

Euklidische Zerlegungen  
nicht-kompakter hyperbolischer Mannigfaltigkeiten  
mit endlichem Volumen

Diplomarbeit  
von  
Sascha Georg Lukac

am Fachbereich Mathematik  
Johann Wolfgang Goethe-Universität  
Frankfurt am Main, Februar 1998



*E disse: «Il temporal fuoco e l'eterno  
Veduto hai, figlio; e sei venuto in parte  
Dov'io per me più oltre non discerno.  
Tratto t'ho qui con ingegno e con arte:  
Lo tuo piacere omai prendi per duce;  
Fuor sei dell'erte vie, fuor sei dell'arte.»*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Der hyperbolische Raum</b>	<b>5</b>
1.1 Lorentz-Produkt . . . . .	5
1.2 Lorentz-Transformationen . . . . .	8
1.3 Lorentz-Modell des hyperbolischen Raumes . . . . .	12
1.4 Projektives Modell . . . . .	17
1.5 Möbius-Transformationen . . . . .	20
1.6 Das konforme Kugel-Modell . . . . .	21
1.7 Das obere Halbraum-Modell . . . . .	23
1.8 Typen von Isometrien . . . . .	24
<b>2 Operationen diskreter Untergruppen von <math>I(X)</math></b>	<b>27</b>
2.1 Diskrete Untergruppen . . . . .	27
2.2 Raumformen . . . . .	30
2.3 Diskrete Untergruppen von $M(B^n)$ . . . . .	32
<b>3 Horosphären</b>	<b>33</b>
3.1 Horosphären in $H^n$ und $D^n$ . . . . .	33
3.2 Horosphären mit euklidischer Struktur . . . . .	37
3.3 Vorzeichenbehaftete Abstände zu Horosphären . . . . .	38
<b>4 Die euklidische Zerlegung</b>	<b>43</b>
4.1 Einleitung . . . . .	43
4.2 Uniforme Horobälle . . . . .	43
4.3 Konstruktion und Beschreibung von $C$ . . . . .	45
4.4 Operationen auf der euklidischen Zerlegung . . . . .	51
4.5 Berechnung der Isometriegruppe von $D^n/\Gamma$ . . . . .	53
4.6 Ideale Triangulationen . . . . .	57
4.7 Der Schnitt eines Horoballs mit der euklidischen Zerlegung . . . . .	61
<b>5 Die duale Zerlegung</b>	<b>63</b>
5.1 Einleitung . . . . .	63
5.2 Struktur der Voronoi-Bereiche . . . . .	64
5.3 Operationen auf der Voronoi-Zerlegung . . . . .	68
5.4 Duale Zerlegungen auf den Spitzen-Schnitten . . . . .	69
5.5 Kollabierretrakte . . . . .	78

<b>6 Der Algorithmus</b>	<b>81</b>
6.1 Einleitung . . . . .	81
6.2 Konstruktion von $C'$ . . . . .	81
6.3 Wann ist $C'$ konvex? . . . . .	83
6.4 Berechnung der Schrägung . . . . .	86
6.5 Verändern der Zerlegung . . . . .	90
6.6 Beispiele . . . . .	94
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>97</b>
<b>Index</b>	<b>99</b>

# Einleitung

Es ist ohne Schwierigkeiten möglich, zwei gegenüberliegende Seiten eines Blattes zu einer Röhre zu verkleben. Ist das Material dehnbar genug, so können die entstandenen Randkreise wie in Abbildung 1 miteinander verklebt werden. Wir haben einen Torus erhalten. Zwei aufeinander senkrecht stehende Translationen erzeugen eine Pflasterung der euklidischen Ebene mit Kopien des Rechtecks. Zu unseren Überlegungen hätten wir jedes beliebige Rechteck verwenden können. Wir hätten sogar das Sechseck aus Abbildung 2 benutzen können; der einzige Unterschied wäre gewesen, daß die zur Pflasterung benötigten Translationen nicht aufeinander senkrecht gestanden hätten.

In der vorliegenden Arbeit werden hyperbolische Mannigfaltigkeiten der Dimension größer-gleich zwei betrachtet; das sind Quotientenräume  $H^n/\Gamma$ , wobei  $\Gamma$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrien des hyperbolischen Raumes  $H^n$  ist. Eine nicht-kompakte hyperbolische  $n$ -Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen läßt sich zerlegen in einen zusammenhängenden kompakten Teil und endlich viele Spitzen. Der kompakte Teil ist ein strenger Deformationsretrakt der Mannigfaltigkeit. Die Spitzen werden von Horobällen überlagert. Eine Spitze ist homöomorph zu  $A \times [1, \infty)$ , wobei  $A$  eine kompakte euklidische  $(n - 1)$ -Mannigfaltigkeit ist. Diese Zerlegung ist nicht eindeutig: Man kann für  $c > 1$  die Menge  $A \times [1, c]$  zum kompakten Teil hinzunehmen und  $A \times [c, \infty)$  als Spitze wählen. Die Spitze ist aber durch ihr Volumen eindeutig bestimmt. Somit ist durch eine Zuordnung von Volumina zu den Spitzen diese Zerlegung eindeutig bestimmt.

Ein Beispiel für eine nicht-kompakte hyperbolische Fläche mit endlichem Flächenmaß ist ein punktierter Torus (vergl. Seite 94). In Abbildung 3 ist die Zerlegung in den kompakten Teil und die Spitze dargestellt. Es ist  $A = S^1$ .

Zu einer Wahl von Volumina für die Spitzen haben Epstein und Penner in [EP88] die *euklidische Zerlegung* einer nicht-kompakten hyperbolischen  $n$ -Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen konstruiert. Sie besteht aus endlich vielen hyperbolischen idealen  $n$ -dimensionalen Polyedern, die bis auf Isometrie bestimmt sind, sowie Isometrien, die die  $(n - 1)$ -dimensionalen Seiten der Polyeder paaren. Ändert man alle Volumina der Spitzen um einen gemeinsamen Faktor, so bleibt die Zerlegung gleich.

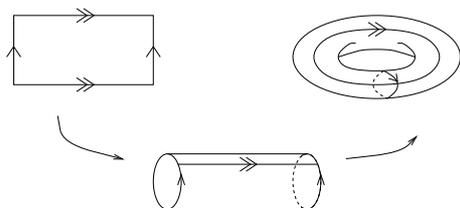


Abbildung 1.

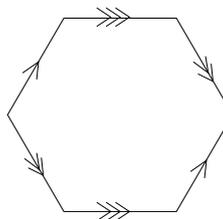


Abbildung 2.

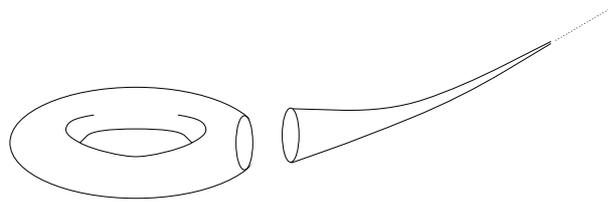


Abbildung 3.

Ein ideales Polyeder ist im projektiven Modell  $D^n$  die konvexe Hülle endlich vieler Punkte aus  $\partial D^n$ . In der euklidischen Metrik von  $D^n$  ist das Polyeder ein kompaktes euklidisch-konvexes Polyeder, und daher kommt der Name euklidische Zerlegung. Topologisch gesehen ist ein ideales Polyeder ein kompakter  $n$ -Ball, von dem endlich viele Punkte aus dem Rand entfernt wurden.

Beginnt man mit einem Polyeder der euklidischen Zerlegung und klebt sukzessive Kopien der Polyeder an, so entsteht eine Pflasterung von  $D^n$ . Es ist der gleiche Vorgang wie beim eingangs erwähnten Torus, jedoch kann die Zerlegung aus mehreren Polyedern bestehen. Die Isometrien, die ein Polyeder auf eine seiner Kopien abbilden, bilden eine diskrete, frei operierende Untergruppe  $\Gamma$  der Isometrien von  $D^n$ . Unsere Mannigfaltigkeit ist dargestellt als  $D^n/\Gamma$ .  $\Gamma$  ist dabei bis auf Konjugation eindeutig, denn eine andere Positionierung des Polyeders beim Beginn der Pflasterung entspricht einer Konjugation von  $\Gamma$ .

Ordnet man allen Spitzen das gleiche Volumen zu, so heißt die euklidische Zerlegung *kanonisch*. Zwei Mannigfaltigkeiten sind genau dann isometrisch, wenn ihre kanonischen Zerlegungen identisch sind. In Dimensionen  $n \geq 3$  sind nach dem Satz von Mostow zwei Mannigfaltigkeiten genau dann homotopieäquivalent, wenn ihre kanonischen Zerlegungen übereinstimmen.

Da eine Isometrie der Mannigfaltigkeit die kanonische Zerlegung invariant läßt, kann die endliche Gruppe der Isometrien der Mannigfaltigkeit (mit einigen Überlegungen) algorithmisch berechnet werden.

Da das Komplement eines Knotens den (nicht orientierten) Knoten eindeutig bestimmt, sind zwei hyperbolische Knoten genau dann gleich, wenn die kanonischen Zerlegungen ihrer Außenräume übereinstimmen. Zudem läßt sich aus der kanonischen Zerlegung die Symmetriegruppe des hyperbolischen Knotens ermitteln, da die Symmetriegruppe isomorph zur Gruppe der Isometrien des hyperbolischen Außenraumes ist (siehe Th. 10.5.3 und Th. 10.6.2 von [Kaw96]).

1993 fand J. Weeks einen Algorithmus, der in den meisten Fällen zu einer vorgegebenen Zerlegung der Mannigfaltigkeit in ideale Simplexe die kanonische Zerlegung berechnet. Mit dem von ihm entwickelten Computerprogramm SnapPea fand die bis dahin nur theoretisch untersuchte kanonische Zerlegung viele praktische Anwendungen.

Ich habe im ersten Kapitel meiner Arbeit die verschiedenen Modelle des hyperbolischen Raumes dargestellt. Ein Schwerpunkt liegt auf dem Lorentz-Modell, das, obwohl es eine elegante Verbindung zwischen den anderen Modellen ist, in den meisten Geometriebüchern nicht erwähnt wird. Ein großer Teil der Darstellung folgt [Rat94]. Übungsaufgaben aus [Rat94] und meine Ergänzungen sind vollständig bewiesen.

Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen für Quotientenräume wie  $H^n/\Gamma$  beschrieben. Beweise sind nur gegeben, falls sie gleichzeitig kurz sind und dem Verständnis dienen, oder falls die hier benötigten Aussagen in [Rat94] nicht bewiesen sind.

Im dritten Kapitel werden Horobälle und die sie berandenden Horosphären untersucht. In einigen Artikeln ist erwähnt, wie Horosphären im Lorentz-Modell aussehen, doch fand ich dazu keinen Beweis in der Literatur. Im ersten Teil des dritten Kapitels habe ich deshalb mit Beweisen beschrieben, wie Horosphären im Lorentz-Modell und im projektiven Modell aussehen. Es folgt ein kurzer

Abschnitt über die euklidische Struktur von Horosphären. Der dritte Teil des dritten Kapitels behandelt den vorzeichenbehafteten Abstand zu einer Horosphäre. Die meisten Sätze sind in [SW95b] bewiesen, doch ist die Darstellung dort nicht konsistent. Es erschien mir zudem natürlicher, bei den Beweisen das obere Halbraum-Modell einzubeziehen, auch wenn die Beweise nicht so kurz wie in [SW95b] geworden sind.

Im vierten Kapitel wird die Konstruktion der euklidischen Zerlegung erklärt. Die Darstellung entspricht [EP88]. Wo immer es möglich war, habe ich die Beweise aus [EP88] vereinfacht und verallgemeinert. Es ist in [EP88] nicht erwähnt, daß die Zerlegung aus nur endlich vielen Polyedern besteht; diese kleine Lücke ist mit Lemma 4.4.3 geschlossen.

In Abschnitt 4.5 erkläre ich, wie aus der kanonischen Zerlegung die endliche Gruppe der Isometrien der Mannigfaltigkeit berechnet werden kann. Diese Berechnung ist für das Komplement des Achterknotens ausführlich dargestellt. Dieses Verfahren wird von SnapPea angewendet, doch ist bis auf eine kurze Erwähnung in [HW92] keine Darstellung in der Literatur gegeben. Am Ende des Abschnitts 4.5 habe ich eine vereinfachte Berechnung der Isometriegruppe untersucht, die von SnapPea angewendet wird. Ich konnte die Gültigkeit der vereinfachten Berechnung nicht nachweisen und habe die aufgetretenen Schwierigkeiten beschrieben. Die Vereinfachung ist deshalb nur als Vermutung 4.5.4 aufgeschrieben.

Abschnitt 4.6 behandelt das Problem, ob eine Zerlegung der Mannigfaltigkeit in ideale Simplexe existiert.

In Abschnitt 4.7 ist ein überraschendes Ergebnis beschrieben, daß ich bei meinen Untersuchungen gefunden habe. Es behandelt die Frage, wie die uniformen Horobälle, die bei der Konstruktion der euklidischen Zerlegung benutzt wurden, die Zerlegung schneiden.

Kapitel 5 beschreibt eine Zerlegung der Mannigfaltigkeit, die dual zur euklidischen Zerlegung ist. Das dazu notwendige Konzept der anwachsenden Horobälle wurde bereits in [EP88] erwähnt, jedoch wurde die Dualität nur für einen Spezialfall bewiesen. Ich konnte in Satz 5.2.8 zeigen, daß die duale Zerlegung auch für  $n$ -Mannigfaltigkeiten mit mehr als einer Spitze anwendbar ist, und daß sich die von dualen Zellen aufgespannten Räume orthogonal schneiden.

Es stellte sich heraus, daß die dualen Zerlegungen der Mannigfaltigkeit auch duale Zerlegungen auf den Spitzen-Schnitten induzieren; bei einem Knotenkomplement ist dies ein Torus. In der euklidischen Struktur der Spitzen-Schnitte schneiden sich die von dualen Zellen aufgespannten Räume euklidisch-orthogonal. In Satz 5.4.2 konnte ich nachweisen, daß in der dualen Zerlegung des Spitzen-Schnitts einer  $n$ -Mannigfaltigkeit mit einer Spitze spezielle Symmetrien auftreten. Die Relevanz von Satz 5.4.2 für eine Vermutung von Sakuma und Weeks ist beschrieben. Am Ende des fünften Kapitels habe ich Kollabierretrakte betrachtet.

Im sechsten Kapitel wird der Algorithmus von J. Weeks beschrieben. Die Erweiterung von Proposition 3.1 aus [Wee93] für alle Dimensionen  $n \geq 2$  habe ich in Satz 6.3.1 bewiesen. Alles andere in den Abschnitten 6.3 bis 6.5 ist bereits in [Wee93] und [SW95b] bewiesen worden. Ich habe mich um eine verständliche Darstellung aller Schritte bemüht und auf einige Ungenauigkeiten hingewiesen, die in den beiden zitierten Arbeiten auftraten. Den Abschluß bilden einige Beispiele für kanonische Zerlegungen.

Danken möchte ich allen Zuhörern, denen ich meine Ergebnisse vortragen durfte. Ihre Fragen und Anmerkungen halfen mir, meine Gedanken weiter zu strukturieren und zu präzisieren.



# Kapitel 1

## Der hyperbolische Raum

### 1.1 Lorentz-Produkt

In diesem Abschnitt betrachten wir symmetrische Bilinearformen auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^n$ . Ein Vektor  $x$  besitzt als Element des kartesischen Produktes  $\mathbb{R}^n$  die Komponentendarstellung  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , die von einer Darstellung bezüglich einer Basis deutlich zu unterscheiden ist. Als Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir für  $i = 1, \dots, n$  die Vektoren  $e_i$ , die in der  $i$ -ten Komponente eine 1 und sonst nur Nullen besitzen. Es ist somit

$$x = (x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Ein grundlegender Satz für das erste Kapitel ist:

**Satz 1.1.1 (Sylvester)** *Zu einer symmetrischen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  über einem  $r$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  gibt es eine Basis  $\{v_1, \dots, v_r\}$  von  $V$ , bezüglich der gilt*

- $\langle v_i, v_i \rangle = 1, \quad i = 1, \dots, p,$
- $\langle v_i, v_i \rangle = -1, \quad i = p + 1, \dots, p + q,$
- $\langle v_i, v_i \rangle = 0, \quad i = p + q + 1, \dots, r,$
- $\langle v_i, v_j \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, r \text{ und } i \neq j.$

*Die Zahlen  $p$  und  $q$  sind dabei unabhängig von der gewählten Basis. Sie geben die maximale Dimension aller Untervektorräume des  $\mathbb{R}^n$  an, auf denen die Bilinearform positiv bzw. negativ definit ist.*

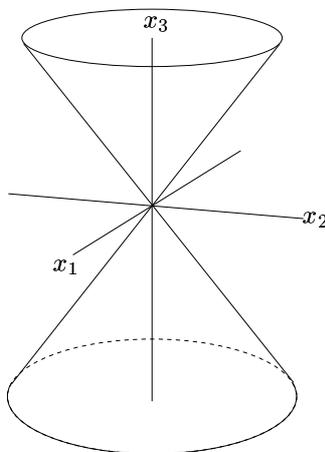
**Bemerkung:** Man sagt, daß der obige Vektorraum den *Typ*  $(p, q, r - (p + q))$  hat und daß die Basis  $\{v_1, \dots, v_r\}$  eine *Orthogonalbasis* ist. Eine symmetrische Bilinearform auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $X$  heißt *positiv* (bzw. *negativ*) *definit*, falls  $\langle x, x \rangle > 0$  (bzw.  $\langle x, x \rangle < 0$ ) für alle  $x$  aus  $X$  ungleich dem Nullvektor ist.

Für Vektoren  $x$  und  $y$  aus  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , definieren wir:

$$x \circ y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n. \quad (1.1.1)$$

Diese Verknüpfung ist eine symmetrische Bilinearform, die *Lorentz-Produkt* genannt wird. Einige Autoren legen auch

$$x \circ y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} + x_n y_n \quad (1.1.2)$$

Abbildung 1.1. Der Lichtkegel  $L^2$  im  $\mathbb{R}^3$ .

fest. In [Rat94] wird in §3.1 die zweite und ab §4.5 die erste Festlegung gewählt. Wir werden nur die Festlegung in Gleichung (1.1.1) benutzen.

Die Verknüpfung

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad (1.1.3)$$

ist das *euklidische Skalarprodukt* im  $\mathbb{R}^n$ . Die *euklidische Norm* eines Vektors  $x$  aus  $\mathbb{R}^n$  ist definiert als

$$|x| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}.$$

Den  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Norm und der daraus resultierenden Metrik  $d_E(x, y) = |x - y|$  bezeichnet man als den euklidischen Raum  $E^n$ .

Entsprechend ist die *Lorentz-Norm* definiert als

$$\|x\| = (x \circ x)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Lorentz-Norm eines Vektors  $x$  aus  $\mathbb{R}^n$  ist eine positive reelle Zahl oder Null oder positiv imaginär, d.h. ein positiv reelles Vielfaches der imaginären Einheit  $i \in \mathbb{C}$ . Im letzten Fall definieren wir als den Modulus von  $x$

$$\| \|x\| \| = \frac{\|x\|}{i}.$$

Der Vektor  $x$  heißt

- *raumartig*, falls  $\|x\|$  eine positive reelle Zahl ist,
- *lichtartig*, falls  $\|x\|$  gleich Null ist,
- *zeitartig*, falls  $\|x\|$  positiv imaginär ist.

Ein zeitartiger Vektor, dessen letzte Komponente positiv (bzw. negativ) ist, heißt *positiv zeitartig* (bzw. *negativ zeitartig*). Die Menge aller zeitartigen Vektoren zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten. Die positiv zeitartigen Vektoren bilden die eine Komponente, die negativ zeitartigen Vektoren die andere Komponente. Die Menge aller lichtartigen Vektoren bezeichnet man als *Lichtkegel*  $L^{n-1}$  oder kurz als  $L$  (s. Abb. 1.1).  $\mathbb{R}^n - L^{n-1}$  hat drei Zusammenhangskomponenten: die raumartigen, die positiv zeitartigen und die negativ zeitartigen Vektoren. Die Menge aller lichtartigen Vektoren, deren  $n$ -te Koordinate positiv (bzw. negativ) ist, bezeichnen wir mit  $L^+$  (bzw.

$L^-$ ). Die Menge der positiv zeitartigen Vektoren bezeichnen wir als  $\mathring{L}^+$ . Die Vereinigung von  $L^+$  und allen positiv (bzw. negativ) zeitartigen Vektoren nennen wir schließlich  $\bar{L}^+$  (bzw.  $\bar{L}^-$ ).

**Satz 1.1.2** Für Vektoren  $x$  und  $y$  aus  $\bar{L}^+$  gilt

$$x \circ y \leq \|x\| \|y\| \leq 0.$$

Die Gleichheit in der linken Ungleichung gilt genau dann, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind.

**Beweis:** Die rechte Ungleichung ist trivial. Wir beweisen die linke Ungleichung. Sind  $x$  und  $y$  Vektoren aus  $\bar{L}^+$  mit der Komponentendarstellung

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n),$$

und bezeichnen

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{und} \quad \bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}),$$

so ist

$$\begin{aligned} x \circ x &= \bar{x} \cdot \bar{x} - x_n^2, \\ y \circ y &= \bar{y} \cdot \bar{y} - y_n^2, \\ x \circ y &= \bar{x} \cdot \bar{y} - x_n y_n. \end{aligned}$$

Es gibt eine das euklidische Skalarprodukt erhaltende Abbildung  $\phi$  von  $\mathbb{R}^{n-1}$  nach  $\mathbb{R}^{n-1}$ , die  $\bar{x}$  auf ein Vielfaches von  $e_1$  abbildet, da die das euklidische Skalarprodukt erhaltenden Abbildungen transitiv auf den 1-dimensionalen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^{n-1}$  operieren. Sei also  $\phi(\bar{x}) = r e_1$ . Bezeichne

$$\bar{z} = \phi(\bar{y}) = (z_1, \dots, z_{n-1}).$$

Da  $x$  und  $y$  in  $\bar{L}^+$  liegen, ist

$$x_n \geq |\bar{x}| = |r| \quad \text{und} \quad y_n \geq |\bar{y}| = |\bar{z}| \geq |z_1|.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (x \circ x)(y \circ y) &= (\phi(\bar{x}) \cdot \phi(\bar{x}) - x_n^2)(\phi(\bar{y}) \cdot \phi(\bar{y}) - y_n^2) \\ &= (r^2 - x_n^2)(\bar{z} \cdot \bar{z} - y_n^2) \\ &= (x_n^2 - r^2)(y_n^2 - \bar{z} \cdot \bar{z}) \\ &\leq (x_n^2 - r^2)(y_n^2 - z_1^2) \\ &\leq (x_n^2 - r^2)(y_n^2 - z_1^2) + (z_1 x_n - r y_n)^2 \\ &= (r z_1 - x_n y_n)^2 \\ &= (\phi(\bar{x}) \cdot \phi(\bar{y}) - x_n y_n)^2 \\ &= (\bar{x} \cdot \bar{y} - x_n y_n)^2 \\ &= (x \circ y)^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$x \circ y = r z_1 - x_n y_n \leq 0 \quad \text{und} \quad \|x\| \|y\| \leq 0,$$

somit folgt

$$x \circ y \leq \|x\| \|y\|.$$

Gilt die Gleichheit im obigen Beweisgang, so ist

$$z_1^2 = \bar{z} \cdot z \text{ und } z_1 x_n - r y_n = 0.$$

Aus  $z_1^2 = \bar{z} \cdot z$  folgt  $\bar{z} = z_1 e_1$ . Die Gleichheit im obigen Beweisgang impliziert somit

$$\bar{z} = \frac{y_n}{x_n} \phi(\bar{x}).$$

Da  $\phi$  injektiv ist, folgt daraus

$$\bar{y} = \frac{y_n}{x_n} \bar{x},$$

und schließlich sind  $x$  und  $y$  linear abhängig, da

$$y = \frac{y_n}{x_n} x.$$

Umgekehrt gilt für linear abhängige Vektoren die Gleichheit. ♣

## 1.2 Lorentz-Transformationen

Wie beim euklidischen Skalarprodukt die orthogonalen Abbildungen eine große Bedeutung besitzen, so spielen auch beim Lorentz-Produkt die Abbildungen, die die Bilinearform erhalten, eine wesentliche Rolle. Es ist bekannt, daß eine Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann das euklidische Skalarprodukt erhält, wenn sie eine lineare Abbildung ist, die bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  durch eine Matrix  $A$  beschrieben wird, für die  $AA^t$  die Einheitsmatrix ist. Solch eine Abbildung (und die sie beschreibende Matrix) heißt *orthogonal*. Die orthogonalen Matrizen bilden eine Gruppe, die mit  $O(n)$  bezeichnet wird.

**Definition:** Eine Abbildung  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *Lorentz-Transformation*, falls

$$\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y \quad \text{für alle } x \text{ und } y \text{ aus } \mathbb{R}^n.$$

Man kann leicht zeigen, daß eine Lorentz-Transformation linear ist. Eine  $n \times n$  Matrix  $A$  heißt *Lorentz-Matrix*, wenn sie bezüglich der Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung beschreibt, die eine Lorentz-Transformation ist. Diese lineare Abbildung wollen wir auch mit  $A$  bezeichnen. Die Menge aller Lorentz-Matrizen wird mit  $O(n-1, 1)$  bezeichnet. Es gilt:

**Satz 1.2.1** Für eine  $n \times n$  Matrix  $A$  sind äquivalent:

- (1)  $A$  ist eine Lorentz-Matrix.
- (2)  $A$  erfüllt die Gleichung  $AJA^t = J$ , wobei

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}.$$

- (3)  $A$  erfüllt die Gleichung  $A^t J A = J$ .

♣

Es folgt aus Satz 1.2.1, daß eine Lorentz-Transformation eine bijektive Abbildung ist. Bezüglich der Hintereinanderausführung bilden die Lorentz-Transformationen eine Gruppe. Somit ist die Menge  $O(n-1, 1)$  bezüglich der üblichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die natürlich isomorph zu den Lorentz-Transformationen ist.

Da eine Lorentz-Transformation stetig ist, vertauscht sie die beiden Zusammenhangskomponenten der zeitartigen Vektoren, oder sie führt jede Komponente in sich über. Im ersten Fall nennt man die Lorentz-Transformation und die zugehörige Lorentz-Matrix *negativ*, im zweiten Fall *positiv*. Man sieht leicht, daß eine Lorentz-Transformation genau dann positiv ist, wenn sie  $L^+$  invariant läßt. Die Matrix  $J$  aus Satz 1.2.1 ist negativ. Die positiven Lorentz-Matrizen bilden eine Untergruppe von  $O(n-1, 1)$ , die mit  $PO(n-1, 1)$  bezeichnet wird und den Index 2 hat.

**Definition:** Zwei Vektoren  $x$  und  $y$  aus  $\mathbb{R}^n$  heißen *Lorentz-orthogonal*, falls  $x \circ y = 0$ . Das *lorentzsche orthogonale Komplement* eines Untervektorraumes  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  ist die Menge

$$V^L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \circ y = 0 \quad \forall y \in V\}.$$

Entsprechend ist das *euklidische orthogonale Komplement*

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot y = 0 \quad \forall y \in V\}.$$

**Lemma 1.2.2** *Bezeichnet  $J$  die Lorentz-Transformation aus Satz 1.2.1, so gilt für einen Untervektorraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$*

$$V^L = [J(V)]^\perp.$$

**Beweis:** Wegen  $x \circ y = x \cdot J(y)$  folgt:

$$\begin{aligned} V^L &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \circ y = 0 \quad \forall y \in V\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot J(y) = 0 \quad \forall y \in V\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot z = 0 \quad \forall z \in J(V)\} \\ &= [J(V)]^\perp. \end{aligned}$$

♣

**Korollar 1.2.3** *Für einen Untervektorraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  ist*

$$\dim V^L = n - \dim V.$$

**Beweis:** Es ist  $\dim V = \dim J(V)$  und bekanntlich  $\dim V^\perp = n - \dim V$ . Mit Lemma 1.2.2 folgt dann die Behauptung. ♣

**Lemma 1.2.4** *Für eine Lorentz-Transformation  $\phi$  und einen Untervektorraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  ist*

$$\phi(V^L) = [\phi(V)]^L.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \phi(V^L) &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : z = \phi(x), x \circ y = 0 \quad \forall y \in V\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : z = \phi(x), \phi(x) \circ \phi(y) = 0 \quad \forall y \in V\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^n \mid z \circ \phi(y) = 0 \quad \forall y \in V\}, \text{ da } \phi \text{ surjektiv} \\ &= [\phi(V)]^L. \end{aligned}$$

♣

**Definition:** Ein Untervektorraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt

- *raumartig*, falls außer dem Nullvektor nur raumartige Vektoren in  $V$  enthalten sind,
- *zeitartig*, falls  $V$  einen zeitartigen Vektor enthält,
- *lichtartig* andernfalls.

**Bemerkung:** Man beachte, daß eine Lorentz-Transformation einen raumartigen (licht-, zeitartigen) Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  in einen raumartigen (licht-, zeitartigen) Untervektorraum überführt.

Wir wollen nun betrachten, welche Typen  $(p, q, r)$  für einen Untervektorraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  bezüglich des Lorentz-Produktes in Frage kommen. Nach Satz 1.1.1 ist  $p \leq n - 1$  und  $q \leq 1$ . Zudem ist  $r \leq 1$ , da ein  $r$ -dimensionaler Untervektorraum  $T$ , auf dem  $x \circ x = 0$  für alle  $x$  aus  $T$  ist, mit einem (nach Satz 1.1.1 existierenden) Untervektorraum der Dimension  $(n - 1)$ , auf dem das Lorentz-Produkt positiv definit ist, nur den Nullvektor gemeinsam hat. Der Typ  $(p, 1, 1)$  kann nicht auftreten, da ein zeitartiger Vektor und ein lichtartiger Vektor nach Satz 1.1.2 nicht Lorentz-orthogonal sein können. Aus diesen Betrachtungen ergibt sich das folgende Lemma:

**Lemma 1.2.5** *Ein Untervektorraum des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann raumartig, wenn er vom Typ  $(p, 0, 0)$  ist. Er ist genau dann zeitartig, wenn er vom Typ  $(p, 1, 0)$  ist, und er ist genau dann lichtartig, wenn er vom Typ  $(p, 0, 1)$  ist.*

**Lemma 1.2.6** *Für einen zeitartigen (raumartigen) Untervektorraum  $V$  des  $\mathbb{R}^n$  ist  $V^L$  raumartig (zeitartig).*

**Beweis:** Hat  $V$  den Typ  $(p, 1, 0)$  bezüglich einer Orthogonalbasis  $w_1, \dots, w_{p+1}$ , so kann diese zu einer Orthogonalbasis  $w_1, \dots, w_n$  des  $\mathbb{R}^n$  ergänzt werden. Da insgesamt  $(n - 1)$  Einsen und eine Minus-Eins auftreten, ist

$$w_i \circ w_i = 1 \text{ für } i = p + 2, \dots, n.$$

Für  $i = p + 2, \dots, n$  liegt  $w_i$  in  $V^L$ . Da  $V^L$  nach Korollar 1.2.3 die Dimension  $(n - p - 1)$  hat, ist

$$V^L = \langle w_{p+2}, \dots, w_n \rangle,$$

und  $V^L$  ist somit raumartig. Die andere Behauptung wird analog bewiesen. ♣

Da eine Lorentz-Transformation bijektiv ist, operiert  $O(n - 1, 1)$  auf den  $m$ -dimensionalen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^n$  für jede Dimension  $m$ . Die Operation ist jedoch gemäß der obigen Bemerkung nicht transitiv. Es gilt aber:

**Satz 1.2.7** *Für jede Dimension  $m$  operiert  $PO(n - 1, 1)$  transitiv jeweils auf den  $m$ -dimensionalen zeitartigen, den lichtartigen und den raumartigen Untervektorräumen des  $\mathbb{R}^n$ .*

**Beweis:** Wir führen zuerst den Nachweis für raumartige Untervektorräume. Seien also  $V$  und  $V'$   $m$ -dimensionale raumartige Untervektorräume von  $\mathbb{R}^n$  mit Orthogonalbasen

$$\langle w_1, \dots, w_m \rangle \text{ und } \langle w'_1, \dots, w'_m \rangle,$$

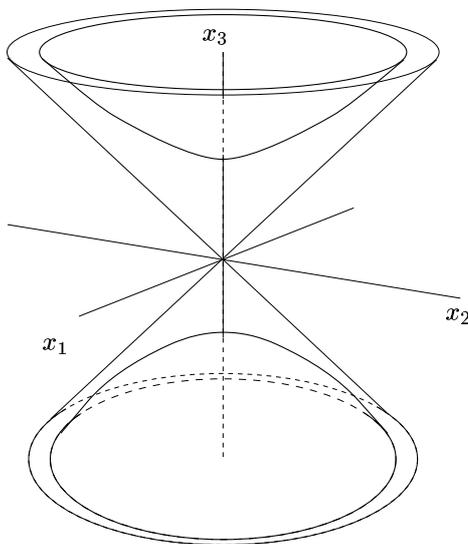
so daß

$$w_i \circ w_i = w'_i \circ w'_i = 1 \text{ für } i = 1, \dots, m.$$

$V^L$  und  $V'^L$  sind nach Lemma 1.2.6 zeitartig. Sie besitzen Orthogonalbasen

$$\langle w_{m+1}, \dots, w_n \rangle \text{ und } \langle w'_{m+1}, \dots, w'_n \rangle$$



Abbildung 1.2. Das zweischalige Hyperboloid im  $\mathbb{R}^3$ 

### 1.3 Lorentz-Modell des hyperbolischen Raumes

In Analogie zur euklidischen Sphäre betrachten wir die Menge aller  $x$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$ , die die Lorentz-Norm  $i$  besitzen. Diese Vektoren sind durch die Gleichung

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1 \quad (1.3.4)$$

bestimmt. Dies beschreibt ein zweiblättriges Hyperboloid, wobei das eine Blatt durch  $x_{n+1} > 0$  und das andere Blatt durch  $x_{n+1} < 0$  bestimmt ist (siehe Abb. 1.2). Als *Lorentz-Modell*  $H^n$  des  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raumes wird die Menge aller positiv zeitartigen Vektoren des Hyperboloids, d.h. das Blatt mit  $x_{n+1} > 0$ , bezeichnet.

**Lemma 1.3.1** Für verschiedene Punkte  $x$  und  $y$  aus  $H^n$  ist  $x \circ y < -1$ , und  $(x - y)$  ist ein raumartiger Vektor.

**Beweis:** Da Vektoren aus  $H^n$  die gleiche Lorentz-Norm besitzen, sind linear abhängige Vektoren aus  $H^n$  entweder gleich, oder sie unterscheiden sich durch den Skalar  $-1$ . Da aber die  $(n+1)$ -te Komponente von Vektoren aus  $H^n$  positiv ist, sind Vektoren aus  $H^n$  genau dann linear abhängig, wenn sie gleich sind. Für verschiedene Vektoren  $x$  und  $y$  aus  $H^n$  ist somit nach Satz 1.1.2

$$x \circ y < \|x\| \|y\| = -1.$$

Des weiteren ist

$$\begin{aligned} (x - y) \circ (x - y) &= x \circ x - 2x \circ y + y \circ y \\ &= -2 - 2x \circ y \\ &> 0. \end{aligned}$$



Nach Lemma 1.3.1 gibt es für Vektoren  $x$  und  $y$  aus  $H^n$  eine eindeutig bestimmte nicht negative, reelle Zahl  $\eta$  mit  $\cosh \eta = -x \circ y$ ; dabei ist

$$\begin{aligned} \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

der Kosinus hyperbolicus. Aufgrund dieser Beobachtung läßt sich eine Metrik auf  $H^n$  erklären.

**Definition:** Die Metrik  $d_H$  auf  $H^n$  ist definiert durch

$$\cosh d_H(x, y) = -x \circ y. \quad (1.3.6)$$

Es bleibt nachzuweisen, daß  $d_H$  die Axiome einer Metrik erfüllt. Es ist  $d_H(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x \circ y = -1$  ist. Nach Lemma 1.3.1 tritt dies genau dann ein, wenn  $x = y$  ist. Da das Lorentz-Produkt symmetrisch ist, folgt  $d_H(x, y) = d_H(y, x)$ . Der Nachweis der Dreiecksungleichung kann [Rat94] entnommen werden.

Der folgende Satz ist die Grundlage der Eleganz des Lorentz-Modells, in dem viele Betrachtungen auf linearer Algebra beruhen. Dabei bezeichnet eine Isometrie eine surjektive, abstandserhaltende Abbildung.

**Satz 1.3.2** Die Einschränkung einer positiven Lorentz-Transformation des  $\mathbb{R}^{n+1}$  auf  $H^n$  ist eine Isometrie des  $H^n$ . Umgekehrt ist jede Isometrie des  $H^n$  die Einschränkung einer eindeutig bestimmten positiven Lorentz-Transformation. ♣

Jede Lorentz-Transformation führt das Hyperboloid aus Gleichung (1.3.4) bijektiv in sich über, und genau die positiven Lorentz-Transformationen führen das Blatt  $H^n$  in sich über.

**Korollar 1.3.3** Die Gruppe der Isometrien von  $H^n$  ist isomorph zu  $\text{PO}(n, 1)$ . ♣

Die Isometrien von  $H^n$ , die  $e_{n+1}$  festhalten, lassen sich leicht angeben.

**Lemma 1.3.4** Die positiven Lorentz-Matrizen, die  $e_{n+1}$  festhalten, sind genau die  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen der Gestalt

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & B' & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right), \quad (1.3.7)$$

wobei  $B'$  eine orthogonale  $(n \times n)$ -Matrix ist.

**Beweis:** Sei  $A$  eine positive Lorentz-Matrix, die  $e_{n+1}$  festhält. Wegen  $A(e_i) \circ A(e_{n+1}) = e_i \circ e_{n+1}$  muß für  $1 \leq i \leq n$  die  $(n+1)$ -te Komponente von  $A(e_i)$  gleich Null sein. Die Matrix  $A$  erfüllt nach Satz 1.2.1 die Gleichung  $AJA^t = J$ , also

$$\left( \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & A' & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & & & \vdots \\ & (A')^t & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Somit ist  $A'(A')^t$  die Einheitsmatrix, und folglich ist  $A'$  eine orthogonale Matrix.

Die Umkehrung, daß eine Matrix der Gestalt von (1.3.7) eine positive Lorentz-Matrix ist, die  $e_{n+1}$  festhält, ist unmittelbar einsichtig. ♣

**Definition:** Eine *hyperbolische  $m$ -Ebene von  $H^n$*  ist der Durchschnitt von  $H^n$  mit einem  $(m+1)$ -dimensionalen zeitartigen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Korollar 1.3.5** Für jede Dimension  $m$  operiert die Gruppe der Isometrien von  $H^n$  transitiv auf den hyperbolischen  $m$ -Ebenen.

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 1.2.7 und 1.3.2. ♣

Eine besondere Stellung nehmen die hyperbolischen 1-Ebenen ein. Sie sind nämlich die „Geraden“ im  $H^n$ .

**Definition:** Eine *hyperbolische Gerade* im  $H^n$  ist das Bild einer Abbildung  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow H^n$ , die lokal abstandserhaltend ist.

**Bemerkung:**  $\lambda$  ist als Abbildung zwischen metrischen Räumen stetig.

**Satz 1.3.6** Die hyperbolischen Geraden sind genau die hyperbolischen 1-Ebenen im  $H^n$ .

Wir zeigen hier nur, daß in  $H^n$  eine hyperbolische 1-Ebene eine hyperbolische Gerade ist. Nach Korollar 1.3.5 ist jede 1-Ebene isometrisch zu  $H^1$ . Die Abbildung

$$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow H^1, \lambda(t) = (\sinh t)e_1 + (\cosh t)e_2$$

ist eine Isometrie, denn

$$\begin{aligned} \cosh d_H(\lambda(t), \lambda(r)) &= -(\lambda(t) \circ \lambda(r)) \\ &= -(\sinh t)(\sinh r) + (\cosh t)(\cosh r) \\ &= (\sinh t)(\sinh(-r)) + (\cosh t)(\cosh(-r)) \\ &= \cosh(t-r). \end{aligned}$$

Folglich ist  $d_H(\lambda(t), \lambda(r)) = |t-r|$ .

## Hyperbolische Längenmessung

**Definition:** Die *lorentzsche Abstandsfunktion*  $d_L$  ist auf  $H^n$  definiert als

$$d_L(x, y) = \|x - y\|.$$

Nach Lemma 1.3.1 ist  $d_L(x, y) \geq 0$ , und  $d_L(x, y) = 0$  ist äquivalent zu  $x = y$ . Des weiteren ist  $d_L(x, y) = d_L(y, x)$ . Eine Metrik ist  $d_L$  aber nicht, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt wird. Die drei Vektoren  $x = e_1 + \sqrt{2}e_{n+1}$ ,  $y = e_{n+1}$  und  $z = -e_1 + \sqrt{2}e_{n+1}$  liegen in  $H^n$ . Es ist

$$d_L(x, z) = \|2e_1\| = 2,$$

$$d_L(x, y) = \left\| e_1 + (\sqrt{2} - 1)e_{n+1} \right\| = \sqrt{1 - (\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}$$

und

$$d_L(y, z) = \left\| e_1 + (1 - \sqrt{2})e_{n+1} \right\| = \sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}.$$

Mit

$$d_L(x, z) = 2 > 2\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}} = d_L(x, y) + d_L(y, z)$$

ist ein Beispiel für die Ungültigkeit der Dreiecksungleichung gebracht.

Wie wir bald sehen werden, hat der Lorentz-Abstand trotzdem eine Bedeutung, da sich  $d_L$  und  $d_H$  „im Kleinen“ nicht sehr unterscheiden.

**Definition:** Eine *Kurve* in einem topologischen Raum  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , wobei  $a < b$  ist, und  $[a, b]$  ein abgeschlossenes Intervall aus  $\mathbb{R}$  ist.

Auf der Menge  $H^n$  kann man zum einen die von der hyperbolischen Metrik induzierte Topologie betrachten, die wir  $d_H$ -Topologie nennen. Zum anderen kann man aber auch die Unterraumtopologie bezüglich des  $\mathbb{R}^{n+1}$  betrachten, die wir  $d_E$ -Topologie nennen. Diese Topologien sind jedoch gleich. Der erste Schritt im Nachweis dieser Behauptung ist das folgende Lemma.

**Lemma 1.3.7** *Für  $x$  und  $y$  aus  $H^n$  ist*

$$d_E(x, y) \geq d_L(x, y) \text{ und}$$

$$\sqrt{-2 + 2 \cosh d_H(x, y)} = d_L(x, y) \geq d_H(x, y).$$

**Beweis:** Mit  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$  und  $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$  aus  $H^n$  ist

$$\begin{aligned} d_E^2(x, y) &= |x - y|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + 2(x_{n+1} - y_{n+1})^2. \end{aligned}$$

Da  $2(x_{n+1} - y_{n+1})^2 \geq 0$ , folgt die Abschätzung  $d_E(x, y) \geq d_L(x, y)$ . Weiter gilt

$$\begin{aligned} d_L^2(x, y) &= (x - y) \circ (x - y) \\ &= \|x\|^2 - 2x \circ y + \|y\|^2 \\ &= -2 + 2 \cosh d_H(x, y) \\ &\geq -2 + 2 \left( 1 + \frac{d_H^2(x, y)}{2} \right) \text{ nach Gleichung (1.3.5)} \\ &= d_H^2(x, y). \end{aligned}$$

♣

Für  $x$  aus  $H^n$  und  $\varepsilon > 0$  bezeichne  $U_\varepsilon^H(x)$  (bzw.  $U_\varepsilon^E(x)$ ) die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x$  in der  $d_H$ -Topologie (bzw.  $d_E$ -Topologie). Nach Lemma 1.3.7 ist  $U_\varepsilon^E(x) \subset U_\varepsilon^H(x)$ . Eine in der  $d_H$ -Topologie offene Menge ist somit auch in der  $d_E$ -Topologie offen.

Umgekehrt ist  $U_\varepsilon^H(x)$  in der  $d_E$ -Topologie von  $H^n$  offen, da

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^H(x) &= \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \cosh(-y \circ x) < \varepsilon\} \\ &= f^{-1}([0, \varepsilon)), \end{aligned}$$

wobei

$$f(y) = \cosh(-y \circ x)$$

eine stetige Funktion von dem Unterraum  $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  nach  $\mathbb{R}_0^+$  ist. Hiermit ist die Übereinstimmung der  $d_E$ -Topologie mit der  $d_H$ -Topologie gezeigt, was wir in einem Lemma festhalten.

**Lemma 1.3.8** *Die  $d_E$ -Topologie und die  $d_H$ -Topologie stimmen auf  $H^n$  überein.*

Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow H^n$  eine Kurve und  $P = \{t_0, \dots, t_m\}$  eine Partition von  $[a, b]$ , so definiert man die *lorentzsche Länge* zu  $P$  von  $\gamma$  als

$$\ell_L(\gamma, P) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

und die *hyperbolische Länge* zu  $P$  von  $\gamma$  als

$$\ell_H(\gamma, P) = \sum_{i=1}^m d_H(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1})).$$

Die Kurve  $\gamma$  heißt *Lorentz-rektifizierbar*, wenn es eine reelle Zahl  $\ell_L(\gamma)$  gibt, so daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Partition  $P_\varepsilon$  gibt, so daß für jede Verfeinerung  $Q$  von  $P_\varepsilon$  gilt:

$$|\ell_L(\gamma) - \ell_L(\gamma, Q)| < \varepsilon.$$

Existiert  $\ell_L(\gamma)$ , so ist die Zahl eindeutig, da es zu zwei Partitionen von  $[a, b]$  immer eine gemeinsame Verfeinerung gibt.  $\ell_L(\gamma)$  heißt dann die *lorentzsche Länge* von  $\gamma$ .

Entsprechend heißt  $\gamma$  *rektifizierbar in  $H^n$* , wenn es eine reelle Zahl  $\ell_H(\gamma)$  gibt, so daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Partition  $P_\varepsilon$  gibt, so daß für jede Verfeinerung  $Q$  von  $P_\varepsilon$  gilt:

$$|\ell_H(\gamma) - \ell_H(\gamma, Q)| < \varepsilon.$$

Auch hier ist  $\ell_H(\gamma)$  eindeutig, wenn  $\gamma$  rektifizierbar in  $H^n$  ist.  $\ell_H(\gamma)$  wird als hyperbolische Länge von  $\gamma$  bezeichnet.

