

Zur Grundlegung der Mengenlehre.

Von

A. SCHOENFLIES in Frankfurt a. M.

Die folgenden Betrachtungen behandeln das Problem der Vergleichbarkeit in seiner einfachsten Form. Von der Heranziehung der Wohlordnungstheorie wird daher abgesehen; in der Tat darf man die Forderung stellen, die Theorie der Vergleichbarkeit auch ohne sie aufzubauen.

Dies soll im folgenden geschehen. Die Theorie der Vergleichbarkeit soll also ausschließlich auf die drei für sie unentbehrlichen *Stammbegriffe*

Menge, Teilmenge, Äquivalenz

gestützt werden, und es fragt sich, welche von diesen Begriffen geltenden fundamentalen Beziehungen dazu nötig und hinreichend sind.

Ich erinnere zunächst an den bekannten Tatbestand. Das Problem knüpft an die auf Cantor zurückgehende Vierteilung an. Ist M_1 Teilmenge einer Menge M und N_1 Teilmenge einer Menge N , so gibt es vier Möglichkeiten, die einander logisch ausschließen, und die gegenseitige Beziehung von M und N erschöpfen. Sie lauten:

- a) Es gibt ein $M_1 \sim N$ und ein $N_1 \sim M$.
- b) Es gibt ein $M_1 \sim N$, aber kein $N_1 \sim M$.
- c) Es gibt kein $M_1 \sim N$, aber ein $N_1 \sim M$.
- d) Es gibt kein $M_1 \sim N$ und kein $N_1 \sim M$.

Sind nun M und N *endliche* Mengen, so ist der Fall a) *tatsächlich* ausgeschlossen, und den drei übrigen entsprechen die drei Größenbeziehungen, „Gleich“, „Größer“, „Kleiner“. Sind dagegen M und N *unendliche* Mengen, so lassen sich die drei Fälle a), b), c) diesen Größenbeziehungen zureihen, und es läßt sich die Geltung der ihnen entsprechenden fundamentalen Gesetze nachweisen. Dagegen gilt der Fall d) für unendliche Mengen als problematisch, und der Theorie der Vergleichbarkeit fehlt somit für beliebige unendliche Mengen die Grundlage. Um sie sicher zu stellen wäre erst zu zeigen, daß der Fall d) für unendliche Mengen niemals realisiert ist.

Dies ist im allgemeinen Rahmen der Cantorschen Grundlegung das bisherige Resultat.

1. Zu den Grundlagen gehören zunächst die folgenden Axiome der *Äquivalenz*:

A) Aus $M \sim N$ und $N \sim P$ folgt $M \sim P$.

B) Ist $M \sim N$ und M_1 Teilmenge von M , so gibt es eine Teilmenge N_1 von N , sodaß $M_1 \sim N_1$ ist.

Um nichts auszulassen, wäre hinzuzufügen, daß die drei Begriffe

Äquivalenz, endliche Menge, unendliche Menge

mathematische Objekte sind, also dem Satz vom Widerspruch gehorchen.

D. h.:

1. Für je zwei Mengen M und N besteht von den beiden Beziehungen

$$M \sim N \quad \text{und} \quad M \text{ nicht } \sim N$$

notwendig eine und nur eine.

2. Für jede Menge M ist eine und nur eine der beiden Beziehungen erfüllt:

Es gibt ein $M_1 \sim M$ oder Es gibt kein $M_1 \sim M$.

Im ersten Fall heißt M *unendliche*, im zweiten *endliche* Menge. Im Zermelo-schen Sprachgebrauch*) würde man dies, soviel ich sehen kann, folgendermaßen auszudrücken haben: 1. Für je zwei Mengen soll es definit sein, ob sie äquivalent sind oder nicht; und 2. Für jede Menge soll es definit sein, ob sie endlich ist oder aber unendlich.

Geht man in dieser Weise vor, so ergibt sich das bisher wohl nicht bemerkte Resultat, daß auch die Theorie der endlichen Mengen ohne ein neues Axiom nicht begründet werden kann. Ohne ein solches lassen sich die grundlegenden Tatsachen, daß aus

$$\alpha = \beta, \quad \beta = \gamma \quad \text{auch} \quad \alpha = \gamma$$

folgt usw. nicht erhärten. In erster Linie müßte sich nämlich zeigen lassen:

C) Sind M und N , sowie N und P Mengen, für die der Fall d) besteht, was ich kurz durch

$$M \text{ d } N \quad \text{und} \quad N \text{ d } P$$

ausdrücken will, so muß daraus das Bestehen von

$$M \text{ d } P$$

gefolgert werden können.

