Geschichte der loxodromischen Curve.

§ 1. Diejenige doppelt gekrümmte Curve, welche wir mit dem Namen der loxodromischen bezeichnen, und welche mathematisch dadurch bestimmt ist, dass sie sämmtliche Meridianlinien irgend eines Umdrehungskörpers unter einem constanten Winkel durchschneidet, darf mehr denn irgend ein anderer dem mathematisch-geographischen Grenzgebiete angehöriger Gegenstand dem Besitzstande der letztgenannten Wissenschaft zugerechnet werden. Ist doch deren Kenntniss recht eigentlich einer der Grundpfeiler, auf welchen der theoretische Theil der Nautik beruht, insoferne die Schifffahrt auf dem grössten Kreise oder aber nach gleichbleibendem Compassstrich von jeher einen Hauptbestandtheil der Steuermannskunde bildete, und wäre doch andererseits ohne diese wichtigste Unterstützung des Seefahrenden unser Wissen von fremden Zonen dazu verurtheilt, Stückwerk zu bleiben. Man wird demgemäss unsere Absicht, die Geschichte dieser merkwürdigen Linie bis in die ältesten Zeiten ihres Auftretens hinauf- und bis zu den allerneuesten Stadien ihrer Erforschung herab zu verfolgen, als eine berechtigte und mit dem Grundplan dieses Unternehmens harmonirende anerkennen müssen.

Dass die Idee, eine solche Linie an der Oberfläche der Erde durch den Schiffskiel beschreiben zu lassen — eine Idee, ohne deren vorherige Conception zu einer Behandlung der Frage unter rein-mathematischen Gesichtspunkten jedweder Anlass fehlen musste — nicht vor der Entdeckung der magnetischen Richtkraft Wurzel schlagen konnte, versteht sich von selbst. Dem Alterthum fehlte, wie der grösste Kenner einschlägiger Dinge versichert 1), jede Kenntniss einer so wichtigen Thatsache, deren geschichtlich erste

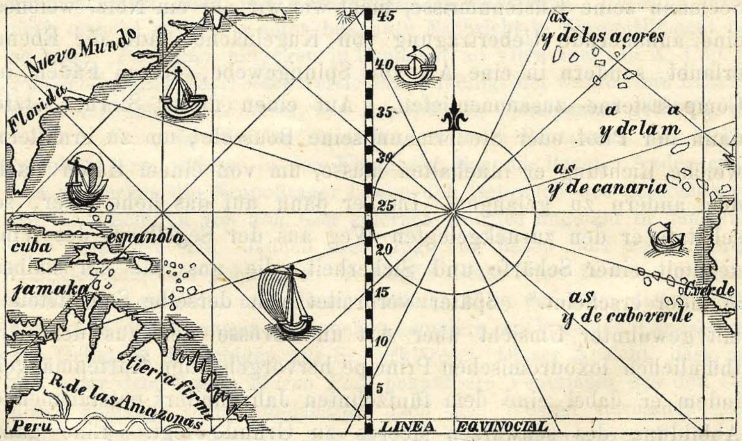
Erwähnung man bei chinesischen Schriftstellern findet. Wie uns *Martin* (a. a. O.) erzählt, wollen allerdings mehrere Autoren der letzten drei Jahrhunderte die Boussole bei den Phöniziern, Aegyptern, Karthagern und Juden nachweisen, so *Pineda, Herwart von Hohenburg, Cooke, Strutt* und *Pouchet*, allein nirgendwo vermögen sich dieselben auf authentische Quellenbelege zu stützen.*) Vielmehr kann es als erwiesen gelten, dass die Entdeckung der nordweisenden Eigenschaft einer frei schwebenden Magnetnadel eine der wenigen, aber desto ruhmreicheren, Entdeckungen ist, welche das abendländische Mittelalter aufzuweisen hat. Es darf 3) als ausgemacht gelten, dass an eine Uebertragung aus dem Orient nicht zu denken ist, dass vielmehr bei *Neckam* und *Guiot de Provins* des neuen wichtigen Instrumentes erstmalig Erwähnung gethan wird. Bei *Raymundus Lullus* wird die Lehre von demselben bereits der Naturlehre als ein nicht zur Nautik als solcher gehöriges Object überwiesen 4). Unter allen Umständen steht es fest, dass gegen die Wende des dreizehnten Jahrhunderts der Schiffscompass in einer der modernen sehr ähnlichen Form den Bewohnern der spanischen und italischen Mittelmeerküsten diente; weiter auf diese Vorfrage einzugehen ist an diesem Orte nicht unsere Aufgabe, vielmehr weisen wir zu dem Ende auf die bezüglichen Spezialschriften, z. B. diejenige von *Ausserer* 5), hin.

*) Zu den genannten Gelehrten ist auch besonders *Levinus Lemnius* zu rechnen, dessen von *Martin* nicht gedacht wird, dessen Namen wir vielmehr einer Notiz von *Kordenbusch* 2) entnehmen. Derselbe bringt noch manche andere weniger bekannte Nachricht in dieser Hinsicht bei, so u. a.: „*Philander* hingegen in Comment. ad Vitruvium Lib. X, Cap. 14, *Pancirollus* und *Kekermann* versichern einhellig. der wahre erste Erfinder des Compasses seie *Flavius*, aus Amalphis in Champanien gebürtig, gewesen. *Alexander Sardus* lässet ihn als einen Bootsmann aus Melphi gebohren sein, welches in dem Königreich Neapolis lieget. Andere glauben wiederum, die Neapolitaner hätten den Gebrauch des Seecompasses auf ihren Schiffen von *Joh. Goa* gelernet, welches ungefähr in dem Jahr 1309 geschehen seie. Jedoch noch lange vor diesen Jahr wollen einige Geschichtschreiber behaupten, *M. Paul Venetus* wäre in dem Jahr 1260 nach China gereiset, und dieser Italiäner hätte auf eben dieser Reise, nicht nur den Compass gebrauchet, sondern auch seinen Landsleuten den Gebrauch desselbigen zur See erkläret.“ Dieser Ansicht, dass der uns unter dem Namen *Marco Polo* bekanntere Venetianer das den Chinesen geläufige Orientirungsmittel nach dem Westen verpflanzt habe, huldigte nach *Kordenbusch* auch der Tübinger Mathematiker *Kraft*.

§ 2. Unmittelbar nachdem der Azimuthalkompass dem Seewesen jener Zeit einverleibt war, begannen sich die Praktiker seiner zu bedienen, um nach Loxodromieen zu segeln. Freilich wohnte ihnen noch keine Ahnung davon inne, dass diese letzteren ganz eigenartige geometrische Gebilde seien; ihnen galten dieselben als einfache gerade Linien, und da die Reiserouten des Zeitalters aus dem engen Kreise des mittelländischen Meeres nicht heraustraten, sich also auch nur auf einen verhältnissmässig sehr kleinen Theil der gekrümmten Erdoberfläche erstreckten, so trat der begangene Fehler nicht übermässig hervor. Eigene, freilich noch rohe und nicht gerade nach wissenschaftlichen Grundsätzen eingerichtete, Seekarten sollten dazu dienen, sich möglichst in gerader Richtung dem erwählten Reiseziele nähern zu können. Nach *Alexander von Humboldt*, in dessen bezüglicher Angabe 6) übrigens ein sehr sonderbarer Schreib- oder Druckfehler zu verbessern ist, reicht der Gebrauch solcher Plattkarten mindestens bis zum Schlusse des dreizehnten Jahrhunderts hinauf, wo sie als „Cartas del marear“ 7) den Ostspaniern geläufig gewesen zu sein scheinen, so geläufig sogar, dass sie in ziemlich unverändertem Zustande — denn noch im Jahre 1508 werden bittere Klagen über deren Unzuverlässigkeit erhoben 8) — mehrere Jahrhunderte überdauern konnten. *Peschel* hat in dem trefflichen Abrisse, welchen er von der Entwickelung der mittelalterlichen Kartographie giebt, das Wesen dieser auf den Irrthum geradliniger Loxodromen begründeten „Composition“ lichtvoll dargelegt 9): „So zeichnete der Seemann seine Küstenumrisse, nicht wie wir auf ein Netz, welches eine annähernde Uebertragung von Kugelflächen auf die Ebene erlaubt, sondern in eine Art von Spinngewebe, dessen Fäden in Compasssterne zusammenliefen. Auf einen dieser Sterne setzte dann der Pilot oder Steuermann seine Boussole, um zu ermitteln, welche Richtung er innehalten müsse, um von einem Hafen nach dem andern zu gelangen. Lief er dann auf das hohe Meer, so schätzte er den zurückgelegten Weg aus der Segelkraft des Windes mit einer Schärfe und Sicherheit, die uns wie ein halbes Wunder erscheint.“ Später verbreitet sich derselbe Schriftsteller mit gewohnter Umsicht über Art und Grösse der aus dem irrthümlichen loxodromischen Principe hervorgehenden Kartenmängel, indem er dabei eine dem fünfzehnten Jahrhundert entstammende Abbildung des schwarzen Meeres zu Grunde legt. Eine ganz ähnlich lautende Beschreibung von dieser Art unvollkommener Seekarten giebt uns ein neuerer Schriftsteller, der Greifswalder Astronom *Röhl*, aus dessen Worten 11) man wohl nicht anders schliessen kann, als dass noch etwa vor hundert Jahren dergleichen dem handwerksmässigen Schiffer als einziges Hülfsmittel diente. Insbesondere spricht er auch von dem auf der Karte verzeichneten Seecompass, gegen dessen Mittelpunkt die einzelnen Curse convergirten. Selbst dann noch, als bereits, wie sich im zweitfolgenden Paragraphen zeigen wird, *Nunez* die wahre Theorie der loxodromischen Schifffahrt in ihren Grundzügen offenbart hatte, liess man nicht ab, die falschen Plattkarten beizubehalten und sogar dadurch, dass man oceanische Distanzen mit ihrer Hülfe zu messen suchte, neue Fehler den alten hinzuzufügen. So finden wir in einem spanischen Compendium der Nautik von 1556, welches offenkundig den Stempel officieller Abfassung an sich trägt, dieselbe unzureichende Compass-Weltkarte 12), wie in einem verwandten aber elf Jahre früher erschienenen Werke 13)*) — ein Anachronismus, der sich wohl nur durch die Annahme erklären lässt, dass bei der feindlichen Stellung der beiden Nachbarvölker die Entdeckung eines Portugiesen erst nach einer selbst für damalige Verhältnisse ungebührlich langen Zeitdauer auch in Spanien bekannt werden und Anklang finden konnte.

*) Ein Theil derselben ist in Fig. 1 reproducirt.

Fig. 1.



§ 3. Es ist nicht uninteressant, zu untersuchen, welcher Art die Schiffsrechnung war, welche unter Voraussetzung kreisförmiger, resp. bei kleineren Entfernungen geradliniger Loxodromen sich ausbildete, und deren verhältnissmässige Schärfe *Peschel*, wie wir soeben sahen, in fast emphatischer Sprache rühmt. Es ist abermals das Verdienst des *Peschel-Ruge*'schen Werkes, uns zur Beantwortung dieser Fragen wichtiges und fast vollständig unbekanntes Quellenmaterial an die Hand gegeben zu haben 14). Es wird nämlich dort zunächst darauf hingewiesen, dass jener nämliche *Raymundus Lullus*, dessen als eines in der Geschichte der wissenschaftlichen Nautik höchst bedeutsamen Mannes wir bereits Erwähnung zu thun hatten, auch für diesen Zweig der von ihm mit Vorliebe gepflegten Disciplin bahnbrechend gewirkt habe. Derselbe nimmt 15) an, ein Schiff wolle nach Osten fahren, sei jedoch gezwungen, den gerade wehenden Südwind zu benützen; durch geeignete Segelstellung wird in Folge des unausgesprochen zu Grunde gelegten Satzes vom Parallelogramm der Kräfte das Schiff „per exaloch", d. h. nach Südost getrieben, und es fragt sich, in welchem Grade sich trotz der ihm aufgezwungenen Ablenkung der Schiffer seinem Reiseziele nähere. Einer Strecke von vier Meilen auf der Südostlinie entspricht eine solche von drei Meilen West-Ost, acht Meilen entsprechen sechs u. s. w., d. h. da das Kräfteparallelogramm in diesem Falle zum Rechteck wird, es ist

$$\cos 45^0 = \frac{3}{4} = 0{,}75,$$

ein Werth, der vom wahren, $\cos 45^0 = 0{,}707$, wenigstens nicht allzuviel abweicht. In einem ganz ähnlichen Sinne sind auch die übrigen von *Lullo* gegebenen Vorschriften gehalten, und allgemein könnte man seine Absicht dahin charakterisiren: Projicirt man irgend eine der von einem Punkte ausgehenden geradlinigen Loxodromen aus irgend einem ihrer Punkte auf eine der beiden Cardinalrichtungen, so soll angegeben werden, wie gross die betreffende Projection ausfällt. Es handelt sich hier also um die Trigonometrie des rechtwinkligen Dreieckes.

In noch weit allgemeinerer Fassung hat das gleiche Problem ein anonymer italienischer Autor angegriffen, mit dessen, für die Geschichte der Mathematik ungewöhnlich wichtigen, Arbeiten uns *Toaldo* bekannt gemacht hat. Es ist diess der von *Peschel*

(a. a. O.) so genannte „Marteloio“, wofür jedoch besser „Martologio“ zu schreiben wäre.*) *Toaldo* berichtet uns 18), dass er in Venedig zufällig ein altes Manuscript untersucht habe, welches ausschliesslich nautische Dinge als Inhalt aufwies; „tra l'altre v' è una regola, che il libro chiama Rason del Martologio, o sia regola di navegar a mente.“ Von dieser Abtheilung des Codex liefert er einen wortgetreuen Abdruck, indem er zugleich einer jeden allda gelehrten Detailregel eine Erläuterung beifügt. Diese Noten, die denn auch einen bei weitem grösseren Raum beanspruchen, als das Original selbst, nehmen mitunter den Charakter wahrer Divinationen an, und ohne ihre Beihülfe würden dem Verständniss des Textes beträchtliche Schwierigkeiten erwachsen.

Die kleine Abhandlung beginnt 19) mit der Angabe der goniometrischen Funktionen für alle Winkel des ersten Quadranten, welche von 90^0 um ein Vielfaches von $11\frac{1}{4}$ Graden abstehen; für jeden Winkel bezüglich von der Grösse

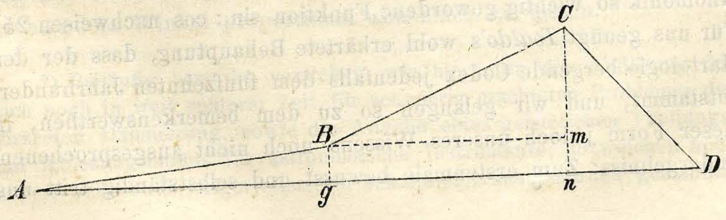
$$10^0\,15', \; 22^0\,30', \; 33^0\,45', \; 56^0\,15', \; 67^0\,30', \; 78^0\,45', \; 90^0$$

finden wir Sinus, Cosinus, Sekante und Tangens unter Zugrundelegung eines Sinus totus = 100 verzeichnet. Die Fehler sind durchaus nur in den Dezimalstellen vorhanden, wie eine von *Toaldo* angestellte Controlrechnung beweist. Denken wir uns ein rechtwinkliges Plandreieck, dessen Hypotenuse als Stück einer Loxodrome gegeben ist, so kann bei bekanntem Compassstrich — die Achttheilung der Windrose wird auch durch die obige Tabelle bestätigt — sowohl der Längen- als auch der Breitenunterschied aus jener Strecke l berechnet werden, was unser Gewährsmann resp. mit „allargare“ und „avanzare“ bezeichnet. Sind λ_1 und λ_2, β_1 und β_2 die geographischen Constanten der beiden Endpunkte des vom Schiffe zurückgelegten Weges, so wäre also

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{l}{\cos\varphi}, \; \beta_1 - \beta_2 = \frac{l}{\sin\varphi}.$$

Diess ist der einfachste überhaupt denkbare Fall; es kann jedoch auch vorkommen, dass der Seemann, von zwei auf einander folgenden, einen Winkel mit einander einschliessenden, Windrichtungen Gebrauch machen muss, um sein Ziel zu erreichen, so dass also sein Curs eine gebrochene Linie wird. Um auch hier den Weg des Fahrzeuges zu finden, nimmt der Anonymus, wie *Toaldo* 20) ausser Zweifel stellt, den Sinussatz der ebenen Trigonometrie zu Hülfe: Zwei Dreiecksseiten stehen zu einander in dem nämlichen Verhältniss, wie die Sinusse der ihnen gegenüberliegenden Winkel. Hierbei werden spitz- und stumpfwinklige Dreiecke gesondert für sich betrachtet; der Kunstgriff, sich zuerst einem abtreibenden Winde zu überlassen, alsdann aber mit Umsetzen der Luftströmung einen anderen Weg einzuschlagen, heisst „voltizar“ und „altizar“. Hierauf endlich wird die zu lösende Frage noch allgemeiner formulirt. Es kann, und im Grossen und Ganzen wird das sogar der häufiger eintretende Fall sein, auch vorkommen, dass der Wind im Verlaufe der Reise mehr denn einmal umschlägt; unser Venetianer betrachtet den Curs seines Schiffes aus drei nicht in gerader Linie gelegenen, Strecken zusammengesetzt, und da hierbei ein Verfahren zur Anwendung gelangt 21), welches unmittelbar an die Methodik unserer modernen Polygonometrie erinnert, so wollen wir etwas eingehender uns mit jenem beschäftigen. In dieser Disciplin pflegt man bekanntlich die einzelnen Endpunkte eines gebrochenen Linienzuges auf eine feste Axe zu projiciren; ganz so geschieht es auch hier, und zwar wird, wie natürlich, als Projectionsaxe die kürzeste Entfernung *AD* (Fig. 2) des Anfangs- und Endpunktes der Reise genommen.

Fig. 2.



*) Eine etymologische Erklärung dieses Kunstwortes von dunkler Herkunft hat der Verf. kürzlich an einem anderen Orte zugeben versucht 16). Er denkt sich darunter das Ganze wissenschaftlicher Vorkenntnisse, wie es der Seefahrer von damals nöthig hatte, also einerseits die hier in Frage kommende Berechnung der loxodromischen Entfernungen, auf der anderen Seite aber die Kunst, mit dem üblichen Beobachtungswerkzeug umzugehen, welch' letzteres bald als Gradstock, bald als ptolemäische Regel, bald als Jakobstab uns entgegen tritt, dessen Hauptbestandtheil aber den Namen „marteau“ führte. Erst neuerlich haben wir uns überzeugt, dass auch *Röhl*, die erste deutsche Fach-Autorität des verwichenen Jahrhunderts, kurz und bündig von „der kürzeren Regel, welche auch der Hammer genannt wird“, spricht 17).

AD ist die unkekannte Strecke; das Schiff fuhr zuerst unter einem Winkel $DAB = 11\frac{1}{4}^0$ nach B, änderte dort den Compassstrich und segelte, $Bm \parallel AD$ vorausgesetzt, unter dem Winkel $mBC = 22\frac{1}{2}^0$ nach C, um letztlich unter einem Winkel $nCD = 45^0$ gegen die Nord-Südrichtung den Hafen D anzulaufen. Ist Bg und Cn beides senkrecht auf AD, so ist die gesuchte Distanz

$$AD = AG + gn + nD = Ag + Bm + nD,$$

$$AD = AB. \cos 11\tfrac{1}{4}^0 + BC. \cos 22\tfrac{1}{2}^0 + CD. \cos 45^0.$$

Die Strecken AB, BC, CD sind vom Schiffer direct gemesseu, wobei freilich darauf hingewiesen werden muss, dass beim Mangel jedes hodometrischen Mechanismus — auch einer weit späteren Zeit war 22) das einfache Princip der Logleine unbekannt — solche Messungen nur den Charakter oberflächlicher Schätzung trugen. Hier nun ist gegeben $AB = 100$, $BC = 100$, CD kann begreiflicherweise aus den Daten selbst berechnet werden. Man hat nach der Tabelle

$$Ag = 100. \cos 11\tfrac{1}{4}^0 = 100.0{,}98;\; Bg = 100. \sin 11\tfrac{1}{4}^0 = 100.0{,}20;$$

$$Bm = 100. \cos 22\tfrac{1}{2}^0 = 100.0{,}92;\; Bm = 100. \sin 22\tfrac{1}{2}^0 = 100.0{,}38;$$

$$nD = Cn = Cm + Bg = 100.(0{,}20 + 0{,}38),$$

also im Ganzen

$$AD = 98 + 92 + 59 = 248 \text{ Miglien},$$

wie es auch in der Vorlage sich angegeben findet 23).

Was das Alter dieses ältesten Dokumentes einer rationellen Schiffsrechnung anbelangt, so erscheint es uns fraglich, ob *Toaldo* mit seiner Hypothese, den *Regiomontan* für den intellektuellen Urheber derselben zu halten, das Richtige getroffen hat; seine Gründe, welche sich auf die Ersetzung des sexagesimalen Eintheilungssystemes durch das decimale, sowie auf den selbstständigen Gebrauch der Tangenten stützen 24), entbehren der durchschlagenden Kraft. Denn erstens wissen wir jetzt besser als der verdiente italienische Forscher, dass die Decimalbrüche nicht erst dem Geiste *Regiomontan*'s entsprungen sind, und zweitens lässt sich ja auch bei den Arabern die Berechnung von Tabellen für die in der Gnomonik so wichtig gewordene Funktion sin : cos nachweisen 25). Für uns genügt *Toaldo*'s wohl erhärtete Behauptung, dass der den Martologio bergende Codex jedenfalls dem fünfzehnten Jahrhundert entstammt, und wir gelangen so zu dem bemerkenswerthen, in dieser Form jedoch unseres Wissens noch nicht ausgesprochenen, Endergebniss: Zum erstenmale bewusst und selbstständig tritt uns

die ebene Trigonometrie der Neuzeit in ihrer Eigenschaft als loxodromische Trigonometrie vor Augen.