**Satz 1.3.9** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow H^n$  eine Kurve. Dann ist  $\gamma$  genau dann rektifizierbar in  $H^n$ , wenn  $\gamma$  Lorentz-rektifizierbar ist; des weiteren ist dann die lorentzsche Länge von  $\gamma$  gleich der hyperbolischen Länge von  $\gamma$ . ♣

Die Grundidee des Beweises ist die Ungleichung

$$\sqrt{-2 + 2 \cosh d_H(x, y)} = d_L(x, y) \geq d_H(x, y)$$

aus Lemma 1.3.7 zusammen mit der Beobachtung, daß für  $s > 0$  nach der Regel von de l'Hôpital gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2 + 2 \cosh s}}{s} &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\sinh s}{\sqrt{-2 + 2 \cosh s}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{-1 + \cosh^2 s}{2(-1 + \cosh s)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1 + \cosh s}{2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Satz 1.3.10** Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow H^n$  eine Kurve, für die  $\iota\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  ( $\iota : H^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  bezeichnet dabei die Inklusion) stetig differenzierbar ist, so ist die hyperbolische Länge von  $\gamma$  gegeben durch

$$\ell_H(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Der Tangentialraum an  $H^n$  am Punkt  $\gamma(t)$  ist positiv definit: Dies ist klar für  $\gamma(t) = e_{n+1}$ . Da eine positive Lorentz-Transformation Tangentialräume in Tangentialräume überführt, gilt die Aussage für alle  $\gamma(t)$  aus  $H^n$ . Man kann somit Satz 1.3.10 als Definition wählen, wenn man von  $H^n$  als Riemannscher Mannigfaltigkeit ausgehen möchte. ♣

Wir wollen eine zweite Begründung geben, daß  $\gamma'(t)$  raumartig ist. Wir unterscheiden dabei nicht zwischen  $\iota\gamma$  und  $\gamma$ . Besitzt  $\gamma$  die Komponentendarstellung  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1})$ , so ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma(t) \circ \gamma(t)) &= \frac{d}{dt} (\gamma_1^2(t) + \dots + \gamma_n^2(t) - \gamma_{n+1}^2(t)) \\ &= 2\gamma(t) \circ \gamma'(t). \end{aligned}$$

Die Lorentz-Norm von  $\gamma(t)$  ist  $i$  für alle  $t$  aus  $[a, b]$ . Somit ist  $\gamma(t) \circ \gamma'(t) = 0$  für alle  $t$  aus  $[a, b]$ . Da  $\gamma(t)$  zeitartig ist, muß  $\gamma'(t)$  raumartig sein.

Mit der Notation

$$dx = (dx_1, \dots, dx_{n+1}) \text{ und } \|dx\| = (dx_1^2 + \dots + dx_n^2 - dx_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}$$

ist

$$\int_{\gamma} \|dx\| = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Das Differential  $\|dx\|$  wird *hyperbolisches Bogenelement* genannt.

## Hyperbolisches Volumen

**Definition:** Das *hyperbolische Volumenelement* von  $H^n$  ist

$$\frac{dx_1 \cdots dx_n}{(1 + (x_1^2 + \dots + x_n^2))^{\frac{1}{2}}}.$$

Bezeichnet  $p : H^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Projektion

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n),$$

wobei  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  identifiziert wird, und ist  $X \subset H^n$  eine Borel-Menge des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so ist nach der Definition

$$\text{Vol}(X) = \int_{p(X)} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{(1 + (x_1^2 + \dots + x_n^2))^{\frac{1}{2}}}.$$

Eine Motivation zu unserer Definition ist in §3.4 von [Rat94] zu finden. Man beachte aber, daß die dort angegebene hyperbolische Koordinatenparametrisierung eingeschränkt auf  $\mathbb{R}_0^+ \times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$  surjektiv und eingeschränkt auf  $\mathbb{R}^+ \times (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$  injektiv ist. Die dort angegebenen Bereiche sind nämlich nicht richtig.

## 1.4 Projektives Modell

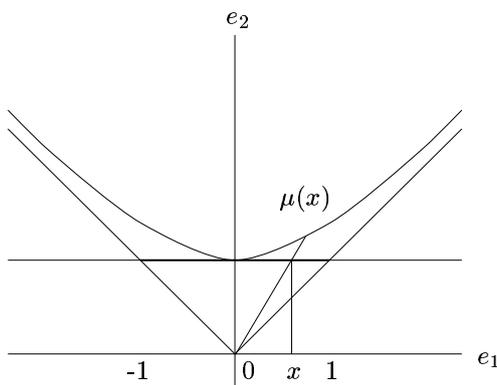
Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . Die *offene Einheitscheibe* im  $\mathbb{R}^n$  ist definiert als die Menge

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Sei  $\tau : D^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  die Translation  $\tau(x) = x + e_{n+1}$ . Die Abbildung  $\mu$  von  $D^n$  nach  $H^n$  ist definiert als Translation um  $e_{n+1}$  gefolgt von der vom Ursprung ausgehenden radialen Projektion nach  $H^n$  (s. Abb. 1.3). Die explizite Darstellung von  $\mu$  ist

$$\mu(x) = \frac{x + e_{n+1}}{\|x + e_{n+1}\|}.$$

Die Abbildung  $\mu$  ist bijektiv. Die inverse Abbildung ist

Abbildung 1.3. Die Abbildung  $\mu$  von  $D^1$  nach  $H^1$ .

$$\mu^{-1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right).$$

Wir definieren eine Metrik  $d_D$  auf  $D^n$  durch

$$d_D(x, y) = d_H(\mu(x), \mu(y)),$$

wodurch  $\mu$  eine Isometrie von  $(D^n, d_D)$  nach  $(H^n, d_H)$  wird. Der metrische Raum  $(D^n, d_D)$  heißt *projektives Modell* des hyperbolischen Raumes.

**Bemerkung:** Gegebenenfalls werden wir  $D^n$  auch als

$$\{(x_1, \dots, x_n, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |(x_1, \dots, x_n)| < 1\}$$

auffassen. Die Abbildung  $\mu : D^n \rightarrow H^n$  ist dann die vom Ursprung ausgehende radiale Projektion.

**Definition:** Eine Teilmenge  $P$  von  $D^n$  heißt *hyperbolische  $m$ -Ebene* von  $D^n$ , wenn  $\mu(P)$  eine hyperbolische  $m$ -Ebene von  $H^n$  ist.

**Satz 1.4.1** *Eine Teilmenge  $P$  von  $D^n$  ist genau dann eine hyperbolische  $m$ -Ebene von  $D^n$ , wenn  $P$  der nicht-leere Schnitt von  $D^n$  mit einer  $m$ -Ebene des  $\mathbb{R}^n$  ist.* ♣

Der Beweis ist klar. Siehe auch Abbildung 1.4.

Die Isometrien im projektiven Modell, die den Nullpunkt festhalten, lassen sich direkt angeben. Da der Ursprung durch  $\mu$  auf  $e_{n+1}$  abgebildet wird, bestätigt man mit Lemma 1.3.4 unmittelbar die folgende Charakterisierung:

**Lemma 1.4.2** *Eine Abbildung von  $D^n$  nach  $D^n$ , die den Nullpunkt festhält, ist genau dann eine Isometrie von  $D^n$ , wenn sie die Einschränkung einer orthogonalen Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  ist.* ♣

### Fortsetzung von Isometrien auf $\partial D^n$

Aus Abschnitt 1.6 läßt sich erschließen, daß sich eine Isometrie von  $D^n$  auf  $\partial D^n$  fortsetzen läßt. Wir wollen dies aber direkt nachweisen.

**Definition:** Der *Rand von  $H^n$*  ist die Menge aller 1-dimensionalen lichtartigen Untervektorräume von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , und er wird mit  $\partial H^n$  bezeichnet. Der *Rand von  $D^n$*  ist die Menge

$$\partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Die Elemente des Randes von  $D^n$  werden *ideale Punkte* genannt.

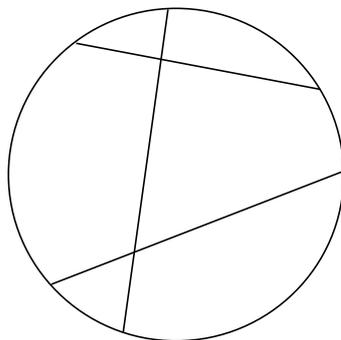


Abbildung 1.4. 1-Ebenen im zweidimensionalen projektiven Modell

Die Abbildung  $f : \partial D^n \rightarrow \partial H^n$ , die den Vektor  $(x_1, \dots, x_n)$  auf den von  $(x_1, \dots, x_n, 1)$  erzeugten Untervektorraum abbildet, ist eine Bijektion. Es ist nämlich

$$|(x_1, \dots, x_n)| = 1 \Leftrightarrow \|(x_1, \dots, x_n, 1)\| = 0.$$

Eine positive Lorentz-Transformation  $A$  induziert eine Bijektion  $\tilde{A}$  auf  $\partial H^n$  durch

$$\tilde{A}(V) = A(V) \text{ für } V \in \partial H^n.$$

**Satz 1.4.3** Sei  $A$  eine positive Lorentz-Transformation. Die zu  $A$  gehörige Isometrie  $\alpha = \mu^{-1}A\mu$  von  $D^n$  besitzt eine (in der euklidischen Topologie) stetige Fortsetzung  $\tilde{\alpha}$  auf  $\overline{D}^n$ , und es ist  $\tilde{\alpha}|_{\partial D^n} = f^{-1}\tilde{A}f$ .

**Beweis:** Bezeichne  $r$  die Abbildung, die auf  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathbb{R}^n \times \{0\}$  definiert ist durch

$$r(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1 \right).$$

$\tau$  bezeichne die Translation  $x \mapsto x + e_{n+1}$ . Die Einschränkung von  $\tau^{-1}r$  auf  $H^n$  stimmt mit  $\mu^{-1}$  überein. Die Abbildung  $\tau^{-1}rA\tau : \overline{D}^n \rightarrow \overline{D}^n$  ist stetig. Sie stimmt mit  $\alpha = \mu^{-1}A\mu$  auf  $D^n$  überein. Sie stimmt auf  $\partial D^n$  mit  $f^{-1}\tilde{A}f$  überein. Somit ist  $\tau^{-1}rA\tau$  die gesuchte Fortsetzung von  $\alpha$  auf  $\overline{D}^n$ .

♣

**Bemerkung:** Für  $n \geq 2$  gibt es Homöomorphismen  $\kappa : D^n \rightarrow D^n$ , die sich nicht stetig auf  $\overline{D}^n$  fortsetzen lassen. Ein Beispiel für  $n = 2$  ist die Abbildung in Polarkoordinaten:

$$\kappa(r, \varphi) = \left( r, \varphi + \frac{1}{1-r} \right).$$

Da  $D^n \approx D^2 \times (0, 1)^{n-2}$ , erhält man leicht höherdimensionale Beispiele.

**Satz 1.4.4** Für  $n \geq 2$  gilt: Hat die nach Satz 1.4.3 existierende Fortsetzung  $\tilde{\alpha}$  einer Isometrie  $\alpha$  von  $D^n$   $(n+1)$  Fixpunkte auf  $\partial D^n$ , die in  $\mathbb{R}^n$  affin unabhängig sind, so ist  $\alpha$  die Identität.

**Beweis:** Sei  $\tilde{\alpha}$  die Fortsetzung von  $\alpha = \mu^{-1}A\mu$  für eine positive Lorentz-Transformation  $A$ . Seien  $T_1, \dots, T_{n+1}$  affin unabhängige Fixpunkte von  $\tilde{\alpha}$  in  $\partial D^n$ . Wir haben oben eine Abbildung  $f : \partial D^n \rightarrow \partial H^n$  angegeben. Für  $i = 1, \dots, n+1$  sei  $t_i$  ein Vektor aus  $f(T_i)$ , der ungleich dem

Nullvektor ist. Aus  $\tilde{\alpha}(T_i) = T_i$  folgt  $A(f(T_i)) = f(T_i)$ , und somit ist  $A(t_i) = \beta_i t_i$  für  $\beta_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ . Wegen

$$\begin{aligned} t_i \circ t_j &= A(t_i) \circ A(t_j) \\ &= \beta_i \beta_j (t_i \circ t_j) \end{aligned}$$

und  $t_i \circ t_j < 0$  für  $i \neq j$  nach Satz 1.1.2, ist

$$\beta_i \beta_j = 1 \text{ für } i, j = 1, \dots, n+1 \text{ und } i \neq j. \quad (1.4.8)$$

Da  $n \geq 2$ , gilt

$$\beta_1 \beta_2 = 1, \beta_2 \beta_3 = 1 \text{ und } \beta_1 \beta_3 = 1.$$

Folglich ist

$$(\beta_1 \beta_2)(\beta_1 \beta_3) = 1,$$

und somit ist  $\beta_1^2 = 1$ . Da  $\beta_1 > 0$  ist  $\beta_1 = 1$ , und schließlich ist nach Gleichung (1.4.8)

$$\beta_i = 1 \text{ für } i = 1, \dots, n+1.$$

Da die  $t_i$  eine Basis bilden, ist  $A = \text{id}$  auf ganz  $\mathbb{R}^{n+1}$ , und folglich auch  $\alpha = \text{id}$  auf  $D^n$ . ♣

## 1.5 Möbius-Transformationen

In diesem Abschnitt betrachten wir den  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Norm und benutzen dafür die übliche Bezeichnung  $E^n$ .

Ist  $a$  ein Vektor aus  $E^n$  mit der Norm 1, und ist  $t$  eine reelle Zahl, so ist eine Hyperebene definiert durch

$$P(a, t) = \{x \in E^n \mid a \cdot x = t\}.$$

Die Spiegelung  $\rho$  von  $E^n$  an  $P(a, t)$  ist definiert durch

$$\rho(x) = x + 2(t - a \cdot x)a.$$

Ist  $b$  ein Punkt aus  $E^n$  und  $r$  eine positive reelle Zahl, so ist die Sphäre um  $b$  vom Radius  $r$  die Menge

$$S(b, r) = \{x \in E^n \mid |x - b| = r\}.$$

Die Inversion  $\sigma$  von  $E^n \setminus \{b\}$  in der Sphäre  $S(b, r)$  ist definiert als

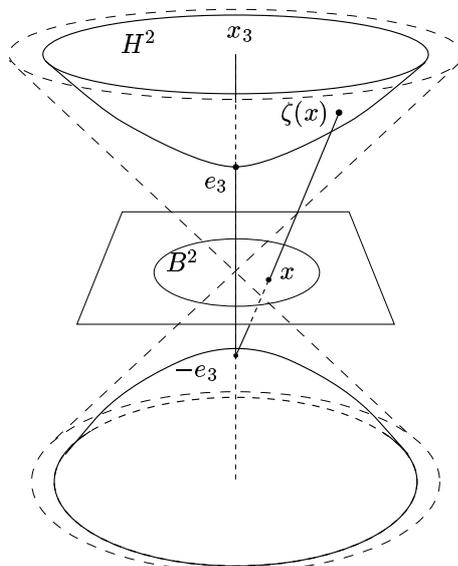
$$\sigma(x) = b + \left( \frac{r}{|x - b|} \right)^2 (x - b).$$

$\sigma(x)$  liegt auf der Geraden durch  $b$  und  $x$ , und zusätzlich gilt

$$|\sigma(x) - b| |x - b| = r^2.$$

Bezeichne  $\hat{E}^n = E^n \cup \{\infty\}$  die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von  $E^n$ . Ist  $P(a, t)$  eine Hyperebene, so heißt  $\hat{P}(a, t) = P(a, t) \cup \{\infty\}$  *erweiterte Hyperebene*. Die Inversion  $\sigma$  von  $\hat{E}^n$  in der Sphäre  $S(b, r)$  ist definiert als die Fortsetzung der ursprünglichen Abbildung  $\sigma$  durch  $\sigma(b) = \infty$  und  $\sigma(\infty) = b$ . Die Spiegelung  $\rho$  von  $\hat{E}^n$  an der erweiterten Hyperebene  $\hat{P}(a, t)$  ist definiert als die Fortsetzung der Spiegelung  $\rho$  an  $P(a, t)$  durch  $\rho(\infty) = \infty$ .

Eine *Sphäre*  $\Sigma$  von  $\hat{E}^n$  ist entweder eine euklidische Sphäre  $S(b, r)$  oder eine erweiterte Ebene  $\hat{P}(a, t)$ . Dabei ist  $\hat{P}(a, t)$  topologisch eine Sphäre.

Abbildung 1.5. Die stereographische Projektion  $\zeta$  von  $B^2$  nach  $H^2$ 

**Definition:** Eine Möbius-Transformation von  $\hat{E}^n$  ist ein endliches Kompositum von Spiegelungen bzw. Inversionen an Sphären von  $\hat{E}^n$ .

**Bemerkung:** Man bestätigt leicht  $\rho^2 = \text{id}$  und  $\sigma^2 = \text{id}$ , und folglich bilden die Möbius-Transformationen eine Gruppe.

**Definition:** Zwei Sphären im  $\hat{E}^n$  heißen orthogonal, wenn sie einen nicht-leeren Schnitt haben, und in jedem Schnittpunkt die Normalengeraden euklidisch-orthogonal sind.

**Bemerkung:** Für jeden Punkt  $x$  aus  $\hat{P}(a, t) - \{\infty\}$  ist  $a$  ein Normalenvektor an  $x$ . Für  $x$  aus  $S(b, r)$  ist  $(x - b)$  ein Normalenvektor am Punkt  $x$ . Die Sphären  $\hat{P}(a_1, t_1)$  und  $\hat{P}(a_2, t_2)$  sind genau dann orthogonal, wenn  $a_1$  und  $a_2$  orthogonal sind. Die Sphären  $\hat{P}(a, t)$  und  $S(b, r)$  sind genau dann orthogonal, wenn  $b$  in  $\hat{P}(a, t)$  liegt.

## 1.6 Das konforme Kugel-Modell

Die offene Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  ist

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Man beachte, daß  $B^n$  und  $D^n$  als Mengen übereinstimmen. Entsprechend definieren wir

$$\partial B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}.$$

Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir  $\mathbb{R}^n$  mit  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . Die stereographische Projektion  $\zeta$  von  $B^n$  nach  $H^n$  ist dadurch definiert, daß der Punkt  $x$  aus  $B^n$  auf den Schnittpunkt von  $H^n$  mit der Geraden durch  $-e_{n+1}$  und  $x$  abgebildet wird (s. Abb. 1.5). Es gibt somit ein  $s$  aus  $\mathbb{R}$ , so daß

$$\zeta(x) = x + s(x + e_{n+1}).$$

Die Bedingung  $\|\zeta(x)\|^2 = -1$  führt auf

$$s = \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}.$$

Es ist folglich

$$\zeta(x) = \left( \frac{2x_1}{1 - |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 - |x|^2}, \frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2} \right)$$

eine bijektive Abbildung mit der inversen Abbildung

$$\zeta^{-1} = \left( \frac{y_1}{1 + y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{1 + y_{n+1}} \right).$$

Die *Poincaré-Metrik*  $d_B$  auf  $B^n$  ist definiert als

$$d_B(x, y) = d_H(\zeta(x), \zeta(y)).$$

Der metrische Raum  $(B^n, d_B)$  heißt *konformes Kugel-Modell* des hyperbolischen Raumes.  $\zeta$  ist eine Isometrie von  $(B^n, d_B)$  nach  $(H^n, d_H)$ . Die Abbildung  $\mu^{-1}\zeta$  ist eine Isometrie von  $(B^n, d_B)$  nach  $(D^n, d_D)$ , und sie hat die explizite Darstellung

$$\mu^{-1}\zeta(x) = \frac{2}{1 + |x|^2}x.$$

**Definition:** Eine Teilmenge  $P$  von  $B^n$  heißt *hyperbolische  $m$ -Ebene von  $B^n$* , wenn  $\zeta(P)$  eine hyperbolische  $m$ -Ebene von  $H^n$  ist.

**Satz 1.6.1** *Eine Teilmenge  $P$  von  $B^n$  ist genau dann eine hyperbolische  $m$ -Ebene von  $B^n$ , wenn  $P$  der Schnitt von  $B^n$  mit einer auf  $\partial B^n$  senkrecht stehenden Sphäre von  $\hat{E}^n$  ist.* ♣

Mit der expliziten Darstellung von  $\zeta$  kann man den folgenden Satz beweisen.

**Satz 1.6.2** *Für die Metrik  $d_B$  auf  $B^n$  gilt*

$$\cosh d_B(x, y) = 1 + \frac{2|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}.$$

♣

Mit elementarer Differential- und Integralrechnung kann man die folgenden Sätze beweisen.

**Satz 1.6.3** *Das hyperbolische Bogenlängenelement im konformen Modell  $B^n$  ist*

$$\frac{2|dx|}{1 - |x|^2}.$$

♣

**Satz 1.6.4** *Das hyperbolische Volumenelement im konformen Modell  $B^n$  ist*

$$\frac{2^n dx_1 \cdots dx_n}{(1 - |x|^2)^n}.$$

♣

Um die Isometrien im konformen Modell beschreiben zu können, benötigen wir die folgende Definition.

**Definition:** Eine Möbius-Transformation des  $\hat{E}^n$ , die  $B^n$  invariant läßt, heißt *Möbius-Transformation der offenen Einheitskugel*.

Man kann zeigen, daß die Spiegelung von  $\hat{E}^n$  in der Sphäre  $\Sigma$  genau dann  $B^n$  invariant läßt, wenn  $\partial B^n$  und  $\Sigma$  orthogonal sind. Man kann zudem zeigen, daß eine Möbius-Transformation der offenen Einheitskugel das Kompositum von Spiegelungen an Sphären von  $\hat{E}^n$  ist, die orthogonal zu  $\partial B^n$  sind. Die Gruppe aller Möbius-Transformationen bezeichnen wir mit  $M(B^n)$ .

**Satz 1.6.5** Die Einschränkung einer Möbius-Transformation der offenen Einheitskugel auf  $B^n$  ist eine Isometrie des konformen Modells  $B^n$ . Eine Isometrie des konformen Modells ist die Einschränkung einer eindeutigen Möbius-Transformation der offenen Einheitskugel. ♣

Das konforme Modell erhielt seinen Namen durch die Beobachtung, daß der hyperbolische Winkel zwischen sich schneidenden hyperbolischen Geraden gleich dem euklidischen Winkeln zwischen den Tangenten ist. Da wir aber bisher noch keine Winkel im hyperbolischen Raum definiert haben, fassen wir hyperbolische Winkel im folgenden als euklidische Winkel der Tangentialräume im konformen Modell auf.

## 1.7 Das obere Halbraum-Modell

Als *oberen Halbraum*  $U^n$  des  $\hat{E}^n$  bezeichnen wir die Menge aller Elemente von  $\hat{E}^n$ , deren  $n$ -te Komponente positiv ist, sowie den Punkt  $\infty$ . Mit  $\partial U^n$  bezeichnen wir  $E^{n-1}$ , und für  $U^n \cup \partial U^n$  schreiben wir  $\bar{U}^n$ . Die Möbius-Transformation  $\eta = \sigma\rho$ , wobei  $\sigma$  die Spiegelung von  $\hat{E}^n$  in der Sphäre  $S(e_n, \sqrt{2})$  und  $\rho$  die Spiegelung an  $E^{n-1}$  ist, bestimmt eine Bijektion zwischen  $\bar{U}^n$  und  $\bar{B}^n$ . Dabei wird  $\hat{E}^{n-1}$  auf  $\partial B^n$  abgebildet. Die Abbildung  $\eta$  hat die explizite Darstellung

$$\eta(x_1, \dots, x_n) = \frac{2}{\delta}(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n - 1 + \frac{\delta}{2}), \text{ dabei ist } \delta = x_1^2 + \dots + x_n^2 + 2x_n + 1.$$

Die Metrik  $d_U$  auf  $U^n$ , die durch

$$d_U(x, y) = d_B(\eta(x), \eta(y))$$

definiert ist, heißt *Poincaré-Metrik* auf  $U^n$ . Der metrische Raum  $(U^n, d_U)$  heißt *oberes Halbraum-Modell* des hyperbolischen Raumes.

**Satz 1.7.1** Für die Metrik  $d_U$  auf  $U^n$  gilt

$$\cosh d_U(x, y) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2x_n y_n}.$$

♣

**Korollar 1.7.2** Für  $s > 0$  und  $t > 0$  ist  $d_U(se_n, te_n) = |\ln s/t|$ .

**Beweis:** Nach Satz 1.7.1 ist

$$\begin{aligned} \cosh d_U(se_n, te_n) &= 1 + \frac{(s-t)^2}{2st} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{s}{t} + \frac{t}{s} \right). \end{aligned}$$

Somit ist  $d_U(se_n, te_n) = |\ln s/t|$ . ♣

Eine Teilmenge  $P$  von  $U^n$  heißt *hyperbolische  $m$ -Ebene* von  $U^n$ , wenn  $\eta(P)$  eine hyperbolische  $m$ -Ebene von  $B^n$  ist.

**Satz 1.7.3** *Eine Teilmenge  $P$  von  $U^n$  ist genau dann eine hyperbolische  $m$ -Ebene des  $U^n$ , wenn  $P$  der Schnitt von  $U^n$  mit entweder einer zu  $E^{n-1}$  orthogonalen  $m$ -Ebene des  $E^n$  oder einer zu  $E^{n-1}$  orthogonalen  $m$ -Sphäre des  $E^n$  ist.* ♣

**Satz 1.7.4** *Das hyperbolische Bogenlängelement im oberen Halbraum-Modell  $U^n$  ist*

$$\frac{|dx|}{x_n}.$$

♣

**Satz 1.7.5** *Das hyperbolische Volumenelement im oberen Halbraum-Modell  $U^n$  ist*

$$\frac{dx_1 \cdots dx_n}{(x_n)^n}.$$

♣

## 1.8 Typen von Isometrien

Wir wollen nun die positiven Lorentz-Transformationen bezüglich ihrer Eigenvektoren in  $\bar{L}^+$  untersuchen.

**Definition:** Eine positive Lorentz-Transformation  $A$  heißt

- *elliptisch*, falls  $A$  einen zeitartigen Eigenvektor besitzt,
- *parabolisch*, falls  $A$  genau einen lichtartigen Eigenvektor besitzt, aber  $A$  nicht elliptisch ist,
- *hyperbolisch*, falls  $A$  genau zwei linear unabhängige lichtartige Eigenvektoren besitzt, aber  $A$  nicht elliptisch ist.

Mit linearer Algebra läßt sich induktiv zeigen, daß eine positive Lorentz-Transformation  $A$  einen lichtartigen oder einen zeitartigen Eigenvektor besitzt. Sind  $w_1, w_2, w_3$  drei linear unabhängige lichtartige Eigenvektoren mit den Eigenwerten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , so ist für  $i \neq j$  :  $A(w_i) \circ A(w_j) = w_i \circ w_j < 0$ , also  $\alpha_i \alpha_j = 1$  für  $i \neq j$ . Somit ist jeder dieser Eigenwerte gleich 1, und mit  $(w_1 + w_2)$  existiert ein zeitartiger Eigenvektor. Folglich ist eine positive Lorentz-Transformation entweder elliptisch oder parabolisch oder hyperbolisch. Man kann zudem zeigen, daß der Eigenwert zu dem lichtartigen Eigenvektor einer parabolischen Lorentz-Transformation gleich 1 ist.

$\zeta$  bezeichne die Isometrie von  $B^n$  nach  $H^n$  aus Abschnitt 1.6. Eine Möbius-Transformation  $\gamma$  von  $B^n$  heißt elliptisch (bzw. parabolisch, hyperbolisch), wenn die Lorentz-Transformation  $\zeta \gamma \zeta^{-1}$  elliptisch (bzw. parabolisch, hyperbolisch) ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\gamma$  einen Fixpunkt in  $B^n$  besitzt, bzw.  $\gamma$  keinen Fixpunkt in  $B^n$  aber genau einen Fixpunkt in  $\partial B^n$  besitzt, bzw.  $\gamma$  keinen Fixpunkt in  $B^n$  aber genau zwei Fixpunkte in  $\partial B^n$  besitzt.

Entsprechend sind elliptische, parabolische und hyperbolische Isometrien in den anderen Modell definiert.

Wir wollen nun in  $U^n$  die Isometrien parabolischer und hyperbolischer Art beschreiben. Für eine Isometrie  $f$  von  $E^{n-1}$  heißt die Abbildung  $\tilde{f} : U^n \rightarrow U^n$ ,

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n), \text{ und } \tilde{f}(\infty) = \infty,$$

die *Poincaré-Erweiterung* von  $f$ . Die Poincaré-Erweiterung setzt die auf  $\partial U^n$  bestimmte Abbildung  $f$  fort. Man kann den Begriff der Poincaré-Erweiterung sogar für alle Möbius-Transformationen von  $E^{n-1}$  definieren, und die entstehenden Abbildungen sind genau die Möbius-Transformationen  $M(U^n)$  von  $U^n$  (siehe z.B. §4.4 in [Rat94]). Wir benötigen den Begriff allerdings nur für Isometrien von  $E^{n-1}$ , und in diesem Fall erkennt man durch Satz 1.7.1, daß die Poincaré-Erweiterung eine Isometrie von  $U^n$  ist.

Im oberen Halbraum-Modell ist eine Isometrie vom hyperbolischen Typ konjugiert in  $M(U^n)$  zu einer Abbildung der Form  $\psi(x) = \rho_\kappa \tilde{h}(x)$ . Dabei ist  $\rho_\kappa : x \mapsto \kappa x$  eine Streckung um den Faktor  $\kappa > 1$ , und es ist  $\tilde{h}$  die Poincaré-Erweiterung einer Isometrie  $h$  von  $E^{n-1}$ , die den Ursprung festläßt. Die Fixpunkte von  $\psi$  sind 0 und  $\infty$ . Die Isometrie  $\psi$  wirkt auf der  $e_n$ -Achse als Translation in der hyperbolischen Metrik.

Im oberen Halbraum-Modell ist eine parabolische Isometrie konjugiert zur Poincaré-Erweiterung einer fixpunktfreien Isometrie von  $E^{n-1}$ . Der eindeutige Fixpunkt ist  $\infty$ .



## Kapitel 2

# Operationen diskreter Untergruppen von $I(X)$

### 2.1 Diskrete Untergruppen

Für spezielle (sogenannte endlich-kompakte) metrische Räume wollen wir nun der Gruppe der Isometrien von  $X$ , genannt  $I(X)$ , die Struktur einer topologischen Gruppe geben. Unser Hauptinteresse wird in der Charakterisierung der diskreten Untergruppen von  $I(X)$  liegen. Im weiteren Fortgang werden uns dann nur die Fälle  $X = E^n$  und  $X = H^n$  interessieren.

**Definition:** Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *endlich-kompakt*, wenn für alle  $a$  aus  $X$  und  $r > 0$  die Mengen

$$C(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}$$

kompakt sind.

**Bemerkung:**  $E^n$  und  $H^n$  sind endlich-kompakt. Beim Nachweis für  $H^n$  beachte man, daß  $I(H^n)$  transitiv auf  $H^n$  operiert, jede Isometrie ein Homöomorphismus ist, und

$$C(e_{n+1}, r) = \{x \in H^n \mid x_{n+1} \leq \cosh r\}$$

für jedes  $r > 0$  kompakt ist.

Die Menge  $C(X, X)$  aller stetigen Selbstabbildungen von  $X$  wird durch die kompakt-offene Topologie ein topologischer Raum. Eine Subbasis bilden dabei die Mengen

$$\{f \in C(X, X) \mid f(K) \subset U\},$$

wobei  $K \subset X$  kompakt und  $U \subset Y$  offen ist. Die Menge  $I(X)$  erhält als Teilmenge von  $C(X, X)$  die Unterraumtopologie. Man kann zeigen, daß eine Folge  $\{\gamma_i\} \subset C(X, X)$  genau dann konvergiert, wenn sie auf jedem Kompaktum von  $X$  gleichmäßig konvergiert (siehe z.B. Abschnitt XII.7 von [Dug70]). Eine direkte Folgerung aus dieser Charakterisierung der Konvergenz ist der folgende Satz.

**Satz 2.1.1** *Eine Folge  $\{\phi_i\}$  von Isometrien eines metrischen Raumes  $X$  konvergiert in  $I(X)$  gegen die Isometrie  $\phi$  genau dann, wenn  $\{\phi_i(x)\}$  gegen  $\phi(x)$  für jeden Punkt  $x \in X$  konvergiert. ♣*

**Definition:** Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe  $G$ , die gleichzeitig die Struktur eines topologischen Raumes besitzt. Zudem soll gelten, daß die Multiplikation  $G \times G \rightarrow G, (g, h) \rightarrow gh$ , sowie die Inversenbildung  $G \rightarrow G, g \rightarrow g^{-1}$ , stetige Abbildungen sind.

**Satz 2.1.2** *Ist  $X$  ein endlich-kompakter metrischer Raum, so ist  $I(X)$  eine topologische Gruppe.* ♣

Ein *Isomorphismus zwischen topologischen Gruppen* ist ein Gruppenisomorphismus, der zudem ein Homöomorphismus ist.

Auf der Menge aller invertierbaren reellen  $(n \times n)$ -Matrizen, genannt  $GL(n, \mathbb{R})$ , kann man eine Metrik erklären, indem man die Matrix  $A = (a_{ij})$  als Teilmenge des  $E^{n^2}$  betrachtet. Als *Norm* von  $A$  definiert man

$$|A| = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Die Metrik auf  $GL(n, \mathbb{R})$  ist definiert durch

$$d(A, B) = |A - B|.$$

Es folgt unmittelbar, daß  $GL(n, \mathbb{R})$  mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine topologische Gruppe ist, und da  $PO(n, 1)$  eine Untergruppe von  $GL(n+1, \mathbb{R})$  ist, erhält  $PO(n, 1)$  die Struktur einer topologischen Gruppe.

**Satz 2.1.3** *Die Einschränkungabbildung  $\rho : PO(n, 1) \rightarrow I(H^n)$  ist ein Isomorphismus zwischen topologischen Gruppen.*

**Beweis:** Nach Satz 1.3.2 ist  $\rho$  ein Isomorphismus. Wir werden nun zeigen, daß  $\rho$  ein Homöomorphismus ist. Nehmen wir dazu an, daß  $A_i \rightarrow A$  in  $PO(n, 1)$  konvergiert. Dann konvergiert für jedes  $x$  aus  $H^n$   $A_i x \rightarrow Ax$ . Nach Satz 2.1.1 konvergiert  $A_i \rightarrow A$  in  $I(H^n)$ .

Sei nun umgekehrt  $A_i \rightarrow A$  in  $I(H^n)$ . Dann ist

$$\{e_{n+1}\} \cup \{e_j + \sqrt{2}e_{n+1} | j = 1, \dots, n\}$$

eine Basis von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , die in  $H^n$  enthalten ist. Nach Voraussetzung ist  $A_i e_{n+1} \rightarrow A e_{n+1}$  und

$$A_i e_j + \sqrt{2} A_i e_{n+1} \rightarrow A e_j + \sqrt{2} A e_{n+1},$$

und somit  $A_i e_j \rightarrow A e_j$  für  $j = 1, \dots, n+1$ . Deshalb konvergiert  $A_i \rightarrow A$  in  $PO(n, 1)$ . ♣

**Bemerkung:**  $I(H^n)$  ist nach dem obigen ein metrisierbarer Raum. Auf ähnlichem Wege kann man zeigen, daß auch  $I(E^n)$  metrisierbar ist. Die Abbildung  $\Phi : E^n \times O(n) \rightarrow I(E^n)$ , die durch  $\Phi(a, A) = a + A$  definiert ist, ist nämlich ein Homöomorphismus. Da die Determinantenabbildung stetig ist, kann man außerdem leicht zeigen, daß  $O(n)$  kompakt ist.

Wie üblich bezeichnen wir eine Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raumes  $X$  als *diskret (in  $X$ )*, wenn in der Unterraumtopologie von  $Y$  bezüglich  $X$  jeder Punkt aus  $Y$  eine offene Menge von  $Y$  ist.

In einem metrischen Raum  $X$  ist eine Teilmenge  $A$  genau dann diskret, wenn jede in  $A$  konvergente Folge von einem Index an konstant ist.

Eine diskrete Teilmenge muß nicht abgeschlossen sein. Ein Beispiel ist

$$\{n^{-1} | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}.$$

Man kann aber leicht zeigen:

**Lemma 2.1.4** Wenn  $G$  eine topologische Gruppe mit einer metrisierbaren Topologie ist, so ist jede diskrete Untergruppe von  $G$  abgeschlossen in  $G$ . ♣

Etwas aufwendiger ist der Beweis des nächsten Satzes.

**Satz 2.1.5** Ist  $X$  ein endlich-kompakter metrischer Raum, so ist eine Untergruppe  $\Gamma$  von  $I(X)$  genau dann diskret, wenn gilt

- jede Stabilisatoruntergruppe von  $\Gamma$  ist endlich, und
- jeder  $\Gamma$ -Orbit ist eine abgeschlossene diskrete Teilmenge von  $X$ .

♣

Die folgenden beiden Sätze sind in [Rat94] nur als Übungsaufgaben gestellt, und deshalb sind hier die vollständigen Beweise gegeben.

**Satz 2.1.6** Eine diskrete Untergruppe  $\Gamma$  von Isometrien eines endlich-kompakten metrischen Raumes  $X$  ist abzählbar.

**Beweis:** Sei  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $I(X)$ . Für  $x$  aus  $X$  ist

$$\Gamma x = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\Gamma x \cap C(x, i)).$$

Nach Satz 2.1.5 ist  $\Gamma x \cap C(x, i)$  der Schnitt zweier abgeschlossener Mengen, somit abgeschlossen. Da  $C(x, i)$  kompakt ist, ist  $\Gamma x \cap C(x, i)$  diskret und kompakt, und folglich eine endliche Menge. Demnach ist  $\Gamma x$  abzählbar. Zum Nachweis der Abzählbarkeit von  $\Gamma$  sei bemerkt, daß für  $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$  mit  $\gamma_i(x) = \gamma_j(x)$  gilt:  $\gamma_i^{-1}\gamma_j \in \Gamma_x$ , und daß jede Stabilisatoruntergruppe gemäß Satz 2.1.5 endlich ist. ♣

**Satz 2.1.7** Für  $X = \mathbb{R}^n$  oder  $H^n$  ist eine Untergruppe von  $I(X)$  genau dann diskret, wenn jeder  $\Gamma$ -Orbit eine diskrete Teilmenge von  $X$  ist.

**Beweis:** Im Hinblick auf Satz 2.1.5 ist nur nachzuweisen, daß für eine Untergruppe  $\Gamma$  von  $I(X)$ , für die jeder  $\Gamma$ -Orbit diskret ist, jeder  $\Gamma$ -Orbit abgeschlossen ist und daß jede Stabilisatoruntergruppe endlich ist.

Angenommen,  $\Gamma x$  ist nicht abgeschlossen. Es existieren dann ein  $y$  aus  $X - \Gamma x$  und eine Folge  $\{\gamma_i\}$  aus  $\Gamma$ , so daß

$$\gamma_i(x) \neq \gamma_j(x) \text{ für } i \neq j \text{ und } \lim_{i \rightarrow \infty} d(\gamma_i(x), y) = 0.$$

Es ist folglich

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d(\gamma_i(x), \gamma_{i+1}(x)) = 0, \text{ und somit } \lim_{i \rightarrow \infty} d(x, \gamma_i^{-1}\gamma_{i+1}(x)) = 0.$$

Es ist  $\{\gamma_i^{-1}\gamma_{i+1}(x)\}$  eine Folge von Punkten, die  $x$  nicht enthält, die jedoch gegen  $x$  konvergiert. Dies widerspricht aber der Diskretheit von  $\Gamma x$ , also muß  $\Gamma x$  abgeschlossen sein.

Nun weisen wir nach, daß jede Stabilisatoruntergruppe  $\Gamma_x$  eine diskrete Untergruppe von  $I(X)$  ist. Nach Lemma 2.1.4 ist dann  $\Gamma_x$  abgeschlossen in  $I(X)$ . Für  $X = E^n$  oder  $H^n$  ist die Stabilisatoruntergruppe eines Punktes bezüglich  $I(X)$  kompakt, nämlich konjugiert zu  $O(n)$  (für  $X = H^n$  vgl. Lemma 1.3.4). Somit folgt aus der Diskretheit von  $\Gamma_x$  unmittelbar die Endlichkeit von  $\Gamma_x$ . Die Diskretheit müssen wir nun beweisen.

Es ist bekannt daß eine Abbildung  $\phi : E^n \rightarrow E^n$  genau dann eine Isometrie ist, wenn sie die Form  $\phi(x) = a + Ax$  hat, wobei  $A$  eine orthogonale Matrix und  $a = \phi(0)$  ist. Folglich ist eine

Isometrie von  $E^n$  durch das Bild von  $(n+1)$  Punkten in allgemeiner Lage bestimmt. Eine ähnliche Aussage gilt für  $H^n$ : Jede positive Lorentz-Transformation  $A$  ist durch  $(n+1)$  Punkte des  $H^n$  festgelegt, die als Vektoren des  $\mathbb{R}^{n+1}$  linear unabhängig sind.

Sei nun  $\{\phi_j\}$  eine Folge aus  $\Gamma_x$ , die gegen  $\phi$  aus  $\Gamma_x$  konvergiert. Nach Satz 2.1.1 konvergiert dann für jedes  $y$  aus  $X$  die Folge  $\{\phi_j(y)\}$  gegen  $\phi(y)$ . Da nach Voraussetzung jeder  $\Gamma$ -Orbit diskret ist, existiert ein  $j_0(y)$ , so daß  $\phi_j(y) = \phi(y)$  für alle  $j \geq j_0(y)$ . Nach der obigen Betrachtung gibt es  $(n+1)$  Punkte  $y_1, \dots, y_{n+1}$ , so daß  $\phi$  durch  $\phi(y_1), \dots, \phi(y_{n+1})$  festgelegt ist. Setzt man  $j' = \max_{i=1, \dots, n+1} j_0(y_i)$ , so ist  $\phi_j = \phi$  für alle  $j \geq j'$ . Somit ist jede in  $\Gamma_x$  konvergente Folge von einem Index an konstant. Folglich ist  $\Gamma_x$  diskret, da  $I(X)$  metrisch ist. ♣

## 2.2 Raumformen

Eine Untergruppe  $\Gamma$  der Gruppe der Isometrien von  $X$  operiert in natürlicher Weise auf  $X$ . Der *Orbit-Raum* der Operation von  $\Gamma$  auf  $X$  ist definiert als die Menge der  $\Gamma$ -Orbits

$$X/\Gamma = \{\Gamma x : x \in X\}.$$

Diese Menge erhält die Quotientenraumtopologie. Die Quotientenabbildung bezeichnen wir mit

$$\pi : X \rightarrow X/\Gamma.$$

Für Teilmengen  $A$  und  $B$  von  $X$  ist wie üblich der *Abstand* von  $A$  zu  $B$  definiert als

$$\text{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A \text{ und } y \in B\}.$$

Die *Abstandsfunktion im Orbit-Raum*

$$d_\Gamma : X/\Gamma \times X/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

ist definiert durch

$$d_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = \text{dist}(\Gamma x, \Gamma y).$$

**Satz 2.2.1** *Ist  $X$  ein endlich-kompakter metrischer Raum und  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $I(X)$ , so ist  $d_\Gamma$  eine Metrik auf  $X/\Gamma$ .* ♣

**Satz 2.2.2** *Für einen endlich-kompakten metrischen Raum  $X$  und eine diskrete Untergruppe  $\Gamma$  von  $I(X)$  stimmen auf  $X/\Gamma$  die metrische Topologie, die durch  $d_\Gamma$  gegeben ist, und die Quotientenraumtopologie überein.* ♣

**Satz 2.2.3** *Ist  $X$  ein endlich-kompakter Raum und  $\Gamma$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrie von  $X$ , so ist die Quotientenabbildung  $X \rightarrow X/\Gamma$  eine Überlagerung und eine lokale Isometrie.* ♣

**Definition:** Sei  $X = H^n$  (bzw.  $E^n$ ) und  $\Gamma$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrien von  $X$ . Der Orbitraum  $X/\Gamma$  heißt *hyperbolische Raumform* (bzw. *euklidische Raumform*).

Eine hyperbolische (bzw. euklidische) Raumform bezeichnen wir auch als *hyperbolische* (bzw. *euklidische*) *Mannigfaltigkeit*.

**Satz 2.2.4** *Sei  $X = E^n$  oder  $H^n$ . Zwei Raumformen  $X/\Gamma$  und  $X/\Omega$  sind genau dann isometrisch, wenn  $\Gamma$  und  $\Omega$  in der Gruppe der Isometrien von  $X$  konjugiert sind.* ♣

**Satz 2.2.5** *Sei  $X = E^n$  oder  $H^n$ . Die Gruppe der Isometrien der Raumform  $X/\Gamma$  ist isomorph zu  $N(\Gamma)/\Gamma$ , wobei  $N(\Gamma)$  der Normalisator von  $\Gamma$  in der Gruppe der Isometrie von  $X$  ist.* ♣

## Fundamentaltbereiche

**Definition:** Eine Teilmenge  $R$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt *Fundamentalregion* für eine Gruppe  $\Gamma$  von Isometrien von  $X$ , wenn gilt:

- die Menge  $R$  ist offen in  $X$ ,
- die Elemente von  $\{gR : g \in \Gamma\}$  sind paarweise disjunkt und
- $X = \bigcup_{g \in \Gamma} g\bar{R}$ .

**Definition:** Eine Teilmenge  $D$  eines metrischen Raumes  $X$  heißt *Fundamentaltbereich* für eine Gruppe  $\Gamma$  von Isometrien von  $X$ , wenn  $D$  eine zusammenhängende Fundamentalregion für  $\Gamma$  ist.

**Definition:** Eine Fundamentalregion  $R$  einer Gruppe  $\Gamma$  von Isometrien von  $X = \mathbb{R}^n$  oder  $H^n$  heißt *echt*, wenn  $\partial R = \bar{R} - R$  das Volumen 0 hat.

**Satz 2.2.6** Sei  $X = H^n$  oder  $E^n$ . Sei  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe der Isometrien von  $X$ . Dann besitzt  $\Gamma$  einen konvexen Fundamentaltbereich. ♣

Man kann als konvexen Fundamentaltbereich z.B. einen Dirichlet-Bereich wählen (siehe z.B. Th. 6.5.15 in [Rat94]). Satz 2.2.6 sichert die Existenz echter Fundamentaltregionen.

**Definition:** Sei  $\Gamma$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrien von  $X = \mathbb{R}^n$  oder  $H^n$ . Man ordnet einer Teilmenge  $Y \subset X/\Gamma$  ein Volumen zu, falls  $\pi^{-1}(Y)$  eine in  $X$  meßbare Menge ist:

$$\text{Vol}(Y) = \text{Vol}(P \cap \pi^{-1}(Y)),$$

wobei  $P$  eine echte Fundamentalregion für  $\Gamma$  ist.

Wir müssen nun nachweisen, daß das Volumen wohldefiniert ist. Sei dazu  $Q$  eine weitere echte Fundamentalregion von  $\Gamma$ . Es ist

$$\begin{aligned} \text{Vol}(P \cap \pi^{-1}(Y)) &= \text{Vol}(P \cap \pi^{-1}(Y) \cap \bigcup_{g \in \Gamma} gQ) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \text{Vol}(P \cap \pi^{-1}(Y) \cap gQ) \\ &= \sum_{g \in \Gamma} \text{Vol}(g^{-1}P \cap \pi^{-1}(Y) \cap Q), \text{ da } \pi^{-1}(Y) \text{ } \Gamma\text{-invariant ist} \\ &= \text{Vol}\left(\left(\bigcup_{g \in \Gamma} g^{-1}P\right) \cap \pi^{-1}(Y) \cap Q\right) \\ &= \text{Vol}(\pi^{-1}(Y) \cap Q). \end{aligned}$$

**Lemma 2.2.7** Eine euklidische Mannigfaltigkeit  $E^n/\Gamma$  besitzt genau dann ein endliches Volumen, wenn sie kompakt ist.

**Beweis:** Nach Satz 2.2.6 existiert in  $E^n$  ein konvexer Fundamentaltbereich  $P$  bezüglich  $\Gamma$ . In  $E^n$  besitzt eine konvexe Menge mit nicht-leerem Inneren genau dann ein endliches Volumen, wenn sie beschränkt ist. Somit ist  $\bar{P}$  genau dann kompakt, wenn  $E^n/\Gamma$  ein endliches Volumen besitzt.

Die Überlagerung  $E^n \rightarrow E^n/\Gamma$  bildet  $\bar{P}$  surjektiv nach  $E^n/\Gamma$  ab. Besitzt  $E^n/\Gamma$  ein endliches Volumen, so ist  $E^n/\Gamma$  das stetige Bilde einer kompakten Menge, also ist  $E^n/\Gamma$  kompakt.

Ist  $\bar{P}$  nicht kompakt, so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und eine Folge von (paarweise verschiedenen) Punkten in  $P$ , deren  $\varepsilon$ -Umgebung injektiv nach  $E^n/\Gamma$  abgebildet wird. Dann kann  $E^n/\Gamma$  nicht kompakt sein.

