

**JOHANN WOLFGANG GOETHE-UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN**

FACHBEREICH WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

Mark Wahrenburg / Susanne Niethen

Vergleichende Analyse alternativer Kreditrisikomodelle

**No.49
April 2000**



WORKING PAPER SERIES: FINANCE & ACCOUNTING

Mark Wahrenburg¹ / Susanne Niethen²

Vergleichende Analyse alternativer Kreditrisikomodelle

**No.49
April 2000**

ISSN 1434-3401

¹ Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

² McKinsey & Company, Inc.

Vergleichende Analyse alternativer Kreditrisikomodelle

Kurzfassung

In den letzten Jahren wurden verschiedene Modelle entwickelt, um das Ausfallrisiko von Banken unter Berücksichtigung von Portfolioeffekten zu quantifizieren. Bisher hat sich kein Ansatz als allgemein akzeptierter Standard durchsetzen können. Da die Modelle grundlegende konzeptionelle Unterschiede aufweisen und unterschiedliche empirische Inputdaten verwenden, hat die Auswahl eines Kreditrisikomodells unter Umständen einen erheblichen Einfluß auf die Kreditportfoliosteuerung der Bank. In diesem Beitrag soll deshalb geklärt werden, ob die Modelle systematisch abweichende Value-at-Risk-Werte berechnen und worin die Ursachen für auftretende Abweichungen liegen. Zunächst wird gezeigt, daß die bestehenden Kreditrisikomodelle in zwei grundlegende Klassen eingeteilt werden können: Assetwert-basierte Modelle und auf Ausfallraten basierende Modelle. Am Beispiel eines Musterportfolios von Krediten an deutsche Baufirmen werden zwei Vertreter der Modellklassen (CreditMetrics und CreditRisk⁺) verglichen und der Effekt der unterschiedlichen empirischen Inputparameter auf die Risikoergebnisse abgeschätzt. Die Analyse zeigt erhebliche Unterschiede zwischen den Modellen. Eine Analyse der Abweichungsursachen ergibt allerdings, daß der Grund für die großen Value-at-Risk-Unterschiede in erster Linie in den unterschiedlichen empirischen Inputdaten liegt, welche zu unterschiedlichen impliziten Korrelationsannahmen führen. Es wird gezeigt, wie die Modellparameter gewählt werden müssen, um identische Korrelationen zu erzeugen. Bei konsistenten Korrelationsannahmen stimmen die Ergebnisse beider Modelle weitgehend überein.

Keywords: Credit Risk Models, credit risk correlation

JEL-Classification: G21

1. Einleitung

Die derzeit diskutierten Kreditrisikomodelle wie CreditMetrics³, CreditRisk⁴, Credit Portfolio View⁵ und das KMV-Modell⁶ sind komplexe Werkzeuge, die sich in vieler Hinsicht unterscheiden. Die Unterschiede können sinnvoll in drei Teilbereiche eingeteilt werden: Risikodefinition, technische Konzeption und empirische Datenbasis.

- Die *Risikodefinition* bestimmt, welche Risiken modelliert werden. Während alle Modelle den Verlust durch Kreditausfälle abbilden, berücksichtigen einige Modelle zusätzlich das Risiko von Veränderungen des Portfoliowertes aufgrund von Ratingverbesserungen und -verschlechterungen sowie zusätzliches Risiko aufgrund stochastischer statt konstanter Wiedergewinnungsraten (Recovery Rates) im Insolvenzfall.
- Die *technische Konzeption* umfaßt die Verteilungsannahmen des Modells, die Berechnungsverfahren (Simulation oder analytische Ableitung) und eventuelle Approximationsverfahren.
- Die *empirische Datenbasis* bestimmt die Inputdaten, die für die Schätzung der im Modell benötigten Parameter Verwendung finden.

Erste Vergleichsrechnungen mit Anleiheportfolios haben deutliche Unterschiede zwischen den Modellen aufgezeigt⁷. Dabei wurde aber kein Versuch unternommen, den Ursachen für die Risikounterschiede auf den Grund zu gehen. Das Anliegen dieses Artikels besteht in einer detaillierten Analyse der einzelnen Abweichungsursachen. In der aktuellen Diskussion um die Zulassung von internen Modellen für die regulatorische Eigenkapitalunterlegung gewinnen die Ursachen für systematische Abweichungen des Value-at-Risk große Bedeutung. Eine Zulassung interner Modelle ist erst dann zu erwarten, wenn die verschiedenen Modelle vergleichbare Ergebnisse liefern und Transparenz über Ausmaß und Ursache der verbleibenden Abweichungen besteht.

Im folgenden soll ein Vergleich am Beispiel zweier Kreditrisikomodelle, CreditMetrics und CreditRisk⁺, erfolgen. Dazu wird zunächst eine einheitliche Risikodefinition unterstellt, indem lediglich das Ausfallrisiko in die Betrachtung einfließt. Denn im Gegensatz zu den anderen Modellen berücksichtigt CreditRisk⁺ lediglich Verluste, die von Ausfällen verursacht werden. Außerdem wird eine konstante Wiedergewinnungsrate unterstellt, da in CreditRisk⁺ stochastische Wiedergewinnungsraten nicht modelliert werden können. Die zentrale, im folgenden zu klärende Frage ist, inwieweit unter dieser identischen Risikodefinition die Abwei-

³ Credit Metrics Technical Document, J.P. Morgan 1997

⁴ CreditRisk⁺ Technical Document, Credit Suisse Financial Products 1997

⁵ Credit Portfolio View, Approach Document und User's Manual, McKinsey 1998, und Wilson (1997a/b)

⁶ Kealhofer (1995a/b) und Crouhy und Mark (1998a)

⁷ Crouhy und Mark (1998b)

chungen des Value-at-Risk auf die technische Konzeption oder die empirische Datenbasis zurückzuführen sind.

Dazu wird in Abschnitt 2 zunächst gezeigt, daß die existierenden Kreditrisikomodelle hinsichtlich ihrer Konzeption in zwei Klassen eingeteilt werden können. Als Vertreter für die Klassen werden im dritten Abschnitt CreditMetrics und CreditRisk⁺ vorgestellt. Abschnitt 4 zeigt für ein Musterportfolio von Krediten an deutsche Bauunternehmen, daß bei der Standardkalibrierung der Modelle mit empirischen Zeitreihen, d.h. Aktienrenditen im Fall von CreditMetrics und Ausfallzeitreihen im Fall von CreditRisk⁺, die Ergebnisse der Modelle sehr stark voneinander abweichen. Im fünften Abschnitt wird gezeigt, daß diese Abweichung fast ausschließlich auf die empirische Datenbasis zurückzuführen ist. Dazu wird die Value-at-Risk-Berechnung mit Parameterwerten wiederholt, die jeweils konsistente Werte für die (implizite) Korrelation von Kreditausfällen in den beiden Modellen gewährleisten. Für diese Parameter verschwinden die Value-at-Risk-Unterschiede weitgehend. Daraus kann geschlossen werden, daß weder Verteilungsannahmen noch Approximationsfehler einen wesentlichen Beitrag zur Erklärung der divergierenden Modellergebnisse liefern.

