

# Mikroskopische Theorie der Kernreaktionen für einen Mehrteilchen-Aufbruch

A. Grauel

Institut für theoretische Physik der Universität Frankfurt am Main

(Z. Naturforsch. **29 a**, 859–866[1974]; eingegangen am 27. Februar 1974)

*Microscopic Theory of Nuclear Reactions for a Multi-particle-break-up*

Introducing correlated continuum wave functions for the two- and  $n$ -particle-continuum a microscopic theory of nuclear reactions based on a method of Fano is developed. The  $S$ -matrix-elements are given by the matrix-elements between correlated continuum wave functions and bound state wave functions. The antisymmetrization of the continuum wave functions with more than one particle in the continuum is included. The theory can be straightforwardly applied on the  $n$ -nucleon-emission process following photo- and particle excitations.

## I. Problemstellung

Starkes Interesse findet in den letzten Jahren die Streutheorie mit zwei und mehr Teilchen im Kontinuum. Hier konzentrierten sich die Untersuchungen zunächst auf eine phänomenologische Beschreibung<sup>1</sup>. Von einer mikroskopischen Beschreibung wird insbesondere erwartet, daß sie Aussagen über die Korrelation von Teilchenpaaren, d. h. die Clusterstruktur von Kernen und über die Größe von Dreikörperkräfte liefert. Um einen Streuvorgang zu beschreiben, sind zur Streuenergie  $E$  Streulösungen im gesamten Raumbereich und eine praktikable Entwicklung für die Streumatrix  $S$  zu finden. Dazu ist eine diskrete Basis notwendig, nach der dann die tatsächlichen Wellenfunktionen entwickelt und die Streumatrix bestimmt wird. Dieses kann über eine formale Theorie mit einer Aufteilung des Konfigurationsraumes in einen wechselwirkungsfreien und in einen Wechselwirkungsbereich<sup>2</sup> oder über einen effektiven Hamilton-Operator<sup>3</sup> geschehen. Im allgemeinen kann eine solche Beschreibung nur einen Überblick über die Grobstrukturen im Wirkungsquerschnitt liefern.

Die Verbindung zwischen phänomenologischer und mikroskopischer Beschreibung im Einteilchenkontinuum erhält man, wenn in das Konzept der Eigenkanal-Theorie (EKT)<sup>4</sup> Kollektivkorrelationen in einer Teilchen-Loch-Beschreibung<sup>5</sup> in die Reaktionstheorie eingeführt werden. Die Berechnung des totalen Photoabsorptions-Wirkungsquerschnittes für das System C<sup>12</sup> zeigt eine gute Übereinstimmung<sup>6</sup> mit experimentellen Messungen. Mikroskopische Be-

rechnungen für das Einteilchenkontinuum mit Schalenmodell-Wellenfunktionen lassen sich auf der Basis der Fano-Approximation<sup>7</sup> durchführen. Hier gehen die Matrixelemente, die aus den Zuständen des Kontinuums und den gebundenen Zuständen berechnet werden, direkt in die Berechnung der  $S$ -Matrix-Elemente ein. Systemfremde Größen wie Kanalradien, Randbedingungen am Matching-Radius, die Konstruktion von Modell-Zuständen und ähnliche Größen sind dabei vermeidbar. Eine Behandlung der Reaktion  $(\gamma, p)$ ,  $(\gamma, n)$  und ihrer inversen Reaktionen ist durch diese Theorie möglich. Eine Modifikation derart, daß auch einlaufende Wellen zugelassen werden, ist in dieser Theorie möglich, wie die Berechnung der Isobar-Analogzustände<sup>8</sup> zeigt. In diesem Zusammenhang erscheint es nun wichtig, ganz allgemein eine Theorie für die mikroskopische Beschreibung der Kernreaktionen zu formulieren, die es gestattet, nicht nur Photo-Reaktionen und durch Nukleonen induzierte Reaktionen im Einteilchenkontinuum zu berechnen, sondern auch Prozesse, die über das Zweiteilchenkontinuum und  $n$ -Teilchenkontinuum ablaufen. Untersuchungen des Zweiteilchenkontinuums sind von besonderem Interesse, weil sie Informationen liefern über den Reaktionsablauf (prompter Zerfall, Stufenprozeß) und eine eventuelle Korrelation von Teilchenpaaren im Ausgangskanal.

Bei einem Dreikörper-Aufbruch mit einem Restkern von  $(A-2)$  Nukleonen und zwei Nukleonen im Kontinuum ist einzig die gesamte Kanalenergie  $E_{\text{rel}} = E - E_{\text{CM}} - E_{\text{final}}$  eine feste Größe. Im Falle zweier auslaufender Nukleonen verteilt sich diese Energie in einem nicht definierten Verzweungsverhältnis auf die beiden Nukleonen  $0 \leq \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq E_{\text{rel}}$ , wobei als Nebenbedingungen  $E_{\text{rel}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  gilt. Die

Sonderdruckanforderungen an Dr. A. Grauel, Hochtemperatur-Reaktorbau, D-6800 Mannheim, Gottlieb-Daimler-Straße 8.