♣

**Bemerkung:** In  $H^n$  gibt es konvexe Mengen mit endlichem Volumen, die nicht beschränkt sind.

### 2.3 Diskrete Untergruppen von $M(B^n)$

**Definition:** Eine diskrete Untergruppe  $\Gamma$  der Möbius-Transformationen  $M(B^n)$  von  $B^n$  heißt *elementar*, wenn es in  $\overline{B^n}$  einen endlichen  $\Gamma$ -Orbit gibt.

Wenn eine elementare Gruppe  $\Gamma$  außer der Identität keine elliptischen Isometrien enthält, so können nur zwei Fälle auftreten:

- $\Gamma$  enthält nur parabolische Isometrien, die alle den selben Fixpunkt besitzen, oder
- $\Gamma$  wird von einer Isometrie hyperbolischer Art erzeugt.

Elementare Gruppen werden in Kapitel 5.5 von [Rat94] dargestellt. Es ist eine wichtige Beobachtung für die folgenden Betrachtungen, daß Raumformen zu elementaren Gruppen unendliches Volumen besitzen. Dazu betrachte man  $\Gamma$  im oberen Halbraum-Modell, wobei durch Konjugation angenommen werden kann, daß  $\infty$  ein Fixpunkt ist. Im parabolischen Fall ist dann  $\Gamma$  die Poincaré-Erweiterung einer auf  $E^{n-1}$  frei operierenden, diskreten Untergruppe von euklidischen Isometrien. Ist  $F$  ein Fundamentalbereich dieser Operation, so ist  $F \times (0, \infty)$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$ .

Im hyperbolischen Fall bringen wir die Fixgerade auf die  $e_n$ -Achse von  $U^n$ .  $\Gamma$  wird erzeugt von einer Isometrie  $\kappa\tilde{A}$ , wobei  $\kappa > 1$  ist, und  $\tilde{A}$  die Poincaré-Erweiterung einer euklidischen Isometrie ist, die den Ursprung festhält. Die Punkte aus  $U^n$ , deren euklidische Abstände vom Ursprung zwischen 1 und  $\kappa$  liegen, bilden einen Fundamentalbereich mit unendlichem Volumen.

#### Die Grenzmenge

Die Darstellung folgt Abschnitt 12.1 von [Rat94].

**Definition:** Ein Punkt  $a$  aus  $S^{n-1}$  ( $=\partial B^n$ ) heißt *Grenzpunkt* der diskreten Untergruppe  $\Gamma$  von  $M(B^n)$ , wenn es einen Punkt  $x$  aus  $B^n$  und eine Folge  $\{\gamma_i\}$  von Elementen aus  $\Gamma$  gibt, so daß  $\{\gamma_i x\}$  in der euklidischen Metrik von  $\overline{B^n}$  gegen  $a$  konvergiert. Die *Grenzmenge* von  $\Gamma$  ist die Menge  $L(\Gamma)$  aller Grenzpunkte von  $\Gamma$ .

**Satz 2.3.1** Sei  $\Gamma$  eine nicht-elementare diskrete Untergruppe von  $M(B^n)$ . Dann enthält jede nicht-leere,  $\Gamma$ -invariante, abgeschlossene Teilmenge von  $S^{n-1}$  die Grenzmenge  $L(\Gamma)$ . ♣

**Satz 2.3.2** Sei  $\Gamma$  eine diskrete Untergruppe von  $M(B^n)$ , die eine Isometrie parabolischer Art enthält. Bezeichne  $F$  die Menge aller Fixpunkte von parabolischen Elementen aus  $\Gamma$ . Dann ist  $L(\Gamma) = \overline{F}$ . ♣

**Satz 2.3.3** Besitzt  $B^n/\Gamma$  ein endliches Volumen, so ist  $L(\Gamma) = S^{n-1}$ . ♣

# Kapitel 3

## Horosphären

### 3.1 Horosphären in $H^n$ und $D^n$

**Definition:** Für  $n \geq 2$  ist eine *Horosphäre im  $B^n$*  der Schnitt von  $B^n$  mit einer euklidischen Sphäre aus  $\overline{B^n}$ , die tangential zu  $\partial B^n$  ist. Der Tangentialpunkt heißt *Basispunkt* der Horosphäre. Eine Horosphäre ist der Rand eines abgeschlossenen  $n$ -Balls, der *Horoball* heißt. Der *Basispunkt* eines Horoballs ist der Basispunkt der berandenden Horosphäre.

Die Horosphären in  $U^n$ ,  $H^n$  und  $D^n$  sind durch die Isometrien zwischen den Modellen definiert.

Eine Horosphäre im  $B^2$  ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Man beachte, daß in der Definition in [Rat94] die berandende Horosphäre nicht zum Horoball gehört. Unsere Definition wird sich in den Beweisen aber als geeigneter erweisen.

#### Horosphären in $H^n$

Eine euklidische Sphäre im  $\mathbb{R}^n$  mit Mittelpunkt  $a$  und Radius  $q$  bezeichnen wir mit  $S_E(a, q)$ . Als Vorbetrachtung für den nächsten Satz stellen wir fest, daß zu einer Horosphäre  $\Sigma$  von  $B^n$  mit Basispunkt  $x$  aus  $\partial B^n$  ein eindeutiges  $t > 0$  existiert, so daß

$$\Sigma = S_E\left(\frac{t}{1+t}x, \frac{1}{1+t}\right) \cap B^n.$$

Zudem läßt sich jeder Vektor  $w \in L^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$  eindeutig als Summe

$$w = rv + re_{n+1}$$

darstellen, wobei der Vektor  $v$  in  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$  liegt und  $r > 0$  ist. Da  $\|w\| = 0$ , ist  $|v| = 1$ , oder anders ausgedrückt:  $v \in \partial B^n$ .

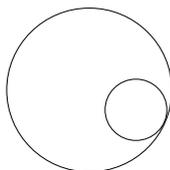


Abbildung 3.1. Eine Horosphäre im  $B^2$

Mit  $\zeta$  ist im folgenden die Isometrie von  $B^n$  nach  $H^n$  aus Abschnitt 1.6 bezeichnet.

**Satz 3.1.1** Für die Horosphäre  $\Sigma = S_E\left(\frac{t}{1+t}x, \frac{1}{1+t}\right) \cap B^n$  gilt

$$\zeta(\Sigma) = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \circ (tx + te_{n+1}) = -1\} \cap H^n.$$

**Definition:** Für  $w$  aus  $L^+$  sei

$$h_w = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \circ w = -1\} \cap H^n.$$

Die Horosphären in  $H^n$  sind nach Satz 3.1.1 genau die Mengen  $h_w$  für  $w \in L^+$ . Wir sagen, daß die Horosphäre  $h_w$  durch  $w$  repräsentiert wird.

**Beweis von Satz 3.1.1:** Sei  $y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in h_{tx+te_{n+1}}$  für ein  $x$  aus  $\partial B^n$  und ein  $t > 0$ . Wir müssen nachweisen, daß

$$d_E\left(\zeta^{-1}(y), \frac{t}{1+t}x\right) = \frac{1}{1+t}.$$

Da  $y \in h_{tx+te_{n+1}}$ , ist

$$y_1^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = -1, \quad y_{n+1} > 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n tx_i y_i - ty_{n+1} = -1. \quad (3.1.1)$$

Somit ist wie behauptet

$$\begin{aligned} \left|\zeta^{-1}(y) - \frac{t}{1+t}x\right|^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{1+y_{n+1}} - \frac{t}{1+t}x_i\right)^2 \\ &= \frac{1}{(1+y_{n+1})^2} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{i=1}^n 2 \frac{y_i t x_i}{(1+y_{n+1})(1+t)} + \frac{t^2}{(1+t)^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ &= \frac{-1+y_{n+1}^2}{(1+y_{n+1})^2} - 2 \frac{-1+ty_{n+1}}{(1+y_{n+1})(1+t)} + \frac{t^2}{(1+t)^2} \quad \text{nach (3.1.1)} \\ &= \frac{(-1+y_{n+1})(1+t) - 2(-1+ty_{n+1})}{(1+y_{n+1})(1+t)} + \frac{t^2}{(1+t)^2} \\ &= \frac{(1+y_{n+1})(1-t)}{(1+y_{n+1})(1+t)} + \frac{t^2}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt  $z$  aus  $B^n$  mit  $d_E(z, \frac{t}{1+t}x) = \frac{1}{1+t}$ . Wir müssen zeigen, daß

$$\zeta(z) \circ (tx + te_{n+1}) = -1.$$

Es ist

$$\begin{aligned} d_E\left(z, \frac{t}{1+t}x\right)^2 &= \left(z - \frac{t}{1+t}x\right) \cdot \left(z - \frac{t}{1+t}x\right) \\ &= z \cdot z - \frac{2t}{1+t}z \cdot x + \frac{t^2}{(1+t)^2}x \cdot x \\ &= |z|^2 - \frac{2t}{1+t}z \cdot x + \frac{t^2}{(1+t)^2}. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung  $d_E(z, \frac{t}{1+t}x) = \frac{1}{1+t}$  ist deshalb

$$2tz \cdot x = (1+t)|z|^2 + t - 1. \quad (3.1.2)$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned} \zeta(z) \circ (tx + te_{n+1}) &= \frac{1}{1-|z|^2} (2z_1, \dots, 2z_n, 1+|z|^2) \circ (tx + te_{n+1}) \\ &= \frac{1}{1-|z|^2} \left( \sum_{i=1}^n 2z_i tx_i - (1+|z|^2)t \right) \\ &= \frac{1}{1-|z|^2} (2tz \cdot x - (1+|z|^2)t) \\ &= \frac{1}{1-|z|^2} ((1+t)|z|^2 + t - 1 - (1+|z|^2)t) \text{ nach (3.1.2)} \\ &= \frac{1}{1-|z|^2} (|z|^2 - 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

♣

**Korollar 3.1.2** Sei  $\Omega$  ein Horoball in  $B^n$ , der von der Horosphäre  $\Sigma$  berandet wird. Die Isometrie  $\zeta$  von  $B^n$  nach  $H^n$  bildet nach Satz 3.1.1  $\Sigma$  auf eine Horosphäre  $h_w$  für ein  $w$  aus  $L^+$  ab. Der Horoball wird dann durch  $\zeta$  auf die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w \geq -1\} \cap H^n$$

abgebildet.

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus Satz 3.1.1 und der Beobachtung, daß ein Horoball durch Horosphären ausgefüllt wird. ♣

**Korollar 3.1.3** Hat die Horosphäre aus  $B^n$  den euklidischen Radius  $r$ , so ist die  $(n+1)$ -te Komponente des zugeordneten Vektors aus  $L^+$  gleich  $\frac{1}{r} - 1$ .

**Beweis:** Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.1.1. ♣

**Lemma 3.1.4** Für  $w$  aus  $L^+$  und eine positive Lorentz-Transformation  $A$  gilt

$$A(h_w) = h_{A(w)}.$$

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus der Definition von  $h_w$ . ♣

**Korollar 3.1.5** In  $H^n$  operieren die Isometrien transitiv auf den Horosphären.

**Beweis:** Die Isometrien von  $H^n$  werden durch positive Lorentz-Transformationen induziert, die nach Korollar 1.2.8 transitiv auf  $L^+$  operieren. Mit Lemma 3.1.4 folgt die Behauptung. ♣

### Horosphären in $D^n$

$\lambda$  sei die in Abschnitt 1.6 beschriebene Isometrie von  $B^n$  nach  $D^n$ .

$$\lambda = \mu^{-1}\zeta : \overline{B}^n \rightarrow \overline{D}^n, \quad \lambda(z) = \frac{2}{1+|z|^2}z.$$

**Satz 3.1.6** Für  $x$  aus  $\partial B^n$  ist

$$\lambda \left( S_E \left( \frac{t}{1+t}x, \frac{1}{1+t} \right) \right) = \{y \in \overline{D}^n : |y|^2 = 1 - t^2(1 - y \cdot x)^2\}.$$

**Beweis:** Sei  $z$  aus  $S_E(\frac{t}{1+t}x, \frac{1}{1+t})$ . Dies ist äquivalent zu

$$|z|^2 = \frac{2tz \cdot x + 1 - t}{1+t}, \quad \text{und somit} \quad (3.1.3)$$

$$1 + |z|^2 = \frac{2(1 + tz \cdot x)}{1+t}. \quad (3.1.4)$$

Es ist

$$\begin{aligned} 1 - \lambda(z) \cdot x &= 1 - \frac{2z \cdot x}{1 + |z|^2} \\ &= 1 - \frac{(1+t)z \cdot x}{1 + tz \cdot x} \quad \text{nach (3.1.4)} \\ &= \frac{1 - z \cdot x}{1 + tz \cdot x}. \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Somit ist wie behauptet

$$\begin{aligned} |\lambda(z)|^2 &= \frac{4|z|^2}{(1+|z|^2)^2} \\ &= \frac{(1+t)(1-t+2tz \cdot x)}{(1+tz \cdot x)^2} \quad \text{nach (3.1.3) und (3.1.4)} \\ &= \frac{(1+tz \cdot x)^2 - t^2(1-z \cdot x)^2}{(1+tz \cdot x)^2} \\ &= 1 - t^2 \left( \frac{1-z \cdot x}{1+tz \cdot x} \right)^2 \\ &= 1 - t^2(1 - \lambda(z) \cdot x)^2 \quad \text{nach (3.1.5)}. \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt  $y$  aus  $\overline{D}^n$  mit  $|y|^2 = 1 - t^2(1 - y \cdot x)^2$ . Es ist

$$\lambda^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - |y|^2}}y.$$

Da  $y \cdot x \leq 1$ , ist  $\sqrt{1 - |y|^2} = t(1 - y \cdot x)$ . Es folgt

$$|\lambda^{-1}(y)|^2 = \frac{1 - t^2(1 - y \cdot x)^2}{(1 + t(1 - y \cdot x))^2} \quad \text{und} \quad (3.1.6)$$

$$\lambda^{-1}(y) \cdot x = \frac{y \cdot x}{1 + t(1 - y \cdot x)}. \quad (3.1.7)$$

Es ist nachzuweisen, daß  $\lambda^{-1}(y) \in S_E\left(\frac{t}{1+t}x, \frac{1}{1+t}\right)$ , d.h.

$$(1+t) |\lambda^{-1}(y)|^2 = 2t\lambda^{-1}(y) \cdot x + 1 - t.$$

Dies ist mit (3.1.6), (3.1.7) und der Substitution von  $y \cdot x$  durch  $\alpha$  äquivalent zu

$$(1+t) \frac{1-t^2(1-\alpha)^2}{(1+t(1-\alpha))^2} = \frac{2t\alpha}{1+t(1-\alpha)} + 1 - t.$$

Dies bestätigt man durch Ausmultiplizieren. ♣

Man kann aus Satz 3.1.6 folgern, daß die Horosphären in  $D^n$  Ellipsen sind. Man betrachte dazu die Situation für  $x = e_1$  und verallgemeinere die Beobachtung für alle  $x$  aus  $\partial D^n$ , da die orthogonalen Abbildungen transitiv auf  $\partial D^n$  operieren.

### 3.2 Horosphären mit euklidischer Struktur

Wir betrachten in  $U^n$  die Horosphäre

$$h_c = \{(x_1, \dots, x_n) \in U^n \mid x_n = c\}, \quad c > 0.$$

$h_c$  ist eine euklidische Hyperebene, die parallel zu  $\partial U^n$  ist. Wir definieren auf  $h_c$  eine Metrik  $d'$  durch

$$d'((x_1, \dots, x_{n-1}, c), (y_1, \dots, y_{n-1}, c)) = d_E((x_1, \dots, x_{n-1}), (y_1, \dots, y_{n-1})).$$

Bezüglich  $d'$  hat  $h_c$  eine euklidische Struktur. Die Metrik  $d'$  ist *nicht* die von  $U^n$  induzierte Metrik. Ist  $c = 1$ , so ist  $d'$  die geodätische Metrik auf  $h_1$ , denn nach Satz 1.7.4 ist das Bogenlängeenelement von  $U^n$  eingeschränkt auf  $h_1$  gleich  $|d(x_1, \dots, x_{n-1})|$ . Der Abstand  $d'(x, y)$  zweier Punkte  $x$  und  $y$  aus  $h_1$  ist somit die Länge der hyperbolisch-kürzesten Kurve, die  $x$  und  $y$  verbindet und vollständig in  $h_1$  verläuft (s. Abb. 3.2).

Mit Hilfe von Korollar 3.1.5 wollen wir allen Horosphären in  $U^n$  eine euklidische Metrik geben. Ist  $h$  eine Horosphäre in  $U^n$ , so wähle eine Isometrie  $\gamma$  von  $U^n$ , die  $h$  in  $h_1$  überführt. Definiere auf  $h$  die euklidische Metrik  $d'$  durch

$$d'(x, y) = d'(\gamma(x), \gamma(y)) \text{ für } x \text{ und } y \text{ aus } h.$$

Wir müssen uns überlegen, daß  $d'$  auf  $h$  wohldefiniert ist. Ist  $\eta$  eine weitere Isometrie, die  $h$  in  $h_1$  überführt, so muß gelten

$$d'(\gamma(x), \gamma(y)) = d'(\eta(x), \eta(y)) \text{ für alle } x \text{ und } y \text{ aus } h,$$

oder anders ausgedrückt

$$d'(u, z) = d'(\eta^{-1}\gamma(u), \eta^{-1}\gamma(z)) \text{ für alle } u \text{ und } z \text{ aus } h_1.$$

Die Isometrie  $\eta^{-1}\gamma$  läßt  $h_1$  invariant. Sie ist somit die Poincaré-Erweiterung einer euklidischen Isometrie von  $\partial U^n$ . Folglich induziert  $\eta^{-1}\gamma$  auf  $h_1$  eine Isometrie bezüglich  $d'$ . Dies war zu zeigen.

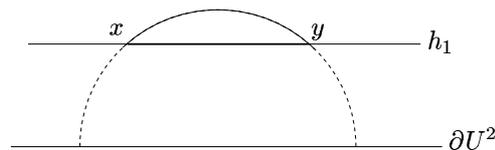


Abbildung 3.2. Die euklidische Metrik auf einer Horosphäre.

**Lemma 3.2.1** Sind  $h$  und  $\tilde{h}$  Horosphären in  $U^n$ , und ist  $\gamma$  eine Isometrie von  $U^n$ , die  $h$  in  $\tilde{h}$  überführt, so induziert  $\gamma$  eine Isometrie bezüglich  $d'$  von  $h$  nach  $\tilde{h}$ .

**Beweis:** Sei  $\eta$  eine Isometrie von  $\tilde{h}$  nach  $h_1$ .  $d'$  ist auf  $h$  und  $\tilde{h}$  so definiert, daß  $\eta\gamma$  eine Isometrie von  $h$  nach  $h_1$  induziert, und  $\eta$  eine Isometrie von  $\tilde{h}$  nach  $h_1$  induziert. Somit induziert  $\gamma = \eta^{-1}(\eta\gamma)$  eine Isometrie von  $h$  nach  $\tilde{h}$ . ♣

### 3.3 Vorzeichenbehaftete Abstände zu Horosphären

Sei  $\Sigma$  eine Horosphäre im  $B^n$ , die Rand des Horoballs  $\Omega$  ist, und sei  $p$  ein Punkt aus  $B^n$ . Man definiert den *vorzeichenbehafteten Abstand* von  $p$  zu  $\Sigma$  als

$$d(p, \Sigma) = \varepsilon \inf_{x \in \Sigma} d_B(p, x).$$

Dabei setzt man  $\varepsilon = 1$ , falls  $p$  nicht in  $\Omega$  liegt, bzw.  $\varepsilon = -1$ , falls  $p$  in  $\Omega$  liegt.

Ist  $W$  eine nicht-leere Teilmenge von  $B^n$ , so ist der *vorzeichenbehaftete Abstand*  $d(W, \Sigma)$  von  $W$  zu einer Horosphäre  $\Sigma$  definiert als das Infimum der vorzeichenbehafteten Abstände der Punkte aus  $W$  zu  $\Sigma$ .

Für Horosphären  $\Sigma$  und  $\Sigma'$  mit verschiedenen Basispunkten ist  $d(\Sigma, \Sigma') = d(\Sigma', \Sigma)$ . Wir können dann von einem vorzeichenbehafteten Abstand zwischen den Horosphären sprechen (siehe Abb. 3.3).

Haben jedoch die beiden Horosphären den gleichen Basispunkt, so ist  $d(\Sigma, \Sigma') = -d(\Sigma', \Sigma)$ . Wir können in diesem Fall nur von einem minimalen Abstand bezüglich der Metrik von  $B^n$  sprechen. Ist dann  $\Sigma$  ungleich  $\Sigma'$ , so ist der Abstand größer als 0. Wir sagen, daß  $\Sigma'$  *um den Abstand  $d$  näher am Basispunkt von  $\Sigma$  liegt*, wenn beide Horosphären den gleichen Basispunkt besitzen, der Abstand zwischen beiden gleich  $d$  ist, und  $\Sigma'$  in dem von  $\Sigma$  berandeten Horoball enthalten ist.

**Vorbemerkung:** Im folgenden werden wir im  $U^n$  solche Horosphären betrachten, die dadurch gekennzeichnet sind, daß sie die Menge aller Punkte sind, deren  $n$ -te Koordinate jeweils eine Konstant ist. Diese Horosphären sind also euklidische Hyperebenen parallel zu  $\partial U^n$ . Eine solche Horosphäre  $h$ , die durch die  $n$ -te Koordinate  $t$  bestimmt ist, wird durch die Isometrie  $\eta$  von  $U^n$  nach  $B^n$  auf die Horosphäre im  $B^n$  mit Basispunkt  $e_n$  und euklidischem Radius  $\frac{1}{1+t}$  abgebildet. (Dies rechnet man leicht nach). Nach Satz 3.1.1 entspricht  $h$  somit dem lichtartigen Vektor  $(te_n + te_{n+1})$ .

Sind  $v$  und  $w$  Vektoren aus  $L^+$ , so besitzen die Horosphären  $h_v$  und  $h_w$  in  $U^n$  betrachtet genau dann den gleichen Basispunkt, wenn  $v$  und  $w$  linear abhängig sind.

**Lemma 3.3.1** In  $U^n$  ist der vorzeichenbehaftete Abstand des Punktes  $(r_1, \dots, r_n)$  von der Horosphäre, die durch  $\{(x_1, \dots, x_n) \in U^n \mid x_n = t\}$  gegeben ist, gleich  $\ln(t/r_n)$ .

**Beweis:** Dies ist eine einfache Folgerung aus Satz 1.7.1 und Korollar 1.7.2. Die euklidisch-orthogonale Projektion von  $(r_1, \dots, r_n)$  auf die Horosphäre ergibt den kürzesten Abstand. ♣

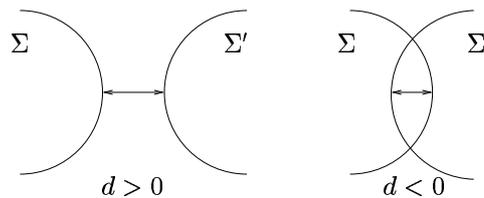


Abbildung 3.3. Der vorzeichenbehaftete Abstand zwischen Horosphären

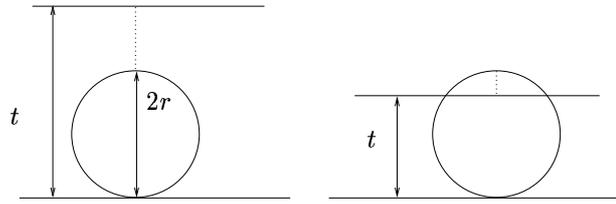


Abbildung 3.4.

**Lemma 3.3.2** Für  $x$  aus  $H^n$  und  $v$  aus  $L^+$  gilt für den vorzeichenbehafteten Abstand  $d$  zwischen  $x$  und der Horosphäre  $h_v$

$$x \circ v = -e^d.$$

**Beweis:** Die Aussage des Satzes ist invariant bezüglich Lorentz-Transformationen in  $\mathbb{R}^{n+1}$  bzw. Isometrien in  $U^n$ . Somit können wir als Basispunkt von  $h_v$  in  $U^n$  den Punkt  $\infty$  wählen, d.h.  $v = t'e_n + t'e_{n+1}$  für ein  $t' > 0$ . Den Punkt  $x$  bringen wir durch die Poincaré-Erweiterung einer Translation des  $\mathbb{R}^{n-1}$  auf die  $e_n$ -Achse und durch eine Isometrie hyperbolischer Art auf den Punkt  $e_n$ . Dabei ging  $v$  über in  $te_n + te_{n+1}$  für ein  $t > 0$ . Nach Lemma 3.3.1 hat der Punkt  $e_n$  von der Horosphäre  $\{(x_1, \dots, x_n) \in U^n \mid x_n = t\}$  den vorzeichenbehafteten Abstand  $d = \ln t$ . Da der Punkt  $e_n$  in  $U^n$  dem Punkt  $e_{n+1}$  in  $H^n$  entspricht, folgt

$$\begin{aligned} x \circ v &= e_{n+1} \circ (te_n + te_{n+1}) \\ &= -t \\ &= -e^d. \end{aligned}$$

♣

**Lemma 3.3.3** Für  $v$  aus  $L^+$  und  $\alpha > 0$  ist der Abstand zwischen den Horosphären  $h_v$  und  $h_{\alpha v}$  gleich  $|\ln \alpha|$ .

**Beweis:** Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß  $v = e_n + e_{n+1}$  ist (vergl. Korollar 3.1.5). Im oberen Halbraum-Modell werden die Horosphären  $h_v$  (bzw.  $h_{\alpha v}$ ) durch euklidische Hyperebenen dargestellt, deren Basispunkt  $\infty$  ist. Sie sind dadurch bestimmt, daß ihre Punkte den Wert 1 (bzw.  $\alpha$ ) als  $n$ -te Koordinate besitzen. Aus Lemma 3.3.1 folgt unmittelbar, daß der minimale Abstand zwischen den beiden Horosphären gleich  $|\ln \alpha|$  ist. ♣

**Lemma 3.3.4** Für linear unabhängige Vektoren  $v$  und  $w$  aus  $L^+$  gilt für den vorzeichenbehafteten Abstand zwischen den Horosphären  $h_v$  und  $h_w$

$$d(h_v, h_w) = \ln \left( -\frac{1}{2} v \circ w \right).$$

**Beweis:** Wir benutzen das obere Halbraum-Modell. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß  $h_v$  in  $U^n$  den Basispunkt  $\infty$  besitzt, und  $h_w$  in  $U^n$  den Ursprung als Basispunkt besitzt, d.h.

$$v = te_n + te_{n+1} \text{ und } w = -\frac{1}{2r}e_n + \frac{1}{2r}e_{n+1}$$

für gewisse  $t$  und  $r$  größer Null.

Aus Abbildung 3.4 ist ersichtlich, an welchen Punkten der minimale Abstand zwischen den Horosphären angenommen wird. Mit Lemma 3.3.1 folgt, daß  $d(h_v, h_w) = \ln(t/2r)$  ist.

Da  $v \circ w = -t/r$  ist, folgt wie behauptet  $d(h_v, h_w) = \ln(-(v \circ w)/2)$ . ♣

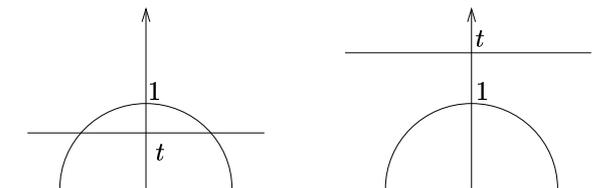


Abbildung 3.5.

**Korollar 3.3.5** Die zu linear unabhängigen Vektoren  $v$  und  $w$  aus  $L^+$  gehörenden Horosphären  $h_v$  und  $h_w$  sind genau dann disjunkt, wenn  $v \circ w < -2$  ist. Insbesondere gilt für disjunkte Horosphären  $h_v$  und  $h_w$ , daß der euklidische Abstand zwischen  $v$  und  $w$  größer als 2 ist.

**Beweis:** Genau dann ist  $\ln(-\frac{1}{2}v \circ w) > 0$ , wenn  $v \circ w < -2$  ist. Es folgt

$$\begin{aligned} d_E^2(v, w) &= (v - w) \cdot (v - w) \\ &\geq (v - w) \circ (v - w) \\ &= -2v \circ w. \end{aligned}$$

Somit ist gemäß Lemma 3.3.4 für disjunkte Horosphären  $d_E(v, w) > 2$ . ♣

**Lemma 3.3.6** Sei  $T$  eine Hyperebene in  $H^n$ . Es gibt einen eindeutigen  $n$ -dimensionalen zeitartigen Untervektorraum  $W$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so daß  $T = W \cap H^n$ . Ein Vektor  $m$  aus  $W^L$  der Norm 1 ist bis auf den Faktor  $-1$  bestimmt. Sei  $v$  ein Vektor aus  $L^+$ , der nicht in  $W$  liegt. Dann ist der Normalenvektor  $m$  eindeutig dadurch bestimmt, daß er in  $\mathbb{R}^{n+1}$  bezüglich  $W$  in einem anderen Halbraum als  $v$  liegen soll.

Unter diesen Voraussetzungen gilt für den vorzeichenbehafteten Abstand  $d$  zwischen der Horosphäre  $h_v$  und der Hyperebene  $T$

$$m \circ v = -e^d.$$

**Beweis:** Wir benutzen das obere Halbraum-Modell  $U^n$ . Die Voraussetzung, daß  $v$  nicht in  $W$  liegt, ist äquivalent dazu, daß der Basispunkt der Horosphäre kein idealer Punkt der Hyperebene ist. Wir bringen den Basispunkt der Horosphäre auf  $\infty$  und gleichzeitig die Hyperebene auf die Hemisphäre vom Radius 1 um den Ursprung. Die Horosphäre ist bestimmt durch  $x_n \equiv t$  für ein  $t > 0$ . Aus Abbildung 3.5 und Lemma 3.3.1 geht hervor, daß die Horosphäre und die Hyperebene den vorzeichenbehafteten Abstand  $d = \ln t$  besitzen. Wir können also ohne Einschränkung  $v = te_n + te_{n+1}$  und  $m = \varepsilon e_n$  annehmen, wobei  $\varepsilon^2 = 1$  ist. Da aber  $m$  und  $v$  in verschiedenen Halbräumen liegen sollen, und  $m \circ m > 0$  ist, muß

$$\varepsilon e_n \circ (te_n + te_{n+1}) < 0$$

sein, d. h.  $\varepsilon = -1$  sein. Es ist somit wie behauptet

$$\begin{aligned} m \circ v &= -t \\ &= -e^d. \end{aligned}$$

♣

**Definition:** In  $H^n$  seien gegeben: eine Hyperebene  $E$ , ein von  $E$  berandeter Halbraum  $E'$ , eine Horosphäre  $h$ , deren Basispunkt ein idealer Eckpunkt von  $E$  ist und ein Punkt  $u$  aus  $h$  (s. Abb. 3.6). Bezeichne  $d$  die Länge des kürzesten Weges von  $u$  nach  $E \cap h$  in der euklidischen Metrik von  $h$ . Dann ist der vorzeichenbehaftete Abstand von  $u$  zu  $E$  innerhalb  $h$  bezüglich  $E'$  definiert als  $\varepsilon d$ ; dabei ist  $\varepsilon = -1$ , falls  $u$  in  $E'$  liegt, andernfalls ist  $\varepsilon = 1$ .

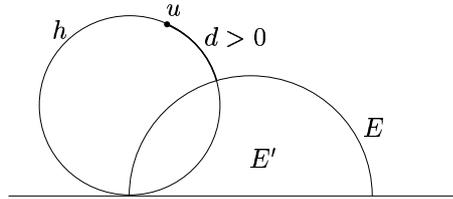


Abbildung 3.6.

**Lemma 3.3.7** In  $H^n$  seien gegeben: eine Hyperebene  $E$ , ein von  $E$  berandeter Halbraum  $E'$ , eine Horosphäre  $h$ , deren Basispunkt ein idealer Eckpunkt von  $E$  ist und ein Punkt  $u$  aus  $h$ . Sei  $T$  der  $n$ -dimensionale zeitartige Untervektorraum des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so daß  $E = T \cap H^n$ . Sei  $m$  der Einheitsnormalenvektor zu  $T$ , der nicht im gleichen Halbraum wie  $E'$  liegt. Dann gilt für den vorzeichenbehaftete Abstand  $d$  von  $u$  zu  $E$  innerhalb  $h$  bezüglich  $E'$

$$d = m \circ u.$$

**Beweis:** Wir benutzen das obere Halbraum-Modell  $U^n$ . Zuerst bringen wir den Basispunkt der Horosphäre nach  $\infty$ . Die Hyperebene besitzt somit  $\infty$  als idealen Punkt, ist also von der Gestalt  $E_1 \times (0, \infty)$  für einen affinen  $(n-2)$ -dimensionalen Teilraum  $E_1$  des  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Durch die Poincaré-Erweiterung einer Isometrie des  $\mathbb{R}^{n-1}$  kann man  $E_1 \times (0, \infty)$  auf  $E_2 \times (0, \infty)$  bringen, wobei  $E_2$  durch  $x_1 \equiv 0$  beschrieben ist. Durch eine geeignete Isometrie ( $x \mapsto \kappa x$ ),  $\kappa > 0$ , die  $E_2 \times (0, \infty)$  in sich überführt, kann die Horosphäre auf die Menge  $\{x \in U^n | x_n = 1\}$  gebracht werden. Der Punkt  $u$  wurde inzwischen auf  $(q_1, \dots, q_{n-1}, 1)$  gebracht. Betrachtet man nun die Poincaré-Erweiterung der Translation

$$\tau(x_1, \dots, x_{n-1}) = (x_1, x_2 - q_2, \dots, x_{n-1} - q_{n-1}),$$

so kann man ohne Einschränkung annehmen, daß die Hyperebene  $E$  gleich  $\{x \in U^n | x_1 = 0\}$  ist, die Horosphäre  $h = \{x \in U^n | x_n = 1\}$  ist, und der vorgegebene Punkt  $u$  gleich  $(q, 0, \dots, 0, 1)$  für ein  $q \in \mathbb{R}$  ist. Die raumartigen Einheitsnormalenvektoren zu  $T$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind  $e_1$  und  $-e_1$ . In  $H^n$  ist  $u$  dargestellt als

$$(q, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}q^2, \frac{1}{2}q^2 + 1).$$

Durch Spiegelung an  $E$  können wir annehmen, daß

$$E' = \{(x_1, \dots, x_n) \in U^n | x_1 \geq 0\}.$$

Somit ist der nach außen weisende Einheitsnormalenvektor gleich  $-e_1$ .

Da nach Satz 1.7.4 das Bogenlängenelement eingeschränkt auf die Horosphäre  $h$  gleich  $|dx|$  ist, ist der kürzeste Weg von  $u$  nach  $E$  innerhalb von  $h$  die euklidische Strecke von  $u$  nach  $(0, \dots, 0, 1)$ . Sie hat die Länge  $|q|$  (vergl. Abschnitt 3.2).

Es ist

$$\begin{aligned} m \circ u &= -e_1 \circ (q, 0, \dots, 0, \frac{1}{2}q^2, \frac{1}{2}q^2 + 1) \\ &= -q. \end{aligned}$$

Ist  $q > 0$ , so liegt  $u$  in  $E'$ . Wegen  $-q < 0$  ist  $m \circ u$  dann der vorzeichenbehaftete Abstand  $d$ .

Ist  $q < 0$ , so liegt  $u$  nicht in  $E'$ . Wegen  $m \circ u = -q$ , ist auch in diesem Fall  $m \circ u = d$ .

Ist  $q = 0$ , so liegt  $u$  in  $E$ . Dann ist der vorzeichenbehaftete Abstand gleich 0, ebenso wie  $m \circ u$ .

♣

Zu Beginn von Abschnitt 3.3 haben wir die Bezeichnung eingeführt, daß eine Horosphäre  $\Sigma'$  um den Abstand  $d$  näher am Basispunkt einer Horosphäre  $\Sigma$  liegt. Wir sagen in dieser Situation ebenfalls, daß der von  $\Sigma'$  berandete Horoball um den Abstand  $d$  näher am Basispunkt des von  $\Sigma$  berandeten Horoballs liegt.

**Satz 3.3.8** *Sei  $\Omega$  die Poincaré-Erweiterung einer diskreten Gruppe  $\Delta$  von euklidischen Isometrien. Sei  $b$  ein Horoball mit Basispunkt  $\infty$ , und der Horoball  $b'$  liege bezüglich  $b$  um den Abstand  $d$  näher am Basispunkt.*

*Dann hat  $b/\Omega$  genau dann ein endliches Volumen in  $U^n/\Omega$ , wenn  $E^{n-1}/\Delta$  ein endliches Volumen besitzt. Besitzt  $b/\Omega$  ein endliches Volumen in  $U^n/\Omega$ , so ist*

$$\text{Vol}(b'/\Omega) = e^{d(1-n)} \text{Vol}(b/\Omega).$$

**Beweis:** Sei  $K$  eine echte Fundamentalregion von  $\Delta$  in  $E^{n-1}$  (vergl. Satz 2.2.6). Dann ist  $K \times (0, \infty)$  eine echte Fundamentalregion von  $\Omega$  in  $U^n$ . Für ein  $c > 0$  ist

$$b = \{(x_1, \dots, x_n) \in U^n \mid x_n \geq c\}.$$

Nach Satz 1.7.5 ist

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{U^n}(K \times [c, \infty)) &= \int_{K \times [c, \infty)} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{(x_n)^n} \\ &= \int_c^\infty \frac{1}{(x_n)^n} \left( \int_K dx_1 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n \\ &= \int_K dx_1 \cdots dx_{n-1} \int_c^\infty \frac{1}{(x_n)^n} dx_n \\ &= \frac{c^{1-n}}{n-1} \text{Vol}_{E^{n-1}}(K). \end{aligned}$$

Somit besitzt  $b/\Omega$  genau dann ein endliches Volumen in  $U^n/\Omega$ , wenn  $E^{n-1}/\Delta$  ein endliches Volumen besitzt.

Der Horoball  $b'$  ist gleich der Menge  $\{x \in U^n \mid x_n \geq ce^d\}$ . Nach der obigen Rechnung ist  $\text{Vol}(b'/\Omega) = \frac{(ce^d)^{1-n}}{n-1} \text{Vol}_{E^{n-1}}(K)$ . Der Quotient  $\text{Vol}(b'/\Omega)/\text{Vol}(b/\Omega)$  ist wie behauptet  $e^{d(1-n)}$ . ♣

# Kapitel 4

## Die euklidische Zerlegung

### 4.1 Einleitung

In diesem Kapitel werden wir zu einer nicht-kompakten hyperbolischen  $n$ -Mannigfaltigkeit  $D^n/\Gamma$  mit endlichem Volumen eine Zerlegung von  $D^n$  konstruieren, auf der  $\Gamma$  frei operiert. Diese Zerlegung hängt von der Wahl uniformer Horobälle ab, was man auch durch die Wahl von Volumina für die Spitzen ausdrücken kann. Sind alle Volumina gleich gewählt, so wird die Zerlegung eindeutig bestimmt sein. Sie heißt dann kanonisch.

Man beachte aber, daß die Isometrien in  $\Gamma$  keine euklidischen Isometrien sind, da kein Element aus  $\Gamma$  den Ursprung festhält. Deshalb erhält  $D^n/\Gamma$  nicht die Struktur einer euklidischen Mannigfaltigkeit.

Es gibt im allgemeinen sehr viele Möglichkeiten,  $D^n/\Gamma$  durch das Verkleben idealer Polyeder darzustellen. Den Begriff „euklidische Zerlegung“ wollen wir aber nur für solche Zerlegungen verwenden, die durch die in diesem Kapitel beschriebene Konstruktion entstanden sind.

### 4.2 Uniforme Horobälle

Wir betrachten ab jetzt nur den hyperbolischen Raum mit einer Dimension größergleich zwei.  $\Gamma$  sei eine diskrete, frei operierende Untergruppe von  $M(B^n)$ . Durch die Isometrien  $\mu : D^n \rightarrow H^n$ ,  $\zeta : B^n \rightarrow H^n$ ,  $\eta : U^n \rightarrow B^n$  aus Kapitel 1 fassen wir  $\Gamma$  gegebenenfalls als Untergruppe der Isometrien von  $H^n$ ,  $D^n$  oder  $U^n$  auf.

Mit  $F$  bezeichnen wir die Menge aller Fixpunkte von parabolischen Elementen aus  $\Gamma$ . Ist  $x$  parabolischer Fixpunkt von  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , so ist für  $\beta$  aus  $\Gamma$  die Fixpunktmenge von  $\beta\gamma\beta^{-1}$  gleich  $\{\beta x\}$ . Somit operiert  $\Gamma$  auf  $F$ . Ist  $x$  parabolischer Fixpunkt einer Isometrie von  $\Gamma$ , so ist der Stabilisator  $\Gamma_x$  eine elementare Gruppe. Man beachte dabei, daß die Untergruppe einer diskreten Gruppe ebenfalls diskret ist. Gemäß den Betrachtungen in Abschnitt 2.3 enthält  $\Gamma_x$  nur parabolische Isometrien, die alle  $x$  als Fixpunkt besitzen. Diese Beobachtung wird an sehr vielen Stellen benutzt werden. Man beachte, daß  $\Gamma_x$  Horosphären mit Basispunkt  $x$  invariant läßt.

Wir ordnen nun einem Repräsentanten  $x$  eines  $\Gamma$ -Orbits von  $F$  einen Horoball  $b_x$  zu. Ist  $y$  ein anderes Element dieses Orbits, und ist  $\beta x = y$  für ein  $\beta$  aus  $\Gamma$ , so ordnen wir  $y$  den Horoball  $b_y$  zu, der als  $\beta b_x$  definiert ist. Die Frage nach der Wohldefiniertheit wird dadurch beantwortet, daß für eine zweite Isometrie  $\xi$  aus  $\Gamma$  mit  $\xi x = y$ , die Isometrie  $\xi\beta^{-1}$  den parabolischen Fixpunkt  $y$  festhält. Folglich läßt  $\xi\beta^{-1}$  jede Horosphäre mit Basispunkt  $y$  invariant. Insbesondere ist  $\xi\beta^{-1}(\beta b_x) = \beta b_x$ , also  $\xi b_x = \beta b_x$ .

Man erhält auf diese Weise eine Menge  $S$  von Horobällen,

$$S = \{b_x | x \text{ ist Fixpunkt einer parabolischen Isometrie } \gamma \in \Gamma\}.$$

Diese Menge ist  $\Gamma$ -invariant. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn diese Horobälle paarweise disjunkt sind. Wir nennen  $S$  in diesem Fall eine Menge von *uniformen Horobällen*. In [EP88] wird nur verlangt, daß uniforme Horobälle zu einem  $\Gamma$ -Orbit disjunkt sind, d.h. für einen Horoball  $b$  aus  $S$  und  $\gamma$  aus  $\Gamma$  mit  $\gamma b \cap b \neq \emptyset$  folgt  $\gamma b = b$ . Unsere Definition wird jedoch im weiteren Fortgang als natürlicher erscheinen, zumal im Beweis von Lemma 3.2 aus [EP88] uniforme Horobälle entsprechend unserer Definition benutzt werden.

Wir zeigen nun, daß unter gewissen Voraussetzungen uniforme Horobälle für  $\Gamma$  existieren.

### Die Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$

Ist dem Leser der Begriff des Margulisbereichs bekannt, wie er etwa in Kapitel 12.5 von [Rat94] dargestellt wird, so kann er mit der folgenden Argumentation die Existenz uniformer Horobälle in den Dimensionen 2 und 3 leicht einsehen. Wir machen dazu die folgenden Betrachtungen im oberen Halbraum-Modell und setzen hier nur voraus, daß  $\Gamma$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrien von  $U^n$  ist, die parabolische Isometrien enthält. Wir setzen ein endliches Volumen von  $U^n/\Gamma$  nicht voraus.

Ist  $x$  ein parabolischer Fixpunkt, so enthält  $\Gamma_x$ , der Stabilisator von  $x$ , ein Element, das konjugiert zur Poincaré-Erweiterung einer Translation von  $E^{n-1}$  ist. Um dies einzusehen, bringen wir  $x$  durch eine Isometrie  $\eta$  nach  $\infty$ . Da  $\eta$  im allgemeinen nicht in  $\Gamma$  liegt, bezeichnen wir mit  $\tilde{\Gamma}$  die Gruppe  $\eta\Gamma\eta^{-1}$ . Der Stabilisator  $\tilde{\Gamma}_\infty$  ist dann die Poincaré-Erweiterung einer diskreten, frei operierenden Untergruppe der Isometrien von  $E^{n-1}$ . Die entscheidende Beobachtung ist, daß für  $n = 2$  nur Translationen und  $n = 3$  nur Translationen und Gleitspiegelungen auftreten können. Somit enthält  $\tilde{\Gamma}_\infty$  die Poincaré-Erweiterung einer Translation von  $E^{n-1}$ . Der Margulisbereich  $V(\tilde{\Gamma}_\infty, r)$  enthält dann einen Horoball  $b'$ . Da  $V(\tilde{\Gamma}_\infty, r) = \eta V(\Gamma_x, r)$  ist, liegt der Horoball  $b = \mu^{-1}b'$  in  $V(\Gamma_x, r)$ .

Ist  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , so ist  $V(\Gamma_{\gamma x}, r) = \gamma V(\Gamma_x, r)$ , und folglich liegt der Horoball  $\gamma b$  im Margulisbereich  $\gamma V(\Gamma_x, r)$ . Da die Margulisbereiche zu verschiedenen parabolischen Fixpunkten disjunkt sind, erhält man eine Menge von uniformen Horosphären.

### Der allgemeine Fall $n \geq 2$

Wir müssen nun auf einen Satz verweisen, der zuerst in [Thu79] auftrat. Ein Beweis dieses Satzes ist in aller Ausführlichkeit in [Rat94] dargestellt.

**Satz 4.2.1** *Besitzt die nicht-kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit  $B^n/\Gamma$  ein endliches Volumen, so gibt es nur endlich viele  $\Gamma$ -Orbits  $[x_1], \dots, [x_r]$  parabolischer Fixpunkte. Man kann Horobälle  $b_1, \dots, b_r$  so wählen, daß ihre  $\Gamma$ -Translate eine Menge von uniformen Horobällen bilden. Zusätzlich ist*

$$(B^n - \bigcup_{i=1}^r \Gamma b_i) / \Gamma$$

*eine kompakte, zusammenhängende Menge.*

Aus Satz 4.2.1 folgt, daß  $\Gamma$  co-kompakt ist. Es scheint eine schwierig zu beantwortende Frage zu sein, ob auch  $\overline{B}^n$  ohne die offenen uniformen Horobälle und ihre Basispunkte ein einfach zusammenhängender Raum ist. Man beachte, daß wir unter den schwächeren Voraussetzungen in der Vorbetrachtung für die Dimensionen zwei und drei nicht gezeigt haben, daß es nur endlich viele  $\Gamma$ -Orbits parabolischer Fixpunkte gibt.

Eine Zusammenhangskomponente von  $(\bigcup_{i=1}^r \Gamma b_i)/\Gamma$  wird *Spitze* genannt. Ihr Urbild in  $B^n$  ist ein  $\Gamma$ -Orbit der uniformen Horobälle. Die berandenden Horosphären der uniformen Horobälle werden durch die Quotientenabbildung in die Menge der Spitzen abgebildet. Eine Zusammenhangskomponente wird *Spitzen-Schnitt* genannt. Ein Spitzen-Schnitt ist eine Randkomponente von  $(B^n - \bigcup_{i=1}^r \Gamma \overset{\circ}{b}_i)/\Gamma$ .