§ 4. Den grossen und für mathematisch-geschulte Köpfe gewiss im höchsten Grade anstössigen Fehler, welchen man durch Verwechselung der wirklichen Loxodrome mit einem Kugelkreis oder gar mit einer Geraden begieng, bemerkte und beseitigte als der Erste jener hochverdiente portugiesische Mathematiker, welchem seit je einer der ersten Ehrenplätze unter seinen Zeitgenossen eingeräumt zu werden pflegt. Die Historiker, z. B *Chasles* 26), erwähnen durchweg rühmend des grossen von *Nunez* angebahnten Fortschrittes, und in der That ist die betreffende Leistung, sei es dass man speziell die dadurch bewirkte Förderung des nautischen Wissens oder den beträchtlichen Gewinn an rein-mathematischer Erkenntniss in's Auge fasst, gewiss den anderen berühmten Geistesthaten des universellen Mannes gleichzustellen.*) Die betreffende Entdeckung, so ist es im vorliegenden Falle wohl gestattet, sich auszudrücken, ward in dem, ursprünglich in der Landessprache abgefassten, später jedoch in's Lateinische übertragenen Werke „De arte navigandi" dem Publikum bekannt gegeben, von dessen Inhalt, soweit er für uns hier in Frage kommt, *Garção-Stockler*, Portugals Specialchronist der exakten Wissenschaften, nachstehende Skizze entwirft 27): „No primeiro dos dois livros, de que consta esse precioso escrito, teve Pedro Nunez a gloria de ser o primeiro geometra que começou a desinvolver a theorica das loxodromias, mostrando que a linha que descreve un navis sobre a superficie do mar, quando corta todos os meridianos debaixo de un mesmo angulo obliquo, não he um circulo maximo da sphera terrestre, massim huma linha espiral de duplicada curvatura, da qual demonstron algumas propriedades mais notaveis." *Garção-Stockler* spricht sich noch weiter enthusiastisch über diese bahnbrechende Neuerung aus, indess macht ihn die erklärliche Begeisterung für seinen Helden nicht blind, vielmehr corrigirt er in einem Nachtrag 28) den von jenem begangenen Fehler, die Cosinusse mit wachsendem Winkel proportional abnehmen zu lassen.

---

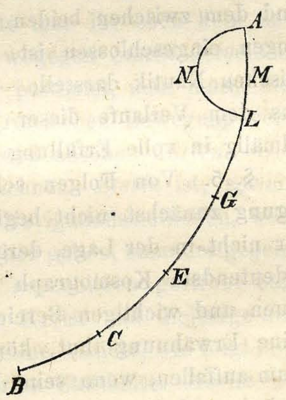
*) Beiläufig bemerkt verstehen wir hierunter die Auflösung des auch noch in weit späterer Zeit für schwierig erachteten Problemes der kürzesten Dämmerung, sowie die Angabe eines geistreichen Theilungs- und Ablesungsmodus für astronomische Instrumente, an welchen noch immer, wenn auch irrigerweise, ein bekannter Kunstausdruck gemahnt.

Lernen wir nun die neue Theorie des *Nonius* in einigen Einzelheiten kennen. Indem wir die Baseler Gesammtausgabe seiner Werke unseren Anführungen zu Grunde legen 29), beginnen wir mit jenem Abschnitte, welcher die Ueberschrift trägt 30): „De iis quae praemitti debent ad ducendum eas lineas in globo quas nautae rumbos appellant." Wir erfahren hier gleichzeitig die damals übliche Bezeichnung unserer Linie, deren Herleitung ziemlich nahe liegt, sobald man sich der Eigenart unserer Compasstheilung entsinnt*); der Name rhumbus, linea rhombica, blieb auch dann noch in theilweiser Geltung bestehen, als hundert Jahre nach *Nunez* ein der wahren Natur der Sache selbst entnommener Terminus allgemeine Aufnahme in der Gelehrtensprache gefunden hatte. In jener Einleitung nun wird die fundamentale Wahrheit ausgesprochen, dass die fragliche Curve im Allgemeinen kein Kreis sei, obwohl man sich dieselbe aus vielen kleinen Kreiselementen zusammengesetzt vorstellen könne.

Die nun folgende Definition ist von besonderem Interesse, denn — ohne dass den Autorworten irgendwelcher Zwang angethan wäre — involvirt dieselbe das berühmte, von *Torricelli* 31) und *Roberval* gleichzeitig gefundene Princip der Curvenerzeugung aus verschiedenen den beschreibenden Punkt beeinflussenden Bewegungs-Impulsen. „Quamquam", so lautet der treffende Nebensatz", animadvertimus non sine ratione dici posse inflexam quandam lineam esse alterius formae instar helicae duabus confectam motionibus." Auf das Schiff wirken eben zwei, unter Umständen sogar mehr, Kräfte, und so kann es keine sphärische Gerade, keinen grössten Kreis, zur Trajektorie haben. „Quare si res ita se habet, descripta linea, quam rumbum dicimus, neque circularis erit neque ex circularibus conflata." Dieser letztere Satz, welcher Mangels jeder infinitesimalen Sprachweise mit dem vorhin angezogenen in einem gewissen Widerspruche zu stehen scheint, wird noch mit einem selbstständigen Beweise versehen. Aus den folgenden Erörterungen heben wir die Stelle 33) „ex centro sphaerae quod centrum mundi supponimus" um deswillen heraus, weil dieselbe mit den im 3. Hefte unserer Sammlung abgehandelten Dingen in einem gewissen Zusammenhange stehen dürfte. Kapitel 22 verbreitet sich über die Spezialfälle eines Schnittwinkels von 90^0 und 0^0, in welchen die Rhumb-Linie wirklich zum Kreise wird, alsdann wird die Verzeichnung der Schifffahrtscurven gelehrt und durch eine das nächstfolgende Kapitel erfüllende Tabelle illustrirt, Kapitel 24 endlich enthält die eigentlich-geometrische Theorie der Loxodrome: „De habitudine rumborum tum ad polos mundi tum ad se invicem." Der Schwerpunkt dieses Kapitels und damit überhaupt des ganzen theoretischen Abschnittes liegt in dem Beweise des — für jene Zeit unzweifelhaft höchst überraschenden — Theoremes, dass durch blos loxodromische Schifffahrt der Pol nicht erreicht werden könne. Wir theilen diesen Beweis hier in extenso mit, indem wir uns auf Fig. 3 beziehen; wis sich zeigen wird, ist derselbe apagogisch geführt.

*) „Rhumbs heissen horizontale Richtungen, Punkte des Horizontes, weil die Blätter der Windrose congruente Rhomben sind, deren spitze Winkel 45^0 betragen; die Scheitel der einen spitzen Winkel sind im Centrum vereint, die der anderen auf einem Kreise vertheilt und mit den Himmelsgegenden bezeichnet" 31). Seit den Zeiten des *Guiot von Provins* scheint diese Art der Zeichnung ihren äusserst conservativen Charakter bewährt zu haben.

Fig. 3.



„Nam si intrat, quoniam A posuimus polum mundi viciniorem, sit igitur ejusmodi ingressus secundum dati rumbi segmentum LMA, et per A et L, meridianus scribatur ANL. Quapropter duo maximi circuli se invicem per inaequalia secabunt in ipsis A et L punctis: quod est impossibile. Sunt enim AML et ANL, segmenta semicirculis minora, sed si contendas meridianum per A et L, puncta scriptum, eum esse qui docti rumbi segmentum habet LMA: jam igitur ipsum LMA, rumbus erit Septentrionis et Austri contra hypothesim: et idcirco in mundi polos intrare minime potest." Wir würden den Sinn dieses völlig entsprechenden Beweises etwa so wiedergeben: Gienge die Loxodrome durch den Pol selbst, so müsste sie mit einem bestimmten Mittagskreis, mit jenem nämlich, der eben im Pol ihre sphärische Tangente wäre, den Winkel Null bilden, es läge also ein Verstoss gegen die Bedingung vor, der zufolge die Loxodrome das System aller Meridiane unter einem gleichbleibenden Winkel durchschneiden soll. — *Nonius* bemerkt übrigens auch ausdrücklich, dass jede solche Curve in Windungen um die Pole sich herumlege und denselben ohne Aufhören näher komme.

Das fünfundzwanzigste Kapitel beschäftigt sich mit der Frage: „Quam habitudinem inter se habeant unius atque ejusdem rumbi segmenta." Die Auftragung der Loxodromen auf künstliche Erdgloben wird gelehrt und dem Nutzen solcher Globen für die Navigationskunde das Wort geredet. Zum Schlusse endlich erhalten wir auch noch eine Andeutung dessen, was späterhin loxodromische Trigonometrie im engeren Sinne genannt worden ist: „Et non solum ex intervallis rumbus indagari poterit inter duo loca data: sed etiam ex longitudinum differentiis, eam videlicet quae inter meridianos eorundem locorum reperta fuerit, cum eis conferendo quae in singulis rumbis inter meridianos signatorum punctorum fuerant comprehensae" 34). Dem Verfasser wohnte, als er diese Worte niederschrieb, ganz offenbar ein klare Vorstellung davon bei, dass eine abschliessende Bearbeitung des rechtwinklig-sphärischen Triangels, welcher von der Längendifferenz, Breitendifferenz und dem zwischen beiden Punkten ausgespannten loxodromischen Bogen eingeschlossen ist, zugleich das Hauptproblem der terrestrischen Nautik darstelle — eine Ahnung, welche denn auch, wie aus dem Verlaufe dieser unserer Schilderung hervorgehen wird, allmälig in volle Erfüllung gieng.

§. 5. Von Folgen scheint die durch *Nunez* gegebene Anregung zunächst nicht begleitet gewesen zu sein, wenigstens sind wir nicht in der Lage, dergleichen namhaft zu machen. Dass der bedeutendste Kosmograph jener Epoche, *Philipp Apian*, dieser neuen und wichtigen Bereicherung der mathematischen Erdkunde keine Erwähnung thut, könnte bei dem Binnenländer auch dann kaum auffallen, wenn seine Lebenszeit von derjenigen seines portugiesischen Collegen verschiedener gewesen wäre, als sie es thatsächlich war, allein auch für die späteren, von *Kästner* 35) citirten und analysirten Ueberarbeitungen der *Apian*'schen Kosmographie gilt wohl ein Gleiches, obschon dieselben von Spaniern und Franzosen, also von Angehörigen seefahrender Nationen, besorgt wurden. Auch als ein Mathematiker von gleich bedeutendem Rufe den Gedanken seines grossen Vorläufers aufnahm und weiter förderte, scheint diese eine unter der Menge anderer Leistungen

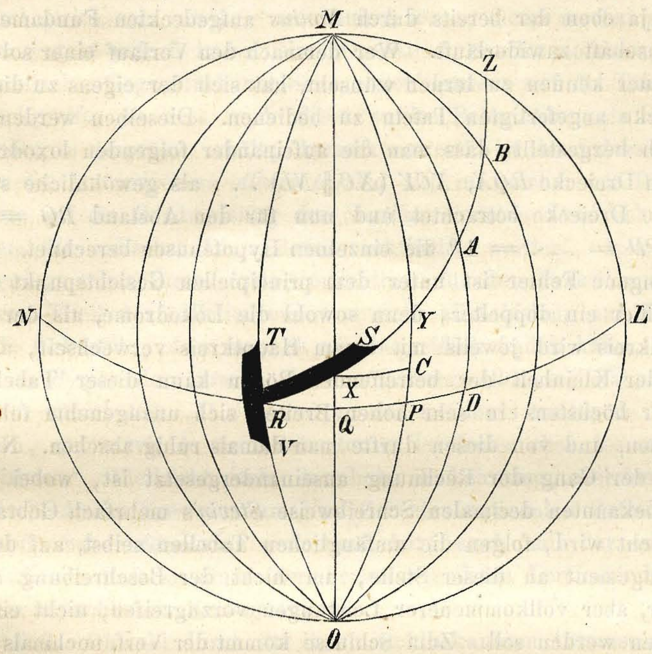
sehr in den Hintergrund getreten zu sein. *Simon Stevin*, den wir meinen, ist allerdings der späteren Ehre theilhaftig geworden, dass seine wissenschaftliche Stellung von Seiten gelehrter Landsleute, wie *Goethals'*, *Steichen*'s und *Quetelet*'s, zum Thema monographischer Essays gewählt ward, allein gerade die uns hier interessirende Seite seiner vielseitigen Thätigkeit ward stiefmütterlich behandelt, und selbst der letzterwähnte Belgier, der doch ganz speziell von *Stevin*'s Geographie handelt 36), weiss von den Loxodromen nichts zu berichten.

Das vierte Buch des Compendiums der Geographie ist betitelt 37): „Histiodromie, ou cours des navires." Gleich im Anfange begegnen wir als dritter Definition der folgenden: „Romb, ou cours oblique, est une ligne qui fait tousiours de mesmes angles à tous les meridiens, et n'est ny l'équateur, ny un meridien." An diese Definition eines neuen Wortes schliesst sich eine ausführliche und treffende Sacherklärung an, aus der auch recht deutlich der allgemeine Erkenntnissfortschritt seit den Zeiten des *Nonius* hervorleuchtet: die magnetische Deklination war freilich auch jenem schon bekannt, allein da man sie fast allgemein als eine für den nämlichen Erdort constante ansah, so glaubte man ihr eben kein besonderes Gewicht beimessen zu müssen, wogegen *Stevin* derselben bereits dadurch Rechnung trägt, dass er bestimmt, man müsse die Nadel, solange das Schiff in der loxodromischen Bewegung verharrt, als unverändert nach Norden zeigend ansehen dürfen. Die Curven selbst werden als Spiralen bezeichnet. *Stevin* ist, soweit uns bekannt, der Erste, welcher die beiden Navigationsmethoden, welche noch jetzt als die einzig wissenschaftlichen gelten, einander gegenübergestellt und jedwede nach Kräften auszubilden gestrebt hat, nämlich die Schifffahrt auf dem grössten Kreise und diejenige auf der Loxodrome. Er selbst charakterisirt seine Absicht, wie folgt 38): „Apres que Son Excellence" — der Prinz-Statthalter *Moritz* — „eust entendu la navigation par rombs, comme on les verra cy apres, et comparant les cours droicts à iceux, comme plus courts, il luy a semblé bon que j'en escrive quelque chose, puis que l'ordre mesme le requerroit, si on s'en vouloit servir, et ainsi j'en ay fait ces deux desciptions suivantes, l'une Mechanique, l'autre Mathematique." Wir wollen gleich hier bemerken, dass die Citation des ihm enge befreundeten Fürsten uns für eine verhältnissmässig frühe Abfassungszeit des betreffenden Abschnittes zu sprechen scheint; in seinen späteren Lebensjahren war ja *Stevin* aus seinem rein-persönlichen Verhältnisse zu dem Oranier und in den Dienst der Generalstaaten selber eingetreten, und so fällt die Epoche der Entstehung der Geographie aller Wahrscheinlichkeit nach vor das Jahr 1600; es scheint hiefür auch zu sprechen, dass einer Bemerkung *Kästner*'s 39) zufolge *Wright* in seinem später zu nennenden Werke gegen *Stevin*'s Tadel einiger seiner früheren Aufstellungen scharf polemisirt. Für uns ist diese Fixirung einer Epoche nicht ganz gleichgültig, weil wir aus ihr das Recht herleiten, den eigentlichen Text der loxodromischen Theorie von einem separat gedruckten Anhang gesondert zu betrachten. Insoferne wir uns nämlich in dieser Abhandlung ein strenge der Zeitfolge angepasstes Aufsteigen von einer Entwickelungsphase zur anderen als Ziel gesteckt haben, müssen wir, um uns mit dem theilweise geschichtlichen Inhalt jenes „Appendice" völlig vertraut machen zu können, erst die gleichzeitigen Leistungen eines *Wright* und *Mercator* berücksichtigt haben.

Auch für die loxodromische Schiffahrt werden zwei Methoden angegeben, deren eine auf empirische Verzeichnung der Curslinien, die andere auf rechnerische Bestimmung derselben abzielt. Ersteres wird dadurch erreicht, dass man auf einer Kugel irgend einen kleinen Kreis markirt, einen Quadranten desselben durch sphärische Radien, welche vom näheren Pol ausgehen, in acht gleiche Theile theilt und nun einen sphärischen Winkel aus Metall construirt, dessen einer Schenkel, wenn der andere mit einem der Radien des Quadranten zur Deckung gebracht wird, jeweils auf einen der Theilungsradien fällt. Man braucht solcher Winkel somit im Ganzen sieben, von resp. $11\frac{1}{4}^0$, $22\frac{1}{2}^0$, $33\frac{3}{4}^0$, 45^0, $56\frac{1}{4}^0$, $67\frac{1}{2}^0$, $78\frac{3}{4}^0$, da die vier Quadranten sich völlig symmetrisch verhalten und je vier Loxodromen mit den Cardinalrichtungen Nord, Ost, Süd, West identisch sind, so hat man die Curven für alle die $(4.7 + 4 = 32)$ Windstriche, in welche die Rose seit alten Zeiten — man denke z. B. an die Tabelle des Martologio in § 3 — zerlegt wurde. Den Gebrauch seines Instrumentchens erläutert *Stevin* an einer Zeichnung 40), welcher unsere Fig. 4 nachgebildet ist. Man zeichnet auf eine Terrelle den Aequator *NL*, die Pole *M* und *O* und soviele Meridiane, als man zu bedürfen glaubt; die Durchschnittspunkte dieser Hauptkreise mit dem Gleicher nenne man *R, Q, P, D* . . . Soll dann etwa die Nord-

ost-Loxodrome aufgetragen werden, so wähle man die Metallschräge von 45^0, lege deren Scheitel in einen der genannten Punkte, z. B. in *R* und den kürzeren Schenkel *TV* auf den

Fig. 4.



Meridian *MRO*, alsdann giebt der zweite, längere, Schenkel *RS* die ursprüngliche Richtung — in Wirklichkeit natürlich nur die sphärische Berührungslinie — der zu findenden Curve an. Da man annehmen darf, dass die einzelnen Meridiane in sehr geringen Winkeldistanzen von einander aufgetragen sind, so wird der Schenkel *RS* den nächsten Meridian in einem Punkt *X* schneiden; nun wiederhole man genau die nämliche Construction, indem man den Schenkel *TV* mit *MQO*, den Scheitel mit *X* coincidiren lässt, und in dieser Weise fahre man fort. Die Rhumblinie, welche eigentlich eine stetige Curve sein sollte, setzt sich hier also aus vielen kleinen Cirkelbögen *RX, XY, YA, AB, BZ* . . .

zusammen, genau genug für die gewöhnliche Praxis. Freilich entgehen die unvermeidlichen Mängel eines solchen Näherungsverfahrens auch unserem Autor nicht; als einen wesentlichen Nachtheil hebt er selbst den hervor, dass bei dieser Art der Construktion die Curve auch durch einen der Pole selbst hindurchgehen könne, was ja eben der bereits durch *Nonius* aufgedeckten Fundamentaleigenschaft zuwiderläuft. Wer demnach den Verlauf einer solchen genauer kennen zu lernen wünscht, hat sich der eigens zu diesem Zwecke angefertigten Tafeln zu bedienen. Dieselben werden dadurch hergestellt, dass man die aufeinander folgenden loxodromischen Dreiecke RQX, XCY ($XC \parallel NL$) . . . als gewöhnliche sphärische Dreiecke betrachtet und nun für den Abstand $RQ = QP = PD = \ldots = 1^0$ die einzelnen Hypotenusen berechnet. Der begangene Fehler ist unter dem principiellen Gesichtspunkt freilich hier ein doppelter, denn sowohl die Loxodrome, als der Parallelkreis wird jeweils mit einem Hauptkreis verwechselt, allein bei der Kleinheit der betreffenden Bögen kann dieser Tabellenfehler höchstens in sehr hohen Breiten sich unangenehm fühlbar machen, und von diesen durfte man damals ruhig absehen. Nachdem der Gang der Rechnung auseinandergesetzt ist, wobei von der bekannten decimalen Schreibweise *Stevin*'s mehrfach Gebrauch gemacht wird, folgen die umfänglichen Tabellen selbst, auf deren Arrangement an dieser Stelle, um nicht der Beschreibung ähnlicher, aber vollkommenerer Leistungen vorzugreifen, nicht eingegangen werden soll. Zum Schlusse kommt der Verf. nochmals auf seine Idee der loxodromischen Winkel zurück, erweitert dieselbe aber jetzt in dem Sinne, dass er dieselben durch vollständige Curvenlineale ersetzen will, mittelst deren nicht lediglich das Anfangselement der Linie, sondern diese selbst einem grossen Theile ihres Verlaufes nach auf dem Globus aufgezeichnet werden soll.*) Mehrere solche Modelle werden abgebildet in der Form rechts und links gewundener Spiralen; freilich ist es nicht recht ersichtlich, wie dem Blech die erforderliche doppelte Krümmung ertheilt

*) Der Gedanke, mittelst eines ein für allemal anzufertigenden Werkzeuges jeden Fall einer gewissen Problem-Gattung sofort erledigen zu können, geht wohl auf den Cardinal *Nicolaus von Cues* zurück 41). Neuerdings sind, besonders von *Emsmann*, Transporteure mit fest aufgetragenen Curven dritter und höherer Ordnung zur Lösung des Problemes der Winkeltheilung anempfohlen worden.

werden sollte. Mit Hülfe derselben lässt sich jede Aufgabe der loxodromischen Trigonometrie, welche die fünf Stücke des vom Pole und den Schlusspunkten des Rhumb gebildeten Dreiecks irgendwie discutirt — das sechste Bestimmungsstück wird dadurch ersetzt, dass ein Aussenwinkel nothwendig einem Innenwinkel gleich sein muss — mechanisch lösen; dieser mechanischen Lösung steht jedoch immer eine „Operation, par les nombres,“ als theoretisches Gegenstück zur Seite, welch' letztere auf die Tabellen zurückgreift, so dass auch diese zweite Behandlung ein völlig stereotypes Gepräge erhält; bemerkenswerth ist besonders eine Note des Herausgebers *Albert Girard* 42), in welcher mit Bezugnahme auf die Gradmessung des *Snellius* einzelne *Stevin*'sche Angaben für irdische Dimensionen rektificirt werden. Immerhin überwiegt schon dieser erste, ersichtlich für den Praktiker gearbeitete, Theil der „Histiodromie“ so sehr alles bislang auf diesem Felde Geleistete, dass man es nur begreiflich finden kann, wenn *van de Weyer* den *Stevin* als den Lehrer aller seebefahrenden Völker rühmt 43): „Il a donné un des meilleurs traités de Navigation, qui servit de texte dans toutes les écoles chez les nations maritimes.“ Vielleicht steht der hohe Aufschwung, welchen das niederländische Seewesen um jene Zeit des nationalen Befreiungskampfes bekanntermassen genommen hat, auch mit der wissenschaftlichen Reform eines der hervorragendsten Landeskinder in einem ursächlichen Zusammenhang.