asymptotische Gestalt der Streufunktion läßt sich durch einen Produktansatz zweier Einteilchenfunktionen realisieren. In diesen Einteilchenfunktionen besitzen die beiden Teilchen scharfe Impulse  $\hbar k_1$  und  $\hbar k_2$ . Wie oben dargelegt wurde, überstreichen ihre Energien einen kontinuierlichen Bereich, so daß der Produktansatz keine passende Basis darstellt, weil zur Beschreibung eines physikalischen Zustandes ein Kontinuum von Kanälen notwendig ist. Das heißt, die S-Matrix hängt in einem solchen Fall von kontinuierlichen Parametern ab, so daß ein Kontinuum von Ausgangskanälen notwendig ist, um den Streuzustand im Zweiteilchenkontinuum darzustellen. Wir betrachten deshalb die Nukleonen im Kontinuum als korreliert und führen eine kollektive Radialkoordinate  $r$  und Korrelationskoordinaten  $\{a_1, a_2, \dots\}$  ein, die in Abschnitt II näher spezifiziert werden. Wie wir sehen werden, sind die Einteilchenkoordinaten  $(r_1, r_2)$  über den Korrelationswinkel miteinander verknüpft, sie sind also keine unabhängigen Koordination. Die Radialabhängigkeit für zwei unabhängige Teilchenströme geht wie  $r^{-2}$ . Mit den oben eingeführten Koordinaten werden die ein- und auslaufenden Wellen I und 0 mit  $r^{-5/2}$  gedämpft. Die Dämpfung ist um den Faktor  $r^{-1/2}$  stärker als für zwei unabhängige Teilchenflüsse, da die Teilchen korreliert sind. Die Kanalwellenfunktion besitzt die gleiche radiale Abhängigkeit  $r^{-5/2}$ , so daß I und 0 dieselbe Wronski-Identität für die Dreiteilchen-Kanäle wie im Falle der Zweiteilchen-Kanäle erfüllen. Die im folgenden entwickelte Theorie ist ohne Schwierigkeiten auch auf das  $n$ -Teilchen-Kontinuum übertragbar. Ebenso bildet die Antisymmetrisierung der  $n$ -Teilchen-Kontinuum-Wellenfunktion keine ernste Schwierigkeit.

Die dargestellte Methode ist geeignet zur mikroskopischen Beschreibung von Kernreaktionen, weil man hier nur die aktuellen Kopplungs-Matrixelemente berücksichtigt. Mit anderen Worten, im allgemeinen wird man mit einer geringeren Zahl von Basiszuständen auskommen als beispielsweise in einer modellmäßigen Behandlung wie der  $R$ -Matrix-Theorie. Dadurch läßt sich eine Konvergenzverbesserung erreichen, weil mehr Einteilchen-Zustände bei der Entwicklung der Zustände des Zweiteilchen-Kontinuums in ein Produkt von unkorrelierten Schalenmodell-Zuständen berücksichtigt werden können. Wie Vorüberlegungen zeigen, genügen etwa fünf radiale Quantenzahlen  $n$  für ein konstantes Energieverhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ <sup>9</sup>.

## II. Mikroskopische Beschreibung von Mehrteilchenkontinua

### a) Asymptotische Koordinaten für das $n$ -Teilchenkontinuum

Die charakteristische Größe bei einem Dreikörper-Aufbruch ist die Energie  $E_{\text{rel}}$  der Relativbewegung im Dreiteilchenkanal der beiden auslaufenden Teilchen, gemessen relativ zum verbleibenden Restkern. Sie ist definiert durch  $E_{\text{rel}} = E - E_{\text{CM}} - E_{\text{final}}$ ; hierbei ist  $E_{\text{CM}}$  die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung und  $E_{\text{final}}$  die Restenergie des (A-2)-Teilchensystems. Die beiden Kontinuumsteilchen nehmen diese Energie auf

$$(k\hbar)^2/(2m) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (1)$$

wobei die einzelnen Teilchen kontinuierlich jede Energie innerhalb des angegebenen Bereichs  $0 \leq \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \leq E_{\text{rel}}$  annehmen können. Mit den reduzierten Massen

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad \mu_2 = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

liefert eine elementare Umformung:

$$k^2 = (k_1^2/\mu_1 + k_2^2/\mu_2) m. \quad (2)$$

Diese Gleichung wird aufgelöst durch die Einführung eines Korrelationswinkels  $\beta$ . Der mathematische Zusammenhang zwischen Wellenzahl  $k$  und den Einteilchen-Wellenzahlen lautet:

$$k_1 = (\mu_1/m)^{1/2} \cdot k \cdot \cos \beta, \quad k_2 = (\mu_2/m)^{1/2} \cdot k \cdot \sin \beta. \quad (3)$$

Die Einteilchen-Wellenzahlen  $(k_1, k_2)$  sind innerhalb  $0 \leq \beta \leq \pi/2$  definiert. Damit ergibt sich ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der Wellenzahl  $k$  und  $\beta$  im Dreiteilchenkanal und  $(k_1, k_2)$ . Für den asymptotischen Bereich  $(r_1, r_2) > R_0$  (Kernradius) erhält man eine charakteristische Gleichung für die Einteilchenkoordinaten  $r_1$  und  $r_2$  über den Korrelationswinkel  $\beta$ <sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^{1/2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \cdot \left( \frac{v_2/t}{v_1/t} \right) = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (4)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung erlaubt eine Darstellung der Einteilchenkoordinaten analog den Wellenzahlen

$$r_1 = r(m/\mu_1)^{1/2} \cdot \cos \alpha, \quad r_2 = r(m/\mu_2)^{1/2} \cdot \sin \alpha, \quad (5)$$

hierbei ist  $r = [(\mu_1/m)r_1^2 + (\mu_2/m)r_2^2]^{1/2}$  die kollektive Teilchenkoordinate im Dreiteilchenkanal. Der Koordinaten-Korrelationswinkel

$$a = \arctg \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{1/2} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

charakterisiert die Teilchenkorrelation und zeigt an, mit welchem Gewicht die beiden Konstituenten  $r_1$  und  $r_2$  beteiligt sind. Die bewegte Masse im Dreiteilchenkanal ist  $m = (\mu_1 \mu_2)^{1/2}$  und falls  $m_2$  groß gegen die Teilchenmassen  $m_1$  und  $m_3$  ist, folgt  $m \approx (m_1 m_3)^{1/2}$ . Es ist leicht zu sehen, daß die oben eingeführten Koordinaten innerhalb eines Viertelkreises  $0 \leq a \leq \pi/2$  eindeutig definiert sind.