Sei  $x$  ein parabolischer Fixpunkt und  $b$  ein zugehöriger uniformer Horoball. Bezeichne  $\Gamma_x$  den Stabilisator von  $x$  in  $\Gamma$ . Betrachten wir  $b$  in  $U^n$  mit Basispunkt  $\infty$ . Die elementare Gruppe  $\Gamma_x$  induziert auf  $\partial U^n (=E^{n-1})$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrie von  $E^{n-1}$ . Somit ist die Spitze  $b/\Gamma_x$  homöomorph zu  $A \times [c, \infty)$ , wobei  $A$  eine euklidische  $(n-1)$ -Mannigfaltigkeit ist. Der Spitzen-Schnitt ist homöomorph zu  $A$ .

Die Teilmenge  $b/\Gamma_x$  von  $B^n/\Gamma$  besitzt ein endliches Volumen. Aus dem Beweis von Satz 3.3.8 folgt, daß  $A$  ein endliches euklidisches Volumen besitzt. Zudem sehen wir, daß der uniforme Horoball  $b$  zum Basispunkt  $x$  durch sein Volumen in  $B^n/\Gamma$  eindeutig bestimmt ist. Es gibt viele Möglichkeiten, einen uniformen Horoball zu wählen, z.B. indem man einen uniformen Horoball (und seine  $\Gamma$ -Translate) schrumpft; jedoch besitzen verschiedene Wahlen für  $b$  verschiedene Volumina in  $B^n/\Gamma$ . Die uniformen Horobälle sind somit durch die Zuordnung von Volumina zu den Spitzen eindeutig bestimmt. Dabei gibt es natürlich nicht zu jeder beliebigen Zuordnung entsprechende uniforme Horobälle.

### 4.3 Konstruktion und Beschreibung von $C$

Sei  $\Gamma$  eine diskrete, frei operierende Untergruppe von  $M(B^n)$ ,  $n \geq 2$ , so daß  $B^n/\Gamma$  endliches Volumen besitzt und nicht kompakt ist. Sei  $S$  eine Menge uniformer Horobälle zur Menge  $F$  der parabolischen Fixpunkte von Elementen aus  $\Gamma$ . Die berandenden Horosphären können gemäß Satz 3.1.1 durch Punkte in  $L^+$  repräsentiert werden. Diese Repräsentantenmenge nennen wir  $B$ .

Sei  $h$  eine berandende Horosphäre eines Horoballs aus  $S$ . Der Basispunkt von  $h$  ist der parabolische Fixpunkt  $x$  einer Isometrie  $\gamma$  aus  $\Gamma$ .  $h$  werde in  $L^+$  durch  $v$  repräsentiert. Indem wir  $\gamma$  durch  $\zeta\gamma\zeta^{-1}$  als Isometrie von  $H^n$  auffassen (s. Abschnitt 1.6), können wir  $\Gamma$  als Untergruppe von  $I(H^n)$  auffassen. Es ist  $\langle v \rangle$  der eindeutige lichtartige Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , der durch die parabolische Isometrie  $\zeta\gamma\zeta^{-1}$  festgehalten wird.

Mit  $C$  bezeichnen wir die abgeschlossene euklidisch-konvexe Hülle von  $B$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , d.h. den Durchschnitt aller abgeschlossenen, euklidisch-konvexen Mengen, die  $B$  enthalten.

Ist  $\emptyset \neq T \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , so ist die *Dimension* von  $T$  die Dimension des kleinsten affinen Teilraums von  $\mathbb{R}^{n+1}$ , der  $T$  enthält. Es ist dann  $T \subset p + W$ , für einen Punkt  $p$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  und einen eindeutig bestimmten Untervektorraum  $W$  kleinster Dimension.

**Lemma 4.3.1**  $C$  hat die Dimension  $n + 1$ .

**Beweis:** Da  $\Gamma$  nicht elementar ist, ist die Dimension von  $C$  größer als Null, und wir bezeichnen sie mit  $(s + 1)$ . Wir zeigen nun, daß es eine  $\Gamma$ -invariante hyperbolische Ebene der Dimension  $s$  oder  $(n - s - 1)$  gibt. Nach den Sätzen 2.3.3 und 2.3.1 folgt dann  $s = n$ .

Sei also  $C \subset p + W$ , wobei  $W$  ein Untervektorraum minimaler Dimension und  $p$  ein Punkt aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist. Es ist  $\gamma C \subset \gamma p + \gamma W$  für alle  $\gamma$  aus  $\Gamma$ . Da  $\gamma C = C$  und die Dimensionen von  $\gamma W$  und  $W$  übereinstimmen, folgt  $\gamma W = W$  für alle  $\gamma$  aus  $\Gamma$ . Wäre  $W$  lichtartig, so bildeten alle lichtartigen Vektoren in  $W$  einen 1-dimensionalen Untervektorraum, der somit für alle  $\gamma$  aus  $\Gamma$  auf sich abgebildet würde. Dann wäre aber  $\Gamma$  elementar, was aber dem endlichen Volumen von  $H^n/\Gamma$  widerspräche (vergl. Abschnitt 2.3).

Somit ist  $W$  entweder zeit- oder raumartig. Folglich ist entweder  $W \cap H^n$  eine  $s$ -dimensionale oder  $W^L \cap H^n$  eine  $(n - s - 1)$ -dimensionale hyperbolische Ebene, die  $\Gamma$ -invariant ist. ♣

Da es nur endlich viele  $\Gamma$ -Orbits in  $B$  gibt, zeigt das folgende Lemma, daß  $B$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$  diskret und abgeschlossen ist, obwohl die Menge  $F$  dicht in  $\partial B^n$  liegt (vergl. Sätze 2.3.2 und 2.3.3).

**Lemma 4.3.2** *Ist  $x$  aus  $L^+$  ein parabolischer Fixpunkt, so ist der Orbit  $\Gamma x$  eine diskrete, abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

**Beweis:** Ist  $x$  ein parabolischer Fixpunkt, so gibt es unter den uniformen Horosphären eine, die in  $B$  durch ein skalares Vielfaches  $\alpha x$  von  $x$  repräsentiert wird. Da nach Lemma 3.1.4  $\gamma h_{\alpha x} = h_{\alpha \gamma x}$ , und diese Horosphären entweder disjunkt oder identisch sind, ist nach Korollar 3.3.5 der euklidische Abstand zwischen  $\alpha \gamma x$  und  $\alpha x$  größer als 2, oder die beiden Punkte sind identisch. Folglich besitzen unterschiedliche Punkte aus  $\Gamma x$  einen euklidischen Abstand, der größer als  $2/\alpha$  ist. Somit ist  $\Gamma x$  eine diskrete, abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . ♣

**Lemma 4.3.3** *Für einen Punkt  $x$  aus  $L^+$  ist der Ursprung genau dann kein Häufungspunkt des Orbits  $\Gamma x$ , wenn  $x$  ein parabolischer Fixpunkt ist.*

**Beweis:** Ist  $x$  ein parabolischer Fixpunkt, so ist nach Lemma 4.3.2 der Ursprung kein Häufungspunkt.

Zum Beweis der anderen Implikation nehmen wir nun an, daß der Ursprung kein Häufungspunkt des Orbits von  $x$  aus  $L^+$  ist. Bezeichne  $K$  das Komplement des Inneren der Spitzen in  $H^n/\Gamma$ . Bezeichne  $\pi : H^n \rightarrow H^n/\Gamma$  die Überlagerung. Da  $K$  kompakt ist, gibt es ein  $r > 0$ , so daß zwei beliebige Punkte aus  $K$  einen Abstand kleiner als  $r$  besitzen. Ist  $z_0$  ein Punkt aus  $H^n$ , der durch  $\pi$  nach  $K$  abgebildet wird, so liegt  $K$  im Bild der  $r$ -Umgebung von  $z_0$  unter der Abbildung  $\pi$ .

Gemäß Korollar 3.1.3 gibt es nun ein  $t > 0$ , so daß jede Horosphäre, deren zugeordneter Vektor aus  $L^+$  eine  $(n+1)$ -te Koordinate größer als  $t$  besitzt, disjunkt zur  $r$ -Umgebung von  $z_0$  ist. Gemäß der Annahme, daß der Ursprung kein Häufungspunkt von  $\Gamma x$  ist, gibt es ein  $\alpha > 0$ , so daß jeder Punkt aus  $\Gamma(\alpha x)$  eine  $(n+1)$ -te Koordinate größer als  $t$  besitzt. Dann ist die Horosphäre  $h_{\alpha x}$  disjunkt zu  $\Gamma K$ . Somit ist der von  $h_{\alpha x}$  berandete Horoball in der Vereinigungsmenge aller uniformen Horobälle enthalten. Dies ist nur möglich, wenn dieser Horoball ganz in einem der uniformen Horobälle enthalten ist, und deshalb muß  $\alpha x$  ein parabolischer Fixpunkt sein. ♣

**Lemma 4.3.4**  *$L^+ \cap C$  ist die Menge aller Punkte der Form  $\alpha z$ , wobei  $\alpha \geq 1$  und  $z$  aus  $B$  ist.*

**Beweis:** Wir werden im ersten Schritt zeigen, daß es für einen Punkt  $x$  aus  $L^+$ , der nicht die oben beschriebene Form besitzt, eine euklidische Hyperebene in  $\mathbb{R}^{n+1}$  gibt, so daß  $x$  und  $B$  in verschiedenen Raumhälften liegen. Insbesondere liegt dann  $x$  nicht in  $C$ .

Die Tangentialhyperebene  $T$  an den Lichtkegel am Punkt  $x$  ist  $\langle x \rangle^L$ . Ist  $x$  nicht von der Form  $\alpha z$ ,  $\alpha \geq 1$ ,  $z \in B$ , so gibt es ein  $\beta > 1$ , so daß  $\beta x$  ebenfalls nicht von dieser Form ist. Die Menge aller Punkte aus  $T$ , deren  $(n+1)$ -te Koordinate mit der von  $\beta x$  übereinstimmt, bildet einen  $(n-1)$ -dimensionalen affinen Raum  $A$ . Man rotiere nun  $T$  um  $A$  um einen so kleinen Winkel  $\delta$ , daß die Strecke vom Ursprung zu  $x$  im Inneren der einen Raumhälfte liegt, alle Punkte aus  $B$  aber in der anderen Hälfte liegen (vergl. Abb. 4.1). Dies ist möglich, da  $B$  diskret in  $L^+$  liegt, und es somit eine Umgebung der Strecke vom Ursprung zu  $\beta x$  gibt, die keine Punkt aus  $B$  enthält.

Nun zeigen wir im zweiten Schritt die Umkehrung, daß nämlich für  $\alpha > 1$  und  $z$  aus  $B$  der Punkt  $\alpha z$  in  $C$  enthalten ist. Für  $z$  aus  $B$  bezeichne  $g(z)$  die vom Ursprung ausgehende Halbgerade, die  $z$  enthält. Da die Menge  $F$  der parabolischen Fixpunkte in  $\partial D^n$  dicht liegt, gibt es zu  $z$  aus  $B$  eine Folge von Halbgeraden  $g(z_1), g(z_2), \dots$  mit  $z_i \neq z$ , so daß der euklidische Winkel zwischen  $g(z_i)$  und  $g(z)$  gegen 0 konvergiert. Die Strecke von  $z_i$  nach  $z$  ist nach Definition in  $C$  enthalten, und da  $B$  diskret ist, kommen diese Strecken dem Punkt  $\alpha z$  beliebig nahe (siehe Abb. 4.2). Da  $C$  abgeschlossen ist, ist  $\alpha z$  in  $C$  enthalten. ♣

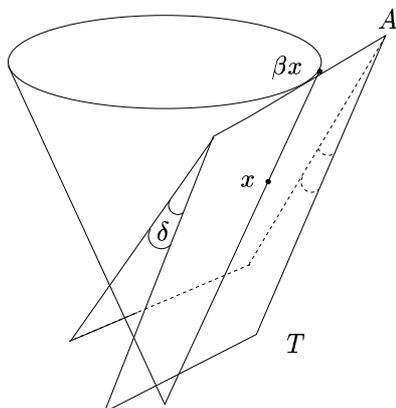


Abbildung 4.1. Rotation der Tangentialebene

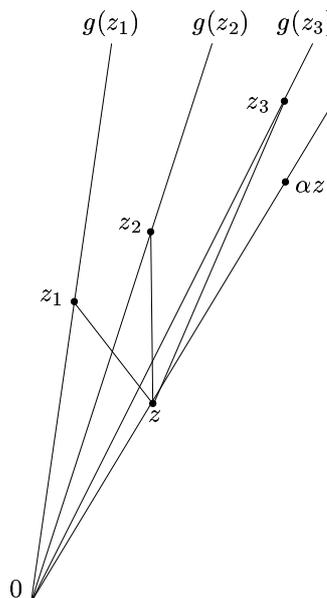


Abbildung 4.2.

**Lemma 4.3.5** *Ein vom Ursprung ausgehender Strahl, der im Inneren von  $L^+$  liegt, trifft  $\partial C$  in genau einem Punkt und trifft danach nur innere Punkte von  $C$ .*

**Beweis:** Für einen Punkt  $x$  aus dem Inneren von  $L^+$  bezeichnen wir mit  $[x, \infty)$  die Menge  $\{\alpha x | \alpha \geq 1\}$ ; entsprechend ist  $(x, \infty)$  erklärt. Den vom Ursprung ausgehenden Strahl, der durch  $x$  geht, bezeichnen wir mit  $r(0, x)$ . Die radiale Projektion von  $x$  nach  $D^n$  ist  $r(0, x) \cap D^n$ ; diesen Punkt nennen wir  $x_1$ .

Da die Menge  $F$  der parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$  eine dichte Teilmenge von  $\partial D^n$  ist, gibt es ein ideales  $n$ -Simplex mit Ecken in  $F$ , das  $x_1$  in seinem Inneren enthält. Den Eckpunkten des Simplexes sind Punkte  $z_1, \dots, z_{n+1}$  aus  $B$  zugeordnet, die in  $\mathbb{R}^{n+1}$  ein euklidisches  $n$ -Simplex  $\sigma$  aufspannen.

Da  $\sigma$  in  $C$  liegt, ist  $r(0, x) \cap C$  nicht leer. Es ist  $r(0, x) \cap C$  eine konvexe, abgeschlossene Menge. Den ersten Punkt aus  $C$ , den man vom Ursprung aus auf  $r(0, x)$  erreicht, nennen wir  $x_0$ . Er liegt in  $\partial C$ . Wir müssen nun zeigen, daß  $(x_0, \infty)$  im Inneren von  $C$  liegt.

Da  $B$  eine diskrete Teilmenge von  $L^+$  ist, kann man das Simplex aus  $D^n$  so wählen, daß die Punkte  $z_1, \dots, z_{n+1}, x_0$  affin unabhängig sind. Aus Lemma 4.3.4 folgt, daß  $[z_1, \infty), \dots, [z_{n+1}, \infty)$  in  $C$  enthalten sind. Somit ist die konvexe Hülle von  $x_0 \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} [z_i, \infty)$  in  $C$  enthalten. Sie enthält eine offene Umgebung von  $(x_0, \infty)$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , d.h.  $(x_0, \infty)$  ist im Inneren von  $C$  enthalten. ♣

**Definition:** Für eine  $(n + 1)$ -dimensionale konvexe Teilmenge  $Q$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  heißt eine euklidische Hyperebene  $W$  *Stützebene an  $Q$  am Punkt  $p$* , wenn  $Q$  ganz in einem der durch  $W$  bestimmten euklidischen Halbräume liegt, und  $p$  in  $W \cap Q$  liegt. Eine Stützebene an  $Q$  am Punkt  $p$  bezeichnen wir auch als *Stützebene an  $Q$* .

**Lemma 4.3.6** *Für eine Stützebene  $W$  an  $C$  gibt es entweder ein  $z$  aus  $B$ , so daß*

$$W = \langle z \rangle^L \text{ und } C \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x \circ z \leq 0\},$$

*oder es gibt einen Vektor  $w$  aus  $H^n$  und  $c < 0$ , so daß*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x \circ w = c\} \text{ und } C \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | x \circ w \leq c\}.$$

**Beweis:**  $C$  liegt in der konvexen Menge  $\bar{L}^+$ , da der Ursprung kein Häufungspunkt von  $\Gamma$  ist. Für eine Stützebene  $W$  an  $C$  am Punkt  $p$  gibt es  $w \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $c \in \mathbb{R}$ , so daß

$$W = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w = c\}.$$

Betrachten wir zuerst den Fall  $c = 0$ . Da  $W \cap \bar{L}^+$  nicht leer ist, muß  $w$  entweder raum- oder lichtartig sein. Ist  $w$  lichtartig, so ist

$$W \cap C \subset W \cap \bar{L}^+ \subset \langle w \rangle.$$

Nach Lemma 4.3.4 gibt es ein  $\alpha > 0$  und ein  $z$  aus  $B$ , so daß  $w = \alpha z$ .

Ist dagegen  $w$  raumartig, so läge  $C$  ganz in einem der durch  $W$  bestimmten Halbräume. Der Schnitt dieses Halbraums mit  $D^n$  wäre ein hyperbolischer Halbraum, dessen ideale Punkte alle parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$  enthielten. Da die parabolischen Fixpunkte aber dicht liegen, führt die Annahme, daß  $w$  raumartig ist, zu einem Widerspruch.

Der Fall  $c = 0$  impliziert somit  $W = \langle z \rangle^L$  für ein  $z$  aus  $B$ . Zudem ist  $C \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ z \leq 0\}$ .

Von nun an sei  $c \neq 0$ , und wir nehmen ohne Einschränkung  $c < 0$  an. Liegt  $p$  in  $L^+$  (bzw.  $\dot{L}^+$ ), so ist für  $\alpha > 1$  nach Lemma 4.3.4 (bzw. Lemma 4.3.5) auch  $\alpha p$  in  $C$  enthalten. Da  $\alpha p \circ w < p \circ w$ , liegt  $C$  im Halbraum  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w \leq c\}$ .

Wir werden nun beweisen, daß  $w$  weder raum- noch lichtartig sein kann.

Für einen raumartigen Vektor  $w$  läge  $C$  in  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w \leq 0\}$ . Da dies, wie oben gezeigt, unmöglich ist, kann  $w$  nicht raumartig sein.

Nehmen wir nun an, daß  $w$  lichtartig ist. Da  $p \circ w < 0$ , kann  $w$  nicht in  $L^-$  liegen (vergl. Satz 1.1.2). Zudem kann  $w$  nicht ein skalares Vielfaches eines Elementes  $z$  aus  $B$  sein, da  $z \circ w \leq c < 0$ . Somit gibt es gemäß Lemma 4.3.3 eine Folge  $(\gamma_j)$  aus  $\Gamma$ , so daß  $\lim_{j \rightarrow \infty} \gamma_j(w) = 0$ . Es ist

$$\gamma_j^{-1}(p) \circ w = p \circ \gamma_j(w).$$

Der linke Ausdruck ist für alle  $j$  kleinergleich  $c$ , denn  $C$  ist  $\Gamma$ -invariant. Der rechte Ausdruck konvergiert für  $j \rightarrow \infty$  gegen 0. Da dies ein Widerspruch ist, war die Annahme, daß  $w$  lichtartig ist, falsch.

Folglich kann  $w$  nur zeitartig sein. Da  $p \circ w < 0$ , muß  $w$  positiv zeitartig sein. Durch Multiplikation mit einem positiven Skalar können wir wie behauptet  $w$  aus  $H^n$  und  $c < 0$  erreichen. ♣

**Lemma 4.3.7** *Die Abbildung von der Menge der raumartigen Stützebenen an  $C$  in die Menge  $H^n$ , die gemäß Lemma 4.3.6 jeder Stützebene ihren Normalenvektor  $w$  zuordnet, ist bijektiv.*

**Beweis:** Zum Beweis der Injektivität gehen wir von zwei Stützebenen

$$W_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w = c_i\}, \quad c_1 \leq c_2 < 0, \quad w \in H^n$$

aus. Da nach Lemma 4.3.6 die Menge  $C$  für  $i = 1, 2$  in den Halbräumen

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w \leq c_i\}$$

enthalten ist, und jede Stützebene die Menge  $C$  berührt, folgt  $c_1 = c_2$ , also  $W_1 = W_2$ .

Zum Beweis der Surjektivität definieren wir für  $w$  aus  $H^n$  die Ebenenschar

$$E(c) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w = c\}, \quad c \leq 0.$$

$C$  liegt dann in  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w \leq 0\}$ , da  $L^+$  in diesem Halbraum liegt. Die Menge

$$\{c < 0 \mid E(c) \cap C \neq \emptyset\}$$

ist somit nicht leer. Wir werden zeigen, daß sie ihr Supremum  $c_0$  annimmt. Dann ist  $E(c_0)$  eine Stützebene an  $C$ , deren Normalenvektor  $w$  ist.

Sei  $A$  eine positive Lorentz-Transformation, die  $w$  auf  $e_{n+1}$  abbildet. Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varepsilon \leq x \circ e_{n+1} \leq 0\} \cap (\bar{L}^+ \cup \{0\})$$

kompakt. Ihr Urbild unter  $A$ ,

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \varepsilon \leq x \circ w \leq 0\} \cap (\bar{L}^+ \cup \{0\}),$$

ist somit auch kompakt. Da  $B$  diskret und abgeschlossen ist, ist der Schnitt von  $B$  und dieser Menge eine endliche Menge  $\{z_1, \dots, z_r\}$ . Es ist  $c_0$  das Supremum von  $\{z_1 \circ w, \dots, z_r \circ w\}$ . ♣

**Lemma 4.3.8** *Für eine raumartige Stützebene  $W$  an  $C$  ist  $W \cap C$  die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten aus  $B$ .*

**Beweis:** Nach Lemma 4.3.6 gibt es  $w$  aus  $H^n$  und  $c < 0$ , so daß

$$W = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w = c\}.$$

Für  $\varepsilon > 0$  sei

$$R(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid c - \varepsilon \leq x \circ w \leq c\} \cap \bar{L}^+.$$

Aus dem Beweis von Lemma 4.3.7 folgt, daß es ein  $\varepsilon_0 > 0$  gibt, so daß

$$R(\varepsilon_0) \cap B = W \cap B.$$

Die Menge

$$V = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ w \leq c - \varepsilon_0\} \cap \bar{L}^+$$

ist abgeschlossen und konvex. Es ist  $V \cap B = B - (W \cap B)$ . Bezeichne  $\sigma$  die konvexe Hülle der endlich vielen Punkte von  $W \cap B$ . Wir bilden nun die abgeschlossene konvexe Hülle  $H$  von  $V$  und  $\sigma$ . Da  $C$  in  $H$  liegt, und  $H \cap W = \sigma$  ist, liegt  $C \cap W$  in  $\sigma$ . Nach Definition liegt auch  $\sigma$  in  $C \cap W$ , also ist  $C \cap W = \sigma$ . ♣

**Lemma 4.3.9** *Zu jedem Punkt  $z_0 \in \partial C \cap \overset{\circ}{L}^+$  gibt es eine Stützebene, die  $(n+1)$  affin unabhängige Punkte aus  $B$  enthält.*

**Beweis:** Sei  $W$  eine Stützebene an  $C$  am Punkt  $z_0$  aus  $\partial C \cap \overset{\circ}{L}^+$ . Liegen nicht  $(n+1)$  affin unabhängige Punkte aus  $B$  in  $W$ , so werden wir sukzessive  $W$  verändern, bis wir eine Stützebene erhalten, die solche Punkte enthält.

Wir nehmen für das Folgende an, daß  $W \cap B$  in einem  $(n-1)$ -dimensionalen affinen Teilraum  $A$  liegt. Man wähle sich eine Rotationsrichtung von  $W$  um die Achse  $A$ . Mit  $S$  bezeichnen wir nun die Menge aller Rotationswinkel  $\alpha$ , so daß für eine (euklidische) Rotation um  $\alpha$ , die  $W$  in  $W_\alpha$  überführt,  $W \cap B = W_\alpha \cap B$  ist. Da  $C$  nicht in dem  $(n-1)$ -dimensionalen Teilraum  $A$  enthalten sein kann, gibt es einen Winkel  $\alpha_0$ ,  $0 < \alpha_0 < \pi$ , der nicht in  $S$  liegt. Somit gibt es ein  $\beta$  aus dem Intervall  $(0, \pi)$ , so daß entweder  $S = [0, \beta)$  oder  $S = [0, \beta]$  ist. Wir überlegen uns nun, daß der zweite Fall nicht eintreten kann. Es gäbe dann nämlich eine Nullfolge  $\varepsilon_i$  mit paarweise verschiedenen Gliedern, so daß für die Rotation um den Winkel  $\beta + \varepsilon_i$  gilt, daß  $(W_{\beta+\varepsilon_i} \cap B) - (W \cap B)$  mindestens einen Punkt  $x_i$  enthält. Da  $W_\gamma \cap W_\delta = A$  für unterschiedliche Rotationswinkel aus  $(0, \pi)$  ist, sind die Punkte  $x_i$  paarweise verschieden.

In einer Zwischenüberlegung zeigen wir, daß es ein  $\delta > 0$  gibt, so daß alle  $W_{\beta+\varepsilon_i}$  mit  $\varepsilon_i < \delta$  raumartig sind. Dies folgt daraus, daß die Rotation eine stetige Abbildung vom Intervall  $(0, \pi)$  nach  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, und somit die (lorentzischen) Normalenvektoren der  $W_{\beta+\varepsilon_i}$  gegen den Normalenvektor

von  $W_\beta$  konvergieren. Da dieser aber zeitartig ist, sind ab einem Index  $i_0$  an die Normalenvektoren der  $W_{\beta+\varepsilon_i}$  auch zeitartig.

Damit können wir folgern, daß die  $x_i$  dem Kompaktum  $W_\beta \cap L^+$  beliebig nahe kommen. Da aber  $B$  eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, erhalten wir einen Widerspruch.

Wir haben gezeigt, daß nur der erste Fall eintreten kann, und folglich ist  $W_\beta$  eine Stützebene an  $z_0$ , so daß der von  $W_\beta \cap B$  aufgespannte affine Teilraum eine größere Dimension besitzt als der von  $W \cap B$  aufgespannte affine Teilraum. Man erhält durch diese Überlegungen nach endlich vielen Schritten eine Stützebene  $\bar{W}$ , die  $(n+1)$  affin unabhängige Punkte aus  $B$  enthält. ♣

**Lemma 4.3.10** *Die Menge der Seiten von  $\partial C$  ist in  $\mathring{L}^+$  lokal-endlich.*

**Beweis:** Wir werden mehrfach zu Teilfolgen übergehen, ohne die Indizierung einer Folge zu ändern. Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge des Innern des Lichtkegels und  $F_1, F_2, \dots$  eine Folge von  $n$ -dimensionalen Seiten von  $\partial C$ , die jeweils  $K$  treffen. Wir werden durch einen direkten Beweis zeigen, daß die Elemente dieser Folge nicht paarweise verschieden sein können.

Für alle  $i$  aus  $\mathbb{N}$  wählen wir  $x_i$  aus  $\mathring{F}_i \cap K$ , unter der einzigen Bedingung, daß nämlich  $x_i = x_j$ , falls  $F_i = F_j$ . Die Seite  $F_i$  spannt einen  $n$ -dimensionalen affinen Teilraum  $A_i$  des  $\mathbb{R}^{n+1}$  auf. Es gibt einen eindeutigen Vektor  $p_i$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so daß

$$A_i = x_i + \langle p_i \rangle^\perp, \quad p_i \cdot x_i < 0 \quad \text{und} \quad p_i \cdot p_i = 1.$$

Da die euklidische Einheitssphäre im  $\mathbb{R}^{n+1}$  kompakt ist, kann man zu einer konvergenten Teilfolge der  $(p_i)$  übergehen,  $\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = p$ . Da zudem  $K$  kompakt ist, konvergiert für eine nochmalige Teilfolge auch  $(x_i)$ . Da  $\partial C$  abgeschlossen ist, und  $K$  in  $\mathring{L}^+$  liegt, ist  $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$  enthalten in  $\partial C \cap \mathring{L}^+$ .  $A$  bezeichne nun den affinen Raum  $(\bar{x} + \langle p \rangle^\perp)$ , und  $A_i$  den affinen Raum  $(x_i + \langle p_i \rangle^\perp)$ .

Wir zeigen nun, daß  $A$  eine Stützebene an  $C$  am Punkt  $\bar{x}$  ist. Für alle  $i$  ist

$$\begin{aligned} A_i &= \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (y - x_i) \cdot p_i = 0\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot p_i = x_i \cdot p_i\}. \end{aligned}$$

Sei nun

$$A_i^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot p_i \leq x_i \cdot p_i\}.$$

Da  $x_i \cdot p_i < 0$ , liegt der Ursprung in keinem der  $A_i^+$ , und deshalb liegt  $C$  in jedem der  $A_i^+$  (und nicht in den jeweils anderen Halbräumen).

Sei

$$A^+ = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \cdot p \leq \bar{x} \cdot p\}.$$

Dann ist  $B$  enthalten in  $A^+$ , denn wäre  $z \cdot p > \bar{x} \cdot p$  für ein  $z$  aus  $B$ , so gäbe es wegen  $\bar{x} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$  und  $p = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$  ein  $i_0$ , so daß  $z \cdot p_i > x_i \cdot p_i$  für alle  $i > i_0$ . Es ist aber  $B \subset A_i^+$  für alle  $i$ . Dieser Widerspruch zeigt, daß  $A$  eine Stützebene an  $C$  ist.

$(A_i \cap L^+)$  ist eine Folge von Ellipsoiden (Bilder einer euklidischen  $S^n$  unter einer positiven Lorentz-Transformation), die sich immer mehr dem Ellipsoid  $A \cap L^+$  nähern. Folglich gibt es einen Index  $i_0$ , so daß  $A_i \cap L^+ \subset \overline{U_\delta}(A \cap L^+)$  für alle  $i > i_0$  ist. Da die  $\delta$ -Umgebung  $\overline{U_\delta}(A \cap L^+)$  kompakt ist, enthält diese Menge nur endlich viele Punkte aus  $B$ . Da für jedes  $i$  das Ellipsoid  $A_i \cap L^+$  ebenfalls nur endlich viele Punkte aus  $B$  enthält, und zudem

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \cap L^+ &\subset (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \cap L^+ \\ &= \bigcup_{i=1}^{i_0-1} (A_i \cap L^+) \cup \overline{U_\delta}(A \cap L^+) \end{aligned}$$

ist, liegen in  $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \cap L^+$  nur endlich viele Punkte aus  $B$ . Ab einem Index an müssen die  $F_i$  somit identisch sein. In der ursprünglichen Folge der  $F_i$  können also nicht alle Elemente paarweise verschieden gewesen sein. Somit gibt es nur endlich viele  $F_i$ , die  $K$  treffen. ♣

**Definition:** Sei  $D^n$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  aufgefaßt (vergl. Bemerkung S. 18). Die radiale Projektion von  $\partial C$  nach  $\overline{D}^n$  wird als *euklidische Zerlegung von  $D^n$  bezüglich  $\Gamma$*  bezeichnet. Sind die bei der Konstruktion von  $C$  benutzten uniformen Horobälle derart gewählt, daß sie in  $B^n/\Gamma$  alle das gleiche Volumen besitzen, so heißt die Zerlegung *kanonisch*.

**Bemerkung:** Betrachten wir die Situation von zwei verschiedenen Zuordnungen von Volumina zu den Spitzen. Sei  $0 < \beta < 1$ . Die zweite Zuordnung gehe aus der ersten hervor, indem jedes Volumen der ersten Zuordnung mit  $\beta$  multipliziert wird. Durch die erste Zuordnung entstehe die Repräsentantenmenge  $B_1$  in  $L^+$ , durch die zweite Zuordnung entstehe  $B_2$ . Aus Satz 3.3.8 und Lemma 3.3.3 folgt, daß  $B_2$  aus  $B_1$  hervorgeht, indem jedes Element aus  $B_1$  mit dem Skalar  ${}^n\sqrt{\beta^{-1}}$  multipliziert wird.  $B_1$  und  $B_2$  bestimmen somit identische euklidische Zerlegungen von  $D^n$ . Insbesondere ist die kanonische Zerlegung wohldefiniert.

In Lemma 4.4.2 werden wir zeigen, daß  $\Gamma$  frei auf der euklidischen Zerlegung von  $D^n$  operiert. Somit wird eine Zerlegung von  $D^n/\Gamma$  induziert, die wir ebenfalls als euklidische Zerlegung bezeichnen.

**Lemma 4.3.11** *Eine euklidische Zerlegung von  $D^n$  ist lokal-endlich.*

**Beweis:** Sei  $p: \partial C \rightarrow \overline{D}^n$  die Projektion des Randes der konvexen Hülle  $C$  auf  $\overline{D}^n$ , gegeben durch

$$p(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1 \right).$$

Sei  $K \subset D^n$  eine kompakte Menge. Da  $p(B)$  eine dichte Teilmenge von  $\partial D^n$  ist, gibt es  $v_1, \dots, v_k$  aus  $B$ , so daß  $K$  in der konvexen Hülle der Punkte  $p(v_1), \dots, p(v_k)$  aus  $\partial D^n$  liegt. Es ist

$$K' = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \alpha > 0 : \alpha x \in K\} \cup \{0\}$$

eine abgeschlossene Menge. Es gilt:

$$\begin{aligned} p^{-1}(K) &= K' \cap \partial C \\ &= K' \cap \partial C \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \leq r\}, \end{aligned}$$

wobei  $r$  das Maximum der  $(n+1)$ -ten Komponenten von  $v_1, \dots, v_k$  ist. Somit ist  $p^{-1}(K)$  abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, und trifft nach Lemma 4.3.10 nur endlich viele Seiten von  $C$ . Deshalb trifft  $K$  nur endlich viele Seiten der Zerlegung von  $D^n$ . ♣

## 4.4 Operationen auf der euklidischen Zerlegung

Im folgenden bezeichnen wir ein  $i$ -dimensionales ideales konvexes Polyeder auch als  *$i$ -dimensionale Zelle*.

**Lemma 4.4.1** *Sei  $\sigma$  ein konvexes ideales Polyeder in  $B^n$ , das die konvexe Hülle seiner endlich vielen idealen Ecken ist. Wird  $\sigma$  durch eine nicht-elliptische Isometrie auf sich abgebildet, so ist diese Isometrie hyperbolisch und  $\sigma$  ihre Fixgerade.*

**Beweis:** Eine Isometrie  $\eta$  von  $B^n$ , die  $\sigma$  auf sich abbildet, permutiert die Ecken. Eine Potenz  $\eta^i$  von  $\eta$  induziert folglich die Identität auf den Ecken. Hat die von  $\sigma$  aufgespannte hyperbolische Ebene  $E$  eine Dimension größer als 1, so ist nach Satz 1.4.4 die Einschränkung von  $\eta^i$  auf  $E$  die Identität. Da nur elliptische Isometrien eine endliche Ordnung haben können, wäre dann auch  $\eta$  die Identität auf  $E$ . Wir haben aber in der Voraussetzung elliptische Isometrien ausgeschlossen. Somit kann  $E$  nur die Dimension 1 besitzen, ist also eine Gerade. Da eine parabolische Isometrie keine Geraden festhält, muß  $\eta$  hyperbolisch sein, und  $\sigma$  ist ihre Fixgerade. ♣

**Lemma 4.4.2**  $\Gamma$  operiert für  $1 \leq i \leq n$  frei auf den  $i$ -dimensionalen Zellen einer euklidischen Zerlegung von  $D^n$ .

**Beweis:** In  $H^n$  induziert eine Isometrie  $\gamma$  aus  $\Gamma$  eine Bijektion von  $B$ , da  $\gamma$  die Elemente eines  $\Gamma$ -Orbits von  $B$  nur permutiert. Die konvexe Hülle von  $B$  wird deshalb von  $\gamma$  bijektiv auf sich abgebildet. Als lineare Abbildung muß  $\gamma$  eine Seite von  $C$  bijektiv linear auf eine Seite von  $C$  abbilden. Somit operiert  $\Gamma$  auf der euklidischen Zerlegung. Diese Operation ist nach Lemma 4.4.1 sogar frei, da die idealen Ecken der Zellen der Zerlegung parabolische Fixpunkte sind, und man wie üblich schließen kann, daß eine parabolische und eine hyperbolische Isometrie in einer diskreten Gruppe keinen gemeinsamen Fixpunkt haben können. ♣

**Lemma 4.4.3** Bei der Operation von  $\Gamma$  auf einer euklidischen Zerlegung von  $D^n$  gibt es nur endlich viele  $\Gamma$ -Orbits von  $i$ -dimensionalen Zellen,  $1 \leq i \leq n$ .

**Beweis:** Bezeichne  $K$  das Komplement des Inneren der Spitzen in  $D^n/\Gamma$ . Bezeichne  $\pi : D^n \mapsto D^n/\Gamma$  die Überlagerung. Wie im Anfang des Beweises von Lemma 4.3.3 beschrieben, gibt es eine kompakte Menge  $U = \overline{U}_r(z_0)$  in  $D^n$ , so daß  $K \subset \pi(U)$ . Da die Zerlegung von  $D^n$  nach Lemma 4.3.11 lokal endlich ist, kann  $U$  nur endlich viele Zellen treffen.

Wir beobachten, daß eine Zelle  $\sigma$  nicht ganz in einem Horoball enthalten sein kann, da sie mindestens zwei ideale Ecken besitzt. Ihr Bild  $\pi(\sigma)$  ist somit nicht ganz in der Menge der Spitzen enthalten, d.h.  $\pi(\sigma) \cap K \neq \emptyset$ . Somit ist  $\sigma$   $\Gamma$ -äquivalent zu einer Zelle, die  $U$  trifft. ♣

**Bemerkung:** Lemma 4.4.3 ist in der Dimension  $n = 2$  unmittelbar einsichtig, da ein ideales  $k$ -Eck die Fläche  $(k-2)\pi$  besitzt. Wenn die Fläche  $D^2/\Gamma$  ein endliches Flächenmaß besitzt, kann es nur endlich viele ideale Polygone in der Zerlegung geben, die paarweise nicht  $\Gamma$ -äquivalent sind. Doch schon in der Dimension  $n = 3$  gibt es ideale Simplexe mit beliebig kleinem Volumen, so daß dieses Argument nicht greift.

### Operation von $N(\Gamma)$ auf der kanonischen Zerlegung

Betrachten wir  $\Gamma$  als Untergruppe der Isometrien von  $D^n$ , so bezeichnen wir mit  $N(\Gamma)$  den Normalisator von  $\Gamma$  in der Gruppe der Isometrie von  $D^n$ . Entsprechend ist  $N(\Gamma)$  erklärt, wenn wir  $\Gamma$  als Untergruppe der Isometrien von z.B.  $H^n$  ansehen.

**Lemma 4.4.4** Der Normalisator  $N(\Gamma)$  von  $\Gamma$  operiert für  $1 \leq i \leq n$  frei auf den  $i$ -dimensionalen Zellen der kanonischen Zerlegung von  $D^n$ .

**Beweis:** Die kanonische Zerlegung sei aus der Konstruktion mit Hilfe von  $B \subset L^+$  hervorgegangen.  $\eta$  aus  $N(\Gamma)$  induziert eine Bijektion der parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$ , denn ist  $x$  aus  $\partial D^n$  Fixpunkt der parabolischen Isometrie  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , so ist  $\eta(x)$  Fixpunkt der parabolischen Isometrie  $\eta\gamma\eta^{-1} \in \Gamma$ . Ist  $b$  ein uniformer Horoball mit Basispunkt  $x$ , so ist  $\eta(b)$  ein uniformer Horoball zum parabolischen Fixpunkt  $\eta(x)$ . Da  $\eta$  eine Isometrie auf  $D^n/\Gamma$  induziert, sind die Volumina von  $b$  und  $\eta(b)$  in  $D^n/\Gamma$  gleich. Da nach Satz 3.3.8 zu einem vorgegebenen Volumen höchstens ein Horoball mit Basispunkt  $\eta(x)$  existiert, ist  $\eta(b)$  der uniforme Horoball zum Basispunkt  $\eta(x)$ .

Somit permutiert  $\eta$  die Menge  $B$ , und folglich wird die abgeschlossene konvexe Hülle von  $B$  durch  $\eta$  auf sich abgebildet. Der Beweis kann nun wie der Beweis von Lemma 4.4.2 weitergeführt werden. ♣

## 4.5 Berechnung der Isometriegruppe von $D^n/\Gamma$

Seien  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  Repräsentanten der  $\Gamma$ -Orbits von  $n$ -Zellen der euklidischen Zerlegung. Ist  $\eta$  eine Seite von  $\sigma_i$ , so gibt es (außer  $\eta$ ) unter den  $(n-1)$ -dimensionalen Seiten von  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  genau eine Seite  $\eta'$ , die  $\Gamma$ -äquivalent zu  $\eta$  ist. Es gibt somit ein  $\gamma_{\eta\eta'}$  aus  $\Gamma$ , so daß  $\gamma_{\eta\eta'}(\eta) = \eta'$ . Ist  $n \geq 3$ , so ist  $\gamma_{\eta\eta'}$  durch die Abbildung auf den idealen Ecken von  $\eta$  bis auf eine Spiegelung an der von  $\eta$  aufgespannten Hyperebene festgelegt. Folglich bestimmen dann  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  und die Kenntnis, wie sich die Abbildungen  $\gamma_{\eta\eta'}$  auf den Ecken verhalten, die Mannigfaltigkeit  $D^n/\Gamma$ .

In der Dimension  $n = 2$  ist dies nicht richtig, da die Isometrie  $\gamma_{\eta\eta'}$  nur bis auf eine Translation entlang der Kante  $\eta'$  und der Spiegelung an  $\eta'$  bestimmt ist.

Von nun an setzen wir voraus, daß die euklidische Zerlegung kanonisch ist. Ein Element  $\eta$  des Normalisators  $N(\Gamma)$  bildet den Orbit  $\Gamma\sigma_i$  auf einen anderen Orbit  $\Gamma\sigma_{\pi(i)}$  ab, für  $i = 1, \dots, k$  und eine Permutation  $\pi$ . Die Isometrie  $\eta$  induziert eine „kombinatorische Abbildung“ von  $\sigma_i$  auf  $\sigma_{\pi(i)}$  für  $i = 1, \dots, k$ , die durch die Abbildung der idealen Ecken bestimmt ist.

**Definition:** Ein *kombinatorischer Automorphismus*  $\rho$  von  $\Gamma$ -Repräsentantenzellen  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  der kanonischen Zerlegung von  $D^n$ ,  $n \geq 2$ , ist ein  $(k+1)$ -Tupel

$$\rho = (\pi, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$$

bestehend aus einer Permutation  $\pi$  der Zahlen  $1, \dots, k$  und Abbildungen  $\rho_i$ , die die Eckenmenge von  $\sigma_i$  bijektiv auf die Eckenmenge von  $\sigma_{\pi(i)}$  abbilden. Die Abbildungen  $\rho_i$  müssen zwei Bedingungen erfüllen:

- Für jedes  $i$  gibt es einen pl-Homöomorphismus  $\tilde{\rho}_i$  von  $\sigma_i$  nach  $\sigma_{\pi(i)}$ , so daß  $\rho_i$  die Einschränkung von  $\tilde{\rho}_i$  auf die Eckenmenge ist.  $\tilde{\rho}_i$  soll zudem die Seiten von  $\sigma_i$  auf Seiten von  $\sigma_{\pi(i)}$  abbilden.
- Sei  $f_{\eta\eta'}$  eine Paarung von  $(n-1)$ -Seiten der Repräsentanten  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ . Die zu  $\eta$  (bzw.  $\eta'$ ) gehörenden  $n$ -Zellen heißen  $\sigma_i$  (bzw.  $\sigma_j$ ). Nach der ersten Bedingung sind  $\zeta = \tilde{\rho}_i(\eta)$  und  $\zeta' = \tilde{\rho}_j(\eta')$   $(n-1)$ -Seiten von  $\sigma_{\pi(i)}$  und  $\sigma_{\pi(j)}$ . Die zweite Bedingung ist nun, daß  $\zeta$  und  $\zeta'$  in der kanonischen Zerlegung durch eine Isometrie  $f_{\zeta\zeta'}$  gepaart werden, wobei für alle Ecken  $e$  von  $\eta$  gelten soll, daß

$$f_{\zeta\zeta'}\rho_i(e) = \rho_j f_{\eta\eta'}(e).$$

Ein kombinatorischer Automorphismus heißt *strikt*, wenn man für alle Abbildungen  $\tilde{\rho}_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , Einschränkungen von Isometrien von  $D^n$  wählen kann.

Bei einem kombinatorischen Automorphismus können  $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_k$  derart gewählt werden, daß sie verträglich mit den Seitenpaarungen sind. Man muß dabei die  $\tilde{\rho}_i$  sukzessive auf den  $r$ -Gerüsten,  $0 \leq r \leq n$ , definieren.  $\rho$  bestimmt deshalb eine Autohomöomorphismus von  $D^n/\Gamma$ . Durch sukzessives Anwenden des Alexander-Tricks kann man zeigen, daß dieser Autohomöomorphismus bis auf Isotopie in  $D^n/\Gamma$  eindeutig ist.

Die Menge der kombinatorischen Automorphismen bildet bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe.

**Beispiel:** Der *Achterknoten* ist der in Abbildung 4.3 dargestellte Knoten mit vier Überkreuzungen. Die kanonische Zerlegung des Komplements des Achterknotens in der 3-Sphäre erhält man durch das Verkleben von zwei regulären idealen 3-Simplexen  $\sigma$  und  $\sigma'$  (siehe Abb. 4.4). Wir werden in Abschnitt 6.6 genauer darauf eingehen.

Die Seite, die durch die Ecken 1, 2, 4 aufgespannt wird, heiße  $A$ . Dies drücken wir durch  $A = \langle 1, 2, 4 \rangle$  aus. Die Beschreibung der Seiten ist

$$\begin{aligned} A &= \langle 1, 2, 4 \rangle, & B &= \langle 2, 3, 4 \rangle, & C &= \langle 1, 3, 4 \rangle, & D &= \langle 1, 2, 3 \rangle, \\ A' &= \langle 4', 2', 1' \rangle, & B' &= \langle 2', 1', 3' \rangle, & C' &= \langle 3', 1', 4' \rangle, & D' &= \langle 2', 3', 4' \rangle. \end{aligned}$$

Beim Verkleben von  $A$  mit  $A'$  werden die idealen Ecken abgebildet durch  $1 \mapsto 2', 2 \mapsto 1', 4 \mapsto 4'$ , was wir kürzer darstellen als  $\langle 1, 2, 4 \rangle \mapsto \langle 2', 1', 4' \rangle$ , wobei auf die Reihenfolge der Ecken in den Klammern zu achten ist. Die anderen Verklebevorschriften sind:

$$B \mapsto B' : \langle 2, 3, 4 \rangle \mapsto \langle 1', 2', 3' \rangle, \quad C \mapsto C' : \langle 1, 3, 4 \rangle \mapsto \langle 1', 4', 3' \rangle, \quad D \mapsto D' : \langle 1, 2, 3 \rangle \mapsto \langle 2', 3', 4' \rangle.$$

Betrachten wir nun einen kombinatorischen Automorphismus  $\rho$ , der  $\sigma$  auf  $\sigma$  und  $\sigma'$  auf  $\sigma'$  abbildet. Dann ist  $\rho_1$  durch eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4 und  $\rho_2$  durch eine Permutation von  $1', 2', 3', 4'$  beschrieben. Probieren wir nun

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 4' & 3' & 1' & 2' \end{pmatrix}.$$

Die Seite  $\langle 1, 2, 4 \rangle$  geht dabei in  $\langle \rho_1(1), \rho_1(2), \rho_1(4) \rangle$  über, also  $A$  in  $D$ . Die  $A$  zugeordnete Seite  $A'$  geht in  $\langle \rho_2(2'), \rho_2(1'), \rho_2(4') \rangle$  über, das ist  $D'$ . Wichtig ist dabei, daß die Zuordnung der Ecken erhalten bleibt:  $\langle \rho_1(1), \rho_1(2), \rho_1(4) \rangle \mapsto \langle \rho_2(2'), \rho_2(1'), \rho_2(4') \rangle$ , also  $\langle 2, 3, 1 \rangle \mapsto \langle 3', 4', 2' \rangle$ . Dies ist die obige Zuordnung von  $D$  zu  $D'$ .

