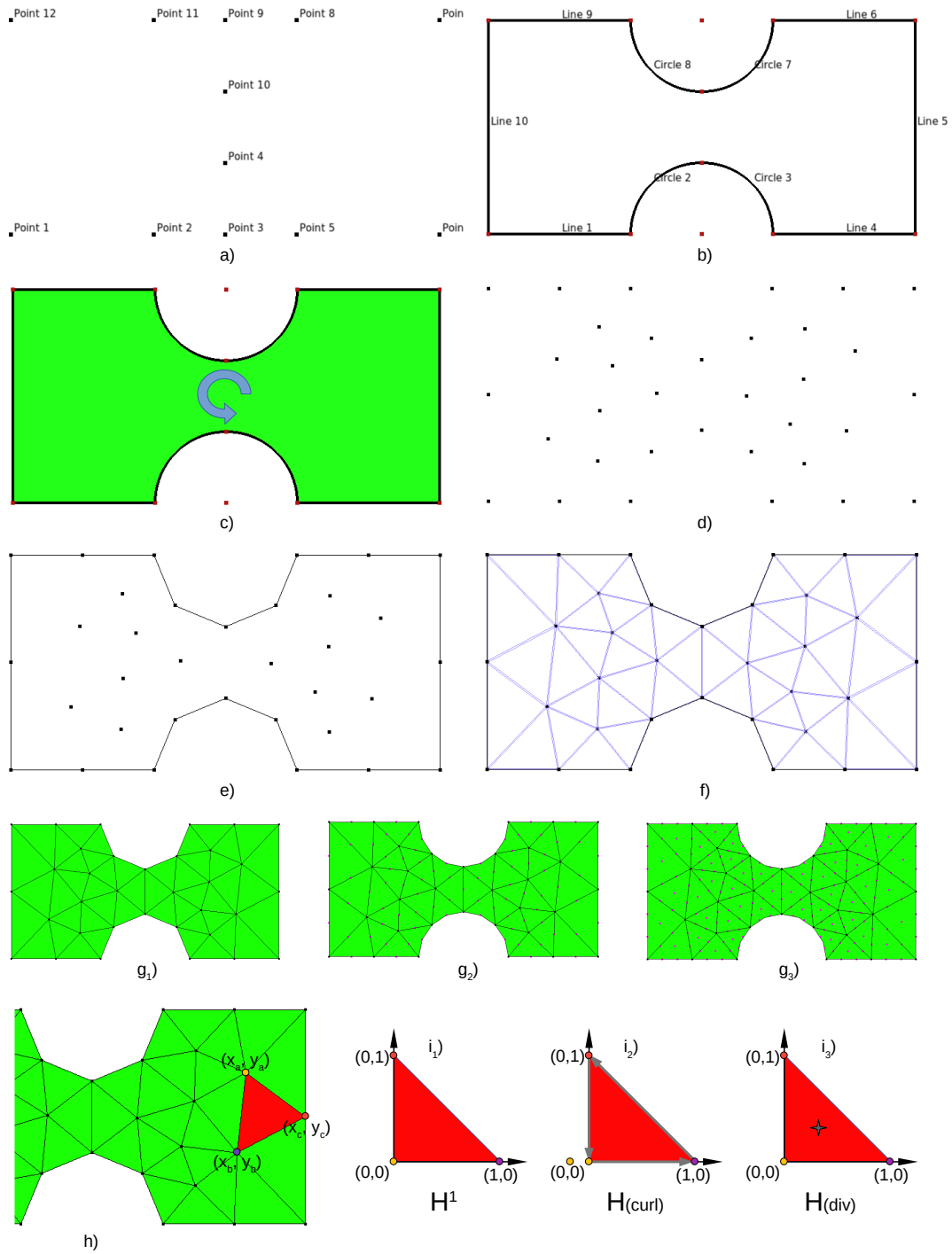


Abbildung 3.2: Darstellung der Diskretisierung des Raums und der Festlegung des Funktionsraums der Finiten Elemente.

anschließend über das Berechnungsgebiet Ω integriert.

$$\int_{\Omega} \vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) \right) d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

Auf den ersten Integrand wird nun die folgende Produktregel¹ angewendet

$$\vec{v} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{v} \right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right)$$

und man erhält:

$$\int_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{v} \right) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \right) d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0 \quad (3.9)$$

Der erste Integrand kann durch den gaußsche Integralsatz in ein Oberflächenintegral überführt werden und man erhält:

$$- \oint_{\Gamma} \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{v} \right) \cdot \hat{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \right) d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0 \quad (3.10)$$

Da die Randwerte über die Randwertbedingung gesetzt sind, trägt das Flächenintegral keinen Wert bei und die schwache Formulierung der partiellen Differentialgleichung des Randwertproblems lautet:

$$\int_{\Omega} \left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \right) d\Omega + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \right) d\Omega = 0 \quad (3.11)$$

Führt man die zeitliche Ableitung aus, erhält man:

$$\int_{\Omega} \left(\left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \right) d\Omega = k^2 \int_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \vec{u} \right) d\Omega \quad (3.12)$$

¹ Siehe Bucheinbandinnenseite [Gri13] Produktregeln Eintrag Nummer 6.

Wählt man für die Testfunktion \vec{v} und für die gesuchte Funktion \vec{u} . Anschließend bringt man die Gleichung auf eine Seite und erhält das gesuchte Funktional.

$$F(\vec{u}) = \int_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{u} \right) - k^2 \vec{u} \cdot \vec{u} d\Omega \quad (3.13)$$

Da das gesuchte Vektorfeld \vec{u} durch die Kantenbasis der Finiten Elemente bestimmt wird, stellen die Elemente tangentiale Approximationen entlang der Kanten dar.

Matrixdarstellung

Nun muss das Funktional F durch die Finiten Elemente approximiert werden. Die Querschnittsfläche Ω der Kavität wird durch M sich nicht überdeckende Dreiecke diskretisiert, wobei jedes Dreieck ein Finites Element darstellt. Jedes dieser M Elemente besitzt dabei eine Fläche A^e , mit $e \in (1, 2, \dots, M)$. Dabei wird die gesuchte Funktion \vec{u} in jedem Element lokal als gewichtete Summe der Basisfunktionen in der Kantenbasis beschrieben

$$\vec{u}^e = \sum_{i=1}^3 \vec{N}_i^e u_i^e \quad (3.14)$$

wobei \vec{N}_i^e die jeweilige Vektorbasisfunktion und u_i^e die Expansionskoeffizienten der Basis bezeichnen. Setzt man die elementweise Approximation (Gleichung (3.14)) in das Funktional (Gleichung (3.12)) erhält man:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^M \left((\vec{u}^e)^T \cdot \mathbf{S}^e \cdot (\vec{u}^e) - k^2 (\vec{u}^e)^T \cdot \mathbf{M}^e \cdot (\vec{u}^e) \right) \quad (3.15)$$

Mit:

$$\mathbf{S}^e = \int_{\Omega} \left(\vec{\nabla} \times \vec{N}^e \right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{N}^e \right)^T d\Omega \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega} \vec{N}^e \cdot \vec{N}^{eT} d\Omega \quad (3.17)$$

Da jedes Element nur mit seinem Nachbarn direkt wechselwirkt, handelt es sich bei den Matrizen um $k \times k$ -dimensionale, dünnbesetzte Matrizen, wobei k die Anzahl der Kanten der Elemente bezeichnet und jede Zeile maximal 4 Einträge aufweist. Historisch bezeichnet man \mathbf{S} als die Stiffness Matrix und \mathbf{M} als die Mass Matrix. Da die Approximation des Vektorfeldes \vec{u} durch die Kantenbasis erfolgt, entspricht die Näherung den tangentialen Komponenten entlang jeder Kante der Elemente. Daher muss die Randbedingung der PEC Wände den Feldkomponenten angepasst werden. Für das elektrische Feld $\vec{u} = \vec{E}$ gilt am Rand der homogene Dirichlet-Randwert $\hat{n} \times \nabla E = 0$ und für das magnetische Feld $\vec{u} = \vec{H}$ gilt am Rand der homogene Neumann-Randwert $\hat{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$. Die Zeileneinträge der Kanten am Rand sind wegen der Randbedingung unveränderlich und bekannt.

Nach der Summation von (3.15) erhält man für das Funktional:

$$F = \frac{1}{2} (\vec{u}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \vec{u} - k^2 \vec{u}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \vec{u}) \quad (3.18)$$

Führt man nun die Minimierung des Funktionals unter der Berücksichtigung der Randbedingung aus, erhält man das generalisierte Eigenwertproblem

$$\mathbf{S}\vec{u} = k^2 \mathbf{M}\vec{u} \quad (3.19)$$

dabei ist k^2 der Eigenwert und \vec{u} der dazugehörige Eigenvektor. Das generalisierte Eigenwertproblem (Gleichung (3.19)) bildet ein algebraisches Gleichungssystem und wird über die Krylov-Schur-Methode [Kre05] gelöst.

Nachbearbeitung

Der Eigenwert des generalisierten Eigenwertproblems der TE- und der TM-Moden ist das Quadrat der Wellenzahl k der Mode. Um die Eigenfrequenz zu erhalten, muss folgende Umrechnung erfolgen:

$$f = \frac{kc}{2\pi}$$

Der zum Eigenwert der Mode gehörende Eigenvektor entspricht in der TE-Mode der tangentialen Komponente des longitudinalen H-Feldes, das zugehörige E-Feld kann durch Gleichung (2.9) bestimmt werden. Analoges gilt für die Eigenvektoren der TM-Mode und ihren Feldkomponenten. Die jeweils drei niederfrequentesten TE- und TM-Moden für die Kavität sind Abbildung 3.3 und Abbildung 3.4 zu finden.

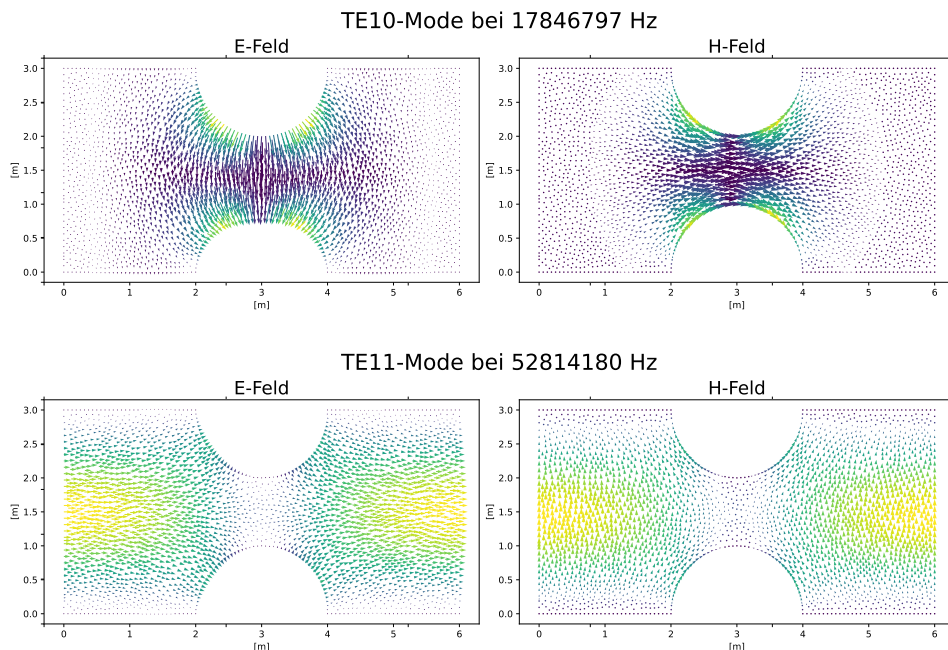


Abbildung 3.3: Resultate des Modellproblems Teil 1 von 2.

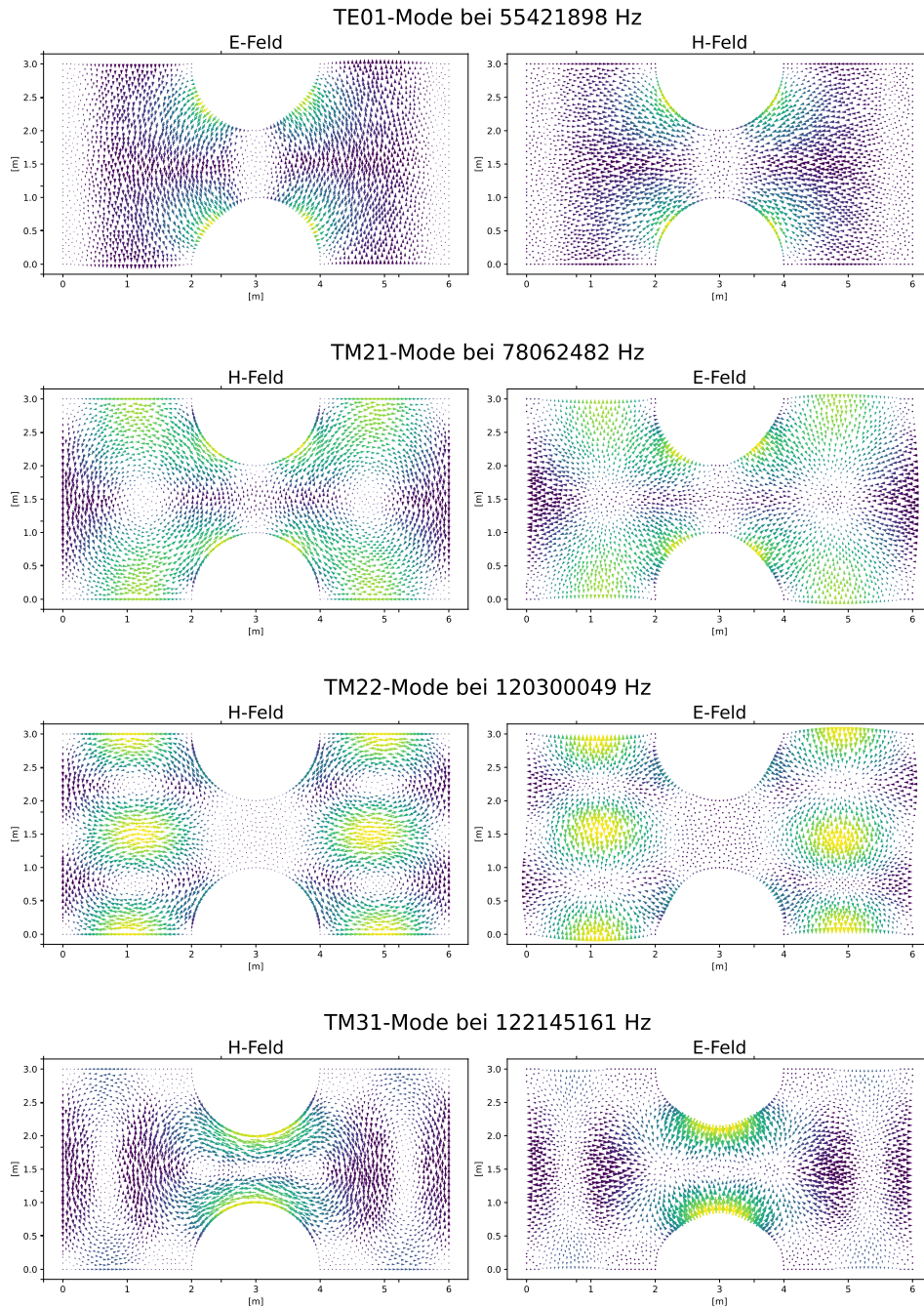


Abbildung 3.4: Resultate des Modellproblems Teil 2 von 2.

3.2 Feldsimulationen der CH-Rebuncher

Die Anforderungen an den Teilchenstrahl sind durch seine Anwendungen festgelegt und müssen über die Beschleunigungsstruktur realisiert werden. Den Anfang einer jeden Beschleunigungsanlage stellt die Teilchenquelle dar, aus der der kontinuierliche Teilchenstrahl gewonnen wird. Da die hochfrequenten elektromagnetischen Wechselfelder nicht mit einem kontinuierlichen Teilchenstrahl arbeiten können, werden die Teilchen aus dem Strahl in Paketen gebündelt, den sogenannten Bunchen. Da die Teilchen eines Bunches aus gleichartigen Teilchen bestehen, kommt es durch die elektrische Abstoßung zwischen ihnen zu einer Expansion des Bunchvolumens. Um die Ausdehnung in transversaler Richtung zu verhindern, verwendet man Sequenzen von Quadrupolmagneten mit wechselnder Polarität. Die Expansion in longitudinaler Richtung wird beispielsweise durch die hier untersuchten Rebuncher verhindert. Dabei werden die Teilchen mit einer Sollphase von $\Phi_S = -90^\circ$ eingeschossen, was zu einer Abbremsung der schnellen Teilchen ($\Phi_S < -90^\circ$) und einer Beschleunigung der langsamen Teilchen ($\Phi_S > -90^\circ$) im Bunch führt (siehe Abbildung 3.5). Im Mittel ändert sich die Energie der im Bunch befindlichen Teilchen nicht, der Rebuncher¹ fokussiert das Teilchenpaket also in Strahlrichtung.

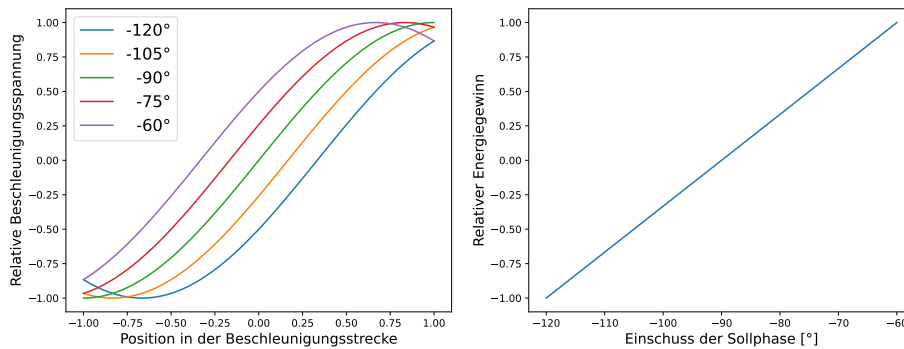


Abbildung 3.5: Darstellung der Beschleunigungsspannung, welche die Teilchenpakete in Abhängigkeit ihrer Sollphase auf unterschiedlichen Positionen beim Durchlaufen der Beschleunigungsstrecke erfahren (links) und die Auswirkung auf ihre Energie (rechts). Da die Beschleunigungsspannung von der im Beschleuniger gespeicherten Energie abhängig ist, werden hier relative Spannungen und Energiegewinne angegeben.

Bei den hier untersuchten Rebunchern handelt es sich um CH-Rebuncher, die zur Familie der H-Moden-Beschleuniger gehören. H-Moden Beschleuniger zeichnet eine hohe Shuntimpedanz aus, was zu einer hohen Leistungseffizienz führt. Der Anwendungsbereich von CH-Kavitäten umfasst leichte wie schwere Ionen, deren Geschwindigkeitsprofil zwischen $\beta = 0,05$ bis $\beta = 0,25$ liegt. Bei den in dieser Arbeit simulierten CH-Rebunchern handelt es sich um vier Grundtypen², die äquidistant um das Geschwindigkeitsprofil variiert werden. Alle besitzen sechs Beschleunigungsspalte, wobei das Verhältnis zwischen den

1 Rebuncher können auch zur Energievariation des Bunches genutzt werden. Zur Energiereduzierung muss die Sollphase $\Phi_S < -90^\circ$ gewählt werden, zur Energiegewinnung muss gelten $\Phi_S > -90^\circ$.

2 Durch die Geschwindigkeitsvariation der Grundtypen von $\beta = 0,05$ bis $\beta = 0,25$ in 0,01er Schritten ergeben sich, 21 mal 4 = 84 unterschiedliche CH-Rebuncher.

Driftröhrenlängen und den Spaltbreiten gleich ist. Der erste Grundtyp (siehe Abbildung 3.6) ist an das Design des FRANZ-Rebunchers angelehnt (im Weiteren als "FRANZ"-Typ bezeichnet) und besitzt eine Sollfrequenz von $f = 175$ MHz. Die Parameter zur Bildung des FRANZ-Typen ist in Tabelle 3.1 angegeben.

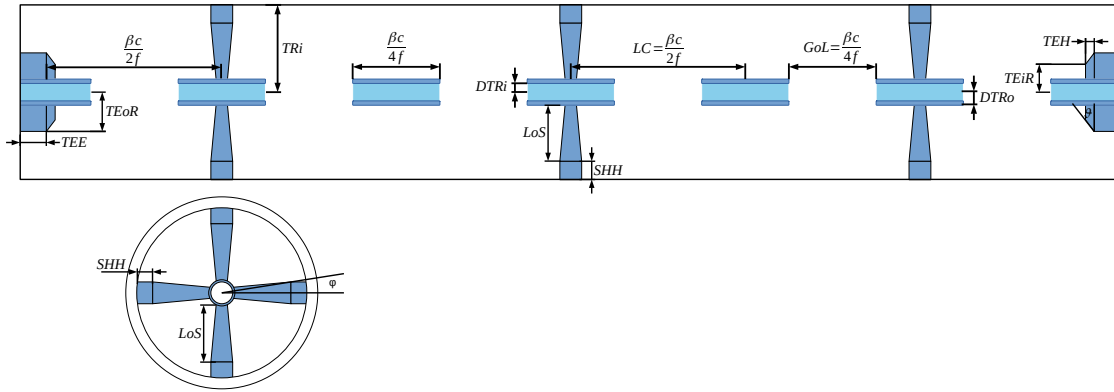


Abbildung 3.6: Schematische Abbildung des FRANZ-Typs im Querschnitt (oben) und im Längsschnitt (unten). Mit der Teilchengeschwindigkeit β , der Lichtgeschwindigkeit c und der Frequenz f .

Tabelle 3.1: Auflistung der Konstruktionsparameter des FRANZ-Typs.