2 Eine Klassifizierung von Kreditrisikomodellen

Die in der Literatur vorgeschlagenen Kreditrisikomodelle unterscheiden sich konzeptionell vor allem hinsichtlich der Verteilungsannahmen für Ausfälle und Wiedergewinnungsraten sowie der Konzepte zur Berücksichtigung der Korrelation von Kreditausfällen. Im folgenden wird gezeigt, daß die Modelle in zwei grundlegende Klassen eingeteilt werden können:

- *Asset-Value-Modelle*
- *Ausfallraten-Modelle*

Die folgende Vergleichsanalyse des Artikels beschränkt sich deshalb auf je einen Vertreter der Klassen, CreditMetrics und CreditRisk⁺.

Die *Asset-Value-Modelle* gehen auf Merton (1974) zurück, in dessen Ansatz der Kreditnehmer mit Aufnahme des Kredits gleichzeitig eine Putoption auf sein Unternehmen erhält, so daß der risikobehaftete Kredit mit dem Black/Scholes-Kalkül bewertet werden kann. In diesen Ansätzen ist das Underlying der Wert der Aktiva des kreditnehmenden Unternehmens, für deren Wertentwicklung eine geometrische Brownsche Bewegung angenommen wird. Der Ausfall tritt ein, wenn der Wert der Aktiva am Laufzeitende geringer als der fällige Kreditrückzahlungsbetrag ist. In diesem Fall „übergibt der Kreditnehmer das Unternehmen“ anstatt den Kredit zurückzuzahlen; er „übt seine Putoption aus“. Der Merton-Ansatz beruht auf restriktiven Annahmen über die Zinsentwicklung, die Fremdkapitalstruktur und den Insolvenzzeitpunkt. Der risikofreie Zins wird als konstant unterstellt, und es besteht nur eine Klasse Fremdkapital. Ein Konkurs vor Laufzeitende des Kredits ist ausgeschlossen. Der Basisansatz von Merton wurde durch verschiedene Autoren weiterentwickelt, um Konkurse vor Laufzeitende, z.B. aufgrund von Liquiditätsproblemen, zu modellieren, komplexe Kapital-

strukturen zu berücksichtigen und die stochastische Entwicklung des risikofreien Zinses zu integrieren.⁸ Allen diesen Ansätzen ist gemeinsam, daß das Ausfallrisiko eines Kredits in erster Linie von der stochastischen Entwicklung des Wertes der Aktiva des Kreditnehmers abhängt. Dieses Konzept liegt den Asset-Value-Modellen zugrunde. Hauptvertreter dieser Modellkategorie sind das KMV-Modell und CreditMetrics.

Das KMV-Modell nutzt den Merton-Ansatz in leicht abgewandelter Form, um das Risiko eines Kreditportfolios zu bestimmen.⁹ Dazu wird die vom Merton-Modell implizierte Ausfallwahrscheinlichkeit durch Annahme eines „Default Point“ unterhalb der Totalverbindlichkeiten modifiziert, da das Merton-Modell z.T. unrealistische Ausfallwahrscheinlichkeiten produziert. Eine umfangreiche Datenbasis dient dazu, das Modell so zu kalibrieren, daß die berechneten Ausfallwahrscheinlichkeiten mit den empirisch beobachteten weitgehend übereinstimmen. Zur Bestimmung des Value-at-Risk werden mögliche zukünftige Renditen der Aktiva simuliert bzw. berechnet, die Ausfälle und auch die Erhöhung oder Verringerung des Ausfallrisikos einzelner Positionen bedeuten. Die Portfolioeffekte werden hierbei über die Korrelationsstruktur der Aktienrenditen berücksichtigt. Anschließend wird das Portfolio neu bewertet. Die hierzu notwendigen Spreads berechnen sich aus den kreditnehmerspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeiten, die aus den simulierten Renditen der Aktiva bestimmt werden.

CreditMetrics unterscheidet sich vom KMV-Ansatz hauptsächlich durch die Klassifizierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten nach Ratingklassen. Während KMV kreditnehmerspezifische Ausfallwahrscheinlichkeiten berechnet, werden in CreditMetrics einheitliche Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten innerhalb von Ratingklassen angenommen. Durch Simulation von korrelierten, normalverteilten Renditen der Aktiva werden in CreditMetrics gemeinsame Wertveränderungen von Krediten generiert. Die Neubewertung des Portfolios erfolgt mit einheitlichen Spreads innerhalb der Ratingklassen.

In den *Ausfallraten-Modellen* wird der Prozeß der Kreditausfälle direkt modelliert, anstatt einen stochastischen Prozeß für Unternehmenswerte zu definieren, der indirekt die Ausfälle verursacht. In diesen Modellen können in jedem diskreten Zeitintervall Ausfälle bzw. Ratingveränderungen auftreten; es wird lediglich spezifiziert, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines solchen Kreditereignisses ist. Typischerweise wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeiten nicht konstant sind, sondern in Abhängigkeit von Hintergrundfaktoren schwanken. Die Ausfallraten werden somit anders als in CreditMetrics oder im KVM-Modell nicht als Konstante, sondern als stochastische Variable angenommen.

Die Ansätze fußen auf einer neuen Literatur zur Bewertung kreditrisikobehafteter Finanzierungstiteln (Intensity-based Models), in denen der Ausfall als Jump-Diffusion-Prozeß

⁸ So z.B. Black, Cox (1976), Longstaff, Schwarz (1995), Briys, de Varenne (1997).

⁹ „CreditMonitor“ berechnet kreditnehmerspezifische Ausfallwahrscheinlichkeiten, die Grundlage für das Portfoliomodell sind. Daneben liefert KMV auch Module zur Bewertung von Krediten.

modelliert wird.¹⁰ Vertreter dieser Klasse von Kreditrisikomodellen sind CreditRisk⁺ und Credit Portfolio View.

Korrelation zwischen Kreditereignissen wird in diesen Modellen dadurch erzeugt, daß die Ausfallraten verschiedener Kredite von gemeinsamen Hintergrundfaktoren abhängen. Obwohl die Kreditausfälle bei einer vorgegebenen Ausfallwahrscheinlichkeit als jeweils unabhängige Ereignisse modelliert werden, führt der gemeinsame Hintergrundfaktor zu gleichgerichteten Schwankungen der Ausfallwahrscheinlichkeiten einzelner Kreditnehmer. Daher sind Kreditausfälle im Ergebnis nicht unabhängig, sondern weisen eine von Null verschiedene Korrelation auf. CreditRisk⁺ modelliert den Hintergrundfaktor implizit, indem Kreditnehmer einzelnen oder mehreren Sektoren zugeordnet werden. Es wird angenommen, daß die Ausfallwahrscheinlichkeiten in einem Sektor von genau einem Hintergrundfaktor, z. B. einem makroökonomischen Faktor, verursacht werden. Um dies abzubilden, werden die Ausfallwahrscheinlichkeiten für alle Kreditnehmer eines Sektors aus derselben Verteilung gezogen. Dies entspricht der anschaulichen Vorstellung von gleichartigen Schwankungen der Ausfallwahrscheinlichkeiten der Unternehmen eines Sektors über Zeit. Die Verteilungsannahmen von CreditRisk⁺ erlauben eine analytische Berechnung der Verlustverteilung. Credit Portfolio View modelliert die Hintergrundfaktoren dagegen explizit, indem zufällige makroökonomische Szenarien generiert werden, die die Verteilung der Ausfall- und Migrationwahrscheinlichkeiten bestimmen.¹¹ Im Gegensatz zu CreditRisk⁺ kann das Kreditrisiko nach Credit Portfolio View nur mit einem Simulationsverfahren berechnet werden.