Es können zwei Hindernisse auftreten: Zum einen kann es vorkommen, daß die Seiten  $\langle u, v, w \rangle$  und  $\langle x, y, z \rangle$  identifiziert werden, jedoch nicht  $\langle \rho_1(u), \rho_1(v), \rho_1(w) \rangle$  und  $\langle \rho_2(x), \rho_2(y), \rho_2(z) \rangle$ . Und selbst wenn diese Seiten identifiziert werden, so kann doch die Reihenfolge der Ecken falsch sein, was wir in unserem Beispiel an  $\rho_1(C)$  und  $\rho_2(C')$  erkennen. Dies sind zwar die Seiten  $\langle 2, 4, 1 \rangle$  und  $\langle 4', 2', 1' \rangle$ , also  $A$  und  $A'$ , jedoch wird beim Verkleben z.B. nicht 2 auf  $4'$  geklebt. Der Kandidat  $\rho$  ist somit kein kombinatorischer Automorphismus.

Ein kombinatorischer Automorphismus  $\rho$  bildet entweder  $\sigma$  auf  $\sigma$  und  $\sigma'$  auf  $\sigma'$  ab, oder er vertauscht  $\sigma$  und  $\sigma'$ . Man überlegt sich leicht, daß es höchstens zweimal  $4!$  kombinatorische Automorphismen geben kann, und in der Tat sind 8 dieser 48 Kandidaten verträglich mit der Seitenidentifikation. Sie bilden eine Diedergruppe, die von

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 3' & 4' & 4' & 2' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1' & 2' & 3' & 4' \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 1' & 2' & 3' & 4' \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

erzeugt wird. Wer dies nachprüfen möchte, der wird bald bemerken, daß ein Computer für diese Rechnungen geeignet ist.

**Lemma 4.5.1** *Für  $n \geq 2$  ist die Gruppe der Isometrien einer nicht-kompakten hyperbolischen  $n$ -Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen endlich.*

**Beweis:** Nach Lemma 4.4.4 operiert  $N(\Gamma)$  auf der kanonischen Zerlegung von  $D^n/\Gamma$ . Jedes Element aus  $N(\Gamma)$  induziert einen strikten kombinatorischen Automorphismus der kanonischen Zerlegung der hyperbolischen Mannigfaltigkeit. Unterscheiden sich zwei Isometrien aus  $N(\Gamma)$  nur durch die Komposition mit einem Element aus  $\Gamma$ , so induzieren sie auf  $\Gamma$ -Repräsentanten der  $n$ -Zellen der kanonischen Zerlegung den gleichen strikten kombinatorischen Automorphismus. Es gibt somit eine injektive Abbildung von  $N(\Gamma)/\Gamma$  in die Gruppe der strikten kombinatorischen Automorphismen von  $\Gamma$ -Repräsentanten von  $n$ -Zellen der kanonischen Zerlegung. Da es aber insgesamt nur endlich viele kombinatorische Automorphismen zu einer Zerlegung gibt, ist  $N(\Gamma)/\Gamma$  endlich.  $\clubsuit$

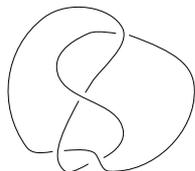


Abbildung 4.3.

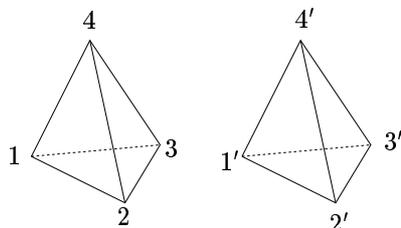


Abbildung 4.4.

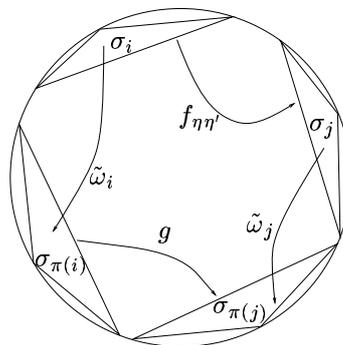


Abbildung 4.5.

Jedes Element aus  $N(\Gamma)$  induziert einen strikten kombinatorischen Automorphismus. Doch wird jeder strikte kombinatorische Automorphismus von einem Element von  $N(\Gamma)$  erzeugt? Die Antwort lautet 'ja' für  $n \geq 3$ .

**Lemma 4.5.2** Sei  $n \geq 3$ . Jeder strikte kombinatorische Automorphismus der  $n$ -dimensionalen Repräsentanzzellen der kanonischen Zerlegung von  $D^n$  bezüglich  $\Gamma$  wird von einer Isometrie aus  $N(\Gamma)$  induziert.

**Beweis:** Sei  $\omega = (\pi, \omega_1, \dots, \omega_k)$  ein strikter kombinatorischer Automorphismus zu  $\Gamma$ -Repräsentanten  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  von  $n$ -Zellen der kanonischen Zerlegung von  $D^n$ . Die  $\tilde{\omega}_i$  sind Einschränkungen eindeutiger Isometrien, die wir ebenfalls mit  $\tilde{\omega}_i$  bezeichnen. Sei  $f_{\eta\eta'}$  eine Seitenpaarung von  $(n-1)$ -Seiten  $\eta \subset \sigma_i$  und  $\eta' \subset \sigma_j$ ,  $\eta \neq \eta'$ , jedoch möglicherweise  $i = j$ . Dann ist die Abbildung  $g = \tilde{\omega}_j f_{\eta\eta'} \tilde{\omega}_i^{-1}$  eine Isometrie, die  $\xi = \tilde{\omega}_i(\eta)$  auf  $\xi' = \tilde{\omega}_j(\eta')$  abbildet (s. Abb. 4.5).

$g$  und die Paarungsabbildung  $f_{\xi\xi'}$  stimmen auf den Ecken von  $\xi$  überein. Man erinnere sich nun, daß wir  $n > 2$  vorausgesetzt haben. Somit sind  $g$  und  $f_{\xi\xi'}$  bis auf eine Spiegelung identisch. Folglich induzieren die mit den Seitenidentifikationen verträglichen Isometrien  $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_k$  eine Autohomöomorphismus  $\psi$  von  $D^n/\Gamma$ . Sei  $\tilde{\psi}$  eine Liftung von  $\psi$  nach  $D^n$ .  $\tilde{\psi}$  läßt die kanonische Zerlegung invariant.

Bezeichne  $q : D^n \rightarrow D^n/\Gamma$  die Überlagerung. Die Einschränkung von  $\tilde{\omega}_i$  auf das Innere  $\partial_i$  von  $\sigma_i$  ist eine Hochhebung der Einschränkung von  $\psi$  auf  $q(\partial_i)$ . Es gibt somit ein  $\gamma_i$  aus  $\Gamma$ , so daß  $\tilde{\omega}_i$  und  $\gamma_i \tilde{\psi}$  auf  $\partial_i$  übereinstimmen. Aus Stetigkeitsgründen stimmen  $\tilde{\omega}_i$  und  $\gamma_i \tilde{\psi}$  auf  $\sigma_i$  überein. Da  $\tilde{\omega}_i$  und  $\gamma_i$  Isometrien von  $D^n$  sind, ist die Einschränkung von  $\tilde{\psi}$  auf  $\sigma_i$  eine Isometrie in  $D^n$ . Somit ist für alle  $\gamma$  aus  $\Gamma$  die Einschränkung von  $\tilde{\psi}$  auf  $\gamma(\sigma_i)$  eine Isometrie.

Wir haben bis jetzt gezeigt, daß die Einschränkung von  $\tilde{\psi}$  auf jede  $n$ -Zelle der kanonischen Zerlegung von  $D^n$  eine Isometrie ist.

Seien  $\sigma$  und  $\sigma'$   $n$ -Zellen der kanonischen Zerlegung mit einer gemeinsamen  $(n-1)$ -Seite  $\eta$ . Die Einschränkung von  $\tilde{\psi}$  auf  $\sigma$  (bzw.  $\sigma'$ ) stimmt mit einer eindeutigen Isometrie  $f$  (bzw.  $f'$ ) von  $D^n$  überein. Die Isometrie  $f'f^{-1}$  hält die von  $\eta$  aufgespannte Hyperebene  $\langle \eta \rangle$  punktweise fest. Somit ist  $f'f^{-1}$  entweder die Identität oder die Spiegelung an  $\langle \eta \rangle$ . Da  $\tilde{\psi}$  aber injektiv ist, muß  $f'f^{-1}$  die Identität sein. Somit stimmen  $f$  und  $\tilde{\psi}$  auf  $\sigma \cup \sigma'$  überein.

Für das Folgende wollen wir  $\sigma$  fest wählen. Die kanonische Zerlegung ist stark zusammenhängend, d.h. zu jeder  $n$ -Zelle  $\zeta$  der Zerlegung gibt es eine Folge von  $n$ -Zellen

$$\sigma = \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}, \zeta_n = \zeta,$$

so daß  $\zeta_{i-1}$  und  $\zeta_i$  eine gemeinsame  $(n-1)$ -Seite besitzen,  $i = 1, \dots, n$ . Man kann mit der obigen Überlegung sukzessive zeigen, daß  $\tilde{\psi}$  und  $f$  auf  $\sigma \cup \zeta_1 \cup \dots \cup \zeta_n$  übereinstimmen. Somit stimmen  $\tilde{\psi}$  und  $f$  auf ganz  $D^n$  überein. ♣

**Satz 4.5.3** Sei  $n \geq 3$ . Für eine nicht-kompakte hyperbolische  $n$ -Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen ist die Gruppe der strikten kombinatorischen Automorphismen der kanonischen Zerlegung isomorph zur Gruppe der Isometrien von  $M$ .

**Beweis:** Im Beweis von Lemma 4.5.1 haben wir gezeigt, daß es eine natürliche Injektion von  $N(\Gamma)/\Gamma$  in die Gruppe der strikten kombinatorischen Automorphismen der kanonischen Zerlegung gibt. Lemma 4.5.2 besagt, daß dieser Homomorphismus surjektiv ist. Mit Satz 2.2.5 folgt die Behauptung.  $\clubsuit$

Durch ein Resultat aus [Riv94] ist in Dimensionen  $n \geq 3$  ein konvexes ideales Polyeder mit endlich vielen Ecken durch seinen kombinatorischen Typ und die Kenntnis der Kanteninnenwinkel in allen  $i$ -dimensionalen Seiten,  $3 \leq i \leq n$ , bis auf Isometrie bestimmt. Dabei entspricht der kombinatorische Typ des Polyeders der Kenntnis, welche Ecken des Polyeders welche Seiten aufspannen. Dies war ein lange ungelöstes Problem. In der Dimension  $n = 2$  gibt es z.B. ideale Vierecke, die nicht isometrisch sind.

Man kann mit Rivins Ergebnis leicht entscheiden, ob ein kombinatorischer Automorphismus strikt ist, indem man nämlich alle entsprechenden Innenwinkel vergleicht. Kennt man die kanonische Zerlegung einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 3$ , so kann man in endlich vielen Schritten die Gruppe der Isometrien berechnen.

Im Rest dieses Unterabschnitts untersuchen wir die folgende Vereinfachung bei der Berechnung der Gruppe der Isometrien, die vom Computerprogramm SnapPea benutzt wird. Ein Beweis der Vermutung ist mir aber nicht bekannt.

**Vermutung 4.5.4** Jeder kombinatorische Automorphismus einer kanonischen Zerlegung ist strikt.

Sei  $\lambda$  ein kombinatorischer Automorphismus zu einer kanonischen Zerlegung von  $M = D^n/\Gamma$ . Wie wir nach der Definition eines kombinatorischen Automorphismus bemerkt haben, bestimmt  $\lambda$  einen Autohomöomorphismus  $\lambda'$  von  $M$ . Sei  $\tilde{\lambda}$  eine Hochhebung von  $\lambda'$  nach  $D^n$ . Dies ist ein Autohomöomorphismus von  $D^n$ , der die kanonische Zerlegung respektiert. Bezeichne  $F$  die Menge der parabolischen Fixpunkte von  $\Gamma$ , d.h. die idealen Ecken der Zerlegung. Dann ist  $\tilde{\lambda}$  eine Bijektion<sup>1</sup> auf  $D^n \cup F$ . Der Satz von Mostow besagt, daß  $\lambda'$  homotop zu einer Isometrie  $\beta$  von  $M$  ist. Sei  $H : M \times I \rightarrow M$  die Homotopie. Eine geeignete Hochhebung  $\tilde{H}$  nach  $D^n$  ist eine Homotopie von  $\tilde{\lambda}$  zu einer Isometrie  $\tilde{\beta}$  von  $D^n$ .

**Vermutung 4.5.5**  $\tilde{\beta}$  und  $\tilde{\lambda}$  stimmen auf  $F$  überein.

Sei  $\sigma$  ein ideales konvexes  $n$ -dimensionales Polyeder der euklidischen Zerlegung, das die konvexe Hülle seiner Ecken  $P_1, \dots, P_r$  aus  $\partial D^n$  ist. Aus  $\tilde{\beta}(P_i) = \tilde{\lambda}(P_i)$ ,  $i = 1, \dots, r$ , folgt  $\tilde{\beta}(\sigma) = \tilde{\lambda}(\sigma)$ , d.h. der kombinatorische Automorphismus  $\lambda$  ist strikt. Somit folgt aus Vermutung 4.5.5 die Vermutung 4.5.4.

**Vermutung 4.5.6** Man kann  $\lambda'$  derart wählen, daß sich  $\tilde{\lambda}$  stetig auf  $\overline{D^n}$  fortsetzen läßt. Zudem läßt sich bei geeigneter Wahl von  $H$  die Homotopie  $\tilde{H}$  stetig auf  $\overline{D^n} \times I$  fortsetzen. Dabei ist  $\tilde{H}(x, I)$  eine konstante Abbildung für  $x$  aus  $\partial D^n$ .

**Vermutung 4.5.7**  $M$  habe  $k$  Spitzen. Für  $1 \leq i \leq k$  lassen sich Spitzen  $s_i$  und  $s'_i$  so wählen, daß  $H(s'_i \times I) \subset s_i$ .

<sup>1</sup>Ich konnte nicht nachweisen, daß  $\tilde{\lambda}$  auf  $D^n \cup F$  bezüglich der Unterraumtopologie von  $\mathbb{R}^n$  stetig ist. Aber selbst wenn  $\tilde{\lambda}$  auf  $D^n \cup F$  stetig sein sollte, so folgt aus  $\overline{F} = \partial D^n$  noch nicht, daß sich  $\tilde{\lambda}$  stetig auf  $\overline{D^n}$  fortsetzen ließe.

Sowohl Vermutung 4.5.6 als auch Vermutung 4.5.7 implizieren Vermutung 4.5.5. Wir werden nun einen Hinweis geben, daß Vermutung 4.5.6 richtig sein könnte (siehe z.B. §11.6 in [Rat94]). Sei  $M$  eine *kompakte* hyperbolische Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen und  $f$  ein differenzierbarer Autohomöomorphismus von  $M$ . Dann läßt sich eine Hochhebung  $\tilde{f}$  von  $f$  nach  $D^n$  stetig auf  $\overline{D}^n$  fortsetzen. Zudem existiert eine Homotopie  $\tilde{H}$  von  $D^n$ , die eine Homotopie zwischen  $\tilde{f}$  und einer Isometrie von  $M$  induziert, so daß sich  $\tilde{H}$  stetig auf  $\overline{D}^n \times I$  fortsetzen läßt. Für  $x$  aus  $\partial D^n$  ist die Abbildung  $\tilde{H}(x, I)$  konstant.

## 4.6 Ideale Triangulationen

### Das Problem

Man ist oft an einer Zerlegung einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit  $M$  in ideale Simplexe interessiert, da ideale Simplexe leicht zu parametrisieren sind. Eine solche Zerlegung wird *ideale Triangulation* genannt, obwohl Punkte aus dem Rand eines idealen Simplexes durch die Quotientenabbildung nach  $M$  identifiziert werden können. In einigen Artikeln und Büchern ist behauptet worden, daß aus einer euklidischen Zerlegung unmittelbar eine Zerlegung in ideale Simplexe ersichtlich ist (siehe z.B. Theorem E.5.9 von [BP92]). Dies ist jedoch nicht offensichtlich; zumindest hat noch niemand einen Beweis für diese Behauptung gegeben. Trotzdem gibt es für einige Spezialfälle Lösungen. Wir werden nun einige Methoden darstellen, wie eine euklidische Zerlegung unter gewissen Bedingungen zu einer idealen Triangulation führen kann. Dabei werden wir bis auf den letzten Unterabschnitt nur die Dimension  $n = 3$  betrachten.

### Triangulation der Ränder der 3-Zellen

Für eine zweidimensionale Seite  $\tau$  einer 3-Zelle der euklidischen Zerlegung wähle man eine beliebige simpliziale Unterteilung, ohne neue Ecken einzuführen. Es gibt genau eine andere Seite  $\tau'$  der Polyeder, die mit  $\tau$  durch eine Isometrie identifiziert wird. Somit induziert eine Zerlegung von  $\tau$  auch eine Zerlegung von  $\tau'$ .

Man erhält so sukzessive eine Triangulation der Ränder der 3-Zellen, da für zwei 2-dimensionale Seiten  $\sigma_1^2$  und  $\sigma_2^2$  einer Zelle  $\sigma^3$  gilt, daß die induzierte Triangulation auf  $\sigma_1^2 \cap \sigma_2^2$  übereinstimmt, da diese Schnittmenge höchstens eine Kante sein kann. In Dimensionen  $n \geq 4$  hätte man hier ein zusätzliches Problem, da nämlich die Triangulationen der Seiten auf den Schnittmengen im allgemeinen nicht übereinstimmen. Aber auch in der Dimension  $n = 3$  bekommen wir nun ein Problem, denn die von einigen Autoren angeführten Triangulationen der Zellen, die durch die Triangulationen der Ränder bestimmt sein sollen, müssen nicht immer existieren. Ein Beispiel ist die in Abbildung 4.6 gezeigte Triangulation des Randes von  $\sigma^2 \times [0, 1]$ . Man erkennt sehr leicht, daß es keine Triangulation von  $\sigma^2 \times [0, 1]$  gibt, die diese Triangulation des Randes induziert.

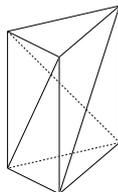


Abbildung 4.6.

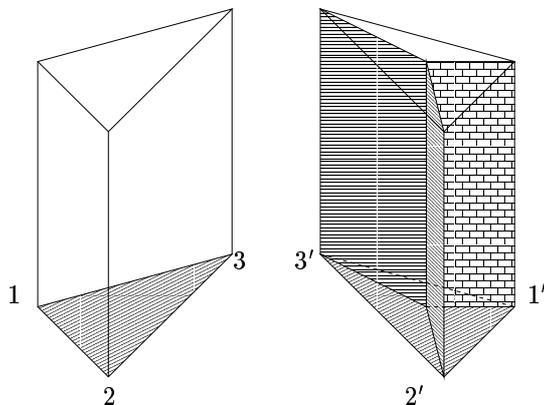


Abbildung 4.7.

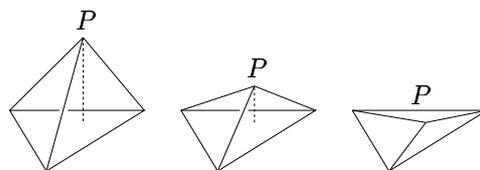


Abbildung 4.8.

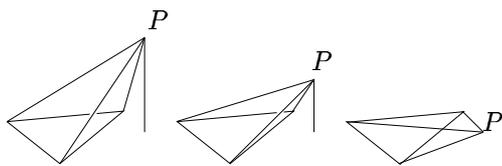


Abbildung 4.9.

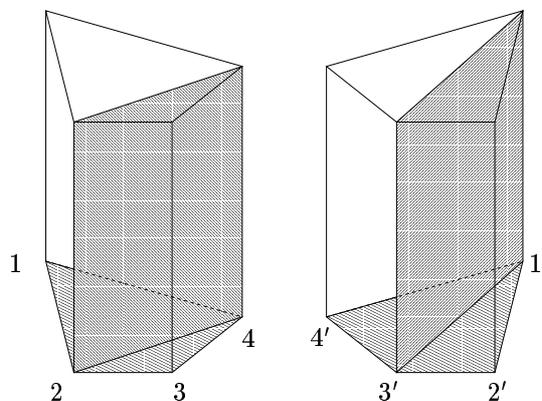


Abbildung 4.10.

Ein Spezialfall, in dem diese Vorgehensweise zum Erfolg führt, ist die Existenz einer Ecke in jeder der 3-Zellen, die nur mit Seiten inzident ist, die Dreiecke sind. Dann liefert nämlich eine Kegelbildung bezüglich dieser Ecke eine Triangulation der gesamten Zelle. Genau dies ist die Grundidee von [WYY96].

In den nächsten beiden Unterabschnitten betrachten wir Möglichkeiten, wie sich die Triangulationen der Ränder der 3-Zellen unter gewissen Einschränkungen auf die 3-Zellen fortsetzen lassen.

### Entartete Simplexe zulassen

Wir möchten die zwei Prismen aus Abbildung 4.7 miteinander verkleben. Die Identifikation, die durch  $(x \mapsto x')$  für  $x = 1, 2, 3$  bestimmt ist, läßt sich im  $\mathbb{R}^3$  ausführen. Dieses Verkleben ist aber nicht mit den Zerlegungen verträglich.

Betrachten wir nun die Deformation des linken 3-Simplexes aus Abbildung 4.8, bei der die eingezeichnete Höhe auf einen Punkt zusammengezogen wird. Es ist ersichtlich, daß das rechte Simplex *entartet* genannt wird, da seine Eckpunkt in einer Ebene liegen. Diesem entarteten Simplex  $\tilde{\sigma}$  werden noch immer vier Randseiten zugesprochen, obwohl die oberen drei Seiten und die untere Dreiecksseite die gleiche Punktmenge bilden.

Kleben wir nun dieses entartete Simplex mit seiner Unterseite auf die Unterseite des linken Prismas aus Abbildung 4.7 und die 3 Dreiecke der oberen Seite von  $\tilde{\sigma}$  auf die untere Seite des

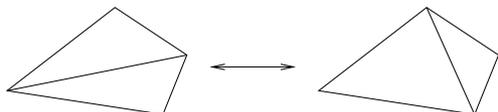


Abbildung 4.11.

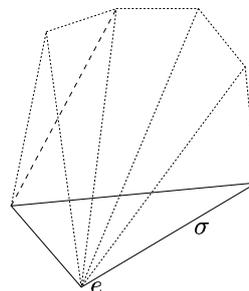


Abbildung 4.12.

rechten Prismas, so haben wir die Prismen verträglich bezüglich der Triangulationen verklebt.

Die Bilder in Abbildung 4.9 legen nahe, wie die Prismen in Abbildung 4.10 durch das Einfügen eines entarteten Simplexes verträglich verklebt werden können, wobei  $x$  auf  $x'$  geht für  $x = 1, 2, 3, 4$ .

Ist nun eine 3-Mannigfaltigkeit durch das Verkleben konvexer Polyedern gegeben, so trianguliere man jedes Polyeder in beliebiger Weise, allerdings ohne neue Ecken einzuführen. Dies ist möglich, man vergleiche [RS72] Proposition 2.9. Das Verkleben wird im allgemeinen nicht verträglich mit den Triangulationen der zweidimensionalen Seiten sein, jedoch zeigt Satz 4.6.1 in Verbindung mit den obigen Betrachtungen über das Einfügen entarteter Simplexe, daß wir immer eine entartete Triangulation erhalten können.

Wir beschränken uns im folgenden nicht nur auf solche  $k$ -Ecke, die im projektiven Modell ein ideales hyperbolisches  $k$ -Eck beschreiben, sondern betrachten beliebige konvexe euklidische Polygone. Man bestätigt sofort, daß zwei Dreiecke aus der Triangulation eines konvexen Polygons, die eine gemeinsame Kante besitzen, ein konvexes Viereck bilden. Wir können somit definieren:

**Definition:** Eine *elementare Transformation* einer Triangulation eines euklidischen konvexen Polygons ist die Ersetzung von zwei Dreiecken  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  mit einer gemeinsamen Kante durch zwei Dreiecke  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_2$ , so daß  $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma'_1 \cup \sigma'_2$  gilt, und zudem  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  und  $\sigma'_1 \cap \sigma'_2$  verschiedene Diagonalen dieses Vierecks sind (vergl. Abb. 4.11).

Man beachte die Ähnlichkeit einer elementaren Transformation mit einem (2, 2)-Prozeß aus Abschnitt 6.5.

**Satz 4.6.1** *Je zwei Triangulationen eines euklidischen konvexen Polygons gehen durch eine Folge von elementaren Transformationen ineinander über.*

**Beweis:** Wir werden den Satz durch Induktion nach der Anzahl der Ecken des Polygons beweisen. Mit  $T_1$  und  $T_2$  bezeichnen wir die beiden gegebenen Triangulationen. Ist das Polygon ein Dreieck, so ist  $T_1 = T_2$ . Wir nehmen zum Induktionsschluß an, daß das Polygon mindestens 4 Ecken besitzt.

In  $T_1$  gibt es ein Dreieck  $\sigma$ , das zwei Kanten enthält, die im Rand des Polygons liegen.<sup>2</sup> Die gemeinsame Ecke dieser beiden Kanten nennen wir  $e$ . Die Dreiecke aus  $T_2$ , die  $e$  als Ecke besitzen, bilden einen Fächer wie in Abbildung 4.12.

Bilden  $r$  Dreiecke diesen Fächer, so kann man durch  $(r - 1)$  elementare Transformationen  $T_2$  so verändern, daß in der entstehenden Triangulation  $T'_2$  das Dreieck  $\sigma$  liegt. Die erste Transformation ist in Abbildung 4.12 als gestrichelte Linie angedeutet. Entfernt man nun  $\sigma$  von dem Polygon, so kann man induktiv die von  $T_1$  und  $T'_2$  bestimmten Zerlegungen durch elementare Transformationen ineinander überführen. ♣

<sup>2</sup>Man beweist induktiv, daß ein Polygon mit mindestens 4 Ecken sogar *zwei* Dreiecke besitzt, die jeweils zwei im Rand liegende Kanten besitzen. Für unsere Belange reicht die Existenz *eines* solchen Dreiecks.

### Wenn die Geometrie nicht zählt

Sieht man von der geometrischen Struktur ab, so kann man die Triangulation des Randes einer Zelle immer auf die ganze Zelle fortsetzen. Man kann nämlich durch eine ambiente Isotopie im  $\mathbb{R}^3$  eine Zelle so verändern, daß ihre Eckpunkte in allgemeiner Lage sind. Man kann sich die Isotopie z.B. so vorstellen, daß die Kanten, die im Inneren von 2-dimensionalen Seiten liegen, ein bißchen „nach außen“ gezogen werden. Dabei wird auf den Rand der Zelle nach der Isotopie die Triangulation des Randes der Zelle vor der Isotopie übertragen. Nun sind alle 2-dimensionalen Seiten der Zelle Dreiecke, und somit ergibt die Kegelbildung bezüglich einer beliebigen Ecke eine Triangulation der Zelle.

### Verändern der Volumina der Spitzen

Wir betrachten nun euklidische Zerlegungen beliebiger Dimension  $n$ . Die zu einer euklidischen Zerlegung gehörende Repräsentantenmenge  $B \subset L^+$  besitzt endlich viele  $\Gamma$ -Orbits  $\Gamma z_1, \dots, \Gamma z_p$ . Wählt man  $\alpha_i \geq 1$ ,  $1 \leq i \leq p$ , so entsprechen  $\alpha_1 z_1, \dots, \alpha_p z_p$  uniformen Horosphären zu kleineren (oder gleichen) Volumina der Spitzen.

Für  $p \geq 2$  könnte man durch ein Allgemeine-Lage-Argument vermuten, daß eine geeignete Wahl der  $\alpha_i$  zu einer euklidischen Zerlegung führt, die aus idealen Simplexen besteht. Dies ist aber nicht richtig.

Gegenbeispiele sind solche Mannigfaltigkeiten, für die eine euklidische Zerlegung existiert, so daß es für jeden  $\Gamma$ -Orbit  $\Gamma z_i$  eine  $n$ -dimensionale Seite  $\sigma_i$  in  $\partial C$  gibt, die nur Ecken in  $\Gamma z_i$  besitzt. Ist nun  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  eine Wahl von Skalaren, und ist (bei geeigneter Numerierung)  $\alpha_1$  ihr Minimum, so führt  $1, \alpha_2/\alpha_1, \dots, \alpha_p/\alpha_1$  zur gleichen Zerlegung wie  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ . Bezeichne  $C'$  die abgeschlossene konvexe Hülle zu  $\Gamma z_1, \Gamma(\alpha_2/\alpha_1)z_2, \dots, \Gamma(\alpha_p/\alpha_1)z_p$ . Man erkennt, daß eine Stützebene an  $C$ , die  $\sigma_1$  enthält, auch eine Stützebene an  $C'$  ist, die  $\sigma_1$  enthält.

Die Existenz solcher Gegenbeispiele in der Dimension  $n = 3$  wurde mir von M. Sakuma mitgeteilt. Sie treten z.B. bei Komplementen von hyperbolischen Verschlingungen auf.

In [HW92] sind einige hyperbolische Knotenkomplemente aufgeführt, deren kanonische Zerlegungen nicht nur aus idealen Simplexen bestehen.

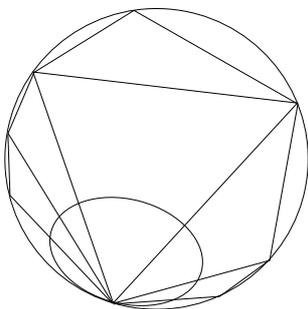


Abbildung 4.13.

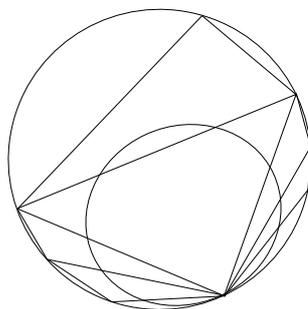


Abbildung 4.14.

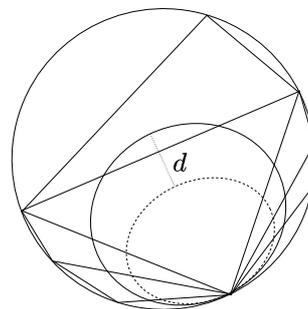


Abbildung 4.15.

## 4.7 Der Schnitt eines Horoballs mit der euklidischen Zerlegung

Es ist prinzipiell möglich, daß ein Horoball  $\Sigma$ , der bei der Konstruktion einer euklidischen Zerlegung benutzt wurde, eine Seite der euklidischen Zerlegung trifft, die den Basispunkt von  $\Sigma$  nicht als idealen Eckpunkt enthält (vergl. Abbildungen 4.13 und 4.14).

Unser Hauptergebnis wird sein, daß wir unabhängig von  $\Gamma$  und sogar unabhängig von der Dimension  $n$  eine Konstante  $d$  finden werden, so daß ein um  $d$  näher am Basispunkt liegender Horoball nur Seiten trifft, die  $x$  als idealen Eckpunkt enthalten (s. Abb. 4.15).

Für einen Vektor  $v$  aus  $L^+$  definieren wir

$$\begin{aligned} W(v) &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ v = -1\} \\ W^+(v) &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ v \geq -1\} \\ W^-(v) &= \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ v \leq -1\}. \end{aligned}$$

Für  $x$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  und eine Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  setzen wir

$$x + M = \{x + m \mid m \in M\}.$$

**Lemma 4.7.1** Für  $v$  aus  $L^+$  ist

$$(v + \overline{L}^+) \cap H^n = W^+(2v) \cap H^n.$$

**Beweis:** Wir werden  $(v + (\overline{L}^+ \cup \overline{L}^-)) \cap H^n = W^+(2v) \cap H^n$  beweisen. Dies ist hinreichend, da  $v + \overline{L}^-$  das Innere von  $L^+$  nicht trifft, also erst recht nicht  $H^n$  trifft.

$$\begin{aligned} &x \in (v + (\overline{L}^+ \cup \overline{L}^-)) \cap H^n \\ \Leftrightarrow &(x - v) \circ (x - v) \leq 0 \wedge x \circ x = -1 \wedge x_{n+1} > 0 \\ \Leftrightarrow &-1 - 2x \circ v \leq 0 \wedge x \circ x = -1 \wedge x_{n+1} > 0 \\ \Leftrightarrow &x \circ (2v) \geq -1 \wedge x \circ x = -1 \wedge x_{n+1} > 0 \\ \Leftrightarrow &x \circ (2v) \geq -1 \wedge x \in H^n \end{aligned}$$

♣

**Lemma 4.7.2** Ist  $z_0$  aus  $B$ , so ist  $W^+(2z_0) \cap H^n$  eine Teilmenge von  $C$ , der abgeschlossenen konvexen Hülle von  $B$ .

**Beweis:** Für einen Vektor  $x$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  definieren wir  $\langle x \rangle_+ = \{\alpha x \mid \alpha \geq 0\}$ . Man sieht leicht, daß für Vektoren  $a, b$  und  $c$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  die abgeschlossene konvexe Hülle von  $b + \langle a \rangle_+$  und  $c$  die Menge  $c + \langle a \rangle_+$  enthält.

Nach Lemma 4.3.4 ist für jedes  $z$  aus  $B$  die Menge  $z + \langle z \rangle_+$  in  $C$  enthalten. Da  $z_0$  in  $C$  liegt, ist  $z_0 + \langle z \rangle_+$  für jedes  $z$  aus  $B$  in  $C$  enthalten. Da die vom Ursprung ausgehenden Halbgeraden durch Punkte aus  $B$  dicht in  $L^+$  liegen, und  $C$  abgeschlossen ist, liegt  $z_0 + L^+$  in  $C$ . Da  $C$  konvex ist, liegt  $z_0 + \bar{L}^+$  in  $C$ . Mit Lemma 4.7.1 folgt, daß  $W(2z_0)^+ \cap H^n$  in  $C$  liegt. ♣

**Satz 4.7.3** *Sei eine euklidische Zerlegung von  $D^n$  gegeben, die zu einer nicht-kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen gehört. Die Zerlegung sei aus einer Menge  $S$  von uniformen Horobällen hervorgegangen. Sei  $\Sigma$  ein Horoball aus  $S$ , sein Basispunkt heiße  $Z$ . Sei  $\Sigma'$  der Horoball, der bezüglich  $\Sigma$  um den Abstand  $\ln 2$  näher am Basispunkt liegt. Dann trifft  $\Sigma'$  nur solche Zellen der euklidischen Zerlegung, die  $Z$  als idealen Eckpunkt besitzen.*

**Beweis:** Seien  $z$  bzw.  $z'$  die Representanten der berandenden Horospheren von  $\Sigma$  bzw.  $\Sigma'$  in  $L^+$ . Nach Lemma 3.3.3 ist  $z' = 2z$ .

Wir fassen  $D^n$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n \times \{1\}$  auf (vergl. Bemerkung S. 18). Die vom Ursprung ausgehende radiale Projektion von  $D^n$  nach  $H^n$  bildet  $\Sigma'$  auf  $W^+(2z) \cap H^n$  ab. Sei  $x$  ein Punkt aus  $\Sigma'$ . Die vom Ursprung ausgehende Halbgerade durch  $x$  trifft  $\partial C$  und  $W^+(2z) \cap H^n$  in jeweils genau einem Punkt, sagen wir  $x_1$  und  $x_2$ . Nach Lemma 4.7.2 ist  $x_2$  in  $C$  enthalten. Da  $x_1$  in  $\partial C$  enthalten ist, liegt  $x_1$  auf der euklidischen Strecke vom Ursprung nach  $x_2$ . Somit ist  $x_1$  in dem Halbraum von  $W(2z)$  enthalten, der auch den Ursprung enthält, und das ist  $W^+(2z)$ .

Nach Korollar 3.3.5 ist  $u \circ z < -2$  fur ein von  $z$  verschiedenes Element  $u$  aus  $B$ . Deshalb liegen alle Elemente von  $B - \{z\}$  im Inneren von  $W^-(z/2)$ . Insbesondere liegt  $B - \{z\}$  somit im Inneren von  $W^-(2z)$ . Da  $x_1$  (wie oben bemerkt) in  $W^+(2z)$  liegt, kann  $x_1$  nicht in der konvexen Hulle von endlich vielen Punkten aus  $B - \{z\}$  liegen. Das bedeutet, daß  $x$  nur in solchen Seiten der kanonischen Zerlegung von  $D^n$  liegen kann, die  $Z$  als ideale Ecke besitzen. ♣

# Kapitel 5

## Die duale Zerlegung

### 5.1 Einleitung

In Kapitel 4 haben wir zu einer Wahl von uniformen Horobällen die euklidische Zerlegung einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit konstruiert. In diesem Kapitel werden wir den Prozeß untersuchen, der in [EP88] durch das „gleichmäßige Anwachsen“ der uniformen Horobälle beschrieben wurde. Ein ähnlicher Vorgang ist in der euklidischen Ebene wohlbekannt (vergl. Abschnitt 5.5 in [PS85]). Zu endlich vielen Punkten  $P_1, \dots, P_r$  der euklidischen Ebene entsteht die Voronoi-Zerlegung, indem man Kreise um die  $P_i$  gleichmäßig anwachsen läßt. An Berührungsstellen hört dieses Anwachsen auf. Die Zerlegung besteht aus Bereichen  $V_1, \dots, V_r$ , wobei  $V_i$  die Punkte enthält, die von  $P_i$  höchstens so weit entfernt sind wie von  $P_1, \dots, P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_r$  (s. Abb. 5.1). Dieses Konzept werden wir auf die uniformen Horobälle übertragen. Wir werden zeigen, daß die entstehende Zerlegung dual zur euklidischen Zerlegung ist.

Wir werden in Abschnitt 5.4 zeigen, daß dadurch duale Zerlegungen auf den Spitzen-Schnitten induziert werden. Satz 5.4.2 wird zeigen, daß viele duale Zellen isometrisch sind. Hier könnte ein neuer Ansatzpunkt zur Entscheidung der Frage liegen, ob die in [SW95a] angegebene Zerlegung für (fast alle) zwei-Brücken-Knoten die kanonische Zerlegung ist.

In Abschnitt 5.5 werden wir sehen, daß das  $(n - 1)$ -Gerüst der dualen Zerlegung ein Kollabier-retrakt der hyperbolischen Mannigfaltigkeit ist.

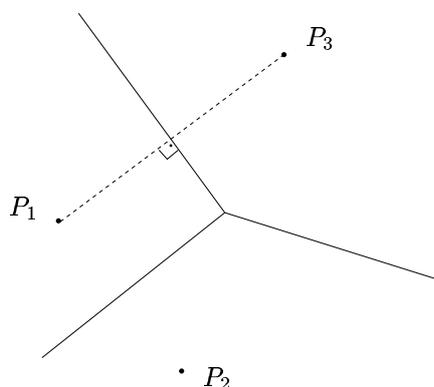


Abbildung 5.1. Voronoi-Zerlegung in der euklidischen Ebene

## 5.2 Struktur der Voronoi-Bereiche

Wir gehen von einer fest gewählten nicht-kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit  $H^n/\Gamma$  mit endlichem Volumen aus. Zudem wählen wir zu den Spitzen eine Menge  $S$  uniformer Horosphären, deren Repräsentantenmenge in  $L^+$  wir mit  $B = \{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  bezeichnen. Wir wollen dabei nicht an einer bestimmten Numerierung festhalten, sondern eine Teilmenge  $\{z_{i_1}, \dots, z_{i_m}\}$  von  $B$  als  $\{z_1, \dots, z_m\}$  bezeichnen dürfen, falls dies nicht zu Verwechslungen führt. Mit  $C$  bezeichnen wir die abgeschlossene konvexe Hülle von  $B$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Kapitel 4 entsprechend bestimmt  $B$  eine euklidische Zerlegung von  $D^n$ , also auch eine euklidische Zerlegung von  $H^n$ . Im folgenden werden wir den vorzeichenbehafteten Abstand zwischen einem Punkt und einer Horosphäre entsprechend Abschnitt 3.3 verwenden, aber den Zusatz „vorzeichenbehaftet“ weglassen.

Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir den Punkt in  $H^n$ , der einem Punkt  $x$  in  $D^n$  entspricht, ebenfalls mit  $x$ .

**Definition:** Für  $z_0$  aus  $B$  ist der *Voronoi-Bereich zur Horosphäre*  $h_{z_0}$  die Menge aller Punkte aus  $H^n$ , die von jeder der Horosphären  $h_z$ ,  $z \in B - \{z_0\}$ , mindestens so weit entfernt sind, wie von  $h_{z_0}$ . Für  $z_0$  aus  $B$  nennen wir den Voronoi-Bereich zur Horosphäre  $h_{z_0}$  auch kurz den *Voronoi-Bereich zu*  $z_0$ .

**Bemerkung:** In der Bemerkung von Seite 51 haben wir erwähnt, daß die euklidische Zerlegung bereits durch die Verhältnisse der den Spitzen zugeordneten Volumina bestimmt ist. Das gleiche gilt für die Voronoi-Zerlegung. Die Multiplikation aller Element von  $B_1$  mit  $0 < \beta < 1$  in der zitierten Bemerkung entspricht dem Schrumpfen aller Horosphären um den Abstand  $(\ln \beta)/(1 - n)$ .

**Lemma 5.2.1** *Seien  $u$  und  $v$  linear unabhängige Vektoren aus  $L^+$ . Die Punkte aus  $H^n$ , die von  $h_u$  mindestens so weit entfernt sind, wie von  $h_v$ , bilden den hyperbolischen Halbraum*

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ (u - v) \leq 0\} \cap H^n.$$

*Die Punkte aus  $H^n$ , die von  $h_u$  und  $h_v$  gleich weit entfernt sind, bilden die Hyperebene*

$$\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ (u - v) = 0\} \cap H^n.$$

**Beweis:** Gemäß Lemma 3.3.2 ist der Abstand eines Punktes  $x$  aus  $H^n$  von der Horosphäre  $h_u$  bzw.  $h_v$  gleich  $\ln(-x \circ u)$  bzw.  $\ln(-x \circ v)$ . Genau dann ist der Punkt  $x$  von  $h_u$  mindestens so weit entfernt, wie von  $h_v$ , wenn  $\ln(-x \circ u) \geq \ln(-x \circ v)$  ist. Dies ist äquivalent zu  $x \circ (u - v) \leq 0$ . Genau dann ist  $x$  von  $h_u$  und  $h_v$  gleich weit entfernt, wenn  $x \circ (u - v) = 0$  ist.

Nach Satz 1.1.2 ist  $(u - v)$  raumartig, also  $\langle u - v \rangle^L \cap H^n$  eine hyperbolische Hyperebene. ♣

**Korollar 5.2.2** *Ist  $z_0$  aus  $B$ , so läßt sich der Voronoi-Bereich  $V_0$  zur Horosphäre  $h_{z_0}$  darstellen als*

$$V_0 = \bigcap_{z \in B - \{z_0\}} \{x \in H^n \mid x \circ (z - z_0) \leq 0\}.$$

**Beweis:** Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 5.2.1. ♣

**Lemma 5.2.3** *Seien  $z_1, \dots, z_r$  Punkte aus  $B$ . Genau dann ist die Schnittmenge der Voronoi-Bereiche  $V(z_1), \dots, V(z_r)$  nicht leer, wenn das von  $z_1, \dots, z_r$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  aufgespannte Polyeder in einer Seite von  $\partial C$  enthalten ist. Ein Punkt  $w$  aus  $H^n$  liegt genau dann in  $\bigcap_{i=1}^r V(z_i)$ , wenn für die gemäß der Lemmata 4.3.6 und 4.3.7 dem Vektor  $w$  zugeordnete raumartige Stützebene  $W(w)$  an  $C$  gilt, daß  $z_1, \dots, z_r$  in  $W(w) \cap B$  enthalten sind. Es existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so daß  $U_\varepsilon(w)$  nur diejenigen Voronoi-Bereiche trifft, die zu Punkten aus  $W(w) \cap B$  gehören.*

**Beweis:** Genau dann liegt  $w$  aus  $H^n$  in  $\bigcap_{i=1}^r V(z_i)$ , wenn ein  $q < 0$  existiert, so daß

$$\begin{aligned} w \circ z_i &= q \quad \text{für } i = 1, \dots, r, \text{ und} \\ w \circ z &\leq q \quad \text{für } z \in B - \{z_1, \dots, z_r\} \end{aligned}$$

(vergl. Lemma 5.2.1,  $d(w, h_{z_i}) = \ln(-q)$ ,  $i = 1, \dots, r$ ). Dies ist genau dann der Fall, wenn  $B$  im Halbraum  $R = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | w \circ x \leq q\}$  enthalten ist, und  $z_1, \dots, z_r$  in der Hyperebene  $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | w \circ x = q\}$  liegen. Dies ist äquivalent dazu, daß  $C$  in  $R$  liegt, und  $z_1, \dots, z_r$  in  $E$  liegen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß  $E$  eine Stützebene an  $C$  ist, die  $z_1, \dots, z_r$  enthält. Da  $E$  den Normalenvektor  $w$  besitzt, ist  $E = W(w)$ .

Liegt  $w$  in  $\bigcap_{i=1}^r V(z_i)$ , so enthält nach dem obigen die Menge  $W(w) \cap B$  die Punkte  $z_1, \dots, z_r$ . Durch geeignetes Ummumerieren der Elemente von  $B - \{z_1, \dots, z_r\}$  sei

$$W(w) \cap B = \{z_1, \dots, z_s\}, \quad s \geq r.$$

Es existiert  $\varepsilon_0 > 0$ , so daß

$$\begin{aligned} w \circ z_i &= q \quad \text{für } i = 1, \dots, s, \text{ und} \\ w \circ z_i &\leq q - \varepsilon_0 \quad \text{für } i \geq s + 1 \end{aligned}$$

(betrachte die Menge  $V$  in Lemma 4.3.8). Somit ist

$$d(x, h_{z_i}) \geq \ln(\varepsilon_0 - q) \quad \text{für } i \geq s + 1.$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß  $U_\varepsilon(x)$  für  $\varepsilon = (\ln(\varepsilon_0 - q) - \ln(-q))/2$  disjunkt zu den Voronoi-Bereichen zu Punkten aus  $B - \{z_1, \dots, z_s\}$  ist. ♣

**Definition:** Sei  $\sigma$  eine Zelle der euklidischen Zerlegung von  $D^n$  oder ein parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$ . Die in  $\partial C$  liegende konvexe Hülle endlich vieler Punkte  $z_1, \dots, z_r$  aus  $B$  wird auf  $\sigma$  projiziert. Das zu  $\sigma$  duale Element  $\sigma^*$  ist der Durchschnitt der Voronoi-Bereiche  $V(z_1), \dots, V(z_r)$ .

**Korollar 5.2.4** Die Voronoi-Bereiche bilden eine lokal-endliche Überdeckung von  $H^n$ .

**Beweis:** Sei  $w$  aus  $H^n$  und  $W(w)$  die zugeordnete raumartige Stützebene an  $C$ .  $W(w) \cap B$  ist eine endliche, nicht-leere Teilmenge von  $B$ . Mit Lemma 5.2.3 folgt, daß  $U_\varepsilon(w)$  nur endlich viele Voronoi-Bereiche (aber mindestens einen Voronoi-Bereich) trifft. ♣

**Definition:** Die Menge aller Voronoi-Bereiche zu Horosphären  $h_z$ ,  $z$  aus  $B$ , bezeichnen wir als *Voronoi-Zerlegung von  $H^n$* .