Name	Ausdruck	Beschreibung
φ	$4,376^\circ$	Stützenöffnungswinkel
ϑ	30°	Tankendvorsatzöffnungswinkel
β	dyn	Teilchengeschwindigkeit
c	299792458000 mm	Lichtgeschwindigkeit
$DTRi$	12,5 mm	Driftröhreninnenradius
$DTRo$	20 mm	Driftröhrenaußenradius
f	175 MHz	Sollfrequenz
LC	$\frac{\beta c}{2f}$	Zellenlänge
LoG	$\frac{LC}{2}$	Länge des Spaltes
LoS	$TRi - DTRo - SHH$	Stützenkegellänge
$RoSb$	7,5 mm	Stützenradiusunterseite
$RoSt$	$RoSb + LoS \cdot \tan(\varphi)$	Stützenradiusoberseite
SHH	20 mm	Stützenspalthöhe
TEE	$0,2951 \cdot LC$	Länge des Tankendvorsatzes
TEH	$0,26795 \cdot TEE \cdot \tan(\vartheta)$	Länge des Tankendvorsatzerweiterung
$TEiR$	$0,2533 \cdot TEiR$	Tankendvorsatzinnenradius
$TEoR$	$0,474 \cdot TRi$	Tankendvorsatzaußenradius
TRi		Tankinnenradius

Bei den anderen drei Modellen, welche im Folgenden als "Low"-, "Norm"- und "High"-Typ bezeichnet werden (siehe Abbildung 3.7), wurde das Design so gewählt, dass es den

analytischen Felduntersuchungen in [Cle11] nahekommmt, sie unterscheiden sich nur in ihrem radialen Stützenwinkel φ ; sie besitzen eine Sollfrequenz von jeweils $f = 300$ MHz. Die Konstruktionsparameter sind in Tabelle 3.2 angegeben.

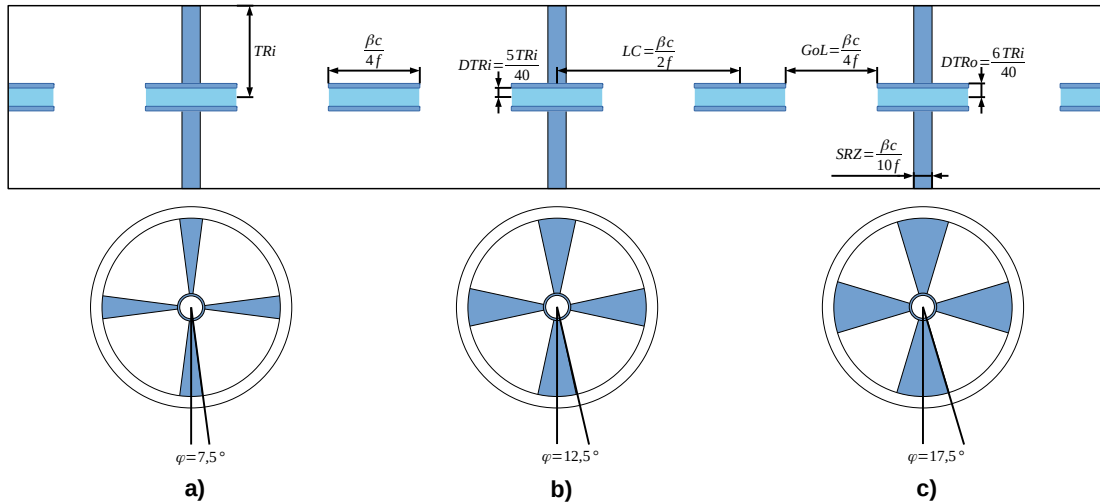


Abbildung 3.7: Schematische Abbildung der Low-, Norm- und High-Typen im Querschnitt (oben). Alle drei Typen unterscheiden sich nur in ihrem Stützenöffnungswinkel φ . a) Längsschnitt des Low-Typs. b) Längsschnitt des Norm-Typs. c) Längsschnitt des High-Typs. Mit der Teilchengeschwindigkeit β , der Lichtgeschwindigkeit c und der Frequenz f .

Tabelle 3.2: Aufistung der Konstruktionsparameter der Low-, Norm- und High-Typen.

Name	Ausdruck	Beschreibung
φ	$7,5^\circ; 12,5^\circ; 17,5^\circ$	Stützenöffnungswinkel (Low; Norm; High)
β	dyn	Teilchengeschwindigkeit
c	299792458000 mm	Lichtgeschwindigkeit
$DTRi$	$\frac{5TRi}{40}$	Driftröhreninnenradius
$DTRo$	$\frac{6TRi}{40}$	Driftröhrenaußenradius
f	300 MHz	Sollfrequenz
LC	$\frac{\beta c}{2f}$	Zellenlänge
LoG	$\frac{LC}{2}$	Länge des Spaltes
LoS	$TRi - DTRo$	Stützenkegellänge
SRR	$TRi \cdot \tan(\varphi)$	Maximaler Stützenradius in Radialrichtung
SRZ	$0,1 \cdot LC$	Stützenradius in Longitudinalrichtung
TRi		Tankinnenradius

Es wird zwischen festgelegten und abgeleiteten Parametern unterschieden. Durch die Festlegung der Geometrie, der Sollfrequenz und der Teilchengeschwindigkeit ist die Konstruktion festgelegt. Die einzige Variable, die zu bestimmen ist, ist der Tankradius, der eine Funktion der Sollfrequenz ist. Dieser muss durch die Simulation der Eigenfrequenz bestimmt werden, wobei die Eigenfrequenz mit der Sollfrequenz übereinstimmen muss.

Für die Bestimmung werden die 84 CH-Rebuncher mithilfe von CST Studio Suite konstruiert und der Tankradius TRi so bestimmt, dass der Eigenwert mit der jeweiligen Sollfrequenz übereinstimmt.

3.2.1 Feldsimulationen mit CST Studio Suite

Als Referenzsystem für die beiden anderen Methoden (FEM und SAM) zur Bestimmung der Eigenfrequenz der CH-Rebuncher wurde CST Studio Suite verwendet. Die numerischen Approximationen werden durch die Finite Integrations Methode [Wei77] (FIT) bereitgestellt, bei der die Maxwellgleichungen in ihrer Integraldarstellung in ein algebraisches lineares Gleichungssystem überführt und anschließend gelöst werden. Dabei werden die gekoppelten Maxwellgleichungen über zwei gestaffelte Gitter diskretisiert (siehe Abbildung 3.8 unten). Die zwei gestaffelten Gitter sind im Yee-Schema [Yee66] angeordnet, das in Algorithmen der FDTD¹ erstmals zum Einsatz gekommen ist. Das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Feld \vec{H} werden durch die elektrische Spannung $\bar{e} := E \cdot l$ und magnetische Spannung $\bar{h} \cdot l$ repräsentiert, wobei l der Länge der Kante entspricht (siehe Abbildung 3.8 oben). Die Koppelung der Felder (hier der Spannungen) erfolgt über die magnetischen² \bar{b} und elektrischen³ \bar{d} Flüsse. Bei der Simulation betrachten wir einen quellfreien Raum und erhalten folgende diskretisierte Formen der Maxwellgleichungen:

$$\mathbf{C}_P \cdot \bar{e} = -\frac{d\bar{b}}{dt} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{C}_S \cdot \bar{h} = \frac{d\bar{d}}{dt} \quad (3.21)$$

Wobei \mathbf{C}_P der Rotation auf dem primären Gitter und \mathbf{C}_S der Rotation auf dem sekundären Gitter entspricht, welche in der Matrixdarstellung nur die Werte 0, -1 oder 1 annehmen.

CST Studio Suite verwendet zur Konstruktion der diskreten Geometrien einen Hybriden aus der Open Cascade Technologie (OCC) und vektorisierten Zeichnungen. Bei der OCC werden simple Körper⁴ durch mathematische Mengenoperatoren⁵ verknüpft. Bei den vektorisierten Zeichnungen⁶ werden die dreidimensionale Körper aus den Zeichnungen projiziert. Die beiden Konstruktionsmethoden besitzen eine gemeinsame Basis, bei der jeder Körper aus Konturflächen, jede Fläche aus geschlossenen Linien und jede Linie aus Begrenzungspunkten besteht, wodurch eine Kombination der beiden Konstruktionsansätze möglich ist. So werden die CH-Rebuncher durch die Kombination einfacher Zylinder und Kegel gebildet(OCC), anschließend werden die Kanten der Driftröhren und der Tankab-

1 FDTD (engl. Finite-Difference Time-Domain), Finite-Differenzen-Methode im Zeitbereich.

2 Die Berechnung erfolgt wie im kontinuierlichen Fall über das Ampèresche Gesetz (2.2d).

3 Die Berechnung erfolgt wie im kontinuierlichen Fall über die Faradaysche Induktion (2.2b).

4 Als simple Körper gelten: Quader, Kugel, Kegel, Torus, Zylinder und elliptischer Zylinder.

5 Zu den mathematischen Mengenoperatoren zählen die Vereinigung, Differenz, Schnittmenge und symmetrische Differenz.

6 Elemente der Zeichnungen sind Punkte, Linien und Flächen. Zwischen diesen Elementen herrscht eine hierarische Struktur, in der nur Punkte mit Linien, Linien mit Flächen und Flächen mit Körpern interagieren.

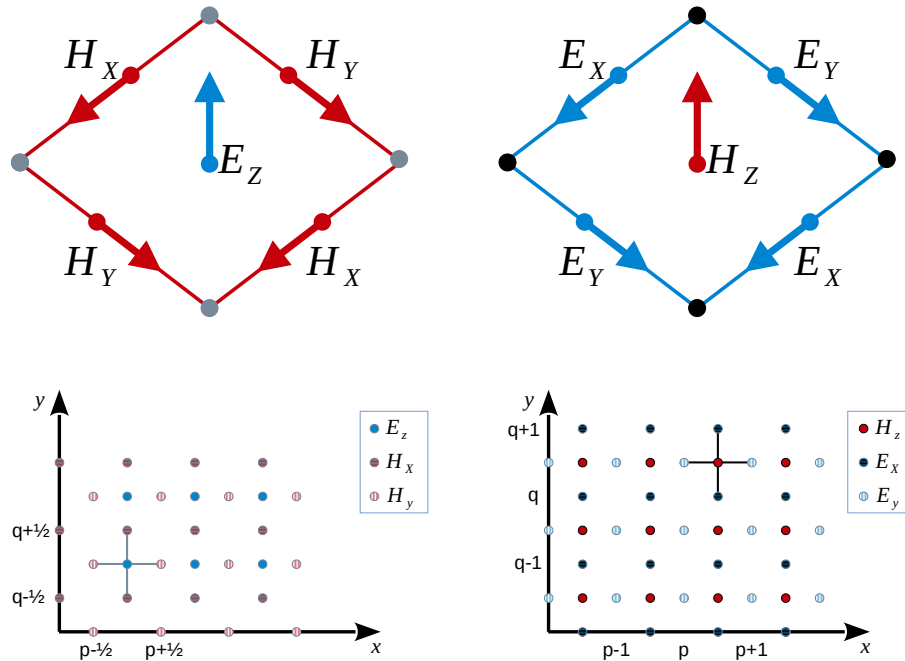


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung der FIT. Oben links: Berechnung des resultierenden E-Feldes aus der magnetischen Spannung. Oben rechts: Berechnung des resultierenden H-Feldes aus der elektrischen Spannung. Unten links: Sekundäres Gitter in der xy -Ebene. Unten rechts: Primäres Gitter in der xy -Ebene. Zu beachten ist, dass das primäre und sekundäre Gitter um jeweils einen Halbgitterabstand zueinander verschoben sind.

schluss einbauten durch den Zeichenansatz geglättet¹. Die Genauigkeit der Simulation hängt von der Anzahl der Gitterpunkte und der Qualität der Diskretisierung des Rebunchers ab. CST Studio Suite bietet zwei Diskretisierungsverfahren, eines in der hexaedrischen Basis und eines in der tetraedrischen Basis. Da die CH-Rebuncher eine zylindersymmetrisch dominierte Geometrie aufweisen, eignet sich eine tetraedrale Ersatzgeometrie besser zur Diskretisierung als eine hexaedrische (siehe Abbildung 3.9).

Die Untersuchung der Modelle verläuft über ein breites Geschwindigkeitsspektrum, was zu einer Vergrößerung des Volumens der CH-Rebunchergrundtypen um das bis zu 8,11-fache (eine Verfünfachung der Länge mit einem Wachstum des Außenradius um etwa das 1,25-fache) führt. Typischerweise wird die Anzahl der Gitterpunkte mithilfe eines

¹ Im Kapitel FEM wird für die Konstruktion der CH-Rebuncher ein reiner OCC Konstruktionsansatz gewählt, in dem die Kantenglättung durch den Einbau von Tori gewährleistet wird.

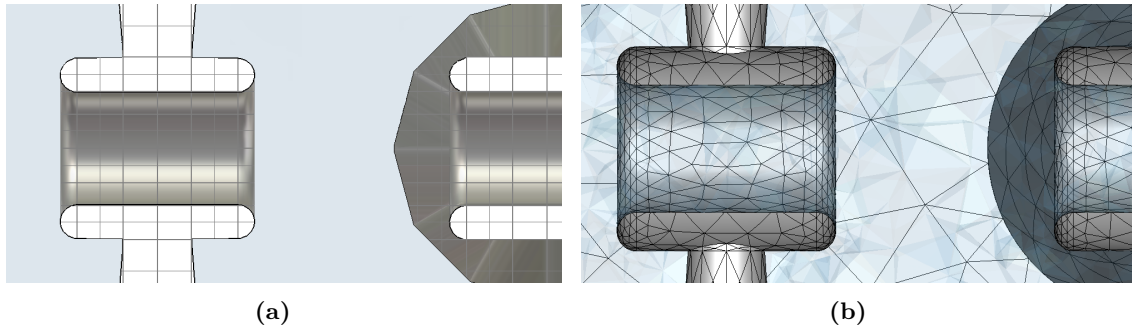


Abbildung 3.9: (a) Hexaedrische Diskretisierung (b) Tetraedrische Diskretisierung

Meshsweeps¹ bestimmt. Um Simulationszeit zu sparen, wird in dieser Arbeit auf folgende Weise vorgegangen: Für $\beta = 0,05$ wird das Meshsweep für jeden Grundtypen durchgeführt und daraus die optimale Maschendichte bestimmt. Diese Maschendichte wird dann auf die anderen Modelle mit höheren β -Werten übertragen. Dadurch wird das klassische Meshsweep durch die optimale Maschendichte ersetzt. Letzteres stellt eine schwächere Bedingung an die Genauigkeit als das Meshsweep da. Wie das Meshsweep bildet die optimale Maschenweitendichte den Kompromiss zwischen Simulationsgenauigkeit und Rechenaufwand. CST verwendet ein adaptives Diskretisierungsverfahren, bei dem die komplexen Einbauten des Rebunchers kleinere Gitter aufweisen, als das freie Vakuumvolumen. Dadurch wird bei gleichem Rechenaufwand ein besseres Resultat erzielt [Sch14]. Zur Eigenwertbestimmung kann das Modell entweder als PEC-Körper mit Vakuum als Hintergrundmaterial² oder als Vakuum-Körper mit PEC-Hintergrund³ gerechnet werden. Beide Varianten unterscheiden sich um weniger als 0,1% voneinander (siehe Abbildung 3.10 rechts und Abbildung 3.11 rechts).

Laut Theorie dürften sich das Vakuum- und Volumenmodell nicht unterscheiden, daher wird diese Abweichung als Modellfehler bewertet. Daher kann TRi für die jeweiligen Geschwindigkeiten bis auf eine Genauigkeit von 175 kHz für den FRANZ-Typen bzw. 300 kHz für die anderen drei Typen zur Sollfrequenz bestimmt werden. Da das Vakuummodell gegenüber dem Volumenmodell weniger Schwankungen beim Meshsweep aufweist, werden die weiteren Simulationen mit diesem Modell durchgeführt. Bei allen Grundmodellen stellt sich ein Plateau für die Genauigkeit der Frequenz bei 70 Zellen pro Wellenlänge ein (siehe Abbildung 3.10 links und Abbildung 3.11 links), daher wird eine Maschenweitendichte von 70 Zellen pro Wellenlänge gewählt.

Um ein Maß für die Genauigkeit des elektrischen Feldes \vec{E} und des magnetischen Feldes \vec{H} zu erhalten, wird die Symmetrie der Felder untersucht. Das Design der CH-Rebuncher wird so gewählt, dass ausgehend von der Mitte der Kavitäten die Feldkomponenten an den

1 Hierbei wird eine optimale Schrittweite der Simulation bestimmt, indem der Abstand der Gitterpunkte so lange verfeinert wird, bis der Simulationswert innerhalb der gewünschten Genauigkeit liegt, oder ein Plateau erreicht wird.

2 Dieses Vorgehen wird im Weiteren als Volumenvariante bezeichnet.

3 Dieses Vorgehen wird im Weiteren als Vakuumvariante bezeichnet.

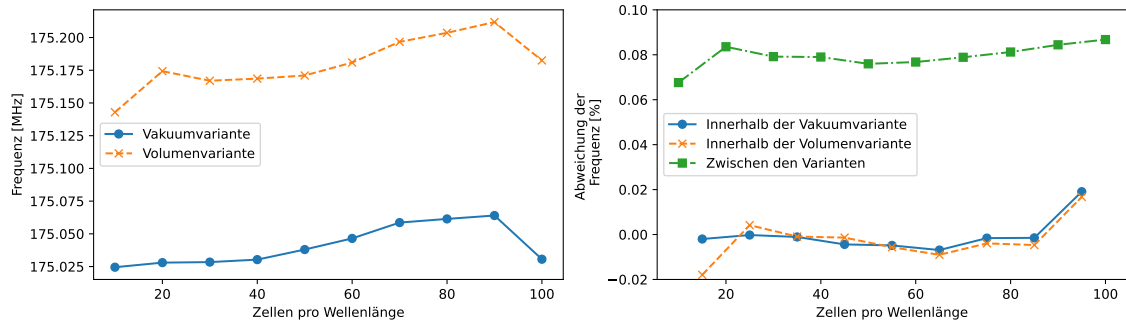


Abbildung 3.10: Meshsweepuntersuchung des FRANZ-Typs. Links: Bestimmung der Eigenfrequenz in der Vakuump- und Volumenvariante bei unterschiedlichen Zelldichten. Rechts: Abweichung der berechneten Eigenfrequenzen innerhalb und zwischen den Varianten.

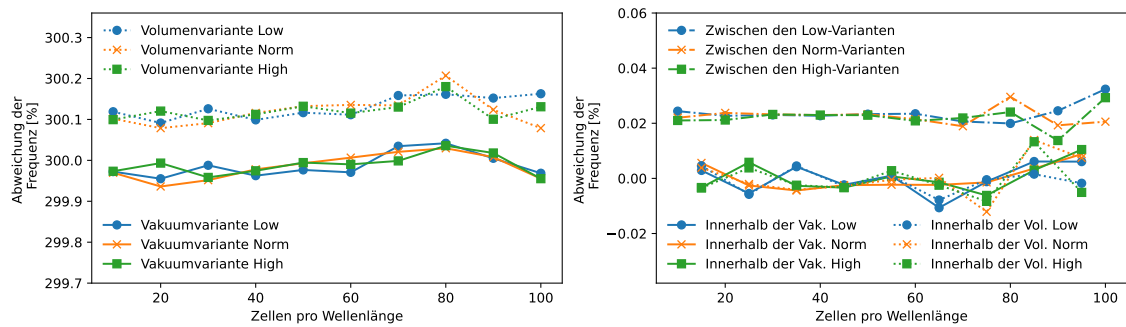


Abbildung 3.11: Meshsweepuntersuchung des Low-, Norm- und High-Typs. Links: Bestimmung der Eigenfrequenzen in der Vakuump- und Volumenvariante bei unterschiedlichen Zelldichten. Rechts: Abweichung der berechneten Eigenfrequenzen innerhalb und zwischen den Varianten.

jeweiligen Spiegelpunkten betragsmäßig gleich sind.

$$|\vec{E}(x,y,z)| \stackrel{!}{=} |\vec{E}(x,y,-z)| \quad (3.22)$$

$$|\vec{H}(x,y,z)| \stackrel{!}{=} |\vec{H}(x,y,-z)| \quad (3.23)$$

Da die Feldstärke an einem Punkt wegen der Diskretisierung lokal stark schwankungsbefahet sein kann und somit weniger Aussagekraft ausweist als ein Pfad zwischen zwei Punkten, werden jeweils spiegelsymmetrische Pfade entlang der Regionen der stärksten Feldkomponenten ausgewertet, siehe Abbildung 3.12. Für die Bewertung des magnetische Feldes wird die magnetische Spannung Φ entlang der Stützen untersucht. Für das elektrische Feld, wird die elektrische Spannung U zwischen den Driftröhren untersucht.

Insgesamt werden für jeden der 4 Grundtypen bei einer Geschwindigkeit von $\beta = 0,05$ die Differenz der jeweils 5 mal 8 Pfadpaare für die elektrische Spannung U und die Differenz der 3 mal 6 Pfadpaare für die magnetische Spannung Φ bestimmt. Dabei gilt für die jeweiligen

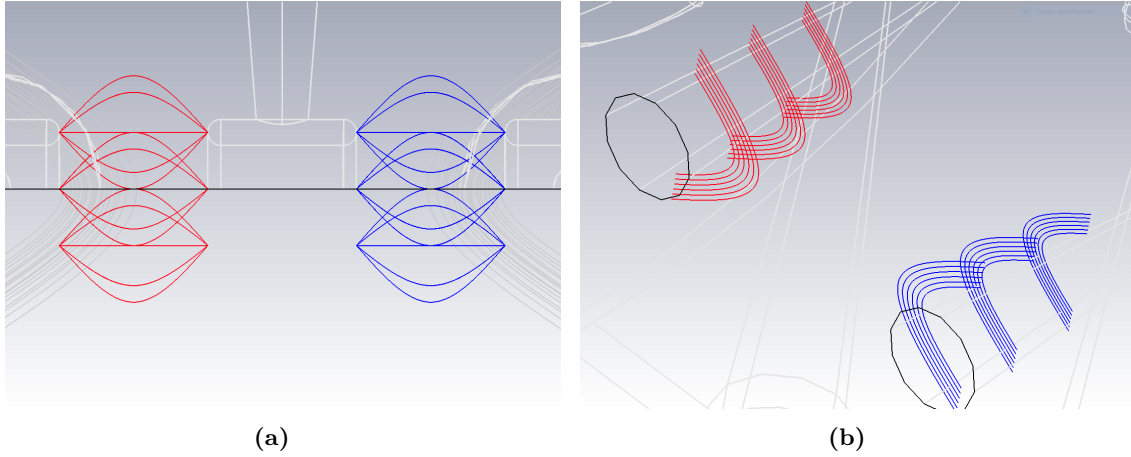


Abbildung 3.12: (a) Spiegelsymmetrische Pfade für die elektrische Spannung. Es werden pro Seite 5 Punktpaare untersucht, welche jeweils durch 8 verschiedene Pfade miteinander verbunden sind. In dieser Abbildung sind drei Punktpaare pro Seite zu sehen, welche von oben nach unten als "Norden", "Zentrum" und "Süden" bezeichnet werden - siehe Abbildung 3.13 bis 3.16. Die beiden Pfadpaare, welche als "Osten" und "Westen" bezeichnet werden, liegen vor bzw. hinter dem Zentrumspunktpaar.