3 CreditMetrics und CreditRisk⁺

Als Vertreter der beiden Modellkategorien wurden für die Vergleichsanalyse CreditMetrics sowie CreditRisk⁺ ausgewählt. Die Vergleichsanalyse soll anhand eines einfachen Musterportfolios von N homogenen Krediten an Unternehmen eines Sektors (der deutschen Bauindustrie) durchgeführt werden.

3.1 CreditRisk⁺

CreditRisk⁺ erzeugt in einem analytischen Berechnungsverfahren eine diskrete Verteilung von Verlusten, die ausschließlich durch Ausfälle der Kreditnehmer verursacht werden. Die Verlusthöhe eines Portfolios ist in diesem Modell durch zwei Elemente bestimmt:

- *Anzahl der ausgefallenen Kreditnehmer*
- *Höhe des Verlustes der einzelnen Ausfälle*

Um die *Anzahl der Ausfälle* zu bestimmen, wird in CreditRisk⁺ eine zweifache Stochastik unterstellt: im ersten Schritt wird eine (zufällige) sektorspezifische Ausfallwahrscheinlichkeit

¹⁰ Z. B. Jarrow, Turnbull (1995), Jarrow, Lando, Turnbull (1997), Das, Tufano (1995), Duffie, Singleton (1995).

¹¹ Der Zusammenhang zwischen den makroökonomischen Variablen und den sektorspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeiten ergibt sich dabei aus einer Regressionsanalyse der historischen Sektorausfallraten.

bestimmt, im zweiten Schritt wird die (zufällige) Anzahl der Ausfälle innerhalb des Sektors für die vorgegebene Ausfallwahrscheinlichkeit ermittelt, wobei nun Unabhängigkeit der einzelnen Ausfallereignisse unterstellt wird. Bei vorgegebener einheitlicher Ausfallwahrscheinlichkeit p_i der Kreditnehmer in einem Portfolio verteilen sich die Ausfälle unter Annahme der Unabhängigkeit binomial. Bei der Berechnung in CreditRisk⁺ wird für die Ausfälle jedoch eine Poissonverteilung unterstellt. Diese Verteilung liefert für kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten eine sehr gute Approximation der Binomialverteilung. Für ein Portfolio von N Krediten ergibt sich zunächst ein Erwartungswert der Ausfälle in Höhe von $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^N p_i$. Die Wahrscheinlichkeit für n Ausfälle berechnet sich dann approximativ als:

$$P(n \text{ Ausfälle}) = \frac{e^{-\mathbf{m}} \mathbf{m}^n}{n!}$$

Die zweite Stochastik ergibt sich nun aus der Unsicherheit über die Ausfallwahrscheinlichkeiten p_i bzw. den Sektor-Erwartungswert \mathbf{m} , die oben als konstant angenommen wurden. Dieser Erwartungswert wird in CreditRisk⁺ wiederum als stochastische Variable aufgefaßt, dessen Verteilung um den Mittelwert \mathbf{m} von Hintergrundfaktoren, z.B. Länderrisiken und makroökonomische Faktoren, beeinflußt wird. Es wird angenommen, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit innerhalb eines Sektors von genau einem Hintergrundfaktor getrieben ist und daher die Ausfälle in unterschiedlichen Sektoren voneinander unabhängig sind. Den Erwartungswert \mathbf{m}_k für die Anzahl der Ausfälle im Sektor k faßt man nun in der zweiten Stochastik als gammaverteilte Zufallsgröße auf, d.h. die Anzahl der Sektorausfälle schwankt zufällig um einen Mittelwert \mathbf{m}_k mit der Standardabweichung \mathbf{s}_k . Die Gammaverteilung ist eine Zweiparameterverteilung, die durch Angabe des Mittelwertes und der Standardabweichung vollständig bestimmt ist.

Jeder Kreditnehmer wird schließlich einem oder anteilig mehreren Sektoren zugeordnet, so daß sich die Summe der anteiligen Wahrscheinlichkeiten wieder zu p_i addiert. Für die Kalibrierung des Modells können der Erwartungswert \mathbf{m}_k und die Standardabweichung \mathbf{s}_k aus historischen Ausfallzeitreihen eines Sektors bestimmt werden.

Um die Verteilung der Ausfälle innerhalb eines Sektors zu berechnen, muß nun die Sektor-Gammaverteilung mit der Poissonverteilung kombiniert werden. Nach einigen Umformungen kann gezeigt werden, daß die resultierende Verteilung der Ausfälle als negative Binomialverteilung für den k -ten Sektor beschrieben ist: ¹²

$$P(n \text{ Ausfälle in Sektor } k) = (1 - p_k)^{a_k} \binom{n + a_k - 1}{n} p_k^n$$

mit $a_k = \mathbf{m}_k^2 / \mathbf{s}_k^2$ und $p_k = \mathbf{s}_k^2 / (\mathbf{s}_k^2 + \mathbf{m}_k)$.

Die Ausfallverteilung für das gesamte Portfolio ergibt sich nun direkt aus den Sektorverteilungen unter Annahme der Unabhängigkeit.

¹² Siehe Technisches Dokument, Seite 45

Im Fall eines Portfolios homogener, also gleich großer Kredite kann die Ausfallverteilung unmittelbar in die für die Kreditrisikoschätzung relevante Verlustverteilung überführt werden, indem einem einzelnen Ausfallereignis eine (deterministische) Verlusthöhe zugewiesen wird. (CreditRisk⁺ rechnet mit deterministischen Wiedergewinnungsfaktoren.) Wenn das Kreditportfolio dagegen Kredite verschiedener Größe aufweist, muß im zweiten Schritt die *Höhe der Verluste*, die aus diesen Ausfällen resultieren, berechnet werden. Hierzu werden die Kredite in Größenklassen eingeteilt. Alle Exposures L_i müssen als ganzzahliges Vielfaches einer Einheit L , ggf. nach Rundung, ausgedrückt werden: $L_i = u_i L$.

Dann kann die Verlustverteilung eines Sektors mit Hilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion beschrieben werden. Diese hat die Gestalt

$$G_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Verluste} = nL) z^n$$

Diese Funktion hat die Eigenschaft, daß der n -te Koeffizient die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust von n Exposureeinheiten L darstellt. Auf Basis der negativen Binomialverteilung der Ausfälle und unter Berücksichtigung der Größenklassenverteilungen können diese Koeffizienten rekursiv berechnet werden, so daß die Verlustverteilung analytisch bestimmbar ist.¹³

3.2 CreditMetrics

Im Gegensatz zu CreditRisk⁺ berücksichtigt CreditMetrics nicht nur das Ausfallrisiko, sondern bestimmt die Verteilung möglicher Forward-Portfoliowerte am Risikohorizont. Hierbei werden neben dem Ausfallrisiko auch Ratingveränderungen und stochastische Wiedergewinnungsraten simuliert.