**Lemma 5.2.5** Ist  $z_0$  aus  $B$ , so läßt sich das Innere des Voronoi-Bereiches  $V_0$  zur Horosphäre  $h_{z_0}$  darstellen als

$$\overset{\circ}{V}_0 = \bigcap_{z \in B - \{z_0\}} \{x \in H^n | x \circ (z - z_0) < 0\}.$$

**Beweis:** Man beachte, daß die Schnittmenge offener Mengen nicht offen sein muß. Bezeichne

$$M = \bigcap_{z \in B - \{z_0\}} \{x \in H^n | x \circ (z - z_0) < 0\}.$$

Ein Punkt  $x$  aus  $M$  liegt nach Lemma 5.2.1 in keinem der Voronoi-Bereiche  $V_i$ ,  $i > 0$ . Nach Korollar 5.2.4 gibt es dann eine Umgebung  $U_\varepsilon(x)$ , die keinen der Voronoi-Bereiche  $V_i$ ,  $i > 0$ , trifft, d. h. die in  $H^n$  offene Umgebung  $U_\varepsilon(x)$  liegt in  $M$ . Somit ist  $M$  in  $\overset{\circ}{V}_0$  enthalten.

Da aber für  $z \neq z_0$  ein Punkt aus  $\langle z - z_0 \rangle^L \cap H^n$  bereits in  $\{x \in H^n | x \circ (z - z_0) \leq 0\}$  keine Umgebung besitzt, die in  $H^n$  offen ist, liegt auch  $\overset{\circ}{V}_0$  in  $M$ . ♣

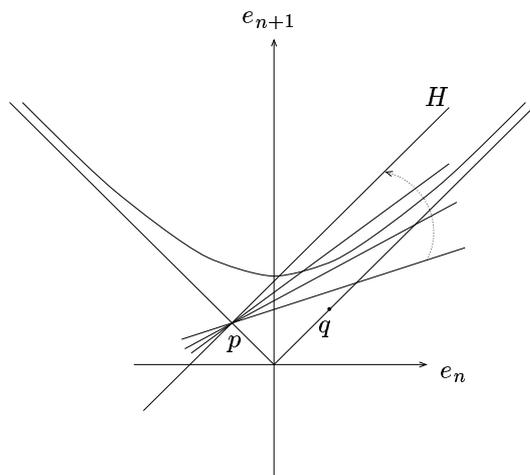


Abbildung 5.2.

**Lemma 5.2.6** Sei  $V$  der Voronoi-Bereich in  $D^n$  zur Horosphäre  $h$  mit dem Basispunkt  $P$ . Für den Abschluß  $\bar{V}$  von  $V$  als Teilmenge des euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^n$  gilt

$$\bar{V} \cap \partial D^n = \{P\}.$$

**Beweis:** Sei  $p$  aus  $L^+$  der Repräsentant der Horosphäre  $h$ . Die Projektion von  $\bar{L}^+$  nach  $D^n$  bildet  $p$  auf  $P$  ab. Wäre  $Q$  ein von  $P$  verschiedener Punkt aus  $\bar{V} \cap \partial D^n$ , so wäre die Gerade  $g$  von  $P$  nach  $Q$  in  $\bar{V}$  enthalten, da  $\bar{V}$  konvex ist. Dann wäre auch  $g$  in  $V$  enthalten, da  $V$  als Schnittmenge abgeschlossener Halbräume abgeschlossen ist, also  $\bar{V} \cap \partial D^n = V \cap \partial D^n$  ist.

Sei  $x$  ein Punkt aus  $g$ . Wir fassen  $x$  als Punkt aus  $H^n$  auf. Seinen Abstand zu  $h$  bezeichnen wir mit  $r_x$ . Aus Lemma 5.2.3 folgt, daß

$$H_x = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y \circ x = -e^{r_x}\}$$

eine Stützebene an  $C$  am Punkt  $p$  ist.

Sei nun  $q$  ein Punkt aus  $L^+$ , der auf  $Q$  projiziert wird. Aus Stetigkeitsgründen ist dann auch die Hyperebene  $H$ , die parallel zu  $\langle q \rangle^L$  ist und den Punkt  $p$  enthält, eine Stützebene an  $C$  am Punkt  $p$ . Dies sieht man am leichtesten ein, wenn man  $p$  und  $q$  durch eine Lorentz-Transformation in den Untervektorraum  $\langle e_1, e_{n+1} \rangle$  abbildet. In Abbildung 5.2 ist das Verhalten von  $H_x \cap \langle e_1, e_{n+1} \rangle$  dargestellt, wobei  $x = (\sinh t)e_1 + (\cosh t)e_{n+1}$ ,  $t \rightarrow +\infty$ .

Da aber nach Lemma 4.3.6  $\langle p \rangle^L$  die einzige lichtartige Stützebene an  $C$  am Punkt  $p$  ist, war die Annahme der Existenz eines von  $P$  verschiedenen Punktes  $Q$  aus  $\bar{V} \cap \partial D^n$  falsch. ♣

**Lemma 5.2.7** Ein Voronoi-Bereich ist ein  $n$ -dimensionales konvexes Polyeder. Seine Seiten sind kompakt.

**Beweis:** Sei  $V_0$  der Voronoi-Bereich zur Horosphäre  $h_{z_0}$  und  $x$  ein Punkt aus dem Rand von  $V_0$ . Nach Korollar 5.2.2 und Lemma 5.2.5 ist  $x$  in

$$\bigcup_{z \in B - \{z_0\}} \langle z - z_0 \rangle^L \cap H^n$$

enthalten. Also liegt  $x$  außer in  $V_0$  noch in mindestens einem anderen Voronoi-Bereich. Nach Korollar 5.2.4 gibt es eine Umgebung  $U(x)$  und eine endliche Teilmenge  $\{z_0, z_1, \dots, z_g\}$  von  $B$ ,

$g \geq 1$ , so daß für einen Punkt  $y$  aus  $U(x)$  gilt

$$d(y, h_{z_i}) < d(y, h_{z_j}) \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, g \text{ und } j \geq g + 1.$$

Somit ist

$$U(x) \cap V_0 = U(x) \cap \bigcap_{i=1}^g \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ (z_i - z_0) \leq 0\}.$$

Die Menge der Halbräume  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ (z_i - z_0) \leq 0\}$ , deren Schnitt  $V_0$  bildet, ist in  $\partial V_0$  lokal-endlich. Somit ist  $V_0$  ein Polyeder.

Die Dimension von  $V_0$  ist  $n$ , da der von der Horosphäre  $h_{z_0}$  berandete offene Horoball in  $V_0$  enthalten ist.

Die Seiten von  $V_0$  sind die nicht-leeren Schnittmengen

$$\bigcap_{z \in A} \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ (z - z_0) = 0\},$$

wobei  $A$  eine nicht-leere Teilmenge von  $B$  ist. Nach der obigen Betrachtung kann der Schnitt nur für endliches  $A$  nicht-leer sein. Insbesondere sind die Seiten von  $V_0$  abgeschlossen. Wir müssen nun noch nachweisen, daß sie beschränkt sind. Wir nehmen an, daß eine unbeschränkte Seite  $\tau$  von  $V_0$  existiert. Der Abschluß  $\bar{\tau}$  von  $\tau$  als Teilmenge des euklidischen Raumes  $\bar{D}^n$  trifft dann  $\partial D^n$ . Nach Lemma 5.2.6 kann höchstens der Basispunkt der Horosphäre  $h_{z_0}$  in  $\bar{\tau} \cap \partial D^n$  liegen. Ist  $y$  aus  $\tau$ , so liegt die Halbgerade zwischen  $y$  und diesem Basispunkt in der konvexen Menge  $\tau$ . Die Halbgerade trifft allerdings den von  $h_{z_0}$  berandeten Horoball, also das Innere von  $V_0$ . Da eine Seite aber nicht das Innere treffen kann, war die Annahme, daß  $\tau$  unbeschränkt ist, falsch. ♣

Bereits zu Beginn von Abschnitt 4.4 haben wir den Begriff „Zelle“ eingeführt. Wir wollen diesen Begriff nun erweitern.

**Definition:** Ein konvexes Polyeder in  $X = \mathbb{R}^n$  oder  $H^n$ , das die konvexe Hülle seiner endlich vielen Eckpunkte ist, bezeichnen wir als *Zelle*. Ist  $X = H^n$ , so lassen wir auch ideale Ecken zu. Eine  $k$ -dimensionale Zelle  $\sigma$  spannt eine  $k$ -dimensionale Ebene auf, die wir mit  $\langle \sigma \rangle$  bezeichnen. Zwei Zellen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  heißen *quasiorthogonal*, wenn  $\langle \sigma_1 \rangle$  und  $\langle \sigma_2 \rangle$  sich in genau einem Punkt schneiden und dort (euklidisch bzw. hyperbolisch) orthogonal sind. Ist  $\sigma_2$  ein Punkt, so bedeutet die Eigenschaft quasiorthogonal nur, daß  $\sigma_2$  in  $\langle \sigma_1 \rangle$  enthalten ist.

**Bemerkung:** Quasiorthogonale Zellen können disjunkt sein.

**Satz 5.2.8** Für Zellen  $\eta$  und  $\sigma$  einer euklidischen Zerlegung von  $H^n$  bezüglich  $\Gamma$  gilt:

- Genau dann ist  $\eta \subset \sigma$ , wenn  $\sigma^* \subset \eta^*$ .
- Ist  $\sigma$  eine  $k$ -dimensionale Zelle,  $1 \leq k \leq n$ , so ist  $\sigma^*$  eine kompakte  $(n - k)$ -dimensionale Zelle.
- Die Zellen  $\sigma$  und  $\sigma^*$  sind hyperbolisch quasiorthogonal.

**Beweis:** Der Zelle  $\sigma$  seien die Vektoren  $z_1, \dots, z_m$  aus  $B$  zugeordnet. Da die Dimension von  $\sigma$  mindestens 1 ist, ist  $m$  größergleich 2.

Zum Beweis der ersten Behauptung bemerken wir, daß bei geeigneter Numerierung  $\eta$  die idealen Ecken  $\{z_1, \dots, z_j\}$ ,  $j \leq m$ , besitzt. Ein Punkt aus  $H^n$ , der von allen Horosphären  $h_{z_1}, \dots, h_{z_m}$  den gleichen Abstand besitzt, hat insbesondere von den Horosphäre  $h_{z_1}, \dots, h_{z_j}$  den gleichen Abstand, was die erste Behauptung beweist.

Wir weisen nun die zweite Behauptung nach.  $\sigma^*$  ist der Durchschnitt abgeschlossener Mengen, folglich ist  $\sigma^*$  abgeschlossen. Wir werden nun zeigen, daß  $\sigma^*$  in einer Seite des Voronoi-Bereiches  $V_1$  zur Horosphäre  $h_{z_1}$  enthalten ist. Mit Lemma 5.2.7 folgt dann, daß  $\sigma^*$  kompakt ist. Schließlich werden wir zeigen, daß die Dimension von  $\sigma^*$  gleich  $(n - k)$  ist.

Die Menge  $T$  der Punkte aus  $H^n$ , die von  $h_{z_1}, \dots, h_{z_m}$  gleich weit entfernt sind, ist nach Lemma 5.2.1

$$\begin{aligned} T &= \bigcap_{i=2}^m \langle z_i - z_1 \rangle^L \cap H^n \\ &= \langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle^L \cap H^n. \end{aligned}$$

$\sigma^*$  ist in  $T$  enthalten. Aus dem Beweis von Lemma 5.2.7 folgt, daß  $V_1 \cap (\langle z_2 - z_1 \rangle^L \cap H^n)$  eine Seite von  $V_1$  ist, die  $\sigma^*$  enthält.

Wir berechnen nun die Dimension von  $T$ . Dabei beachte man, daß  $\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle$  ein echter Untervektorraum von  $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$  ist, denn gemäß der obigen Darstellung von  $T$  ist der Untervektorraum  $\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle$  raumartig.

$$\begin{aligned} \text{Dim} T &= \text{Dim}(\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle^L) - 1 \\ &= (n + 1 - \text{Dim} \langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle) - 1 \\ &= n - \text{Dim} \langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle \\ &= n - (\text{Dim} \langle z_1, \dots, z_m \rangle - 1) \\ &= n - \text{Dim} \langle \sigma \rangle. \end{aligned}$$

Wir müssen nun noch zeigen, daß  $\sigma^*$  ein nicht-leeres Inneres in  $T$  besitzt. Da  $\sigma$  einer Seite  $\hat{\sigma}$  von  $\partial C$  entspricht, gibt es eine raumartige Stützebene  $W(w)$  an  $\partial C$ , so daß  $W(w) \cap \partial C = \hat{\sigma}$ . Nach Lemma 5.2.3 gibt es eine  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(w)$  dieses Punktes  $w$  aus  $H^n$ , die nur diejenigen Voronoi-Bereiche trifft, die zu den Ecken  $z_1, \dots, z_m$  von  $\hat{\sigma}$  gehören. Die Menge  $U_\varepsilon(w) \cap T$  ist dann in  $\sigma^*$  enthalten, also ist das Innere von  $\sigma^*$  in  $T$  nicht leer.

Wir beweisen nun die dritte Behauptung. Man erinnere sich, daß  $m \geq 2$  ist. Der Untervektorraum  $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$  ist zeitartig; seine Dimension sei mit  $r$  bezeichnet.

Nach dem obigen Beweis der zweiten Behauptung ist der von  $\sigma^*$  in  $H^n$  aufgespannte Raum gleich  $\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle^L \cap H^n$ . Da  $\sigma$  in  $H^n$  den Raum  $\langle z_1, \dots, z_m \rangle \cap H^n$  aufspannt, müssen wir zeigen, daß sich  $\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle^L \cap H^n$  und  $\langle z_1, \dots, z_m \rangle \cap H^n$  orthogonal in einem Punkt schneiden.

Es gibt eine positive Lorentz-Transformation  $A$ , die  $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$  auf  $U_1 = \langle e_1, \dots, e_{r-1}, e_{n+1} \rangle$  abbildet und dabei  $\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle$  in  $\langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle$  überführt. Da  $A$  orthogonale Komplemente erhält, wird  $\langle z_2 - z_1, \dots, z_m - z_1 \rangle^L$  auf  $U_2 = \langle e_r, \dots, e_{n+1} \rangle$  abgebildet. In  $B^n$  werden die Ebenen  $U_1 \cap H^n$  und  $U_2 \cap H^n$  dargestellt als  $\langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle \cap B^n$  und  $\langle e_r, \dots, e_n \rangle \cap B^n$ . Sie schneiden sich wie behauptet orthogonal in einem Punkt, und zwar dem Ursprung. ♣

**Bemerkung:** Das duale Element  $\sigma^*$  werden wir auch *duale Zelle* nennen.

### 5.3 Operationen auf der Voronoi-Zerlegung

**Satz 5.3.1**  $\Gamma$  operiert auf der Menge der Voronoi-Bereiche.  $\Gamma$  operiert für  $0 \leq i \leq n - 1$  frei auf der Menge der  $i$ -dimensionalen dualen Zellen. Bei beiden Operationen gibt es nur endlich viele Orbits.

**Beweis:** Aus der Definition des Voronoi-Bereiches folgt unter Benutzung der Uniformität der Horosphären unmittelbar, daß  $\Gamma$  auf den Voronoi-Bereichen operiert.

Sei  $\sigma$  eine Zelle der euklidischen Zerlegung. Sie entspreche der konvexen Hülle von  $z_1, \dots, z_m$  in  $\partial C$ . Dann entspricht  $\gamma(\sigma)$  der konvexen Hülle von  $\gamma(z_1), \dots, \gamma(z_m)$  in  $\partial C$ . Nach Definition ist

$$\sigma^* = \bigcap_{i=1}^m V(h_{z_i}) \quad \text{und} \quad (\gamma(\sigma))^* = \bigcap_{i=1}^m V(h_{\gamma(z_i)}). \quad (5.3.1)$$

Die Injektivität von  $\gamma$  impliziert

$$\bigcap_{i=1}^m \gamma(V(h_{z_i})) = \gamma\left(\bigcap_{i=1}^m V(h_{z_i})\right). \quad (5.3.2)$$

Wie oben bemerkt, ist  $V(h_{\gamma(z_i)}) = \gamma(V(h_{z_i}))$ . Aus den Gleichungen (5.3.1) und (5.3.2) folgt somit  $(\gamma(\sigma))^* = \gamma(\sigma^*)$ . Da  $\Gamma$  gemäß Lemma 4.4.2 frei auf der euklidischen Zerlegung operiert, folgt aus  $(\gamma(\sigma))^* = \gamma(\sigma^*)$ , daß  $\Gamma$  frei auf den dualen Zellen operiert. ♣

Die Voronoi-Zerlegung von  $H^n$  induziert nach Satz 5.3.1 eine Zerlegung von  $H^n/\Gamma$ , die wir ebenfalls als Voronoi-Zerlegung bezeichnen. Wir bezeichnen die Voronoi-Zerlegungen von  $H^n$  und  $H^n/\Gamma$  als *kanonisch*, wenn die uniformen Horosphären zu einer euklidischen Zerlegung gehören, die kanonisch ist.

**Satz 5.3.2** *Sei die Voronoi-Zerlegung von  $H^n$  kanonisch. Der Normalisator  $N(\Gamma)$  von  $\Gamma$  in  $I(H^n)$  operiert auf der Menge der Voronoi-Bereiche.  $N(\Gamma)$  operiert für  $0 \leq i \leq n-1$  frei auf den  $i$ -dimensionalen dualen Zellen.*

**Beweis:** Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 5.3.1. Gemäß Lemma 4.4.4 operiert  $N(\Gamma)$  frei auf der kanonischen Zerlegung von  $H^n$ . ♣

## 5.4 Duale Zerlegungen auf den Spitzen-Schnitten

Wir betrachten in diesem Abschnitt die von einer euklidischen Zerlegung von  $H^n/\Gamma$  induzierte Zerlegung auf den Spitzen-Schnitten. Indem wir alle uniformen Horobälle um den Abstand  $\ln 2$  schrumpfen, können wir nach Satz 4.7.3 annehmen, daß die Horobälle nur solche Zellen der euklidischen Zerlegung treffen, die den jeweiligen Basispunkt als idealen Eckpunkt besitzen.

Wir betrachten die Situation nun im  $U^n$  und bringen den Basispunkt einer der uniformen Horosphären nach  $\infty$ . Diese Horosphäre  $h$  identifizieren wir auf natürliche Weise mit  $\mathbb{R}^{n-1}$  (vergl. Abschnitt 3.2). Der Schnitt von  $h$  mit der euklidischen Zerlegung ist eine Zerlegung  $Z_1$  von  $h$  in kompakte euklidische konvexe Polyeder. Der Stabilisator  $\Gamma_\infty$  enthält nur Isometrie parabolischen Typs. Er ist also die Poincaré-Erweiterung einer diskreten, frei operierenden Untergruppe des  $\mathbb{R}^{n-1}$ , die wir ebenfalls mit  $\Gamma_\infty$  bezeichnen. Gemäß Lemma 4.4.2 operiert  $\Gamma_\infty$  frei auf der Zerlegung  $Z_1$ .

Sei  $\eta^*$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Seite aus dem Rand des Voronoi-Bereiches  $V(h)$ . Mit  $F$  bezeichnen wir die von  $\eta^*$  aufgespannte Hyperebene. Es gibt endlich viele Halbräume  $E_i$ , so daß

$$\eta^* = F \cap \bigcap_{i=1}^r E_i.$$

Bezeichne  $\partial E_i$  die  $E_i$  berandende Hyperebene. Durch hyperbolische Rotation von  $\partial E_i$  um  $E_i \cap F$  bringe man  $\partial E_i$  auf eine Hyperebene, die  $\infty$  enthält.  $E_i$  geht dabei in einen Halbraum  $E'_i$  über. Es ist  $E'_i \cap F = E_i \cap F$ . Wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß die  $E_i$  euklidische Hyperebenen sind, die orthogonal zu  $\partial U^n$  sind.

Die orthogonale Projektion von  $\eta^* = F \cap \bigcap_{i=1}^r E_i$  auf  $h$  ist  $h \cap \bigcap_{i=1}^r E_i$ . Dies ist ein euklidisches konvexes Polyeder  $\tilde{\eta}$ . Es ist kompakt, da  $\eta^*$  nach Satz 5.2.8 kompakt ist. Man sieht leicht, daß die Seiten von  $\eta^*$  auf die Seiten von  $\tilde{\eta}$  abgebildet werden.

Die orthogonale Projektion bildet  $\partial V(h)$  somit auf eine Zerlegung  $Z_2$  von  $h$  ab, die aus kompakten euklidischen konvexen Polyedern besteht. Da  $\Gamma$  frei auf der Voronoi-Zerlegung operiert, operiert insbesondere  $\Gamma_\infty$  frei auf den Seiten von  $\partial V(h)$ . Da  $\Gamma_\infty$  nur Poincaré-Erweiterungen von euklidischen Isometrien enthält, operiert  $\Gamma_\infty$  frei auf  $Z_2$ .

**Definition:** Eine  $k$ -dimensionale Zelle  $\eta$  aus  $Z_1$  ist der Schnitt von  $h$  mit einer  $(k+1)$ -dimensionalen Zelle  $\eta'$  der euklidischen Zerlegung von  $U^n$ , wobei  $\eta'$  den Punkt  $\infty$  enthält. Die orthogonale Projektion der dualen  $(n-k-1)$ -dimensionalen Zelle  $(\eta')^*$  auf  $h$  ist (nach dem obigen) eine  $(n-1-k)$ -dimensionale Zelle  $\eta^*$ . Sie heißt die zu  $\eta$  *duale* Zelle. Die Menge der dualen Zellen bezeichnen wir mit  $Z_2$ .

**Bemerkung:** Die Zerlegung  $Z_1$  bezeichnen wir auch mit  $Z$ , die Zerlegung  $Z_2$  bezeichnen wir auch mit  $Z^*$ . Da  $\Gamma_\infty$  auf den Zerlegungen  $Z_1$  und  $Z_2$  operiert, induzieren diese Zerlegungen duale Zerlegungen des Spitzen-Schnitts  $h/\Gamma_\infty$ .

Man beachte, daß  $\Gamma$  und  $\Gamma_\infty$  verschiedene Operationen auf  $\partial V(h)$  induzieren können. Ein Beispiel ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Spitze. Sei  $\sigma$  eine 1-Zelle ihrer kanonischen Zerlegung. Die idealen Endpunkte von  $\sigma$  heißen  $P$  und  $Q$ . Es existiert ein  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , so daß  $\gamma(P) = Q$ . Für  $x \in V(h_P) \cap V(h_Q)$  ist  $\gamma(x) \in \partial V(h_Q)$ , jedoch  $\gamma(Q) \neq Q$ .

**Satz 5.4.1** *Seien  $\eta$  und  $\sigma$  Zellen aus der Zerlegung  $Z_1$  von  $h$ . Dann gilt:*

- Genau dann ist  $\eta \subset \sigma$ , wenn  $\sigma^* \subset \eta^*$ .
- Ist  $\sigma$  eine  $k$ -dimensionale Zelle,  $0 \leq k \leq n-1$ , so ist  $\sigma^*$  eine  $(n-1-k)$ -dimensionale Zelle.
- Die Zellen  $\sigma$  und  $\sigma^*$  sind euklidisch quasiorthogonal.
- $\Gamma_\infty$  operiert frei auf  $Z_2$ , und für  $\gamma$  aus  $\Gamma_\infty$  ist  $(\gamma(\sigma))^* = \gamma(\sigma^*)$ .
- Ist die euklidische Zerlegung kanonisch, so operiert  $[N(\Gamma)]_\infty$  frei auf  $Z_2$ , und für  $\gamma$  aus  $[N(\Gamma)]_\infty$  ist  $(\gamma(\sigma))^* = \gamma(\sigma^*)$ .

**Beweis:** Bis auf die Aussage über die Quasiorthogonalität folgen alle Aussagen aus den obigen Betrachtungen und den Sätzen 5.2.8, 5.3.1 und 5.3.2.

Wir zeigen, daß  $\sigma$  und  $\sigma^*$  quasiorthogonal sind (vergl. Abb. 5.3). Bezeichne  $h$  die Horosphäre, auf der wir die Zerlegungen  $Z_1$  und  $Z_2$  betrachten. Bezeichne  $\mu$  die  $(k+1)$ -dimensionale Zelle der euklidischen Zerlegung von  $U^n$ , so daß  $\mu \cap h = \sigma$ .  $\mu$  enthält  $\infty$ . Die orthogonale Projektion von  $\mu^*$  auf  $h$  ist  $\sigma^*$ . Die von  $\mu^*$  aufgespannte  $(n-k-1)$ -dimensionale hyperbolische Ebene  $\langle \mu^* \rangle$  ist eine euklidische Hemisphäre, die orthogonal auf  $\partial U^n$  steht. Nach Satz 5.2.8 schneiden sich  $\langle \mu \rangle$  und  $\langle \mu^* \rangle$  orthogonal in einem Punkt, den wir  $x$  nennen. Bezeichne  $T$  die  $(n-k-1)$ -dimensionale Tangentialebene an  $\langle \mu^* \rangle$  am Punkt  $x$ . Da das obere Halbraum-Modell konform ist, sind  $T$  und die Ebene  $\langle \mu \rangle$  euklidisch orthogonal.

Die orthogonale Projektion  $\sigma^*$  von  $\mu^*$  auf  $h$  ist in der orthogonalen Projektion  $T'$  von  $T$  auf  $h$  enthalten.  $T'$  ist euklidisch orthogonal zu  $\langle \mu \rangle \cap h$ . Da  $T'$  der von  $\sigma^*$  aufgespannte Raum ist, und  $\langle \mu \rangle \cap h$  der von  $\sigma$  aufgespannte Raum ist, sind  $\sigma$  und  $\sigma^*$  euklidisch quasiorthogonal. ♣

**Bemerkung:** Betrachtet man gleichzeitig die dualen Zerlegungen auf mehreren Spitzen, so kann man die fünfte Aussage von Satz 5.4.1 auf Elemente aus  $N(\Gamma)$  erweitern. Den zu den Spitzen-Schnitten gehörenden Horosphären gebe man entsprechend Abschnitt 3.2 euklidische Metriken. Ein Element  $\eta$  aus  $N(\Gamma)$  induziert auf der Horosphäre eine euklidische Isometrie, die  $\sigma^*$  auf  $(\eta(\sigma))^*$  abbildet.

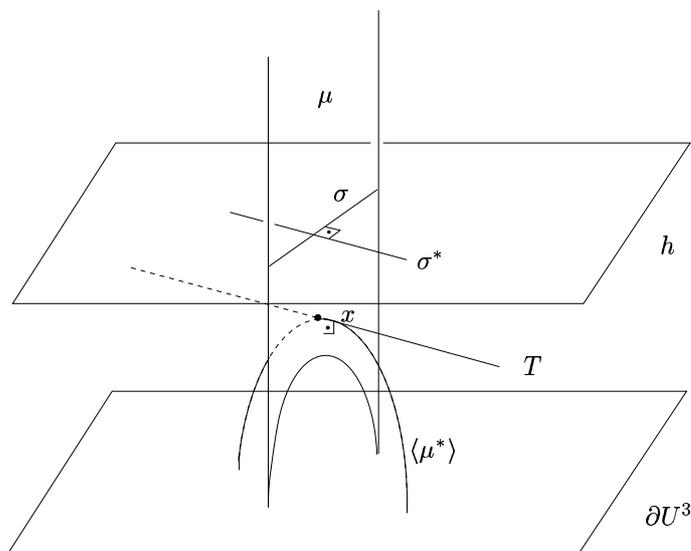


Abbildung 5.3. Die dualen Zerlegungen auf einer Horosphäre.

Wir gehen für das Folgende von einer  $n$ -Mannigfaltigkeit mit genau einer Spitze aus, d.h.  $\Gamma$  operiere transitiv auf den parabolischen Fixpunkten. Eine euklidische Zerlegung ist dann kanonisch.

Sei  $M$  ein 3-Mannigfaltigkeit mit einer Spitze und die kanonische Zerlegung eine ideale Triangulation. Da dann  $\Gamma$  transitiv auf den parabolischen Fixpunkten, den Ecken der Zerlegung, operiert, bestimmt der  $\Gamma$ -Orbit eines idealen 3-Simplexes der Zerlegung von  $U^3$  genau vier  $\Gamma_\infty$ -Orbits von euklidischen Dreiecken in  $Z$ . Diese Dreiecke gehen paarweise durch euklidische Ähnlichkeitsabbildungen ineinander über.

Etwas einfacher wird die Situation, wenn wir betrachten, welchen Beitrag eine Kante der kanonischen Zerlegung von  $U^3$  zur Zerlegung  $Z$  der Horosphäre liefert: Es sind zwei  $\Gamma_\infty$ -Orbits von Punkten. Nehmen wir an, daß der Spitzen-Schnitt ein Torus ist. Die Spitze ist homöomorph zu einem Volltorus, dessen Seele entfernt wurde. Die Kante der kanonischen Zerlegung verläuft in der Mannigfaltigkeit wie in Abbildung 5.4 skizziert: Sie „startet“ bei der unendlich fernen Seele, läuft im Volltorus bis zu einem Schnittpunkt  $a$  mit dem Torus, läuft im kompakten Teil der Mannigfaltigkeit bis zu einem Schnittpunkt  $b$  mit dem Torus, um schließlich innerhalb des Volltorus in Richtung der Seele fortzulaufen. Es wird sich in Satz 5.4.2 herausstellen, daß die zu  $a$  und  $b$  dualen 2-Zellen isometrisch sind. Diese Isometrie wird nicht von einer Isometrie des Torus induziert, sondern nur von einer euklidischen Isometrie der universellen Überlagerung des Torus, nämlich der Horosphäre.

Wir werden für den folgenden Satz die Einschränkungen lockern und auch kanonische Zerlegungen zulassen, die keine idealen Triangulationen sind. Die durch eine  $n$ -Zelle von  $U^n$  bestimmten  $(n-1)$ -Zellen in  $Z$  sind dann im allgemeinen nicht vom gleichen kombinatorischen Typ. Aber selbst wenn die Zerlegung  $Z$  eine Triangulation ist, muß die kanonische Zerlegung keine ideale Triangulation sein.

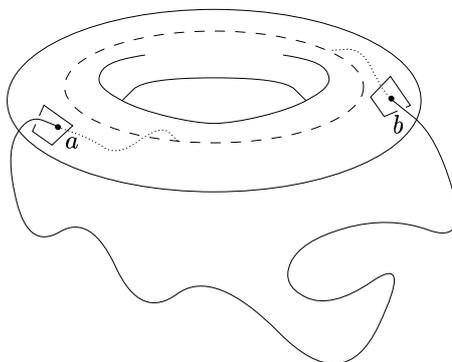


Abbildung 5.4.

**Satz 5.4.2** Sei  $M$  eine hyperbolische  $n$ -Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen und genau einer Spitze,  $n \geq 2$ . Sei  $\sigma$  eine  $k$ -dimensionale Zelle der kanonischen Zerlegung von  $U^n$ , die Zahl ihrer Ecken sei  $r$ . Der  $\Gamma$ -Orbit von  $\sigma$  bestimmt  $r$   $\Gamma_\infty$ -Orbits von  $(k-1)$ -dimensionalen Zellen in  $Z$ . Seien  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  solche  $(k-1)$ -dimensionalen Zellen aus verschiedenen  $\Gamma_\infty$ -Orbits. Dann gibt es eine euklidische Isometrie  $f$ , die  $\sigma_1^*$  in  $\sigma_2^*$  überführt. Ist  $M$  orientierbar, so kann  $f$  orientierungsändernd gewählt werden.

**Beweis:** Vergleiche Abbildung 5.5. Durch eine Isometrie aus  $\Gamma$  bringen wir diejenige Ecke von  $\sigma$  nach  $\infty$ , so daß  $\sigma \cap h = \sigma_1$ . Es gibt eine ideale Ecke  $P$  von  $\sigma$  und eine Isometrie  $\gamma$  aus  $\Gamma$ , so daß  $\sigma_2 = \gamma(\sigma) \cap h$ .  $P$  ist ungleich  $\infty$ , da  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zu verschiedenen  $\Gamma_\infty$ -Orbits gehören sollen.

Sei  $h_P$  die uniforme Horosphäre zum Basispunkt  $P$ . Sei  $E$  die Hyperebene, die aus Punkten besteht, die von  $h_P$  und  $h$  gleich weit entfernt sind.  $\sigma^*$  liegt in  $E$ . Bezeichne  $\iota$  die Spiegelung an  $E$ . Es ist  $\iota(h) = h_P$  und  $\iota^2 = \text{id}$ .

Da  $\gamma \iota$  die Horosphäre  $h$  invariant läßt, ist  $\gamma \iota$  die Poincaré-Erweiterung einer Isometrie  $f$  von  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\gamma \iota = \tilde{f}$ . Ist  $\gamma$  orientierungserhaltend, so ist  $f$  orientierungsändernd.

Bezeichne  $p$  die orthogonale Projektion von  $U^n$  auf  $h$ . Für einen Punkt  $x$  aus  $\sigma^*$  ist

$$\begin{aligned} p\gamma(x) &= p\tilde{f}\iota(x) \\ &= p\tilde{f}(x) \\ &= \tilde{f}p(x) \\ &= fp(x). \end{aligned}$$

Wegen  $\gamma(\sigma^*) = (\gamma(\sigma))^*$ , ist  $f(\sigma_1^*) = \sigma_2^*$ . ♣

**Bemerkung:** Ist  $k > 1$ , so ist der Zusatz „orientierungsändernd“ überflüssig, da es eine orientierungsändernde euklidische Isometrie gibt, die die  $(n-k)$ -Zelle  $\sigma_1^*$  invariant läßt.  $M$  ist genau dann orientierbar, wenn  $\Gamma$  nur orientierungserhaltende Isometrien enthält.

Satz 5.4.2 läßt sich auf Mannigfaltigkeiten mit mehreren Spitzen erweitern. Dazu wähle man aus jedem  $\Gamma$ -Orbit der uniformen Horosphären einen Repräsentanten und gebe ihm entsprechend Abschnitt 3.2 die euklidische Metrik des  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Damit erhalten alle  $\Gamma$ -Orbits von Horosphären euklidische Metriken.

Wir nehmen nun an, daß im Beweis von Satz 5.4.2 die Horosphären  $h_P$  und  $h$  nicht  $\Gamma$ -äquivalent sind. Bezeichne  $q_1$  die orthogonale Projektion von  $U^n$  auf  $h_P$ , d.h. für  $x$  aus  $U^n$  ist  $q_1(x)$  der

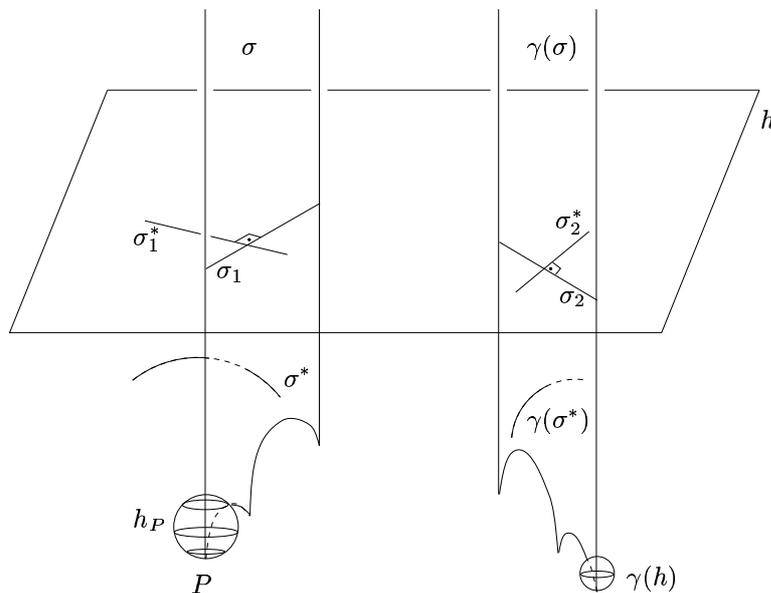


Abbildung 5.5.

Schnittpunkt von  $h_P$  mit der Geraden durch  $x$  und  $P$ . Entsprechend bezeichne  $q_2$  die orthogonale Projektion auf  $h$ .

Für die Spiegelung  $\iota$  an  $E$  gilt

$$\iota q_1(x) = q_2(x) \text{ für alle } x \in E.$$

Somit bildet  $\iota$  die Zelle  $q_1(\sigma^*)$  der dualen Zerlegung von  $h_P$  euklidisch isometrisch auf die Zelle  $q_2(\sigma^*)$  der dualen Zerlegung von  $h$  ab.

### Der Achterknoten

#### Duale Zerlegung

Wir wollen die Konzepte dieses Abschnitts am Komplement des Achterknotens anwenden. In Abschnitt 4.5 haben wir eine Zerlegung dieser hyperbolischen Mannigfaltigkeit in zwei reguläre ideale Simplexe angegeben. Daß dies die kanonische Zerlegung ist, werden wir erst in Abschnitt 6.6 nachweisen können.

Die Spitze der Mannigfaltigkeit ist homöomorph zu  $(S^1 \times S^1) \times [1, \infty)$ . Der Schnitt des regulären idealen 3-Simplexes mit der Horosphäre zu einer Ecke ist ein reguläres euklidisches Dreieck. Bringen wir den Basispunkt dieser Horosphäre  $h$  in  $U^3$  nach  $\infty$ , so bestimmt die kanonische Zerlegung von  $U^3$  eine Zerlegung von  $h$  in reguläre euklidische Dreiecke. Insbesondere müssen diese Dreiecke alle die gleichen Kantenlängen besitzen, damit sie zusammenpassen. Wir wollen die Zerlegung der Horosphäre genauer untersuchen.

Aus Abbildung 5.6 läßt sich die Kombinatorik der Zerlegung der Horosphäre erkennen. Gleich bezeichnete Kanten werden entsprechend ihrer Orientierung verklebt. Abbildung 5.7 ist ein Ausschnitt der Zerlegung der Horosphäre. Man erkennt in Abbildung 5.7, daß  $\Gamma_\infty$  auf der Horosphäre eine diskrete, frei operierende Gruppe von euklidischen Isometrien induziert, die von zwei Translationen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  erzeugt wird.

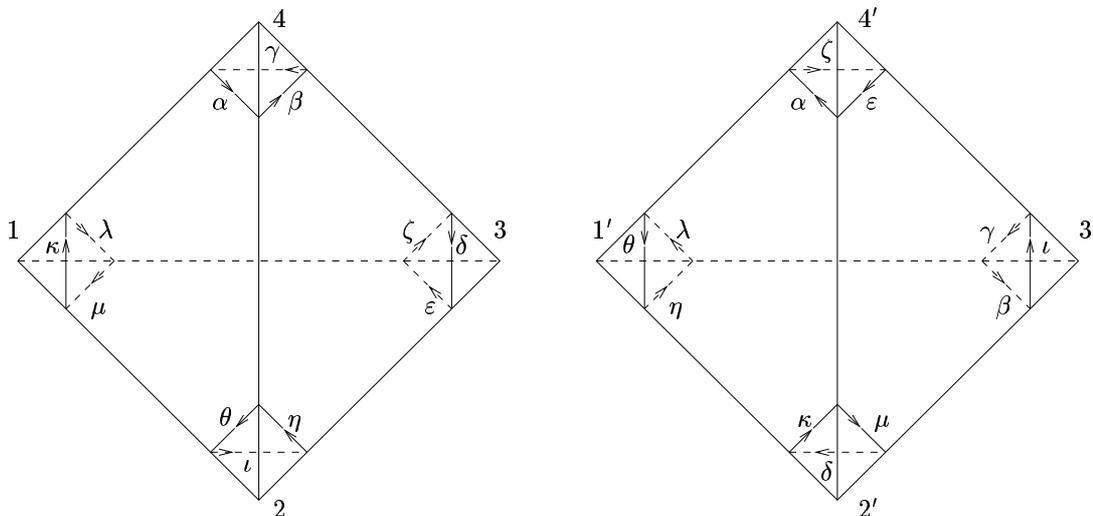


Abbildung 5.6. Zwei reguläre ideale Simplexe

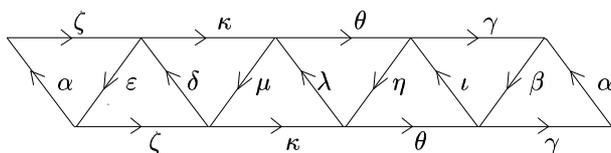


Abbildung 5.7. Der Spitzen-Schnitt ist ein Torus.

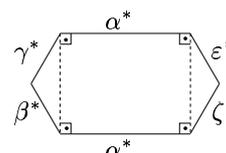


Abbildung 5.8.

Die Länge der Höhe in einem der gleichseitigen Dreiecke sei gleich 1 gesetzt. Die Länge der Kanten ist dann  $a = 2/\sqrt{3}$ . Wählt man ein kartesisches Koordinatensystem, bei dem die  $x$ -Achse parallel zu  $\kappa$  liegt, so ist bei geeigneter Orientierung der Achsen

$$\xi_1 : (x, y) \rightarrow \left(x - \frac{a}{2}, y + 1\right) \text{ und } \xi_2 : (x, y) \rightarrow (x + 4a, y).$$

Wir wollen nun die duale Zerlegung berechnen. Man kann sich zwar leicht überlegen, daß der duale Punkt zu jedem der regulären Dreiecke der jeweilige Mittelpunkt des Dreiecks ist, jedoch wollen wir untersuchen, inwieweit die Sätze 5.4.1 und 5.4.2 die duale Zerlegung bestimmen. Man beachte, daß eine Zerlegung, die den beiden Sätzen genügt, durch eine Translation in eine Zerlegung überführt wird, die ebenfalls den beiden Sätzen genügt. Wir können die duale Zerlegung also höchstens bis auf Translation bestimmen.

Bezeichne  $Z$  die durch die kanonische Zerlegung bestimmte Zerlegung der Horosphäre in reguläre Dreiecke. Mit  $Z^*$  wollen wir eine Zerlegung bezeichnen, die drei Bedingungen erfüllt. Erstens soll jeder  $i$ -Zelle  $\sigma$  von  $Z$ ,  $0 \leq i \leq 2$ , eine  $(2 - i)$ -Zelle  $\sigma^*$  zugeordnet sein. Zweitens sollen für alle Zellen  $\sigma$  aus  $Z$  die Zellen  $\sigma$  und  $\sigma^*$  quasiorthogonal sein. Drittens soll für  $\gamma$  aus  $\Gamma_\infty = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$  und für eine Zelle  $\sigma$  aus  $Z$  gelten, daß  $(\gamma(\sigma))^* = \gamma(\sigma^*)$ .

Ein Beispiel für eine Zerlegung  $Z^*$  ist die durch die Voronoi-Zerlegung induzierte Zerlegung. Wir werden herausfinden, daß es noch andere Zerlegungen gibt, die den drei Bedingungen genügen.

Gemäß Satz 5.4.1 ist die durch die Voronoi-Zerlegung induzierte Zerlegung invariant bezüglich Elementen aus  $[N(\Gamma)]_\infty$ . Diese zusätzliche Bedingung werden wir in der folgenden Betrachtung nicht fordern. Bei der Untersuchung von  $[N(\Gamma)]_\infty$  im nächsten Unterabschnitt wird sich herausstellen, daß diese Gruppe transitiv auf den regulären Dreiecken operiert, und somit alle dualen Sechsecke isometrisch sind.

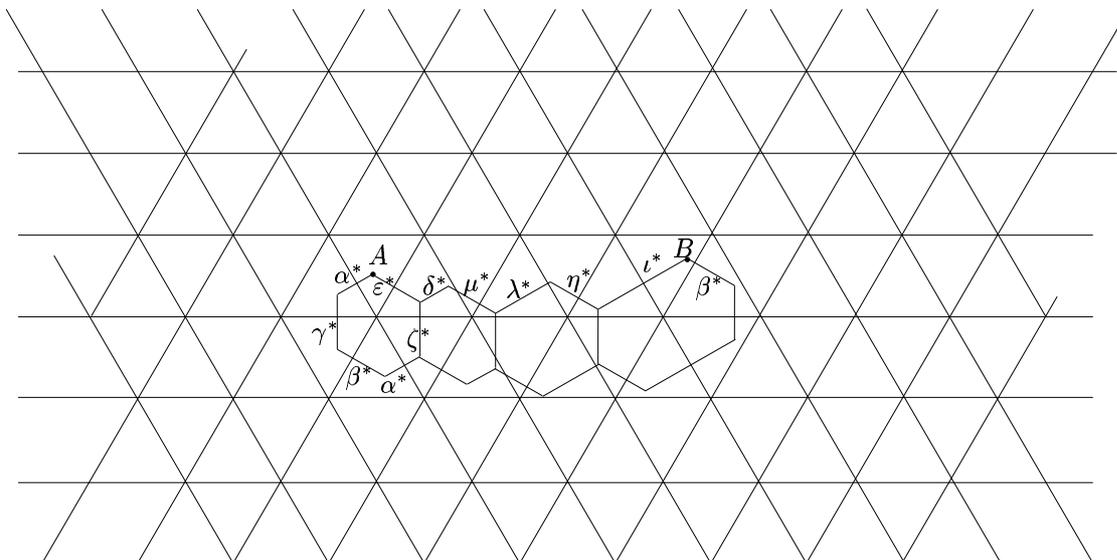


Abbildung 5.9. Duale Zellen in der Fortsetzung der Pflasterung aus Abb. 5.7.

Wir beginnen nun mit der Bestimmung von  $Z^*$ . Es gibt vier  $\Gamma_\infty$ -Orbits von Ecken in  $Z$ . Die dualen 2-Zellen müssen Sechsecke sein, da in  $Z$  von jeder Ecke sechs Kanten ausgehen. Da alle Innenwinkel der Dreiecke  $60^\circ$  betragen, muß jeder Innenwinkel der Sechsecke gleich  $180^\circ - 60^\circ$ , also  $120^\circ$ , sein.

Betrachten wir in Abbildung 5.9 das duale Sechseck mit den Seiten  $\alpha^*$ ,  $\gamma^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $\zeta^*$  und  $\varepsilon^*$  (dabei haben wir  $\xi_1^{-1}(\alpha^*)$  ebenfalls mit  $\alpha^*$  bezeichnet). Eine Seite und ihre Länge wollen wir gleich bezeichnen. Die beiden mit  $\alpha^*$  bezeichneten Seiten gehen durch die Translation  $\xi_1$  ineinander über. Da die Translationsachse von  $\xi_1$  senkrecht auf  $\alpha^*$  steht, hat das Sechseck die Gestalt von Abbildung 5.8.

Die Translationslänge  $a$  von  $\xi_1$  beträgt  $2/\sqrt{3}$ . Es folgt, daß die Seiten  $\gamma^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\zeta^*$  und  $\varepsilon^*$  alle die gleiche Länge  $a/(2 \cos 30^\circ)$ , also  $2/3$ , besitzen. Betrachtet man die anderen dualen Sechsecke, so folgt analog

$$\gamma^* = \beta^* = \zeta^* = \varepsilon^* = \mu^* = \kappa^* = \eta^* = \theta^* = \frac{2}{3}. \quad (5.4.3)$$

Die Zerlegung  $Z^*$  muß auch noch invariant bezüglich  $\xi_2$  sein. In Abbildung 5.9 muß somit durch  $\xi_2$  der Punkt  $A$  in den Punkt  $B$  übergeführt werden, und der Abstand zwischen  $A$  und  $B$  muß  $4a$  betragen. Dies ist genau dann erfüllt, wenn für

$$d_1 = \alpha^* + \delta^* + \lambda^* + \iota^* \text{ und } d_2 = \varepsilon^* + \mu^* + \eta^* + \beta^*$$

gilt, daß

$$d_1 = d_2 \text{ und} \quad (5.4.4)$$

$$(4a)^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2d_1 d_2 \cos 120^\circ. \quad (5.4.5)$$

Ist (5.4.3) erfüllt, so reduzieren sich (5.4.4) und (5.4.5) auf

$$\alpha^* + \delta^* + \lambda^* + \iota^* = \frac{8}{3}. \quad (5.4.6)$$

Bei der durch die Voronoi-Zerlegung induzierten dualen Zerlegung ist

$$\alpha^* = \delta^* = \lambda^* = \iota^* = \frac{2}{3}.$$

Es gibt somit neben der durch die Voronoi-Zerlegung induzierten dualen Zerlegung noch viele andere Zerlegungen, die den Bedingungen der Dualität und Satz 5.4.1 genügen. Z.B. kann man in Abbildung 5.9 die Strecke  $\iota^*$  ein wenig verkürzen, damit  $A$  durch  $\xi_2$  in  $B$  übergeht.