§ 6. Obwohl durch die ihnen wohlbekannten Interessen der Nautik geleitet, waren die bisher genannten Männer doch mehr in ihrer Eigenschaft als Mathematiker an die Theorie des Segelns unter gleichem Windstriche herangetreten und wesentlich mathematisch, d. h. nur für Fachgenossen vollkommen geniessbar, waren auch die Früchte ihrer Forschungen. In gewissem Sinne gleichzeitig mit beiden Männern, d. h. ein wenig früher als *Stevin* und ein wenig später als *Nunez*, bearbeitete ein Dritter den gleichen Gegenstand recht eigentlich unter dem Gesichtspunkt der praktischen Anwendbarkeit. Der grosse Geograph und Kartenzeichner *Gerhard Mercator* hatte es sich zur Lebensaufgabe gestellt, die ungemeine Bequemlichkeit, welche der Gebrauch der rohen Plattkarten dem Schiffer gewährte, mit einem höheren Princip in Verbindung zu bringen, so dass den zu construirenden Karten Handlichkeit uud Exaktheit in gleichem Maasse innewohne. Das an sich sehr einfache Hülfsmittel war das, den der Erdkugel unbeschriebenen Cylinder als developpable Projektionsfläche zu wählen; in dem abgerollten Mantel bilden dann Meridiane und Parallelkreise zwei Schaaren sich rechtwinklig durchkreuzender Geraden, so jedoch, dass nur erstere äquidistant bleiben, die Abstände der Parallelen jedoch im direkten Verhältniss der trigonometrischen Sekanten der Breiten grösser werden. Das erste greifbare Zeugniss der Realisirung dieser neuen und jedenfalls erst in längerem Studium zu greifbarer Gestaltung herangereiften Idee datirt vom Jahre 1569: „Die von *Mercator* in dieser Projektion ausgeführte, 1569 vollendete und zu Duisburg erschiene, 6′ lange und 4′ hohe Weltkarte, die sehr verbreitet war, vielfach nachgebildet wurde und auf lange Zeit hinaus als Musterkarte diente, ist jetzt sehr selten geworden“ 44). Der Hauptvorzug dieser neuen Projektionsart ist nun natürlich der, dass eine sämmtliche Gerade einer Schaar unter constantem Winkel schneidende Gerade selbst zur geraden Linie wird und einfach gezeichnet werden kann. *Mercator* selbst hat sich allerdings über diese theoretische Haupteigenschaft seiner Abbildung nicht geäussert, und insoferne könnte man darüber zweifelhaft sein, ob ihm auch volles Bewusstsein seines Verdienstes, die schwierige loxodromische Theorie für Lineal und Zirkel zugänglich gemacht zu haben, beigewohnt habe, indess möchte diese Streitfrage durch *Breusing* wohl im bejahenden Sinne entschieden worden sein. Indem derselbe nämlich die vor ihm noch nicht ausgenützte Correspondenz *Mercator*'s mit dem jüngeren *Granvella* einer Analyse unterzieht, sagt er u. a. 45): „Aber noch ein anderer Punkt in dem Briefe an *Granvella* ist vom höchsten Interesse. Wir sehen, dass *Mercator* bei'm Studium der loxodromischen Karten die Bemerkung gemacht hat, wie bei'm Entwerfen einer solchen Karte auf Grund der eingehenden Schiffscurse die Breitengrade allmälig vergrössert und nach Norden hinaufgeschoben werden müssen, sodass der Breitenmaassstab ein veränderlicher wird. Damals schrieb er diesen Umstand noch der Thatsache zu, dass die Missweisung des Compasses an verschiedenen Orten eine verschiedene sei, und hatte insoferne Recht, als dadurch wirklich eine Verschiebung der Breitengrade veranlasst wird. Aber auch wenn diess nicht der Fall wäre, auch wenn der Compass überall auf der Erde nach dem wahren Nordpunkt zeigte, die Breitenskale einer loxodromischen Karte muss doch veränderlich, sie muss

eine nach den Polen hin vergrösserte sein. Wann *Mercator* diese bahnbrechende Entdeckung gemacht hat, wann er dazu gelangt ist, das Gesetz der Veränderlichkeit aufzufinden, wir können es nicht angeben. Aber in diesem Briefe sehen wir ihn schon auf dem Wege dahin begriffen, und entgangen ist sie ihm nicht.“ Schliesst man dieser Ansicht sich an, so muss man es allerdings für im hohen Grade wahrscheinlich halten, dass *Mercator* nicht sowohl durch allgemeine Betrachtungen kartographischer Natur, als vielmehr eben durch sein Bestreben, die loxodromische Geometrie zu vereinfachen, auf seine Erfindung geführt worden ist. Jedenfalls ist es irrig, wie wohl da und dort geschah, die Erkenntniss des wahren Wesens der reducirten Seekarten dem *Mercator* ab- und dafür dem Engländer *Wright* zusprechen zu wollen, und *Breusing* erklärt sich 46) mit Recht entschieden gegen eine derartige Unterstellung; doch wollen wir nicht unterlassen, beiläufig zu bemerken, dass bereits *Mollweide,* dessen geräuschloser Thätigkeit die Geschichte der mathematischen Wissenschaften für eine Reihe wichtiger Aufschlüsse zu Dank verpflichtet ist, den niederdeutschen Kosmographen nach dieser Richtung hin in Schutz genommen hat 47). Es bedurfte einiger Zeit, bis die *Mercator*'sche Projektion in allgemeineren Gebrauch kam; *Stevin* selbst scheint mit derselben noch nicht vertraut zu sein, die Piloten gewöhnlichen Schlages liessen es nach *Peschel*'s Mittheilung 48) noch hundert Jahre anstehen, bis sie sich dazu entschliessen konnten, von ihren primitiven Compasskarten abzugehen, und selbst in Fachwerken, z. B. in des wackeren *Jansson* „See-Atlas“ (*Peschel* a. a. O.) wird die neue Manier nur erst schüchtern und theilweise zur Anwendung gebracht.*)

Das, was *Mercator* zwar klar erkannt, schriftstellerisch jedoch nur ganz andeutungsweise zum Ausdruck gebracht hatte, systematisch darzustellen, war die Tendenz eines Werkes, welches *Eduard Wright* am Schlusse des sechzehnten Jahrhunderts veröffentlichte 49), welches jedoch in der Regel nach anderen, weit später erschienenen Neu-Auflagen citirt zu werden pflegt, die auch

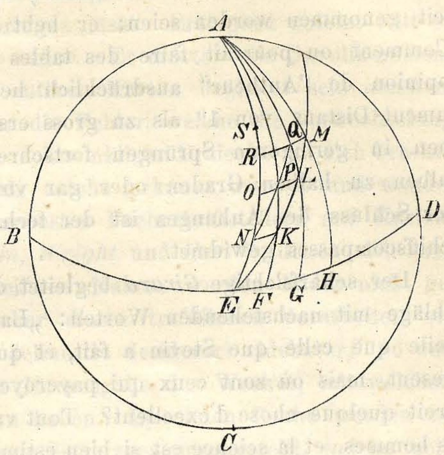
*) Im 41. Kapitel von *Jansson*'s — uns nicht aus eigener Anschauung bekannter — Schrift „Introductio orbis maritimi“ soll sich die loxodromische Theorie übrigens selbst vorgetragen finden, so dass offenbar nur die Rücksicht auf den noch ungeläuterten Geschmack des Publikums den Herausgeber zu seiner Reserve bewogen haben kann.

theilweise Zusätze und Verbesserungen enthalten. Nachdem derselbe in einem eigenen Kapitel 50) die falsche Grundlage der landläufigen Seekarten nachgewiesen hat, erörtert er den oben bereits ausgesprochenen Grundsatz, nach welchem die Verbesserung, d. h. „ein anderer Weg zur Graduirung des Meridians einer allgemeinen Seekarte" erzielt werden könne; er denkt sich zu dem Ende die Kugel in der Weise anschwellend, dass für einen gegebenen Erdort ihr Halbmesser der Sekans der geographischen Breite gleich werde und construirt, auf diese allerdings etwas ungewöhnliche Hülfsvorstellung sich stützend, seine „table of latitude," welche ursprünglich auf einen Fortschritt des Argumentes nach Sechstelgraden eingerichtet war, später aber bis auf die einzelnen Breitenminuten ausgedehnt wurde. Im Wesentlichen hat man, um eine solche Tabelle zu bilden, die Summe der reciproken Sinus für alle vorhergegangenen Argumente zu bilden 51); für die Aufnahme dieser Funktionen in den vorhandenen trigonometrischen Apparat war bekanntlich durch die Vorarbeiten eines *Maurolycus*, *Copernicus* 52) und *Rheticus* genügend der Weg bereitet worden.

§ 7. Wir kommen nach dieser nothwendigen Einschaltung wiederum auf den Appendix *Stevin*'s zurück, in welchem die Theorie der Schifffahrtscurve von neuem — und zwar unserer Hypothese zufolge auf Grund inzwischen neu erworbener Kenntnisse und Erfahrungen — aufgenommen wird. Wir begegnen daselbst 53) zuerst einer Widerlegung des von *Nunez* begangenen und schon oben (§ 4) nach *Garção-Stockler* gekennzeichneten Irrthums, hierauf einer analogen Betrachtung „des fautes qui sont dans les tables des Rombs d'Eduard *Wright*," welch' letztere übrigens nicht wie dort als schwerwiegende principielle, sondern mehr nur als Rechenfehler sich herausstellen, und nun folgt ein genereller Lehrsatz, dessen Enoncé und Beweis fast anderthalb Grossfolio Seiten erfüllen. Wir reproduciren den Beweisgang im Folgenden; die Fassung ist diese: „Comme la déclinaison du romb de l'équateur progrediant d'un degré de longitude, à la déclinaison suivante, d'un degré en longitude; ainsi fort pres la secante par le commencement du dernier progrés, à la secante par le commencement du premier progrés."

In Fig. 5 seien A und C die Erdpole, BD der Aequator, auf welchem die vier äquidistanten Punkte E, F, G, H so angenommen sind, dass ihr Abstand je einen Grad beträgt. Die Quadranten

Fig. 5.



AE, AF, AG, AH sind gezogen, und die von E ausgehende Rhumb-Linie trifft dieselben resp. in K, L, M; KN, LO, MR sind Parallelkreise, welche die Quadranten ausserdem noch in P und Q schneiden. Dann gilt „fort pres" die Proportion:

$$NO : OR = \sec FK : \sec GL.$$

Der Beweis hiefür wird so geführt. Es gilt die bekannte Fundamentalwahrheit der Geometrie, wenn r der Kugelradius,

$$\sec EN : r = r : \sin AN,$$

d. h., in unseren Zeichen, $\sec EN = \frac{1}{\sin(90^0 - EN)}$. Ebenso ist

$$\sec EO : r = r : \sin AO,$$

also durch Vergleichung

$$\sec EN : \sec EO = \sin AO : \sin AN.$$

Wie die Sinusse der Breiten verhalten sich aber die Umfänge der Breitenkreise; versteht man also unter p und p' diese Peripherieen für die durch O und N gehenden Parallelkreise, so hat man auch

$$\sec EN : \sec EO = p : p'.$$

Die Bögen LP und KN sind nach Voraussetzung aliquote Theile jener Kreise, weshalb

$$\sec EN : \sec EO = LP : KN.$$

Ohne merklichen Fehler dürfen die sphärischen Dreiecke QLP, PKN als ähnliche, ebene Dreiecke angesehen werden, somit ergiebt sich

$$\sec EN : \sec EO = NO : OR.$$

Damit aber ist der Beweis abgeschlossen.

Was an dieser Entwickelung wichtig ist, das ist besonders das klare dem Beweise selbst zu Grunde liegende Bewusstsein, dass das Resultat auf volle geometrische Strenge keinen Anspruch erheben könne, lediglich approximativ sei. An den vorliegenden Tabellen tadelt *Stevin* den Umstand, dass die Abstände viel zu weit genommen worden seien; er hebt in dem Paragraphen 54) „Comment on pourrait faire des tables de rombs certaines selon l'opinion de l'Autheur" ausdrücklich hervor, dass, wenn die Argument-Distanz von 1^0 als zu gross erscheinen sollte, die Tafeln eben in geringeren Sprüngen fortschreiten müssten, etwa von halben zu halben Graden oder gar von 15 zu 15 Minuten. — Der Schluss des Anhanges ist der technischen Beschreibung des Schiffscompasses gewidmet.

Der scharfsichtige *Girard* begleitet die soeben skizzirten Vorschläge mit nachstehenden Worten: „La maniere parfait est plus facile que celle que Stevin a fait, et qu'on n'a trouvé jusques à present, mais où sont ceux qui payeroyent la peine de celuy qui seroit quelque chose d'excellent? Tout va d'un si bon ordre entre les hommes, et la science est si bien estimée, que c'est merveilles si on ne revient en un siecle plus barbare que celuy mesme de fer: là dessus je feray cette question à la vue d'un chacun." Die trüben Lebenserfahrungen *Girard*'s, welche dem ganz ungewöhnlich hoch begabten Manne die volle Entfaltung seiner Geisteskräfte unmöglich machten, mögen die Verantwortung für diese pessimistische Auffassung tragen.

§ 8. Wir haben bei Besprechung der *Stevin*'schen Arbeiten mehrfach uns davon überzeugt, dass der Commentator *Girard* an einzelnen Aufstellungen jener Correkturen anbrachte, aus denen deutlich zu ersehen war, dass ihm neuere und bessere Hülfsmittel zur Verfügung standen. Bei einer Gelegenheit nennt er selbst seine Quelle: es ist diess das grundlegende Werk des auch auf verschieden anderen Gebieten so wohl bewanderten Leydener Professors *Willebrord Snellius a Royen*. Dasselbe war ziemlich bald nach *Stevin*'s Tod an's Licht getreten und kann, ebenso wie es auch zuerst das bis dahin völlig unbekannte Kunstwort „Loxodrome" in die nautisch-mathematische Terminologie einführte, als der erste systematische Lehrbegriff der loxodromischen Geometrie, sowie der auf diese begründeten Steuermannskunde gelten.

In seiner äusserst ausführlichen, nicht mit Seitenzahlen versehenen, Vorrede beabsichtigt der Verfasser wohl nur, sein unfängliches gelehrtes Wissen und seine Belesenheit in den alten Autoren an den Tag zu legen, denn der Hauptsache nach beschränkt er sich darauf, in einer Reihe von Citaten All' das zusammenzustellen, was sich von Zeugnissen für Schiffbau und Schiffsleitung im Alterthum beibringen lässt. Erst ganz zuletzt tritt er seinem eigentlichen Thema näher. Er erörtert die Unvollkommenheiten, von welchen alle antiken Karten begleitet sein mussten, verbreitet sich sodann über die Fehler, welche die Verwechselung loxodromischer und ebener rechtwinkliger Dreiecke mit sich brachte und zuerst von *Nonius* als solche erkannt wurden und wendet sich schliesslich zu den neuesten Fachschriftstellern und Kartenzeichnern: *Mercator, Stevin, Wright* und *Hues**), denen sich auch in Frankreich „haud pauci" — Namen werden leider nicht genannt — anreihen. Da aber dieser trefflichen Vorarbeiten ungeachtet „operis perfecta delineatio desiderari videbatur," so entschloss er selbst sich zur Herausgabe des Werkes, mit welchem wir es eben hier zu thun haben. Im ersten Buche werden zunächst mehrere vorbereitende Sätze zusammengestellt, welche theils auf den Magneten**) und dessen geheime Kräfte, theils auf gewisse Lemmata der elementaren Sphärik sich beziehen; die den Charakter des Buches bestimmenden Untersuchungen beginnen erst mit der fünfzehnten Proposition 56): „Loxodromia est linea ἑλικοειδὴς in terreni globi superficie, quam ubique contingens recta linea cum omnibus meridianis per cunctatus ea puncta eductis aequales angulos comprehendit." Diese Definition zeichnet sich ihren Vorläufern gegenüber durch die scharfe Hervorhebung des Umstandes aus, dass von einem Winkel zweier krummen Linien nur insoferne gesprochen werden kann, als man darunter den Winkel der dem Schnittpunkt entsprechenden geradlinigen

---

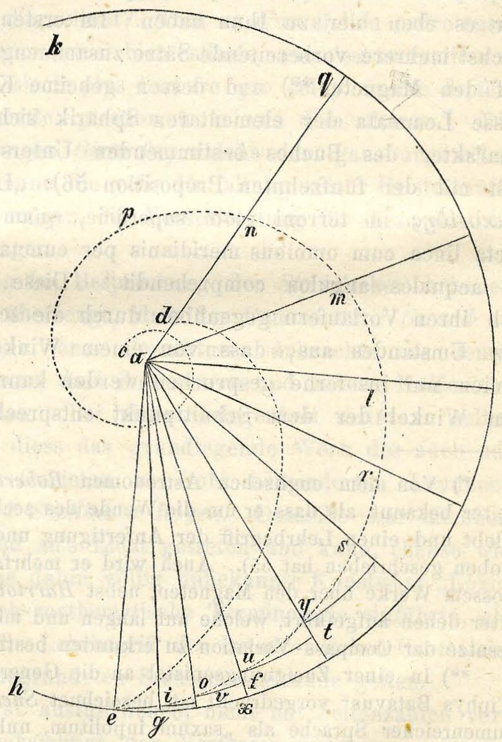
*) Von dem englischen Astronomen *Robert Hues* ist nicht viel weiter bekannt, als dass er um die Wende des sechzehnten Jahrhunderts gelebt und einen Lehrbegriff der Anfertigung und des Gebrauches von Globen geschrieben hat 55). Auch wird er mehrfach, z. B. in *Gilbert*'s grossem Werke über den Magneten, nebst *Harriot, Wright* und *Kendall* unter denen aufgeführt, welche auf langen und mühsamen Seereisen die Gesetze der Compass-Variation zu erkunden bestrebt waren.

**) In einer Zueignungsepistel an die Generalstaaten, welche dem „Tiphys Batavus" vorgedruckt ist, bezeichnet *Snellius* den Magneten in blumenreicher Sprache als „saxum inpolitum, nullo splendore, opacum, asperum, scabrum, colore ferrugineo, sed cuivis gemmae contra comparandum". Dem folgt eine überschwängliche Schilderung der Verdienste dieses unscheinbaren Minerales.

Tangenten versteht. Nach dieser Curve, welche ersichtlich kein Kreis sein kann, segelt ein Schiff, das stets denselben Curs einhält; den zurückgelegten Weg misst man mittelst eines im Wasser nachschleppenden Seiles (Log) und einer Clepsydra (Sanduhr). „Atque ita ex angulo confectae Loxodromiae et ejusdem quantitate, postea latitudinis et longitudinis evariatae rationem ineunt.“ Die hiebei verwendbaren mechanischen Hülfsmittel gewähren nicht die wünschenswerthe Genauigkeit, und so giebt er persönlich dem Calcul den Vorzug, dem Operiren mit Zahlen, „qui ἀκριβέϛεροι sunt geometricis lineamentis“ 57).

An der Spitze steht natürlich das Theorem, dass die Loxodrome niemals den Pol erreicht; würde doch, wäre diess der Fall, ihre charakteristische Eigenschaft sofort in Nichts zerfallen. „Loxodromia eiou continuata porro in m, n et p, atque inde in c, nunquam tamen in a polum incurret, sed infinitis gyris circumacta ad illud punctum nunquam perveniet“ (Fig. 6). Der nächste Satz sucht die Analogie der Loxodrome mit der gewöhnlichen Schraubenlinie herzustellen, welche ja auch in der That vorhanden ist. Freilich ist eine direkte Identität des Entstehungsprocesses beider Curven nur gültig, solange die Kugel als

Fig. 6.



developpable Fläche passirt, d. h. nur für unendlich kleine Flächenstücke. Solche hat nun auch, wenn schon er es nicht mit der wünschenswerthen Schärfe hervorhebt, *Snellius* im Auge, wenn er mit Bezug auf die obige Figur sagt 58): „Intelligamus itaque in loxodromia eiou segmenta meridianorum ji vo uf esse aequalia et angulos eij iov ouf aequales, ej, iv, of parallelorum circulorum segmenta non quidem similia, sed aequalia tantum. Hic basis trianguli totius esset eiou, crus porro reliquum ux, è segmentis ei iv of compositum intelligatur“. Unter der bisherigen Voraussetzung, dass nämlich die einzelnen Parallelkreise, zwischen denen jeweils ein Bogen der loxodromischen Curve verläuft, in gleichen und äusserst kleinen Abständen auf einander folgen, können je zwei solche Bögen als gleichgross angenommen werden. Die erwähnte Distanz wird gelegentlich auf eine Minute fixirt 59). Hiemit ist denn ein Theil der histiodromischen Aufgaben auf ebene Trigonometrie zurückgeführt; ist $\mathfrak{l}$ die Bogenlänge eines Stückes der Curve, β der Schnittwinkel, so ist der Abstand der zugehöri-Breitenkreise gleich $\mathfrak{l} \cos \varphi$, oder wie es in der Vorlage heisst: „Ut radius ad quadrantem secantis anguli inclinationis datae loxodromiae: ita scrupula evariatae latitudinis, ad longitudinem loxodromiae optatam“. Der 22. Satz ist der auf den Meridianen senkrecht stehenden Seite des loxodromischen Dreiecks gewidmet; von einer solchen als von einem Ganzen könne freilich nicht eigentlich die Rede sein („integrum simul imaginarium *) est“); als Element aufgefasst repräsentire dieselbe jedoch die Längendifferenz und führe deshalb mit Fug den Namen „μηκοδυναμικόν.“ **). Nunmehr werden die loxodromischen Dreiecke im Zusammenhang betrachtet; hat man im Ganzen n äquidistante Parallelen, so kann

*) Wir registriren den Gebrauch des Wortes „imaginär,“ weil uns nicht bekannt ist, ob dasselbe in irgend welcher Ideenverbindung schon früher vorkommt. Das, was *Snellius* imaginär nennt, hat freilich in der Sprache unserer Integralrechnung eine weit sachlichere Bezeichnung gefunden.