CreditMetrics ist ein Asset-Value-Modell, da korrelierte Renditen der Aktiva für alle Kreditnehmer simuliert werden, die zu einer Neubewertung der Kredite am Risikohorizont führen. Die Aktivarenditen werden dann intervallweise in Ratingklassen übersetzt. Dabei sind die Intervalle so gewählt, daß die Ausfall- bzw. Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten an eine vorgegebene Migrationsmatrix angepaßt werden. Dem Modell liegt entsprechend die Annahme zugrunde, daß alle Kreditnehmer einer Ratingklasse homogen in bezug auf ihre Ratingmigrations- und Ausfallwahrscheinlichkeit sind.

Nach Zuordnung der Kreditnehmer zu einer Ratingklasse und Spezifizierung der Migrationswahrscheinlichkeiten sowie des Erwartungswertes und der Volatilität produktspezifischer Wiedergewinnungsraten erfolgt die Simulation der Portfoliowertverteilung in drei Schritten:

1.) Simulation von Renditen:

Je Simulationslauf werden für alle Kreditnehmer korrelierte Renditen der Aktiva aus einer Normalverteilung gezogen. Die Korrelationsstruktur ergibt sich aus der Zuordnung der einzelnen

¹³ Für eine detaillierte Herleitung siehe Technisches Dokument, Seiten 46 - 49

Kreditnehmer zu Aktienindizes. Das heißt die Unternehmenswertrendite R eines Kreditnehmers wird ausgedrückt als:

$$R = w_1 R_1 + w_2 R_2 + \dots + w_n R_{unsys.}, \quad w_i \geq 0$$

wobei R_i Renditen von Aktienindizes und $R_{unsys.}$ den unsystematischen Anteil des Renditerisikos bezeichnen. Die Gewichte w_i können so normalisiert werden, daß ohne Einschränkung der Allgemeinheit eine Standardnormalverteilung für R angenommen werden kann. Die Renditen zweier Kreditnehmer sind korreliert, falls sie mindestens einem systematischen Faktor zugeordnet sind.¹⁴ Die Renditekorrelation kann aus den Gewichten und der Korrelation der Aktienindizes mit Standardmethoden der Portfoliotheorie berechnet werden. In den folgenden Abschnitten wird die Renditekorrelation direkt angegeben, statt sie über Zuordnungen zu Indizes indirekt zu erzeugen.

2.) Übersetzung in Ratingklassen:

Den simulierten Renditen werden im zweiten Schritt Ratingveränderungen bzw. das Ausfallereignis zugeordnet. Hierzu wird die Standardnormalverteilung so in Abschnitte unterteilt, daß die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (das Integral unter dem entsprechenden Abschnitt der Dichtefunktion) exakt den vorgegebenen Migrations- und Ausfallwahrscheinlichkeiten der Ratingklasse entsprechen. Die Abbildung 1 zeigt als Beispiel die standardisierte Renditeverteilung für einen Kreditnehmer der Ratingklasse BB.

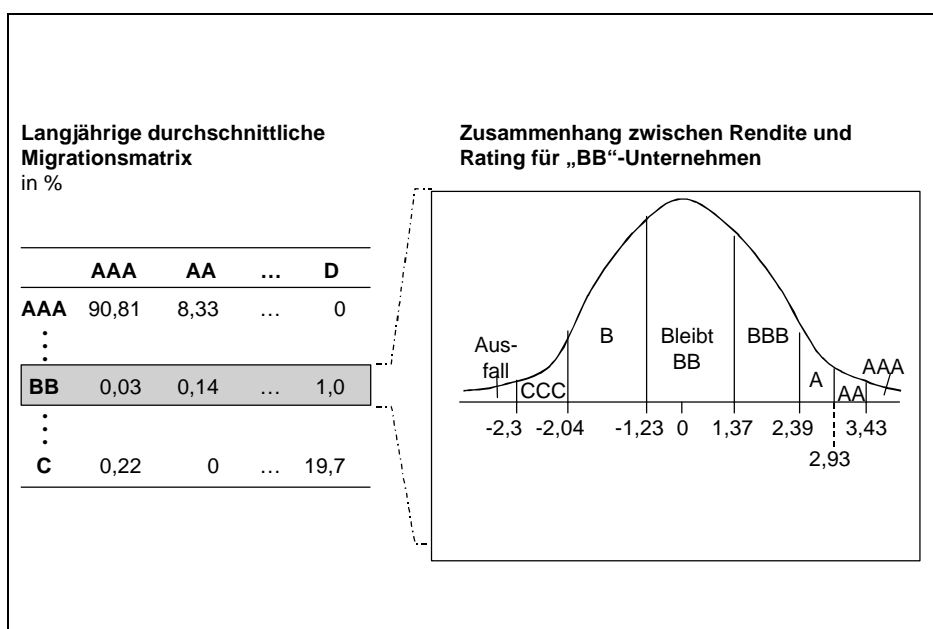


Abb. 1: Renditeschranken für ein Unternehmen mit Rating BB

¹⁴ Unter der Annahme, daß systematische Faktoren miteinander korreliert sind.

Ausgehend vom jeweiligen Anfangsrating kann aus der entsprechenden Verteilung für jede simulierte Rendite abgelesen werden, ob der Kreditnehmer in eine neue Ratingklasse migriert oder sogar ausgefallen ist.

3.) Neubewertung des Portfolios:

Schließlich werden die Kredite entsprechend der neuen Ratingklasse bewertet. Im Fall von Ausfällen wird eine zufällige Wiedergewinnungsrate simuliert. Die Neubewertung am Risikohorizont t_1 basiert auf ratingklassenspezifischen Forward-Rates $f(t, t_1, k)$, wobei k die k -te Ratingklasse bezeichnet. Der Forward-Wert eines Kredits, der am Risikohorizont der Ratingklasse k zugeordnet ist, berechnet sich als Gegenwartswert der ausstehenden Cash-flows C_t :

$$PV = \sum_{t=t_1}^N \frac{C_t}{(1 + f(t, t_1, k))^t}$$

Falls die simulierte Rendite den Ausfall des Kreditnehmers anzeigt, wird aus einer betaverteilten Grundgesamtheit eine zufällige Wiedergewinnungsrate mit oben definiertem Erwartungswert und Volatilität gezogen. Diese gibt den neuen Kreditwert am Risikohorizont.

Durch eine große Anzahl von Simulationen werden viele verschiedene zufällige Szenarien von Ratingveränderungen bzw. Ausfällen im Portfolio generiert und jeweils ein neuer Portfoliowert berechnet. Die unterschiedlichen Portfoliowerte mit den entsprechenden Häufigkeiten ergeben dann die Forward-Wertverteilung in CreditMetrics. Das Value-at-Risk ergibt sich im letzten Schritt als Quantil der simulierten Verteilung.