(b) Spiegelsymmetrische Pfade für die magnetische Spannung. Die drei Punktpaare pro Seite werden durch jeweils 6 Pfade miteinander verbunden.

Spannungen:

$$U_i = \int_{\text{Pfad}_i} \vec{E} d\vec{s} \quad (3.24)$$

$$\Phi_i = \int_{\text{Pfad}_i} \vec{H} d\vec{s} \quad (3.25)$$

Für die prozentuale Differenz gilt:

$$\Delta U_{i,j} = \frac{2(|U_i| - |U_j|)}{100(|U_i| + |U_j|)} \quad (3.26)$$

$$\Delta \Phi_{i,j} = \frac{2(|\Phi_i| - |\Phi_j|)}{100(|\Phi_i| + |\Phi_j|)} \quad (3.27)$$

Die maximalen Abweichungen der Spannungen betragen $\Delta U \approx 0,707\%$ (siehe Abbildung 3.13 links) und $\Delta \Phi \approx 0,940\%$ (siehe Abbildung 3.13 rechts). Diese sind im FRANZ-Modell zu finden, was auf seine komplexere innere Struktur zurückzuführen ist. Die Abweichungen der Spannungen von jeweils unter 1% können mit dem Fehler der jeweiligen Felder gleichgesetzt werden und sind um eine Größenordnung größer als die Fehler der Eigenwerte, welche sich auf unter 0,1% belaufen. Die Resultate für den zu bestimmenden Tankinnenradius TRi sowie die Eigenfrequenzen f sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

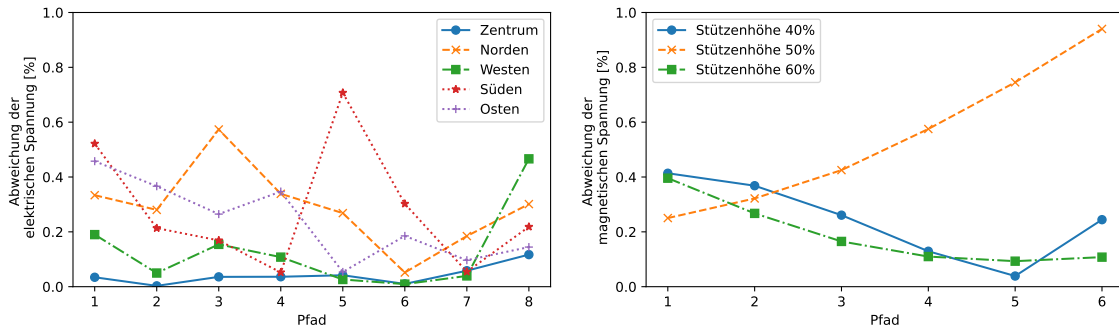


Abbildung 3.13: Untersuchung der Genauigkeit der Feldsymmetrie im FRANZ-Typen. Links für die elektrischen Felder und rechts für die magnetischen Felder.

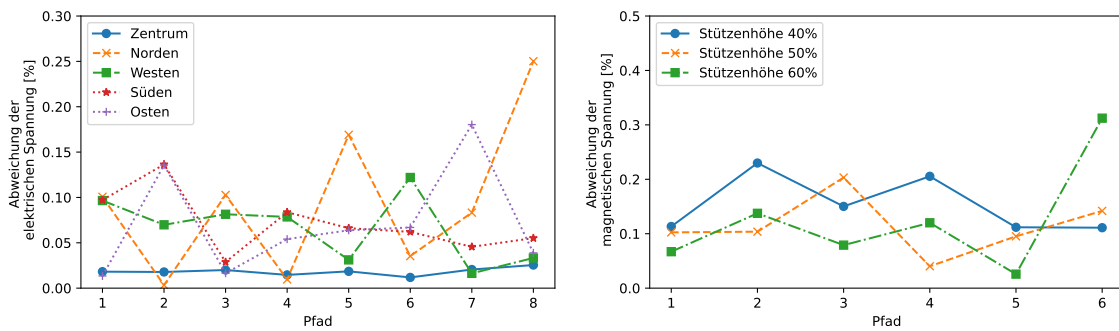


Abbildung 3.14: Untersuchung der Genauigkeit der Feldsymmetrie im Low-Typen. Links für die elektrischen Felder und rechts für die magnetischen Felder.

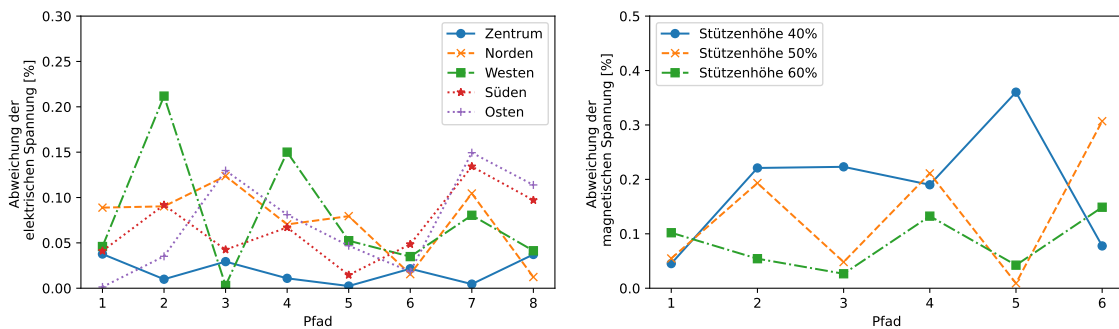


Abbildung 3.15: Untersuchung der Genauigkeit der Feldsymmetrie im Norm-Typen. Links für die elektrischen Felder und rechts für die magnetischen Felder.

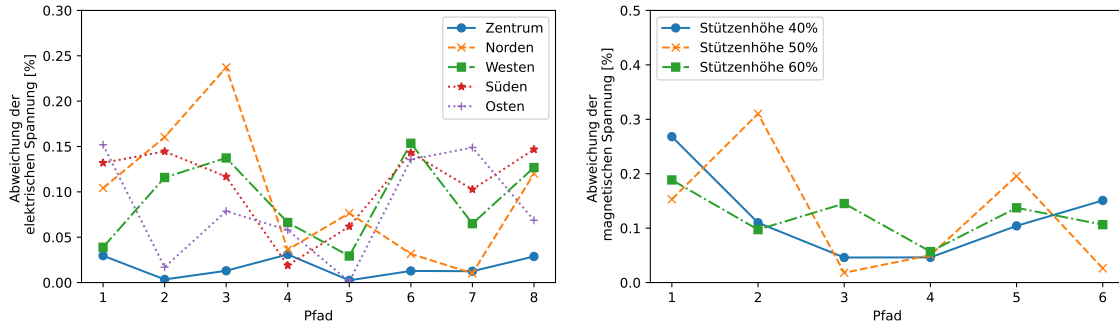


Abbildung 3.16: Untersuchung der Genauigkeit der Feldsymmetrie im High-Typen. Links für die elektrischen Felder und rechts für die magnetischen Felder.

Tabelle 3.3: Ergebnisse der Feldsimulationen mit CST Studio Suite für die 84 CH-Kavitäten.

β	FRANZ		Low		Normal		High	
	f [MHz]	TRi [mm]	f [MHz]	TRi [mm]	f [MHz]	TRi [mm]	f [MHz]	TRi [mm]
0,05	175,064	343	300,005	153,34	300,008	163,09	300,018	172,56
0,06	175,075	338	300,034	156,02	300,013	165,46	300,012	174,52
0,07	175,065	337,5	300,040	159,20	300,050	167,98	300,015	176,26
0,08	175,102	339	300,052	161,85	300,048	171,08	300,009	179,15
0,09	174,942	342	300,011	165,05	300,019	173,78	300,005	181,89
0,10	175,013	345	300,051	167,91	300,016	176,69	300,008	184,61
0,11	174,970	348	300,013	170,63	300,080	179,34	300,006	187,23
0,12	174,905	352	300,021	173,02	300,040	182,10	300,006	189,82
0,13	175,092	355	300,010	175,46	300,067	184,50	300,015	192,44
0,14	174,974	358,5	300,053	177,76	300,024	186,85	300,027	194,93
0,15	175,046	361,5	300,043	179,81	300,061	189,09	300,009	197,33
0,16	175,051	364,5	300,096	181,77	300,031	191,28	300,005	199,48
0,17	175,024	367,4	300,035	183,60	300,063	193,33	300,006	201,69
0,18	174,920	370,3	300,025	185,45	300,067	195,25	300,007	203,83
0,19	175,082	372,5	300,009	187,17	300,076	197,10	300,004	205,77
0,20	175,072	374,9	300,016	188,82	300,036	198,85	300,021	207,65
0,21	175,043	377,2	300,020	190,07	300,003	200,53	300,005	209,41
0,22	174,942	379,5	300,021	191,42	300,001	202,11	300,009	211,18
0,23	175,012	381,4	300,014	192,85	300,001	203,62	300,012	212,80
0,24	175,037	383,1	300,052	194,13	300,015	205,02	300,026	214,35
0,25	174,993	384,8	300,009	195,34	300,004	206,38	300,017	215,84

3.2.2 Feldsimulationen mit FEM

Die Vorgehensweise entspricht im Wesentlichen der Vorgehensweise des Modellproblems in Abschnitt 3.1.1 und wird daher verkürzt dargestellt. Die Skripte zur Erstellung der Geometrie¹ und die auf ihnen aufbauenden Berechnungen des Eigenwertproblems sind im Anhang zu finden. Zur Visualisierung der diskretisierten Geometrie der CH-Kavitäten und des Eigenvektors, der je nach Wahl der Randbedingung dem elektrischen Feld \vec{E} oder dem magnetischen Feld \vec{H} entspricht, wird ParaView verwendet.

Wie beim CST-Modell werden als erstes die CH-Kavitäten 3.6 und 3.7 in eine diskrete CAD-Geometrie umgewandelt. Diese werden mithilfe von `pygmsh`² durch die Kombination einfacher geometrischer Grundkörper gebildet und anschließend in eine tetraedale Ersatzgeometrie $\hat{\Omega}$ umgewandelt. Bei der Ersatzgeometrie $\hat{\Omega}$ handelt es sich um das Vakuum im Inneren der Kavitäten. Sie entspricht daher am ehesten der Vakuumvariante der CST Simulationen.

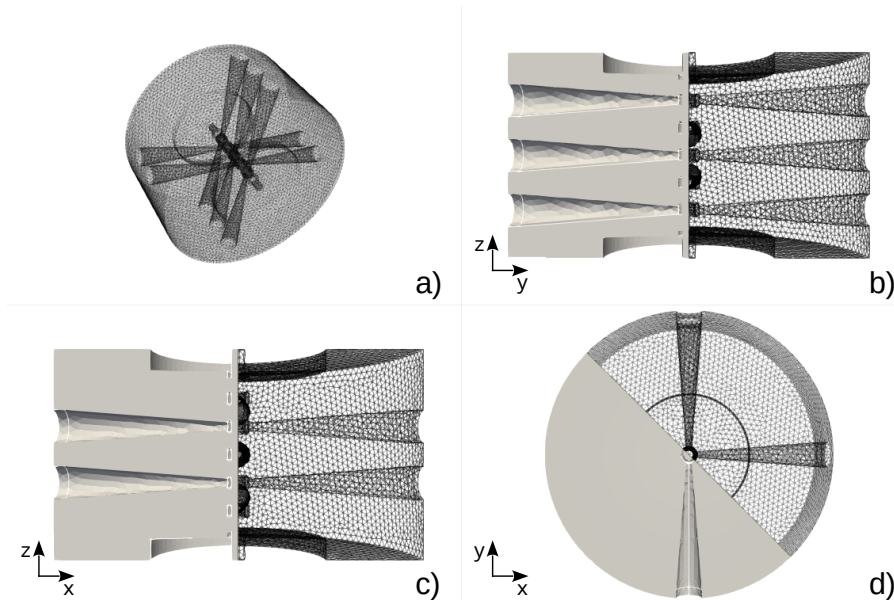


Abbildung 3.17: CAD-Darstellung der FRANZ-Kavität in tetraedaler Ersatzgeometrie. Abbildungen b) bis d) zeigen die Kavitäten auf der jeweils linken Seite in ihrer Oberflächendarstellung. a) Außensicht auf die CH-Rebuncher des FRANZ-Typs. b) Darstellung der yz-Ebene. c) Darstellung der xz-Ebene. d) Darstellung der xy-Ebene.

Um der schwachen Formulierung des Eigenwertproblems (siehe Gleichung (3.12)) gerecht zu werden, wird aus der Ersatzgeometrie $\hat{\Omega}$ der entsprechende diskrete Nédélec Funktionsraum $\hat{V}_{H(curl)}$ gebildet. Die Finiten Elemente des Funktionsraums $\hat{V}_{H(curl)}$ sind in

- 1 Die CH-Kavitäten des FRANZ-Typs sind im ipython-Notebook `CH_FRANZ_Mesh_Gen.ipynb` erstellt worden. Die anderen Kavitäten sind durch das ipython-Notebook `CH_LNH_Mesh_Generator.ipynb` entstanden.
- 2 Bei `pygmsh` handelt es sich um eine leistungsstarke Pythonschnittstelle von `Gmsh`. Bei `Gmsh` handelt es sich um eine CAD Open-Source-Software, die zur Generierung von diskreten Geometrien genutzt werden kann. Die Geometrien können anschließend in Finite-Elemente-Netze umgewandelt werden.

der Kantenbasis formuliert. Die diskrete Ansatzfunktion $\vec{u} \in \hat{V}_{H(curl)}$ und die diskrete Testfunktion $\vec{v} \in \hat{V}_{H(curl)}$ werden erstellt. Das Funktional $F(\vec{u})$ wird aus dem schwachformulierten Eigenwertproblem gebildet. In der Modellannahme wird davon ausgegangen, dass das magnetische und elektrische Feld ungekoppelt sind. Daher kann das Eigenwertproblem über seinen elektrischen Eigenvektor $\vec{u}_E = \vec{E}$ oder seinen magnetischen Eigenvektor $\vec{u}_H := \vec{H}$ gelöst werden. Im analytischen Fall sind die korrespondierenden Eigenwerte $k^2 = k_E^2 = k_H^2$ gleich (siehe Gleichung (3.7)). Da es durch die jeweiligen Approximationen der elektromagnetischen Felder zu Abweichungen kommt, wird diese Abweichung als Maß zur Beurteilung des Modellfehlers verwendet. Die Randwertbedingungen müssen für den jeweiligen Fall angepasst werden. Für die Lösung über das elektrische Feld gilt am Rand des Vakuumkörpers die Randbedingung $\hat{n} \times \vec{\nabla} \vec{u} = 0$. Wird das Eigenwertproblem über das magnetische Feld gelöst, gilt für die Randbedingung $\hat{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$. Anschließend werden die Stiffness Matrix \mathbf{S} und die Mass Matrix \mathbf{M} definiert und assembliert. Das Eigenwertproblem liegt somit in Form eines algebraischen Gleichungssystems (siehe Gleichung 3.19) und wird numerisch gelöst. Für die praktische Umsetzung wird DOLFIN¹ verwendet². Wie bei den Simulationen mittels CST Studio Suite wird ein Meshsweep bei der Geschwindigkeit von $\beta = 0,05$ für den FRANZ-Typen durchgeführt (siehe Abbildung 3.18), das als Grundlage der optimalen Maschenweitendichte der anderen Simulation dient. Die sogenannte maximale charakteristische Länge wird auf 15 mm gesetzt, die minimale charakteristische Länge bleibt dynamisch. Dies führt zu einer Dichte von mindestens 700 000 Tetraedern je Kubikmeter.

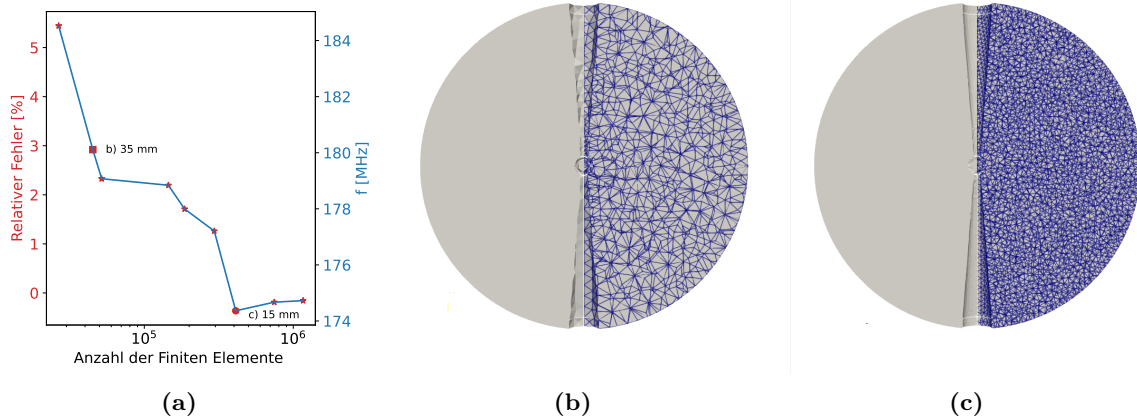


Abbildung 3.18: (a) Entwicklung der Genauigkeit des Meshsweeps mit zunehmender Anzahl der Finiten Elemente. (b) FRANZ-Typ bei einer maximalen charakteristischen Länge von 35 mm. (c) FRANZ-Typ bei einer maximalen charakteristischen Länge von 15 mm.

¹ Bei DOLFIN handelt es sich um die Pythonchnittstelle des FEniCS Projects.

² Das Skript zum Lösen des Eigenwertproblems ist im ipython-Notebooks [Eigenvalue_PEC_Calculator.ipynb](#) zu finden.

Zur Bewertung der Genauigkeit der Finiten Elemente Methode werden die Eigenwerte der 21 CH-Kavitäten des FRANZ-Typen über den elektrischen Feldvektor und über den magnetischen Feldvektor gebildet. Die Differenz der jeweiligen Eigenwerte dient als Maß für die Beurteilung der Genauigkeit der Methode. Die maximale Differenz der Eigenwerte beträgt weniger als 2,2% (siehe Abbildung 3.19 a)). Die Differenzen der Eigenwerte der beiden FEM-Methoden werden durch die unterschiedlichen Dominanzen der Feldverteilungen hervorgerufen. Das elektrische Feld befindet sich hauptsächlich zwischen den Driftröhren, wohingegen sich das magnetische Feld um die Driftröhren verteilt. Die Ersatzgeometrie $\hat{\Omega}$ ist zwar in beiden Fällen gleich, jedoch verursachen die gleichen Diskretisierungsfehler der Geometrie unterschiedlich starke Feldfehler. Die Differenzen nehmen für zunehmende Teilchengeschwindigkeiten ab. Im Vergleich zu den durch CST Studio Suite errechneten Eigenfrequenzen weisen die über das elektrische Feld berechneten Eigenfrequenzen eine durchgehende Unterschätzung der Eigenfrequenz von 2,37% bis 0,35% auf (siehe Abbildung 3.19 b)). Für die Eigenfrequenzen, welche über das magnetische Feld berechnet wurden, ergibt sich eine maximale Überschätzung von 0,98% und eine maximale Unterschätzung von 0,40% (siehe Abbildung 3.19 c)). Da sowohl der absolute Fehler, als auch die Schwankung für die Berechnung der Eigenfrequenz über den magnetischen Feldvektor kleiner sind, wird für die Simulationen der drei verbleibenden Grundtypen der Eigenwert über den magnetischen Feldvektor bestimmt. Bei der Approximation der Eigenfrequenzen des Low-Typs

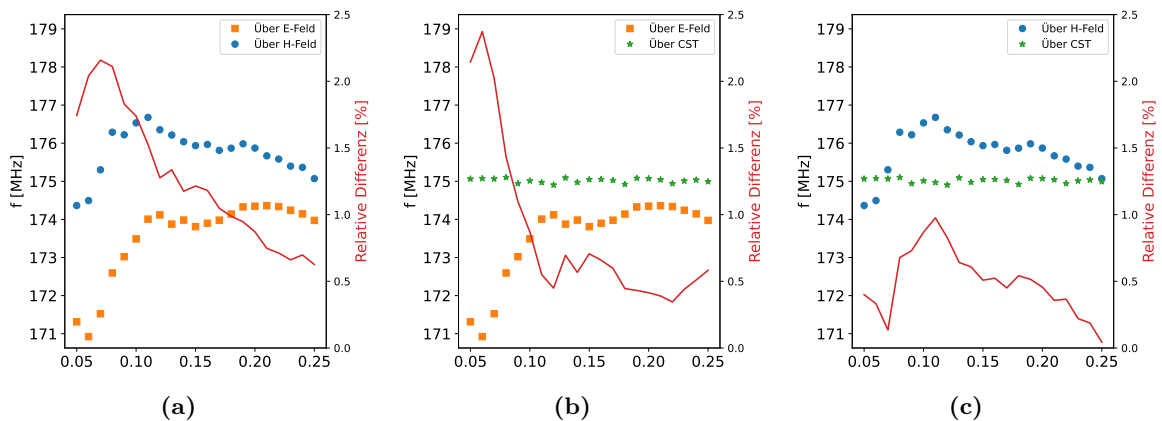


Abbildung 3.19: Darstellung der Eigenfrequenzen des FRANZ-Typs, welche über die FEM mithilfe des E-Feldes und des H-Feldes berechnet wurden in Abhängigkeit der Teilchengeschwindigkeit β . Die relative Differenz zwischen den jeweiligen Eigenfrequenzen ist auf der rechten Seite der Abbildungen in rot aufgetragen. (a) Vergleich der FEM-Methoden. In (b) und (c) werden die Eigenfrequenzen der FEM mit den über CST Studio Suite bestimmten Eigenfrequenzen verglichen.