Aber gerade dies ist unmöglich. Legt man jedoch die Forderung, daß diese Folgerung stets gezogen werden kann, axiomatisch zugrunde, so lassen sich die übrigen Relationen, die für die Begriffe „Gleich, Größer, Kleiner“ gelten, auch für die Mengenbeziehungen leicht erweisen.

*) Vgl. die Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. 65. S. 263.

Diese Tatsache legt es nahe, zu prüfen, was man für die *allgemeine* Theorie der Vergleichbarkeit erreicht, wenn man ihr ebenfalls noch das eben genannte Axiom C) (Axiom der *Vergleichbarkeit*) zugrunde legt. Das Ergebnis ist folgendes: Es läßt sich erweisen

1. *das Bestehen der fundamentalen Größenrelationen,*
2. *daß der Fall $M d N$ bei unendlichen Mengen ausgeschlossen ist,*
3. *daß für eine endliche Menge N und eine unendliche Menge M nur die Beziehung $M b N$ statt hat ($m > n$),^{*)}*
4. *daß im Fall $M b N$ und $M c N$ die Äquivalenz $M \sim N$ ausgeschlossen ist.^{*)}*

Dagegen dürfte sich ohne neue axiomatische Hilfsmittel noch *nicht* erhärten lassen, daß den Fällen $M a N$ und $M d N$ die Äquivalenz $M \sim N$ entsprechen muß. Ein hierzu *hinreichendes* Axiom enthält § 8.

Der Weg der hierzu führt, ist folgender. Ich knüpfe daran an, daß sowohl bei Cantor, wie bei Dedekind die *allgemeine* Theorie so aufgebaut wird, daß man zunächst eine Scheidung zwischen endlichen und unendlichen Mengen vermeidet. So ist es im wesentlichen auch bei Zermelo^{**)}, und dem will ich mich auch hier anschließen. *Wir werden also die Fälle $M a N$ und $M d N$ zunächst nicht scheiden, sondern zusammen behandeln.* Dann bleibt doch die fundamentale Tatsache bestehen, daß die drei Möglichkeiten

- 1) a) oder d), 2) b), 3) c)

einander logisch ausschließen, sodaß für zwei Mengen M und N *entweder* b) oder c) oder aber einer der beiden Fälle a) und d) realisiert sein muß. Soll nun festgesetzt werden, daß diesen drei Möglichkeiten, also den Beziehungen

- 1) $M a N$ resp. $M d N$, 2) $M b N$, 3) $M c N$

die Beziehungen

Gleich,

Größer,

Kleiner

zugeordnet werden sollen, so muß dazu das Bestehen der fundamentalen Größenrelationen sowie der übrigen oben genannten Tatsachen 2), 3), 4) nachgewiesen werden; und dies gelingt auf Grund des Axioms C).

2. Ich beginne mit der Betrachtung der endlichen Mengen. Die für sie oben behauptete Tatsache kann folgendermaßen ausgesprochen werden: Wenn man nur die Fälle d), b), c) zuläßt, und ihnen die drei Beziehungen „Gleich“, „Größer“, „Kleiner“ zuordnet, so kann ohne neue axiomatische Annahmen *nicht* gezeigt werden, daß die bezüglichen Grundgesetze erfüllt sind.

^{*)} Diese beiden Schlüsse stützen sich allerdings auch auf die Sätze über Zerlegung und Zusammensetzung der Mengen.

^{**) Math. Ann. 65, S. 261 ff.}

Um dies zu zeigen, wollen wir das allgemeine Problem, um das es sich hier handelt, zunächst in folgende Form setzen:

Zwischen zwei Mengen M und N sollen nur folgende Beziehungen möglich sein:

$$M \text{ b } N, \quad M \text{ c } N, \quad M \text{ d } N,$$

so ist zu untersuchen, welche Schlüsse aus den Kombinationen

$$\begin{array}{ccc} M \text{ d } N & M \text{ b } N & M \text{ c } N \\ N \text{ d } P' & N \text{ d } P' & N \text{ d } P' \text{ usw.} \end{array}$$

überhaupt gezogen werden können.