4 Vergleich von CreditMetrics und CreditRisk⁺ mit empirischer Schätzung der Korrelationen

Im folgenden soll für ein einfaches repräsentatives Musterportfolio das Kreditrisiko nach CreditMetrics und CreditRisk⁺ berechnet werden. Um die Analyse überschaubar und transparent zu halten, wird ein sehr einfaches Portfolio von N homogenen Krediten untersucht, die alle einem Sektor (der deutschen Bauwirtschaft) angehören. Die Kredithöhe wird für alle Kreditnehmer identisch angenommen, um Größenkonzentrationseffekte auf den Value-at-Risk-Schätzer zu vermeiden. Für die Schätzung der verwendeten Inputparameter wurde die Insolvenzzeitreihe des Statistischen Bundesamtes für das Baugewerbe (1980-1994)¹⁵ sowie die Aktienrenditen der Bauunternehmen im Dax 100 herangezogen.

4.1 Annahmen für einen „fairen“ Vergleich

Da konzeptionelle Unterschiede hinsichtlich der Risikodefinition, der Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten und der Korrelationen bestehen, werden für einen aussagefähigen Vergleich von CreditMetrics und CreditRisk⁺ folgende Annahmen getroffen:

¹⁵ Ab 1995 tritt ein Strukturbruch wegen Umstellung der Branchenschlüssel auf.

Risikodefinition:

Um in CreditMetrics eine mit CreditRisk⁺ vergleichbare Risikodefinition zu gewährleisten, werden lediglich die durch Ausfälle entstehenden Verluste berücksichtigt und dabei eine konstante Wiedergewinnungsrate unterstellt, die zur Vereinfachung auf Null gesetzt wird.

Ausfallwahrscheinlichkeiten:

Während in CreditMetrics jedem Kreditnehmer über seine Ratingklasse eine Ausfallwahrscheinlichkeit zugeordnet ist, wird in CreditRisk⁺ innerhalb eines Sektors eine einheitliche Ausfallwahrscheinlichkeit für alle Kreditnehmer angenommen. Um beide Modelle mit konsistenten Ausfallwahrscheinlichkeiten zu schätzen, werden deshalb in CreditMetrics alle Kreditnehmer einer einzigen Ratingklasse zugeordnet. Als erwartete Ausfallwahrscheinlichkeit wird im folgenden der Mittelwert der Insolvenzzzeitreihe des Baugewerbes von 1980 bis 1994 (0,0122) festgelegt. Die für CreditRisk⁺ notwendige Standardabweichung wird ebenso aus dieser Zeitreihe geschätzt und ergibt 0,0026.¹⁶

In CreditMetrics wird die Ausfallwahrscheinlichkeit durch die Renditeschwelle R bestimmt, deren Unterschreitung den Ausfall induziert. Fällt die normalverteilte Zufallsrendite unter diese Schwelle, dann fällt der Kreditnehmer aus. Um in beiden Modellen eine äquivalente Ausfallwahrscheinlichkeit zugrunde zu legen, berechnet sich die Renditeschwelle für die Kreditnehmer des Musterportfolios aus:

$$\Phi^{-1}(0,0122) = -2,25,$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Korrelationen:

In CreditMetrics werden die Renditen der Aktiva aus einer multivariaten Normalverteilung mit vorgegebener Korrelationsmatrix gezogen. Für deren empirische Ableitung wurde die Korrelationsmatrix der im Dax100 enthaltenen Bauaktien auf Basis der logarithmierten monatlichen Renditen von 1985 bis 1998 ermittelt. Die Renditekorrelationen streuen nur schwach und betragen im Durchschnitt 0.557 (siehe Abb.2). Für das Musterportfolio wird vereinfachend unterstellt, daß die Renditekorrelationen paarweise konstant sind. Im folgenden wird ein im Vergleich zur Empirie etwas konservativerer Wert von 0,50 angenommen¹⁷.

¹⁶ Die Abschätzung bedingter Volatilitäten aus Insolvenzzzeitreihen würde zu einer leichten Abweichung führen, vgl. Gordy (1998).

¹⁷ Hierdurch entsteht eine leichte Unterschätzung des Value-at-Risk.

Bilfinger + Berger	1				
Dyckerhoff	0,49	1			
Heidelb. Zement	0,55	0,48	1		
Hochtief	0,73	0,48	0,58	1	
Holzmann	0,67	0,49	0,52	0,58	1

Abb. 2: Korrelationen der Bauaktien im Dax100, Kursreihen 1985-1998 Durchschnitt: 0,557

In CreditRisk⁺ ergibt sich die Korrelation von Ausfällen implizit durch die Annahme der Gammaverteilung für die Ausfallrate des Baugewerbes, deren Parameter oben bereits spezifiziert wurden.

Durch die oben beschriebenen Annahmen sind die Modelle mit Ausnahme der Korrelationskonzepte vergleichbar parametrisiert. Lediglich die Inputparameter, die das *gemeinsame* Ausfallverhalten der Kreditnehmer bestimmen (die Renditekorrelation in CreditMetrics und die Volatilität der Gammaverteilung in CreditRisk⁺), basieren auf unterschiedlichen empirischen Größen, ohne daß die Konsistenz der Korrelationsannahmen überprüft wurde.

4.2 Ergebnisse der Vergleichsanalyse mit empirischer Schätzung der Korrelationen

Entsprechend der in 4.1 beschriebenen Annahmen und Parameter wurde das Value-at-Risk zum 95%- und 99%-Perzentil mit CreditMetrics und dem CreditRisk⁺ berechnet. Dabei wurden unterschiedlich große Kreditportfolios zugrunde gelegt, indem die Anzahl der Kreditnehmer zwischen 10 und 1000 variiert wurde.

Die Ergebnisse weichen stark voneinander ab, wobei CreditMetrics systematisch ein höheres Value-at-Risk als CreditRisk⁺ liefert. Bei 95%-Konfidenzniveau weisen die Modelle lediglich bei einem Portfolio von 10 Bauunternehmen ein einheitliches Value-at-Risk von einem ausgefallenen Kredit auf. Bei 1000 Kreditnehmern ist das CreditMetrics-Ergebnis etwa dreimal höher als der CreditRisk⁺-Wert bei gleichem Konfidenzniveau. Zum 99%-Konfidenzniveau übersteigt das CreditMetrics Value-at-Risk die Vergleichswerte in Abhängigkeit von der Kreditnehmeranzahl sogar um das drei- bis neunfache.