über das magnetische Feld ergibt sich eine maximale Überschätzung von 1,70% und eine maximale Unterschätzung von 0,88% (siehe Abbildung 3.20 a)). Für die Geschwindigkeiten im Bereich von 0,05 bis 0,16 wechseln sich die Überschätzungen und Unterschätzungen je Geschwindigkeitsschritt ab und stabilisieren sich dann zu einer generellen Unterschätzung der Eigenfrequenz. Die Approximationen weisen eine Schwankungsbreite von 2,57% auf. Die Approximationen für den Norm- und High-Typen (siehe Abbildung 3.20 b) und c))

unterschätzen die Eigenfrequenz im Bereich von 0,98% bis 2,47% bzw. 0,83% bis 2,76%, bei einer Schwankungsbreite von 1,49% bzw. 1,93%.

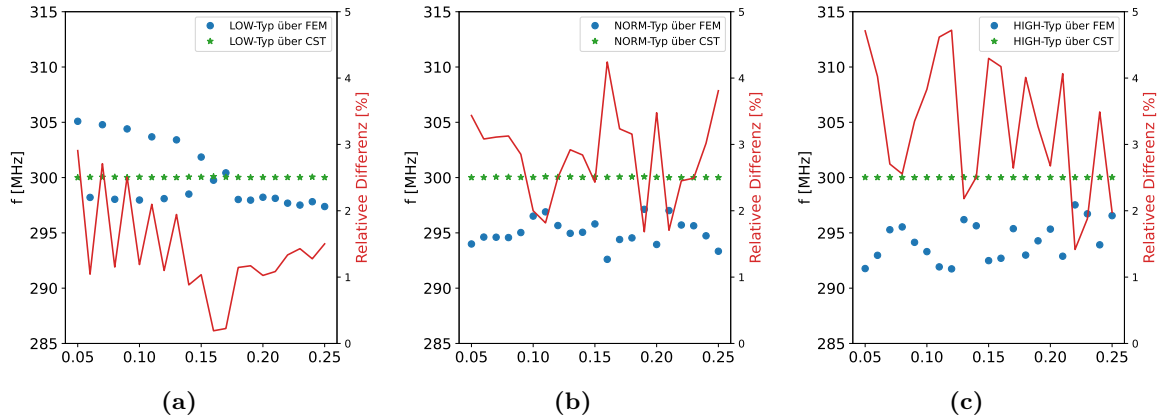


Abbildung 3.20: Vergleich der Eigenfrequenzen, welche durch CST Studio Suite und der FEM über den magnetischen Feldvektor berechnet wurden. Die relative Differenz zwischen den jeweiligen Eigenfrequenzen ist auf der rechten Seite der Abbildungen in rot aufgetragen. (a) Für den Low-Typen. (b) Für den Norm-Typen. (c) Für den High-Typen.

Typische Feldverteilungen der CH-Kavität des FRANZ-Typs für $\beta = 0,11$ sind in Abbildung 3.21 bis Abbildung 3.23 in skalarer Form zu sehen. Hierbei erfolgte die Bestimmung des elektrischen und magnetischen Feldes über die Eigenvektoren der Eigenwertbestimmung in der FEM. Das elektrische Feld entspricht dem Eigenvektor des Eigenwertproblems mit dem homogenen Dirichlet-Randwert $\hat{n} \times \vec{\nabla} \vec{u} = 0$. Das magnetische Feld entspricht dem Eigenvektor des Eigenwertproblems mit dem homogenen Neumann-Randwert $\hat{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$. Eine Zusammenfassung der Resultate kann Tabelle 3.4 entnommen werden.

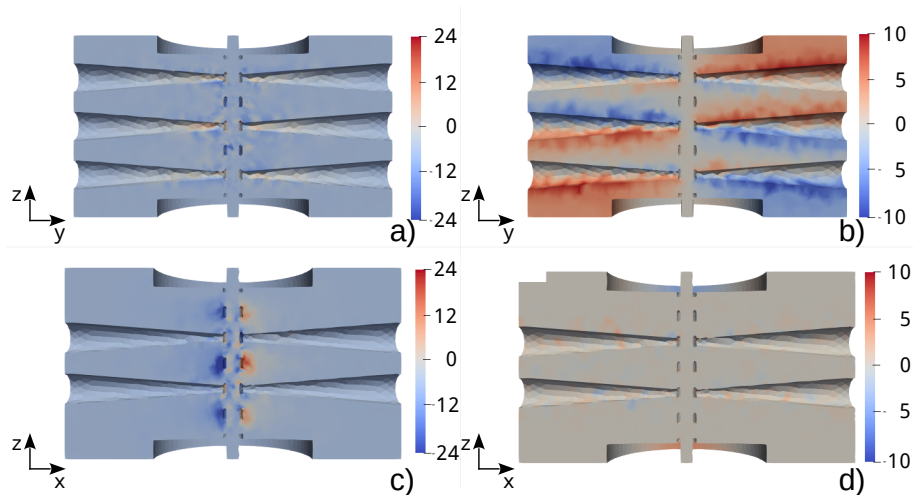


Abbildung 3.21: Darstellung der skalaren Feldverteilungen der CH-Kavität des FRANZ-Typs mit $\beta = 0,11$, welche durch die FEM bestimmt wurden. (a) E_x -Feldverteilung in der yz -Ebene. (b) H_x -Feldverteilung in der yz -Ebene. (c) E_x -Feldverteilung in der xz -Ebene. (d) H_x -Feldverteilung in der xz -Ebene.

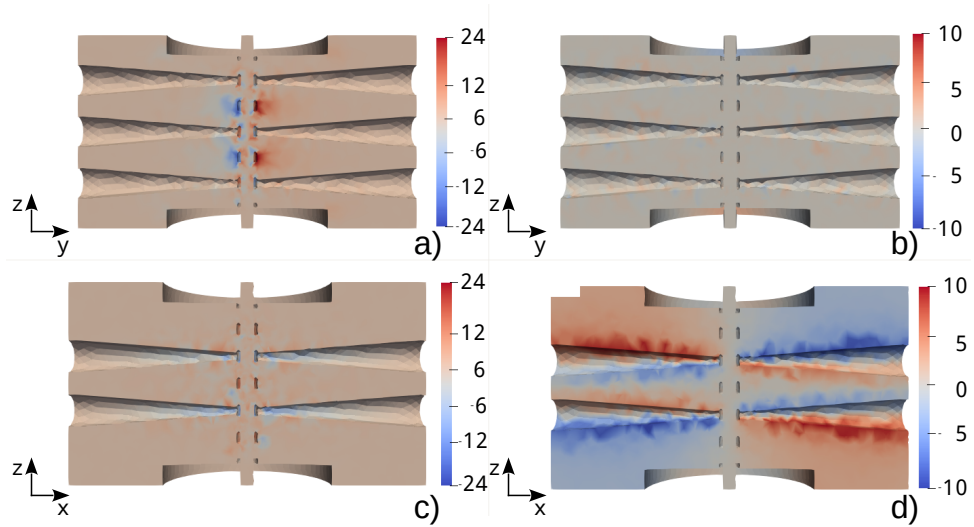


Abbildung 3.22: Darstellung der skalaren Feldverteilungen der CH-Kavität des FRANZ-Typs mit $\beta = 0,11$, welche durch die FEM bestimmt wurden. (a) E_y -Feldverteilung in der yz -Ebene. (b) H_y -Feldverteilung in der yz -Ebene. (c) E_y -Feldverteilung in der xz -Ebene. (d) H_y -Feldverteilung in der xz -Ebene.

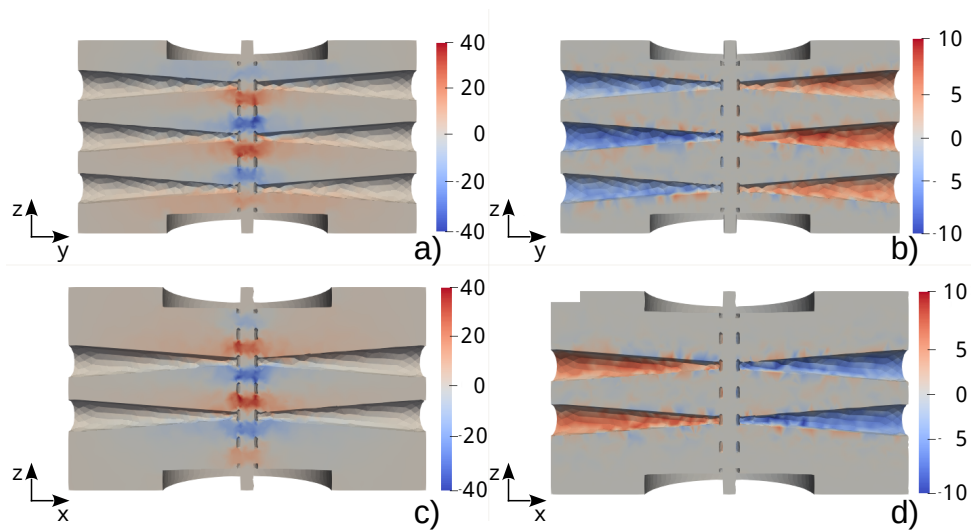


Abbildung 3.23: Darstellung der skalaren Feldverteilungen der CH-Kavität des FRANZ-Typs mit $\beta = 0,11$, welche durch die FEM bestimmt wurden. (a) E_z -Feldverteilung in der yz -Ebene. (b) H_z -Feldverteilung in der yz -Ebene. (c) E_z -Feldverteilung in der xz -Ebene. (d) H_z -Feldverteilung in der xz -Ebene.

Tabelle 3.4: Ergebnisse der Feldsimulationen über die FEM für die 84 CH-Kavitäten. Zusätzlich sind die Eigenfrequenzen der Feldsimulationen über CST Studio Suite angegeben.

β	FRANZ			Low		Normal		High	
	H-Feld f [MHz]	E-Feld f [MHz]	CST f [MHz]	H-Feld f [MHz]	CST f [MHz]	H-Feld f [MHz]	CST f [MHz]	H-Feld f [MHz]	CST f [MHz]
0,05	174,364	171,312	175,064	305,091	300,005	293,996	300,008	291,773	300,018
0,06	174,494	170,923	175,075	298,207	300,034	294,620	300,013	292,970	300,012
0,07	175,301	171,524	175,065	304,781	300,040	294,607	300,050	295,282	300,015
0,08	176,288	172,594	175,102	298,036	300,052	294,576	300,048	295,538	300,009
0,09	176,221	173,021	174,942	304,402	300,011	295,029	300,019	294,145	300,005
0,10	176,533	173,489	175,013	297,970	300,051	296,516	300,016	293,305	300,008
0,11	176,678	174,007	174,970	303,683	300,013	296,900	300,080	291,925	300,006
0,12	176,352	174,119	174,905	298,096	300,021	295,664	300,040	291,744	300,006
0,13	176,214	173,876	175,092	303,412	300,010	294,958	300,067	296,196	300,015
0,14	176,038	173,982	174,974	298,508	300,053	295,053	300,024	295,641	300,027
0,15	175,935	173,810	175,046	301,856	300,043	295,808	300,061	292,489	300,009
0,16	175,967	173,899	175,051	299,762	300,096	292,607	300,031	292,704	300,005
0,17	175,812	173,980	175,024	300,429	300,035	294,401	300,063	295,381	300,006
0,18	175,869	174,140	174,920	298,020	300,025	294,545	300,067	292,990	300,007
0,19	175,983	174,327	175,082	297,960	300,009	297,130	300,076	294,280	300,004
0,20	175,872	174,347	175,072	298,222	300,016	293,951	300,036	295,339	300,021
0,21	175,668	174,361	175,043	298,123	300,020	297,018	300,003	292,888	300,005
0,22	175,583	174,337	174,942	297,687	300,021	295,711	300,001	297,530	300,009
0,23	175,398	174,241	175,012	297,514	300,014	295,642	300,001	296,722	300,012
0,24	175,365	174,144	175,037	297,819	300,052	294,736	300,015	293,919	300,026
0,25	175,069	173,974	174,993	297,382	300,009	293,338	300,004	296,556	300,017

3.3 Semi-Analytische Beschreibung von CH-Kavitäten für genäherte Felder

Ein alternativer Ansatz zu den numerischen Approximationen bei der Bestimmung der Eigenfrequenz der CH-Kavitäten bilden die semi-analytischen Untersuchungen aus [Cle11; Pod09] dar. Die Grundidee des Modells besteht darin, über die Gleichheit des zeitlichen Mittels (siehe Gleichung 2.22) der gespeicherten elektrischen Energie W_E und der gespeicherten magnetischen Energie W_M im Resonator die Resonanzfrequenz zu bestimmen. Hierfür muss sowohl das elektrische Feld E als das magnetische Feld H bestimmt werden, was im Folgenden nachvollzogen werden soll.

Ausgangspunkt für die Überlegungen sind die charakteristischen Feldverteilungen im Inneren der CH-Kavitäten, welche mit ihrer Resonanzfrequenz f schwingen. Betrachtet man die elektromagnetischen Feldverteilungen der Kavitäten aus den vorangegangenen Abschnitten in ihrer vektoriellen (siehe Abbildung 2.8) oder skalaren (siehe Abbildungen 3.21, 3.22 und 3.23) Repräsentation, stellt man fest, dass das Magnetfeld \vec{H} im Wesentlichen um die Stützen konzentriert ist; das Feld wickelt sich quasi um die Stützen herum. Dabei sind die Rotationsrichtungen der magnetischen Felder der jeweiligen Stützenpaare entgegengesetzt. Der so gebildete periodische Fluss $\vec{\Phi}$ des Magnetfeldes führt zu Ladungsströmen,

die zu einer induktiven elektrischen Aufladung der Stützen und der Driftröhren führen. Es sind jeweils zwei benachbarte Stützen und Driftröhren entgegengesetzt polarisiert. Die Polarisierung führt zu einem longitudinal dominanten elektrischen Feld zwischen den Driftröhren; benachbarte Driftstrecken besitzen ein entgegengesetztes elektrisches Feld. Daher kann nur jede zweite Driftstrecke zum Beschleunigen von gleichgeladenen Teilchen verwendet werden. Da die Potentialdifferenz U_E des elektrischen Feldes in den Quadranten durch den zeitharmonischen magnetischen Fluss $\dot{\Phi}$ verursacht wird, kann dieser mit der Induktionsspannung U_i gleichgesetzt werden. Dabei gilt:

$$|U_i| = \dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_T} \mu_0 H_z(r', t) r' dr' d\varphi' \stackrel{!}{=} |U_E| \quad (3.28)$$

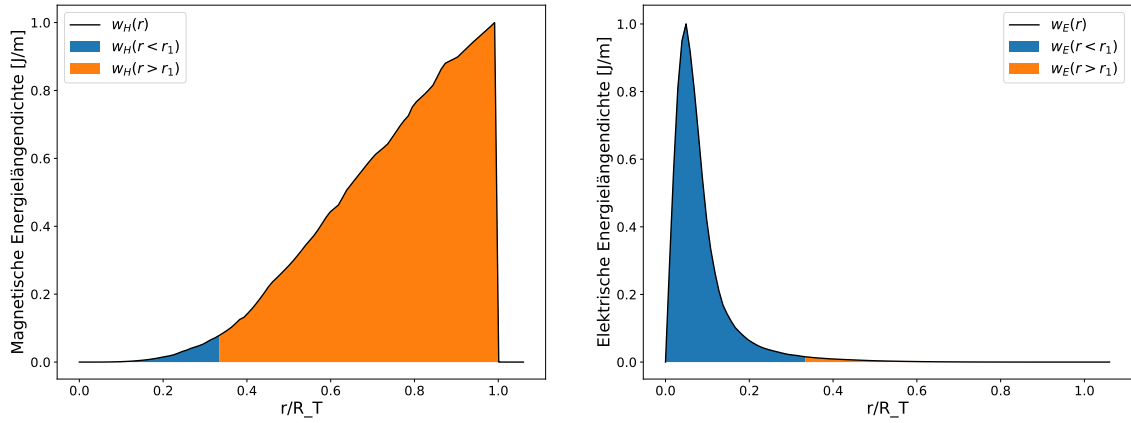


Abbildung 3.24: Normiertes elektrisches Feld und normiertes magnetisches Feld einer CH-Kavität. Hierbei ist R_T der Tankinnenradius, w_H bezeichnet die magnetische Energiedichte und w_E die elektrische Energiedichte. r_1 wird als der Bereich bezeichnet, in dem der Beitrag des magnetischen Feldes zur magnetischen Energiedichte vernachlässigbar ist. In der linken Abbildung entspricht er der blau markierten Fläche. In der rechten Abbildung ist zu erkennen, dass die elektrische Energiedichte innerhalb von r_1 dominant ist.

Aus Abbildung 3.24 links, wird ersichtlich, dass kein nennenswerter Anteil des Magnetfeldes \vec{H} nahe des radialen Zentrums ($r \leq r_1$) existiert. Des Weiteren existiert nur ein vernachlässigbar kleiner Anteil des longitudinalen Magnetfeldes im Bereich der Stützen. Somit erhält man für die Induktionsspannung U_i unter der Berücksichtigung seiner Zeitharmonie und der vernachlässigbaren Anteile des Magnetfeldes:

$$\begin{aligned} |U_i| &= \dot{\Phi} = \frac{d}{dt} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{R_T} \mu_0 H_0(r') e^{i\omega t} r' dr' d\varphi' \\ &= \frac{\omega \mu_0 H_0}{2} \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} \int_{r_1}^{R_T} r' dr' d\varphi' \\ &= \frac{c_1 \mu_0 \omega H_0}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\Delta\varphi \right) (R_T^2 - r_1^2) \end{aligned} \quad (3.29)$$

wobei $H_0 := H|_{r=R_T}$ dem magnetischen Feld am Tankrand entspricht und c_1 ein Kor-

rektorterm ist, der die Überschätzung der induktiven Spannung aufgrund der Annahme eines homogenen Magnetfeldes H_z ausgleicht. Die elektrische Spannung U_E innerhalb eines elektrischen Feldes \vec{E} entspricht dem Linienintegral zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 entlang eines festgelegten Pfades $U_E = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s}$. Für den Pfad entlang eines Kreisbogens mit festem Radius r zwischen P_1 und P_2 , entspricht das elektrische Feld \vec{E} vollständig seiner azimutalen elektrischen Feldkomponente $E_\phi(r)$ (siehe Abbildung 3.25 links).

$$|U_E| = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} d\vec{s} = \int_{\Delta\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\Delta\varphi} E_\phi(r') r d\varphi' \quad (3.30)$$

Nach Gleichung 3.28 entspricht die Induktionsspannung U_i der elektrischen Spannung U_E . Durch die Gleichsetzung von Gleichung 3.29 und Gleichung 3.30 erhält man eine direkte Abhängigkeit des elektrischen Feldes $E_0(r)$ vom magnetischen Feld $H_0(r)$.

$$E_\phi(r) = \frac{\omega\mu_0 c_1 H_0}{2} \left(\frac{R_T^2 - r^2}{r} \right) \quad (3.31)$$

3.3.1 Bestimmung der magnetischen Feldenergie

Für die Bestimmung der magnetischen Feldenergie W_M muss die Energiedichte des magnetischen Feldes über das Resonatorvolumen¹ $V \in [0, R_T] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\beta\lambda}{2}]$ integriert werden. Es stellt sich heraus, dass es günstig ist, das Resonatorvolumen in drei disjunkte Teilvolumina $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ aufzuspalten, siehe Abbildung 3.25.

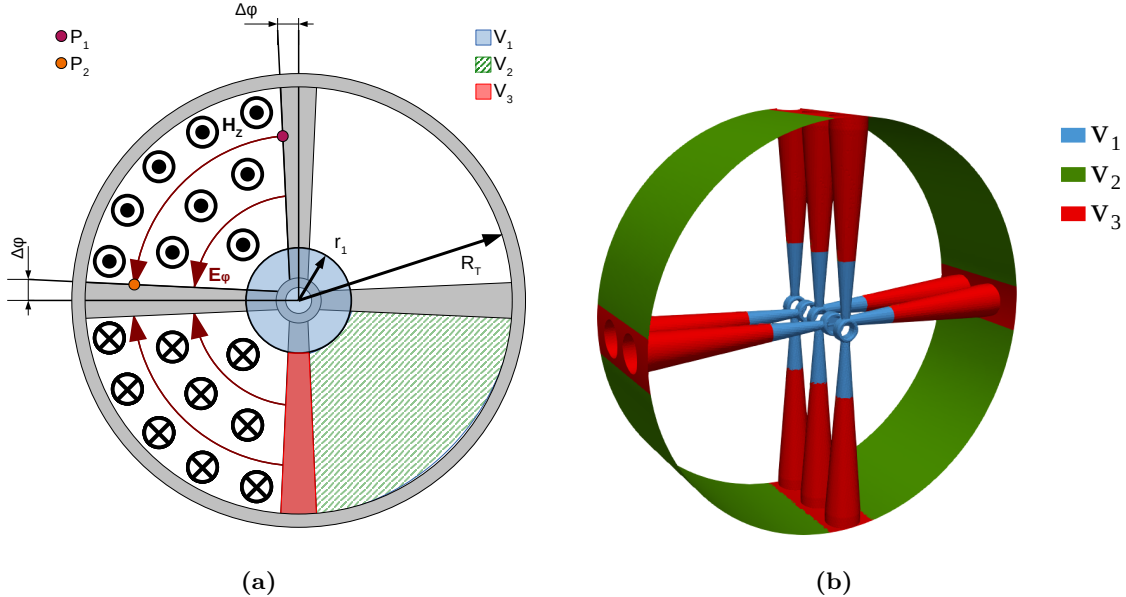


Abbildung 3.25: Aufteilung der CH-Kavität in ihre Teilgebiete V_1 , V_2 und V_3 . (a) Im Querschnitt. V_2 und V_3 sind nur im ersten Quadranten eingefärbt. (b) In der Volumendarstellung.