Wir sehen zunächst den ersten Fall $M \text{ d } N$ und $N \text{ d } P$ in Betracht; und sehen zu, ob aus ihm die Folgerung $M \text{ d } P$ abgeleitet werden kann.

Ausführlicher lauten unsere Voraussetzungen

$$(I) \quad \text{kein } M_1 \sim N, \quad \text{kein } N_1 \sim M,$$

und

$$\text{kein } N_1 \sim P, \quad \text{kein } P_1 \sim N,$$

und hieraus müßte

$$(Ia) \quad \text{kein } M_1 \sim P, \quad \text{kein } P_1 \sim M$$

gefolgert werden können. Daß dies direkt geht, ist angesichts der rein *negativen* Natur der Voraussetzungen (I) logisch unmöglich. Es könnte also nur so gelingen, daß man zeigt, daß weder der Fall $M \text{ b } P$ noch auch der Fall $M \text{ c } P$ mit den Voraussetzungen (I) verträglich ist. Nehmen wir z. B. an, es sei für M und P der Fall $M \text{ b } P$ realisiert, sodaß das Verhältnis von M und P durch

$$(1) \quad M' \sim P; \quad \text{kein } P' \sim M$$

charakterisiert ist, so wäre zu zeigen, daß dies mit den Voraussetzungen (I) einen Widerspruch begründet. Um hierüber zur Klarheit zu kommen, wollen wir wieder untersuchen, was sich aus der Annahme (1) in Verbindung mit den Relationen (I) überhaupt folgern läßt. Wir haben dazu *jede* der beiden Beziehungen

$$(1a) \quad M' \sim P$$

und

$$(1b) \quad \text{kein } P' \sim M$$

mit *jeder* der vier in (I) enthaltenen Beziehungen zu kombinieren. Da ist zunächst klar, daß die Kombination irgendeiner dieser vier Beziehungen mit „kein $P' \sim M$ “ einen Schluß wiederum nicht gestattet. Es bleiben also nur noch die vier Kombinationen

$$M' \sim P \quad M' \sim P \quad M' \sim P \quad M' \sim P$$

$$\text{kein } M_1 \sim N' \quad \text{kein } N_1 \sim M' \quad \text{kein } N_1 \sim P' \quad \text{kein } P_1 \sim N$$

zu erörtern. Von ihnen gestatten nur die erste, dritte und vierte einen

Schluß. Die dritte liefert unmittelbar, daß kein $N_1 \sim M'$ ist, was einen Widerspruch nicht enthält.*) Die vierte liefert ein ähnliches Resultat. Ist nämlich M_1' diejenige Teilmenge von M' , sodaß $M_1' \sim P_1$ ist, so folgt

$$\text{kein } M_1' \sim N,$$

was ebenfalls keinen Widerspruch enthält. Die erste endlich setzen wir in die Form

$$M' \sim P, \quad M' \text{ nicht } \sim N$$

und folgern daraus, daß P nicht $\sim N$ ist. Aber auch dies schließt keinen Widerspruch mit den Voraussetzungen (I) ein. Es könnte nur in dem Fall einen Widerspruch bedingen, daß man die Äquivalenz zweier Mengen M und N im Fall d) ausdrücklich voraussetzen, also als Axiom aufstellen würde.***) Damit ist die obige Behauptung erwiesen.

3. Wir gehen zur allgemeinen Theorie zurück und *nehmen jetzt die in C) enthaltene Tatsache als Axiom an*; setzen also voraus, daß aus den Relationen (I) stets die Beziehung (Ia) folgt, also die Beziehung

$$\text{kein } M' \sim P, \quad \text{kein } P' \sim M.$$

Wir knüpfen ferner daran an, daß die drei Möglichkeiten

$$1) \text{ a oder d, } \quad 2) \text{ b, } \quad 3) \text{ c}$$

einander logisch ausschließen, sodaß *entweder b) oder c) oder aber einer der beiden Fälle a) und d) realisiert sein muß*. Dann ist wieder zu zeigen, daß wenn diesen drei Möglichkeiten die drei Beziehungen „Gleich“, „Größer“, „Kleiner“ zugeordnet werden sollen, und zwar in der Form

$$m = n, \quad m > n, \quad m < n,$$

die ihnen entsprechenden fundamentalen Beziehungen erfüllt sind.

