Eine einfache Ableitung der linearen Transformation der elliptischen Modulfunktion $\eta(\omega)$.

Von PAUL EPSTEIN in Straßburg i. E.

Im Anschluß an die vorstehende Arbeit von Herrn Fueter möchte ich eine Ableitung der Transformationseigenschaft der Funktion $\eta(\omega)$ mitteilen, die sich unmittelbar in den Gedankengang der von Herrn Fueter erwähnten Hurwitzschen Arbeit einordnet.

Ich gehe aus von der absolut konvergenten Entwicklung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 m\pi\omega} = \sum^{n} \frac{1}{(m\omega+n)^2},$$

worin nach n von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summieren ist. Nimmt man nun rechts die Summe über alle positiven und negativen ganzzahligen Werte von m, vermeidet aber dabei, daß gleichzeitig m und n den Wert Null haben, so ist in leichtverständlicher Schreibweise:

$$\sum^{m}\sum^{n}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} = \sum^{n}{}' \frac{1}{n^2} + \sum^{m}{}' \sum^{n} \frac{1}{(m\omega+n)^2} = \frac{\pi^2}{3} + \pi^2 \sum^{m}{}' \frac{1}{\sin^2 m\pi\omega}.$$

Hierbei ist nach n in *beliebiger Anordnung* und darauf nach m *beiderseits in gleicher Anordnung* zu summieren. Wir summieren in der Weise, daß wir je zwei Glieder mit entgegengesetzt gleichen m zusammenfassen, was links durch das Zeichen $\pm$ unter dem Summenzeichen angedeutet ist. Dann ist:

$$\sum_{\pm}^{m}\sum^{n}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} = \frac{\pi^2}{3} + 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin^2 k\pi\omega} = \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{2ik\pi\omega}}{(1-e^{2ik\pi\omega})^2}.$$

Die Reihe rechts konvergiert, wenn der *imaginäre Bestandteil von* ω *positiv* ist. Unter dieser Voraussetzung kann man den Ausdruck unter dem Summenzeichen in eine Reihe entwickeln und hat:

$$\begin{aligned}\sum_{\pm}^{m}\sum^{n}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} &= \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2 \sum_{1}^{\infty} (e^{2ik\pi\omega} + 2e^{4ik\pi\omega} + 3e^{6ik\pi\omega} + \cdots) \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 8\pi^2\left(\frac{e^{2i\pi\omega}}{1-e^{2i\pi\omega}} + \frac{2e^{4i\pi\omega}}{1-e^{4i\pi\omega}} + \frac{3e^{6i\pi\omega}}{1-e^{6i\pi\omega}} + \cdots\right) \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4\pi i \sum_{1}^{\infty} \frac{d}{d\omega} \log(1-e^{2ik\pi\omega})\end{aligned}$$

oder

$$(1)\qquad \sum_{\pm}^{m}\sum^{n}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} = -4\pi i \frac{d}{d\omega}\log\eta(\omega) = \varphi(\omega).$$

Setzt man hier $-\frac{1}{\omega}$ an Stelle von ω, so wird

$$\varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \sum_{\pm}^{m}\sum^{n}{}' \frac{\omega^2}{(m-n\omega)^2}$$

oder, wenn man m und n an Stelle von $-n$ und m schreibt:

$$(2)\qquad \varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \omega^2\sum_{\pm}^{n}\sum^{m}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} = -4\pi i\omega^2\frac{d}{d\omega}\log\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right).$$

Es ist also hier *die Reihenfolge der Summationen die umgekehrte* wie in (1). Nun ist nach Hurwitz[1]):

$$\sum^{m}\sum^{n}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} - \sum^{n}\sum^{m}{}' \frac{1}{(m\omega+n)^2} = \frac{2\pi i}{\omega},$$

was im Grunde nichts anderes als die *Legendresche Relation* ist. Also ist

$$\varphi(\omega) - \frac{1}{\omega^2}\varphi\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{2\pi i}{\omega},$$

oder

$$-4\pi i\frac{d}{d\omega}\log\eta(\omega) + 4\pi i\frac{d}{d\omega}\log\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \frac{2\pi i}{\omega}$$

und daraus:

$$\eta\left(-\frac{1}{\omega}\right) = C\sqrt{\omega}\,\eta(\omega).$$

Hugo Hertzer †.

Nekrolog[2]) von E. LAMPE.

Am 15. November 1908 verschied zu Halensee bei Berlin im achtundsiebzigsten Lebensjahre der Geheime Regierungsrat Professor Dr. Hertzer, der seit dem 1. Oktober 1907 in den Ruhestand getreten war.

---

1) Hurwitz, Math. Ann. 58, 350 (1903). Vgl. Eisenstein, Math. Abh. S. 243, Landsberg, Münch. Ber. 1907, S. 5.

2) Abgedruckt aus dem Programm der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin für das Studienjahr 1909—1910.