¹ Hier wird nur das Volumen zwischen den Mittelpunkten zweier Driftröhren betrachtet.

Das erste Teilvolumen $V_1 \in [0, r_1] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\beta\lambda}{2}]$ entspricht dem Volumen des inneren Zylinders. Das zweite Teilvolumen besteht aus den vier Quadranten des freien Raums die sich zwischen je zwei Stützen befinden.

$$V_2 \in \bigcup_{i=1}^4 [r_1, R_T] \times \left[\Delta\varphi + \frac{(i-1) \cdot \pi}{2}, \frac{i \cdot \pi}{2} - \Delta\varphi \right] \times \left[0, \frac{\beta\lambda}{2} \right].$$

Da jeder Quadrant aus Symmetriegründen den gleichen Beitrag zur gespeicherte magnetischen Energie W_M und gespeicherten elektrischen Energie W_E liefert, genügt es, die Integration über den ersten Quadranten $[r_1, R_T] \times [\Delta\varphi, \frac{\pi}{2} - \Delta\varphi] \times [0, \frac{\beta\lambda}{2}]$ laufen zu lassen und mit vier zu multiplizieren. Das letzte Teilvolumen V_3 besteht aus den vier übrig geblieben Quadranten, die von dem freien Volumen innerhalb einer Stütze mit Stützenradius r_s

$$V_3 \in \bigcup_{i=1}^4 [r_1, R_T] \times \left[-\Delta\varphi + \frac{(i-1) \cdot \pi}{2}, \Delta\varphi + \frac{(i-1) \cdot \pi}{2} \right] \times \left[0, \frac{\beta\lambda - r_s}{2} \right]$$

aufspannt werden. Auch hier liefert jeder Quadrant aus Symmetriegründen den gleichen Beitrag und es genügt, die Integration über den ersten Quadranten $[r_1, R_T] \times [-\Delta\varphi, \Delta\varphi] \times [\frac{r_s}{2}, \frac{\beta\lambda}{2}]$ laufen zu lassen und mit vier zu multiplizieren.

Da die Energiedichte im Inneren W_{M1} nur einen kleinen Beitrag liefert, kann dieser Beitrag vernachlässigt werden. Die Beiträge des zweiten und dritten Teilvolumens entsprechen dem Volumen im äußeren Zylinder $r \geq r_1$. Der Beitrag des zweiten Teilvolumens liefert:

$$\begin{aligned} W_{M2} &= \frac{\mu_0}{2} \iiint_{V_2} |H|^2 d\tau \\ &= 4 \cdot \frac{\mu_0}{2} \int_{r_1}^{R_T} \int_{\Delta\varphi}^{\frac{\pi}{2} - \Delta\varphi} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} c_1^2 H_0^2 r' dz' d\varphi' dr' \\ &= 2\mu_0 c_1^2 H_0^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 2\Delta\varphi \right) \cdot \left(\frac{R_T^2 - r_1^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{\beta\lambda}{2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 c_1^2 H_0^2 \beta\lambda}{4} \cdot (\pi - 4\Delta\varphi) \cdot (R_T^2 - r_1^2) \end{aligned} \quad (3.32)$$

In [Cle11] wurde durch Simulationen eine Verstärkung des mittleren Magnetfeldes um die Stützen im Vergleich zu H_0 gefunden. Die Ursache der Verstärkung ist auf die größeren Ströme auf der Stützenoberfläche zurückzuführen. Diese steigt linear mit der Teilchengeschwindigkeit β an. Für die Verstärkung gilt:

$$H(z) = H_0 (12,8\beta + 0,35) \frac{2z}{\beta\lambda - r_s}$$

Somit ergibt sich ein Beitrag für die vom Magnetfeld gespeicherte Energie im letzten

Teilvolumen von:

$$\begin{aligned}
W_{M_3} &= \frac{\mu_0}{2} \iiint_{V_3} |H(z)|^2 d\tau \\
&= \frac{\mu_0}{2} \iiint_{V_3} H_0^2 \cdot (12,8\beta + 0,35)^2 \left(\frac{2 \cdot z}{\beta\lambda - r_s} \right)^2 d\tau \\
&= 8\mu_0 H_0^2 \cdot \left(\frac{12,8\beta + 0,35}{\beta\lambda - r_s} \right)^2 \int_{r_1}^{R_T} \int_{-\Delta\varphi}^{\Delta\varphi} \int_0^{\frac{\beta\lambda - r_s}{2}} z^2 r dz' d\varphi' dr' \\
&= \mu_0 H_0^2 \Delta\varphi \cdot (R_T^2 - r_1^2) \cdot (12,8\beta + 0,35)^2 \cdot \frac{\beta\lambda - r_s}{3} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Die gesamte gespeicherte magnetische Energie ergibt sich aus der Summe der zwei Beiträge:

$$\begin{aligned}
W_M &= W_{M_1} + W_{M_2} + W_{M_3} \approx W_{M_2} + W_{M_3} \\
&= \mu_0 c_1^2 H_0^2 \beta\lambda (R_T^2 - r_1^2) \left[\frac{(\pi - 4\Delta\varphi)}{4} + \frac{\Delta\varphi (12,8\beta - 0,35)^2 \left(1 - \frac{r_s}{\beta\lambda}\right)}{3c_1^2} \right] \tag{3.34}
\end{aligned}$$

3.3.2 Bestimmung der elektrischen Feldenergie

Zur Bestimmung der vom elektrischen Feld gespeicherten Energie im Resonator W_E muss die Energiedichte des elektrischen Feldes über das Resonatorvolumen integriert werden. Wie im magnetischen Fall ist es auch hier sinnvoll das Volumen des Resonators $V \in [0, R_T] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{\beta\lambda}{2}]$ in dieselben drei disjunkten Teilvolumen $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ zu fragmentieren und ihre Beiträge einzeln zu betrachten. Wie in den Simulationen der vorangegangenen Abschnitte sind hier die höchsten Feldstärken des elektrischen Feldes zu erwarten (siehe Abbildung 3.24 rechts). Das elektrische Feld wird durch das magnetische Feld H_0 (siehe Gleichung 3.31) beschrieben und wird in diesem Bereich als konstant angenommen:

$$E(r)|_{r=r_1} = \frac{c_1 \omega \mu_0 H_0}{2} \frac{R_T^2 - r_1^2}{r_1} \tag{3.35}$$

Somit ergibt sich eine Energie von:

$$\begin{aligned}
W_{E_1} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_1} |E|^2 d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} E(r)|_{r=r_1}^2 r' dz' d\varphi' dr' \\
&= \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2 (R_T^2 - r_1^2)^2}{8 r_1^2} \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} r' dz' d\varphi' dr' \\
&= \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2 \pi \beta\lambda (R_T^2 - r_1^2)^2}{16} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Bei der Integration über das Volumen V_1 wird von einem freien Raum ausgegangen in dem das elektrische Feld gleichmäßig verteilt ist. Da jedoch im Inneren der Driftröhren kein Feld existiert, muss dieser Beitrag abgezogen werden.

$$W_{E_1} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2 \pi \beta \lambda (R_T^2 - r_1^2)^2}{16} \left(1 - \frac{2g r_a^2}{\beta \lambda r_1^2} \right) \quad (3.37)$$

Dabei ist r_a der Driftröhrenaußenradius und g der Gap-to-Length-Faktor, der bei den untersuchten CH-Kativäten stets der Länge der Driftröhren entspricht $g = \frac{\beta \lambda}{4}$.

$$W_{E_1} = \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2 \pi \beta \lambda (R_T^2 - r_1^2)^2}{16} \left(1 - \frac{r_a^2}{2r_1^2} \right) \quad (3.38)$$

Der Beitrag der elektrischen Feldenergie im Volumen V_2 entspricht:

$$\begin{aligned} W_{E_2} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_{E_2}} |E|^2 d\tau \\ &= 4 \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{r_1}^{R_T} \int_{\Delta\varphi}^{\frac{\pi}{2} - \Delta\varphi} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} E_\varphi^2(r) r' dz' d\varphi' dr' \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2}{2} \int_{r_1}^{R_T} \int_{\Delta\varphi}^{\frac{\pi}{2} - \Delta\varphi} \int_0^{\frac{\beta\lambda}{2}} \left(\frac{R_T^2 - r'^2}{r'} \right)^2 r' dz' d\varphi' dr' \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2}{2} \left(\frac{\beta\lambda}{2} \right) \left(\frac{\pi - 4\Delta\varphi}{2} \right) \int_{r_1}^{R_T} \frac{(R_T^2 - r'^2)^2}{r'} dr' \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2}{8} (\beta\lambda) (\pi - 4\Delta\varphi) \\ &\quad \left(R_T^2 \left[R_T^2 \left(\log \left(\frac{R_T}{r_1} \right) - 3/4 \right) + r_1^2 - \frac{r_1^4}{4R_T^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Das elektrische Feld im letzten Teilvolumen V_3 liefert nur einen geringen Beitrag zur Gesamtenergie, weswegen dieser Beitrag vernachlässigt wird. Die gesamte gespeicherte elektrische Energie ergibt sich somit aus der Summe der ersten beiden Beiträge:

$$\begin{aligned} W_E &= W_{E_1} + W_{E_2} + W_{E_3} \approx W_{E_1} + W_{E_2} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 \omega^2 c_1^2 H_0^2 \beta \lambda (R_T^2 - r_1^2)}{8} \left[\frac{\pi (R_T^2 - r_1^2)}{2} \left(1 - \frac{r_a^2}{2r_1^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\pi - 4\Delta\varphi}{(R_T^2 - r_1^2)} \left(R_T^2 \left(R_T^2 \left(\log \left(\frac{R_T}{r_1} \right) - 3/4 \right) + r_1^2 - \frac{r_1^4}{4R_T^2} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Da die gespeicherte elektrische W_E und die gespeicherte magnetische Feldenergie W_M im zeitlichen Mittel denselben Beitrag liefert, kann über ihre Gleichsetzung die Eigenfrequenz f bestimmt werden.

$$W_M = W_E \iff f = \sqrt{\frac{\omega^2 W_M}{4\pi^2 W_E}}$$

$$f = \sqrt{\frac{2 \cdot c_0^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi(R_T^2 - r_1^2)}{2} \left(1 - \frac{r_a^2}{2r_1^2}\right) + \frac{\pi - 4\Delta\varphi}{(R_T^2 - r_1^2)} \left(R_T^2 \left(R_T^2 \left(\log\left(\frac{R_T}{r_1}\right) - 3/4 \right) + r_1^2 - \frac{r_1^4}{4R_T^2} \right) \right) \right]} \left[\frac{(\pi - 4\Delta\varphi)}{4} + \frac{\Delta\varphi(12,8\beta - 0,35)^2 \left(1 - \frac{r_s}{\beta\lambda}\right)}{3c_1^2} \right]} \right] \quad (3.41)$$

Alle Parameter der Gleichungen 3.34 und 3.40 bzw. 3.41 sind durch die Geometrie und die Annahmen, welche durch die Felduntersuchungen der Simulationen getroffen wurden, festgelegt — bis auf r_1 . Daher wird im folgenden Abschnitt näher auf die Bestimmung von r_1 eingegangen.

3.3.3 Untersuchung von r_1

In [Pod09] wurde über Simulationen ein idealisierter Verlauf des longitudinalen Magnetfeldes $H_z(r)$ gefunden:

$$H_z(r) = H_0 \left(1 - \frac{(R_T - r)^2}{R_T^2} \right) \quad (3.42)$$

Obwohl die Annahme eines homogenen Feldverlaufs aus Gleichung 3.42 zu einer Überschätzung der induktiven Spannung und somit auch der durch das magnetische Feld gespeicherten Energie führt¹, ist es sinnvoll für eine quantitative Bestimmung von r_1 von einem solchen homogenen Feldverlauf auszugehen. In [Cle11] wurde r_1 grafisch bestimmt.

In dieser Arbeit wurde ein alternatives Vorgehen entwickelt. Dabei wird das Quadrat des longitudinalen Magnetfeldes H_z mit dem Radius r multipliziert und gegen den Radius r aufgetragen. Die sich so ergebende Funktion $F(r) := H_z(r)^2 r$ wird linear durch die Funktion $y = m \cdot r + b$ approximiert. Dabei liefert der Schnittpunkt der x-Achsen mit der linear approximierten Funktion r_1 . Die lineare Approximation wird durch die maximale Tangentialsteigung des Feldverlaufes von $F(r)$ bestimmt. Hierbei ist $F(r) := H_z(r)^2 r$ proportional zur gespeicherten Energie und steigt für das angenommene homogene longitudinale Magnetfeld H_z linear mit dem Radius r an. Die Tangentialsteigung des Feldverlaufes $F(r)$ entspricht seiner Ableitung $f(r) = \frac{\partial F(r)}{\partial r}$, das Maximum kann durch die Nullstellenbestimmung $f(r)'|_{r=r_0} \stackrel{!}{=} 0$ seiner Ableitung errechnet werden. Dabei wird durch die Bedingung $f(r_0)'' < 0$ sichergestellt, dass es sich bei der Nullstelle r_0 um ein Maximum

¹ In [Cle11] ergaben genauere Simulationen, dass die Annahme der Homogenität des longitudinalen Magnetfeldes $H_z(r)$ durch einen Korrekturterm $c_1 = 0,92$, der die Inhomogenität des Feldes widerspiegelt, ergänzt werden musste.

handelt. Die Steigung m der Geraden entspricht dem Funktionswert von $f(r_0)$ in seinen Maximum. Für den Schnittpunkt der y-Achse n gilt, $b = F(r_0) - f(r_0) \cdot r_0$ und für r_1 :

$$r_1 = \frac{-b}{m} = \frac{f(r_0) \cdot r_0 - F(r_0)}{f(r_0)} \quad (3.43)$$

Es folgt die explizite Auswertung der idealisierten Funktion $F(r) := H_z(r)^2 r$.

$$F(r) = H_0^2 r \left(1 - \frac{(R_T - r)^2}{R_T^2} \right)^2 \quad (3.44)$$

$$f(r) = \frac{\partial F(r)}{\partial r} = \frac{H_0^2 r^2 (12R_T^2 - 16R_T r + 5r^2)}{R_T^4} \quad (3.45)$$

$$f(r)'|_{r=r_0} = \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} = \frac{4H_0^2 r (6R_T^2 - 12R_T r + 5r^2)}{R_T^4} \stackrel{!}{=} 0$$

$$r_0 = \frac{R_T}{5} (6 \pm \sqrt{6}) \text{ mit } r_0 \leq R_T \iff r_0 = \frac{R_T}{5} (6 - \sqrt{6}) \quad (3.46)$$

$$f(r)''|_{r=r_0} = \frac{\partial^3 F(r)}{\partial r^3} = \frac{H_0^2 (24R_T^2 - 96R_T r + 60r^2)}{R_T^4}$$

$$= \frac{-48(\sqrt{6} - 1)}{5} < 0$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-n}{m} = \frac{f(r_0) \cdot r_0 - F(r_0)}{f(r_0)} = \frac{r_0 (8R_T^2 - 12R_T r_0 + 4r_0^2)}{12R_T^2 - 16R_T r_0 + 5r_0^2} \\ &= \frac{4r_0 (r_0 - R_T)}{5r_0 - 6R_T} = \frac{R_T (28\sqrt{6} - 48)}{25 \cdot \sqrt{6}} \approx 0,336163R_T \end{aligned} \quad (3.47)$$

Somit wird ersichtlich, dass r_1 unabhängig von der maximalen magnetischen Feldstärke $H_0(r) = H_{Z,max}(r)$ ist. r_1 hängt nur von dessen Verlauf und dem Tankinnenradius R_T ab. Eine grafische Darstellung der Vorgehensweise ist in Abbildung 3.28 zu finden.

Um die Verläufe des longitudinalen Magnetfeldes $H_z(r)$ der Simulationen dieser Arbeit mit dem idealisierten Verlauf aus Gleichung 3.42 vergleichen zu können, wird das magnetische Feld auf das Intervall $[0, 1]$ normiert; dabei gilt $H_{z,max}(r) = 1$, $R_T = 1$ und $r \in [0, 1]$. In Abbildung 3.26 erkennt man, dass nur im FRANZ-Modell für $\beta > 0,08$ das maximale longitudinale Magnetfeld $H_{z,max}(r)$ am Tankinnenradius R_T annimmt, in allen anderen Fällen liegt das Feldmaximum im Inneren des Tanks und fällt auf ein konstantes Plateau ab. Dabei kommt es wie in [Cle11] zu einem steileren Anstieg des longitudinalen Magnetfeldes im Vergleich zum idealisierten Verlauf. Der Anstieg ist umso steiler, je kleiner die Geschwindigkeiten sind. Dieser Verlauf führt zu einer Überschätzung der induzierten Spannung und der durch das Magnetfeld gespeicherten Energie, die sich wie in [Cle11] durch einen Korrekturfaktor $c_1 < 1$ korrigieren lassen sollte. Für den FRANZ-Typen mit $\beta > 0,08$, stimmen die Feldverläufe mit dem idealisierten Verlauf überein, wobei der Anstieg des longitudinalen Magnetfeldes für Geschwindigkeiten von $\beta > 0,10$ flacher als der idealisierte Verlauf verläuft. Hierbei kommt es zu einer Unterschätzung der induzierten Spannung, sowie

der gespeicherten Energie. Dies sollte durch einen Korrekturfaktor $c_1 > 1$ korrigiert werden. Für alle Simulationen kann festgestellt werden: Je kleiner der longitudinale Abstand der Driftröhren zueinander ist, desto steiler verläuft der Anstieg des Magnetfeldes. Somit sollte auch der Korrekturfaktor eine Abhängigkeit des Abstandes der Driftröhren zueinander aufweisen.

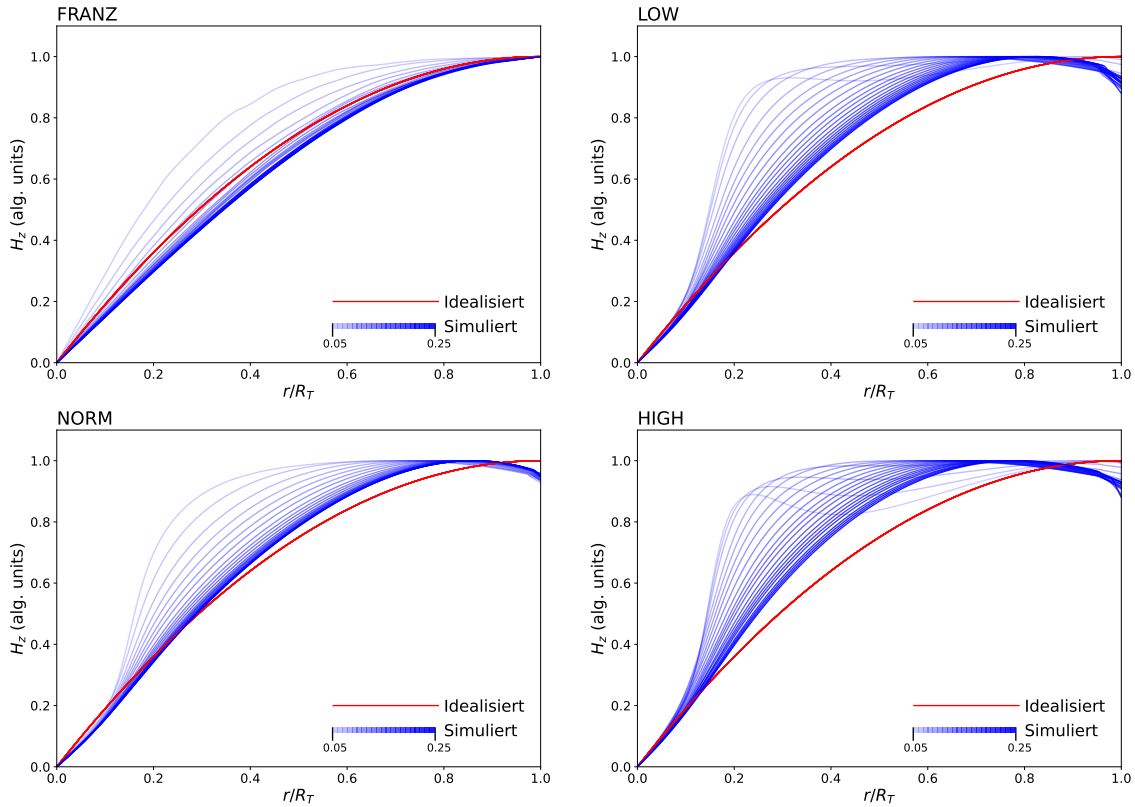


Abbildung 3.26: Entwicklung des longitudinalen Magnetfeldes H_z der vier Grundtypen über die Teilchengeschwindigkeit β , im Vergleich zum idealisierten Feldverlauf.

Die Verläufe der longitudinalen Magnetfelder H_z führen zu den in Abbildung 3.29 dargestellten $H_z^2 r$ Verläufen.