*) Man beachte hier und im folgenden, daß sich weitere Folgerungen überhaupt nicht ziehen lassen. Aus

$$M' \sim P, \quad \text{kein } N_1 \sim P, \quad \text{kein } N_1 \sim M'$$

folgt nichts neues mehr.

**) Wir können hieraus das beiläufige Resultat entnehmen, daß die Annahme, aus $M \text{ d } N$ folge die Äquivalenz $M \sim N$, hinreichend ist, um die Relationen (Ia) aus (I) abzuleiten. Aber dies ist durchaus trivial. Denn in diesem Fall folgert man leicht, daß $M \text{ d } N$ mit $M \sim N$ gleichwertig ist, daß also aus $M \sim N$ auch $M \text{ d } N$ folgt. Es ist nämlich sowohl $M \text{ b } N$ wie auch $M \text{ c } N$ ausgeschlossen. Wäre z. B. $M \text{ b } N$ realisiert, so wäre

$$M' \sim N, \quad \text{kein } N_1 \sim M$$

und wegen $M \sim N$ folgte einerseits $M' \sim M$ und andererseits kein $M_1 \sim M$, was einen Widerspruch darstellt. Da aber auch $M \text{ a } N$ gemäß unserer Voraussetzung ausgeschlossen ist, so kann nur $M \text{ d } N$ richtig sein.

Dies gestattet die Relationen (I) in die Form zu setzen

$$M \sim N \quad \text{und} \quad N \sim P;$$

aus ihnen folgt $M \sim P$ unmittelbar, und hieraus wiederum $M \text{ d } P$.

Wir beginnen mit dem Nachweis, daß aus

$$m = n \quad \text{und} \quad n = p$$

in allen Fällen

$$m = p$$

folgt. Dazu ist nachzuweisen, daß aus den Voraussetzungen

(II) für M und N besteht die Beziehung $M a N$ oder $M d N$,

(IIa) für N und P besteht die Beziehung $N a P$ oder $N d P$

auch eine der beiden Relationen $M a P$ oder $M d P$ zu folgern ist. Dies kann folgendermaßen geschehen.

Die Voraussetzungen (II) und (IIa) spalten sich in die vier Fälle

$$1) \begin{matrix} M a N \\ N a P \end{matrix}, \quad 2) \begin{matrix} M a N \\ N d P \end{matrix}, \quad 3) \begin{matrix} M d N \\ N a P \end{matrix}, \quad 4) \begin{matrix} M d N \\ N d P \end{matrix}.$$

Im letzten Fall folgern wir $M d P$ auf Grund unserer axiomatischen Voraussetzung. Im ersten Fall ist die Folgerung $M a P$ evident; der Vollständigkeit halber setze ich den Beweis nochmals hierher. Die Relationen 1) lauten ausführlich

$$M_1 \sim N, \quad N_1 \sim M$$

und

$$N' \sim P, \quad P' \sim N.$$

Ist nun M_1' die Teilmenge von M_1 , die auf Grund der Äquivalenz $M_1 \sim N$ der Menge N' entspricht, so hat man

$$M_1' \sim N' \quad \text{und} \quad N' \sim P; \quad \text{also} \quad M_1' \sim P,$$

und ebenso wird gezeigt, daß es eine Menge $P_1' \sim M$ gibt. D. h. es ist $M a P$.

Der zweite und dritte Fall stellen das Neue dar. Wir führen den Beweis für den zweiten. Er enthält die Voraussetzungen

$$(II') \quad M_1 \sim N, \quad N_1 \sim M,$$

$$(II'a) \quad \text{kein } N' \sim P; \quad \text{kein } P' \sim N;$$

aus ihnen ist zu folgern, daß $M a P$ oder $M d P$ ist. Wir beweisen das letzte, also die Relation

$$(II'b) \quad \text{kein } M'' \sim P, \quad \text{kein } P'' \sim M.$$

Der Beweis geht indirekt vor sich. Gäbe es nämlich eine Teilmenge M'' , sodaß $M'' \sim P$ wäre, so folgt aus $N_1 \sim M$ die Existenz einer Menge N_1'' , für die $N_1'' \sim M''$ ist, und daher auch die Relation

$$N_1'' \sim P$$

im Gegensatz zu (II'a). Ebenso beweist man die Unmöglichkeit einer

Menge P'' mit der Beziehung $P'' \sim M$. Damit ist auch der Fall 2) erledigt und ebenso erledigt sich der Fall 3).