Dieser Formalismus läßt sich verallgemeinern: für eine Fragmentierung in vier Teilchen verteilt sich die gesamte Kanalenergie  $E_{\text{rel}} = E - E_{\text{CM}} - E_{\text{final}} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  auf die drei Kontinuumsteilchen. Auch hier läßt sich eine Trennung der Korrelation  $\{a_1, a_2\}$  von der kollektiven Teilchenkoordinate  $r$  erreichen<sup>2</sup>. Die zu Gl. (5) analogen Gleichungen ohne die Massenfaktoren lauten:

$$r_1 = r \cos a_2 \cos a_1, \quad r_2 = r \cos a_2 \sin a_1, \quad r_3 = r \sin a_2. \quad (6)$$

Die kollektive Koordinate ist definiert durch  $r = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^{1/2}$  und die Korrelationswinkel durch  $a_1 = \arctg(r_2/r_1)$  und  $a_2 = \arctg[r_3/(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}]$ , wobei gilt  $0 \leq \{a_1, a_2\} \leq \pi/2$ .

Bei den bisherigen Überlegungen sind wir davon ausgegangen, daß die Fragmentierung im Ausgangskanal nur aus Nukleonen und einem schwereren Restkern besteht. Für einige Reaktionen ist dieser Aufbruchmechanismus nicht ausreichend, falls Clusterteilchen (Deuteron,  $\alpha$ -Teilchen etc.) entstehen. Wie wir gesehen haben, enthält Gl. (3) Streckungs- bzw. Stauchungsfaktoren  $\eta_1 = (m/\mu_1)^{1/2}$  und  $\eta_2 = (m/\mu_2)^{1/2}$  je nachdem, welche Teilchenarten, Nukleonen oder Clusterteilchen sich im Ausgangskanal befinden. Für ein Nukleon und ein Clusterteilchen mit der dop-

pelten Nukleonenmasse im Ausgangskanal ergibt sich bei einem Restkern mit  $A=3$ -Nukleonen mit  $A=16$  der Wert  $\eta_1/\eta_2 = 1,34$ .

### b) Konstruktion von Vielteilchen-Wellenfunktionen

Die charakteristische Größe im Vielteilchenkanal ist die Relativenergie  $E$ . Wie eingangs erwähnt, ist es zweckmäßig, eine Klassifikation der  $S$ -Matrix in der Kanalspindarstellung  $\{E, r\}$  vorzunehmen.  $r$  ist hierbei ein Kanalindex, der später definiert wird. Zunächst betrachten wir die Wellenfunktion für das Dreiteilchenkontinuum. Hier zeigt sich, daß der Korrelationsanteil des Zweiteilchenkontinuums im Korrelationsanteil der Wellenfunktion für das Dreiteilchenkontinuum voll enthalten ist. Transformiert man mit Hilfe der Jacobi-Transformation die Schrödinger-Gleichung vom Laborsystem in das Relativsystem, so kann unter der Annahme, daß das Wechselwirkungspotential nur vom Abstand der Teilchen untereinander abhängt, die Schwerpunktsbewegung abgetrennt werden. Der Schwerpunkt selbst kann als Bewegung analog einem freien Teilchen mit der Masse  $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$  verstanden werden und durch ein Wellenpaket dargestellt werden. Für die drei Kontinuumsteilchen ergibt sich in den Relativkoordinaten folgender Hamilton-Operator

$$H = \sum_{i=1}^3 h_i + \sum_{i \neq j} v(r_{ij}).$$

Hierbei sind die Einteilchen-Operatoren  $h_i$  wie folgt definiert:

$$h_i = (-\hbar^2/2\mu) \Delta_i + v_i.$$

Aus der Umrechnung vom Laborsystem in das Relativsystem folgt für die reduzierten Massen

$$\mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu_2 = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}, \\ \mu_3 = \frac{m_4(m_1 + m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Zur Vereinfachung setzen wir zunächst alle Wechselwirkungspotentiale  $v(r_{ij}) = 0$ . Mit den Gln. (6) folgt für den potentialfreien Fall

$$\begin{aligned} & (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + k^2) \Phi \\ &= \left\{ \frac{1}{r^8} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^8 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^5 a_2 \sin^2 a_2} \frac{\partial}{\partial a_2} \left( \cos^5 a_2 \sin^2 a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 a_1 \cos^2 a_1 \cos^2 a_2} \right. \\ & \frac{\partial}{\partial a_1} \left( \cos^2 a_1 \sin^2 a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \right) + \frac{1}{r^2 \cos^2 a_1 \cos^2 a_1} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \left( \sin \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_1} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} \right] \\ & + \frac{1}{r^2 \cos^2 a_2 \sin^2 a_1} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \left( \sin \vartheta_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 a_2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta_3} \frac{\partial}{\partial \vartheta_3} \left( \sin \vartheta_3 \frac{\partial}{\partial \vartheta_3} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin^2 \vartheta_3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi_3^2} \right] + k^2 \left. \right\} \Phi = 0. \end{aligned}$$