**) *Kästner* führt dieses Kunstwort in der Form „latus mecodynamicum“ auf *Christian Wolf* zurück 60), in dessen mathematischen Handbuch es den Betrag angiebt, um wieviel ein auf der Loxodrome fortsegelndes Fahrzeug nach Verlauf einer bestimmten Zeit direkt nach Ost oder West vom Anfangsmeridian sich entfernt hat. Indess ist es *Kästner* nicht entgangen, dass ein verwandter Begriff sich schon bei *Snellius* findet.

man sich zwischen denselben $(n-1)$ derartige Dreiecke verzeichnet denken; „si initium loxodromiae ab aequinoctiali ducatur, totidem erunt triangula loxodromica quot scrupulis inde extremus parallelus distat“ 61). Soll aus der Breitendifferenz $\mathfrak{b}$ und dem loxodromischen Winkel β die mekodynamische Seite d ermittelt werden, so ist $d = \mathfrak{b}\, tg \beta$; tritt an Stelle ersterer der loxodromische Abstand $\mathfrak{l}$, so ist $d = \mathfrak{l} \sin \beta$. (*Snellius* nimmt für den eigentlichen Schnittwinkel natürlich immer den spitzen). Nächstdem werden die gegebenen und gesuchten Stücke noch in anderer Weise unter einander vertauscht und die Lösungen mit Zahlenbeispielen belegt, wobei jedoch *Snellius,* uneingedenk seines sonstigen Vorbildes *Stevin,* nicht blos mit Decimalen, sondern bei weitem mehr mit gemeinen, häufig recht complicirten, Brüchen rechnet. Vielleicht ist es nicht ohne Interesse, den Gang, welchen unser Autor in einem solchen Rechnungsexempel befolgt, genauer kennen zu lernen. Man kennt für zwei im indischen Ocean gelegene Orte die geographischen Constanten; die Molukkeninsel Bantam liegt unter $6^0\, 45'$ lat. n., das afrikanische Vorgebirge Aguillas unter 35^0 lat. s., in Länge liegen beide Punkte um $86^0\, 50'$ auseinander. Unter welchem Winkel muss ein von jenem Cap auslaufender Schiffer seinen Schiffskiel gegen die Nord-Südrichtung einstellen, um ohne Cursveränderung nach Bantam zu gelangen? Der direkte Breitenunterschied macht in diesem Falle $41^0\, 45'$ resp. 2505 Minuten aus. Nunmehr tritt der schon früher 62) bewiesene Satz in Kraft: „Ut radius ad quadruplum summae secantium inter datos parallelos inclusive comprehensorum; ita datorum milliarium summae pars quota iisdem parallelis cognominis, ad summam scrupulorum longitudinis, quanta singulis dictis miliaribus accedit“; mit Hülfe desselben sind „tabulae canonicae parallelorum“ berechnet, welche sich in einem Anhang über 28 Seiten erstrecken, und diese werden jetzt zu Hülfe genommen, aus ihnen geht im vorliegenden Falle das vierfache der Sekantensumme gleich $10600^{45}/_{100}$ hervor. Alsdann gilt die ebenfalls vorher als richtig nachgewiesene Proportion: Entsprechen auf dem einen begrenzenden Parallelkreis zehn Meilen in Längenmass dem Winkel von $10600^{45}/_{100}{}'$, so entsprechen $^{4915}/_{1000}$ Meilen der hier in Frage kommenden Längendifferenz von $5210'$. Hieraus ergiebt sich für den direkten Längenabstand ein Werth von $1231^{2075}/_{1000}$ Meilen, während der auf dem Meridian gemessene Breitenabstand $626^1/_4$ Meilen ausmacht. Hat endlich β den oben angedeuteten Sinn, so ist zum Schluss

$$\beta = \operatorname{arc} tg \frac{6231^{2075}/_{10000}}{626^1/_4} = 63^0\, 3',$$

„quare angulus loxodromiae erit tantus“ 63).

Mit diesem Problemcyklus, aus welchem wir ein an sich nicht besonders interessantes, wohl aber für die ganze Gattung typisches, Einzelbeispiel herausgehoben haben, endet der erste wissenschaftliche Theil, und es beginnt 64) „Histiodromices liber secundus, de ejus praxi: sive, de nauticae divinationis emendatione.“ *Snellius* ist sich, was von seinen Vorläufern vielleicht nicht ebenso bestimmt behauptet werden darf, darüber vollständig klar, dass es unendlich viele Loxodromen auf jeder Kugel giebt; für die seemännische Praxis aber genügt es, deren je sieben auf ein und denselben Quadranten zu rechnen und eventuell den von zwei derartigen Linien gebildeten Winkel selbst wieder in zwei oder vier Unterabtheilungen zerfällt zu denken. Auf dieser Voraussetzung beruhen die Rhumb-Tafeln oder wie sie hier heissen, „Loxodromici canones πρόχειροι“, welche den zweiten Anhang der Schrift bilden. Für jeden der normativen Winkel liefern sie die zwischen dem Längenunterschied, dem Breitenunterschied und der in Meilen ausgedrückten loxodromischen Hypotenuse bestehende und aus den früheren Bestimmungen hervorgehende Relation. Um den Gebrauch des Tafelwerkes zu erläutern, geben wir nachstehend den Kopf und den Beschluss von Seite 47 wieder:

$4^1/_2$

gr.	miliaria loxodrom.	miliaria mecodyn.	scr.	miliaria loxodr.	miliaria mecody.	scr.	miliaria loxodr.	miliaria mecody.
1	23.6446	18.2775	1	3941	3046	31	12.2163	9.4834
2	47.2893	36.5551	2	7881	6092	32	12.6103	9.7480
3	70.9339	54.8327	3	1.1822	9139	33	13.0044	10.0527
4	94.5785	73.1102	4	1.5763	1.2185	34	13.3985	10.3573
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
			27	10.6399	8.2249	57	22.4622	17.3637
			28	11.0331	8.5296	58	22.8562	17.6683
			29	11.4280	8.8342	59	23.2503	17.9729
			30	12.8222	9.1388	60	23.6446	18.2776

Hier bedeutet $4^1/_2$ den Winkel, welchen die in gleicher Entfernung von 4 und 5 eingeschaltete Loxodrome mit dem Meridian bildet, also einen Winkel von $(45^0 + {}^{45}/_8{}^0 = 50^5/_8{}^0)$. Suchen wir für diesen Fall den einer Breitendifferenz von $2^0\ 58'$ zugehörigen loxodromischen und Längenabstand, so erhalten wir aus unserem Verzeichniss resp. für 2^0 47,2893 und 36,5551 Meilen, für $58'$ 22,8562 und 17,6683 Meilen, somit hat ein loxodromisches Dreieck, dessen Meridiankathete $2^0\ 58'$ beträgt, eine Hypotenuse von $(47{,}2893 + 22{,}8562 = 70{,}1455)$ Meilen Länge und eine Aequatorkathete von $(36{,}5551 + 17{,}6683 = 54{,}2234)$ Meilen Länge; letzterer Werth ist dann im Bedürfnissfall erst wieder in Bogenmass umzusetzen. Ist die Tafel relativ richtig berechnet — dass sie es absolut nicht sein kann, leuchtet von selbst ein — so müssen miliaria loxodromica und miliaria mecodynamica resp. gleichgross ausfallen, man mag sie für $(n-1)^0$ oder für n^0 60 scrupuli aufsuchen, und einzelne Stichproben zeigen uns, dass dem auch in der That so sei.

Von grossem allgemeinen Interesse für die Geschichte der Nautik wie auch der terrestrischen Physik sind die Angaben, welche *Snellius* über die Anlage und Führung guter Schiffstagebücher macht 65). Aus einem solchen sollen zu ersehen sein: die Länge des zurückgelegten Weges, die magnetische Abweichung und Neigung, die beobachteten Breiten, die Windrichtungen und Windintensitäten, die Temperaturen u. s. w., sowie selbstverständlich auch alle Nachrichten über geographische Wahrnehmungen darin niederzulegen sind. Insbesondere den erdmagnetischen Constanten ist Gewicht beizulegen, denn nach *Snellius*' Ansicht, welcher auch *Stevin* und bis zu einem gewissen Grade der berufenste Kenner, *A. v. Humboldt* 66), huldigten, kann deren Kenntniss zur Auffindung der Meereslänge dienen. Was nun die Schifffahrt selbst anlangt, so kann dieselbe „einfach" oder zusammengesetzt sein; Ersteres findet statt, wenn man unverändert auf der nämlichen Loxodrome, die natürlich auch in einen Mittags- oder Parallelkreis degeneriren kann, verharrt, letzteres, wenn das Schiff seinen Curs mehrmals ändert. Es wird gelehrt, dass und wie man durch combinirte Beobachtungen der Polhöhe, der Inklinationsnadel und des Logs sich über den Ort auf dem Meere vergewissern könne, — interessante Betrachtungen, die jedoch für unseren Zweck blos eine sekundäre Bedeutung beanspruchen können. Die zusammengesetzten Curse werden im Allgemeinen häufiger vorkommen, als die einfachen, da sowohl vorspringende Festlandmassen, als auch wechselnde Lufströmungen dem Innehalten einer bestimmten loxodromischen Richtung sich hinderlich erweisen. Ein Beispiel 67) dient zur Erläuterung dieser Thatsache. Wer von Holland's Küste unter dem Parallel von 52^0 lat. n. nach Cadix gelangen will, wird zunächst die fünfte westliche Loxodrome benützen müssen, bis er das Ptolemäische Cap Gobarum in der Bretagne erreicht hat, das unter $48^1/_2{}^0$ lat. n. gelegen ist. Von dort wird er eine dem Meridian näher gelegene Curve zu wählen haben, um auf die Höhe von Cap St. Vincent zu kommen ($37^1/_2{}^0$ lat n.), und nun wird ihn die siebente Loxodrome direkt den unter $36^1/_3{}^0$ lat. n. belegenen Säulen des Herkules zuführen. Dass die für die einfache Schifffahrt aufgestellten Regeln auch diesen allgemeineren Fall mit umfassen, ist klar; sie müssen eben auf jede der Einzelstrecken, in welche der gebrochene Schiffscurs zerfällt, von Neuem angewendet werden. Eine sauber ausgestattete Figurentafel führt uns eine neunmal gebrochenen Route vor, deren einzelne Bestandtheile sorgfältig ausgemittelt werden. —

Wir sind mit unserer Analyse des „Tiphys Batavus" zu Ende und glauben durch dieselbe unsere aufängliche Behauptung erhärtet zu haben, dass nämlich dieses Werk als ein abschliessendes und grundlegendes Compendium all' derjenigen Theile der Navigationslehre zu betrachten sei, welche nicht von der Beobachtung des gestirnten Himmels abhängen. Zumal die Lehre von der loxodromischen Curve, welche nun endlich auch einen sachgemässen Namen empfangen hat, hat bei *Snellius* eine so vollendete Gestalt erhalten, als ohne Zuziehung des Infinitesimalen überhaupt angängig war, und die loxodromische Praxis der Schiffer, für die jene später zu besprechenden theoretischen Errungenschaften doch mehr oder weniger transscendent waren, ist noch auf lange Jahre hinaus auf dem von dem geistvollen Holländer erreichten Standpunkt stehen geblieben. Die irrige Anahme, dass sämmtliche loxodromische Elementardreiecke dieser ihrer Kleinheit halber durchaus congruent sein müssten, involvirte eine Reihe von Fehlerquellen, welche nur durch den glücklichen Umstand, dass die Meerschifffahrt vorwiegend mittlere und tropische Breiten umspannte, theilweise paralysirt worden sein können. Nordpolfahrer möchten mit dem *Snell*'schen Kanon manch' schlimme Erfahrung gemacht haben. Allein solche Erwägungen dürfen uns nicht hindern, von *Snellius* die moderne Form der loxodromischen Theorie und Schiffsrechnung zu datiren. Völlig unbegreiflich ist es, wie *Bouguer* 68) sich zu dem harten Urtheil veranlasst sehen konnte: „Snellius donna son Tiphys Batavus en 1624: ce livre est écrit d'une manière tres-obscure, qui ne nuisit pas à la grande réputation que l'auteur méritoit par ses autres ouvrages.“ Wir haben diess nicht finden können; der Leser, der unsere Analyse kennt, ist hoffentlich derselben Ansicht, wie wir, und so freuen wir uns, ein scheinbar verbreitetes Vorurtheil, welches das Buch des niederländischen Forschers betraf, zerstört und zu gerechterer Anerkennung seiner Verdienste Einiges beigetragen zu haben.

§ 9. Nicht gerade originell, doch aber jedenfalls erwähnenswerth sind jene gelegentlichen Hinweisungen auf unseren Gegenstand, welchen wir in mathematischen und geographischen Werken des siebzehnten Jahrhunderts begegnen. In *Alsted*'s Encyklopädie, einer Gesammtdarstellung alles gelehrten Wissens jener Zeit, ist der loxodromischen Lehre ein eigener Abschnitt 69) eingeräumt, und auch *Herigone* in seinem trefflichen Compendium liefert einen Abriss derselben sammt Tafeln 70). Dass der Jesuit *Fournier*, der Erste, der ein wissenschaftliches Gebäude aller auf die See und das Seewesen bezüglichen Lehren aufzurichten sich bestrebte, es auch in diesem Punkte nicht an sich habe fehlen lassen, leuchtet von selbst ein. Er lehrt sowohl die Verzeichnung der reducirten Karten, als auch die theoretische Grundlage dieser Construktion 71), er zuerst hebt es mit der nöthigen Schärfe hervor, dass das einzelne loxodromische Dreieck, über dessen wahres Wesen selbst ein *Snellius* noch nicht völlig im Klaren sich befand, unendlich klein angenommen werden müsse. Auch *Varenius*, der berühmte Verfasser der ersten „vergleichenden Geographie“, giebt von unserer Disciplin soviel, als für seinen engeren Zweck nothwendig erschien 72); indess ist es uns als ein geradezu auffälliger Umstand einer Bemerkung würdig erschienen, dass *Varenius* als Geograph seine Definition der loxodromischen Curve in weit präciserer Weise formulirt, als es die Mehrzahl der zeitgenössischen Mathematiker thut. Mit Nachdruck erklärt er, dass jene keine einfach gekrümmte Curve sein könne, dass keine vier consekutiven Punkte derselben ein und derselben Ebene angehören. Ohne besonderes Interesse ist die analoge Behandlung der Sache bei *Deschales* 73). Hingegen bei einem andern Vielschreiber dieser compilationslustigen Periode, bei *Riccioli*, stossen wir auf eine mehr selbstständige

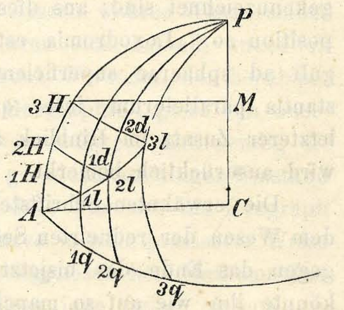
Auffassung. Auch er stellt der Schifffahrt auf dem Hauptkreis diejenige auf der Loxodrome gegenüber, wie wir ein Gleiches bei *Stevin* sahen: „navigatio sphaerica circularis, seu brevissima per circulum eundem maximum, requirit perpetuam fere, aut frequentem mutationem rhombi, quae majorem peritiam geometriae sphaericae supponit, paucis naucleris concessam“, während bei der anderen, der loxodromischen, Manier, es darauf ankommt 74): „Per quas lineas, et circulos navigetur, aut navigari possit, sequendo eundem verum rhombum.“ Dem Schiffer steht es frei, sich für eine der beiden Methoden zu entscheiden 75): „Extra meridianum aequatoremque hujusve parallelos naviganti necesse est subinde natare lineam Rhombi, si velis navigare per eundem circulum maximum aut subinde mutare circuli maximi, si velis retinere eandem lineam Rhombi, et Loxodromicam, seu obliquam viam persequi.“ Die Definition *Riccioli*'s zeugt für seine richtige Verbindung theoretischer Strenge und Berücksichtigung praktischer Interessen: „Linea totius itineris, per quam navis extra meridianum, aequatorem, hujusve parallelos sequendo eundem rhombum continuè fertur, non est circularis, sed practicè, ac physicè composita est ex pluribus diversorum magnorum circulorum segmentis, licet theoricè, et geometricè debetur esse una curva linea ad helicis formam inflexa.“ Auch *Riccioli* hat an des *Snellius* Buche die generelle Ausstellung zu machen, dass darin die loxodromischen Dreiecke ihrem wahren Charakter nach nicht ausreichend scharf gekennzeichnet sind; aus diesem Grunde lautet seine neunte Proposition so: „Loxodromia est instar basis trianguli plani rectanguli ad sphaerae superficiem applicati, cujus crus unum sit distantia parallelorum, inter quos intercipitur, si parva sit.“ Dass letzterer Zusatz im Hinblick auf *Snellius* hinzügefügt worden sei, wird ausdrücklich bemerkt.

Die erwähnten Schriftsteller zeigen sich theilweise auch mit dem Wesen der reducirten Seekarten vertraut, wie denn überhaupt gegen das Ende des bisjetzt behandelten Zeitabschnittes — man könnte ihn wie auf so manchem mathematischen und philosophischen Gebiete den vor-Leibnitz'schen nennen — wenigstens die eigentlichen Gelehrten die Grundsätze von *Mercator*'s grosser Erfindung sich angeeignet hatten. Freilich klagt *Bouguer* darüber, dass noch 1618 *Nicolaus Bon* und 1630 *Adrian Metius* eine auffallende Unwissenheit diesen Dingen gegenüber an den Tag legten 76), allein um die Mitte des Jahrhunderts scheint allenthalben eine Wendung zum Besseren eingetreten zu sein.

§ 10. Man weiss, dass seit Erfindung seines neuen Calculs *Leibnitz* unermüdlich darauf bedacht war, die Vorzüge desselben an immer neuen Problemen zu illustriren. Kaum irgend ein zweites konnte nach dieser Richtung hin eine günstigere Perspektive gewähren, als dasjenige der Loxodrome. Was die Geometrie der Alten, in Verbindung mit den verbesserten Rechnungsmethoden der Neuzeit, nur immer zu leisten im Stande war, das hatte sie unter den Händen eines *Nunez, Stevin* und *Snellius* geleistet; und ohne gründliche Befruchtung mit Ideen von principieller Neuheit war ein Fortschritt für diese ganze Doctrin nicht mehr zu erwarten. Wir haben uns bei unserem kritischen Ueberblick die Ueberzeugung verschafft, dass eben gerade in dem Mangel einer richtigen Auffassung des Unendlichkleinen diese Stagnation ihren Gruud hatte, und so konnte es nicht fehlen, dass die Initiative eines *Leibnitz* gerade den Nerv der Sache treffen musste. Schon frühzeitig, im Jahre 1693, sehen wir ihn die Discussion der Loxodrome als Anhang zu einer Untersuchung von anderweiter Tendenz 77) veröffentlichen.

Vom Punkt A des Aequators geht (Fig. 7) eine Loxodrome aus, welche die Meridianquadranten $P1q$, $P2q$, $P3q$ resp. in $1l$, $2l$, $3l$ schneidet. Durch diese drei Punkte sind Parallelkreise $1l1H$, $2l2H$, $3l3H$ gelegt, welche selbst wieder mit den Quadranten $P1q$ und $P2q$ die Punkte $1d$, $2d$ gemein haben. Dann ist $\triangle\, 1l1d2l \backsim \triangle\, 2l2d3l$*); „ergo $1l2l$ quantitas rhombicae percursae seu itineris in eodem rhombo, est ad $1H2H$, differentiam latitudinis extremorum, ut sinus totus ad anguli rhombici sinum". Der Radius oder Sinus totus wird gleich 1 gesetzt,

Fig. 7.



*) Man erkennt den wesentlichen Unterschied zwischen der richtigen und der vordem angewandten falschen Infinitesimalmethode darin, dass erstere die verschiedenen charakteristischen Dreiecke blos als ähnlich betrachtet, letztere dagegen als congruent.

die Tangens des constanten loxodromischen Winkels gleich b; alsdann hat man folgende Kette von Proportionen:

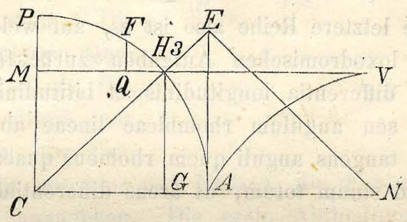
$$\frac{1d\,2l}{1d\,1l} = \frac{2d\,3l}{2d\,2l} = \frac{b}{1}; \quad \frac{1H\,2H}{2H\,3H} = \frac{1l\,1d}{2l\,2d}.$$

Ferner hat man

$$\frac{2q\,3q}{2d\,3l} = \frac{AC}{3HM} = \sin 3HCP,$$

indem aliquote Bestandtheile von Parallelkreisen sich wie ihre Halbmesser verhalten. Der weiteren Untersuchung liegt eine eigene Figur, unsere Fig. 8, zu Grunde. *Leibnitz* denkt sich, wenn $3H$, A, C, M und P im Sinne von Fig. 7 fortgebraucht werden, in A eine Tangente an den Viertelskreis gezogen, hierauf den Radius $C3H$ über $3H$ hin aus so lange verlängert, bis die Tangente in E getroffen wird, und nun einen $\angle CEN = 90^0$ in E an CE angelegt. Auf $3HM$ sei ein geradliniges Element $3HQ$ genommen und in Q eine Normale QF bis zur Kreisperipherie gezogen, dann ist das endliche Dreieck CEN („triangulum ordinarium") dem Differentialdreieck $3HQF$ („triangulum characteristicum inassignabile") ähnlich, und es folgt

Fig. 8.



$$ndh = CE.3HF = CN.QF,$$

wo die Bedeutung von n und dh sofort in die Augen fällt. CM als Sinus der geographischen Breite soll e heissen, dann ist $QF = de$ und

$$CN = MV = \frac{1}{1-ee};$$

der Buchstabe V ist da gesetzt, wo der loxodromische Curvenzug die verlängerte $M3H$ durchschneidet. Setzt man diese Werthe in ndh ein, so wird das gemischtlinige Viereck

$$ACMV = \int ndh = \int \frac{de}{1-ee},$$

und um den Bogen $A3q$, welcher auf dem Aequator den Anfangsund Endpunkt der Loxodrome markirt, zu finden, hat man nur noch mit b zu multipliciren, so dass

$$\text{arc}\, A\,3q = b\int\frac{de}{1-ee} = \frac{be}{1} + \frac{be^3}{3} + \frac{be^5}{5} + \cdots$$

wird. Sucht man den zu zwei willkürlichen loxodromischen Punkten gehörigen Längenunterschied, etwa $1q\,3q$, unter Voraussetzung des bekannten Breitenunterschiedes $1H\,3H$, so hat man nur die vorige Formel zweimal anzuwenden und die bezügliche Subtraktion anzuwenden; versteht man resp. unter e und (e) die Sinusse der durch die Punkte $3l$ und $1l$ bestimmten Breitenwinkel, so resultirt

$$\frac{1}{b}\,\text{arc}\, 1q\,3q = \frac{e-(e)}{1} + \frac{e^3-(e)^3}{3} + \frac{e^5-(e)^5}{5} + \ldots$$

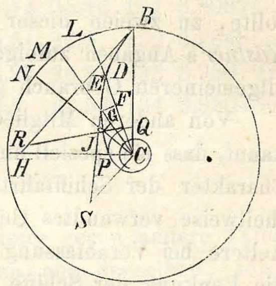
Diese letztere Reihe also ist es, auf welche sich im Wesentlichen alle loxodromischen Aufgaben zurückführen lassen. „Veluti si data differentia longitudinis et latitudinis locorum quaeras rhombum seu angulum rhombicae lineae ab uno ad alium ducentis: Nam tangens anguli quem rhombus quaesitus facit ad meridianum, est ad sinum totum, ut arcus differentiae longitudinum est ad logarithmum hyperbolicum dictae rationis, seu ad $\frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5}$ etc.“

Eine kurze Andeutung, wie mit Hülfe der entwickelten Principien Karten in *Mercator*'s Projektion — dieser Name selbst wird übrigens nicht genannt — zu entwerfen wären, beschliesst die inhaltsvolle Abhandlung. Die Geschichte der reinen Mathematik hat von derselben unseres Wissens noch wenig Notiz genommen, und doch verdient sie auch unter diesem Gesichtspunkt vollste Beachtung. Wir treffen hier das für die frühere Periode der Infinitesimalrechnung charakteristische Bestreben, alle Probleme auf die Berechnung von Arealen zu reduciren, wir sehen, wie die richtige Verwerthung der Begriffe des Unendlichkleinen und der unendlichen Reihe gewisse Fragen fast spielend erledigt, an welchen der mathematische Scharfsinn früherer Generationen Schiffbruch gelitten hatte. Bemerkt mag auch die eigenthümliche Verwendung der doppelten Indices werden, auf deren Erfindung *Leibnitz* bekanntlich mit Recht 78) ein grosses Gewicht legte, welche hier jedoch in einer weit weniger bequemen Form auftreten, als bei mancher anderen Gelegenheit.