In ähnlicher Weise läßt sich aus den Relationen

$$m = n \quad \text{und} \quad n > p$$

die Beziehung $m > p$ folgern. Es genügt, dies für den Fall durchzuführen, daß zwischen M und N die Beziehung $M d N$ besteht, d. h.

$$(III) \quad \text{kein } M_1 \sim N \quad \text{und} \quad \text{kein } N_1 \sim M.$$

Zu ihr kommt die $n > p$ entsprechende Relation

$$(IIIa) \quad N_2 \sim P, \quad \text{kein } P_2 \sim N$$

und es ist zu folgern, daß

$$(IIIb) \quad M' \sim P, \quad \text{kein } P' \sim M.$$

Zunächst beweisen wir, daß es kein $P' \sim M$ gibt. Gäbe es nämlich eine Menge $P' \sim M$, so sei wiederum N'_2 die Teilmenge von N_2 , für die $N'_2 \sim P'$ ist, dann folgt weiter $N'_2 \sim M$ im Gegensatz zu (III). Man hat nun noch zu zeigen, daß es ein $M' \sim P$ gibt. Wäre dies nicht der Fall, so bestände auf Grund des Vorstehenden zwischen M und P jetzt die Beziehung

$$\text{kein } M' \sim P, \quad \text{kein } P' \sim M,$$

und hieraus folgte in Verbindung mit (III) nunmehr auch

$$\text{kein } N_2 \sim P, \quad \text{kein } P_2 \sim N$$

im Widerspruch zu (IIIa). Damit ist der Beweis geliefert.

Analog wird aus $m = n$ und $n < p$ weiter $m < p$ gefolgert. Man überzeugt sich so, daß unser an die Spitze gestelltes Axiom C eine zentrale Bedeutung für die Theorie der Vergleichbarkeit besitzt.

4. Ich leite zunächst noch eine Folgerung ab, deren Kenntnis ich Herrn H. Hahn verdanke. *Man kann nämlich jetzt noch nachweisen, daß der Fall d) bei unendlichen Mengen nicht vorkommen kann.*

Der Beweis kann wie folgt geführt werden. Wir nehmen an, daß für M und N die Beziehung $M d N$ besteht, also

$$(1) \quad \text{kein } M_1 \sim N, \quad \text{kein } N_1 \sim M,$$

und haben zu zeigen, daß es keine Teilmenge $M' \sim M$ gibt. Gäbe es nämlich eine solche Menge $M' \sim M$, so könnte man folgern, daß auch $M' d N$ sein müßte. Denn wegen $M' \sim M$ hat man unmittelbar

$$(2) \quad \text{kein } N_1 \sim M',$$

und ebenso leicht folgt, daß

$$(3) \quad \text{kein } M'_1 \sim N$$

ist. Jedes M'_1 ist nämlich auch Teilmenge von M , und wir wissen ja, daß kein $M_1 \sim N$ ist. Gemäß (1) und (2), (3) haben wir also die Relationen

$$M d N \text{ und } M' d N$$

und folgern nun gemäß unserer axiomatischen Annahme C) auch

$$(4) \quad M' d M.$$

Das ist aber ein Widerspruch. Denn da M' Teilmenge von M ist, so gibt es auch eine zu M' äquivalente Teilmenge von M , nämlich M' selbst.

5. Wir können von diesem Resultat zu einer allgemeineren Fragestellung übergehen und untersuchen, *welche Fälle a), b), c), d) durch bestimmte Annahmen über Endlichkeit oder Unendlichkeit einer der beiden Mengen M und N ausgeschlossen werden.*

Eine unmittelbare Folgerung ist die folgende.

Man kann das eben gefundene Resultat auch so formulieren, daß die Beziehung $M d N$ ausgeschlossen ist, wenn man nur weiß, daß *eine* der beiden Mengen M und N *unendlich* ist. Ist es z. B. M , so folgern wir genau wie eben, daß M' nicht $\sim M$ sein kann, also M nicht unendlich.

Ferner kann man bekanntlich zeigen, daß die Beziehung $M a N$ ausgeschlossen ist, wenn man *eine* der beiden Mengen, z. B. N , als *endlich* voraussetzt.*) Denn mit den Voraussetzungen

$$(1) \quad M_1 \sim N, \quad N_1 \sim M$$

steht die Annahme

$$(2) \quad \text{kein } N' \sim N$$

in der Tat in Widerspruch. Man hat nämlich sofort

$$N_1' \sim N,$$

wenn N_1' die Teilmenge von N_1 ist, die der Teilmenge M_1 von M entspricht.