Mit einem Produktansatz  $\Phi(r, \alpha_1, \alpha_2, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = R \cdot K_1(\alpha_1) \cdot K_2(\alpha_2) Y(\Omega_1) Y(\Omega_2) Y(\Omega_3)$  trennen wir die radiale Bewegung von der Korrelation ab. Es ergibt sich für die radiale Bewegung

$$\left( \frac{1}{r^8} \frac{d}{dr} \left( r^8 \frac{d}{dr} \right) + k^2 - \frac{C_1}{r^2} \right) \cdot R(r) = 0 \quad (7)$$

und für die beiden Korrelationskoordinaten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1} \frac{d}{d\alpha_1} \left( \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 \frac{dK_1}{d\alpha_1} \right) - \frac{l_1(l_1+1)}{\cos^2 \alpha_1} K_1 - \frac{l_2(l_2+1)}{\sin^2 \alpha_1} K_1 &= -C_2 K_1, \\ \frac{1}{\cos^5 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2} \frac{d}{d\alpha_2} \left( \cos^5 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \frac{dK_2}{d\alpha_2} \right) - \frac{l_3(l_3+1)}{\sin^2 \alpha_2} K_2 - \frac{C_2}{\cos^2 \alpha_2} K_2 &= -C_1 K_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Die Konstanten sind wie folgt definiert:

$$C_1 = (l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2})^2 - (\frac{7}{2})^2, \quad C_2 = (l_1 + l_2 + 2n_1 + 2)^2 - 4. \quad (9)$$

Für das Volumenelement finden wir

$$d\tau = r^8 \cos^5 \alpha_2 \sin^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_1 \sin^2 \alpha_1 dr d\alpha_1 d\alpha_2 d\Omega_1 d\Omega_2 d\Omega_3.$$

Mit der Transformation  $R(r) = \varphi/r^4$  läßt sich Gl. (7) für die relative Bewegung im Vierteilchenkanal in die gewohnte Schrödingersche Form bringen

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left\{ k^2 - \frac{(l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2})^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right\} \varphi = 0. \quad (10)$$

Diese Schreibweise macht deutlich, daß die Korrelation eine Erhöhung des Zentrifugalpotentials und damit eine Verlagerung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Teilchen vom Zentrum weg bewirkt.  $n_1$  und  $n_2$  sind zusätzliche Quantenzahlen, die durch konstante Energieverhältnisse  $\varepsilon_2/\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_3/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^{1/2}$  auftreten. Zur ausreichenden Beschreibung eines physikalischen Zustandes sind, wie Überlegungen von Danos und Greiner<sup>9</sup> zeigten, fünf Korrelationszahlen notwendig.

Für ein Kastenpotential und ein Oszillatorpotential bei konstantem oder verschwindendem Wechselwirkungspotential kann der Radialanteil von dem Korrelationsanteil in der Vielteilchenwellengleichung abgetrennt werden<sup>2, 11</sup>. Zur Verbesserung der Konvergenz ist es jedoch erforderlich, gerade die WW-Potentiale  $v(r_{ij})$  mit in die Betrachtung einzuschließen. Vorstehende Gleichung hat die Lösungen

$$\begin{aligned} F_{l_1 l_2 l_3 n_1 n_2} &\cong J_{l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2}}(kr), \\ G_{l_1 l_2 l_3 n_1 n_2} &\cong N_{l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + 2n_2 + \frac{7}{2}}(kr). \end{aligned} \quad (11)$$

Die Lösungen von Gl. (8) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} K_1(\alpha_1) &= \cos^{l_1} \alpha_1 \sin^{l_2} \alpha_1 \cdot {}_2F_1(-n_1, l_1 + l_2 + 2n_1, l_2 + \frac{3}{2}, \sin^2 \alpha_1), \\ K_2(\alpha_2) &= \cos^{l_1 + l_2 + 2n_1 + \frac{3}{2}} \alpha_2 \sin^{l_3} \alpha_2 \cdot {}_2F_1(-n_2, l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + n_2 + \frac{7}{2}, l_1 + l_2 + 2n_1 + 3, \sin^2 \alpha_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Wobei Endlichkeit bei  $\alpha = 0$  und  $\pi/2$  zu fordern ist. Für  $\{n_1, n_2\} = 0$  oder eine ganze Zahl ergeben sich in eindeutiger Weise Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ . Für den Fall des Zweiteilchenkontinuums bleibt allein die Lösung  $K_1(\alpha_1)$  übrig. Formal kann man auch die Lösung  $K_2(\alpha_2)$  aus der Lösung  $K_1(\alpha_1)$  deduzieren, wobei es nützlich ist, einen verallgemeinerten Kanalindex  $l_1 + l_2 + 2n_1 + \frac{3}{2}$  einzuführen. Zur Antisymmetrisierung der Vielteilchen-Wellenfunktion ist es nun zweckmäßig, die Lösungen (12) in Drehimpulseigenfunktionen (Wignersche Funktionen<sup>12</sup>) umzuschreiben, da hier die Antisymmetrisierung leicht ausführbar ist. Die Umformung ergibt

$$\begin{aligned} K_1(\alpha_1) &= \left( \frac{2(l_1 + l_2 + 2n_1 + 2)}{\sin 2\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot d_{\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + 1), \frac{1}{2}(l_1 - l_2)}^{n_1}(\alpha_1), \\ K_2(\alpha_2) &= \left( \frac{2C}{\sin 2\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot d_{\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3 + \frac{7}{2}), \frac{1}{2}(l_3 - l_1 - l_2 - \frac{3}{2})}^{n_1 + n_2}(\alpha_2). \end{aligned} \quad (12a)$$