Anzahl	95% Konfidenz		99% Konfidenz	
	CM	CR ⁺	CM	CR ⁺
10	1	1	3	1
50	3	2	10	3
100	6	3	22	4
200	13	5	40	7
500	31	11	105	13
1000	63	19	209	23

Abb. 3: Value-at-Risk nach CreditMetrics (CM) und CreditRisk⁺ (CR⁺) bei empirischer Schätzung der Korrelationen

Da die Abweichungen mit der Portfoliogröße überproportional ansteigen, ist eine Skalierung der Modelle über einen linearen Faktor nicht möglich. Bei empirischer Schätzung der Korrelationen berechnen die Modelle somit stark abweichende Value-at-Risk-Werte, die nicht ineinander überführbar sind. Die Ergebnisse lassen weiterhin vermuten, daß die Höhe der Abweichungen für ein reales Portfolio mit einer Vielzahl von Sektoren (Branchen oder sonstigen Kreditnehmergruppen) stark von der Segmentierung des Portfolios abhängen wird.

5 Kalibrierung mit konsistenten Korrelationen

Im folgenden wird untersucht, inwiefern die technische Konzeption, d.h. Verteilungsannahmen und Berechnungsverfahren, das obige Ergebnis verursachen, oder ob die Abweichung durch die unterschiedliche empirische Datenbasis zur Kalibrierung der Modelle verursacht wurde. Da die Ausfallwahrscheinlichkeiten in beiden Modellen identisch angesetzt wurde, kann die empirische Datenbasis nur die in den Modellen implizite Größenordnung der Korrelation von Ausfällen beeinflussen. Um diesen Effekt von dem Einfluß der technischen Konzeption zu isolieren, muß zunächst untersucht werden, wie die unterschiedlichen Korrelationskonzepte von CreditMetrics und CreditRisk⁺ ineinander überführt werden können, um dann in einem weiteren Schritt eine Vergleichsanalyse mit konsistenten Korrelationsannahmen durchzuführen.

5.1 Bestimmung konsistenter Korrelationen

Die Korrelationskonzepte der Modelle sind nicht direkt miteinander vergleichbar. Im CreditMetrics-Modell beeinflussen die Renditekorrelationen der Aktiva indirekt die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Ausfalls von zwei Kreditnehmern und steuern dadurch die Korrelation von Ausfällen. Dagegen fließen Korrelationen in CreditRisk⁺ in Form der gemeinsamen Stochastik der erwarteten Ausfallrate zweier Kreditnehmer ein. Je höher die erwarteten Ausfallraten korreliert sind, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Ausfalls zweier Kreditnehmer.

Um die Korrelationskonzepte vergleichen zu können, muß ein einheitliches Maß für die Korrelation gewählt werden, das über die Inputparameter der Modelle konsistent eingestellt werden kann. Als ein solches Maß bietet sich die Ausfallkorrelation an. Die Ausfallkorrelation ist als Korrelation zweier Zufallsvariablen A und B definiert, die jeweils den Wert 1 (bei Kreditausfall) oder den Wert 0 (bei Rückzahlung des Kredits) annehmen. Nach der Standardformel zur Berechnung von Korrelationen ist r definiert als:

$$r = \frac{E(AB) - E(A)E(B)}{\sqrt{\text{VAR}(A)}\sqrt{\text{VAR}(B)}}$$

Dabei gilt für die Zufallsvariablen A , B :

Kreditereignis	Wert von A bzw. B	Wahrscheinlichkeit
Ausfall	1	p
Kein Ausfall	0	$1-p$

Es kann nun gezeigt werden, daß bei geeigneter Wahl der Inputparameter beide Modelle identische Ausfallkorrelationen erzeugen.

Mittelwert und Varianz von A bzw. B berechnen sich als

$$E(A) = E(B) = p$$

$$VAR(A) = VAR(B) = p(1-p)$$

Einsetzen in die Formel der Ausfallkorrelation ergibt

$$\mathbf{r} = \frac{P_{\{A \wedge B\}} - p^2}{p(1-p)} \text{ bzw.}$$

$$P_{\{A \wedge B\}} = p^2 + \mathbf{r} p(1-p)$$

Dabei bezeichnet $P_{\{A \wedge B\}}$ die Wahrscheinlichkeit für den gemeinsamen Ausfall. Unter der Annahme einer identischen Ausfallwahrscheinlichkeit zweier Kreditnehmer p zeigt diese Formel, daß die Ausfallkorrelationen in beiden Modellen genau dann identisch sind, wenn die Wahrscheinlichkeit für den gemeinsamen Ausfall zweier Kreditnehmer übereinstimmt. Diese Wahrscheinlichkeiten sind nun für die beiden Modelle analytisch abzuleiten.

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit wird in CreditMetrics durch die Renditekorrelation bestimmt, die die Form der bivariaten Normalverteilung festlegt. Je höher die Renditekorrelation \mathbf{r}_R gewählt wird, desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse findet sich über der Fläche von den negativen Renditen, die den Ausfall beider Kreditnehmer bedeuten.

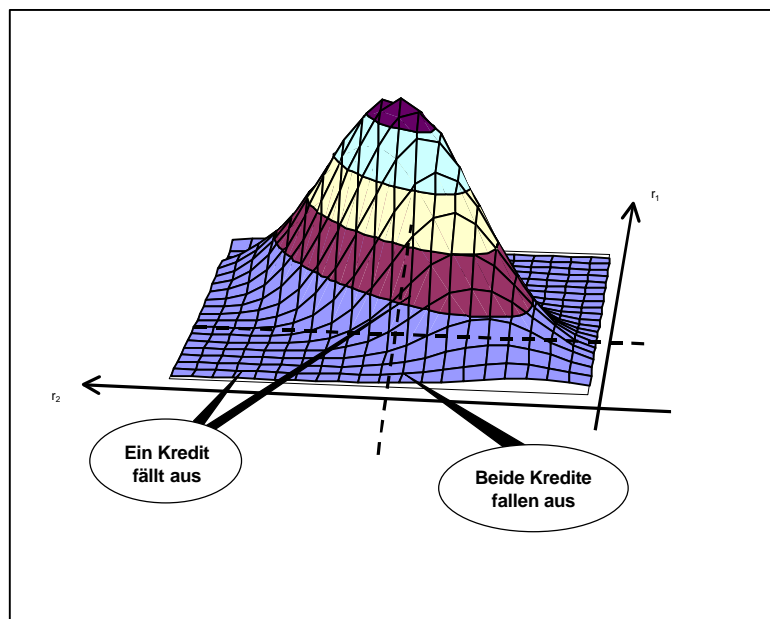


Abb. 4: Bivariate Normalverteilung zu einer Renditekorrelation von 50%

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit kann über die bivariate Normalverteilungsfunktion berechnet werden:

$$P_{\{A \wedge B\}} = \frac{1}{2p\sqrt{1-r_R^2}} \int_{-\infty}^R \int_{-\infty}^R \exp\left(-\frac{1}{2p(1-r_R^2)}(r_1^2 - 2r_R r_1 r_2 + r_2^2)\right) dr_1 dr_2$$

Dies bedeutet, daß zu jeder beliebigen vorgegebenen Ausfallkorrelation r^* , insbesondere also der impliziten CreditRisk⁺-Ausfallkorrelation, eine Renditekorrelation r_R gefunden werden kann, so daß die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit mit dem entsprechenden Wert aus CreditRisk⁺ übereinstimmt:

$$P_{\{A \wedge B\}} = p^2 + r^* p(1-p)$$

Für das CreditRisk⁺ Modell kann die implizite Ausfallkorrelation innerhalb eines Sektors näherungsweise berechnet werden als:¹⁸

$$r = p \left(\frac{s}{p} \right)^2$$

Bei vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeit p kann die Ausfallkorrelation in CreditRisk⁺ somit durch die Volatilität der Ausfallwahrscheinlichkeiten variiert werden. Für eine Zielkorrelation r^* muß $s = \sqrt{r^* p}$ gewählt werden.

