Bemerkung zur Axiomatik der Größen und Mengen.

Von

A. Schoenflies in Frankfurt a. M.

In dem Artikel „Zur Axiomatik der Mengenlehre"[1]) habe ich die Axiome, die sich mit den Gebieten der Äquivalenz, der Mengenteilung und Mengenvergleichung beschäftigen, einer Erörterung unterzogen. An zwei Resultate dieses Artikels knüpfe ich hier an. Erstens einmal, da die in ihm durchgeführten Untersuchungen auf die Elemente der Mengen gar nicht eingehen, so stellen sie, allgemein gesprochen, axiomatische Betrachtungen über Größen und Größenbeziehungen dar, an denen die Mengen ja Teil haben; und zweitens hatte eine der dort analysierten Beziehungen den Gedanken nahegelegt, auch Größen entgegengesetzter Art (resp. Mengen von zweierlei Art von Elementen) in Betracht zu ziehen, und auf sie die oben genannten Operationen auszudehnen. Hierzu gebe ich im folgenden einige Ergänzungen.

Bereits a. a. O. war bemerkt worden, daß es naturgemäß der Untersuchung bedarf, ob für die so charakterisierten Mengen die weiteren allgemeinen Sätze der Cantorschen Theorie in Kraft bleiben. Inzwischen hat mir Herr A. Fränkel mitgeteilt, daß für das von mir konstruierte Beispiel schon ein Teil der in meinem Artikel zugrunde gelegten Axiome versagt; und zwar ein Teil der Axiome über Teilmengen. Über Teilmengen habe ich zwei Axiome an die Spitze gestellt. Wird die Beziehung, daß M' Teilmenge von M ist, durch

$$M' t M$$

bezeichnet, so lauten diese Axiome:

I. Aus $M' t M$ und $M'' t M'$ folgt $M'' t M$ (der assoziative Charakter des Teilmengenbegriffs).

II. Jede Teilmenge M' von M bestimmt eindeutig eine zweite Teilmenge M_1 von M, die ihre Komplementärmenge bezüglich M heißt.

---

[1]) Amsterdam Ac. Proc. 22 (1920); abgedruckt in den Math. Ann. 83 (1921), S. 173.

Von diesen grundlegenden Axiomen versagt für das a. a. O. behandelte Beispiel das zweite; das erste bleibt bestehen. Das Beispiel war so erdacht, daß man als Größen einseitig begrenzte Geraden von unendlicher Länge, aber von zwei entgegengesetzten Richtungen wählte, als Teilmenge jeden ebenfalls unendlichen Bestandteil zuläßt und die Äquivalenz z. B. durch eindeutige Ähnlichkeitsabbildung definiert. In der Tat bleibt dann das erste Axiom erhalten, das zweite aber nicht. Wenn man nämlich von einer solchen Geraden eine Teilmenge M' im obigen Sinne abspaltet, so bleibt außerdem noch ein endlicher Abschnitt übrig, und der entspricht unserm Begriff der Teilmenge nicht mehr. Das nämliche gilt für das zweite a. a. O. behandelte Beispiel.

Diese von Herrn Fränkel bemerkte Tatsache ist auch deshalb von Interesse, weil sie den Teilmengenbegriff und seine Eigenart in neuer Weise beleuchtet. Sie zeigt nämlich in erster Linie die Unabhängigkeit der Axiome I und II, sie zeigt außerdem, daß der Teilmengenbegriff gewisse mathematische Operationen auch dann noch zuläßt, wenn das Komplementärmengenaxiom nicht erfüllt ist.

Ich erinnere weiter daran, daß das vorstehende Beispiel zu folgendem Zwecke erdacht war. Ich hatte a. a. O. das Axiom aufgestellt,

(D) aus $M d N$ und $N d P$ folge $M d P$,[2])

und es sollte durch das Beispiel belegt werden, daß man Größen oder Mengen einführen könne, die den Äquivalenzaxiomen usw. folgen, für die aber das eben genannte Axiom nicht erfüllt ist. Diesen Zweck kann man durch eine einfache Abänderung des Beispiels erreichen. Es genügt dazu, auch den endlichen Bestandteil M_1, der durch Abtrennung der Teilmenge M' von M übrigbleibt, als Teilmenge von M zuzulassen und die Äquivalenz wieder auf eine Ähnlichkeitstransformation und die Übereinstimmung der Richtung zu gründen.