Die Konstante  $C$  ist wie folgt definiert

$$C = \frac{\Gamma(l_3 + n_2 + \frac{3}{2}) \cdot [\Gamma(l_1 + l_2 + 2n_1 + 3)]^2 \Gamma(n_2 + 1)}{\Gamma(l_1 + l_2 + 2n_1 + n_2 + 3) \Gamma(l_1 + l_2 + l_3 + 2n_1 + n_2 + \frac{7}{2})}.$$

Wie oben gezeigt wurde, ist die kollektive Vielteilchenkoordinate durch  $r^2 = \sum_{i=1}^3 r_i^2$  definiert. Der Operator für die Antisymmetrisierung läßt die Koordinate  $r$  ungeändert, weil  $r$  eine homogen quadratische Funktion ist. Wird  $\alpha_1$  durch  $\pi/2 - \alpha_1$  ersetzt, dann geht die Teilchenkoordinate  $r_1$  von Teilchen 1 in diejenige von Teilchen 2 über. Mit anderen Worten, bei dieser Transformation wird Teilchen 1 mit Teilchen 2 ausgetauscht. Analog geht  $r_3$  in  $\tilde{r}$  und  $\tilde{r}$  in  $r_3$  über, wobei  $\tilde{r} = (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}$  ist.  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  haben als Definitionsbereich einen Viertelkreis  $0 \leq \{\alpha_1, \alpha_2\} \leq \pi/2$ . Die entsprechenden Funktionen zu Gl. (12 a) mit Teilchenaustausch sind

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(\alpha_1) &= (-)^n \cdot \left( \frac{2(l_1 + l_2 + 2n_1 + 2)}{\sin 2\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + 1) + n_1 - \frac{1}{2}(l_2 - l_1) - \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + 1)} (2\alpha_1), \\ \bar{K}_2(\alpha_2) &= (-)^n \cdot \left( \frac{2C}{\sin 2\alpha_2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3 + \frac{5}{2}) + n_1 + n_2 - \frac{1}{2}(l_3 - l_1 - l_2 - \frac{3}{2}) - n_1 - \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3 + \frac{5}{2}) - n_1} (2\alpha_2). \end{aligned} \quad (12b)$$

Mit anderen Worten, da der Restkern im Teilchenloch-Formalismus in einer voll antisymmetrisierten Basis genommen wird, ist es erforderlich, die Kontinuumsteilchen für das Dreiteilchenkontinuum mit den Relativkoordinaten  $r_1$ ,  $r_2$  und  $r_3$  (gemessen vom Schwerpunkt aus) untereinander zu antisymmetrisieren.

Aus den Gln. (12 a) und (12 b) ist es nun einfach eine antisymmetrisierte Gesamtwellenfunktion für das Zwei- und Dreiteilchenkontinuum sowie analog für das  $n$ -Teilchen-Kontinuum aufzustellen.

### c) Konstruktion der S-Matrix

Wir folgen Fano<sup>7</sup> und starten mit der Eigenfunktion zum gesamten Hamilton-Operator. Dabei enthält der Ansatz nicht nur Streulösungen für das Ein- und Zweiteilchenkontinuum, sondern auch solche für das Dreiteilchenkontinuum und gebundene Teilchenzustände. Die Berücksichtigung von einlaufenden Wellen soll uns weiterhin ermöglichen, nicht nur die durch Photonen induzierten Reaktionen, sondern auch die durch Nukleonen induzierten Reaktionen zu erfassen. Aus Gründen der Übersicht und Klarheit werden alle Winkel-, Spin- und Isospinanteile in der Wellenfunktion weggelassen. Da im allgemeinen die Ein-, Zwei-, Dreiteilchenkanäle usw. gleichzeitig offen sind, lautet die Eigenfunktion zum gesamten Hamilton-Operator

$$\Psi(E) = \Psi_o^{(1)}(E) + \Psi_v^{(2)}(E) + \Psi_\mu^{(3)}(E) + \Phi_{\{\rho, \nu, \mu\}}(E). \quad (13)$$

$\Phi_{\{\rho, \nu, \mu\}}(E)$  ist eine einlaufende Welle im Kanal  $\rho$ ,  $\nu$  bzw.  $\mu$  (Ein-, Zwei- bzw. Dreiteilchenkanal).  $\Psi_o^{(1)}$ ,  $\Psi_v^{(2)}$ ,  $\Psi_\mu^{(3)}$  enthalten auslaufende Wellen im Ein-, Zwei- und Dreiteilchenkanal sowie gebundene Zustände. Für den Fall, daß nur Dreiteilchenkanäle offen sind, reduziert sich Gl. (13) auf

$$\Psi(E) = \Psi_\mu(E) + \Phi_{\{\mu\}}(E),$$

wobei die Kennzeichnung (3) weggelassen wird. Die auslaufende Welle  $\Psi_\mu$  hat zwei Anteile, eine Superposition von gebundenen Zuständen und Kontinuumszuständen zur Streuenergie  $E'$ :

$$\Psi_\mu(E) = \sum_i b_{i\mu}(E) \cdot \varphi_i + \int_{E'} dE' \cdot a_{E'}^\mu(E') \cdot \psi_\mu(E'). \quad (14)$$

Es folgt für die Wellenfunktion, die den Streuvorgang beschreibt

$$\Psi(E) = \Phi_\mu(E) + \sum_i b_{i\mu}(E) \cdot \varphi_i + \int_{E'} dE' \cdot a_{E'}^\mu(E') \cdot \psi_\mu(E'), \quad (15)$$

mit  $E$  der Energie für die einlaufende Welle und  $E' = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  der Relativenergie im Dreiteilchen-Ausgangskanal. Die Methode wird besonders transparent für den Fall eines Kanals mit einem gebundenen Zweiteilchenzustand  $\varphi_i$ . Für eine durch Photonen induzierte Reaktion folgt dann

$$\Psi(E) = b_{1\mu}(E) \cdot \varphi_1 + \int_{E'} dE' \cdot a_{E'}^\mu(E') \cdot \psi_\mu(E'). \quad (16)$$