6. Hieraus ziehen wir noch eine letzte Folgerung. *Ist M eine unendliche und N eine endliche Menge, so kann nur der Fall $M b N$ realisiert sein.**)* Gemäß dem Vorstehenden haben wir nur zu zeigen, daß auch die Beziehung $M c N$, also

$$(1) \quad \text{kein } M_1 \sim N, \quad N_1 \sim M$$

ausgeschlossen ist, d. h. daß sie mit unseren Voraussetzungen

$$M' \sim M, \quad \text{kein } N' \sim N$$

im Widerspruch steht.

Hierzu bedürfen wir des Hilfssatzes, daß eine Teilmenge einer endlichen Menge ebenfalls eine endliche Menge ist. Dazu muß aus

$$\text{kein } M' \sim M \text{ die Folgerung } \text{kein } M'' \sim M'$$

*) Daß es so ist, wenn man beide Mengen als endlich annimmt, wurde schon in § 1 erwähnt und benutzt.

**) Auf die Beweisbarkeit dieser Tatsache wurde ich ebenfalls von Herrn Hahn hingewiesen.

abgeleitet werden. Wäre nämlich

$$M'' \sim M',$$

so hätte man

$$M = M' + M_1 = M'' + M_1' + M_1,$$

wenn M_1 die Komplementärmenge von M' und M_1' die von M'' ist. Setzt man nun

$$M'' + M_1 = M_2,$$

so ist M_2 eine eigentliche Teilmenge von M , und es folgte weiter

$$M_2 \sim M' + M_1, \text{ also } M_2 \sim M,$$

was unmöglich ist.

Hieraus ergibt sich die zu beweisende Behauptung unmittelbar. Aus den Voraussetzungen (1) entnehmen wir nämlich zunächst eine Relation

$$N_1' \sim M'$$

und hieraus in Verbindung mit $N_1 \sim M$ und $M' \sim M$ weiter

$$N_1 \sim N_1',$$

und da N eine endliche Menge ist, so widerspricht dies der eben gezogenen Folgerung.

Übrigens gehen in diesen Beweis, was ausdrücklich erwähnt werden muß, auch die Sätze über die *Zerlegung* und *Vereinigung* der Mengen als allgemeine *Voraussetzungen* ein.*)

7. Wir kommen zu einer letzten grundlegenden Fragestellung. Es fragt sich endlich noch, ob und wie man aus den vorstehenden Resultaten entnehmen kann, daß den Relationen

$$M a N \text{ und } M d N$$

auch wirklich die Äquivalenz

$$M \sim N$$

entspricht, ob sie also für diesen Schluß auch *hinreichend* sind. Dem Vorstehenden gemäß dürfen wir uns auf den Fall beschränken, daß die Mengen M und N beide endlich oder beide unendlich sind. Dann ergibt sich zunächst ziemlich unmittelbar**), daß *nur* die Fälle $M a N$ resp. $M d N$ für

$$M \sim N$$

statthaben können. Die Fälle $M b N$ und $M c N$ lauten nämlich ausführlicher

$$(b) \quad M_1 \sim N, \text{ kein } N_1 \sim M$$

und

$$(c) \quad \text{kein } M_1 \sim N, \quad N_1 \sim M.$$

*) Von deren nochmaliger Analyse glaube ich absehen zu dürfen.

**) Ich führe dies nur der Vollständigkeit halber an.

Wären diese Fälle mit $M \sim N$ verträglich, so folgte aus ihnen sofort

$$(b) \quad M_1 \sim M, \quad \text{kein } N_1 \sim N$$

und

$$(c) \quad \text{kein } M_1 \sim M, \quad N_1 \sim N.$$

Sind nun M und N beide endlich, so liefern die Relationen $M_1 \sim M$ und $N_1 \sim N$ den Widerspruch; sind sie beide unendlich, so wird er durch kein $N_1 \sim N$ und kein $M_1 \sim M$ bedingt. Diese Fälle sind also in der Tat ausgeschlossen.