Um die Größenklasse, die sich so ergibt, noch genauer zu umschreiben, wollen wir festsetzen, daß

1. alle betrachteten Strecken auf Geraden liegen, die parallel einer x-Achse verlaufen;

2. die Endpunkte der Strecken rationale Abszissen haben sollen[3]);

3. nur alle diejenigen parallelen Geraden als Träger von Strecken in Betracht kommen, die eine y-Achse in rationalen Punkten schneiden, so daß, beiläufig bemerkt, unsere Größenklasse abzählbar ist. Auf die Gesamtheit der so eingeführten Strecken wollen wir nun die Teilmengenaxiome übertragen. Zunächst ist klar, daß hier die Axiome I und II beide erfüllt sind. Das gleiche

---

[2]) $M d N$ bedeutet: Es gibt weder eine Teilmenge von M, die äquivalent N ist, noch eine Teilmenge von N, die äquivalent M ist.

[3]) Man hat die Äquivalenz alsdann auf ähnliche Abbildung mit rationalen Koeffizienten zu gründen.

gilt aber auch noch von den folgenden a. a. O. über Teilmengen aufgestellten Axiomen:

III. Die Komplementärmenge von M_1 ist wiederum M'.

IV. Die beiden Komplementärmengen M' und M_1 einer Menge M sind fremde Mengen (d. h. ohne gemeinsame Teilmenge).

Bestehen bleibt außerdem auch das Axiom I von § 3, nämlich

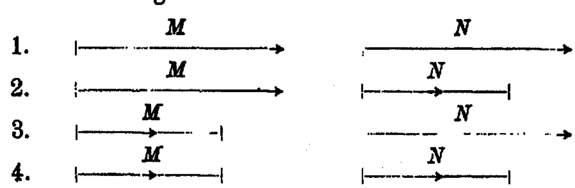
V. Ist $M' t M$ und $M \sim N$, so folgt daraus notwendig die Existenz einer Menge N', für die zugleich gilt

$$N' t N \quad \text{und} \quad M' \sim N',$$

und dies ist dasjenige Axiom, das für die gesamten Beweisführungen an vorderster Stelle steht.

Nicht bestehen dagegen bleibt das Axiom V von § 2, daß nämlich zwei fremde Mengen P und Q stets eine und nur eine Menge M bestimmen, deren Komplementärmengen sie sind. (Es versagt z. B., wenn die beiden Mengen P und Q auf verschiedenen Geraden liegen.) Es ist auch klar, daß diesem Axiom, das in der Mengenlehre die Erzeugung einer neuen Menge aus zwei gegebenen fordert, also ein *Existenz*axiom ist, eine wesentlich andere Stellung zukommt wie den vorstehenden[4]).

Für die Beziehungen zweier Strecken der so umschriebenen Größenklassen liegen folgende Möglichkeiten vor: Man kann zwei unendliche Strecken, zwei endliche, sowie eine endliche und eine unendliche, miteinander vergleichen. Wir fassen zuerst den Fall ins Auge, daß beide Strecken gleichgerichtet sind. Man hat dann die vier Möglichkeiten



und hat im ersten und vierten Fall offenbar die Beziehung

$$M a N;$$

im zweiten und dritten dagegen

$$M b N \quad \text{oder} \quad M c N.$$

Für Strecken einer und derselben Richtung ist also der Fall $M d N$ überhaupt ausgeschlossen, genau wie für die Klasse der unendlichen Mengen.

[4]) Von meinem hiesigen Kollegen Hellinger wurde ich darauf aufmerksam gemacht, daß man gewisse Mengen von Strecken als Objekte so einführen kann, daß für sie das obige Existenzaxiom ebenfalls in Kraft bleibt.

Geht man zu zwei Strecken M und N entgegengesetzter Richtung über, so ist klar, daß für sie offenbar in *jedem* Fall die Beziehung

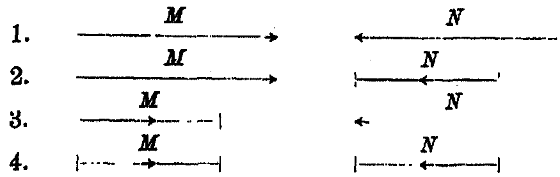
$$M d N$$

erfüllt ist, da ja die Äquivalenz auch die Übereinstimmung der Richtungen einschließen soll.