Wir wollen nun betrachten, welche zusätzlichen Einschränkungen an eine duale Zerlegung durch Satz 5.4.2 gemacht werden. Es gibt vier  $\Gamma$ -Orbits von idealen Dreiecken in der kanonischen Zerlegung, da die acht Seiten der beiden regulären idealen Tetraeder paarweise identifiziert werden. Jede Seite bestimmt drei  $\Gamma_\infty$ -Orbits von Kanten in der Zerlegung  $Z$  der Horosphäre. Die Seite mit den idealen Ecken 1, 2 und 4 bestimmt z.B. die Kanten  $\alpha$ ,  $\kappa$  und  $\theta$ . Satz 5.4.2 besagt, daß für die Längen der dualen Kanten gilt:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \kappa^* = \theta^* \\ \gamma^* &= \zeta^* = \lambda^* \\ \eta^* &= \delta^* = \beta^* \\ \iota^* &= \mu^* = \varepsilon^*. \end{aligned}$$

Mit Gleichung (5.4.3) folgt, daß alle dualen Kanten die Länge  $2/3$  besitzen müssen. Somit ist durch die Sätze 5.4.1 und 5.4.2 eine duale Zerlegung (in diesem Beispiel) bis auf Translation eindeutig bestimmt.

### Isometriegruppe

Wir haben in Abschnitt 4.5 die Gruppe der Isometrien von  $U^3/\Gamma$  bestimmt. Sie ist isomorph zu  $N(\Gamma)/\Gamma$ . Es ist

$$N(\Gamma)/\Gamma \approx [N(\Gamma)]_\infty/\Gamma \approx [N(\Gamma)]_\infty/\Gamma_\infty,$$

wobei die erste Isomorphie daraus folgt, daß  $\Gamma$  transitiv auf den parabolischen Fixpunkten operiert. Wie weiter oben bemerkt, wird  $\Gamma_\infty$  von zwei Translationen,  $\xi_1$  und  $\xi_2$ , erzeugt.

Wir können den Stabilisator  $[N(\Gamma)]_\infty$  direkt angeben; wir müssen dazu nur verstehen, welche euklidischen Isometrien durch  $\tau_1, \tau_2$  und  $\omega_1, \omega_2$  von Seite 54 induziert werden. In Abbildung 4.4 wird durch  $\tau_1$  die Ecke 1 auf die Ecke 2 abgebildet. In Abbildung 5.6 ist zu sehen, daß dabei das Dreieck mit den Kanten  $\kappa, \lambda, \mu$  auf das Dreieck mit den Kanten  $\theta, \eta, \iota$  abgebildet wird. Es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

und somit erkennt man erkennt man, daß (eine Realisierung von)  $\tau_1$  eine Rotation gefolgt von einer Spiegelung ist. Es geht dabei  $\kappa$  über in  $\eta^{-1}$ ,  $\mu \rightarrow \theta^{-1}$  und  $\lambda \rightarrow \iota^{-1}$ .  $\tau_1$  und  $\tau_2$  bewirken in Abbildung 5.7 eine euklidische Isometrie  $\tau$ . Sie ist durch die Abbildung der Kanten eindeutig (bis auf Komposition mit Elementen aus  $\Gamma_\infty$ ) bestimmt. Wählt man als Koordinatenursprung den Mittelpunkt des Dreiecks mit den Kanten  $\kappa, \lambda, \mu$ , so läßt sich  $\tau$  darstellen als

$$\tau : (x, y) \rightarrow \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y + a, \frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}y \right).$$

Bezeichne  $N(\Gamma_\infty)$  den Normalisator von  $\Gamma_\infty$  in der Gruppe der Isometrien der euklidischen Ebene.  $\tau$  liegt in  $N(\Gamma_\infty)$ , da  $\tau$  durch eine Isometrie von  $U^3/\Gamma$  induziert wird. Man kann dies aber auch direkt nachrechnen; es ist

$$\tau\xi_1\tau^{-1} = \xi_1^{-1} \in \Gamma_\infty \quad \text{und} \quad \tau\xi_2\tau^{-1} = \xi_2\xi_1^4 \in \Gamma_\infty.$$

$\omega_1$  und  $\omega_2$  bestimmen eine euklidische Isometrie  $\omega$ .  $\omega_1$  bildet die Ecke 1 auf die Ecke 1' ab. In Abbildung 5.6 sieht man, daß dadurch das Dreieck mit den Kanten  $\kappa, \lambda, \mu$  auf das Dreieck mit den Kanten  $\theta, \lambda, \eta$  abgebildet wird. Dabei geht  $\kappa$  in  $\theta^{-1}$  über,  $\mu \rightarrow \eta^{-1}$  und  $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ . In Abbildung 5.7 erkennen wir, daß  $\omega$  die Punktspiegelung am Mittelpunkt der Kante  $\lambda$  ist.

$\omega, \tau$  und  $\Gamma_\infty$  erzeugen  $[N(\Gamma)]_\infty$ , und es ist  $[N(\Gamma)]_\infty/\Gamma_\infty$  eine Diedergruppe mit 8 Elementen.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen  $N(\Gamma_\infty)$  und  $[N(\Gamma)]_\infty$  untersuchen.  $[N(\Gamma)]_\infty$  ist eine echte Untergruppe von  $N(\Gamma_\infty)$ , denn  $N(\Gamma_\infty)$  enthält alle Translationen der euklidischen Ebene, wohingegen alle Elemente aus  $[N(\Gamma)]_\infty$  die Zerlegung  $Z$  respektieren.

Es gibt aber Isometrien in  $N(\Gamma_\infty)$ , die zwar die Zerlegung  $Z$  erhalten, jedoch trotzdem nicht in  $[N(\Gamma)]_\infty$  liegen. Ich habe solch ein Element gefunden, es ist die Spiegelung  $\rho$  an der Geraden, die senkrecht auf die Kante  $\lambda$  steht und durch den Mittelpunkt von  $\lambda$  geht. Sie führt das Dreieck mit den Kanten  $\lambda, \kappa, \mu$  in sich über, ist jedoch nicht die Identität. Somit liegt  $\rho$  nicht in  $[N(\Gamma)]_\infty$ , da diese Gruppe einfach transitiv auf den gleichseitigen Dreiecken operiert. Es ist offensichtlich, daß  $\rho$  die Zerlegung erhält. Wählt man sich ein Koordinatensystem, bei dem die Spiegelungsgerade von  $\rho$  die  $y$ -Achse ist, und  $\lambda$  auf der  $x$ -Achse liegt, so ist (bei geeigneter Orientierung der Achsen)

$$\begin{aligned}\xi_1 &: (x, y) \rightarrow (x - a, y) \\ \xi_2 &: (x, y) \rightarrow (x + 2a, y + 4) \\ \rho &: (x, y) \rightarrow (-x, y).\end{aligned}$$

Man bestätigt

$$\rho\xi_1\rho^{-1} = \xi_1^{-1} \in \Gamma_\infty \quad \text{und} \quad \rho\xi_2\rho^{-1} = \xi_2\xi_1^{-4} \in \Gamma_\infty.$$

## Ausblick auf Anwendungen

Sakuma und Weeks haben in [SW95a] eine topologische Zerlegung der Komplemente von (fast allen) zwei-Brücken-Knoten angegeben. Die Zerlegung besteht aus Tetraedern ohne ihre Ecken. In Abschnitt II.4 ihrer Arbeit haben sie die induzierte kombinatorische Zerlegung des Spitzen-Schnitts betrachtet. In den darauffolgenden Abschnitten haben sie untersucht, wie die Tetraeder als ideale Simplexe zu realisieren sind, damit das Verkleben eine hyperbolische Mannigfaltigkeit ergibt. Die Autoren erhalten eine Gleichung (Th. II.5.5), deren Lösungen mit positivem Imaginärteil eine hyperbolische Struktur der Mannigfaltigkeit bestimmen. Die Vermutung von Sakuma und Weeks ist, daß eine Lösung dieser Gleichung die kanonische Zerlegung ergibt. Bei den Knoten  $4_1$  und  $5_2$  gibt es für die jeweiligen Gleichungen nur eine Lösung mit positivem Imaginärteil. Bei anderen zwei-Brücken-Knoten können allerdings mehrere Lösungen mit positivem Imaginärteil existieren.

Sakuma und Weeks haben in Abschnitt II.3 von [SW95a] die kombinatorische Automorphismengruppe der von ihnen angegebenen Zerlegung bestimmt. Ist eine Realisierung die kanonische Zerlegung, so wäre damit die Isometriegruppe der Mannigfaltigkeit bekannt.<sup>1</sup> Man könnte so die zusätzliche Information der Invarianz der dualen Zerlegung bezüglich  $[N(\Gamma)]_\infty$  ausnutzen. Bei zwei-Brücken-Verschlingungen mit zwei Komponenten sind die Bemerkungen zu den Sätzen 5.4.1 und 5.4.2 heranzuziehen.

Die Existenz einer dualen Zerlegung des Spitzen-Schnitts, die den Sätzen 5.4.1 und 5.4.2 genügt, ist eine notwendige Bedingung, daß eine Zerlegung die kanonische ist. Ich vermute, daß es nur zu *einer* Lösung mit positivem Imaginärteil eine den Sätzen 5.4.1 und 5.4.2 entsprechende duale Zerlegung gibt. Dies wäre ein Weg, den Kandidaten für die kanonische Zerlegung zu identifizieren.

<sup>1</sup>Es wird dabei benötigt, daß Vermutung 4.5.4 wahr ist.

## 5.5 Kollabierretrakte

Sei  $M$  eine nicht-kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen, die Anzahl der Spitzen sei  $k$ . Zu  $M$  gehört eine kompakte Mannigfaltigkeit  $M'$ , so daß das Innere von  $M'$  homöomorph zu  $M$  ist. Es gibt zwei äquivalente Beschreibungen für  $M'$ :

Eine Möglichkeit ist das Ergänzen jeder Spitze  $E_i \times [1, \infty)$ ,  $1 \leq i \leq k$ , zu der kompakten Menge  $E_i \times [1, \infty]$ . Dabei ist  $[1, \infty]$  die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von  $[1, \infty)$ .

Bei der anderen Beschreibung entfernt man die (offene) Spitze  $E_i \times (c_i, \infty)$  für ein  $c_i > 1$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Die beiden Möglichkeiten ergeben homöomorphe Mannigfaltigkeiten. Mit  $M'$  werden wir ab nun die Mannigfaltigkeit bezeichnen, die durch das Entfernen der Spitzen entsteht. Die Urbilder der entfernten Spitzen bestimmen in  $B^n$  eine Menge  $S'$  uniformer Horobälle. Die Menge dieser Horobälle ohne ihre berandenden Horosphären bezeichnen wir mit  $\dot{S}'$ . Die Einschränkung der Operation von  $\Gamma$  auf  $B^n - \dot{S}'$  bestimmt eine natürliche Inklusion von  $M'$  nach  $M$  (vergl. Satz 4.2.1). Man kann leicht sehen, daß die Abbildung, die jedem Punkt aus  $B^n$  den am nächsten liegenden Punkt in  $B^n - \dot{S}'$  zuordnet, wohldefiniert, stetig und verträglich mit der Überlagerung  $U^n \rightarrow U^n/\Gamma$  ist. Die Abbildung induziert eine strenge Deformationsretraktion von  $M$  nach  $M'$ . Dies entspricht der Retraktion von  $E_i \times [c_i, \infty)$  auf  $E_i \times \{c_i\}$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Wir müssen nun aus technischen Gründen eine Voraussetzung an  $S'$  machen. Dazu bezeichne  $S$  die Menge der uniformen Horobälle, die bei der Konstruktion der euklidischen Zerlegung benutzt wurde. Ein Horoball  $b'$  aus  $S'$  soll nur solche Zellen der euklidischen Zerlegung treffen, die den Basispunkt von  $b'$  als idealen Eckpunkt besitzen. Nach Satz 4.7.3 genügt es, wenn  $b'$  um mindestens den Abstand  $\ln 2$  kleiner als der entsprechende Horoball aus  $S$  ist. Man beachte, daß  $M'$  erst durch  $S'$  genau bestimmt ist. Jedoch ergeben verschiedene Möglichkeiten für  $S'$  homöomorphe Mannigfaltigkeiten.

**Satz 5.5.1** *Das  $(n - 1)$ -Gerüst der Voronoi-Zerlegung von  $M$  ist ein Kollabierretrakt von  $M'$ .*

**Beweis:** Kurz gesagt ist der Kollabiervorgang das „gleichmäßige Anwachsen“ der Bilder der uniformen Horobälle aus  $S'$  in  $M'$ . Da aber mit „Kollabieren“ das sukzessive „Eindrücken von Zellen“ gemeint ist, müssen wir  $M'$  erst geeignet unterteilen. Genauer gesagt werden wir die Voronoi-Zerlegung von  $U^n - \dot{S}'$  unterteilen und das Kollabieren  $\Gamma$ -invariant machen.

Sei  $x$  ein parabolischer Fixpunkt von  $\Gamma$  in  $U^n$ . Zu  $x$  gehört in  $S$  bzw.  $S'$  ein Horoball  $b$  bzw.  $b'$ . Bezeichne  $V$  den Voronoi-Bereich zu  $b$ . Wir beschreiben im ersten Schritt eine  $\Gamma$ -invariante Zerlegung von  $V - \dot{b}'$ .

Ohne Einschränkung sei der Basispunkt  $x$  von  $b'$  gleich  $\infty$ . Die Horosphäre  $h' = \partial b'$  läßt sich durch  $x_n \equiv c$  für ein  $c > 0$  beschreiben. Wir haben in Abschnitt 5.4 gezeigt, daß die orthogonale Projektion den Rand von  $V$  homoöomorph auf  $h'$  abbildet. Dadurch entstand die duale Zerlegung auf  $h'$ .

Wir bilden die zweite baryzentrische Unterteilung der dualen Zerlegung von  $h'$ . Wir können die Unterteilung sukzessive derart aufbauen, daß in  $\Gamma$ -äquivalenten Seiten auch  $\Gamma$ -äquivalente Unterteilungspunkte benutzt werden. Durch orthogonale Projektion bestimmt die Zerlegung von  $h'$  eine baryzentrische Unterteilung von  $\partial V$ . Ist  $\mu$  eine dieser Zellen der Zerlegung von  $\partial V$ , so bilden wir

$$\tilde{\mu} = \{(v_1, \dots, v_{n-1}, r) \mid (v_1, \dots, v_n) \in \mu, v_n \leq r \leq c\};$$

dies ist eine Zelle in  $U^n - S'$  (siehe Abb. 5.10).

$\Gamma$  operiert für  $1 \leq i \leq n - 1$  frei auf den  $i$ -dimensionalen Seiten der Voronoi-Zerlegung von  $U^n$ , somit wird  $\mu$  injektiv nach  $M'$  abgebildet. Es wird sogar die gesamte Zelle  $\tilde{\mu}$  injektiv nach  $M'$  abgebildet, denn Punkte aus dem Inneren von  $V$  werden nur durch den Stabilisator  $\Gamma_\infty$  identifiziert, der nur Poincaré-Erweiterungen von euklidischen Isometrien von  $\partial U^n$  enthält.

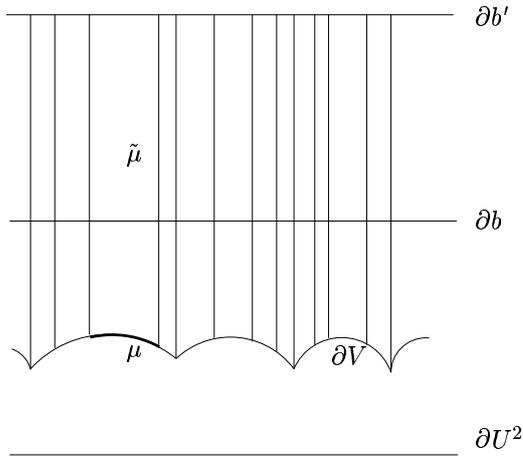


Abbildung 5.10. Kollabieren von  $V - \mathring{b}'$  auf  $\partial V$ .

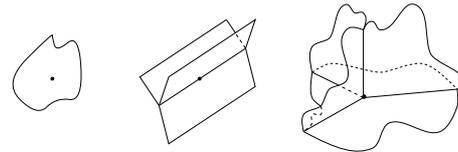


Abbildung 5.11. Umgebungen von Punkten eines speziellen Kollabierretraktes

Für jeden  $\Gamma$ -Orbit parabolischer Fixpunkte in  $U^n$  wählen wir einen Repräsentanten und führen die obige Zerlegung durch. Dabei benutzen wir eventuell schon vorhandene baryzentrische Unterteilungspunkte, so daß wir eine  $\Gamma$ -invariante Zerlegung von  $U^n - \mathring{S}'$  erhalten. Es ist aus Abbildung 5.10 ersichtlich, daß die Zellzerlegung von  $(V - \mathring{b}')$   $\Gamma$ -invariant auf  $\partial V$  kollabiert werden kann. ♣

**Bemerkung:** Das Kollabieren im Beweis von Lemma 5.5.1 ist *nicht* die Retraktion auf den am nächsten liegenden Punkt im  $(n - 2)$ -Gerüst der Voronoi-Zerlegung von  $U^n$ .

**Satz 5.5.2** *In der Dimension  $n = 3$  ist das 2-Gerüst der Voronoi-Zerlegung von  $M$  genau dann ein spezieller Kollabierretrakt, wenn die euklidische Zerlegung eine ideale Triangulation ist.*

**Beweis:** Wir beweisen, daß die Punkte im 2-Gerüst der Voronoi-Zerlegung von  $U^n$  Umgebungen besitzen, die homöomorph zu Umgebungen aus Abbildung 5.11 sind. Da die Überlagerungsabbildung von  $U^n$  nach  $U^n/\Gamma$  lokal homöomorph ist, haben die Punkte im 2-Gerüst der Voronoi-Zerlegung von  $M$  die gleichen Umgebungen.

Wir werden die Voronoi-Zerlegung von  $U^n$  mit  $VZ(U^n)$  abkürzen.

Als erstes bemerken wir, daß in  $VZ(U^n)$  das 2-Gerüst ohne das 1-Gerüst in offene Scheiben zerfällt. Die Punkte aus dem Inneren von 2-Zellen von  $VZ(U^n)$  besitzen insbesondere eine Umgebung, die der linken Umgebung von Abbildung 5.11 entspricht.

Aus der Dualität folgt, daß genau dann an einer Kante von  $VZ(U^n)$  genau drei 2-Zellen von  $VZ(U^n)$  liegen, wenn jede 2-dimensionale Seite der euklidischen Zerlegung genau drei Kanten besitzt. Dies ist das mittlere Bild von Abbildung 5.11.

Aus der Dualität folgt, daß die Umgebungen der Ecken von  $VZ(U^n)$  genau dann die Struktur der rechten Umgebung von Abbildung 5.11 besitzen, wenn jede 3-Zelle der euklidischen Zerlegung ein ideales Simplex ist. ♣

Für Dimensionen  $n \geq 4$  ist ebenfalls der Begriff des speziellen Kollabierretraktes erklärt. Die Umgebungen der Punkte eines speziellen Kollabierretraktes müssen Dualitäten zu Simplexen genügen. Es gilt, daß das  $(n - 1)$ -Gerüst der Voronoi-Zerlegung genau dann ein spezieller Kollabierretrakt ist, wenn die euklidische Zerlegung eine ideale Triangulation ist. Wir haben in Satz 5.5.2 die Dualitäten für die Dimension  $n = 3$  in die üblichen Umgebungen aus Abbildung 5.11 übersetzt.

Man findet weiteres über spezielle Kollabierretrakte in [HAMS93] und in Abschnitt E.5-iii von [BP92].



# Kapitel 6

## Der Algorithmus

### 6.1 Einleitung

In diesem Kapitel wird der Algorithmus von [Wee93] und [SW95b] beschrieben. Der Algorithmus wurde für die Dimension 3 von J. Weeks als Computerprogramm SnapPea implementiert. Gegeben sei eine ideale Triangulation einer nicht-kompakten hyperbolischen Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen, d.h. eine Zerlegung in ideale Simplexe. Der Algorithmus versucht, die zu einer vorgegebenen Wahl von Spitzen-Volumina gehörende euklidische Zerlegung zu finden. Der Algorithmus gibt nach endlich vielen Schritten die entsprechende euklidische Zerlegung aus, oder er bricht nach endlich vielen Schritten ab. Der Algorithmus bricht nur in Dimensionen  $n \geq 3$  ab. Die Ursachen dafür sind in den Lemmata 6.5.1 und 6.5.2 beschrieben. Bricht der Algorithmus ab, so kann vielleicht der Algorithmus die euklidische Zerlegung für eine andere ideale Triangulation als Eingabe berechnen. Eine Zusammenfassung des Algorithmus ist am Ende von Abschnitt 6.5 gegeben.

### 6.2 Konstruktion von $C'$

Sei in  $D^n$  eine endliche Menge idealer  $n$ -Simplexe und Verklebe-Isometrien zwischen den  $(n-1)$ -dimensionalen Seiten gegeben. Die  $n$ -Simplexe seien nicht entartet, d.h. die  $(n+1)$  Ecken eines idealen  $n$ -Simplexes seien affin unabhängig in  $\overline{D^n} \subset \mathbb{R}^n$ . Wir setzen voraus, daß durch das Verkleben eine Mannigfaltigkeit entsteht. Wir gehen zudem davon aus, daß man (paarweise disjunkte) Horosphären zu den idealen Eckpunkten wählen kann, die durch das Verkleben auf die Ränder der Spitzen abgebildet werden. Sukzessives Verkleben von Kopien der idealen Simplexe ergibt eine ideale Triangulation  $T$  des hyperbolischen Raumes. Die Menge der Isometrien, die ein Simplex auf eine seiner Kopien abbilden, bildet eine diskrete, frei operierende Untergruppe  $\Gamma$  der Isometrien von  $D^n$ .  $D^n/\Gamma$  ist eine nicht-kompakte hyperbolische Mannigfaltigkeit mit endlichem Volumen. Dies besagt der Satz von Poincaré, dessen beste Darstellung meiner Meinung nach in [EP94] gegeben ist. Das Verkleben von Polyedern ist auch in Abschnitt 3.2 von [Thu97] dargestellt.

Die Volumina der gewählten Spitzen lassen sich leicht angeben: Eine Spitze gehört zu einem  $\Gamma$ -Orbit der idealen Ecken der Simplexe. Man muß somit nur die endlich vielen Volumina addieren, die zu den Schnitten der gewählten Horobälle mit Repräsentanten der  $n$ -Simplexe gehören.

Die  $\Gamma$ -Translate der Horosphären bilden eine Menge uniformer Horosphären (s. Kapitel 4). Die Menge ihrer Repräsentanten in  $L^+$  bezeichnen wir mit  $B$ . Hat eine Horosphäre den Basispunkt  $P$  in  $\partial D^n$ , so sei der Repräsentant in  $L^+$  mit  $\hat{P}$  bezeichnet. Die Projektion des Randes der abgeschlossenen konvexen Hülle von  $B$  nach  $D^n$  ist die euklidische Zerlegung, die zu den gewählten Volumina der Spitzen gehört.

Da bereits die Berechnung von  $B$  sehr schwierig erscheint, da man dazu  $\Gamma$  genau kennen muß, gehen wir einen anderen Weg. Hat ein Simplex  $\sigma$  in  $D^n$  die idealen Ecken  $P_1, \dots, P_{n+1}$ , die durch  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n+1}$  in  $L^+$  repräsentiert werden, so bilden wir im  $\mathbb{R}^{n+1}$  das  $n$ -Simplex  $\hat{\sigma}$ , das von  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n+1}$  aufgespannt wird. Machen wir dies für alle Simplexe der idealen Triangulation von  $D^n$ , so erhalten wir einen in  $\bar{L}^+$  liegenden Simplicialkomplex, den wir  $\partial C'$  nennen. Sei

$$C' = \{tx \mid t \geq 1, x \in \partial C'\}.$$

Mit  $\Gamma$  bezeichnen wir auch die diskrete, frei operierende Untergruppe der Isometrien von  $H^n$ , die der oben erwähnten Untergruppe  $\Gamma$  der Isometrien von  $D^n$  entspricht.  $C'$  ist  $\Gamma$ -invariant.  $C'$  ist in der abgeschlossenen konvexen Hülle  $C$  von  $B$  enthalten.

Das „Hochheben“ der  $n$ -Simplexe ist einer der Gründe, weshalb wir voraussetzen müssen, daß die Zerlegung von  $M$  aus idealen  $n$ -Simplexen besteht. Wären  $P_1, \dots, P_{n+r}$  die idealen Ecken eines beliebigen konvexen Polyeders, so lägen  $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{n+r}$  im allgemeinen nicht in einem  $n$ -dimensionalen affinen Raum.

**Lemma 6.2.1** *Die Menge der Seiten von  $C'$  in  $\mathring{L}^+$  ist lokal-endlich.  $C'$  ist eine abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

**Beweis:** Bezeichne  $p$  die radiale Projektion von  $\bar{L}^+$  nach  $D^n$ ,

$$p(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}, 1).$$

Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathring{L}^+$ . Dann ist  $p(K)$  kompakt. Da die Zerlegung von  $D^n$  lokal-endlich ist, trifft  $p(K)$  nur endlich viele Seiten. Folglich trifft auch  $p(K \cap C')$  nur endlich viele Seiten. Deshalb trifft  $K$  nur endlich viele Seiten von  $\partial C'$ .

Sei nun  $(x_n)$  eine Folge von Punkten aus  $C'$ , die gegen  $x$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  konvergiert. Wir müssen zeigen, daß  $x$  in  $C'$  liegt. Wir betrachten zuerst den Fall, daß  $x$  in  $\mathring{L}^+$  liegt. Da die Menge der Seiten lokal-endlich ist, ist die Menge  $\partial C' \cap \mathring{L}^+$  abgeschlossen in  $\mathring{L}^+$ . Deshalb ist  $\{tx \mid t \geq 1, x \in \partial C' \cap \mathring{L}^+\}$  abgeschlossen in  $\mathring{L}^+$ . Somit liegt  $x$  in  $C'$ .

Sei nun  $x$  aus  $L^+$ . Wie oben erwähnt, bezeichnen wir mit  $C$  die abgeschlossene konvexe Hülle von  $B$ .  $C$  enthält  $C'$ . Gemäß Lemma 4.3.4 ist  $C \cap L^+ = C' \cap L^+$ . Da  $C$  abgeschlossen ist, liegt  $x$  in  $C$ , also liegt  $x$  auch in  $C' \cap L^+$ . ♣

Wir haben somit gezeigt, daß  $C'$  genau dann die abgeschlossene konvexe Hülle von  $B$  ist, wenn  $C'$  konvex ist.

**Definition:** Sei  $\hat{\sigma}$  ein  $(n-1)$ -Simplex aus  $\partial C'$ .  $\hat{\sigma}$  ist die gemeinsame Seite von genau zwei  $n$ -Simplexen  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  aus  $\partial C'$ .  $\hat{\sigma}$  heißt *hüllenkonkav* (*hüllenplanar*, *hüllenkonvex*), wenn der an  $\hat{\sigma}$  anliegende Winkel in  $C'$ , begrenzt durch  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$ , größer als  $\pi$  (gleich  $\pi$ , kleinergleich  $\pi$ ) ist.

Ist  $C'$  konvex, so können mehrere  $n$ -Simplexe in einer  $n$ -dimensionalen Seite von  $\partial C'$  liegen. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn hüllenplanare  $(n-1)$ -Simplexe in  $\partial C'$  existieren. Ist  $C'$  konvex, so ist folglich die entsprechende ideale Triangulation von  $D^n$  eine Verfeinerung der euklidischen Zerlegung. Man erhält die euklidische Zerlegung, indem man  $n$ -Simplexe mit gemeinsamen hüllenplanaren Seiten vereinigt, wobei ideale konvexe Polyeder entstehen.

Der Rest dieses Kapitels behandelt das Erkennen hüllenkonkaver, hüllenplanarer und hüllenkonvexer Simplexe, und schließlich die Elimination hüllenkonkaver Simplexe.

### 6.3 Wann ist $C'$ konvex?

Sei  $\hat{\mu}$  ein  $n$ -Simplex aus  $\partial C'$  und  $\hat{\sigma}$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Seite von  $\hat{\mu}$ .  $\hat{\mu}$  spannt einen  $n$ -dimensionalen affinen Raum  $F$  auf. Es gibt einen eindeutigen Vektor  $p$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so daß

$$F = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ p = -1\}.$$

$\hat{\sigma}$  spannt einen  $(n-1)$ -dimensionalen Raum  $E$  auf.  $E$  zerlegt  $F$  in zwei Halbräume. Derjenige Halbraum von  $F$ , der  $\hat{\mu}$  enthält, heiße  $\tilde{F}$ .  $F$  enthält nicht den Ursprung, da sonst das  $\hat{\mu}$  entsprechende Simplex  $\mu$  in der Zerlegung  $T$  von  $D^n$  in einer Hyperebene läge, also entartet wäre.

Der affine Raum  $Q$ , der von  $E$  und dem Ursprung aufgespannt wird, ist ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum. Er ist zeitartig, da  $\hat{\sigma}$  zeitartige Vektoren enthält. Somit ist  $Q^L$  raumartig. Es gibt genau zwei Vektoren in  $Q^L$  mit der Lorentz-Norm 1. Derjenige Vektor, der bezüglich  $Q^L$  nicht im gleichen Halbraum wie  $\hat{\mu}$  liegt, heiße  $m$ .

**Definition:** Mit der obigen Notation ist die *Schrägung*  $S(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  von  $\hat{\mu}$  bezüglich  $\hat{\sigma}$  definiert als  $p \circ m$ .

Für eine Isometrie  $\gamma$  aus  $\Gamma$  ist  $S(\gamma(\hat{\mu}), \gamma(\hat{\sigma})) = S(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ , da eine positive Lorentz-Transformation Normalenvektoren in Normalenvektoren überführt. Somit ist die Schrägung bei  $\Gamma$ -Repräsentanten der Zerlegung  $T$  von  $D^n$  wohldefiniert.

**Satz 6.3.1** Sei  $\hat{\sigma}$  ein  $(n-1)$ -Simplex aus  $\partial C'$ , das die gemeinsame Seite der  $n$ -Simplexe  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  aus  $\partial C'$  ist. Genau dann ist  $\hat{\sigma}$

- *hüllenplanar*, wenn  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) = 0$ ,
- *hllenkconvex*, wenn  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) \leq 0$ ,
- *hllenkconvex*, wenn  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) > 0$ .

**Beweis:** Wir haben am Anfang von Abschnitt 6.3  $E$ ,  $F$ ,  $\tilde{F}$ ,  $Q$ ,  $p$  und  $m$  eingeführt. Bezogen auf  $(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma})$  nennen wir sie nun  $E_i$ ,  $F_i$ ,  $\tilde{F}_i$ ,  $Q_i$ ,  $p_i$  und  $m_i$  für  $i = 1, 2$ . Wenn wir im folgenden Aussagen über  $p_i$ ,  $\alpha_i$ , usw. machen, so sind damit Aussagen über  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , usw. gemeint.

$\tilde{F}_1$  und  $\tilde{F}_2$  liegen bezüglich  $Q^L$  in verschiedenen Halbräumen, weil die Projektion von  $\partial C'$  nach  $D^n$  injektiv ist. Somit ist  $m_1 = -m_2$ . Es ist  $(p_1 - p_2)$  enthalten in  $Q^L$ , denn für  $x$  aus  $E$  ist  $x \circ p_1 = -1 = x \circ p_2$ , also  $x \circ (p_1 - p_2) = 0$ .

Im ersten Schritt überlegen wir uns, wie wir den Winkel zwischen  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  in  $C'$  auf eine zweite Art beschreiben können. Es ist nicht die gesamte Menge  $C'$  für die Beschreibung des Winkels notwendig. Der Winkel zwischen  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  in  $C'$  ist gleich dem Winkel zwischen  $\tilde{F}_1$  und  $\tilde{F}_2$  „weg vom Ursprung“, wobei damit der Winkel von

$$G = \{tx \mid t \geq 1, x \in \tilde{F}_1 \cup \tilde{F}_2\}$$

an  $E$  gemeint ist. Dieser Winkel ist genau dann kleinergleich  $\pi$ , wenn  $G$  konvex ist. Der Winkel ist genau dann gleich  $\pi$ , wenn  $G$  ein Halbraum ist, also  $F_1 = F_2$  ist. Auch wenn sich der euklidische Winkel von  $G$  an  $E$  bei positiven Lorentz-Transformationen durchaus ändern kann, so ist die Konvexität von  $G$  invariant bezüglich positiver Lorentz-Transformationen. Dies werden wir im folgenden Beweisgang benutzen.

Wir beweisen zuerst die Charakterisierung der Hllenplanaritt von  $\hat{\sigma}$ . Es ist

$$\begin{aligned} S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) &= p_1 \circ m_1 + p_2 \circ m_2 \\ &= (p_1 - p_2) \circ m_1. \end{aligned}$$

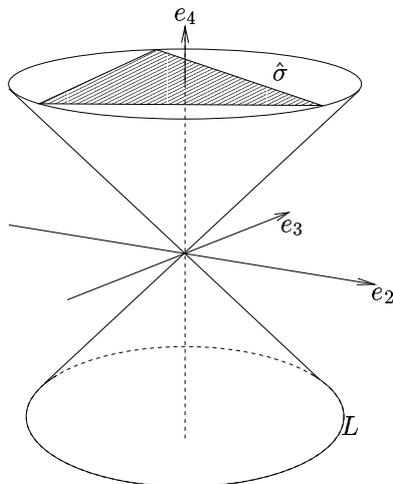


Abbildung 6.1. Der affine Raum  $E$  ist raumartig.

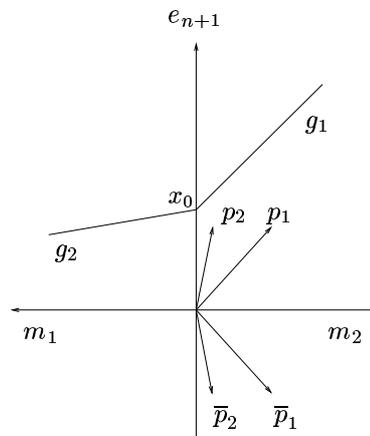


Abbildung 6.2. Der Schnitt von  $V$  mit  $\tilde{F}_1$  und  $\tilde{F}_2$ .

Da  $(p_1 - p_2)$  in  $Q^L$  enthalten ist, existiert ein  $\alpha$  aus  $\mathbb{R}$ , so daß  $(p_1 - p_2) = \alpha m_1$ . Somit ist

$$\begin{aligned} S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) &= \alpha m_1 \circ m_1 \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Deshalb ist  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) = 0$  äquivalent zu  $p_1 = p_2$ , also  $F_1 = F_2$ .

Wir beweisen nun die Charakterisierung der Hüllenkonvexität von  $\hat{\sigma}$ . Daraus folgt unmittelbar die Charakterisierung der Hüllenkonkavität, denn  $\hat{\sigma}$  ist entweder hüllenkonkav oder hüllenkonvex.

Wir wollen nun den affinen Raum  $E$  auf eine Normalform bringen. Unser Ansatz entspricht der Beweisidee von J. Weeks von Proposition 3.1 in [Wee93] für die Dimension  $n = 2$ , jedoch müssen wir für  $n \geq 3$  mehrere Fälle betrachten. In der Dimension  $n = 2$  hat  $E$  die Dimension 1 und ist raumartig, da  $E$  die euklidische Gerade im  $\mathbb{R}^3$  ist, die durch zwei Punkte  $u$  und  $v$  aus  $L^+$  geht, und nach Satz 1.1.2  $(u - v)$  raumartig ist. In den Dimensionen  $n \geq 3$  kann aber  $E$  raum-, licht- oder zeitartig sein.

Da  $Q$  zeitartig ist, können wir durch eine positive Lorentz-Transformation erreichen, daß  $Q = \langle e_2, \dots, e_{n+1} \rangle$  ist. Da die lineare Abbildung, die durch

$$e_1 \mapsto -e_1 \text{ und } e_i \mapsto e_i \text{ für } i = 2, \dots, n$$

bestimmt ist, eine positive Lorentz-Transformation ist, können wir ohne Einschränkung  $m_1 = -e_1$  und  $m_2 = e_1$  annehmen.

1. Fall:  $E$  ist raumartig.

Es gibt eine positive Lorentz-Transformation, die  $e_1$  festhält und den zu  $E$  gehörigen Vektorraum  $W$  auf  $\langle e_2, \dots, e_n \rangle$  bringt. Im folgenden können wir also  $W = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$  annehmen (siehe Abb. 6.1 für  $n = 3$ ). Bezeichne  $V$  den auf  $E$  lorentzsch- und euklidisch-orthogonalen Vektorraum  $\langle e_1, e_{n+1} \rangle$ . Da  $\hat{\sigma}$  im Inneren von  $L^+$  liegt, ist der Schnittpunkt  $x_0$  von  $V$  mit  $E$  ein positives Vielfaches von  $e_{n+1}$ . Sei  $g_i = V \cap \tilde{F}_i$ . Wir haben die Situation von Abbildung 6.2.

Da  $p_i$  insbesondere bezüglich  $E$  Lorentz-orthogonal ist, liegt  $p_i$  in  $V$ . Zudem können wir aus  $p_i \circ x_0 = -1 < 0$  folgern, daß

$$p_i = \alpha_i e_1 + \beta_i e_{n+1} \text{ mit } \beta_i > 0.$$

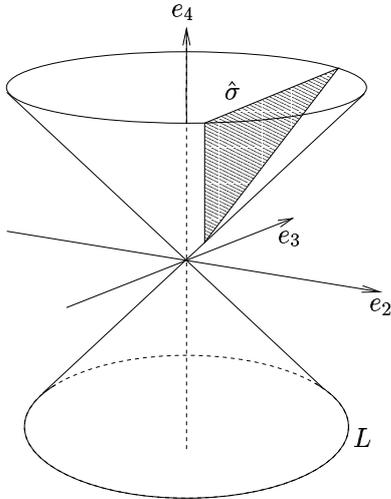


Abbildung 6.3. Der affine Raum  $E$  ist zeitartig.

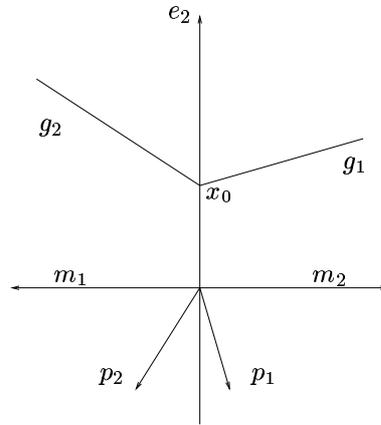


Abbildung 6.4. Der Schnitt von  $V$  mit  $\tilde{F}_1$  und  $\tilde{F}_2$ .

Da  $(p_1 - p_2)$  in  $Q^L = \langle e_1 \rangle$  enthalten ist, folgt  $\beta_1 = \beta_2$ .

Wir führen nun die Vektoren  $\bar{p}_i = \alpha_i e_1 - \beta_i e_{n+1}$  ein. Der Vektor  $\bar{p}_i$  steht euklidisch senkrecht auf  $g_i$ , da  $\bar{p}_i \cdot x = p_i \circ x$  für alle  $x$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

Man sieht in Abbildung 6.2 leicht, daß an  $x_0$  der Winkel „weg vom Ursprung“ genau dann konvex ist, wenn die  $e_1$ -Komponente von  $\bar{p}_1$  größergleich der  $e_1$ -Komponente von  $\bar{p}_2$  ist, also wenn gilt

$$\bar{p}_1 \circ e_1 \geq \bar{p}_2 \circ e_1.$$

Wegen

$$m_1 = -e_1, m_2 = e_1 \text{ und } \bar{p}_i \circ e_1 = p_i \circ e_1,$$

ist dies äquivalent zu  $-p_1 \circ m_1 \geq p_2 \circ m_2$ , also

$$p_1 \circ m_1 + p_2 \circ m_2 \leq 0.$$

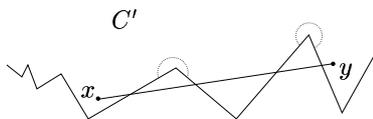
2. Fall:  $E$  ist zeitartig.

Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß  $\langle e_3, \dots, e_{n+1} \rangle$  der zu  $E$  gehörige Vektorraum ist (siehe Abb. 6.3 für  $n = 3$ ). Wie im ersten Fall führen wir den auf  $E$  lorentzsch- und euklidisch-orthogonalen Vektorraum  $V$  ein; in diesem Fall ist er gleich  $\langle e_1, e_2 \rangle$ . Der Schnittpunkt  $x_0$  von  $E$  mit  $V$  ist ein skalares Vielfaches von  $e_2$ . Da die lineare Abbildung, die durch

$$e_2 \mapsto -e_2 \text{ und } e_i \mapsto e_i \text{ für } i \neq 2$$

bestimmt ist, eine positive Lorentz-Transformation ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $x_0$  ein positives Vielfaches von  $e_2$  ist. Wir haben also die Situation von Abbildung 6.4, da für  $p_i = \alpha_i e_1 + \beta_i e_2$  gilt, daß  $\beta_i < 0$ , da  $p_i \circ x_0 < 0$ . Zudem ist  $\beta_1 = \beta_2$ , da  $(p_1 - p_2) \in Q^L = \langle e_1 \rangle$ . Es ist  $p_i$  euklidisch senkrecht auf  $g_i$ , da auf  $V$  das Lorentzprodukt mit dem euklidischen Skalarprodukt übereinstimmt. Man sieht in Abbildung 6.4 leicht, daß der Winkel bei  $x_0$  „weg vom Ursprung“ genau dann konvex ist, wenn  $\alpha_1 \geq \alpha_2$  ist. Wegen  $m_1 = -e_1$  und  $m_2 = e_1$ , ist dies äquivalent zu  $-p_1 \circ m_1 \geq p_2 \circ m_2$ , also

$$p_1 \circ m_1 + p_2 \circ m_2 \leq 0.$$

Abbildung 6.5. Kantenzug in  $V$ 

3. Fall:  $E$  ist lichtartig.

Ist  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) = 0$ , so haben wir bereits bewiesen, daß  $\hat{\sigma}$  hüllenplanar ist. Dann ist  $\hat{\sigma}$  insbesondere hüllenkonvex. Wir nehmen nun  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) \neq 0$  an, d.h. der Winkel zwischen  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  „weg vom Ursprung“ ist ungleich  $\pi$ . Sei  $\hat{R}$  eine Ecke von  $\hat{\sigma}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\hat{R}_\varepsilon$  aus  $U_\varepsilon(\hat{R}) \cap L^+$ . Die Simplexe  $\hat{\sigma}_\varepsilon$ ,  $\hat{\sigma}_1^\varepsilon$  und  $\hat{\sigma}_2^\varepsilon$  gehen durch Ersetzen von  $\hat{R}$  durch  $\hat{R}_\varepsilon$  aus  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  hervor; sie sind nicht entartet, falls  $\varepsilon$  klein genug ist. Da die Menge der zeit- und raumartigen Vektoren in  $\mathbb{R}^{n+1}$  dicht ist, können wir zudem  $\hat{R}_\varepsilon$  derart wählen, daß der von  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  aufgespannte affine Raum nicht lichtartig ist.

Ist  $\varepsilon$  klein genug, so ist der Winkel zwischen  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  „weg vom Ursprung“ genau dann kleiner (größer) als  $\pi$ , wenn der Winkel zwischen  $\hat{\sigma}_1^\varepsilon$  und  $\hat{\sigma}_2^\varepsilon$  kleiner (größer) als  $\pi$  ist.

Man erinnere sich, daß wir  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}) \neq 0$  vorausgesetzt habe. Aus Stetigkeitsgründen ist  $S(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}) + S(\hat{\sigma}_2, \hat{\sigma})$  genau dann positiv (negativ), wenn  $S(\hat{\sigma}_1^\varepsilon, \hat{\sigma}_\varepsilon) + S(\hat{\sigma}_2^\varepsilon, \hat{\sigma}_\varepsilon)$  positiv (negativ) ist. Somit haben wir den Fall, daß  $E$  lichtartig ist, zurückgeführt auf die Fälle, daß  $E$  raum- oder zeitartig ist. ♣

**Lemma 6.3.2** Sind alle  $(n-1)$ -Simplexe aus  $\partial C'$  hüllenkonvex, so ist  $C'$  konvex.

**Beweis:** Sei  $C'$  nicht konvex. Wir zeigen, daß dann ein hüllenkonkaves  $(n-1)$ -Simplex in  $\partial C'$  existiert. Nehmen wir also an, daß für  $a$  und  $b$  aus  $C'$  die euklidische Strecke  $\overline{ab}$  nicht in  $C'$  enthalten ist. Da  $C'$  nach Lemma 6.2.1 abgeschlossen ist, existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so daß für alle  $x$  aus der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $a$  und alle  $y$  aus der  $\varepsilon$ -Umgebung von  $b$  die Strecke  $\overline{xy}$  nicht in  $C'$  enthalten ist.

Durch ein Allgemeine-Lage-Argument kann man  $x$  und  $y$  so wählen, daß eine 2-dimensionale Ebene  $V$  existiert, die  $\overline{xy}$  enthält, die disjunkt zum  $(n-2)$ -Gerüst von  $\partial C'$  ist, die jedes  $(n-1)$ -Simplex aus  $\partial C'$  in höchstens einem Punkt trifft, und die jedes  $n$ -Simplex aus  $\partial C'$  in höchstens einer Strecke trifft. Abbildung 6.5 skizziert die Situation.  $V \cap \partial C'$  ist ein Kantenzug, der Ecken enthält, die zu hüllenkonkaven  $(n-1)$ -Simplexen gehören. ♣

## 6.4 Berechnung der Schrägung

Sei  $\eta$  ein  $n$ -Simplex der idealen Triangulation  $T$  von  $D^n$ . Die idealen Ecken seien von 0 bis  $n$  nummeriert. Durch die Wahl von Horosphären zu den idealen Eckpunkten wurden Vektoren in  $L^+$  bestimmt, die wir entsprechend  $v_0, \dots, v_n$  benennen. Das  $\eta$  entsprechende  $n$ -Simplex  $\hat{\eta}$  in  $\partial C'$  ist die konvexe Hülle von  $v_0, \dots, v_n$ .

Die der  $i$ -ten Ecke von  $\eta$  gegenüberliegende  $(n-1)$ -Seite von  $\eta$  heiße  $\eta^i$ . Zu  $\eta^i$  gehört in  $\partial C'$  die konvexe Hülle  $\hat{\eta}^i$  von  $\{v_0, \dots, v_n\} - \{v_i\}$ .