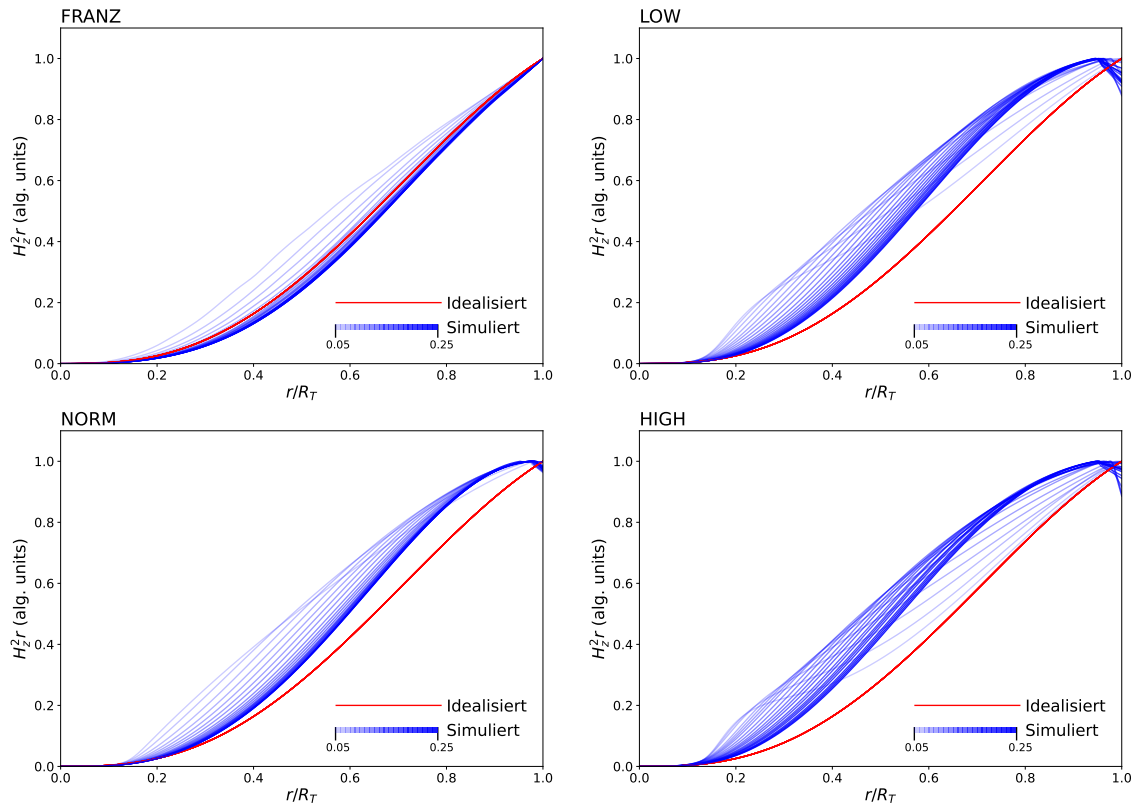


Abbildung 3.27: Entwicklung von $H_z^2 r$ der vier Grundtypen über die Teilchengeschwindigkeit β , im Vergleich zum idealisierten Funktionsverlauf.

Die Bestimmung von r_1 aus den Simulationen erfolgt im Wesentlichen äquivalent zu Gleichung 3.41. Da der Verlauf des longitudinalen Magnetfeldes der Simulationen nur empirisch bekannt ist, müssen die Differentialquotienten in den Ableitungen durch die Differenzenquotienten approximiert werden.

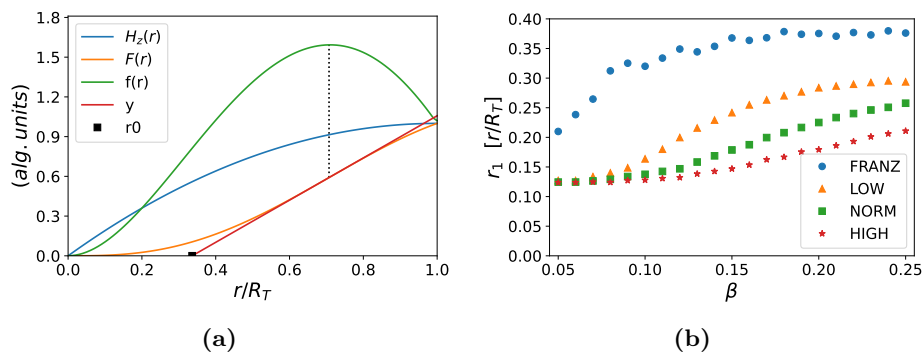


Abbildung 3.28: (a) Schematische Darstellung der Vorgehensweise zur Bestimmung von r_1 . (b) Ergebnis der r_1 -Werte.

Aus Abbildung 3.28 b) erkennt man den allgemeinen Anstieg des r_1 -Werts mit steigender

Teilchengeschwindigkeit β . Setzt man die so gewonnen r_1 -Werte mit den restlichen Parametern in Gleichung 3.41 ein, erhält man die in Tabelle 3.5 aufgeführten Resonanzfrequenzen.

Tabelle 3.5: Zusammenstellung der Ergebnisse der semi-analytischen Untersuchung der 84 CH-Kavitäten.

β	FRANZ		Low		Normal		High	
	r_1 [mm]	f [MHz]	r_1 [mm]	f [MHz]	r_1 [mm]	f [MHz]	r_1 [mm]	f [MHz]
0,05	72,0	166,088	19,5	267,787	20,3	249,913	21,4	311,905
0,06	80,6	175,708	19,8	263,166	20,6	246,348	21,6	308,404
0,07	89,3	182,566	21,3	262,479	21,2	243,935	22,0	305,274
0,08	105,9	193,795	22,7	262,552	22,1	241,285	22,2	300,410
0,09	111,2	195,364	24,5	263,282	23,3	240,596	23,1	295,642
0,10	110,4	192,352	27,5	268,903	24,3	239,011	23,6	291,252
0,11	116,2	194,142	30,7	275,415	25,6	238,534	24,4	287,082
0,12	122,9	195,760	34,6	284,699	26,8	237,640	25,1	283,149
0,13	122,2	192,909	37,9	291,469	29,2	241,480	26,6	279,45
0,14	126,8	193,328	40,7	296,606	31,5	244,747	27,8	276,159
0,15	132,9	195,232	43,4	301,636	33,8	247,782	29,0	273,196
0,16	132,6	192,612	46,3	307,328	35,9	250,208	30,6	271,041
0,17	135,2	192,165	48,3	309,994	38,6	254,724	32,8	269,428
0,18	140,2	193,208	50,1	311,703	40,6	257,173	34,0	267,335
0,19	139,3	190,964	51,8	313,385	42,7	259,950	36,1	266,493
0,20	140,7	190,067	53,6	315,394	44,7	262,686	37,2	264,858
0,21	139,8	187,778	54,5	315,395	46,8	265,484	39,0	264,068
0,22	143,1	188,127	55,4	315,174	48,5	267,460	40,8	263,423
0,23	142,2	186,214	56,4	314,880	50,1	269,083	42,8	263,263
0,24	145,5	187,025	57,3	314,664	51,4	269,962	44,2	262,548
0,25	144,7	185,315	57,4	311,588	53,2	272,383	45,5	261,876

Im Folgenden soll die Eigenfrequenz aus Gleichung 3.41 mit den durch [Pod09] und [Cle11] verwendeten Methoden verglichen werden. Hierfür werden in allen drei Fällen die empirisch bestimmten r_1 -Werte aus Tabelle 3.5 eingesetzt. Dies führt zu den in Abbildung 3.29 dargestellten Resultaten.

Vergleicht man die Ergebnisse der drei Methoden, so zeigt sich, dass die mithilfe von [Pod09] gewonnenen Eigenfrequenzen für alle vier Typen einen zu niedrigen Wert annehmen. Die Werte, welche mithilfe der Methode aus [Cle11] bestimmt wurden, sind für die FRANZ- und Low-Typen zu hoch, für den Norm-Typen gut und für den High-Typen zu niedrig. Für kleine Stützenöffnungswinkel φ sind demnach die Werte zu hoch, für den mittleren Bereich sind die Werte gut. Mit steigenden Stützenöffnungswinkeln ergibt sich eine zu niedrige Eigenfrequenz. Für bessere Werte könnte das Modell einen Korrekturfaktor für den Stützenöffnungswinkel mit einbeziehen. Die in dieser Arbeit entwickelte Methode ergibt für den FRANZ-Typen zu hohe Werte, für den Low-Typen schwankt der Wert um die Sollfrequenz; für die anderen beiden Typen ergeben sich zu niedrige Werte. Die Abweichungsbreiten der Methoden für die jeweiligen Typen sind in Tabelle 3.6 zusammengetragen.

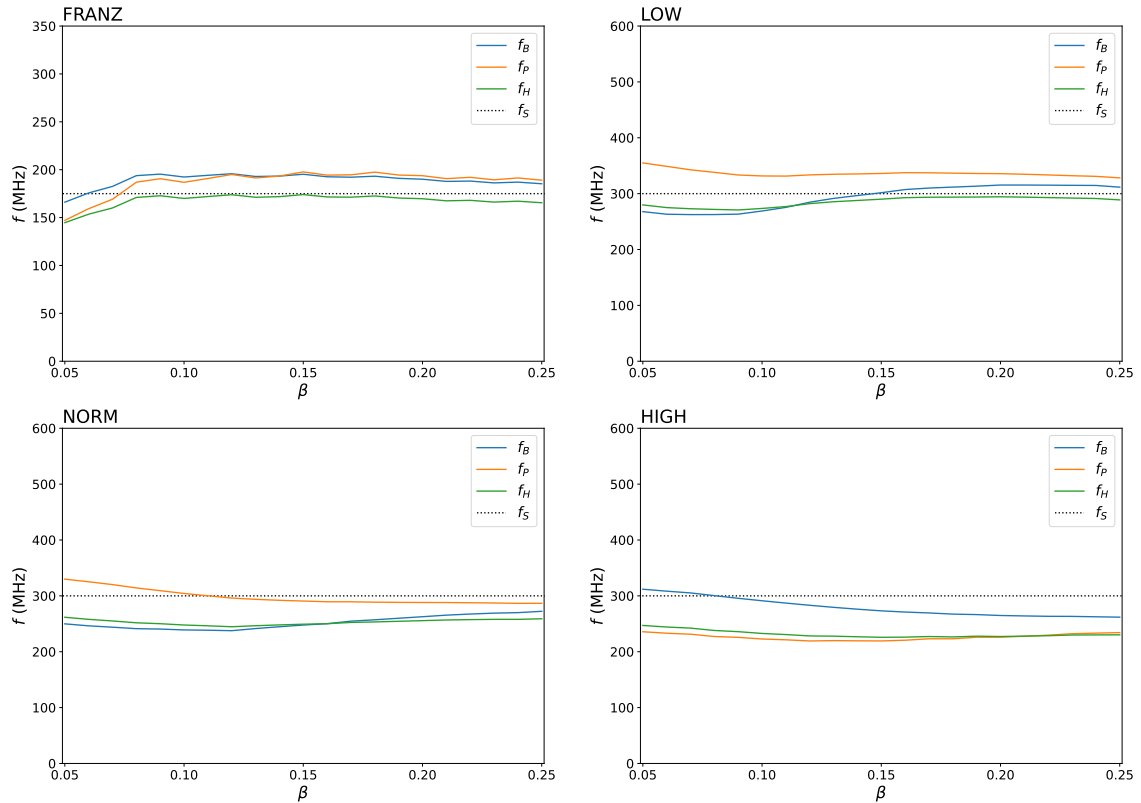


Abbildung 3.29: Vergleich der verschiedenen semi-analytischen Methoden zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der vier Grundtypen für die empirisch bestimmten r_1 -Werte. Dabei bezeichnet f_B die Eigenfrequenz, welche mithilfe von Gleichung 3.41 berechnet wurde; f_H wurde mithilfe der Methode aus [Pod09] berechnet, f_P ergibt sich aus den Berechnungen nach [Cle11] und f_S bezeichnet die Sollfrequenz aus den Simulationen mit CSD Studio Suite.

Tabelle 3.6: Abweichungsbreiten der Eigenfrequenzen der drei semi-analytischen Methoden für die vier Grundtypen.

Methode	FRANZ		Low		Normal		High	
	Max [%]	Min [%]	Max [%]	Min [%]	Max [%]	Min [%]	Max [%]	Min [%]
[Pod09]	-0,57	-17,32	-1,87	-9,74	-12,77	-18,43	-17,66	-24,73
[Cle11]	12,95	-15,95	18,33	9,42	9,98	-4,46	-21,4	-26,91
Gl. 3.41	11,86	-5,09	5,13	-12,51	-9,21	-20,79	3,97	-12,71

Nimmt man hingegen den theoretischen Wert von $r_1 \approx 0,3362$ aus Gleichung 3.44, erhält man die in Abbildung 3.30 Eigenfrequenzen:

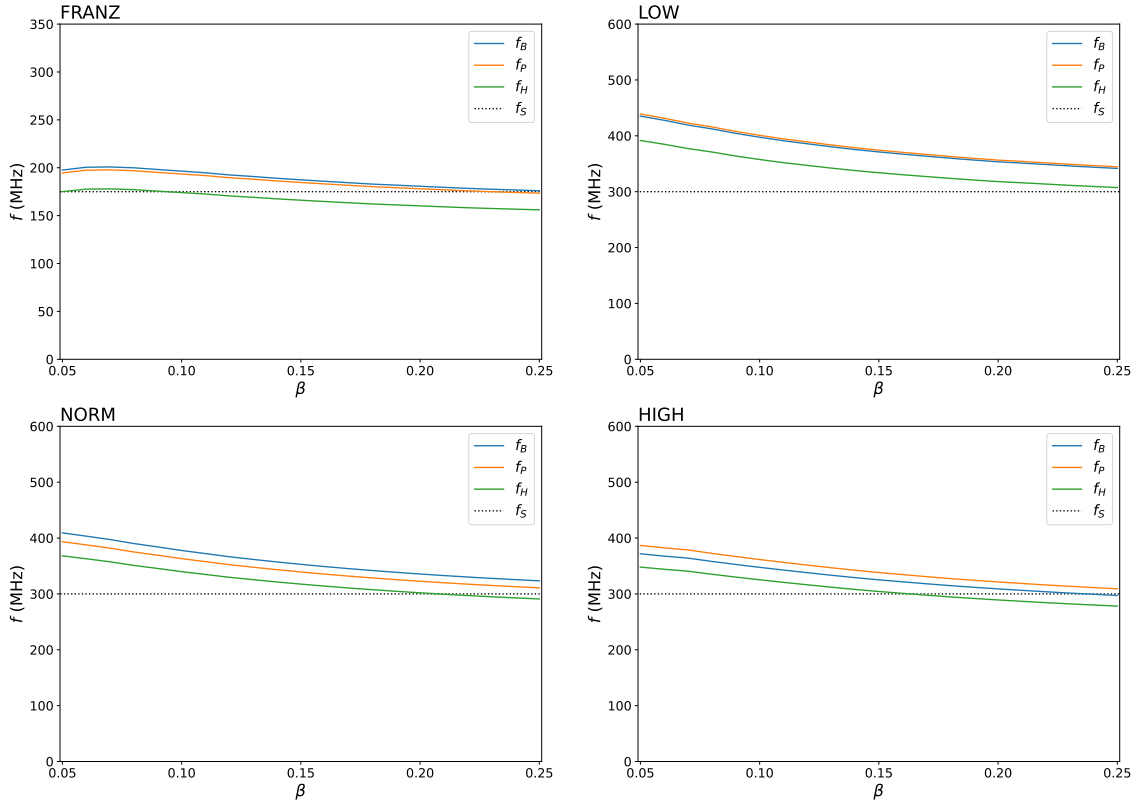


Abbildung 3.30: Vergleich der verschiedenen semi-analytischen Methoden zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der vier Grundtypen mit dem festen theoretischen r_1 -Wert. Dabei bezeichnet f_B die Eigenfrequenz, welche mithilfe von Gleichung 3.41 berechnet wurde; f_H wurde mithilfe der Methode aus [Pod09] berechnet, f_P ergibt sich aus den Berechnungen nach [Cle11] und f_S bezeichnet die Sollfrequenz aus den Simulationen mit CSD Studio Suite.

Die so bestimmten Frequenzen haben eine maximalen Überschätzung von 46,33% und einer maximalen Unterschätzung von $-10,83\%$. Es zeigt sich, dass die Verwendung eines festen r_1 -Wertes immer noch akzeptable Resultate für die Eigenfrequenzen liefert. Der Verlauf der Entwicklung der Eigenfrequenzen zeigt eine starke Abhängigkeit von der Teilchengeschwindigkeit β .

3.4 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden 84 CH-Kavitäten konstruiert, deren Resonanzfrequenzen f durch drei verschiedene Methoden (FIT, FEM und semi-analytisch) bestimmt wurden. Bei der ersten Methode handelt es sich um numerische Simulationen der Finite Integral Methode (FIT) des kommerziellen Programms CST Studio Suite. Durch die Bestimmung der optimalen Maschenweitendichte konnten die Eigenfrequenzen bis auf eine Genauigkeit von etwa 0,1% zur Sollfrequenz bestimmt werden. Die Simulationen durch CST Studio Suite wurden als Referenzmodell für die beiden anderen Methoden verwendet. Bei der zweiten Methode handelt es sich um ein selbstentworfenes numerisches Modell, basierend auf der Finiten Elemente Methode (FEM). Die Simulationen erfolgten vollständig in Python und verwendeten für die Diskretisierung `pygmsh` und zur Berechnung der Eigenwerte `DOLFIN`, beide Module sind als Open Source frei verfügbar. Die so bestimmten Eigenfrequenzen weichen um maximal 3% von den über CST Studio Suite bestimmten Eigenfrequenzen ab. Die beiden numerischen Verfahren (FIT und FEM) liefern neben dem Eigenwert noch deren Eigenvektoren, die den Feldverteilungen des elektrischen Feldes \vec{E} und des magnetischen Feldes \vec{H} innerhalb des Beschleunigers entsprechen. Somit kann in beiden Fällen eine detaillierte Untersuchung der Wirkung der elektromagnetischen Felder auf die zu beschleunigenden Teilchen erfolgen. Bei der letzten Methode handelt es sich um ein semianalytisches Verfahren, bei dem über die typischen Feldverteilungen des CH-Beschleunigers bei bekannter Geometrie, Aussagen über dessen Resonanzfrequenz getroffen wurden. Der entscheidende Parameter ist r_1 , der den Radius des Beschleunigers bis zu der Stelle angibt, an der das magnetische Feld vernachlässigt werden kann. r_1 wurde über die Feldverteilungen der Simulationen aus CST Studio Suite mithilfe einer linear Funktion $y = m \cdot x + b$, die den magnetischen Feldverlauf widerspiegelt, bestimmt. Dabei entspricht r_1 dem Schnittpunkt der x-Achse mit der linearen Funktion y . Für das in dieser Arbeit hergeleitete semi-analytische Verfahren weichen die Eigenfrequenzen um maximal 21% ab. Obwohl die numerischen Verfahren eine konkurrenzlose Genauigkeit für die Bestimmung der Eigenfrequenzen liefern, ermöglicht das semi-analytische Verfahren ein tiefes Verständnis für die elektromagnetischen Felder im CH-Beschleuniger und sind zur qualitativen Abschätzung der Eigenfrequenzen der CH-Beschleuniger geeignet. Die Geschichte hat gezeigt, dass ein blindes Vertrauen in die Ergebnisse von numerischen Verfahren zu katastrophalen Folgen führen kann [Ung]. Ein anderer Vorteil des semianalytischen Verfahrens liegt in dem geringen Rechenaufwand für die Abschätzung der Eigenfrequenzen, der für die 84 Modelle bei unter einer Sekunde liegt. Zum Vergleich: Die Methode der FEM benötigt etwa 393 Stunden nicht parallelisierter Rechenleistung bei einer Auslastung des Arbeitsspeichers von bis zu 23,7 GB. Das Verfahren über FIT benötigt 239 Stunden parallelisierter Rechenleistung bei einer maximalen Auslastung des Arbeitsspeichers von bis zu 62,8 GB.

3.5 Ausblick

Wie in allen naturwissenschaftlichen Disziplinen werden Simulationen auch in der Beschleunigerphysik eine immer größere Rolle spielen. Die hier verwendeten Simulationen bilden nur Teilaspekte der Realität ab, die nur die Frage nach der Resonanzfrequenz und deren elektromagnetischen Feldverteilungen beantworten. Weitere Fragestellungen bei der Konstruktion von Beschleunigern sind beispielsweise: Kann die Erwärmung des Resonators, verursacht durch dessen Hochfrequenzverluste, durch sein Kühlsystem abgeführt werden? Besitzt der Beschleuniger genügend mechanische Stabilität um etwaige mechanische Schwingungen auszugleichen? Wie groß ist die Strahlenbelastung durch Teilchenverluste?

Auch für diese Aspekte existieren leistungsfähige numerische Algorithmen und andere Methoden. Der Fokus bei der Weiterentwicklung von numerischen Simulationen in den Naturwissenschaften liegt daher nicht nur auf der Steigerung ihrer Effizienz und Genauigkeit, sondern auch auf der Vernetzung unterschiedlichster Teildisziplinen (Elektrodynamik, Mechanik, Thermodynamik etc.), um eine immer vollständigere Abbildung der Realität konstruieren zu können und so den immer höheren Anforderungen gerecht zu werden.