Die Konstanten  $b_{1\mu}(E)$  und  $a_{E'}^\mu(E')$  werden aus einem System gekoppelter Gleichungen direkt mit

Hilfe der Schrödinger-Gleichung bestimmt, indem wir diesen Ansatz in die Schrödinger-Gleichung einsetzen und von links zuerst mit  $\varphi_1$  und dann mit  $\psi_\mu(E')$  multiplizieren. Als Resultat erhalten wir folgendes gekoppelte Gleichungssystem (in den Radialkoordinaten) für die gesuchten Koeffizienten

$$\begin{aligned} \{E_1 - E\} \cdot b_{1\mu}(E) + \int_{E'} dE' \cdot a_{E'}^\mu(E') \\ \cdot \langle 1 | H | \mu; E' \rangle = 0, \\ \{E' - E\} \cdot a_{E'}^\mu(E') + b_{1\mu}(E) \cdot \langle \mu; E' | H | 1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist die Orthogonalität zwischen den Streuzuständen  $|\mu; E'\rangle$  und dem gebundenen Zustand  $|1\rangle$  angenommen. Das Matrixelement  $\langle \mu; E' | H | 1 \rangle \equiv V_E$  berücksichtigt die Ankopplung der gebundenen Zweiteilchenzustände an das Zweiteilchenkontinuum aufgrund der Wechselwirkung. Weiterhin ist  $\langle 1 | H | 1 \rangle = E_1$  das Matrixelement zwischen den gebundenen Zuständen. Die Lösung des gekoppelten Systems für die noch unbekanntenen Koeffizienten in Gl. (16) ist wohlbekannt und bedarf an dieser Stelle keiner Erläuterung. Setzen wir die Koeffizienten in die Wellenfunktion Gl. (16) ein und gehen ins Streugebiet ( $r \rightarrow \infty$ ) über, dann erhalten wir eine S-Matrix von der folgenden Form<sup>13</sup>:

$$S = e^{2i\delta} \left( 1 - 2\pi i \cdot \frac{V_E^2}{E - E_1 - F(E) + i\pi V_E^2} \right)$$

mit

$$F(E) = P \int dE' \cdot V_{E'}^2 / (E - E').$$

Die Bezeichnung  $Pf$  bedeutet das Hauptwertintegral von  $F(E)$ . Aus diesen Vorüberlegungen ist zu sehen, daß die Stärke dieser Beschreibung darin liegt, ohne Annahmen über Matching-Radii und Randbedingungen auszukommen. Die S-Matrix wird direkt mit Hilfe der Matrixelemente zwischen den Streuzuständen und gebundenen Zuständen bestimmt. Mit anderen Worten, das System wird nicht in einen Kasten eingesperrt. Weiterhin sei an dieser Stelle vermerkt, daß die Streuzustände mit den gebundenen Zuständen nicht notwendigerweise orthogonal sein müssen; die Annahme einer linearen Unabhängigkeit genügt<sup>14</sup>.

Nehmen wir im Dreiteilchenkanal eine einlaufende Welle  $\Phi_\nu(E)$  mit in den Ansatz für die Streuwellenfunktion und betrachten mehrere Dreiteilchen-Streukanäle  $\mu$ , so ist der Ansatz für die Streuwellenfunktion wie folgt zu schreiben

$$\begin{aligned} \Psi(E) = \Phi_\nu(E) + \sum_i b_{i\mu}(E) \varphi_i \\ + \sum_{\mu, E'} dE' \cdot a_{E'}^\mu(E') \cdot \psi_\mu(E'). \end{aligned} \quad (17)$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich in analoger Art, wie oben, ein System gekoppelter Gleichungen für die einlaufende Teilchenwelle

$$\begin{aligned} v_{i\nu}(E) + (E_i - E) \cdot b_{i\nu}(E) \\ + \sum_{\mu, E'} dE' \cdot a_{E'}^\mu(E') \cdot v_{i\mu}(E') = 0 \end{aligned} \quad (17 a)$$

$$(E' - E) \cdot a_{E'}^\mu(E') \sum_{\mu, E'} + \sum b_{i\nu}(E) \cdot v_{i\mu}(E') = 0. \quad (17 b)$$

Das Matrixelement  $v_{i\nu}$  ist das Kopplungsmatrixelement zwischen den gebundenen und den Streuzuständen

$$v_{i\nu} \equiv \langle i | (H - E) | \nu; E' \rangle \equiv V_{E, i\nu} - E \langle i | \nu; E' \rangle.$$

Im allgemeinen ist  $\langle i | \nu; E' \rangle = 0$ , d. h. die Streuzustände sind zu den gebundenen Zuständen orthogonal. Für die BSEC-Zustände (bound states embedded in the continuum) gilt diese Orthogonalität nicht. Die Koeffizienten  $a_{E'}^\mu(E')$  werden mit Randbedingungen bestimmt, die auslaufenden Wellen entsprechen. Es folgt aus Gl. (17 b)

$$a_{E'}^\mu(E') = \sum_i b_{i\mu}(E) \cdot \frac{v_{i\mu}(E')}{E - E' + i\varepsilon}. \quad (18)$$