§ 11. In die Fusstapfen seines grossen Freundes und Zeit-

genossen trat *Jakob Bernoulli*. Er lieferte in der nämlichen Zeitschrift 79) ebenfalls eine Theorie der loxodromischen Linie auf infinitesimaler Grundlage, indem er jedoch sein Hauptaugenmerk solchen Detailfragen zuwandte, welche von *Leibnitz* nicht berücksichtigt worden waren. *Bernoulli*'s Zeichnung der um den Pol C (Fig. 9) sich herumschlingenden Loxodrome ist — entgegengesetzt den perspektivischen Abbildungen aller seiner Vorgänger — eine orthographische Polarprojektion, so dass der Aequator die sichtbare Hemisphäre von der unsichtbaren trennt und sämmtliche Meridianquadranten CB, CL, CM, CN, CH in Aequatoreal-Halbmesser sich verwandeln. Die Curve schneidet die erwähnten Quadranten resp. in B, D, E, J, P; PQ, JG, EF sind Theile der durch jene Punkte gelegten Parallelen; die Tangenten BR, ES haben für uns blos den Nutzen, die Fortschreitungsrichtung der Curve anzugeben. Die erste Abtheilung des Aufsatzes beschäftigt sich mit der Länge der Loxodrome: „Descriptis arcubus aequatori parallelis FE, GJ, PQ, ut prius erit haud absimiliter, Sinus totus ad secantem ang. $FDE :: DF.DE : : EG.EJ :: DF + EG$ etc. $DE + EJ$ etc: hoc est, arcus meridiani DQC ad longitudinem loxodromiae $DJPC$ et ita quoque arcus DQ seu differentia locorum D et P, ad partem loxodromiae DJP his locis interjectum.“ Alsdann wird gezeigt, wie aus Rhumb-Winkel und Längendifferenz die Breitendifferenz erschlossen werden könne: „Hinc ratio perspicitur constructionis tabulae, quam vocant latitudinum crescentium“; betreffs des eigentlichen Arrangements solcher Tafeln wird auf *Snell* und *Deschales* verwiesen. Zuletzt wird die Quadratur der Loxodrome vorgenommen, das „spatium loxodromicum“ bestimmt 80), worunter man jenen Theil der Kugelfläche versteht, welchen ein Meridian mit dem Aequator und der Loxodrome einschliesst.

Fig. 9.



Auf das eine der bereits von ihm behandelten Probleme ist *Bernoulli* späterhin in einer Gelegenheitsschrift 81) zurückgekommen. Soll aus dem Rhumb-Winkel und der Breite des Endpunktes des letzteren Länge ermittelt werden, wobei die Loxodrome als vom Aequator ausgehend gedacht wird, so ist, wenn α jenen ersten Winkel, β die Breite, λ die Länge vorstellt, bei *Bernoulli*

$$d\lambda = \frac{tg\alpha\; d\,(1 - tg\,{}^1/_2\,(90^0 - \beta))}{tg\,{}^1/_2\,(90^0 - \beta)}.$$

Im gleichen Jahre endlich erfand und beschrieb er einen Proportionalzirkel für Schiffer 82), welcher für einen gegebenen loxodromischen Winkel die zwischen Länge und Breite bestehende Relation zum Ausdruck bringen und es solchergestalt ermöglichen sollte, zu zweien dieser Stücke sofort das dritte hinzuzufinden. *Kästner*'s Angaben zufolge ist dieses Instrument jedoch niemals in allgemeineren Gebrauch gekommen.

Von anderen Mitgliedern der Familie *Bernoulli* ist es nicht bekannt, dass sie speziell an den Forschungen über den geometrischen Charakter der Schifffahrtscurve theilgenommen hätten. Auf ein theilweise verwandtes Gebiet verfiel jedoch *Johann Bernoulli* der Aeltere bei Verabfassung seines damals berühmten Werkes über die Lenkung der Schiffe 84), in welchem er eine Reihe von Aufgaben behandelt, welche die Kenntniss der loxodromischen Curve zur Voraussetzung haben. Von der Art und Weise jener mag nachstehende Problemstellung einen Begriff geben, welche einem zeitgenössischen Auszug 85) aus jener Monographie entnommen ist: „Aus dem gegebenen Rhombo und der Inclinirung des Windes mit dem Rhombo zu finden, wie das Seegel und der Wind gegen den Kiel solle geneigt seyn, dass man in der Loxodromie mit der grösten Geschwindigkeit, so von erwehnter Krafft zu holen, fortseegle". Bei dieser Gelegenheit erwähnen wir gleich des auffälligen Umstandes, dass *Leonhard Euler* das Thema *Bernoulli*'s wieder aufgenommen und alle auf Windstoss, Wasserdruck und günstigste Steuerung bezüglichen Fragen in ausführlichster Weise behandelt hat 86), ohne einmal das Wort „Loxodrome" zu nennen, wie er denn dieser Curve auch keine einzige seiner so überaus zahlreichen Abhandlungen gewidmet zu haben scheint.

Als eine populäre Darstellung dessen, was der Tiefsinn der grossen Analytiker zu Tage gefördert hat, ist das bezügliche Kapitel in *Wolf*'s grossem mathematischen Handbuch anzusehen 87). Nicht minder wird allda Einrichtung und Gebrauch der loxodromischen Tabellen auseinandergesetzt 88). Um von der Beschaffenheit gewisser Tafeln, wie sie ebenfalls wesentlich unter dem Einflusse der *Wolf*'schen Schule in Deutschland sich einbürgerten,

ein Bild zu geben, lassen wir im folgenden ein Stück der „tabula hydrographica", wie sie das eben auch unter *Wolf*'s Auspicien in's Leben getretene mathematische Wörterbuch enthält, abdrucken 89):

Ang. Vent. cum carin.	Angul. Venti cum Loxod.	Angul. Deviationis.	Ang. Veli cum carin.	Logarithm. □ti celeritatis.	Ang. Vent. cum carin.	Angul. Venti cum Loxod.	Angul. Deviationis.	Ang. Veli cum carin.	Logarithm. □ti celeritatis.
0	0	0	90	4.0000000	0	0	0	90	4.0000000
1	2.55	3.55	91	4.0019658	41	15.14	25.46	131	3.9087431
2	3.31	5.31	92	4.0037678	42	15.51	26.9	132	3.9648659
3	3.47	6.45	93	4.0079890	43	16.27	26.33	133	3.9507973
4	3.45	7.41	94	4.0083962	44	17.3	26.57	134	3.9507865

. . . .

. . . .

. . . .

Man constatirt leicht den Unterschied dieser gegen andere Tafeln von verwandter Bestimmung. Man kann aus denselben, sowie man den loxodromischen Winkel kennt, die Geschwindigkeit des Schiffes abnehmen und aus diesen beiden Daten, wenn letztere für ein bestimmtes Zeitintervall gleichförmig angenommen wird, sowohl die Länge des beschriebenen Weges als auch den Fortschritt in Länge und Breite berechnen. Um möglichste Vollkommenheit zu erzielen, empfahl sich also eine Combination beider Tafel-Formen. —

Wir sind, um nur einem in der Sache selbst begründeten Gedankengange treu zu bleiben, von der chronologischen Entwickelung ein wenig abgekommen. Zurückgreifend müssen wir unseren Blick jetzt von Deutschland nach England wenden, wo der gerade damals zu hoher Blüthe entfaltete geometrische Geist auch auf diesem Felde eine ganze Reihe eigenartiger und nützlicher Ergebnisse in's Leben zu rufen begonnen hatte.

§ 12. Jedermann weiss, dass um die Wende des siebzehnten Jahrhunderts neben der rein analytischen Methodik, mittelst deren man auf dem Festland der Curvenlehre ihre Geheimnisse abzuzwingen sich bemühte, in England eine mehr synthetische Richtung herlief, die eben in des grossen *Newton* mathematischen Grundlagen der Naturphilosophie ihren reinsten und grossartigsten Ausdruck fand. Es konnte nicht fehlen, dass auch die britischen Geometer die gerade für ihr Vaterland praktisch wichtige Lehre von der loxodromischen Linie mit Eifer aufnahmen; dieser Paragraph ist dazu bestimmt, ihre bezüglichen Leistungen zu sammeln und die geschichtliche Darstellung dieser in sich abgeschlossenen Richtung geistiger Thätigkeit einstweilen soweit zu führen, dass der synchronistische Parallelismus, über welchen wir uns durch zwingende innere Gründe einigermassen hinausgeführt sahen, möglichst wiederhergestellt werde.

Einer Angabe *Halley*'s zufolge 90) war um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts das mathematische Interesse für diesen Gegenstand dadurch geweckt werden, dass ein gewisser *Bond* in seinem Nachtrag zu *Norwood*'s Navigationskunde die gelegentliche Bemerkung machte, „that the Meridian Line was Analogous to a Scale of Logarithmick Tangents of half the Complements of the Latitudes." *Mercator*, der durch seine Quadratur der Hyperbel kaum minder berühmt gewordene Namensvetter des Kartenzeichners, und *Collins* lenkten die allgemeine Aufmerksamkeit auf diesen Satz, dessen Beweis sie für äusserst schwierig hielten. Dennoch gelang derselbe bald nachher dem älteren *Gregory* 91); die von ihm ausgemittelte „analogia inter lineam meridianam planisphaerii nautici et tangentes artificiales, geometrice demonstrata" wird freilich nach *Halley*'s Urtheil (a. a. O.) durch die unübersichtliche Form der Beweisart sehr verdunkelt, welche Proportionen auf Proportionen häufe und so den Leser ermüde, ehe er noch zum eigentlichen Kern der Sache durchgedrungen sei — ein Tadel, der sich freilich gegen die überwiegende Anzahl englischer Arbeiten aus dem geometrischen Fache in damaliger Zeit erheben lässt. Umfassender und treffender bearbeitete zuerst *Wallis* die plötzlich zu solcher Wichtigkeit gelangte Frage.

Wie uns derselbe in seinem grossen algebraischen Hauptwerke erzählt 92), welchem er die bereits früher erschienene Abhandlung 93) als ein eigenes Kapitel („De Charta Nautica, ut à Cl. Viro Edwardo Wright emendata: Et Meridianorum ibidem Divisione Simulque de Secantium et Tangentium Collectione Dissertatio") einverleibte, war für ihn die Anregung zu deren Abfassung eine ganz zufällige: ein praktischer Seemann hatte ihm seine eigenen Ansichten mitgetheilt, und da sich dieselben in mehrfacher Hinsicht als irrig erwiesen, so sah sich *Wallis* veranlasst, dieselben durch eine wirklich correkte Theorie zu ersetzen. Er sendet eine kurze allgemeine Uebersicht über seine Art und Weise, die höheren

Curven zu untersuchen, voraus, erwähnt sodann, dass *Wright*'s — resp. *Mercator*'s — Projektionsmanier darauf hinauslaufe, die Erdkugel central auf einem derselben längs des Aequators umbeschriebenen Cylinder abzubilden und diesen schliesslich in eine Ebene aufzurollen, bespricht eingehend die *Wright*'sche Sekantenregel, zu deren richtiger Anwendung nach *Oughtred*'s Meinung eine schärfere Eintheilung der Bögen als blos in Minuten und Sekunden erforderlich sei, und geht endlich auf den analytischen Theil der Frage ein. Indem wir seine unbehülflichen Bezeichnungen mit den unsrigen vertauschen, stellen wir fest, dass *Wallis* für einen beliebigen Winkel φ und Kreisradius r zuerst die Relationen

$$\sec\varphi = \frac{r^2}{\cos\varphi},\ tg\varphi = \frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

anschreibt; alsdann theilt er den einen der beiden den Winkel einschliessenden Radien in unendlich viele unendlich kleine Theile („quarum quaelibet sit $\frac{1}{\infty} r$, pars radii infinitesima" 94)) und nimmt die von den Theilpunkten bis zum Kreisumfang errichteten Senkrechten, die Sinusse der fortschreitenden Breiten, als in arithmetischer Progression stehend an, eine unter den obwaltenden Umständen gerechtfertigte Voraussetzung. Da nun weiter die Proportion

$$\sin\varphi : tg\varphi = r^2 \sec\varphi : \frac{r^3}{r^2 - \sin^2\varphi}\ {}^{*)}$$

besteht, so kann mittelst fortgesetzter Division des letzterwähnten Buches und für $r = 1$

$$\sec^2\varphi = 1 + \sin^2\varphi + \sin^4\varphi + \sin^6\varphi + \ldots$$

gesetzt werden. Die Integration ergiebt

$$tg\varphi = \int \sec^2\varphi\, d\varphi = \sin\varphi + {}^1/_3 \sin^3\varphi + {}^1/_5 \sin^5\varphi + {}^1/_7 \sin^7\varphi + \ldots,$$

also ebenfalls jene unendliche Reihe, deren Convergenz *Wallis*, wenn auch nicht gerade genügend, nachweist. Hievon wird dann die Schlussanwendung für die nautische Kartographie gemacht: „Ut radius toties sumptus ad aggregatum secantium eousque sic erit arcus aequatoris (aequalis arcui latitudinis propositae) ad

*) Diese Proportion nimmt in der uns geläufigeren Schreibweise die einfachere Form der identischen Gleichung an

$$\sec^2\varphi = \frac{1}{1 - \sin^2\varphi}.$$

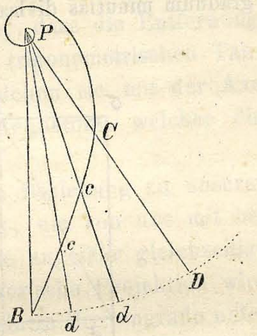
distantiam paralleli (latitudinem illam in charta designantis) ab aequatoris linea. Quod erat inquirendum". Der oben benützte bekannte Satz, dass die Tangente das Integral des Sekantenquadrates sei, wird von *Wallis* in einer Nachschrift „Collectio tangentium" 95) betitelt, weitläufig abgeleitet.

Die bislang von uns besprochenen Untersuchungen nahmen auf die loxodromische Theorie im engeren Sinne nicht eigentlich Bezug, vielmehr müssen wir sie derselben nur insoferne zurechnen, als dadurch eine der wichtigsten Fragen, unter welchen Umständen jene Curve doppelter Krümmung sich in eine Gerade verwandelt, indirekt aufgeklärt wurde. *Halley* nun will im Grunde auch nur das in vollkommenerer Weise erreichen, was seine sämmtlichen Vorgänger angestrebt hatten, allein die Wahl der von ihm für diesen Zweck verwendeten Hülfsmittel wies sich als eine so glückliche aus, dass durch seinen Beitrag auch die Hauptsache selbst eine nicht zu unterschätzende Förderung empfing. Es handelt sich an und für sich nur um den Beweis des Satzes 96): „The Meridian Line is a Scale of Logarithmick Tangents of the half Complements of the Latitudes." Allein *Halley* führt ersteren nicht mit Hülfe sphärischer Construktionen, sondern er denkt sich die Figur, welche betrachtet werden soll, stereographisch auf die Aequator-Ebene projicirt, indem ja, wie er ausdrücklich erinnert, gleiche Winkel des Originals bei dieser Projektion auch in der Copie durch gleiche Winkel ersetzt werden. Die Idee zu der für diese Eigenschaft gegebenen Verifikation rührt nach des Autors Angaben von *Hooke* her. Da nun ferner die Rhumblinie auf der Kugel mit sämmtlichen Meridianen gleiche Winkel bildet und da jener Fundamentaleigenschaft zufolge diese Winkel sich nicht ändern, so ergiebt sich uns als Projektion der Rhumblinie eine Plancurve, welche sämmtliche von einem Punkte (der Projektion des Erdpoles) unter gleichen Winkelabständen auslaufenden Radienvektoren unter einem constanten Winkel durchschneidet. *Halley* bezeichnet diese Linie als „proportional spiral"; es ist dieselbe, welche kurze Zeit vorher *Jakob Bernoulli* entdeckt und unter dem Symbol „eadem mutata resurgo" verherrlicht hatte: die logarithmische Spirale. In der That folgt aus dem unendlich schmalen Dreieck, welches zwei benachbarte Radienvektoren r und $(r + dr)$ mit einander einschliessen, für den Fall eines gleichen Aussenwinkels und Innenwinkels sofort

$$\frac{r\,d\varphi}{dr} = \text{Const.}, \quad \frac{dr}{r} = \text{Const.}\ d\varphi$$

und als zugehörige Gleichung zwischen r und dem Argument φ die folgende $r = a^{\varphi}$. *Halley* hatte somit eine Wahrnehmung gemacht, welche *Chasles* 97) für wichtig genug hielt, um ihr einen Platz in seinem Werke einzuräumen. Der Beweis selbst für den eingangs erwähnten Lehrsatz gestaltet sich nun ziemlich einfach. Die Radienvektoren PB, Pc, PC (Fig. 10) sind die Tangenten der halben Breiten-Complemente, und dem Entstehungsgesetz der Curve gemäss verhalten sich die Längendifferenzen resp. Amplitudendifferenzen wie die Logarithmen der zugehörigen Tangentenverhältnisse. „But the Nautical Meridian Line is no other than a Table of the Longitudes, answering to each minute of Latitude, on the Rhumbline making an angle of 45 degrees with the Meridian. Wherefore the Meridian Line is no other than a Scale of Logarithmick Tangents of the half Compliments of the Latitudes."

Fig. 10.



Die Folgerungen, welche *Halley* aus seinem Theorem zieht, und welche sich auf eine rationelle Construktion der nautischen Tafeln beziehen, übergehen wir hier, da sie, obwohl in ihren zahlreichen Reihenentwickelungen von entschiedenem analytischem, so doch für unser Thema nur von untergeordnetem Interesse sind.*) Nur dessen wollen wir im Vorübergehen noch gedenken, dass *Halley* die in *Sir Jonas Moore*'s „Systeme of the Mathematicks" enthaltenen Tafeln als einen Fortschritt den *Wright*'schen gegenüber schildert. Besagtes Buch ist uns unzugänglich geblieben; indess werden ähnliche auch in einem anderen Werke dieses Schriftstellers gegeben, und zwar unter dem Namen 99): „A Table of Meridional Miles." Die ziemlich kurzgefasste Theorie erörtert zuerst die gewöhnliche rohe Routine des Schiffes, bei welcher, wie uns bekannt, loxodromischer Abstand, Längen- und Breitendifferenz

---

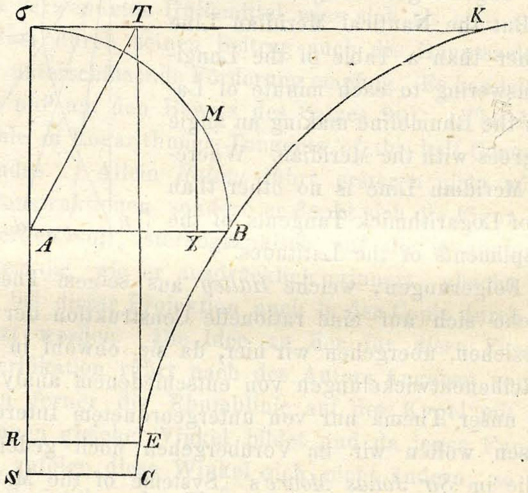
[1]) *Jakob Bernoulli* hatte den Studien *Halley*'s bereits in der Weise vorgearbeitet, dass er mit Hülfe der logarithmischen Linie ein Schema construirte, welches graphisch die von *Halley* rechnerisch angestrebten

die Seiten eines ebenen rechtwinkligen Dreieckes bilden, und setzt sodann auseinander 100), dass man, um die Hypotenuse nach *Mercator*'s Regeln richtig zu finden, eben von jener Tabelle Gebrauch machen müsse. Liegt z. B. der eine Endpunkt unter 47°, der andere unter 59° 36′ lat., so findet man allda für den ersten Winkel die Zahl 3202, für 59° 30′ 4460, für 59° 40′ 4487, woraus durch eine allerdings nicht ganz richtige Interpolation der dem

---

Zwecke erfüllen sollte. Er nennt dasselbe eine „loxodromische Skale" (Fig. 11). „Esto $BM\sigma$ circumferentia aequatoris in gradus suos et graduum minutias divisa; haec extendatur in rectam AS axem Logarith-

Fig. 11.



micae CBK, ejusque divisionibus ordine ab A adscribantur gradus longitudinum: tum sumto indefinite in circumferentia hac puncto M, bisectoque arcu $M\sigma$ per rectam AT occurrentem tangenti σK in T, ducatur ex T recta TE axi AS parallela, secans logarithmicam in E; ac denique ex E demittatur in axem perpendicularis ER; punctoque R adscribatur numerus graduum in arcu BM: sic habebuntur etiam gradus latitudinum; parataque erit scala loxodromica, quae primario inserviet rhumbo, cujus anguli tangens aequatur subtangenti logarithmicae." *Cramer*, der, wie gewöhnlich, seine Erläuterungen beifügt, bedient sich dabei eines Raisonnements, welches, wenn man ihm auch die bedeutenden formellen Fortschritte der letzten sechzig Jahre recht wohl anmerkt, doch sachlich ganz mit dem *Halley*'schen übereinstimmt. Vgl. auch *Perks*.