¹⁸ Die Formel ergibt sich als Spezialfall der allgemeinen Darstellung der Ausfallkorrelation im Technischen Dokument, Seite 57, Formel (138)

Damit können bei gleicher mittlerer Ausfallwahrscheinlichkeit p jeweils Kombinationen aus der CreditMetrics Renditekorrelation r_R und der CreditRisk⁺ Volatilität s bestimmt werden können, die identische Ausfallkorrelationen in beiden Modellen erzeugen.

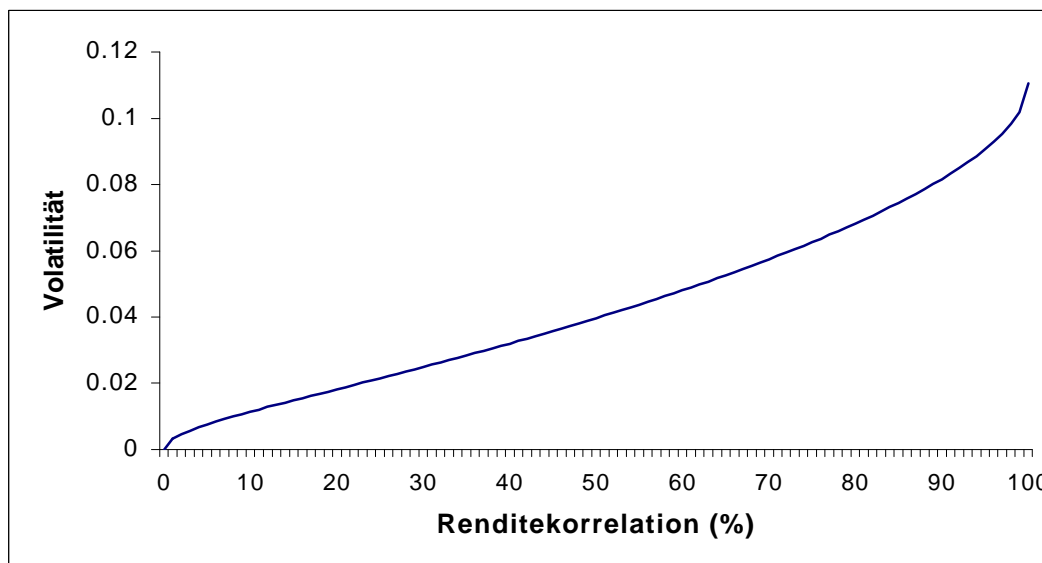


Abb. 5: Kombinationen von Renditekorrelationen und Volatilitäten mit identischer Ausfallkorrelation (mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit 1,22%)

Abbildung 5 zeigt für die angenommene Ausfallwahrscheinlichkeit der Kreditnehmer des Musterportfolios von 1,22% diejenigen Kombinationen von Renditekorrelationen und Volatilitäten, die eine identische Ausfallkorrelation erzeugen.

5.2 Ergebnisse der Vergleichsanalyse mit konsistenter Korrelation

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die abweichenden Meßergebnisse aus Abschnitt 4.2 in erster Linie auf die empirische Kalibrierung und nicht auf die Unterschiede in der technischen Konzeption der Modelle zurückzuführen sind. Wie im vorangegangenen Abschnitt dargestellt, müssen dafür zunächst die Ausfallkorrelationen der Modelle auf einen einheitlichen Wert gesetzt werden. Für das Musterportfolio von N homogenen Bauunternehmen wurde in Abschnitt 4.2 eine Renditekorrelation von 0,50 für CreditMetrics und eine Volatilität der Ausfallrate in Höhe von 0,26% für CreditRisk⁺ bei einer gemeinsamen mittleren Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,22% angenommen. Mit diesen Parametern ergibt sich die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit von je zwei Bauunternehmen in CreditMetrics als:

$$\begin{aligned} \text{Gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit} &= \\ \text{Biv. Normalverteilungskt. } (-2.25, -2.25, 50\%) &\approx 0.17\% \end{aligned}$$

Daraus berechnet sich folgende Ausfallkorrelation:

$$\text{Ausfallkorrelation} = \frac{0.17\% - 1,22\%^2}{1.22\%(1 - 1.22\%)} = 0.1287$$

Die Ausfallkorrelation nach CreditRisk⁺ ergibt sich als:

$$\text{Ausfallkorrelation} = 1.22\% \left(\frac{0,26\%}{1.22\%} \right)^2 = 0.0006$$

Die Ausfallkorrelation von CreditMetrics übertrifft demnach die implizite CreditRisk⁺-Korrelation um das 200-fache, wenn die Inputparameter aus empirischen Aktienkurszeitreihen (CreditMetrics) bzw. der historischen Ausfallzeitreihe (CreditRisk⁺) des Statistischen Bundesamtes für das Baugewerbe abgeleitet werden.

Um zu überprüfen, ob die unterschiedlichen Korrelationsannahmen verantwortlich für die hohen Value-at-Risk-Unterschiede sind, wurde eine zweite Vergleichsanalyse mit identischen Ausfallkorrelationen durchgeführt. Hierbei wurde zunächst die Renditekorrelation in CreditMetrics so gewählt, daß die Ausfallkorrelation mit der in CreditRisk⁺ (0,0006) übereinstimmt. Dazu muß der Korrelationskoeffizient der Renditen auf 0,016% gesetzt werden. In einer zweiten Berechnung wurde die Standardabweichung so festgelegt, daß in CreditRisk⁺ eine Ausfallkorrelation von 0,1287 impliziert wurde, die der Renditekorrelation von 0,50 in CreditMetrics entspricht. Hierzu muß eine Standardabweichung etwa 0,04 gewählt werden. Die Abbildung 6 zeigt die Ergebnisse der Simulationen bzw. Berechnungen zum 95%- und 99%-Konfidenzniveau in Abhängigkeit von der Anzahl der Bauunternehmen.

Anzahl	Empirische CR ⁺ -Ausfallkorrelation (0,0006)				Empirische CM-Ausfallkorrelation (0,1287)			
	95% Konfidenz		99% Konfidenz		95% Konfidenz		99% Konfidenz	
	CM	CR ⁺	CM	CR ⁺	CM	CR ⁺	CM	CR ⁺
10	1	1	3	2	1	1	3	2
50	2	2	3	3	3	3	10	10
100	3	3	4	4	6	7	22	20
200	5	5	7	7	13	14	40	40
500	11	11	14	13	31	35	105	100
1000	20	20	25	23	63	71	209	200

Abb. 6: Value-at-Risk nach CreditMetrics (CM) und CreditRisk⁺ (CR⁺) bei konsistenter Schätzung der Korrelationen (Baugewerbe) in Abhängigkeit von der Anzahl der Unternehmen im Portfolio

Das Value-at-Risk der beiden Modelle, welches jeweils in Krediteinheiten gemessen wurde, zeigt nur geringe Unterschiede ab 100 Kreditnehmern. Die Abweichungen betragen 1 bis 9 Krediteinheiten, was einer Differenz von bis zu 2% des Kreditvolumens entspricht. Diese Abweichung ist auf die unterschiedliche technische Konzeption der Modelle oder aber den zufälligen Simulationsfehler der Monte-Carlo-Simulation von CreditMetrics zurückzuführen.