In Gl. (17 a) eingesetzt liefert

$$v_{i\nu} = \sum_k D_{ik} \cdot b_{k\nu} \quad \text{mit} \quad D_{ik} = (E - E_k) \cdot \delta_{ik} - F_{ik}(E)$$

und

$$F_{ik}(E) = \sum_{\mu, E'} dE' \cdot \frac{v_{i\mu}(E') \cdot v_{k\mu}(E')}{E - E' + i\varepsilon}.$$

Durch Matrixinversion der Matrix  $D$  können die Koeffizienten  $b_{i\nu}(E)$  bestimmt werden:

$$b_{k\nu}(E) = \sum_k D_{ik}^{-1} \cdot v_{i\nu}.$$

Die asymptotische Form dieser Streuwellenfunktion berechnet sich zu

$$\Psi_\nu(E) \propto \sum_\mu e^{-i\delta_\mu} (I_\mu \delta_{\nu\mu} - S_{\mu\nu} 0_\mu),$$

wobei die S-Matrixelemente durch

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} = \exp \{ i(\delta_\mu + \delta_\nu) \} \{ \delta_{\mu\nu} - 2\pi i \sum_{i, k} v_{i\mu}(E) \\ \cdot D_{ik}^{-1} \cdot v_{k\nu}(E) \} \end{aligned}$$

bestimmt sind (Abbildung 1). Hierbei ist  $\delta_\nu$  die Phasenverschiebung von  $\Phi_\nu \equiv F_\nu$ . Die Dreiteilchenkanäle  $\nu$  bzw.  $\mu$  hängen von  $\{l_1, l_2, n\}$  ab und die

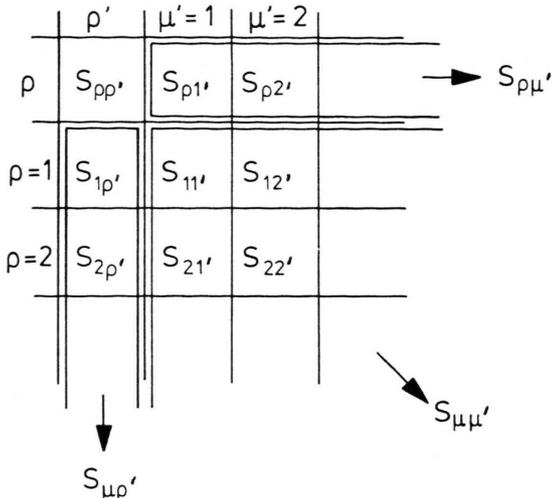


Abb. 1 zeigt die S-Matrix. Die Diagonalelemente der S-Matrix gehören zu Streuzuständen, die über das Einteilchenkontinuum ablaufen  $\{S_{\rho\rho'}\}$  und entsprechend gehören die Elemente  $\{S_{\mu\mu'}\}$  zum Zweiteilchenkontinuum. Die Elemente  $\{S_{\rho\mu'}, S_{\mu\rho'}\}$  beschreiben die Streuung von einem Einteilchen-Eingangskanal in Zweiteilchen-Ausgangskanal bzw. von einem Zweiteilchen-Eingangskanal in einen Einteilchen-Ausgangskanal.

Vierteilchenkanäle von  $\{l_1, l_2, l_3, n_1, n_2\}$ . Die einlaufende Welle baut sich aus  $F_\mu$  und  $G_\mu$  wie folgt auf  $I_\mu = \exp\{i\delta_\mu\}(G_\mu - iF_\mu)$  und entsprechend  $0_\mu = I_\mu^*$ . Die regulären und irregulären Lösungen  $F_\mu$  und  $G_\mu$  wurden in Gl. (11) bestimmt. Weiterhin ist zu sehen, daß die Eigenwerte der Matrix  $D$  die Pole in der S-Matrix festlegen. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Kanalspindarstellung erhalten wir mit einer Energie-Diskriminierung nach der Energie des 2. Teilchens

$$\frac{d^3\sigma_{\nu', \Sigma', \nu\Sigma}}{d\Omega_1 d\Omega_2 d\epsilon_2} = \tilde{T}(\epsilon_1, \epsilon_2) \cdot \frac{\lambda^2}{2\Sigma + 1} \cdot \sum_{\mu_\Sigma, \mu'_\Sigma} |Q_{\nu'}, \dots, \mu_\Sigma|^2.$$

$\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  sind die Relativenergien für die doppelte Nukleonemission im Ausgangskanal.  $\nu$  charakterisiert den Dreiteilchenkanal,  $\Sigma$  ist der Kanalspin und  $\mu_\Sigma$  ist eine Projektion.  $\tilde{T}(\epsilon_1, \epsilon_2)$  ist ein kinematischer Vorfaktor, der wie folgt festliegt

$$\tilde{T}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \epsilon_1(\epsilon_1 \epsilon_2)^{1/2} / (2(\epsilon_1 + \epsilon_2)^3).$$

Abgesehen von den Winkel- und Spinanteilen ist die Streuamplitude  $Q$  proportional der Korrelations-

funktion  $\tilde{K}_{l_1, l_2, n}(\arctg \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1})$  und dem entsprechenden S-Matrixelement. Charakteristisch für den differentiellen Wirkungsquerschnitt ist, außer der Winkelverteilung für die auslaufenden Nukleonen, die Energiekorrelation der beiden Teilchen im Kontinuum.