Winkel von 59° 36′ zugehörige Numerus gleich 4480 berechnet wird. Die Differenz (4480—3202) liefert dann die wahre loxodromische Entfernung 1278 Meilen, während die handwerksmässige Praxis den Werth 856 Meilen findet.

Auf *Halley*'s Entdeckung kam etliche Jahre später der geistvolle *Roger Cotes* zurück. Seine Idee, die Logarithmen graphisch mittelst der zugehörigen Spirale darzustellen, oder, wie er sich ausdrückt 101), „Logarithmorum canonem ad spiralem aequiangulam accomodare", klingt ersichtlich auch an diejenige *Jakob Bernoulli*'s an; in einem Scholium kommt er auch auf die Loxodrome zu sprechen. Unmittelbar aus der Definition des stereographischen Projicirens ergiebt sich ihm die Thatsache, dass die Entfernung eines jeden Curvenpunktes vom Pole der trigonometrischen Tangente des halben Winkels gleich ist, welchen sie mit der Axe bildet, d. h. mit jenem Halbmesser des Aequators, welcher die Loxodrome selber trifft.*)

In einer wiederum etwas entfernteren Beziehung zu unserer Hauptfrage, trotzdem aber ihr nahe genug, um von uns mit berücksichtigt werden zu müssen, steht eine ungefähr gleichzeitige Abhandlung von *Perks* 102). Die *Mercator*'sche Projektion wird von ihm als diejenige eingeführt, welche einem Breitengrade unter der Breite φ die Grösse gebe, dass er sich zu einem Aequatorgrade verhalte wie $sec\varphi$: 1. Die dem entsprechende Eintheilung der Meridiane, für welche *Wright* durch Summation der Sekanten von Minute zu Minute ein empirisches, *Wallis* (s. o.) durch Integration ein analytisches Verfahren angegeben, gedenkt er auf mechanisch-graphischem Wege zu leisten. Er bedient sich zu dem Ende eines Lineales, an dessen einem Ende — einigermassen den *Schlagintweit*'schen Skalenrädchen vergleichbar — ein der schmalen Kante angepasster Schieber aufsitzt; dasselbe wird an eine gerade Linie angelegt und alsdann so verschoben, dass der Endpunkt des Lineals stets an einer zu jener ersten senkrechten Geraden hingleitet; bei dieser Bewegung beschreibt der Schieber, resp. ein daran befestigter Zeichnungsstift eine krumme Linie,

---

*) *Cotes* hat sammt den meisten anderen Betrachtungen dieses seines Essay über die Curvenlehre auch die oben berührte späterhin in sein bekanntes Werk „Harmonia Mensurarum" aufgenommen, ohne aber in der Art und Weise der einzelnen Entwickelungen irgendetwas zu ändern.

welche die Leitgerade zur Asymptote hat. Dieselbe wird mit dem einzutheilenden Meridiane identificirt, während jene Strecke, welche auf der ursprünglichen Lage des Lineales zwischen dem Anfangspunkt und dem Durchschnittspunkt der Curve enthalten ist, dem Kugelradius gleich angenommen wird. Auf diesem trägt man daher, um den der Breite φ zugehörigen Eintheilungspunkt zu erhalten, eine Länge $= \cos\varphi$ ab, zieht durch den Endpunkt derselben eine Parallele zur Direktrix und beschreibt endlich um jenen Punkt der Curve, welchen sie mit dieser Parallelen gemeinsam hat, einen Kreisbogen, welcser die Meridianlinie in dem gesuchten Punkt durchschneidet. Dass der Breite $\varphi = 90^0$ der unendlich entfernte Punkt entspricht, geht u. a. ebenfalls aus dieser Construktion hervor. *Perks* legt seiner Curve den Namen „Equitangential Curve" bei und will seine Kenntniss von deren hauptsächlichsten Eigenschaften einem Aufsatze des Franzosen *Bomie* entnommen haben 103); in Wirklichkeit reicht deren Geschichte jedoch in eine höhere Zeit hinauf, denn, nachdem *Perrault* zuerst auf dieselbe aufmerksam geworden war, hatte auch *Leibnitz*, auf den sich vermuthlich auch der gebräuchlichere Name „Traktorie" zurückführt, seine neue Rechnung an ihr zu erproben Gelegenheit genommen 104).

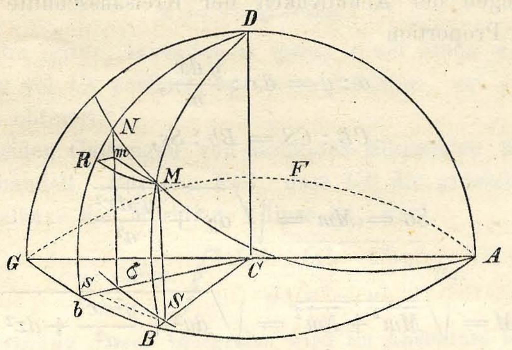
Unzweifelhaft besteht ein inniger Zusammenhang zwischen den in diesem Paragraphe aufgeführten und analysirten Studien britischer Mathematiker und denjenigen ihrer Landsleute aus späterer Zeit. Gleichwohl ziehen wir es vor, letztere nicht gleich hier anzureihen, sondern ihnen erst im nächstfolgenden Abschnitt ihren Platz anzuweisen. War nämlich bis jetzt die unverbrüchliche Voraussetzung Aller derer, welche sich mit der Loxodrome beschäftigten, die Kugelgestalt der Erde gewesen, so musste gegentheils durch die Forschungen eines *Richer, Newton, Huygens* u. s. w. die Erörterung der Frage, wie sich denn die loxodromische Linie auf einem Rotations-Ellipsoid gestalte, immer näher gerückt werden. Wir werden uns sofort überzeugen, dass diese Verallgemeinerung fast gleichzeitig von den verschiedensten Seiten her in Angriff genommen worden ist.

§ 13. Die Priorität im engeren Sinne scheint einem sonst wenig bekannten deutschen Gelehrten, dem Magister *Johann Gottfried Walz*, zu gebühren, welcher in seiner gar nicht umfang-

reichen Arbeit die zu lösende Aufgabe gleichwohl sofort in ihrer grösstmöglichen Allgemeinheit auffasste 105).

Sei (Fig. 12) $AFGB$ der Aequator des fraglichen Umdrehungskörpers, dessen erzeugende Meridiancurven BMD, bND durchaus

Fig. 12.



congruent sind. AMN ist die näher zu bestimmende Loxodrome; es ist demnach $\angle AMB = \angle MNb$. Nimmt man M und N als Nachbarpunkte an und denkt sich das Stück MR eines Parallelkreises gegeben, so kann das Dreieck MNR als ein in R rechtwinkliges Plandreieck gelten, dessen spitze Winkel α und $(90^0 - \alpha)$ bekannt sind, wenn eben α der loxodromische Schnittwinkel ist. Von M und N fälle man auf die Ebene des Aequators die Lothe MS und $N\sigma$; die Fusspunkte derselben liegen auf den ebenfalls unendlich benachbarten Aequatorealhalbmessern CB und Cb. Das Curvenelement $S\sigma$ ist die orthographische Projektion des loxodromischen Elementes MN, und mit ihm hat sich, wie diess bei Curven doppelter Krümmung immer zu geschehen pflegt, die Untersuchung in erster Linie zu beschäftigen. Es wird noch auf $N\sigma$ ein Punkt m so genommen, dass $mR \parallel BC$, $mM \parallel S\sigma$ wird; endlich sei noch Cs auf $Cb = CS$. Nun wird $CB = a$, $CD = b$, arc $AB = x$, arc $Bb = dx$, $CS = y$, $s\sigma = -dy$, $SM = z$, $mN = dz$, $RN = du$ gesetzt; $\cos\alpha$ soll den Werth $\frac{f}{a}$ erhalten. Wie man aus dieser Wahl der veränderlichen Grössen ersieht, verdient *Walz*'s Arbeit schon unter dem allgemeineren Gesichtspunkt die Würdigung des mathematischen Historikers, weil das zu Grunde gelegte Coordinatensystem nicht das gewöhnliche ist; zwei Coordinaten sind linear, die dritte eine Winkelgrösse, wie man denn auch noch heutzutage bei der Diskussion der ja auch zu den Loxodromen gehörigen Schraubenlinie eines ähnlichen halbpolaren Systemes sich zu bedienen pflegt.

Walz entwickelt nunmehr die Differentialgleichung seiner Curve. Wegen der Aehnlichkeit der Kreisausschnitte CBb, CSs besteht die Proportion

$$a : y = dx : \frac{y\,dx}{a},$$

$$CB : CS = Bb : Ss,$$

somit wird

$$S\sigma = Mm = \sqrt{dy^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2}}$$

Ferner ist

$$NM = \sqrt{\overline{Mm}^2 + \overline{Nm}^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2} + dz^2}.$$

Da jedoch die Kathete NR zur Hypotenuse NM das nämliche Verhältniss hat, wie der Cosinus des loxodromischen Winkels α zur Einheit, so ergiebt sich als die gesuchte Differentialgleichung die folgende 106):

$$a^2 du^2 = f^2\left(dy^2 + \frac{y^2 dx^2}{a^2} + dz^2\right).$$

Will man aber die leichter zu übersehende Gleichung der aequatorealen Projektion haben, so hat man noch u und z zu entfernen. Aus der Gleichung der Meridiancurve möge sich die explicite Form $-dz = F(y)\,dy$ gewinnen lassen; dann wird

$$dy\sqrt{1 + F^2_{(y)}} = du,$$

und zum Schluss resultirt die das Argument x in y ausdrückende Gleichung:

$$x = \frac{a}{f}\sqrt{a^2 - f^2}\int \frac{dy}{y}\sqrt{1 + F^2_{(y)}}.$$

Der vor dem Integralzeichen stehende Faktor könnte auch durch $\cos\alpha$ dargestellt werden.

Der Autor wendet seine generelle Formel, welche freilich an der Beschränkung leidet, dass die Gleichung der Meridianlinie für gewöhnlich in der nicht entwickelten Form $\Phi(y, z) = 0$ erscheinen wird, auf verschiedene Rotationsflächen, insbesondere auf Kugel und Ellipsoid, an. In ersteren Falle ergiebt sich

$$x = atg\alpha \int \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}};$$

das Rationalmachen der Wurzel wird mit Hülfe der Substitution $y = \frac{2\,at}{1 + t^2}$ bewirkt, so dass

$$x = -\,tg\,\alpha\,\log t$$

wird. „Patet igitur, inventionem ipsius x vel arcus AB, qui ad quamlibet y vel CS pertinet, ope logarithmorum, vel quadraturae hyperboles, obtineri.“

Die beiden Gattungen von Rotations-Ellipsoiden werden gesondert behandelt. Für den Fall, dass CB die grössere, CD die kleinere Halbaxe der Meridian-Ellipse ist, wird

$$x = \text{Const.}\int \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,y^2}}{y\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy.$$

Die Auswerthung dieses Integrales wird im Anschluss an *Newton*'s Vorschriften mittelst Reihenentwickelung geleistet. Alsdann wird gezeigt, wie aus zwei Stücken eines loxodromischen Elementardreiecks auf dem Sphaeroid die übrigen gefunden werden können. Handelt es sich um die Hypotenuse, so muss freilich die Länge eines elliptischen Bogens vorher bekannt sein. Für diesen wird sodann eine convergirende Reihe angegeben: Grund genug für den, der sich mit dem Plane einer quellenmässigen Geschichte der elliptischen Funktionen trägt, des *Walz*'schen Artikels eingedenk zu sein. Der Schlusssatz besagt, dass, wofern die Meinung *Cassini*'s siegen sollte, dass nämlich die Erde kein verkürztes, sondern ein verlängertes Rotations-Ellipsoid wäre, in den obigen Formeln a mit b zu vertauschen sein würde.

Hätte man es endlich mit einem parabolischen Drehungskörper zu thun, dessen erzeugende Curve den Parameter g besitzt, so wären x und y durch die Gleichung

$$x = \frac{atg\alpha}{g}\int\left(\frac{g}{y} + \frac{2\,y}{g} - \frac{2\,y^3}{g^3} + \frac{4\,y^5}{g^5} - \frac{10\,y^7}{g^7} + \ldots\right) dy$$

an einander geknüpft.

Im gleichen Jahre wie *Walz* begann sich *Maupertuis* mit dem verallgemeinerten loxodromischen Probleme zu befassen; wir legen jedoch unserer Besprechung nicht sowohl die Originalabhandlung vom Jahre 1741, als vielmehr deren später erfolgten

Wieder-Abdruck in den gesammelten Werken zu Grunde 107). Die betreffende Theorie wird nicht eigentlich um ihrer selbst willen bearbeitet, sondern erscheint als Schaltkapitel in einer ausgedehnten Untersuchung über die Parallaxe des Mondes auf der sphaeroidischen Erde. *Maupertuis* denkt sich irgendwo in der Erdaxe die Spitze eines Kegels, welcher die Loxodrome zur Leitlinie hat, und fragt dann nach dem Charakter der Schnittcurve dieses Kegels mit der Aequator-Ebene. Ein Element des Aequators wird $= du$, der senkrechte Abstand eines loxodromischen Elementes $= - dx$, die Projection jenes Elementes auf den Aequator $= dy$, endlich jenes Stück eines Aequatorealhalbmessers, welchen der Projektionskegel ausschneidet, $= dz$ gesetzt; die Bedeutung der Integrale $u, - x, y, z$ ist dann von selbst einleuchtend. Hat endlich α die nämliche Bedeutung, wie bisher, so lautet *Maupertuis*' Differentialgleichung:

$$du = -\frac{tg\, \alpha\, dz}{z} \cdot \frac{x\, ds}{x\, dy - y\, dx}.$$

ds ist die vertikale Kathete des loxodromischen Elementardreiecks. Für einen unendlich entfernten Augpunkt wird jene Gleichung einfacher, nämlich:

$$du = \frac{tg\, \alpha\, dz\, ds}{z\, dy}.$$

Für den Fall sodann, dass der Augpunkt in den entgegengesetzten Pol des Rotationskörpers hineinrückt, ergiebt sich, unter δ die Differenz der Polar- und Meridianaxe verstanden,

$$du = r\, tg\, \alpha\, dz \left(\frac{1}{z} \pm \frac{4 r^2 \delta z}{r^2 + z^2}\right).$$

Für $\delta = 0$, also für die Kugel, haben wir mithin, wie auch von *Maupertuis* 108) ausdrücklich hervorgehoben wird, wiederum die bekannte Gleichung der logarithmischen Spirale.

Der vorhergehende Paragraph hat uns darüber belehrt, dass die Engländer, welche auch bei diesem Anlass ihren praktischen Sinn nicht verleugneten, der loxodromischen Theorie keineswegs durch abstrackte Beweggründe geleitet ihre Theilnahme zuwandten, sondern dieselbe nur indirekt dadurch förderten, dass sie die rationellste Construktion der nautisch wichtigen Plattkarten anstrebten; selbst *Halley*'s schöner und folgenreicher Lehrsatz erscheint, geschichtlich genommen, nur als Lemma von sekundärer Bedeutung. Ganz denselben Stempel nun, wie diese Arbeiten

älterer Landsleute, tragen auch die Arbeiten *Maclaurin*'s und *Thomas Simpson*'s, soweit dieselben hier unser Interesse zu erwecken geeignet sind.

Maclaurin stellt sich die Frage, auf welche Weise die Oberfläche eines Sphaeroides durch eine Karte mit wachsenden Breitengraden und constanten Längengraden dargestellt werden könne. Für die Kugel des Radius oder „Modulus" r ist unter der Breite φ, „for which the meridional parts z are required",

$$z = \log \frac{r}{tg \frac{90^0 - \varphi}{2}}.$$

Denkt man sich ferner eine Halbellipse mit der horizontalen kleinen Axe vertikal aufgerichtet, in einem Endpunkt jener die (vertikale) Tangente gezogen und von ihr durch einen Fahrstrahl aus dem Centrum ein Stück t abgeschnitten, bezeichnet ferner durch a die grössere Halbaxe und durch e die lineare Excentricität, so soll sein für das abgeplattete Sphaeroid

$$z = \log \frac{a}{t} \left(1 - \frac{e}{a}\right),$$

für das verlängerte ändert sich ausschliesslich das Vorzeichen innerhalb der Klammer 109). Der Beweis für diese Sätze wird ganz im Sinne der damals jenseits des Kanales für allein zulässig gehaltenen geometrischen Differentialrechnung geführt. Da die hier vorkommenden Logarithmen hyperbolische sind, so lehrt *Maclaurin* dieselben erst in die gebräuchlichen künstlichen Logarithmen umsetzen. Eine auf Grund der correkten Formeln ausgerechnete Tafel zum Eintheilen des ersten Meridians habe *Murdoch* entworfen, und zwar für jenes Ellipsoid 110), für welches

$$\frac{e^2}{a^2} = \frac{22}{1000}$$

ist. *Murdoch*'s Tafelwerk 111) ist uns leider unbekannt geblieben, indess entnehmen wir dem schon so häufig citirten Buche von *Kästner* 112) die Nachricht, dass diese Tafeln reichhaltig und geschätzt waren und dass speciell gegen die darin enthaltenen Regeln, die sphaeroidische Erde mercatorisch zu projiciren, von Zeitgenossen nur der Eine Vorwurf erhoben worden ist, es sei schade um eine so mühevolle Arbeit gewesen, ehe noch die Gradmessungen die unumgängliche erfahrungsmässige Basis für dieselbe geliefert gehabt hätten. Die Nachricht *Mollweide*'s 113), *Murdoch* habe als der Erste diese verbesserte Berechnung der Proportionaltheile in's Werk gesetzt, bedarf wohl insofern einer Berichtigung, als demselben eben sein Freund *Maclaurin* dabei seine theoretische Hülfe scheint zu Theil haben werden zu lassen.

Etwas durchsichtiger und bestimmter, als *Maclaurin*'s Analysis ist diejenige *Simpson*'s, und aus diesem Grunde ziehen wir es vor, letztere als Belegstück für die charakteristische Art und Weise solcher Untersuchungen der englischen Schule zu wählen. Das Problem wird mit folgenden Worten eingeführt 114): „To determine the Meridional Parts answering to any proposed Latitude, according to *Wright*'s Projection, apply'd to the true spheroidal Figure of the Earth.“ Die halbe grosse Axe gleich 1, die halbe kleine gleich d setzend und im Uebrigen von der gebräuchlichen Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{d^2} + y^2 = 1$$

der Ellipse ausgehend zeigt *Simpson*, dass für die in Theilen der Einheit ausgedrückte „Meridional Distance“ u folgende Gleichung bestehe:

$$\dot{u} = \frac{\dot{x}\sqrt{1+b^2x^2}}{1-x^2}.$$

Hier ist $b = \sqrt{d^2-1}$, $\dot{u}$ und $\dot{x}$ resp. die „Fluxion“ oder das Differential von u und x, welch' letztere Grössen als die „Fluenten“ bezeichnet werden. Wird x durch eine neue Variable, nämlich den Breiten-Sinus s, ersetzt, so wird

$$\dot{x} = \frac{d^2\dot{s}}{(d^2-b^2s^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und

$$\dot{u} = \frac{\dot{s}}{1-s^2} - \frac{db^2\dot{s}}{d^2-b^2s^2}.$$

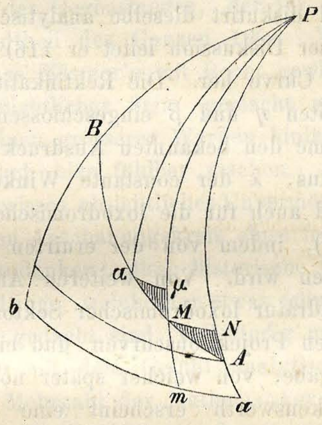
Für die Erde ergiebt hieraus die Integration, den Aequator-Umfang zu 21600 englische Meilen angenommen,

$$u = 3958 \log\frac{1+s}{1-s} - 3958\,\frac{b}{d}\,\log\frac{d+bs}{d-bs}.$$

Dieses Resultat lässt sich leicht in eine für die praktische Anwendung bequemere Regel umgestalten.

Von *Simpson*'s Art der Behandlung bis zu der vervollkommneten Systematik der durch *Euler* angebahnten Richtung ist nur noch ein verhältnissmässig kleiner Schritt; das Verdienst, denselben gethan zu haben, kommt dem Deutschrussen *Theodor Schubert* zu. „Universa ars nautica“, so beginnt derselbe 115), „sine difficultate reduci potest ad sequens problema: Dato situ duorum locorum, invenire cursum navis intermedium, sive angulum constantem, subquo omnes Meridianos secat directio navis, describentis in mari curvam, quae vulgo dicitur loxodromia.“ Vom Pole P (Fig. 13) aus sind die Quadranten Pb, Pm, Pa, letztere beide mit unendlich kleinem Winkelabstand, gezogen, diese Quadranten werden durch die Loxodrome resp. in B, M und A geschnitten. Die loxodromischen Dreiecke AMN und $M n \mu$ sind einander ähnlich. Ist dann $\angle\, PMB = \varphi$, $\angle\, APM = \psi$, b die in Theilen der grossen Halbaxe ausgedrückte kleine, $m = \frac{1}{b}$, so wird, wenn μ die Breite von M,

Fig. 13.



$$\mu n = \frac{m\,d\psi}{\sqrt{m^2+\mathrm{tg}^2\psi}},$$

$$M\mu = \frac{m\sec^3\mu\,d\mu}{(m^2+\mathrm{tg}^2\mu)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\varphi\cot\psi = \log\sqrt{\frac{1+\sin\mu}{1-\sin\mu}} - c\log\sqrt{\frac{1+c\sin\mu}{1-c\sin\mu}},$$

wo c die Excentricität der Meridian-Ellipse ist. Hieraus leitet sich, unter β die Breite des Punktes B und unter ε eine durch die Relation

$$\sin\varepsilon = c\sin\beta$$

damit verbundene Grösse verstanden, die weitere Formel ab:

$$bB = \log tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\beta) - c\log tg\,(45^0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon).$$

Für $c = o$ ist diess die uns bereits bekannte Wahrheit der Sphärik. *Schubert* beendet den theoretischen Theil seiner Studie mit den Worten: „Secundum hanc formulam tabula annexa a me computata est ad dena minuta elevationis poli. Columna secunda continet lineam *Bb* ex hypothesi sphaerica ... tertia eandem lineam datam ex hypothesi elliptica, seu quantitatem assumpta ratione axium Newtoniana seu $m = \frac{230}{229}$." Eine vierte Spalte ist für das Axenverhältniss $\frac{200}{199}$ berechnet.