Literatur

- [Aad12] AAD, G., T. ABAJYAN, B. ABBOTT, J. ABDALLAH, S. ABDEL KHALEK, A.A. ABDELALIM, O. ABDINOV, R. ABEN, B. ABI, M. ABOLINS und et AL.: „Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC“. *Physics Letters B* (Sep. 2012), Bd. 716(1): S. 1–29 (siehe S. 2).
- [Ago18] AGOSTINI, M. u. a.: „Searching Neutrinoless Double Beta Decay with Gerda Phase II“. *International Journal of Modern Physics: Conference Series* (Jan. 2018), Bd. 46: S. 1860040 (siehe S. 3).
- [Ait12] AÏT ABDERRAHIM, HAMID, PETER BAETEN, DIDIER DE BRUYN und RAFAEL FERNANDEZ: „MYRRHA – A multi-purpose fast spectrum research reactor“. *Energy Conversion and Management* (2012), Bd. 63. 10th International Conference on Sustainable Energy Technologies (SET 2011): S. 4–10 (siehe S. 5).
- [Alv46] ALVAREZ, LUIS WALTER: „The Design of a Proton Linear Accelerator“. *Physical Review* (1946), Bd. 70(9-10): S. 799–800 (siehe S. 20).
- [Alz] ALZUBAIDI, SUHA u. a.: „The Frankfurt neutron source FRANZ“. *The European Physical Journal Plus* (), Bd. (siehe S. 8).
- [And33] ANDERSON, CARL DAVID: „The Positive Electron“. *Physical Review* (1933), Bd. 43: S. 491–498 (siehe S. 2).
- [Bar16] BARRE, BERTRAND, PASCAL ANZIEU, RICHARCH LENAIN und JEAN-BAPTISTE THOMAS: *Nuclear reactor systems: a technical, historical and dynamic approach*. Genie atomique. Les Ulis: EDP Sciences, 2016 (siehe S. 4, 6).
- [Bro08] BRONSTEIN, I. N., K. A. SEMENDJAJEW, G. MUSIOL und H. MÜHLIG: *Taschenbuch der Mathematik*. Hrsg. von AUFLAGE 7., überarbeitete und erweiterte. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch, 2008 (siehe S. 16).
- [Brü20] BRÜCKEL, T. u. a.: „Conceptual Design Report Jülich High Brilliance Neutron Source (HBS)“. *Schriften des Forschungszentrums Jülich* (2020), Bd. 8 (siehe S. 9).
- [Cle11] CLEMENTE, G., U. RATZINGER, H. PODLECH, L. GROENING, R. BRODHAGE und W. BARTH: „Development of room temperature crossbar-*H*-mode cavities for proton and ion acceleration in the low to medium beta range“. *Phys. Rev. ST Accel. Beams* (11 Nov. 2011), Bd. 14: S. 110101 (siehe S. 42, 55, 58, 61, 62, 65–67).

- [Coc32] COCKCROFT, JOHN DOUGLAS und ERNEST THOMAS SINTON WALTON: „Experiments with High Velocity Positive Ions. II. - The Disintegration of Elements by High Velocity Protons“. *Proceedings Mathematical Physical and Engineering Sciences* (1932), Bd. 137: S. 229–242 (siehe S. 2).
- [Col13] COLLABORATION, CDF, T. AALTONEN u. a.: „Combination of searches for the Higgs boson using the full CDF data set“. (28. Jan. 2013), Bd. (siehe S. 2).
- [Col12] COLLABORATION, THE CMS: „Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC“. *Phys. Lett. B* 716 (2012) 30 (31. Juli 2012), Bd. (siehe S. 2).
- [Dea77] DEACON, D. A. G., L. R. ELIAS, J. M. J. MADEY, G. J. RAMIAN, H. A. SCHWETTMAN und T. I. SMITH: „First Operation of a Free-Electron Laser“. *Phys. Rev. Lett.* (16 Apr. 1977), Bd. 38: S. 892–894 (siehe S. 3).
- [Fac21] FACILITY, EUROPEAN SYNCHROTRON RADIATION: *History*. 2021. URL: <https://www.esrf.eu/home/about/History.html> (besucht am 12.02.2021) (siehe S. 3).
- [Gal64] GALL-MANN, MURRY: „A SCHEMATIC MODEL OF BARYONS AND MESONS“. *Physics Letters* (1964), Bd. 8(3): S. 214–215 (siehe S. 2).
- [Gri13] GRIFFITHS, DAVID J: *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* Re-published by Cambridge University Press in 2017. Boston, MA: Pearson, 2013 (siehe S. 36).
- [Hig64] HIGGS, PETER WARE: „Broken symmetries, massless particles and gauge fields“. *Phys. Lett.* (1964), Bd. 12: S. 132–133 (siehe S. 2).
- [Hin08] HINTERBERGER, FRANK: *Physik der Teilchenbeschleuniger und Ionenoptik*. 2. Aufl. Springer-Verlag, 2008 (siehe S. 2).
- [Höl19] HÖLTERMANN, HOLGER u. a.: „Development status of the MYRRHA injector“. Bd. 2160. Okt. 2019: S. 050003 (siehe S. 5).
- [Isi24] ISING, GUSTAV: „Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen hoher Voltzahl“. *Ark. Mat. Astron. Fys.* (1924), Bd. 18: S. 1–4 (siehe S. 20).
- [Kla06] KLAPDOR-KLEINGROTHAUS, HANS und I. KRIVOSHEINA: „The Evidence for the Observation of $0\nu\beta\beta$ Decay: the Identification of $0\nu\beta\beta$ Events from the Full Spectra“. *Modern Physics Letters A - MOD PHYS LETT A* (Juni 2006), Bd. 21: S. 1547–1566 (siehe S. 3).
- [Kre05] KRESSNER, DANIEL: *Numerical Methods for General and Structured Eigenvalue Problems*. Springer-Verlag, 2005 (siehe S. 38).
- [Lab21] LABORATORY, MAX IV: *History*. 2021. URL: <https://www.maxiv.lu.se/about-us/history/> (besucht am 12.02.2021) (siehe S. 3).
- [Lee85] LEE, C. S., S. W. LEE und S. L. CHUANG: „Plot of Modal Field Distribution in Rectangular and Circular Waveguides“. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* (1985), Bd. 33(3): S. 271–274 (siehe S. 19).

- [Lyn97] LYNCH, D. W.: „Tantalus, a 240MeV Dedicated Source of Synchrotron Radiation, 1968–1986“. *Journal of Synchrotron Radiation* (Nov. 1997), Bd. 4(6): S. 334–343 (siehe S. 3).
- [Möl10] MÖLLER, THOMAS und JENS FALTA: *Forschung mit Synchrotronstrahlung*. Springer Vieweg, 2010 (siehe S. 3).
- [myr21] MYRRHA.BE: *MYRRHA Accelerator*. 2021. URL: <https://myrrha.be/myrrha-project/myrrha-accelerator/> (besucht am 12.02.2021) (siehe S. 5).
- [myr] MYRRHA.BE: *MYRRHA Phased implementation*. URL: <https://myrrha.be/myrrha-project/myrrha-phased-implementation/> (besucht am 12.02.2021) (siehe S. 4).
- [Ned37] NEDDERMEYER, SETH HENRY und CARL DAVID ANDERSON: „Note on the Nature of Cosmic-Ray Particles“. *Physical Review* (1937), Bd. 51(10): S. 884–886 (siehe S. 2).
- [Pod09] PODLECH, HOLGER JENS: „Entwicklung von normal- und supraleitenden CH-Strukturen zur effizienten Beschleunigung von Protonen und Ionen“. Habilitation. Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt am Main, 2009 (siehe S. 20, 24, 55, 61, 65–67).
- [Rei14] REIFARTH, R, C LEDERER und F KÄPPELER: „Neutron reactions in astrophysics“. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* (März 2014), Bd. 41(5): S. 053101 (siehe S. 7, 8).
- [Rub] RUBEL, MAREK: „usion Neutrons: Tritium Breeding and Impact on Wall Materials and Components of Diagnostic Systems“. *Journal of Fusion Energy* (), Bd. (siehe S. 6).
- [Sch04] SCHULENBERG, T., L. BEHNKE, J. HOFMEISTER und M. LÖWENBERG: *Was ist Generation IV?* Techn. Ber. 32; LK 01; Wissenschaftliche Berichte, FZKA-6967 (Februar 2004). 2004 (siehe S. 5).
- [Sch14] SCHWARZ, MALTE: „Numerische Simulationen zur Strahldynamikeines CH-Driftröhrenbeschleunigers“. Master Thesis. Institut für Angewandte Physik Goethe-Universität Frankfurt am Main, Sep. 2014 (siehe S. 45).
- [SCKa] SCK • CEN: *MYRRHA*. URL: <https://www.sckcen.be/en/projects/myrrha> (besucht am 12.02.2021) (siehe S. 4).
- [SCKb] SCK • CEN, ISOL@MYRRHA: *ISOL@MYRRHA: Fundamental physics at MYRRHA*. URL: <https://isolmyrrha.sckcen.be/> (besucht am 12.02.2021) (siehe S. 6).
- [Str37] STREET, JABEZ CURRY und E C STEVENSON: „New Evidence for the Existence of a Particle of Mass Intermedian Between the Proton and Electron“. *Physical Review* (1937), Bd. 52(9): S. 1004–1007 (siehe S. 2).
- [Ung] UNGER, ROMAN: *Crashed numerics*. URL: <https://www-user.tu-chemnitz.de/~uro/teaching/crashed-numeric/> (siehe S. 68).

- [Wei77] WEILAND, THOMAS: „Eine Methode zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen für sechskomponentige Felder auf diskreter Basies“. *AEÜ (Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik)* (3 1977), Bd. 31: S. 116–120 (siehe S. 43).
- [Wid28] WIDERØE, ROLF: „Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher Spannungen“. *Archiv für Elektrotechnik* (1928), Bd. 21: S. 387–406 (siehe S. 20).
- [Yee66] YEE, KANE S.: „Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media“. *IEEE Trans. Antennas and Propagation* (1966), Bd.: S. 302–307 (siehe S. 43).
- [Yuk35] YUKAWA, HIDEKI: „On the Interaction of Elementary Particles. I“. *Proceedings of the Physico-Matheatical Society of Japan. 3rd Series* (1935), Bd. 17: S. 48–57 (siehe S. 2).
- [Zwe64] ZWEIG, G: *An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking; Version 1*. Techn. Ber. CERN-TH-401. Geneva: CERN, Jan. 1964 (siehe S. 2).

A Quellcode

Modellrechnung

October 20, 2021

```
[1]: # Import the necessary modules.
import dolfin
import pygmsh
import meshio
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

[2]: # Create the geometry
with pygmsh.geo.Geometry() as geom:
    lcar = 0.1
    # Define the points
    p1 = geom.add_point([0.0, 0.0], lcar)
    p2 = geom.add_point([2.0, 0.0], lcar)
    p3 = geom.add_point([3.0, 0.0], lcar)
    p4 = geom.add_point([3.0, 1.0], lcar)
    p5 = geom.add_point([3.0, 0.0], lcar)
    p6 = geom.add_point([4.0, 0.0], lcar)
    p7 = geom.add_point([6.0, 0.0], lcar)
    p8 = geom.add_point([6.0, 3.0], lcar)
    p9 = geom.add_point([4.0, 3.0], lcar)
    p10 = geom.add_point([3.0, 3.0], lcar)
    p11 = geom.add_point([3.0, 2.0], lcar)
    p12 = geom.add_point([3.0, 3.0], lcar)
    p13 = geom.add_point([2.0, 3.0], lcar)
    p14 = geom.add_point([0.0, 3.0], lcar)

    # Create the border lines over the points
    l1 = geom.add_line(p1,p2)
    l2 = geom.add_circle_arc(p2,p3,p4)
    l3 = geom.add_circle_arc(p4,p5,p6)
    l4 = geom.add_line(p6,p7)
    l5 = geom.add_line(p7,p8)
    l6 = geom.add_line(p8,p9)
    l7 = geom.add_circle_arc(p9,p10,p11)
    l8 = geom.add_circle_arc(p11,p12,p13)
    l9 = geom.add_line(p13,p14)
    l10 = geom.add_line(p14,p1)
```

```

# Create contour lines
l1 = geom.add_curve_loop([11,12,13,14,15,16,17,18,19,110])

# Create the surface from the contour lines
pl = geom.add_plane_surface(l1)

# Create the mesh
mesh = geom.generate_mesh(2)

```

```

/home/boos/miniconda3/envs/EVS_FEN/lib/python3.9/site-
packages/numpy/ctypeslib.py:517: RuntimeWarning: A builtin ctypes object gave a
PEP3118 format string that does not match its itemsize, so a best-guess will be
made of the data type. Newer versions of python may behave correctly.
return array(obj, copy=False)

```

```

[3]: # Save the mesh and load it as dolfin type
mesh.write("Modellrechnung.xml")
Model_Mesh = dolfin.Mesh("Modellrechnung.xml")
Model_Mesh

```

```

WARNING:root:DOLFIN XML is a legacy format. Consider using XDMF instead.
WARNING:root:DOLFIN XML can only handle one cell type at a time. Using triangle,
discarding line, vertex.

```

```

[3]: <dolfin.cpp.mesh.Mesh at 0x7efdaa010ef0>

```

```

[4]: # Create the Nédélec functional space from the mesh
V = dolfin.FunctionSpace(Model_Mesh, "Nedelec 1st kind H(curl)", 1)

# Create the test v and trial u function
v = dolfin.TestFunction(V)
u = dolfin.TrialFunction(V)

# Define the weak form of the PDE (wave equation).
s = dolfin.inner(dolfin.curl(v), dolfin.curl(u))*dolfin.dx
m = dolfin.inner(v, u)*dolfin.dx
L = dolfin.dot(dolfin.Constant((0.0, 0.0,0.0)), v)*dolfin.dx

```

```

[5]: # Because of the uncoupled nature of the electromagnetic field,
# the PDE can be solved via the electric or magnetic field.
# The solution is obtained by setting the boundary condition.
# In the Nedelec functional space, the homogeneous Neumann boundary value is
# automatically set, therefore the wave equation is solved via the magnetic
↪field.
# In addition to the eigenvalue, the magnetic field vector (the eigenvector) is
↪also obtained.
# For a solution via the electric field, the Dirichlet boundary value must be
↪set explicitly.

```

```

# Here one receives beside the eigenvalue also the electric field vector (the
↪eigenvector).
# Dirichlet ~  $\hat{n} \cdot \nabla u = 0$ 
# Neumann ~  $\hat{n} \cdot \nabla u = 0$ 

bc = "Dirichlet"

if bc == "Dirichlet":
    # Set the Dirichlet boundary condition
    perf_conductor_bc = dolfin.DirichletBC(V, dolfin.Constant((0, 0, 0)),
↪"on_boundary")
    # Defining the Stiffness Matrix S and the Mass Matrix M
    S = dolfin.PETScMatrix()
    M = dolfin.PETScMatrix()
    dummy = dolfin.PETScVector()
    # Assembling the matrices
    dolfin.assemble_system(s, L, A_tensor=S, b_tensor=dummy,
↪bcs=perf_conductor_bc)
    dolfin.assemble_system(m, L, A_tensor=M, b_tensor=dummy,
↪bcs=perf_conductor_bc)
else:
    # Defining the Stiffness Matrix S and the Mass Matrix M
    S = dolfin.PETScMatrix()
    M = dolfin.PETScMatrix()
    dummy = dolfin.PETScVector()
    # Assembling the matrices
    dolfin.assemble_system(s, L, A_tensor=S, b_tensor=dummy)
    dolfin.assemble_system(m, L, A_tensor=M, b_tensor=dummy)

```

```

[6]: # Converting to a System of Algebraic Equations
solver = dolfin.SLEPcEigenSolver(S, M)
# Conditioning of the algebraic system.
solver.parameters["solver"] = "krylov-schur"
solver.parameters["problem_type"] = "gen_hermitian"
solver.parameters["spectrum"] = "target_magnitude"
solver.parameters["spectral_transform"] = "shift-and-invert"
solver.parameters["spectral_shift"] = 5.5
neigs = 20
solver.solve(neigs)

```

```

[7]: # Saving the eigenvalues and eigenvectors
com_rel_eigenval = []
com_ima_eigenval = []
com_rel_eigenvec = []
com_ima_eigenvec = []
for i in range(solver.get_number_converged()):
    r, i, rv, iv = solver.get_eigenpair(i)

```

```

com_rel_eigenval.append(r)
com_ima_eigenval.append(i)
com_rel_eigenvec.append(rv)
com_ima_eigenvec.append(iv)

```

```

[8]: # Output of the eigenvalues in Hz
[a**0.5*299792458/(2*np.pi) for a in com_rel_eigenval]

```

```

[8]: [118169126.82369837,
104949449.67890751,
101294869.99287038,
90932512.01636203,
90580071.01105025,
90213039.3598546,
132098872.18970363,
135481341.18999463,
138394616.2502072,
71589256.28154314,
143487681.08074975,
146001933.88796988,
55414733.24065815,
52896868.3386561,
52809210.327243336,
47713451.592368394,
152857479.09664363,
152958954.49679726,
17830150.63425033,
(4.1757618000583015e-16+6.819536543868206j)]

```

```

[9]: # We generate an unstructured function from the unstructured vector field
u = dolfin.Function(V)
u.vector()[:] = com_rel_eigenvec[-2]
# Create a structured vector space (as in the FD method the distances are
↳equidistant)
V_cg = dolfin.VectorFunctionSpace(Model_Mesh, "CG", 1)
# From the unstructured function u we interpolate the values for a structured
↳lattice.
sigma_cg = dolfin.interpolate(u, V_cg)
# Split the vector values into their scalar form
sigma_x_array = np.array(sigma_cg.vector()[::3])
sigma_y_array = np.array(sigma_cg.vector()[1::3])
# Read the Structured Grid (3d, we reduce it to 2d form )
xyz = V_cg.tabulate_dof_coordinates()
XY = xyz.reshape(-1,3)[::3,0:2]

```

```

[10]: # Generate the 2d vector field (dirichlet boundary condition as we get the
↳E-field and transform its H-field).

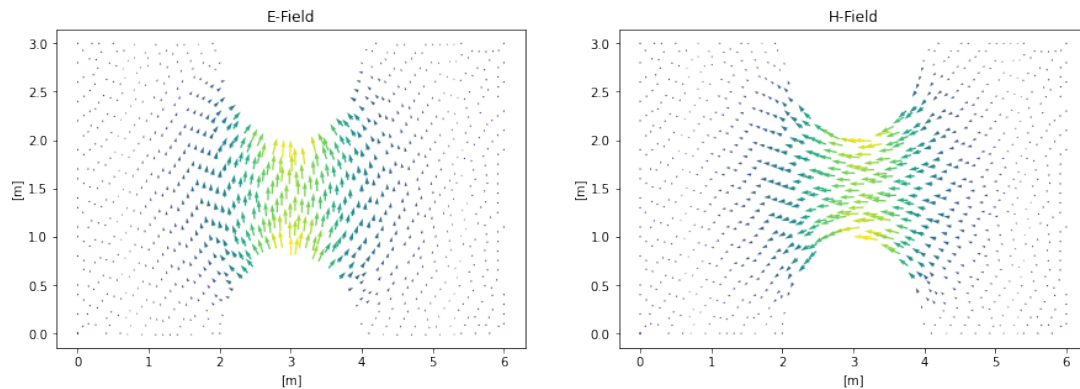
```

```

# The TE10 mode was chosen, by 17830150 Hz.
n = 2
fig, axs = plt.subplots(figsize=(15, 4.75),nrows = 1, ncols=2)
M = np.hypot(sigma_x_array[:,n], sigma_y_array[:,n])
axs[0].quiver(XY[:,n,0],XY[:,n,1],sigma_x_array[:,n], sigma_y_array[:,n], M,
↳units="x", pivot="tip", width=0.022, scale=3)
axs[0].set_title("E-Field")
axs[0].set_xlabel("[m]")
axs[0].set_ylabel("[m]")
axs[1].quiver(XY[:,n,0],XY[:,n,1],-sigma_y_array[:,n], sigma_x_array[:,n], M,
↳units="x", pivot="tip", width=0.022, scale=3)
axs[1].set_title("H-Field")
axs[1].set_xlabel("[m]")
axs[1].set_ylabel("[m]")

```

[10]: Text(0, 0.5, '[m]')



[]:

CH_FRANZ_Mesh_Gen

October 20, 2021

```
[1]: # Import the necessary modules.
```

```
import pygmsh
import meshio
import numpy as np
```

```
[2]: #Setting the scaling factor.
```

```
mm      = 1e-3
```

```
# The tank inner radii (TRiA) are calculated by the simulations from CST.
```

```
betaA   = np.array([0.05+0.01*i for i in range(21)])
```

```
TRiA    = np.array([343.0, 338.0, 337.5, 339.0, 342.0, 345.0, 348.0,
                    352.0, 355.0, 358.5, 361.5, 364.5, 367.4, 370.3,
                    372.5, 374.9, 377.2, 379.5, 382.8, 385.1, 387.2 ])*mm
```

```
# Selection of the FRANZ type and definition of the constants
```

```
i = 1
```

```
beta    = betaA[i]
```

```
c0      = 299792458000
```

```
GoLF    = 0.5
```

```
NoS     = 5
```

```
SF      = 175*1e6
```

```
# Definition of the construction parameters
```

```
DTRi    = 12.5 * mm
```

```
DTRo    = 20.0 * mm
```

```
MT      = 23.0 * mm
```

```
RoSb    = 7.5 * mm
```

```
SHH     = 20.0 * mm
```

```
TRi     = TRiA[i]
```

```
LC      = beta * c0 / (2*SF) * mm
```

```
AoS     = 4.376 * np.pi / 180
```

```
AoTER   = 30 * np.pi / 180
```

```
DTDe    = (DTRo - DTRi) / 2
```

```
DTRc    = (DTRo + DTRi) / 2
```

```
LoS     = TRi - DTRo - SHH
```

```
RoSt    = RoSb + (LoS * np.tan(AoS))
```

```
TEE     = LC*0.2951
```

```

TEH    = TEE*0.26795*np.tan(AoTER)
TEiR   = TRi*0.2533
TEoR   = TRi*0.474
TRo    = TRi+MT
ZMax   = TEE + MT + LC/2 + NoS*LC
ZMin   = -TEE - MT - (LC/2)