### III. Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war, die durch Nukleonen oder Photonen induzierten Reaktionsquerschnitte, die über das Zwei-, Drei- und Mehrteilchenkontinuum verlaufen, mikroskopisch zu berechnen. Dazu wurde als Ausgangsbasis eine Streufunktion gewählt mit einem diskreten und einem kontinuierlichen Anteil. Die Summation über das diskrete Spektrum erfaßt die relevanten gebundenen Zustände und die Streuzustände zur Relativenergie  $E'$  in einem bestimmten Quantenzustand  $\mu$ . Es sei hier ausdrücklich betont, daß die Zustände nicht orthogonal zu sein brauchen, es genügt eine lineare Unabhängigkeit. Verläuft die Streuung über mehrere Ausgangskanäle  $\mu$ , dann ist über die verschiedenen Streuzustände  $\{\mu\}$  zu summieren. Für den Fall des Einteilchenkontinuums ist  $E'$  die Relativenergie des auslaufenden Teilchens relativ zum verbleibenden Restkern. Für das  $n$ -Teilchen-Kontinuum ist die Kanalenergie  $E' = \sum_i \epsilon_i$  die Summe der Relativenergien der einzelnen Teilchen bezogen auf den Restkern. Für den Fall, daß die beiden Relativenergien  $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$  im Zweiteilchenkontinuum sehr verschieden voneinander sind, verläuft der Prozeß vom Einteilchenkontinuum (I) zum Zweiteilchenkontinuum (II) wahrscheinlich in Stufen ab. Für einen Zerfall, bei dem die beiden Teilchen nicht sehr verschiedene Energie haben (prompter Zerfall), ist es geschickt mit korrelierten Basiswellenfunktionen zu arbeiten, wobei eine Radialkoordinate und eine Korrelationskoordinate  $\{\alpha_1\}$  auftritt. Für das  $n$ -Teilchen-Kontinuum haben wir entsprechend eine Radialkoordinate und  $(n-1)$  Korrelationskoordinaten  $\{\alpha_{n-1}\}$ . Der Wirkungsquerschnitt für einen bestimmten Prozeß ist proportional dem Quadrat des entsprechenden S-Matrixelementes und dem Quadrat der Korrelationsfunktion. Die Korrelationsfunktion hängt ab von den Drehimpulsen  $\{l_1, l_2, l_3, \dots\}$  der auslaufenden Teilchen und den Korrelationsquantenzahlen  $n$ . Abschließend sei gesagt, daß sich das Zwei- und Mehrteilchenkontinuum mit Koordinaten, die aus der Asymptotik des Zerfallsprozesses gewonnen sind, in

praktischen Rechnungen behandeln läßt. Es ergeben sich keine ernststen Schwierigkeiten für die Antisymmetrisierung.

Mein Dank gilt Herrn Professor Dr. W. Scheid für konstruktive Hinweise und kritische Anmerkungen.

- <sup>1</sup> L. D. Faddeev, *Mathematical Aspects of the Three-Body Problem in the Quantum Scattering Theory*, Distributed by Oldbourne Press, 1–5 Portpool lane, London, E.C.I. 1965.  
J. S. C. McKee u. P. M. Rolph, *Three Body Problem*, North-Holland Publ. Company, Amsterdam u. London 1970. — L. M. Delves, *Nucl. Phys.* **9**, 391 [1958/59].
- <sup>2</sup> G. Grauel, Dissertation, Institut für Theoretische Physik A. Grauel, Dissertation, Institut für Theoretische Physik der J. W. Goethe-Universität, Frankfurt 1971.
- <sup>3</sup> H. Feshbach, *Ann. Phys.* **5**, 357 [1958]; **19**, 287 [1962].
- <sup>4</sup> M. Danos u. W. Greiner, *Phys. Rev.* **138 B** 93 [1965]; **146**, 708 [1966]; W. Greiner, in: *Cargese Lectures in Physics* **3** [1969], ed. M. Jean, Gordon and Breach Science Publishers, New York; R. F. Barrett, L. C. Biedenharn, M. Danos, P. P. Delsanto, W. Greiner u. H. G. Wahsweiler, *Rev. Mod. Phys.* Vol. **45**, (No. 1) 44 [1973].
- <sup>5</sup> D. Drechsel, J. B. Seaborn u. W. Greiner, *Phys. Rev.* **162**, 983 [1967].
- <sup>6</sup> E. D. Mshelia, R. F. Barrett u. W. Greiner, *Phys. Rev. Letters* **28**, (No. 13) 847 [1972].
- <sup>7</sup> U. Fano, *Phys. Rev.* **124**, 1866 [1961].
- <sup>8</sup> H. Bledsoe u. T. Tamura, Preprint Center for Nuclear Studies, University of Texas Austin, Texas, USA 78712.
- <sup>9</sup> M. Danos u. W. Greiner, *Z. Physik* **202**, 125 [1967].
- <sup>10</sup> H. J. Weber u. W. Greiner *Z. Naturforsch.* **24 a**, 736 [1969].  
H. J. Weber, *Nuovo Cim.* Vol. **61 B**, 131 [1969]; *Ann. of Physics* **53**, 93 [1969]; **57**, 322 [1970].
- <sup>11</sup> M. Grynberg u. Z. Koba, *Ann. Phys.* **26**, 418 [1964].
- <sup>12</sup> A. R. Edmonds, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, BI [1960].
- <sup>13</sup> H. A. Weidenmüller, *Nucl. Phys.* **75**, 189 [1966]; C. Mahaux u. H. A. Weidenmüller, *Shell Model Approach to Nuclear Reactions*, North Holland Publ. Co., Amsterdam 1969.
- <sup>14</sup> Th. Kanellopoulos u. K. Wildermuth in Dürr: *Quanten und Felder*, Vieweg-Verlag, Kap. Betrachtungen zur quantenmechanischen Beschreibung von Mehrteilchenreaktionen, Braunschweig 1971.  
H.-J. Scheefer, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der J. W.-Goethe-Universität, Frankfurt 1972.