§. 16. Wir sind mit *Schubert* in die zweite Hälfte des laufenden Jahrhunderts gelangt. Derselben gehört auch die ausführliche Monographie *Kästner*'s an, auf welche wir schon so häufig in diesem Hefte zu verweisen hatten, und welcher wir schon aus Gründen der Gerechtigkeit in dem Bewusstsein, ihr gar Manches zu danken zu haben, eine eingehendere Besprechung schulden. *Kästner* geht von dem allgemeinsten Begriff einer Loxodrome aus, entwickelt die demselben entsprechende Differentialgleichung und diskutirt dieselbe analytisch für Ellipsoid und Kugel. Aus dieser Diskussion leitet er 116) Vorschriften für die Construktion der Curve her. Die Rektifikation ergiebt für den zwischen den Breiten η und β eingeschlossenen Bogen der sphärischen Loxodrome den bekannten Ausdruck $r \sec \lambda\, (\eta - \beta)$, wo r der Kugelradius, λ der constante Winkel. Ein geschlossener Ausdruck, wird auch für die loxodromische Distanz des Sphaeroides gefunden 117), indem von der eruirten Reihe nur das erste Glied beibehalten wird. Von weiteren Anwendungen ist zu erwähnen die Quadratur loxodromischer Sektoren, die Behandlung der verschiedenen Projektionscurven und eine Ausdehnung der Fundamentalaufgabe, von welcher später noch zu reden sein wird. Sehr bemerkenswerth erscheint eine bergmännische Verwendung der Loxodrome; versteht man nämlich in bekannter Weise unter dem „Streichen eines Ganges" den Winkel, welchen an einer bestimmten Stelle eine dünne Metall-Ader mit dem Meridian bildet, so gilt Nachstehendes 118): „Soll des Ganges Streichen nach des Markscheiders Ausdruck immer einerley Stunde halten, erwähnter Durchschnitt, alle Meridiane unter einerley Winkel schneiden, so geschieht das Ausstreichen in einer loxodromischen Linie, deren loxodromischer Winkel das erwähnte Streichen des Ganges giebt;" an die Stelle der Schiffs-Boussole ist eben jetzt der Gruben-Compass getreten. Selbstverständlich sind jedoch die Strecken, welche für montanistische Zwecke thatsächlich in Betracht kommen, viel zu wenig ausgedehnt, als dass obige Theorie sich in nutzbare Praxis umzusetzen vermöchte. Die zweite Abtheilung des Kapitels ist den Seekarten mit wachsenden Breiten gewidmet; hier legt der

Verfasser insbesondere auch die gründlichste Vertrautheit mit allen Einzelheiten des Seewesens an den Tag. Interessant wird auch hier Vielen die Analogie in dem Rechnungsverfahren des Nautikers und des Markscheiders erscheinen 119): was dort loxodromische Distanz, Breitenunterschied und Längenunterschied (latus mekodynamicum, s. o. §. 11) ist, begegnet uns unter der Erde wieder als Seigerteufe, Sohle und Fläche. Den theoretischen Theil beendigt die ausführliche Beschreibung der loxodromischen Tabellen, zu deren Construktion neue Vortheile an die Hand gegeben werden. Damit jedoch ist noch *Kästner*'s löblicher, leider heutzutage mehr oder weniger veralteter, Gewohnheit das Thema noch nicht erschöpft, vielmehr beginnt jetzt erst die Darstellung der geschichtlichen Entwickelung des Gegenstandes, der für uns wenigstens verdienstlichste Bestandtheil des Ganzen 120). Wir wollen durchaus nicht leugnen, dass *Kästner*'n mit Recht gewisse Vorwürfe von mathematisch-geschichtlicher Seite gemacht werden, und dass einzelne der aus seinen grösseren Werken hinlänglich bekannten Missstände sich auch hier fühlbar machen. Als wesentlichsten möchten wir ein gewisses absichtliches Unvermögen bezeichnen, sich in den eigenartigen Anschauungskreis eines fremden Schriftstellers liebevoll hineinzudenken; diese historische Untugend verleitet nicht allein dazu, Dinge, welche nur etwas schwerfällig formulirt, sonst aber richtig gedacht sind, vollständig misszuverstehen*), sondern im Verein mit dem Gefühl analytischer Superiorität, welches dazumal die Mehrzahl der Mathematiker beseelte, führt es auch zur irrigen Werthschätzung der geometrischen Leistungen früherer Zeiten. Trotzdem bekennen wir gerne, die vielseitigste Förderung und Anregung bei dieser unserer eigenen Untersuchung dieser wie anderen Schriften eines verdienten Gelehrten zu verdanken, über dessen Thun abzusprechen gerade bei Denen mehr und mehr und Mode werden zu wollen scheint, welche hiezu die allergeringste thatsächliche Berechtigung besitzen.

§. 15. Der Leser würde nur ein unvollständiges Bild von dem Stande der loxodromischen Theorie im verwichenen Jahr-

*) Hierher rechnen wir besonders die Polemik gegen *Wallis* und *Lowitz*, weil bei derselben *Kästner* nicht einsehen will oder kann 121), dass jene Männer nichts anderes als die Vertauschung der Erdkugel mit dem ihr umbeschriebenen Cylinder im Auge gehabt haben.

hundert erhalten, wollten wir uns auf jene Bearbeitungen derselben einschränken, deren Tendenz eine rein-wissenschaftliche war. Ein unentbehrlicher Zusatz für letztere wird durch die nautische Literatur repräsentirt, welche in jenem Zeitraum ziemlich stattliche Dimensionen angenommen und beträchtlich an exakten Elementen gewonnen hatte. Da es aber für uns aus leicht übersehbaren Gründen unthunlich ist, jene Literatur im Detail zu verfolgen, so begnügen wir uns damit, drei Vertreter der drei bedeutendsten Kultur-Nationen vorzuführen, einen Deutschen, einen Engländer und einen Franzosen. Italiens Navigationswesen lag vorläufig noch in der Wiege, und einem Leserkreise, dessen praktische Thätigkeit kaum über die gewöhnlichste Küstenschiffahrt hinausgieng, konnten Werke im Sinne jener anderer Länder nicht geboten werden, mochte im Uebrigen auch das regste geistige Leben auf der appeninischen Halbinsel blühen.

Im Jahre 1718 erschien das kurzgefasste Compendium der gesammten Mathematik von *Kaschub*, ein handliches und im Sinne des *Wolf*'schen Systemes für jene Zeit geschickt gearbeitetes Büchlein. Als vorletztes Kapitel erscheint darin 122) „die Hydrographie, oder Schiffs-Kunst“; soweit uns nautische Werke aus dem achtzehnten Jahrhundert zu Gesicht gekommen sind, geht ihr Inhalt nicht beträchtlich über die engen Schranken hinaus, welche schon *Kaschub* sich gezogen hatte. Die Erklärung der Loxodrome und des loxodromischen Rechnens ist die gewöhnliche, die Quellen, auf welche der Autor selbst seine Darstellung zurückführt, sind *Wolf* und *Riccioli*. Eine Neuerung diesen Vorbildern gegenüber wird dadurch eingeführt, dass die continuirlichen Abweichungen von der loxodromischen Curve in Betracht gezogen werden, welche der Wind nöthig macht 123). Schliesslich folgt noch eine kurze Anweisung zum Gebrauche der Seekarten. Soviel wenigstens ist dem Binnenländer durch eigenes Nachdenken — denn aus der ihm zugänglichen Literatur war für diese Frage wenig zu entnehmen — klar geworden, dass die gewöhnlichen Plattkarten, oder, wie er schreibt, „die Schiff-Karten, welche man nur mit einer Rose der Gegenden machet,“ nur für sehr geringe Entfernungen brauchbar sind. Andererseits freilich verzweifelt er auch an der Möglichkeit, die rhombische Linie mit geometrischer Genauigkeit zu verzeichnen, seine verbesserte Projektionsart giebt die Parallelkreise durch gleichlaufende, die Meridiane durch convergirende gerade Linien wieder und ersetzt die Loxodrome durch eine Gerade, welche von ihr sehr wenig abweichen soll: „dass also diese Art von Schiff-Karten grosse perfection schon hat, indem sie auf eine simpele Art den Schiffern stattlich zu Hülfe kommet“ 124).

Die beste nautische Leistung war damals und blieb für lange das stattliche Handbuch *Bouguer*'s, des unermüdlichen Geodäten, des Entdeckers der Gebirg-Anziehung, des ersten wissenschaftlichen Bearbeiters der Photometrie. Der terrestrische wie der astronomische, der theoretische wie der mehr mechanische Gesichtspunkt finden hier gleichmässig Berücksichtigung und so wird denn auch „des lignes courbes que les rumbs de vent suivent sur le globe, et de la forme qu'on a été obligé en conséquence de donner aux cartes réduites“ 125) in weit sorgfältigerer Weise gehandelt, als es von den Mathematikern von Fach zu geschehen pflegt. Die Erklärung der Curve ist selbstverständlich eine geometrisch exakte, und die beigefügte Zeichnung gewinnt dadurch an Schärfe, dass die Boussole mit abgebildet ist und somit der Charakter einer bestimmten Himmelsrichtung als einer Tangente der Loxodrome schärfer hervortritt. Die geradlinige und loxodromische Schifffahrt sind indessen in Wirklichkeit nicht so grundverschieden, als man nach der abweichenden Gestalt der Curven vermuthen sollte, denn der nämliche Curs kann nur in den allerseltensten Fällen eingehalten werden, sondern setzt sich, um Inseln zu vermeiden, günstige Winde zu benützen, aus sehr vielen sehr kleinen Curvenstücken zusammen. Immerhin ist es nöthig, die Loxodromen richtig und bequem in eine für diesen Zweck hergerichtete Karte eintragen zu können; für letztere wird die *Mercator*'sche Projektion gewählt und in folgender einfacher Weise beschrieben. Die Länge einer Aequator-Minute wird $= 100000$ gesetzt, und nunmehr der Sinus für $89^0\,59'$, $89^0\,58'$, $89^0\,57' \ldots$ in Theilen dieser Einheit ausgedrückt, um sodann die reciproken Werthe auf der senkrecht zum Aequator errichteten Meridianlinie abzutragen und so diejenigen Punkte zu erhalten, durch welche die jenen Breiten entsprechenden geradlinigen Parallelen hindurchgehen müssen; indem nämlich jene reciproken Werthe die Grösse der einzelnen Bogenminuten des Meridians für die bezüglichen Polhöhen angeben, hat man nur alle vorhergehenden Sekanten zu einander addiren, um zum bestimmten Theilpunkt zu kommen. Die Grösse der gewählten Einheit wird den unvermeidlichen Fehler des Verfahren unschädlich machen. Das folgende Kapitel lehrt die Auflösung aller Aufgaben der Steuermannskunst durch blosse Abmessung auf der reducirten Karte, indem auf dieser die Behandlung des loxodromischen Dreieckes in ein sehr einfaches Constructionsproblem der Planimetrie übergeht. Dabei wird jedoch ausdrücklich hervorgehoben 126), dass all' diejenigen Fälle, welche der astronomischen Controlen entbehren, wo also insbesondere die nur näherungsweise zu schätzende loxodromische Distanz als bekannte Grösse auftritt, an Genauigkeit hinter dem anderen zurückstehen. Gegen dass Ende seines Werkes kommt *Bouguer* nochmals auf diesen Cyklus von Aufgaben zurück, indem er zu ihrer generellen Lösung sich eines neuen Hülfsmittels, des sogenannten „quartier de reduction", bedient 127). Derselbe besteht aus einem Rechteck, welches durch äquidistante horizontale und vertikale Gerade in eine Menge kleiner Quadrate getheilt ist; zu gleicher Zeit findet sich eine grosse Anzahl concentrischer Quadranten vor, deren Mittelpunkt mit der einen Ecke des Vierecks zusammenfällt. Diese Reduktionsplatte dient als eine Art von Hülfskarte: „le quartier de réduction est comme une carte qui convient à tout les endroits du globe terrestre. On pointe, pour ainsi dire, les routes sur cet instrument, et après avoir vu la latitude et la longitude où elles conduisent, on transporte le point sur la carte reduite." Indem man natürlich dieses Schema auf ein Blatt Papier legt und von dem Kreiscentrum einen die loxodromische Richtung signalisirenden Faden ausgehen lässt, kann man auf jenem rechtwinklige Dreiecke von bestimmten Verhältnissen abstecken und dieselben sodann auf die Seekarte übertragen. Endlich wird auch noch gezeigt, wie alle Fragen, deren Erledigung bisher entweder auf geometrischem Wege oder aber graphisch-mechanisch erfolgt war, auch durch trigonometrische Rechnung mit weit grösserer Schärfe behandelt werden können. Hiebei kann dann wieder ein Ersatz des Rechnens auf dem Papiere durch jenen logarithmischen Rechenstab stattfinden, dessen Anwendung sich auf den oben erwähnten, von *Halley* zuerst bewiesenenen Lehrsatz gründet. Vermuthlich aus diesem Grunde führt dieses Instrumentchen, dessen Gebrauch bei gebildeten Seeleuten beliebt gewesen zu sein scheint, den Namen „Echelle Angloise." Natürlich kommen die verschiedenen Methoden, deren

wir hier zu gedenken hatten, zunächst nur auf der als sphärisch angenommenen Erde zur Anwendung; anhangsweise wird jedoch auch den Correktionen Rechnung getragen 128), welche in der Erd-Abplattung ihren Grund haben; zu diesem Zwecke verzeichnet *Bouguer* die Evolute der Meridian-Ellipse, legt eine Tangente an diese und zeigt, dass der so erhaltene Krümmungshalbmesser eines bestimmten Ellipsen-Punktes mit dem von diesem Punkt ausgehenden Radius nicht identisch sei, woraus sich dann gewisse Modifikationen in der Berechnung der Proportionaltheile ergeben. Dass *Bouguer* auch gelegentlich die stereographische Projektion der Loxodrome durch elegante construktive Betrachtungen bestimmt, sei nur als eine Probe der das ganze Werk charakterisirenden Vereinigung von mathematischer Sagacität und praktischem Nützlichkeitssinn angeführt.

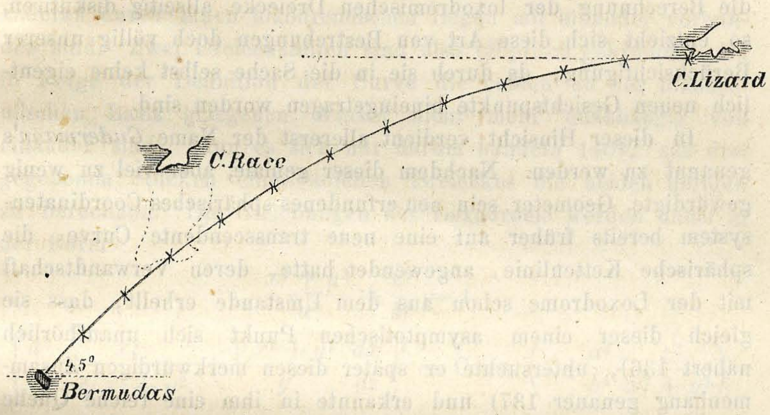
Was *Bouguer* für Frankreich, das versuchte *Robertson* für England zu leisten; auch ihm stand die volle mathematische Bildung seines Zeitalters zur Seite*), und da zudem beide Werke fast gleichzeitig das Licht der Welt erblickten, so dürfen wir mannigfache Analogieen zwischen denselben der Natur der Sache nach für wahrscheinlich erachten. Gleichwohl stellt sich insofern ein tiefgehender Unterschied heraus, als *Bouguer* nur für gebildete Seeleute schreibt, während *Robertson*, der ja aus diesem Grunde auch die Elemente der Mathematik mit aufgenommen hat, die Bedürfnisse jeder Klasse in's Auge fasst, und während Ersterer das Segeln nach gewöhnlichen Plattkarten mit einigen wenigen Worten abfertigt, trägt sein englischer College diesem primitiven Verfahren ausgiebig Rechnung. Er unterscheidet 130) sorgfältig die „plane charts" von den „globular charts, or Mercators charts, or reduced charts, or projected charts" und demzufolge auch das „plane sailing" vom „globular sailing". Jedem dieser beiden Complexe von Regeln und Handgriffen wird ein eigener ausgedehnter Abschnitt gewidmet; für unsere Anschauung wird freilich dem erstgenannten, dessen Brauchbarkeit sich auf einen so engen Kreis beschränkt, eine viel zu

*) Als ein wohl weniger bekannter Beleg für diese unsere Behauptung mag gelten, dass nach *Van Swinden*'s competentem Urtheile 129) der von *Robertson* eingeschlagene Weg, goniometrische Formeln aus der Figur zu deduciren, durch mustergültige Einfachheit sich auszeichnet. Auch bei *Torelli*'s berühmter Euklid-Ausgabe war Derselbe betheiligt.

liebevolle Behandlung zu Theil, und der Autor selbst giebt sich durch die von ihm mitgetheilte Karte des atlantischen Oceans eine Art von Dementi. Der Grundfehler dieser ganz und gar irrthümlichen Abzeichnungsweise — von Projektionsmethode lässt sich wohl kaum sprechen —, alle meridionalen Distanzen zusammenzudrücken und dafür die west-östlichen Dimensionen unnatürlich auseinanderzuzerren, tritt hier ganz besonders augenfällig hervor, und zumal die nördlichen Länder Island und Grönland sind nichts weiter als bizarre Karrikaturen. Um so wohlthuender berührt die loxodromische Theorie, welche mit dem zweiten Bande beginnt und für den Lernenden, *Bouguer*'s Darstellung gegenüber, wohl den Vortheil hat, dass er hier alles Wissenswerthe in naturgemässer und übersichtlicher Anordnung vorfand und nicht erst, wie dort, an verschiedenen Stellen seines Compendiums zusammenzusuchen gezwungen war. Die Begründung der Eigenart einer correkt-cylindrischen Projektion stützt sich auf das Theorem 131): „The logarithmic tangents of the half complements of the latitudes, are analogous to the lengthened degrees in the nautical meridian line", und für dieses wird der Beweis wiederum mittelst stereographischen Projicirens geführt. In dieser Form neu und jedenfalls nur induktorisch gefunden ist das Verfahren, einen Meridiantheil aus der sphärischen in die sphäroidische Hypothese zu übertragen 132): „Say, As Radius is to the sine of any given latitude, So is the constant number 30 to the correction sought. Subtract the correction from the spheric meridional parts to the latitude used, and the remainder is the spheroidal meridional parts to that latitude." Als eine für die Geschichte der Erdkunde im engeren Sinne bemerkenswerthe Thatsache machen wir endlich *Robertson*'s Cursschema namhaft, aus welchem die Durchkreuzung des Weltmeers, wie sie um die Mitte des vorigen Jahrhunderts in Uebung war, klar ersichtlich ist. Die Westspitze von Cornwall ist mit den Bermudas-Inseln durch einen gebrochenen Linienzug von zwölf Seiten verbunden, deren erste mit dem durch Cap Lizard gehenden Parallel übereinstimmt, während die zwölfte den Parallel von Bermudas ungefähr unter einem halben rechten Winkel trifft. Land wird auf dieser Route nicht berührt, nur die vor New-Foundland hinziehende Bank in ihren Ausläufern geschnitten, wie aus Fig. 14 ersichtlich ist. Da die einzelnen Unterbrechungen im Compassstrich jedenfalls den herrschenden Wind-

richtungen erfahrungsmässig angepasst waren, so kann diese Auswahl eines Weges bereits als ein Vorspiel zu der von *Maury* zu so hoher Vervollkommnung gebrachten Methode gelten, unter allen zwei Punkte verbindenden loxodromischen Polygonalzügen das thatsächliche Weg-Minimum herauszufinden.

Fig. 14.



§. 16. Wir könnten, nachdem wir alle bedeutenderen literarischen Erscheinungen des achtzehnten Jahrhunderts vor unseren Augen haben vorüberziehen lassen, insoweit dieselben auf den Gegenstand unserer Ueberschrift Bezug haben, diese historische Untersuchung mit allem Rechte abschliessen, denn was im Verlaufe dieses unseres eigenen Säkulums, also der allerneuesten Zeit, geleistet worden, gehört der Geschichte noch nicht eigentlich an. Allein während auf den meisten Wissensgebieten die Forschung gerade jetzt im lebhaftesten Flusse ist und als alles andere eher denn als abgeschlossen angesehen werden kann, hat die Theorie der loxodromischen Curve, sei es dass man sich an ihre mathematische, sei es, dass man sich an ihre nautisch-geographische Seite hält, eine so vollständig abgerundete Gestalt erhalten, dass im Interesse der Vollständigkeit eine Fortführung der geschichtlichen Betrachtung geradezu geboten erscheint. An und für sich einleuchtend ist es jedoch, dass diese Aufgabe nur mit gewissen Einschränkungen zu lösen ist. Wenn Geodäten, wie der jüngere *Tobias Mayer* 133) oder *J. J. v. Littrow* 134) gelegentlich nebst anderen Projektionsmethoden auch der *Mercator*'schen einige Paragraphe widmen, oder wenn Mathematiker wie *Brandes* 135) über die Schifffahrtslinie als Beispiel einer Curve doppelter Krümmung ihre — in diesem Falle übrigens nicht fehlerfreien — Betrachtungen anstellen, oder wenn endlich nautische Werke, wie deren die deutsche Literatur von *Bobrik*, *Rümker*, *Albrecht & Vierow*, *Paugger* u. a. eine stattliche Zahl aufweist, die Anfertigung des „Bestecks" und die Berechnung der loxodromischen Dreiecke allseitig diskutiren, so entzieht sich diese Art von Bestrebungen doch völlig unserer Berücksichtigung, da durch sie in die Sache selbst keine eigentlich neuen Gesichtspunkte hineingetragen worden sind.