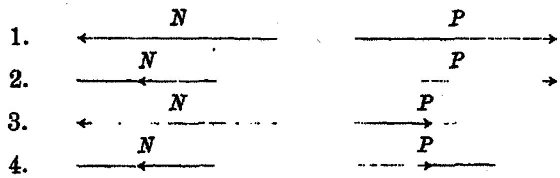
Wir prüfen nunmehr, welche Folgerungen sich aus

$$M d N \quad \text{und} \quad N d P$$

in den einzelnen Fällen ergeben. Gemäß dem Vorstehenden kann die Beziehung $M d N$ auf folgende vier Arten realisiert sein



und analog haben wir für $N d P$ die Möglichkeiten



Wir können dann zunächst kombinieren 1 mit 1, 2 mit 2, 3 mit 3 und 4 mit 4, und erhalten in allen Fällen die Beziehung

$$M a P\,;$$

ebenso können wir kombinieren 1 mit 3, 2 mit 4, 3 mit 1, 4 mit 2, und finden hierfür die Beziehungen

$$M b P \quad \text{und} \quad M c P\,,$$

nämlich $M b P$ für (13) und (24) und $M c P$ für (31) und (42). In keinem Falle aber erhalten wir

$$M d P\,,$$

oder kürzer ausgedrückt:

Aus $(d\,d)$ folgt a oder b oder c, aber niemals d.

Damit ist der obengenannte Zweck erreicht. Unser Beispiel genügt den sämtlichen oben über Teilmengen aufgestellten Axiomen und zeigt durch seine Eigenart wiederum den axiomatischen Charakter der a. a. O. aufgestellten und oben wiederholten Forderung D [5]).

[5]) Die Frage, welche anderen Folgerungen aus den in § 2 (a. a. O.) betrachteten Verknüpfungen sich ziehen lassen, mag hier außer Betracht bleiben.

Unser Resultat ist noch aus einem andern Grunde bemerkenswert. Es nimmt einer von mir a. a. O. benutzten Schlußwendung die Beweiskraft. Ich habe nämlich dort (S. 181) behauptet, daß aus den Prämissen

$$MdN \quad \text{und} \quad NdP$$

weder MbP noch McP folgen könne, und zwar auf Grund folgender Erwägung. Die Beziehungen MdN und NdP können auch in die Form

$$NdM \quad \text{und} \quad PdN$$

geschrieben werden. Würde nun aus MdN und NdP der Schluß MbP möglich sein, so müßte wegen der vorstehenden umgekehrten Schreibweise auch der Schluß PbM möglich sein; aber MbP und PbM widersprechen einander.

Dieser eben wieder benutzte, aber offenbar unzulässige Schluß galt mir damals als evident. Worin liegt die Erklärung? In dem Tatbestand, auf den ich a. a. O. gerade mit allem Nachdruck hingewiesen habe, daß man nämlich aus rein negativen Behauptungen ohne weiteres überhaupt keinen Schluß ziehen dürfe — was aber eben doch wieder geschehen ist. Die obige Umkehr der Schlußweise hat nämlich nur eine formale, also inhaltlose Bedeutung. Die Beziehungen MdN und NdP sagen zwar in rein negativer Hinsicht dasselbe aus: aber die Objekte M und N brauchen in die negative Beziehung MdN keineswegs inhaltlich gleichwertig oder symmetrisch einzugehen. Wenn sie also benutzt werden können oder sollen, um aus ihnen und einer gleichfalls negativen Beziehung NdP eine Beziehung zwischen M und P abzuleiten, so kann sehr wohl die Sonderart der Objekte M und N sowie N und P für die resultierende Beziehung bestimmend in Frage kommen. Oder anders ausgedrückt: Ein rein negatives Verhältnis zwischen zwei Objekten M und N kann durch die Eigenart von M und N sehr mannigfach begründet sein, und gerade deshalb versagt bei der Kombination zweier solcher Beziehungen die Möglichkeit logischer Folgen, und macht also, *falls eindeutige Folgen gezogen werden sollen*, deren axiomatische Aufstellung nötig.

(Eingegangen am 15. 8. 1921.)