Wir fragen weiter, ob die Umkehrbarkeit des eben gefundenen Tatbestandes ohne weitere Voraussetzungen, als die bisher benutzten, bewiesen werden kann. Dies scheint aber unmöglich zu sein. Daß aus $M a N$ die Äquivalenz $M \sim N$ zu folgern ist, bildet ja den Bernsteinschen Satz, in dessen Beweis stets Hilfsmittel eingehen, die über die bisher benutzten hinausgehen und die man daher als neue axiomatische Tatsachen anzusehen hat. Ebensowenig kann aus $M d N$ die Äquivalenz $M \sim N$ gefolgert werden, auch nicht mittels indirekten Beweises. Denn wenn man zu der Voraussetzung

$$\text{kein } M_1 \sim N, \quad \text{kein } N_1 \sim M$$

noch die Annahme

$$M \text{ nicht } \sim N$$

fügt, so hat man lauter negative Voraussetzungen, die einen weiteren Schluß nicht gestatten.

8. Die vorstehende Betrachtung hat mithin folgendes Resultat ergeben. Sie hat nur die Widerspruchslosigkeit der sämtlichen axiomatischen Festsetzungen dargelegt und damit den Beweis geliefert, daß es *gestattet* ist, den Fällen $M a N$ und $M d N$ die Beziehung $M \sim N$ entsprechen zu lassen. Man kann übrigens der axiomatischen Annahme, die hierzu hinreichend ist, einen etwas geringeren Inhalt geben, nämlich den folgenden:

D) *Alle Mengenpaare M, N , die in der Beziehung $M a N$ resp. $M d N$ stehen, haben den gleichen Äquivalenzcharakter (Axiom der Gleichartigkeit oder Einheitlichkeit),*

oder auch, was dasselbe ist,

D') *Der Äquivalenzcharakter hängt nur von den Cantorschen Beziehungen a), b), c), d) ab.*

Daß dies in beiden Fällen nur die Beziehung $M \sim N$ sein kann, ist dann bereits eine Folge der vorstehenden Entwicklungen.

Wird noch die Äquivalenz von M und N , also die Möglichkeit eindeutiger Zuordnung durch $M e N$ ausgedrückt, so kann die vorstehende Untersuchung auch so charakterisiert werden, daß sie die Gesetze darlegt, die die Kombinationen der fünf grundlegenden Beziehungen

$$M a N, \quad M b N, \quad M c N, \quad M d N, \quad M e N$$

beherrschen; und zwar auf der Grundlage der Axiome A, B, C, D , wozu für einzelne Folgerungen noch die über die Spaltung und Vereinigung von Mengen treten. Ganz unabhängig von dem Zweck, der dieser Arbeit in der Einleitung gestellt wurde, bildet die Untersuchung dieser Beziehungen auch an sich ein Problem, dessen Erledigung eine mengentheoretische Notwendigkeit ist.

Damit glaube ich für die Begründung der Vergleichbarkeit einen *elementaren* Weg aufgezeigt zu haben, bei dem man *sicher* ist, alle mathematischen Tatsachen axiomatischer Natur, die man voraussetzt, zu *kennen*. Insbesondere erfüllen diese Voraussetzungen die Forderung, die Peano und Frege mit Recht erhoben haben, und die dahin zielt, daß diese Voraussetzungen sich ausschließlich an die Symbole knüpfen, die man für die gegenseitigen Beziehungen der mathematischen Objekte, von denen man handelt, eingeführt hat.

Freilich könnte man zunächst meinen, daß den vorstehenden Darlegungen scheinbar etwas paradoxes anhaftet. Es liegt darin, daß man in § 3 die Beziehungen $M \alpha N$ und $M \text{ d } N$ miteinander kombiniert, obwohl sich nachträglich ergibt, daß die eine nur für unendliche, die andere nur für endliche Mengen zutrifft. Dies kann jedoch der Richtigkeit der Argumentation keinen Eintrag tun. Es spricht nur eine gewisse Eigenart der Voraussetzungen aus, auf denen sie ruht, nämlich die, daß ihre logische Harmonie sogar in einem Fall bestehen bleiben würde, der sich später als nicht realisierbar erweist. Das ist nichts, was ihre Harmonie in Frage stellen könnte. Im Gegenteil: es spricht nur für die große Allgemeinheit und Tragweite der obigen Voraussetzungen, und damit der Grundlagen, die hier der Theorie der Vergleichbarkeit zugrundegelegt worden sind.