Die Vergleichsanalyse zeigt, daß Value-at-Risk-Unterschiede fast ausschließlich durch die empirische Kalibrierung verursacht werden. Wenn die Parameter für die Kreditrisikomodelle so gewählt werden, daß identische Ausfallkorrelationen vorliegen, stimmen die Value-at-Risk-Ergebnisse weitgehend überein. Allerdings muß für CreditMetrics eine extrem geringe Renditekorrelation (0,016) gewählt werden, um die CreditRisk⁺-Ausfallkorrelation abzubilden. Empirische Aktienkurszeitreihen würden tendenziell wesentlich höhere Renditekorrelationen

und damit Ausfallkorrelationen nahelegen. Die Frage, ob Asset-Value-Modelle oder auf Ausfallraten basierende Modelle das Kreditrisiko besser abbilden, hängt somit eng mit der Frage zusammen, wie hoch Ausfallkorrelationen in Realität tatsächlich einzuschätzen sind.

Um die Robustheit der Ergebnisse in bezug auf die verwendete Datenbasis zu untersuchen, wurde die Analyse für eine andere Ausfallzeitreihe mit erheblich größerer Volatilität wiederholt: die „Speculative Grade“ Ausfallzeitreihe von Moody's im Zeitraum 1970-1996. Als Speculative Grade zählen Unternehmen mit einem Rating von BB und darunter. Diese Unternehmen zeigen eine mittlere Ausfallrate von 3,31%, die Volatilität der Ausfallraten beträgt 2,66%. Die Ausfallkorrelation, die aus dieser Stichprobe mit dem CreditRisk⁺-Konzept geschätzt wird, beträgt etwa 0,02, was einer Renditekorrelation für CreditMetrics von ca. 0,10 entspricht. Auch mit diesen Parametern ergeben sich nur minimale Abweichungen des Value-at-Risk von maximal 2 Krediteinheiten:

Anzahl	95% Konfidenz		99% Konfidenz	
	CM	CR ⁺	CM	CR ⁺
10	1	1	2	2
50	5	5	7	8
100	8	9	12	10
200	17	18	25	26
500	41	43	62	63
1000	84	86	125	125

Abb. 7: Value-at-Risk nach CreditMetrics (CM) und CreditRisk⁺ (CR⁺) bei konsistenter Schätzung der Korrelationen (Moody's Speculative Grade)

6 Zusammenfassung

Dieser Artikel zeigt, daß das Value-at-Risk nach CreditMetrics und CreditRisk⁺ trotz „fairer“ Testbedingungen sehr stark voneinander abweichen kann, wenn die notwendigen Inputparameter nach dem in der Praxis üblichen Verfahren aus empirischen Zeitreihen geschätzt werden. Die Ursache für die Abweichung liegt nahezu ausschließlich in den divergierenden impliziten Ausfallkorrelationen, die durch diese Parameterwahl bestimmt werden. Tendenziell liefert CreditMetrics für dasselbe Portfolio ein deutlich höheres Value-at-Risk, da die hohen Korrelationen von Aktien eine sehr viel größere gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit von je zwei Kreditnehmern bedingen.

Es ist jedoch möglich, die Modelle konsistent zu parametrisieren und auf diesem Weg mit beiden Verfahren nahezu identische Value-at-Risk-Werte zu erzielen. Es wurde gezeigt, wie Renditekorrelationen bzw. Volatilitäten von Ausfallzeitreihen gewählt werden müssen, um eine identische Ziel-Ausfallkorrelation für beide Kreditrisikomodelle zu generieren.

Eine wichtige offene Frage für die Implementierung von Kreditrisikomodellen ist demnach die Auswahl der Datenbasis für die Abschätzung von Ausfallkorrelationen. Die Kalibrierung der Modelle mit historischen Ausfallzeitreihen bzw. Aktienkursdaten führt zu stark divergierenden, einander widersprechenden Schätzern der impliziten Ausfallkorrelationen. Die empirische Schätzung von Ausfallkorrelationen stellt daher ein wichtiges Thema für zukünftige Forschungsarbeiten dar.

Literaturverzeichnis

- Black, F. und J.C. Cox**, 1976, Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, *Journal of Finance* 31, 351-367
- Briys, E. und F. de Varenne**, 1997, Valuing Risky Fixed Rate Debt: An Extension, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32, 239-248
- Crouhy M. und Robert Mark**, 1998a, A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models, Präsentation anlässlich der Konferenz: Credit Modelling and the Regulatory Implications, London, September 1998
- Crouhy M. und Robert Mark**, 1998b, Aggregating and Integrating Market and Credit Risk within a Consistent Framework, *Vortrag Global Derivatives*, Paris, 1998
- CreditMetrics**, 1997, Technical Document, J.P.Morgan
- CreditRisk⁺**, 1997, Technical Document, Credit Suisse Financial Products
- Credit Portfolio View**, 1998, Approach Document and User's Manual, McKinsey & Company
- Das, S. R. und P. Tuffano**, 1995, Pricing Credit-Sensitive Debt when Interest Rates, Credit Ratings and Credit Spreads are Stochastic, *The Journal of Financial Engineering* 5, 161-198
- Duffie, D. und K. Singleton**, 1995, Modeling Term Structures of Defaultable Bonds, Working Paper, Stanford University
- Gordy, Michael B.**, 1998, A Comparative Anatomy of Credit Risk Models, Working Paper, Federal Reserve System
- Kealhofer, S.**, 1995a, Managing Default Risk in Portfolios of Derivatives, in *Derivatives Credit Risk: Advances in Measurement and Management*, Risk Publication, London, 49-63
- Kealhofer, S.**, 1995b, Portfolio of Default Risk, proprietary documentation, KMV Corporation, San Francisco
- Jarrow, R. und S. M. Turnbull**, 1995, Pricing Options on Financial Securities Subject to Credit Risk, *Journal of Finance*, 53-86
- Jarrow, R., D. Lando und S. M. Turnbull**, 1997, A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, *The Review of Financial Studies* 10, 481-523
- Longstaff, F.A. und E.S. Schwartz**, 1995, A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt, *Journal of Finance*, 789-819
- Merton, R.C.**, 1974, On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance* 29, 449-470
- Wilson, T.**, 1997a, Portfolio Credit Risk (I), *Risk Magazine*, September, Volume 10, Number 9
- Wilson, T.**, 1997b, Portfolio Credit Risk (II), *Risk Magazine*, October, Volume 10, Number 10