```

```

[3]: #Construction of the CH-Cavity
with pygmsH.occ.Geometry() as geom:
    geom.characteristic_length_max = 15.0*mm

    # inner corresponds to the path of the particle beam
    inner      = geom.add_cylinder([0,0,ZMin],[0,0,ZMax-ZMin],DTRi)
    # tank corresponds to the vacuum of the cavity
    tank       = geom.add_cylinder([0,0,ZMin],[0,0,ZMax-ZMin],TRi)

    # tankStart corresponds to installations of the tank start attachment
    tankStart  = [
        geom.add_cylinder([0,0,ZMin],[0,0,MT+TEE], TEoR),
        geom.add_cylinder([0,0,-LC/4],[0,0,-LC], DTRo),
        geom.add_cone([0,0,ZMin+MT+TEE],[0,0,TEH], TEoR, TEiR),
    ]

    # local corresponds to the drift tubes and stems
    local = [
        geom.add_cylinder([0,0,LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
        geom.add_torus([0,0,LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_torus([0,0,3*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_cylinder([0,-TRi,LC/2],[0,TRi*2,0], RoSb),
        geom.add_cylinder([0,LoS+DTRo,LC/2],[0,SHH + MT/5,0], RoSt),
        geom.add_cylinder([0,-1*(LoS+DTRo),LC/2],[0,-1*(SHH + MT/5),0], RoSt),
        geom.add_cone([0,DTRo,LC/2],[0,LoS,0],RoSb, RoSt),
        geom.add_cone([0,-1*DTRo,LC/2],[0,-1*LoS,0],RoSb, RoSt),

        geom.add_cylinder([0,0,1*LC + LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
        geom.add_torus([0,0,1*LC + LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_torus([0,0,1*LC + 3*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_cylinder([-TRi,0,1*LC +LC/2],[TRi*2,0,0], RoSb),
        geom.add_cylinder([LoS+DTRo,0,1*LC +LC/2],[SHH + MT/5,0,0], RoSt),
        geom.add_cylinder([-1*(LoS+DTRo),0,1*LC +LC/2],[-1*(SHH + MT/5),0,0],
↵RoSt),
        geom.add_cone([DTRo,0,1*LC +LC/2],[LoS,0,0],RoSb, RoSt),
        geom.add_cone([-1*DTRo,0,1*LC +LC/2],[-1*LoS,0,0],RoSb, RoSt),

        geom.add_cylinder([0,0,2*LC+LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
        geom.add_torus([0,0,2*LC+LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_torus([0,0,2*LC+3*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),

```



```

geom.add_cylinder([0,-TRi,2*LC+LC/2],[0,TRi*2,0],RoSb),
geom.add_cylinder([0,LoS+DTRo,2*LC+LC/2],[0,SHH + MT/5,0],RoSt),
geom.add_cylinder([0,-1*(LoS+DTRo),2*LC+LC/2],[0,-1*(SHH + MT/5),0],
↳RoSt),
geom.add_cone([0,DTRo,2*LC+LC/2],[0,LoS,0],RoSb,RoSt),
geom.add_cone([0,-1*DTRo,2*LC+LC/2],[0,-1*LoS,0],RoSb,RoSt),

geom.add_cylinder([0,0,3*LC + LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe],DTRo),
geom.add_torus([0,0,3*LC + LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
geom.add_torus([0,0,3*LC + 3*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
geom.add_cylinder([-TRi,0,3*LC + LC/2],[TRi*2,0,0],RoSb),
geom.add_cylinder([LoS+DTRo,0,3*LC + LC/2],[SHH + MT/5,0,0],RoSt),
geom.add_cylinder([-1*(LoS+DTRo),0,3*LC + LC/2],[-1*(SHH + MT/5),0,0],
↳RoSt),
geom.add_cone([DTRo,0,3*LC + LC/2],[LoS,0,0],RoSb,RoSt),
geom.add_cone([-1*DTRo,0,3*LC + LC/2],[-1*LoS,0,0],RoSb,RoSt),

geom.add_cylinder([0,0,4*LC+LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe],DTRo),
geom.add_torus([0,0,4*LC+LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
geom.add_torus([0,0,4*LC+3*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
geom.add_cylinder([0,-TRi,4*LC+LC/2],[0,TRi*2,0],RoSb),
geom.add_cylinder([0,LoS+DTRo,4*LC+LC/2],[0,SHH + MT/5,0],RoSt),
geom.add_cylinder([0,-1*(LoS+DTRo),4*LC+LC/2],[0,-1*(SHH + MT/5),0],
↳RoSt),
geom.add_cone([0,DTRo,4*LC+LC/2],[0,LoS,0],RoSb,RoSt),
geom.add_cone([0,-1*DTRo,4*LC+LC/2],[0,-1*LoS,0],RoSb,RoSt),

]

# tankStart corresponds to installations of the tank end attachment
tankEnd = [
    geom.add_cylinder([0,0,ZMax],[0,0,-(MT+TEE)],TEoR),
    geom.add_cylinder([0,0,NoS*LC+LC/4],[0,0,LC],DTRo),
    geom.add_cone([0,0,ZMax-MT-TEE],[0,0,-TEH],TEoR,TEiR),
]

# Merging the internal structure
tankStart += local + tankEnd

# Construction of the vacuum volume of the cavity
geom.boolean_difference(tank,geom.boolean_difference(geom.
↳boolean_union(tankStart),inner))

# Construction of the mesh from the vacuum volume of the cavity
print("Mesh gen")
mesh = geom.generate_mesh()

```

Mesh gen

```
/home/boos/miniconda3/envs/EVS_FEN/lib/python3.9/site-  
packages/numpy/ctypeslib.py:517: RuntimeWarning: A builtin ctypes object gave a  
PEP3118 format string that does not match its itemsize, so a best-guess will be  
made of the data type. Newer versions of python may behave correctly.  
    return array(obj, copy=False)
```

```
[4]: # Mesh information  
mesh
```

```
[4]: <meshio mesh object>  
    Number of points: 36987  
    Number of cells:  
        line: 1679  
        triangle: 25118  
        tetra: 193204  
        vertex: 78
```

```
[5]: # Saving the mesh for future processing  
mesh.write("CH_FRANZ_"+str(i+5)+"_6Gap.vtk")  
mesh.write("CH_FRANZ_"+str(i+5)+"_6Gap.xml")
```

```
WARNING:root:DOLFIN XML is a legacy format. Consider using XDMF instead.  
WARNING:root:DOLFIN XML can only handle one cell type at a time. Using tetra,  
discarding vertex, line, triangle.
```

```
[ ]:
```

CH_LNH_Mesh_Generator

October 20, 2021

```
[1]: # Import the necessary modules.  
import pygmsh  
import meshio  
import numpy as np
```

```
[2]: #Setting the scaling factor.  
mm      = 1e-3  
betaA   = np.array([0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, ↵  
↵0.15, 0.16, 0.17, 0.18, 0.19, 0.20, 0.21, 0.22, 0.23, 0.24, 0.25])  
  
# The tank inner radii (TRiL, TRiN, TRiH) are calculated by the simulations ↵  
↵from CST.  
# The postfix is for the types L for Low, N for Norm and H for High.  
TRiL    = np.array([153.34, 156.02, 159.20, 161.85, 165.05, 167.91, 170.63,  
                    173.02, 175.46, 177.76, 179.81, 181.77, 183.60, 185.45,  
                    187.17, 188.82, 190.07, 191.42, 192.85, 194.13, 195.34])*mm  
TRiN    = np.array([163.09, 165.46, 167.98, 171.08, 173.78, 176.69, 179.34,  
                    182.10, 184.50, 186.85, 189.09, 191.28, 193.33, 195.25,  
                    197.10, 198.85, 200.53, 202.11, 203.62, 205.02, 206.38])*mm  
TRiH    = np.array([172.56, 174.52, 176.26, 179.15, 181.89, 184.61, 187.23,  
                    189.82, 192.44, 194.93, 197.33, 199.48, 201.69, 203.83,  
                    205.77, 207.65, 209.41, 211.18, 212.80, 214.35, 215.84])*mm  
phiT    = [7.5, 12.5, 17.5]  
  
# Selection of the basic type (typeE), of the speed (i) and definition of the ↵  
↵constants  
typeE   = 0  
i       = 11  
phi     = phiT[typeE]  
beta    = betaA[i]  
c0      = 299792458000  
GoLF    = 0.5  
NoS     = 5  
SF      = 300*1e6  
  
# Definition of the construction parameters  
TRi     = TRiL[i] if typeE == 0 else TRiN[i] if typeE == 1 else TRiH[i]
```

```

LC      = beta*c0/(2*SF) * mm
DTRi   = 5*TRi/40
DTRo   = 6*TRi/40
DTDe   = (DTRo-DTRi)/2
DTRc   = (DTRo+DTRi)/2
SR     = TRi * np.tan(phi)
SRZ    = LC/10

```

```

[3]: #Construction of the CH-Cavity
with pygmesh.occ.Geometry() as geom:
    geom.characteristic_length_max = 15*mm
    #geom.characteristic_length_min = 0.05*mm

    local = [
        geom.add_cone([0,0,LC],[0,TRi,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
        geom.add_cone([0,0,LC],[0,-TRi,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
        geom.add_cylinder([0,0,3*LC/4+1.5*DTDe],[0,0,LC/2-2.5*DTDe], DTRo),
    ]
    disks = [geom.boolean_union(local), geom.add_box([-TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),-TRi,LC-LC/20],[2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),2*TRi,LC/10])]

    local = [
        geom.boolean_intersection(disks),
        geom.add_cylinder([0,0,3*LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
        geom.add_torus([0,0,3*LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_torus([0,0,5*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_cylinder([-TRi*np.tan(phi*np.pi/180),-TRi,LC],[2*TRi*np.
↪tan(phi*np.pi/180),2*TRi,0], LC/20),
        geom.add_cylinder([TRi*np.tan(phi*np.pi/180),-TRi,LC],[-2*TRi*np.
↪tan(phi*np.pi/180),2*TRi,0], LC/20),
    ]
    l1 = geom.boolean_union(local)

    local = [
        geom.add_cone([0,0,LC+LC],[TRi,0,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
        geom.add_cone([0,0,LC+LC],[-TRi,0,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
        geom.add_cylinder([0,0,LC+3*LC/4+1.5*DTDe],[0,0,LC/2-2.5*DTDe], DTRo),
    ]
    disks = [geom.boolean_union(local), geom.add_box([-TRi,-TRi*np.tan(phi*np.
↪pi/180),LC+LC-LC/20],[2*TRi,2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),LC/10])]
    local = [
        geom.boolean_intersection(disks),
        geom.add_cylinder([0,0,LC+3*LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
        geom.add_torus([0,0,LC+3*LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
        geom.add_torus([0,0,LC+5*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),

```

```

    geom.add_cylinder([-TRi,-TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),LC+LC],[2*TRi,2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),0], LC/20),
    geom.add_cylinder([-TRi,TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),LC+LC],[2*TRi,-2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),0], LC/20),

]
l2 = geom.boolean_union(local)

local = [
    geom.add_cone([0,0,2*LC+LC],[0,TRi,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
    geom.add_cone([0,0,2*LC+LC],[0,-TRi,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
    geom.add_cylinder([0,0,2*LC+3*LC/4+1.5*DTDe],[0,0,LC/2-2.5*DTDe], DTRo),
]
disks = [geom.boolean_union(local), geom.add_box([-TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),-TRi,2*LC+LC-LC/20],[2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),2*TRi,LC/10])]
local = [
    geom.boolean_intersection(disks),
    geom.add_cylinder([0,0,2*LC+3*LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
    geom.add_torus([0,0,2*LC+3*LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_torus([0,0,2*LC+5*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_cylinder([-TRi*np.tan(phi*np.pi/180),-TRi,2*LC+LC],[2*TRi*np.
↪tan(phi*np.pi/180),2*TRi,0], LC/20),
    geom.add_cylinder([TRi*np.tan(phi*np.pi/180),-TRi,2*LC+LC],[-2*TRi*np.
↪tan(phi*np.pi/180),2*TRi,0], LC/20),
]
l3 = geom.boolean_union(local)
####

local = [
    geom.add_cone([0,0,3*LC+LC],[TRi,0,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
    geom.add_cone([0,0,3*LC+LC],[-TRi,0,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
    geom.add_cylinder([0,0,3*LC+3*LC/4+1.5*DTDe],[0,0,LC/2-2.5*DTDe], DTRo),
]
disks = [geom.boolean_union(local), geom.add_box([-TRi,-TRi*np.tan(phi*np.
↪pi/180),3*LC+LC-LC/20],[2*TRi,2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),LC/10])]
local = [
    geom.boolean_intersection(disks),
    geom.add_cylinder([0,0,3*LC+3*LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
    geom.add_torus([0,0,3*LC+3*LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_torus([0,0,3*LC+5*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_cylinder([-TRi,-TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),3*LC+LC],[2*TRi,2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),0], LC/20),
    geom.add_cylinder([-TRi,TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),3*LC+LC],[2*TRi,-2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),0], LC/20),

```

```

]
l4 = geom.boolean_union(local)

local = [
    geom.add_cone([0,0,4*LC+LC],[0,TRi,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
    geom.add_cone([0,0,4*LC+LC],[0,-TRi,0],0, TRi*np.tan(phi*np.pi/180)),
    geom.add_cylinder([0,0,4*LC+3*LC/4+1.5*DTDe],[0,0,LC/2-2.5*DTDe], DTRo),
]
disks = [geom.boolean_union(local), geom.add_box([-TRi*np.tan(phi*np.pi/
↪180),-TRi,4*LC+LC-LC/20],[2*TRi*np.tan(phi*np.pi/180),2*TRi,LC/10])]
local = [
    geom.boolean_intersection(disks),
    geom.add_cylinder([0,0,4*LC+3*LC/4+DTDe],[0,0,LC/2-2*DTDe], DTRo),
    geom.add_torus([0,0,4*LC+3*LC/4+DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_torus([0,0,4*LC+5*LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_cylinder([-TRi*np.tan(phi*np.pi/180),-TRi,4*LC+LC],[2*TRi*np.
↪tan(phi*np.pi/180),2*TRi,0], LC/20),
    geom.add_cylinder([TRi*np.tan(phi*np.pi/180),-TRi,4*LC+LC],[-2*TRi*np.
↪tan(phi*np.pi/180),2*TRi,0], LC/20),

    geom.add_cylinder([0,0,0],[0,0,LC/4-DTDe], DTRo),
    geom.add_torus([0,0,LC/4-DTDe],DTRc,DTDe),
    geom.add_cylinder([0,0,5*LC+3*LC/4+DTDe],[0,0,LC/4-DTDe], DTRo),
    geom.add_torus([0,0,5*LC+3*LC/4],DTRc,DTDe),
]
l5 = geom.boolean_union(local)
local = geom.boolean_union([l1,l2,l3,l4,l5])
local = geom.boolean_difference(local, geom.add_cylinder([0,0,-0.
↪5*LC],[0,0,7.0*LC], DTRi))
tank = geom.add_cylinder([0,0,0],[0,0,6*LC],TRi)
# Construction of the vacuum volume of the cavity
geom.boolean_difference(tank,local)

# Construction of the mesh from the vacuum volume of the cavity

mesh = geom.generate_mesh()

```

/home/boos/miniconda3/envs/EVS_FEN/lib/python3.9/site-packages/numpy/ctypeslib.py:517: RuntimeWarning: A builtin ctypes object gave a PEP3118 format string that does not match its itemsize, so a best-guess will be made of the data type. Newer versions of python may behave correctly.

```
return array(obj, copy=False)
```

```
[4]: # Mesh information
mesh
```

```
[4]: <meshio mesh object>
      Number of points: 57366
      Number of cells:
        line: 2741
        triangle: 41394
        tetra: 291139
        vertex: 275
```

```
[5]: # Saving the mesh for future processing
      mesh.write("CH_LOW_"+str(i+5)+"_6Gap.vtk")
      mesh.write("CH_LOW_"+str(i+5)+"_6Gap.xml")
```

```
WARNING:root:DOLFIN XML is a legacy format. Consider using XDMF instead.
WARNING:root:DOLFIN XML can only handle one cell type at a time. Using tetra,
discarding triangle, line, vertex.
```

```
[ ]:
```

Eigenvalue_PEC_Calculator

October 20, 2021

```
[1]: # Import the necessary modules.
import dolfin
import pygmsh
import meshio
import numpy as np

[2]: # Load the mesh of the cavity
CH_Cavity_Mesh = dolfin.Mesh("CH_FRANZ_6_6Gap.xml")

[3]: # Create the Nédélec functional space from the mesh
V = dolfin.FunctionSpace(CH_Cavity_Mesh, "Nedelec 1st kind H(curl)", 1)

# Create the test v and trial u function
v = dolfin.TestFunction(V)
u = dolfin.TrialFunction(V)

# Define the weak form of the PDE (wave equation).
s = dolfin.inner(dolfin.curl(v), dolfin.curl(u))*dolfin.dx
m = dolfin.inner(v, u)*dolfin.dx
L = dolfin.dot(dolfin.Constant((0.0, 0.0, 0.0)), v)*dolfin.dx

[4]: # Because of the uncoupled nature of the electromagnetic field,
# the PDE can be solved via the electric or magnetic field.
# The solution is obtained by setting the boundary condition.
# In the Nedelec functional space, the homogeneous Neumann boundary value is
# automatically set, therefore the wave equation is solved via the magnetic
↪ field.
# In addition to the eigenvalue, the magnetic field vector (the eigenvector) is
↪ also obtained.
# For a solution via the electric field, the Dirichlet boundary value must be
↪ set explicitly.
# Here one receives beside the eigenvalue also the electric field vector (the
↪ eigenvector).
# Dirichlet ~  $\hat{n} \times \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ 
# Neumann ~  $\hat{n} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$ 

bc = "Neumann"
```



```

if bc == "Dirichlet":
    # Set the Dirichlet boundary condition
    perf_conductor_bc = dolfin.DirichletBC(V, dolfin.Constant((0, 0, 0)),
↳"on_boundary")
    # Defining the Stiffness Matrix S and the Mass Matrix M
    S = dolfin.PETScMatrix()
    M = dolfin.PETScMatrix()
    dummy = dolfin.PETScVector()
    # Assembling the matrices
    dolfin.assemble_system(s, L, A_tensor=S, b_tensor=dummy,
↳bcs=perf_conductor_bc)
    dolfin.assemble_system(m, L, A_tensor=M, b_tensor=dummy,
↳bcs=perf_conductor_bc)
else:
    # Defining the Stiffness Matrix S and the Mass Matrix M
    S = dolfin.PETScMatrix()
    M = dolfin.PETScMatrix()
    dummy = dolfin.PETScVector()
    # Assembling the matrices
    dolfin.assemble_system(s, L, A_tensor=S, b_tensor=dummy)
    dolfin.assemble_system(m, L, A_tensor=M, b_tensor=dummy)

```

```

[5]: # Converting to a System of Algebraic Equations
solver = dolfin.SLEPcEigenSolver(S, M)
# Conditioning of the algebraic system.
solver.parameters["solver"] = "krylov-schur"
solver.parameters["problem_type"] = "gen_hermitian"
solver.parameters["spectrum"] = "target magnitude"
solver.parameters["spectral_transform"] = "shift-and-invert"
# Setting the expected eigenvalue .  $k^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 f^2}{c^2}$ 
# For  $f = 175$  MHz (the H211-Mode), a value of 13.45 is expected
solver.parameters["spectral_shift"] = 13.5
neigs = 4
solver.solve(neigs)

```

```

[6]: # Saving the eigenvalues and eigenvectors
com_rel_eigenval = []
com_ima_eigenval = []
com_rel_eigenvec = []
com_ima_eigenvec = []
for i in range( solver.get_number_converged()):
    r, i, rv, iv = solver.get_eigenpair(i)
    com_rel_eigenval.append(r)
    com_ima_eigenval.append(i)
    com_rel_eigenvec.append(rv)
    com_ima_eigenvec.append(iv)

```

```
[7]: # Output of the eigenvalues in Hz
[a**0.5*299792458/(2*np.pi) for a in com_rel_eigenval]
```

```
[7]: [174363801.9198688,
      222456176.70130846,
      245915972.4726991,
      1098.2059425512343,
      (6.188818811813657e-14+1010.7108132928698j),
      258849548.29941255,
      274764268.8892811,
      319964140.34696615]
```

```
[8]: # Saving the magnetic or electric field in .pvd file for further processing
      ↪with Paraview.
```

```
if bc == "Dirichlet":
    for i in range(0,4):
        u = dolfin.Function(V)
        u.vector()[:] = com_rel_eigenvec[i]
        file = dolfin.File("CH_11_E-Field_Mode"+str(i)+".pvd")
        file << u
else:
    for i in range(0,4):
        u = dolfin.Function(V)
        u.vector()[:] = com_rel_eigenvec[i]
        file = dolfin.File("CH_11_H-Field_Mode"+str(i)+".pvd")
        file << u
```

```
[ ]:
```

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich ganz herzlich bei Ihnen, Herr Professor Dr. Holger Podlech, bedanken. Für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe, die Vergabe dieses spannenden Themas und die Freiheiten bei ihrer Ausgestaltung. Vor allem jedoch für Ihre persönliche Betreuung, Ihre Geduld und Ihre ansteckende Leidenschaft für die Physik im Allgemeinen und die Beschleunigerphysik im Speziellen.

Vielen Dank an Dr. Marco Busch für die technische Unterstützung und den fachlichen Austausch.

Vielen Dank an Malte Schwarz für die Unterstützung bei den CST Simulationen, deine Einschätzung ihrer Genauigkeit und deiner herzliche Art.

Ich möchte mich bei alle Arbeitsgruppenmitgliedern bedanken für die positive, offene und konstruktive Arbeitsatmosphäre. Die Möglichkeit, einen Einblick in den Forschungsalltag zu erlangen, gute Forschung zu erleben und zu betreiben, ist ein Privileg — Sie in einem solch willkommenen, bodenständigen und menschlichen Umfeld ausführen zu dürfen, ist keine Selbstverständlichkeit. Dafür vielen Dank euch allen.

Liebe Pia, einen so wunderbaren Menschen wie dich kennen gelernt zu haben, mit dir mein Leben zu verbringen und gemeinsamen Schritten fortzuführen ist in Worte nicht zu fassen. Vielen Dank für deine Liebe, deine Unterstützung und deinen Glauben an mich.

Erklärung

nach §30 Absatz 12 Ordnung für den Bachelor- und den Masterstudiengang Physik der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main vom 24.04.2013.

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit selbständig verfasst und dabei keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt worden sind. Alle Stellen der Arbeit, die im Wortlaut oder dem Sinn nach Publikationen oder Vorträgen anderer Autoren entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht. Die Erklärung bezieht sich auch auf die in der Arbeit abgebildeten Skizzen, Diagrammen oder bildlichen Darstellungen. Die Arbeit wurde bisher weder gesamt noch in Teilen einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

16. November 2021, Bad Vilbel

Eduard Boos