Wir wollen nun die Schrägung von  $\eta$  bezüglich  $\eta^i$  berechnen. Dazu bilden wir entsprechend Abschnitt 6.3 die folgenden Begriffe:

Da  $\eta$  nach Voraussetzung nicht entartet ist, ist der von  $\hat{\eta}$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  aufgespannte affine Raum  $F$   $n$ -dimensional. Es gibt einen eindeutigen Vektor  $p$  aus  $\mathbb{R}^{n+1}$ , so daß

$$F = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ p = -1\}.$$

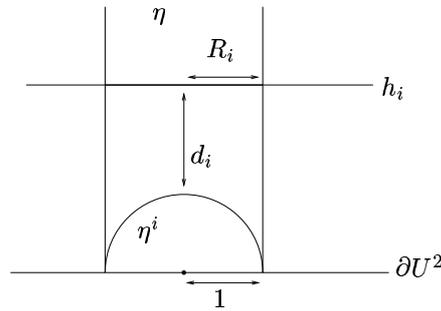


Abbildung 6.6. Der Umkreisradius in der euklidischen Metrik von  $h_i$

Das  $(n - 1)$ -Simplex  $\hat{\eta}^i$  und der Ursprung spannen einen  $n$ -dimensionalen Untervektorraum  $Q_i$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  auf.  $m_i$  sei der Vektor aus  $Q_i^L$ , der die Lorentznorm 1 besitzt und bezüglich  $Q_i$  nicht im gleichen Halbraum wie  $v_i$  liegt.

Zur  $i$ -ten Ecke von  $\eta$  gehört die Horosphäre  $h_i$ . Der *Horosphärenschnitt* zur  $i$ -ten Ecke in  $\eta$  ist definiert als  $\eta \cap h_i$ .

Sei nun  $f$  eine Isometrie von  $D^n$  nach  $U^n$ , die die  $i$ -te Ecke von  $\eta$  nach  $\infty$  abbildet und  $\eta^i$  auf die Hemisphäre vom Radius 1 um den Ursprung bringt.  $f$  ist bis auf die Komposition mit der Poincaré-Erweiterung einer euklidischen Isometrie eindeutig bestimmt.  $f$  hat die Horosphäre  $h_i$  auf eine zu  $\partial U^n$  parallele euklidische Hyperebene abgebildet. Der Horosphärenschnitt zur  $i$ -ten Ecke in  $\eta$  ist zu einem euklidischen kompakten konvexen Polyeder geworden (s. Abb. 6.6). Seinen Umkreisradius in der euklidischen Metrik von  $h_i$  bezeichnen wir als  $R_i$ .

**Lemma 6.4.1** *Bezeichne in der obigen Situation  $d_i$  den vorzeichenbehafteten Abstand zwischen der von  $\eta^i$  aufgespannten Hyperebene und der Horosphäre  $h_i$  gemäß Abschnitt 3.3. Dann gilt*

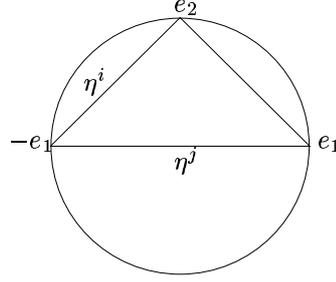
$$R_i = e^{-d_i}.$$

**Beweis:** Es gibt ein  $c > 0$ , so daß

$$h_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in U^n | x_n = c\}.$$

Wäre  $c = 1$ , so folgte  $R = 1$ , da die von  $\eta^i$  aufgespannte Hyperebene  $E_i$  eine Hemisphäre vom Radius 1 ist. In der durch Abschnitt 3.2 bestimmten euklidischen Metrik von  $h_i$  hat der Horosphärenschnitt den Umkreisradius  $R_i = 1/c$ . Der vorzeichenbehaftete Abstand  $d_i$  zwischen  $E_i$  und  $h_i$  ist  $\ln c$  (vergl. Lemma 3.3.1). Somit ist wie behauptet  $R_i = 1/e^{d_i}$ . ♣

**Bemerkung:** Man beachte, daß in [SW95b] und in Abschnitt 3.3 der vorliegenden Arbeit der Begriff „vorzeichenbehafteter Abstand einer Hyperebene zu einer Horosphäre“ verschieden definiert ist. Die beiden Definitionen unterscheiden sich um den Faktor  $(-1)$ . Jedoch ist der in [SW95b] und in dieser Arbeit benutzte Begriff „vorzeichenbehafteter Abstand eines Punktes von einer Horosphäre“ gleich definiert. Ich hielt es für notwendig, die Definition des ersten Begriffs zu ändern. Einer der Gründe ist die Beobachtung, daß bei der hier benutzten Definition der vorzeichenbehaftete Abstand einer Hyperebene  $E$  von einer Horosphäre  $h$  das Infimum der vorzeichenbehafteten Abstände der Punkte aus  $E$  zu  $h$  ist. In Lemma 3.3.6 wurde bewiesen, daß dieses Infimum existiert, falls der Basispunkt von  $h$  kein idealer Punkt von  $E$  ist.

Abbildung 6.7. Positioniertes Dreiecke in  $D^2$ 

**Lemma 6.4.2** Die Mengen  $\{m_0, \dots, m_n\}$  und  $\{-R_0v_0, \dots, -R_nv_n\}$  sind duale Basen von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**Beweis:** Als erstes bemerken wir, daß  $\{v_0, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist, da ihre affine Hülle  $n$ -dimensional ist und den Ursprung nicht enthält.

Ist  $i \neq j$ , so liegt nach Definition von  $m_j$  der Vektor  $v_i$  in  $\langle m_j \rangle^L$ , also ist  $v_i \circ m_j = 0$ . Ist  $i = j$ , so ist nach Lemma 3.3.6  $m_i \circ v_i = -e^{d_i}$ , wobei  $d_i$  der vorzeichenbehaftete Abstand der von  $\eta^i$  aufgespannten Hyperebene zu  $h_i$  ist. Gemäß Lemma 6.4.1 ist deshalb  $m_i \circ v_i = -R_i^{-1}$ . Folglich ist für beliebige  $i$  und  $j$

$$m_i \circ (-R_i v_i) = \delta_{ij}.$$

Insbesondere bilden  $m_0, \dots, m_n$  eine Basis von  $\mathbb{R}^{n+1}$ . ♣

**Lemma 6.4.3** Bezüglich der Basis  $\{m_0, \dots, m_n\}$  von  $\mathbb{R}^{n+1}$  hat der Normalenvektor  $p$  zu  $\hat{\eta}$  die Komponenten  $(R_0, \dots, R_n)$ .

**Beweis:** Sei  $p = \sum_{i=0}^n \alpha_i m_i$ . Zum einen ist  $p \circ v_j = -1$  für  $j = 0, \dots, n$  nach Definition von  $p$ . Andererseits ist nach Lemma 6.4.2 für  $j = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} p \circ v_j &= \sum_{i=0}^n \alpha_i (m_i \circ v_j) \\ &= \alpha_j (m_j \circ v_j) \\ &= \alpha_j (-R_j^{-1}). \end{aligned}$$

Somit ist  $\alpha_j = R_j$ , also  $p = \sum_{i=0}^n R_i m_i$ . ♣

**Lemma 6.4.4** Sei  $0 \leq i, j \leq n$  und  $i \neq j$ . Für  $n \geq 3$  bezeichne  $\theta_{ij}$  den hyperbolischen Winkel zwischen  $\eta^i$  und  $\eta^j$  in  $\eta$ . Für  $n = 2$  sei  $\theta_{ij} = 0$ . Dann ist

$$m_i \circ m_j = -\cos \theta_{ij}.$$

**Beweis:** Für  $n \geq 3$  ist  $m_i \circ m_j = -\cos \theta_{ij}$ . Dies folgt unmittelbar daraus, wie der Winkel zwischen Hyperebenen definiert ist. Man vergleiche dazu in [Rat94] die Abschnitte 'The Space-Like Angle ...' auf S. 71 und 'Dihedral Angles' auf S. 255.

Ist  $n = 2$ , so treffen sich die Geraden  $\eta^i$  und  $\eta^j$  für  $i \neq j$  in einer Ecke des idealen Dreiecks  $\eta$ . Wir werden zeigen, daß dies  $m_i \circ m_j = 0$  impliziert. Dazu bringen wir das Dreieck in  $D^2$  auf die Position wie in Abbildung 6.7. Der zu  $\eta^i$  in  $H^2$  gehörige Untervektorraum des  $\mathbb{R}^3$  ist  $\langle -e_1 + e_3, e_2 + e_3 \rangle$ ; zu  $\eta^j$  gehört  $\langle -e_1 + e_3, e_1 + e_3 \rangle$ . Man bestätigt leicht, daß  $m_i = -e_1 + e_2 + e_3$  und  $m_j = -e_2$  die jeweils nach außen weisenden Normalenvektoren sind. Es ist  $m_i \circ m_j = -1$ . ♣

**Satz 6.4.5** Sei  $\eta$  ein  $n$ -Simplex der idealen Triangulation  $T$  von  $D^n$ . Die Ecken von  $\eta$  seien von 0 bis  $n$  numeriert. Die der  $i$ -ten Ecke gegenüberliegende  $(n-1)$ -dimensionale Seite von  $\eta$  heiße  $\eta^i$ . Ist  $n \geq 3$  und  $i \neq j$ , so sei  $\theta_{ij}$  der hyperbolische Winkel zwischen  $\eta^i$  und  $\eta^j$  in  $\eta$ . Ist  $n = 2$ , so sei  $\theta_{ij} = 0$  fur  $i \neq j$ . Der euklidischen Umkreisradius des Horospharenschnitts zur  $i$ -ten Ecke sei mit  $R_i$  bezeichnet. Die Schragungen  $S(\eta, \eta^i)$  lassen sich berechnen durch

$$\begin{pmatrix} S(\eta, \eta^0) \\ S(\eta, \eta^1) \\ S(\eta, \eta^2) \\ \vdots \\ S(\eta, \eta^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \theta_{01} & -\cos \theta_{02} & \dots & -\cos \theta_{0n} \\ -\cos \theta_{10} & 1 & -\cos \theta_{12} & \dots & -\cos \theta_{1n} \\ -\cos \theta_{20} & -\cos \theta_{21} & 1 & \dots & -\cos \theta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\cos \theta_{n0} & -\cos \theta_{n1} & -\cos \theta_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Nach Definition ist  $S(\eta, \eta^i) = p \circ m_i$ . Setzt man die Darstellung von  $p$  gemäß Lemma 6.4.3 ein, so folgt

$$\begin{aligned} S(\eta, \eta^i) &= \left( \sum_{j=0}^n R_j m_j \right) \circ m_i \\ &= \sum_{j=0}^n R_j (m_j \circ m_i). \end{aligned}$$

Es ist  $m_i \circ m_i = 1$ . Mit der Darstellung von  $m_j \circ m_i$  fur  $i \neq j$  gemäß Lemma 6.4.4 ist der Satz bewiesen. ♣

## Geometrische Interpretation der Schragung

Der folgende Satz ist in [SW95b] bewiesen. Hier ist ein leicht verandelter Beweis gegeben.

**Satz 6.4.6** Sei  $\eta$  ein ideales  $n$ -Simplex der Triangulation  $T$  von  $D^n$ . Bezeichne  $\tilde{E}_i$  die von  $\eta^i$  aufgespannte Hyperebene.  $\tilde{E}'_i$  sei der von  $\tilde{E}_i$  berandete Halbraum, der  $\eta$  enthält. Die den idealen Ecken zugeordneten Horospharen heißen  $h_0, \dots, h_n$  (s. Abb. 6.8).

Es möge ein Punkt  $Q$  aus  $D^n$  existieren, der von allen Horospharen  $h_0, \dots, h_n$  den gleichen vorzeichenbehafteten Abstand besitzt. Fur  $j \neq i$  sei  $Q_j$  die orthogonale Projektion von  $Q$  auf die  $j$ -te Horosphare  $h_j$ . Sei  $d_j$  der vorzeichenbehaftete Abstand von  $Q_j$  zu  $\tilde{E}_i$  innerhalb  $h_j$  bezuglich  $\tilde{E}'_i$ .

Dann ist die Schragung von  $\eta$  bezuglich  $\eta^i$  gleich  $d_j$ .

**Beweis:** Wir fuhren den Beweis in  $H^n$ . Den  $Q$  (bzw.  $Q_j$ ) entsprechenden Vektor in  $H^n$  bezeichnen wir mit  $q$  (bzw.  $q_j$ ). Die Horospharen  $h_0, \dots, h_n$  seien durch  $v_0, \dots, v_n$  in  $L^+$  representiert.

Der vorzeichenbehaftete Abstand  $d_j$  von  $Q_j$  zu  $\tilde{E}_i$  innerhalb  $h_j$  bezuglich  $\tilde{E}'_i$  ist nach Lemma 3.3.7 gleich  $m_i \circ q_j$ . Man beachte dabei, daß die Definition von  $m_i$  beinhaltet, daß  $m_i$  der bezuglich  $\hat{\eta}$  nach außen weisende Normalenvektor ist.

Wir werden nun zeigen, daß  $m_i \circ q_j = m_i \circ p$  ist. Dann wird auch der Satz bewiesen sein, da  $m_i \circ q_j$  der vorzeichenbehaftete Abstand  $d_j$  ist, und  $m_i \circ p$  die Schragung von  $\eta$  bezuglich  $\eta^i$  ist.

Da  $Q_j$  in  $D^n$  die orthogonale Projektion von  $Q$  auf  $h_j$  ist, liegt  $Q_j$  auf der Geraden durch  $Q$  und den Basispunkt von  $h_j$ . In  $H^n$  bedeutet dies, daß  $q_j$  in dem zweidimensionalen zeitartigen Untervektorraum des  $\mathbb{R}^{n+1}$  liegt, der von  $v_j$  und  $q$  aufgespannt wird. Es gibt somit  $\alpha$  und  $\beta$  aus  $\mathbb{R}$ , so daß

$$q_j = \alpha q + \beta v_j. \tag{6.4.1}$$

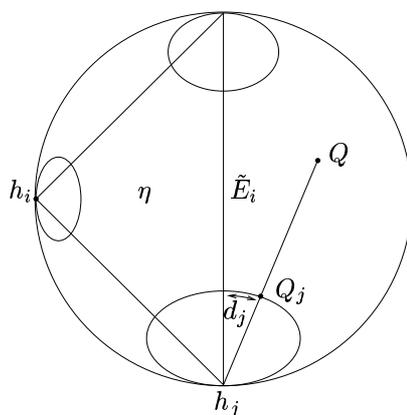


Abbildung 6.8.

Da  $Q$  nach Voraussetzung von  $h_0, \dots, h_n$  den gleichen Abstand besitzt, ist nach Lemma 3.3.2 für  $k = 0, \dots, n$  der Wert von  $q \circ v_k$  konstant. Somit ist  $q$  ein skalares Vielfaches des Normalenvektors  $p$  zu  $\hat{\eta}$ . Setzen wir dies in (6.4.1) ein, so folgt  $q_j = \gamma p + \beta v_j$  für gewisse  $\alpha'$  und  $\beta$  aus  $\mathbb{R}$ . Somit ist

$$\begin{aligned} q_j \circ v_j &= \alpha' (p \circ v_j) + \beta (v_j \circ v_j) \\ &= -\alpha', \end{aligned}$$

da nach Definition  $p \circ v_j = -1$  ist, und  $v_j$  lichtartig ist. Andererseits ist  $q_j \circ v_j = -1$ , denn  $q_j$  liegt auf der Horosphäre  $h_j$ . Deshalb ist  $\alpha' = 1$ . Da  $j \neq i$ , ist  $v_j \circ m_i = 0$ . Folglich ist

$$\begin{aligned} q_j \circ m_i &= \alpha' (p \circ m_i) + \beta (v_j \circ m_i) \\ &= p \circ m_i \\ &= S(\eta, \eta^i). \end{aligned}$$

♣

**Bemerkung:** Aus Satz 6.4.6 folgt, daß alle Abstände  $d_j$  für  $j \neq i$  gleich sind.

Nicht bei jeder Zerlegung ist Satz 6.4.6 anwendbar. Ist die vorgelegte Zerlegung aber die euklidische, so ist die Existenz eines Punktes, der von den Horosphären zu den Ecken eines idealen  $n$ -Simplexes gleich weit entfernt ist, gesichert: Es ist der duale Punkt zum  $n$ -Simplex.

## 6.5 Verändern der Zerlegung

Für eine Teilmenge  $A$  von  $\mathbb{R}^n$  und einen Punkt  $x$  aus  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir wie üblich mit  $A * x$  den Kegel über  $A$  mit Spitze  $x$ .

$$A * x = \bigcup_{y \in A} [y, x].$$

Ist  $g$  eine hyperbolische Gerade in  $D^n$  und  $x$  ein Punkt aus  $\partial D^n$ , so ist  $g * x$  ein ideales Dreieck, falls  $x$  kein idealer Eckpunkt von  $g$  ist.

**Definition:** Sei  $\hat{\sigma}$  ein  $(n-1)$ -Simplex aus  $\partial C'$ , das die gemeinsame Seite der  $n$ -Simplexe  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  aus  $\partial C'$  ist. Es gibt  $\hat{P}$  und  $\hat{Q}$  aus  $B$ , so daß  $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma} * \hat{P}$  und  $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma} * \hat{Q}$ .  $\hat{P}$  und  $\hat{Q}$  sind in  $B$  liegende Repräsentanten von idealen Punkten  $P$  und  $Q$  aus  $\partial D^n$ .  $\hat{\sigma}$  heißt *vollständig hüllkonkav*, wenn  $\hat{\sigma}$  hüllkonkav ist, und in  $D^n$  die Gerade von  $P$  nach  $Q$  im Inneren von  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  liegt.

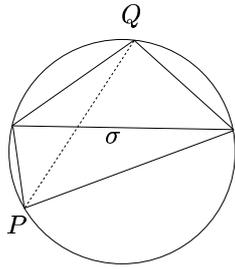


Abbildung 6.9. Zwei inzidente Dreiecke in  $D^2$

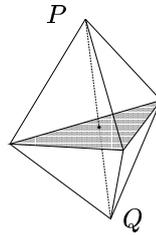


Abbildung 6.10. Die Kante  $\overline{PQ}$  liegt innerhalb.

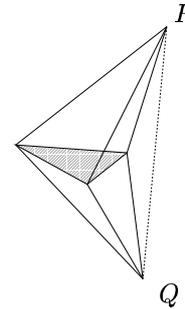


Abbildung 6.11. Die Kante  $\overline{PQ}$  liegt außerhalb.

**Bemerkung:** Genau dann ist  $\hat{\sigma}$  vollständig hüllenkompakt, wenn alle  $\Gamma$ -Translate von  $\sigma$  vollständig hüllenkompakt sind. Wir können den Begriff „vollständig hüllenkompakt“ somit auf  $\Gamma$ -Repräsentanten anwenden.

**Lemma 6.5.1** *In der Dimension  $n = 2$  ist jede hüllenkompakte Kante vollständig hüllenkompakt. In Dimensionen  $n \geq 3$  ist das hüllenkompakte  $(n - 1)$ -Simplex  $\hat{\sigma}$  genau dann vollständig hüllenkompakt, wenn für die durch  $\hat{\sigma}$  bestimmten  $n$ -Simplexe  $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma} * \hat{P}$  und  $\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma} * \hat{Q}$  gilt: Für jedes  $(n - 2)$ -Teilsimplex  $\eta$  von  $\sigma$  ist die Summe des hyperbolischen Winkels zwischen  $\sigma$  und  $\eta * P$  in  $\sigma_1$  und des hyperbolischen Winkels zwischen  $\sigma$  und  $\eta * Q$  in  $\sigma_2$  kleiner als  $\pi$ .*

**Beweis:** Die von  $\sigma$  aufgespannte Hyperebene zerlegt  $D^n$  in zwei Halbräume.  $P$  und  $Q$  müssen in verschiedenen Halbräumen liegen, da der Schnitt von  $\sigma_1 = \sigma * P$  und  $\sigma_2 = \sigma * Q$  sonst mehr als  $\sigma$  wäre.

In der Dimension  $n = 2$  liegt die Gerade von  $P$  nach  $Q$  im Inneren von  $\sigma * P \cup \sigma * Q$  (s. Abb. 6.9). In Dimensionen  $n \geq 3$  ist  $\sigma$  eine echte Teilmenge der von  $\sigma$  aufgespannten Hyperebene, und es können hüllenkompakte Simplexe existieren, die nicht vollständig hüllenkompakt sind (vergl. Abb. 6.10 und 6.11).

Die Menge  $\sigma * P \cup \sigma * Q$  ist genau dann konvex, wenn  $\overline{PQ}$  und  $\sigma$  nicht disjunkt sind. Das Innere der Strecke  $\overline{PQ}$  liegt genau dann im Inneren von  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ , wenn  $\overline{PQ}$  und das Innere von  $\sigma$  nicht disjunkt sind. Die Strecke  $\overline{PQ}$  trifft genau dann das Innere von  $\sigma$ , wenn für jedes  $(n - 2)$ -Simplex  $\eta$  von  $\sigma$  der Winkel zwischen  $\eta * P$  und  $\eta * Q$  in  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  kleiner als  $\pi$  ist. Solch ein Winkel ist die Summe des Winkels zwischen  $\eta * P$  und  $\sigma$  in  $\sigma_1$  und des Winkels zwischen  $\eta * Q$  und  $\sigma$  in  $\sigma_2$ . Man beachte, daß die Aussage des Lemmas richtig bleibt, wenn man „hyperbolischen Winkel“ durch „euklidischen Winkel“ ersetzt. ♣

### (2, n)-Prozesse

Sei  $\sigma$  ein vollständig hüllenkompaktes  $(n - 1)$ -Simplex. Sind die anliegenden  $n$ -Simplexe  $\sigma * P$  und  $\sigma * Q$  nicht  $\Gamma$ -äquivalent, so ersetzen wir  $\sigma * P \cup \sigma * Q$  durch die  $n$   $n$ -Simplexe  $\eta * P * Q$ , wobei  $\eta$  ein  $(n - 2)$ -Teilsimplex von  $\sigma$  ist. Entsprechend ersetzen wir alle  $\Gamma$ -Translate von  $\sigma * P \cup \sigma * Q$ . Eine äquivalente Beschreibung dieser Ersetzung ist das Ankleben aller  $\Gamma$ -Translate des  $(n + 1)$ -Simplexes  $\hat{\sigma} * \hat{P} * \hat{Q}$  an  $\partial C'$  und anschließende Projektion des neuen  $\partial C''$  nach  $D^n$ . Diesen Ersetzungsvorgang bezeichnen wir als  $(2, n)$ -Prozeß.

Ein  $(2, 2)$ -Prozeß stimmt mit der elementaren Transformation in Abbildung 4.11 überein.

**Lemma 6.5.2** *Für die Dimension  $n = 2$  oder  $3$  sei  $\hat{\sigma}$  ein  $(n - 1)$ -Simplex aus  $\partial C'$ . Sind die beiden anliegenden  $n$ -Simplexe aus  $\partial C'$   $\Gamma$ -äquivalent, so ist  $\hat{\sigma}$  hüllenkompakt. ♣*

Lemma 6.5.2 ist als Corollary 3.3 und Corollary 5.3 in [Wee93] bewiesen. Es ist unbekannt, ob in Dimensionen  $n \geq 4$  die Elimination eines vollständig hüllenkonkaven  $(n - 1)$ -Simplexes daran scheitern kann, daß die anliegenden  $n$ -Simplexe  $\Gamma$ -äquivalent sind.

### Endlichkeit des Algorithmus

Sind mehrere vollständig hüllenkonkave  $(n - 1)$ -Simplexe vorhanden, so ist nicht vorgeschrieben, an welchem dieser Simplexe ein  $(2, n)$ -Prozeß auszuführen ist. Der folgende Satz gibt eine genaue Beschreibung der Möglichkeiten bei der sukzessiven Elimination von vollständig hüllenkonkaven  $(n - 1)$ -Simplexen.

**Satz 6.5.3** *Nach endlich vielen  $(2, n)$ -Prozessen erreicht man eine Situation, in der vollständig hüllenkonkave  $(n - 1)$ -Simplexe nicht mehr existieren. Es gibt nur endlich viele verschiedene Möglichkeiten, durch  $(2, n)$ -Prozesse in eine Situation zu gelangen, in der vollständig hüllenkonkave  $(n - 1)$ -Simplexe nicht mehr existieren.*

Wir werden Satz 6.5.3 erst nach Lemma 6.5.4 beweisen.

Sei  $\sigma$  ein vollständig hüllenkonkaves  $(n - 1)$ -Simplex der Zerlegung von  $D^n$ . Die anliegenden  $n$ -Simplexe sind  $\sigma * P$  und  $\sigma * Q$  für gewisse  $P$  und  $Q$  aus  $\partial D^n$ .  $\hat{P}$  und  $\hat{Q}$  seien die  $P$  und  $Q$  entsprechenden Punkte in  $B$ . Die Gerade von  $P$  nach  $Q$  liegt im Inneren von  $\sigma * P \cup \sigma * Q$ . Da  $\hat{\sigma}$  hüllenkonkav ist, liegen nur die Endpunkte der euklidischen Strecke von  $\hat{P}$  nach  $\hat{Q}$  in  $C'$ .

**Definition:** Eine euklidische Strecke, die zwei verschiedene Elemente aus  $B$  verbindet, zusammen mit allen ihren  $\Gamma$ -Translaten, bezeichnen wir als *Kantenklasse*. Gilt für eine (und damit jede) Strecke aus einer Kantenklasse, daß nur ihre Ecken in  $C'$  liegen, so heißt die Kantenklasse *vollständig außerhalb von  $C'$  liegend*.

**Bemerkung:** Es ist in Lemma 4.3 von [Wee93], das dem Lemma 6.5.4 hier entspricht, eine Ungenauigkeit, da dort das Wort *outside* nicht erklärt wird. Es könnten nämlich unendlich viele Kantenklassen existieren, deren Elemente nicht vollständig in  $C'$  liegen, jedoch mehr als nur die Ecken mit  $C'$  gemeinsam haben.

**Lemma 6.5.4** *Es gibt nur endlich viele Kantenklassen, die vollständig außerhalb von  $C'$  liegen.*

**Beweis:** Sei  $z_0$  aus  $B$  und bezeichne  $\Gamma_{z_0}$  den Stabilisator von  $z_0$  in  $\Gamma$ . Wir werden zeigen, daß es nur endlich viele  $\Gamma_{z_0}$ -Orbits von Strecken gibt, die  $z_0$  als Ecke besitzen. Da es nur endlich viele  $\Gamma$ -Orbits in  $B$  gibt, ist das Lemma dann bewiesen.

Da es nur endlich viele  $\Gamma$ -Orbits von  $n$ -Simplexen aus dem Rand von  $C'$  gibt, und jedes Simplex kompakt ist, existiert das Infimum  $r$  der Quadrate der Normen aller Punkte aus  $\partial C'$ . Man beachte, daß  $r$  eine negative Zahl ist. Die Menge

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \circ x \leq r\}$$

ist in  $C'$  enthalten, da eine Strecke, die einen Punkt aus  $H$  mit dem Ursprung verbindet, den Rand von  $C'$  trifft.

Für  $z$  aus  $B - \{z_0\}$  liege die Strecke  $[z_0, z]$  vollständig außerhalb von  $C'$ . Insbesondere ist der Mittelpunkt  $m = (z_0 + z)/2$  nicht in  $C'$  enthalten.  $m$  liegt somit nicht in  $H$ , also ist  $m \circ m > r$ , d.h.  $(z_0 \circ z)/2 > r$ . Nach Lemma 3.3.4 haben die zu  $z_0$  und  $z$  gehörigen Horosphären  $h_{z_0}$  und  $h_z$  einen Abstand, der kleiner als  $\ln(-r) > 0$  ist. Bezeichne  $h'$  die Horosphäre, die von  $h_{z_0}$  um den Abstand  $\ln(-r)$  weiter vom Basispunkt entfernt ist. Die Horosphäre  $h_z$  trifft  $h'$ .

Wir betrachten nun die Situation in  $U^n$  und bringen den Basispunkt von  $h_{z_0}$  nach  $\infty$ .  $h'$  ist eine zu  $h_{z_0}$  parallele euklidische Hyperebene. Hat  $h'$  die  $n$ -te Komponente identisch gleich  $t$ , so besitzt

eine Horosphäre, die  $h'$  trifft, einen euklidischen Radius größergleich  $t/2$ . Der euklidische Abstand zwischen den Basispunkten zweier disjunkter Horosphären, die beide  $h'$  treffen, ist größergleich  $t$ . Ist  $A \times (0, \infty)$  ein euklidisch-konvexer Fundamentalbereich bezüglich  $\Gamma_\infty$ , so ist  $\overline{A}$  kompakt. Es kann folglich nur endlich viele Horosphären mit Basispunkten in  $A \times \{0\}$  geben, die  $h'$  treffen. ♣

**Beweis von Satz 6.5.3:** Sei  $\hat{\sigma}$  ein vollständig hüllenkonkaves  $(n-1)$ -Simplex aus  $\partial C'$ ,  $\hat{\sigma} * \hat{P}$  und  $\hat{\sigma} * \hat{Q}$  seien die anliegenden  $n$ -Simplexe. Die euklidische Strecke  $[\hat{P}, \hat{Q}]$  von  $\hat{P}$  nach  $\hat{Q}$  ist dann in einer Kantenklasse enthalten, die vollständig außerhalb von  $C'$  liegt.

Führt man an  $\hat{\sigma}$  (und an allen  $\Gamma$ -Translaten) einen  $(2, n)$ -Prozeß aus, so wird in der entstehenden Hülle  $C''$  die Strecke  $[\hat{P}, \hat{Q}]$  enthalten sein. Nach diesem Prozeß nennen wir  $C''$  wieder  $C'$ . Die Anzahl der vollständig außerhalb  $C'$  liegenden Kantenklassen hat sich bei dem  $(2, n)$ -Prozeß um mindestens eins verringert, da klarerweise keine neuen Kantenklassen hinzukommen, die vollständig außerhalb von  $C'$  liegen, denn  $C''$  enthält  $C'$ . Wegen Lemma 6.5.4 sind unendlich viele sukzessive  $(2, n)$ -Prozesse unmöglich.

Ist die Anzahl der vollständig außerhalb  $C'$  liegenden Kantenklassen gleich  $r$ , so gibt es höchstens  $r!$  verschiedene Möglichkeiten, sukzessive  $(2, n)$ -Prozesse anzuwenden. Bei der sukzessiven Elimination vollständig hüllenkonkaver  $(n-1)$ -Simplexe gibt es also höchstens  $r!$  verschiedene Wege. ♣

## Zusammenfassung des Algorithmus

Gegeben sei eine Menge idealer  $n$ -Simplexe und Verklebe-Isometrien, die eine hyperbolische Mannigfaltigkeit bestimmen. Die Mannigfaltigkeit ist nicht kompakt, und sie besitzt ein endliches Volumen, nämlich die Summe der Volumina der  $n$ -Simplexe. Die Zerlegung nennen wir Startzerlegung.

- (1) Bestimme zu vorgegebenen Volumina der Spitzen die entsprechenden uniformen Horobälle.
- (2) Berechne zu jedem  $n$ -Simplex die  $(n+1)$  auftretenden Schrägungen.
- (3) Bestimme mit Hilfe von Satz 6.3.1 alle hüllenkonkaven  $(n-1)$ -Simplexe. Wenn hüllenkonkave  $(n-1)$ -Simplexe existieren: Gehe zu 4. Wenn keine existieren: Gehe zu 5.
- (4) Untersuche mit Hilfe von Lemma 6.5.1, ob eines der hüllenkonkaven  $(n-1)$ -Simplexe vollständig hüllenkonkav ist. Ist  $n \geq 4$ , so überprüfe, ob die anliegenden  $n$ -Simplexe verschieden sind.  
Existiert ein geeignetes vollständig hüllenkonkaves  $(n-1)$ -Simplex, so eliminiere es durch einen  $(2, n)$ -Prozeß und gehe mit den sich ergebenden  $n$ -Simplexen zu 2.  
Existiert kein geeignetes Simplex, so gehe zu 6.
- (5) Wie wir am Ende von Abschnitt 6.2 bemerkt haben, bilden die Simplexe nun eine Verfeinerung der euklidischen Zerlegung. Man bestimme mit Hilfe von Satz 6.3.1 alle hüllenplanaren  $(n-1)$ -Simplexe und vereinige die anliegenden  $n$ -Simplexe. Es entsteht eine Zerlegung in ideale konvexe Polyeder: die euklidische Zerlegung zu den gewählten Volumina der Spitzen. Gehe zu 7.
- (6) Man beginne mit der Startzerlegung wieder bei Punkt 3. Man wähle aber einen anderen Weg bei der sukzessiven Anwendung der  $(2, n)$ -Prozesse. (Dazu muß man eine Liste führen, die sich die verschiedenen Wege merkt).  
Sind alle möglichen Wege ausprobiert, so hat der Algorithmus fehlgeschlagen. Gehe zu 7.
- (7) Ende.

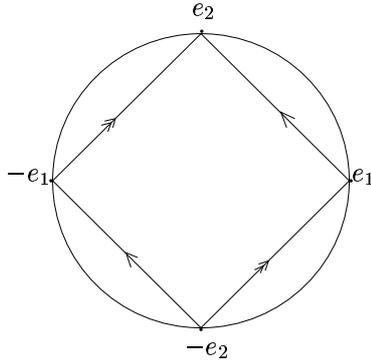


Abbildung 6.12. Ein ideales Quadrat

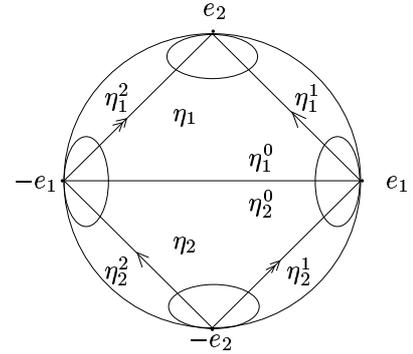


Abbildung 6.13. Zerlegung des idealen Quadrates

## 6.6 Beispiele

### Kanonische Zerlegung eines punktierten Torus

In Abbildung 6.12 werden gegenüberliegende Seiten durch Isometrien hyperbolischer Art identifiziert. Die Translationsachsen sind  $y = x$  bzw.  $y = -x$ . Man wähle solche Horobälle, die in der euklidischen Metrik isometrisch sind. Man kann die Identifikations-Isometrie als Spiegelung an der Translationsachse der anderen Isometrie und dann die Spiegelung an der entsprechenden Seite des Quadrates darstellen. Dabei sieht man, daß z.B. der Horoball zur Ecke  $-e_2$  auf den Horoball zur Ecke  $e_1$  abgebildet wird. Diese Horobälle (und alle ihre  $\Gamma$ -Translate) bilden somit uniforme Horobälle. Es gibt nur einen  $\Gamma$ -Orbit von Horobällen.

Man kann direkt sehen, daß die Ecken des Quadrates parabolische Fixpunkte werden. Dazu muß man nur den Kommutator der Identifikations-Isometrien betrachten.

Wir unterteilen nun das ideale Quadrat in zwei ideale Dreiecke  $\eta_1$  und  $\eta_2$  (s. Abb. 6.13). In  $\eta_1$  seien die Ecken  $e_2, e_1$  und  $-e_1$  der Reihe nach numeriert von 0 bis 2. In  $\eta_2$  seien die Ecken  $-e_2, -e_1$  und  $e_1$  der Reihe nach numeriert von 0 bis 2. Die der Ecke  $j$  in  $\eta_i$  gegenüberliegende Seite bezeichnen wir mit  $\eta_i^j$ .

Bezeichne  $R_j^i$  den euklidischen Umkreisradius des Horosphärenschnitts in  $\eta_i$  zur Ecke  $j$ . Wegen der Symmetrie ist

$$R_0^1 = 2R_1^1 = 2R_2^1 = 2R_2^2 = 2R_1^2 = R_0^2.$$

Mit Satz 6.4.5 können wir die Schrägungen berechnen.

$$\begin{pmatrix} S(\eta_1, \eta_1^0) \\ S(\eta_1, \eta_1^1) \\ S(\eta_1, \eta_1^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_0^1 \\ R_1^1 \\ R_2^1 \end{pmatrix}.$$

Es werden  $\eta_1^1$  und  $\eta_2^2$  identifiziert,  $\eta_1^2$  und  $\eta_2^1$ , sowie  $\eta_1^0$  und  $\eta_2^0$ . Bezeichne  $R = R_1^1$ . Es ist

$$\begin{aligned} S(\eta_1, \eta_1^1) + S(\eta_2, \eta_2^2) &= -2R + (-2R) = -4R < 0 \\ S(\eta_1, \eta_1^2) + S(\eta_2, \eta_2^1) &= -2R + (-2R) = -4R < 0 \\ S(\eta_1, \eta_1^0) + S(\eta_2, \eta_2^0) &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Alle Kanten  $\eta_i^j$  sind somit nach Satz 6.3.1 hüllenkonvex. Die Kante  $\eta_1^0 = \eta_2^0$  ist hüllenplanar. Somit ist die kanonische Zerlegung die Vereinigung von  $\eta_1$  und  $\eta_2$  entlang  $\eta_1^0$ . Dies ist das ideale Quadrat.

Man hätte die Schrägungen auch gemäß Satz 6.4.6 berechnen können. Der Ursprung  $M$  ist von den Horosphären zu den Ecken von  $\eta_i$  gleich weit entfernt,  $i = 1, 2$ . Da  $M$  in  $\eta_i^0$  liegt, ist

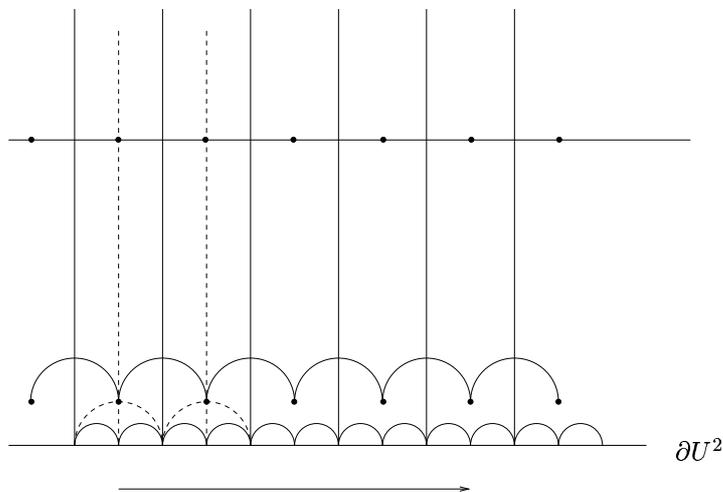


Abbildung 6.14.

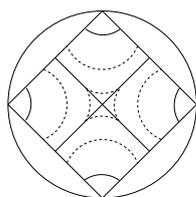


Abbildung 6.15. Anwachsende Horobälle

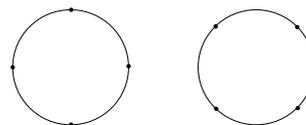


Abbildung 6.16.

die Schrägung von  $\eta_i$  bezüglich  $\eta_i^0$  gleich Null. Alle anderen Schrägungen sind negativ, da die orthogonale Projektion von  $M$  auf die Horosphären zu  $e_2$  und  $-e_2$  innerhalb der Dreiecke liegt. Die entsprechenden vorzeichenbehafteten Abstände sind deshalb negativ.

Die Spitze des Torus ist homöomorph zu  $S^1 \times [1, \infty)$ . Ein Spitzen-Schnitt ist homöomorph zu  $S^1$ . Wir bestimmen nun die duale Zerlegung auf  $S^1$  gemäß Abschnitt 5.4. Dazu betrachten wir in Abbildung 6.14 die Situation in  $U^2$ .

$\Gamma_\infty$  wird von dem Kommutator der Verklebe-Isometrien erzeugt. Es ist die Translation „um vier Zellen“. Die Horosphäre  $h$  wird in vier  $\Gamma_\infty$ -Orbits von euklidischen Strecken zerlegt. Diese haben alle die gleiche Länge; die Hälfte dieser Länge ist (in der euklidischen Metrik von  $h$ ) der Umkreisradius  $R$ .

Wir haben vorher bemerkt, daß der Ursprung von den vier Horosphären gleich weit entfernt ist. Der Ursprung ist somit der duale Punkt zum Quadrat. Der Ursprung ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, die gegenüberliegende ideale Eckpunkte des Quadrates verbinden. In Abbildung 6.14 sind die dualen Punkte eingezeichnet. Dadurch sind die dualen Strecken zu den Kanten des idealen Quadrats bestimmt. Die dualen Strecken und die in  $U^2$  über ihnen liegenden Punkte bilden den Voronoi-Bereich zu  $h$ . In Abbildung 6.15 ist das Anwachsen der Horosphären innerhalb des idealen Quadrates dargestellt.

Die orthogonale Projektion des Randes des Voronoi-Bereiches auf  $h$  ist bis auf eine Translation die gleiche Zerlegung von  $h$  wie die durch die kanonische Zerlegung induzierte Zerlegung von  $h$ . In Abbildung 6.16 sind die dualen Zerlegungen des Spitzen-Schnitts  $S^1$  dargestellt.

## Das Komplement des Achterknotens

In Abschnitt 4.5 haben wir das Verkleben von zwei regulären idealen 3-Simplexen zum Komplement des Achterknotens beschrieben. Es gibt eine allgemeine Methode zur Darstellung vieler Knotenkomplemente durch das Verkleben konvexer Polyeder ohne ihre Ecken. Man sehe z.B. Abschnitt E.5.iv in [BP92] und die Referenzen in Abschnitt I.2 von [SW95a].

Wir werden nun skizzieren, daß durch das Verkleben der beiden idealen 3-Simplexe eine hyperbolische Mannigfaltigkeit entsteht; ein ausführlicher Beweis ist in Abschnitt 10.3 von [Rat94] gegeben.

Von den 12 Kanten der beiden 3-Simplexe werden zweimal sechs Kanten zu einer Kante identifiziert. Da die Simplexe regulär sind, ist der Innenwinkel an jeder Kante gleich  $\pi/3$ . Somit ergänzen sich an jeder Kante die sechs anliegenden Winkel zu  $2\pi$ .

Indem man ein reguläres ideales 3-Simplex in  $D^3$  als reguläres euklidisches 3-Simplex darstellt, kann man sehen, daß man Horobälle zu den idealen Ecken wählen kann, die verträglich verklebt werden. Diese Horobälle sind in der euklidischen Metrik von  $D^3$  isometrisch.

Somit ergibt das Verkleben eine hyperbolische Mannigfaltigkeit.

Wir werden nun zeigen, daß die Zerlegung kanonisch ist. Wenn wir auf Abbildung 5.9 zurückblicken, so sehen wir, daß alle euklidischen Umkreisradien gleich sind, da alle Dreiecke isometrisch sind. Der Umkreisradius sei mit  $R$  bezeichnet. Mit Satz 6.4.5 folgt deshalb, daß alle acht auftretenden Schrägungen den Wert

$$R - R \cos(\pi/3) - R \cos(\pi/3) - R \cos(\pi/3) = -\frac{1}{2}R$$

besitzen. Die gemäß Satz 6.3.1 zu berechnenden Summen von Schrägungen haben somit alle den negativen Wert  $-R$ . Folglich sind alle Seiten der Simplexe hüllenkonvex. Da keines dieser Dreiecke hüllenplanar ist, ist die Zerlegung kanonisch.

Man kann auch Satz 6.4.6 anwenden. Der Mittelpunkt  $Q$  eines der beiden 3-Simplexe (d.h. der gemeinsame Schnittpunkt der drei Geraden, die jeweils senkrecht auf zwei gegenüberliegende Kanten stehen) ist von den vier Horosphären der Eckpunkte gleich weit entfernt. Die Projektion von  $Q$  auf die Horosphären liegt im Inneren des 3-Simplexes, also ist jede Schrägung negativ.

# Literaturverzeichnis

- [BP92] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer, 1992.
- [Dug70] James Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Inc., 1970.
- [EP88] David B.A. Epstein and R.C. Penner. Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 27:67–80, 1988.
- [EP94] David B. A. Epstein and Carlo Petronio. An exposition of Poincaré’s polyhedron theorem. *L’Enseignement Mathématique*, 40:113–170, 1994.
- [HAMS93] Cynthia Hog-Angeloni, Wolfgang Metzler, and Allan J. Sieradski, editors. *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory*. Cambridge University Press, 1993.
- [HW92] Shawn R. Henry and Jeffrey R. Weeks. Symmetry groups of hyperbolic knots and links. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):185–201, 1992.
- [Kaw96] Akio Kawachi. *A survey of knot theory*. Birkhäuser, 1996.
- [PS85] Franco P. Preparata and Michael I. Shamos. *Computational geometry*. Springer, 1985.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. Springer, 1994.
- [Riv94] Igor Rivin. Euclidean structures on simplicial surfaces and hyperbolic volume. *Annals of Mathematics*, 139:553–580, 1994.
- [RS72] C. P. Rourke and B. J. Sanderson. *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Springer, 1972.
- [SW95a] Makoto Sakuma and Jeffrey R. Weeks. Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements. *Japan. J. Math. N. S.*, 21(2):393–439, 1995.
- [SW95b] Makoto Sakuma and Jeffrey R. Weeks. The generalized tilt formula. *Geometriae Dedicata*, 55:115–123, 1995.
- [Thu79] William P. Thurston. *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*. Princeton University notes, 1979.
- [Thu97] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton University Press, 1997.
- [Wee93] Jeffrey R. Weeks. Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic 3-manifolds. *Topology and its Applications*, 52:127–149, 1993.

- [WYY96] Masaaki Wada, Yasushi Yamashita, and Han Yoshida. An inequality for polyhedra and ideal triangulations of cusped hyperbolic 3-manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(12):3905–3911, 1996.

# Index

- $(2, n)$ -Prozeß, 91
- Achterknoten, 53, 73, 96
- $B$ , 45
- $B^n$ , 21
- $C$ , 45
- $C'$ , 82
- $D^n$ , 17
- diskrete Menge, 28
- duales Element, 65
- elementare Untergruppe von  $M(B^n)$ , 32
- endlich-kompakt, 27
- entartetes Simplex, 58
- euklidische Zerlegung
  - von  $D^n/\Gamma$ , 51
  - von  $D^n$ , 51
- Fundamentalebene, 31
- $h_w$ , 34
- $H^n$ , 12
- Horoball, 33
- Horosphäre, 33
  - mit euklidischer Struktur, 37
- Horosphärenschnitt, 87
- hüllenkonkav, 82
  - vollständig, 90
- hüllenkonvex, 82
- hüllenplanar, 82
- idealer Punkt, 18
- Index, 99
- Isometrie
  - elliptische, 24
  - hyperbolische, 24
  - parabolische, 24
- kanonische Zerlegung, 51
- Kantenklasse, 92
- Kollabierretrakt, 78
  - spezieller, 79
- kombinatorischer Automorphismus, 53
  - strikt, 53
- $L^+$ , 7
- Lichtkegel, 6
- Lorentz-
  - Matrix, 8
    - positive, 9
  - Norm, 6
  - orthogonal, 9
  - Produkt, 5
  - Transformation, 8
- $M(B^n)$ , 23
- $M(U^n)$ , 25
- Mannigfaltigkeit
  - euklidische, 30
  - hyperbolische, 30
- Möbius-Transformation, 20
- $PO(n - 1, 1)$ , 9
- Poincaré-Erweiterung, 25
- quasiorthogonal, 67
- $S$ , 44
- $\langle \sigma \rangle$ , 67
- Schrägung, 83
- Spitze, 45
- Spitzen-Schnitt, 45
- Stützebene, 47
- topologische Gruppe, 28
- Triangulation
  - entartete, 58
  - ideale, 57
- $U^n$ , 23
- uniforme Horobälle, 44

## Untervektorraum

- lichtartiger, 10
- raumartiger, 10
- zeitartiger, 10

## Vektor

- lichtartiger, 6
- positiv zeitartiger, 6
- raumartiger, 6
- zeitartiger, 6

## Volumen, 31

## Voronoi-Bereich, 64

## Voronoi-Zerlegung

- von  $H^n/\Gamma$ , 69
- von  $H^n$ , 65

## vorzeichenbehafteter Abstand, 38

## Zelle, 51, 67

- duale, 68