In dieser Hinsicht verdient allererst der Name *Gudermann*'s genannt zu werden. Nachdem dieser geniale, aber viel zu wenig gewürdigte, Geometer sein neu erfundenes sphärisches Coordinatensystem bereits früher auf eine neue transscendente Curve, die sphärische Kettenlinie, angewendet hatte, deren Verwandtschaft mit der Loxodrome schon aus dem Umstande erhellt, dass sie gleich dieser einem asymptotischen Punkt sich unaufhörlich nähert 136), untersuchte er später diesen merkwürdigen Zusammenhang genauer 137) und erkannte in ihm eine reiche Quelle interessanter räumlicher Beziehungen. Wir glauben indess darauf hinweisen zu dürfen, dass die Verwandtschaft der Loxodrome mit der ebenen Katenoide, wenn auch zunächst in Folge einer anderen Ideenverbindung, bereits von dem Engländer *Perks* (s. o. §. 12) bemerkt worden war. Manch' Neues mag wohl auch in einer Monographie *Verdam*'s 138) zu finden sein*). Eine grundsätzliche Vervollkommnung der Theorie selbst konnte in zwiefacher Hinsicht angestrebt werden: Man konnte von der durch die Nautik geschaffenen Basis ausgehen und sich die Frage vorlegen, ob nicht die loxodromische Trigonometrie auf dem Sphäroid eine andere und zwar sowohl umfassendere als auch exaktere Behandlung zulasse, als ihr bislang zu Theil geworden war; man konnte auch von dieser immerhin noch speziellen Fassung absehen und einzig und allein die Geometrie der Curve auf der Fläche selber zum Studien-Objekt wählen. Diese beiden Auffassungen kommen

*) Wir kennen von dieser Schrift — durch die freundliche Mittheilung von Herrn *Bierens de Haan* in Leyden — ausser dem Titel nur die Eigenschaft, dass jene mit einer Reihe unübertrefflich schön gestochener Figurentafeln ausgestattet ist; zu verschaffen vermochten wir sie uns nicht.

resp. in den Monographieen von *Grunert* und *Plagemann* zur Durchführung.

Das loxodromische Dreieck wird von Ersterem 139) in etwas anderer Weise definirt, als wir es bei der überwiegenden Mehrzahl der bisherigen Schriftsteller wahrnahmen: die eine Ecke desselben liegt nämlich jetzt für immer im Pole, während die beiden anderen durch einen loxodromischen Bogen mit einander verbunden sind. Zwei Dreiecksseiten sind also elliptisch gekrümmt. Da in Folge der Definition der Curve die beiden an der loxodromischen Basis gelegenen Winkel nicht mehr unabhängig von einander sind, kann es sich nur darum handeln 140), aus drei gegebenen Stücken eines solchen Dreieckes die beiden übrigen zu berechnen. Die Gleichungen der Loxodrome werden dabei in der Form

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

$$\left[\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{xz}{y\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}\cdot\frac{dx}{dz}\right]^2=\text{Const.}\left(1+\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{z^2}{x^2+y^2}\right)$$

zu Grunde gelegt. Natürlich können wir an diesem Orte der Vorlage nicht in ihren Einzelheiten folgen; es muss genügen, zu sagen, dass sämmtliche vorerwähnte Aufgaben, sei es mit Hülfe vorausberechneter Tafeln, sei es durch Entwickelung gewisser Ausdrücke in rasch convergirende und deshalb frühzeitig abzubrechende Reihen, weit genauer aufgelöst werden, als es früher der Fall war. Manche dieser Lösungsformeln gewinnen für eine kugelförmige Erde eine überraschende Eleganz; sollen z. B. aus der Längendifferenz Ω, dem constanten Curswinkel Θ und der Distanz s die Breiten B und B_1 für die Orte der kleineren und grösseren Länge gefunden werden, so berechnet man zunächst einen Hülfswinkel φ aus der Gleichung $\log tg\,\varphi = \Omega \cot \Theta \operatorname{arc} 1'$ und hat dann 141)

$$B = \operatorname{arc}\cos\left(-\sin\left(\tfrac{1}{2}s\cos\Theta\right)\cot\left(45^0-\varphi\right)-\tfrac{1}{2}s\cos\Theta\right),$$

$$B_1 = B + s\cos\Theta.$$

Als ein Anfang zu der besprochenen Schrift erschien kurz nachher ein Aufsatz *Grunert*'s, welcher das Problem der Quadratur für loxodromische Dreiecke möglichst allgemein auffasst und löst. Es gelingt sogar, für den Flächeninhalt eines von drei ellipsoidischen Loxodromen eingeschlossenen Dreiecks einen geschlossenen

Ausdruck aufzustellen, welcher für den Fall einer verschwindenden Excentricität der Meridianellipse folgende überaus einfache Form annimmt 142):

$$r^2\left(tg\,\Theta_0 \log\frac{\cos B_1}{\cos B_2} + tg\,\Theta_1 \log\frac{\cos B_2}{\cos B_0} + tg\,\Theta_2 \log\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\right).$$

Hier ist r der Kugelradius, $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$ sind bezüglich die Curswinkel der drei Dreiecksseiten, B_0, B_1, B_2 die Polhöhen der drei Eckpunkte, die Längen bleiben wie bei jeder Rotationsfläche ausser Betracht.

Die andere oben namhaft gemachte Abhandlung von *Plagemann* 143) beginnt mit einer generellen Diskussion der fraglichen Linie, wendet sich dann zu deren Rektifikation, wobei für die ganze Ausdehnung derselben innerhalb zweier Pole der Ausdruck 144) (e die numerische Excentricität)

$$\frac{a\pi}{\cos\Theta}\left(1-\frac{1}{2^2}e^2-\frac{1\,.\,3}{2^2\,.\,4^2}e^4-\frac{1\,.\,3^2\,.\,5}{2^2\,.\,4^2\,.\,6^2}e^6-\ldots\right)^{*)}$$

gewonnen wird, untersucht die Verhältnisse der Normal- und Schmiegungsebene und stellt überhaupt ein fixes Formelsystem auf, mittelst dessen jede irgendwie auf die Loxodrome bezügliche Frage unmittelbar soll beantwortet werden können. Auch auf die (s. o.) von *Gudermann* zur Loxodrome in Beziehung gesetzte sphärische Katenoide wird durch den Nachweis 145) helles Licht geworfen, dass dieselbe durch jene Regelfläche, auf welcher die Durchschnittslinie aller consekutiven Normalebenen gelegen sind, auf der Kugelfläche ausgeschnitten wird. Es erscheint somit das *Plagemann*'sche Elaborat als eine monographische Darstellung der ganzen Theorie, über deren Ergebnisse die gewöhnliche Coordinatengeometrie nicht mehr weit hinausgehen kann. Dass natürlich allgemeine Vereinfachungen der analytischen Praxis auch auf diesen Spezialfall influiren, versteht sich von selbst; so erleichtert z. B. die Form des Ausdruckes, welche *Baehr* für den Schnittwinkel zweier beliebigen Raumcurven angiebt, die Ableitung der

*) Das allgemeine Glied dieser merkwürdigen und rapid abnehmenden Reihe würde folgendes sein:

$$\frac{\prod\limits_{p=1}^{p=n-3}(2p+1)^2\,.\,(2n-3)\,.\,e^{2(n-1)}}{\prod\limits_{p=1}^{p=n-1}(2p)^2}.$$

loxodromischen Fundamentalgleichung und das Operiren mit derselben 146).

Schon mehrfach musste von uns auf das bemerkenswerthe Reciprocitätsverhältniss hingewiesen werden, in welchem die loxodromische Schifffahrt zu derjenigen auf dem grössten Kugelkreise steht; bereits ältere Autoren, wie *Stevin* und *Riccioli*, sahen wir volles Verständniss für die Nothwendigkeit dieses Verhältnisses an den Tag legen. Das Segeln auf der kürzesten Distanz gehört an und für sich allerdings nicht in unser Gebiet, da jedoch, von astronomischen Beobachtungen abgesehen, der Pilot kein anderes Hülfsmittel zur Richtungsbestimmung besitzt, als seinen Compass, so kann auch ein scientifisches Verfahren für die geradlinige Schifffahrt nicht ohne Rücksichtnahme auf die loxodromische ausgebildet werden. *Grunert*, dem die zu seiner Zeit gangbaren Anweisungen für diesen Zweck zu wenig wissenschaftlich erschienen, und der deshalb selbe systematisch zu begründen bemüht war, hebt besonders mit Bestimmtheit hervor, dass absolut strenge Regeln überhaupt nicht existiren könnten: „dass hier überhaupt nur von einer Näherungsmethode die Rede sein kann, versteht sich von selbst, weil ja in der Praxis eine stetige Veränderung des Curses, die das Segeln auf dem grössten Kreise erfordern würde, wenn sich auch ein einfaches theoretisches Gesetz derselben angeben liesse, unmöglich ist, indem der Schiffer immer und unter allen Umständen genöthigt sein wird, einige Zeit lang denselben Curs zu halten, also auf einer Loxodrome zu segeln" 147). Der Grundgedanke *Grunert*'s ist der, die Längendifferenz und damit auch die kürzeste Distanz der beiden Erdorte A und B je in n gleiche Theile zu theilen, unter n eine vorläufig noch unbestimmte ganze Zahl verstanden, zwischen je zwei Theilpunkten des Kreisweges die loxodromischen Strecken $s_{0,1}$, $s_{1,2}\ \ldots\ s_{n-1,n}$ auszuspannen und nun aus der Vergleichung des loxodromischen Gesammtweges

$$S_1 = s_{0,1} + s_{1,2} + \ldots + s_{n-1,n}$$

mit dem Kreiswege

$$S_1 = \text{arc}\cos(\sin\beta_1\sin\beta_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\lambda_1-\lambda_2))$$

einen dem praktischen Bedürfniss genügenden Werth von n abzuleiten, durch dessen Annahme S_1 und S_2 einander hinreichend nahe gebracht werden 148). Man bemerkt unverzüglich, dass der Lösung dieser Aufgabe durch passend eingerichtete Hülfstafeln beträchtlich vorgearbeitet werden kann, und in der That verzeichnet die Fachliteratur der neuesten Zeit unterschiedliche hierauf abzielende Untersuchungen, unter welchen wir hier nur derjenigen *v. Friesach*'s 149) Erwähnung thun wollen.

Als unerlässliche Consequenz des angedeuteten Näherungsverfahrens stellte sich nun aber diesem Mathematiker die Nothwendigkeit heraus, die Länge eines zwischen den nämlichen Grenzpunkten sich hinziehenden Kreis- und Loxodromenbogens schärfer unter einander zu vergleichen, als es vordem geschehen war; diese keineswegs leichte Aufgabe ist unlängst von ihm in einer selbstständigen kleinen Monographie 150) behandelt und insoweit gelöst worden, als es die Natur des Gegenstandes gestattet. Unter α die loxodromische Distanz zweier Punkte, unter φ die Breite des einen von diesen verstanden, kann man den Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ gleich Null setzen und aus dieser Gleichung, sofern sie eine explicite Auflösung gestattet, die innerhalb jenes Bereiches möglichen Maxima und Minima entnehmen. Ersteres ist nun freilich nicht der Fall, jedoch gelingt es auf indirektem Wege festzustellen 151), dass sämmtliche Maxima in der höchst merkwürdigen Formel

$$\frac{\delta}{D}\sqrt{\pi^2 + D^2}$$

enthalten sind, wo δ die Breitendifferenz, D aber für den sphärischen Weg β den Ausdruck

$$\log\frac{1+\cos\frac{\beta-\delta}{2}}{\sin\frac{\beta-\delta}{2}} - \log\frac{1+\cos\frac{\beta+\delta}{2}}{\sin\frac{\beta+\delta}{2}}$$

bedeutet; auch die kleinsten Werthe lassen sich hiernach angeben. Mit der Angabe dieser Extreme ist aber *v. Friesach*'s Forderung erfüllt, und Alles Weitere kann einer blossen Interpolation überlassen bleiben.

§. 17. Gleichgültig für jene Gattung von Fragen, durch welche man auf das Studium der Loxodromie erstmalig hingeleitet wurde, dafür jedoch theoretisch anziehend ist es, solche Curven auch auf anderweiten Rotationsflächen zu verfolgen. Halten wir jedoch auf diesem Felde Umschau, so ist die Ausbeute nicht eben gross, und wenige Worte werden ausreichen, unsere Zusammenstellung auch nach dieser Richtung hin zu vollenden. In erster Linie wird hier natürlich an die Cylinder-Loxodrome zu denken sein, an die gewöhnliche Schraubenlinie. Nach freilich sehr unverbürgten Nachrichten 152) stammt deren Kenntniss von *Archytas*; jedenfalls hat *Archimedes* dieselbe gekannt und *Pappus* sowohl geometrisch 153) als auch mechanisch 154) deren Eigenschaften untersucht. Späterhin hat sich besonders der Marchese *Guidubaldo del Monte* 155) mit ihr beschäftigt, und schon in verhältnissmässig sehr früher Zeit war man mit der Theorie der Schraubencurve völlig im Reinen. Was die Kegel-Loxodrome angeht, so scheinen dahin zielende Ideen sich ebenfalls erstmalig in der „mathematica collectio" des *Pappus* vorzufinden 156). Den speziellen Fall einer „Loxodrome auf dem gleichseitigen Kegel"*) hat *Kästner* in seiner mehrfach angezogenen Studie abgehandelt 157); er stellt ihre Gleichung auf und beweist die Wahrheit, dass ebenso wie bei der Kugel die stereographische, so hier die orthographische Projektion der Curve auf die Basis eine logarithmische Spirale liefert. Die Rektifikation dieser Linie scheint zuerst von *Dienger* 158) angegeben worden zu sein. Unlängst endlich hat *Enneper* die Frage von Neuem vorgenommen und die reichhaltigen Hülfsmittel der modernen analytischen Geometrie hiebei zur Anwendung gebracht 159).

Mit dem ganz allgemeinen Falle einer Rotationsfläche hatten sich, wie wir sahen, *Walz* und *Kästner* beschäftigt und denselben auch soweit gefördert, dass selbst die neuere Zeit ihren Ergebnissen nichts Wesentliches hinzuzusetzen fand. Die Differentialgleichung der Loxodrome findet man, in einfacherer Art hergeleitet und unter gewissen Bedingungen integrirt, in dem klassischen Werke von *Joachimsthal* 160). Alles aber, was sich über den Gegenstand unter den gegenwärtigen veränderten Verhältnissen sagen lässt, wird man in der grossen und umfassend angelegten Arbeit *Biehringer*'s antreffen. Derselbe beginnt damit, die Projektionsgleichungen für solche Curven auf Rotationsflächen aufzustellen, bei welchen das längs der Curve verschobene Elementardreieck nicht lediglich sich selbst ähnlich bleibt, sondern nach

*) Das Wort „gleichseitiger Kegel" weist nicht etwa, wie diess neuerdings üblich wird, auf einen Axenwinkel von 60° hin, sondern bedeutet einfach den geraden im Gegensatz zum schiefen Kegel, welch' letzterer damals ein Lieblingsgegenstand für analytische Arbeiten war.

einem bestimmten vorgegebenen Gesetze variirt 161): er generalisirt also die übliche Fassung des loxodromischen Problems in bemerkenswerther Weise. In weiteren Verlaufe werden diejenigen Curven diskutirt, welche unter dem Einfluss verschiedener Impulse durch ein auf der Fläche verharrendes Mobil beschrieben werden; die Fälle, in welchen diese Curven loxodromisch ausfallen oder nicht, werden unterschieden, und so stellt sich beispielsweise die für die *Escher-Desor*'sche Föhntheorie in negativem Sinne wichtige Thatsache heraus 162), dass die Bahn der Stürme auf der rotirenden Erde keine Loxodrome ist. Die dritte Abtheilung hat es speciell mit den „Schifffahrtscurven" zu thun, welche dann, wenn ausser einem constanten Winde gar kein weiterer Bewegungsantrieb existirt, in gewöhnliche Loxodromen degeneriren 163). Gewiss bietet das von *Biehringer* cultivirte Gebiet auch für die Zukunft noch manche Ausbeute, und besonders bei der immer entschiedener auftretenden Annäherung der Meteorologie an die Mathematik wird sich Gelegenheit zu weiteren Fortschritten in dieser Richtung ergeben; ähneln doch, um nur eines naheliegenden Beispieles zu erwähnen, die einem fixen barometrischen Minimum zugewandten Windcurse nach *Buys-Ballot*'s Gesetz insoferne gar sehr den Loxodromen, als sie ebenso 164) in unendlich vielen Windungen um jenen Minimalpunkt als Pol sich herumlegen.

Wir sind zu Ende. Die loxodromisch-nautische Praxis mag in einzelnen Punkten noch mancher Vervollkommnung bedürftig und fähig sein, der loxodromischen Theorie durch Verbesserung der Untersuchungsmethoden und Verallgemeinerung der ursprünglichen Grundlage noch manche dem Mathematiker werthvolle Bereicherung erwachsen — die Grundzüge des Ganzen werden durch solche Fortschritte in keiner Weise mehr erschüttert oder verändert werden. Diese Erwägung hat uns bestimmt, den im Laufe seiner natürlichen Entwickelung von selbst zu einer gewissen Vollendung gelangten Gegenstand geschichtlich zu skizziren, und wir hoffen damit keine unnütze Arbeit gethan zu haben.

---

1) *H. Martin*, Observations et théories des anciens sur les attractions et les répulsions magnétiques et sur les attractions électriques, Rome 1865. S. 11.

2) *Johann Leonhard Rosten*'s astronomisches Handbuch, neue Auflage von *Kordenbusch*, 1. Band, Nürnberg 1771. S. 25.

3) *Peschel-Ruge*, Geschichte der Erdkunde bis auf *Alexander v. Humboldt* und *Carl Ritter*, München 1877. S. 205.

4) *Raymundi Lulli* Opera, Argentorati 1651. S. 553.

5) *Ausserer*, Geschichte der Magnetnadel, Troppau 1876.

6) *A. v. Humboldt*, Kritische Untersuchungen über die historische Entwickelung der geographischen Kenntnisse von der neuen Welt und der Fortschritte der nautischen Astronomie im 15. und 16. Jahrhundert, deutsch von *Ideler*, 1. Band, Berlin 1852. S. 31.

7) Ibid. 1. Band, S. 239.

8) Ibid. 3. Band, S. 119.

9) *Peschel-Ruge*, S. 208.

10) Ibid. S. 216.

11) *Röhl*, Einleitung in die astronomischen Wissenschaften, 2. Theil, Greifswald 1779. S. 318.

12) *Martin Cortes*, Breve compendio de la sphera y de la arte de navegar, con nuevos instrumentos y reglas, exemplificado con muy subtiles demonstraciones, Sevilla 1556. Bl. 67, 1.

13) *Pedro de Medina*, Arte de navegar en que se contienen todas las Reglas, Declaracions, Secretos y Avisos, q̃ a la buena navigacio son necessarios, y se deven saber, Valladolid 1545. Bl. 30, 1.

14) *Peschel-Ruge*, S. 220.

15) *Raymundus Lullus*, S. 550.

16) *Günther*, Der Martologio, eine nautische Rechnungsregel des Mittelalters, (Erscheint i. d. „Geogr. Rundschau").

17) *Röhl*, S. 27.

18) *Toaldo*, Saggi di studi Veneti, In Venezia 1782. S. 41.

19) Ibid. S. 43 ff.

20) Ibid. S. 48.

21) Ibid. S. 53 ff.

22) *A. v. Humboldt*, 3. Band, S. 95.

23) *Toaldo*, S. 55.

24) Ibid. S. 60 ff.

25) *Chasles*, Geschichte der Geometrie, deutsch von *Sohncke*, Halle 1839. S. 571.

26) Ibid. S. 136.

27) *Garção-Stockler,* Ensaio historico sobre a origem e progressos das mathematicas em Portugal, Pariz 1819. S. 29 ff.

28) Ibid. S. 140.

29) *Petri Nonii Salaciensis* Opera, Basileae 1566.

30) Ibid. S. 158.

31) *Baltzer,* Die Elemente der Mathematik, 2. Band, Leipzig 1870. S. 187.

32) *Jacoli,* Evangelista Torricelli ed il metodo delle tangente detto metodo di Roberval, Bullet. delle scienze mat. e fis., Tomo VIII. S. 265 ff.

33) *Nonius,* S. 164.

34) Ibid. S. 187.

35) *Kästner,* Geschichte der Mathematik, 2. Band, Göttingen 1797. S. 374 ff.

36) *Quetelet,* Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges, Bruxelles 1871. S. 163 ff.

37) Les oeuvres mathématiques de Simon Stevin de Bruges, Le tout reveu, corrigé et augmenté par *Albert Girard,* A Leyde 1634. S. 142.

38) Ibid. S. 145.

39) *Kästner,* Weitere Ausführung der mathematischen Geographie, besonders mit Rücksicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde, Göttingen 1795. S. 422. *)

40) *Stevin,* S. 147.

41) *Schanz,* Der Kardinal Nikolaus von Cusa als Mathematiker, Rottweil 1872. S. 22.

42) *Stevin,* S. 162.

43) *Vosterman van Oyen,* Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVI[me] et du commencement du XVII[me] siècle et leurs instruments, Rome 1870. S. 31.

44) *Wolf,* Geschichte der Astronomie, München 1877. S. 286 ff.

45) *Breusing, Gerhard Kremer,* genannt *Mercator,* der deutsche Geograph, Duisburg 1869. S. 13 ff.

46) Ibid. S. 57.

47) *Mollweide,* Berichtigung einer Stelle in den neuen Allgemeinen geograph. Ephemeriden, Monatl. Corresp. z. Beförder. d. Erd- u. Himmelskunde, 14. Band, S. 489 ff.

*) Künftig schlechthin: *Kästner.*

48) *Peschel-Ruge,* S. 412.

49) *Wright,* Certain errors in navigation detected and corrected, London 1599.

50) Ibid. Cap. IV.

51) *Kästner,* S. 350.

52) *Curtze,* Reliquiae Copernicanae, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 20. Jahrg., S. 282.

53) *Stevin,* S. 166.

54) Ibid. S. 168.

55) *Hues,* Tractatus de globis coelestibus et terrestribus, Francofurti (ohne Jahreszahl).

56) *Snellius,* Tiphys Batavus, sive Histiodromice, de navium cursibus, et re navali, Lugduni Batavorum 1624. S. 17.

57) Ibid. S. 20.

58) Ibid. S. 23.

59) Ibid. S. 25.

60) *Kästner,* S. 380.

61) *Snellius,* S. 31.

62) Ibid. S. 10 ff.

63) Ibid. S. 42.

64) Ibid. S. 54.

65) Ibid. S. 63 ff.

66) *Bruhns-Wiedemann, Alexander von Humboldt.* Eine wissenschaftliche Biographie, 3. Band, Leipzig 1872. S. 61.

67) *Snellius,* S. 83.

68) *Bouguer,* Nouveau Traité de Navigation contenant la Théorie et la Pratique du Pilotage, A Paris 1753. S. 119.

69) *Alstedius,* Encyclopaedia, Herbornae 1630. Lib. III, sect. 7; Lib. XXX, sect. 6.

70) *Herigone,* Cursus Mathematicus, Tome IV., A Paris 1644. S. 433 ff.

71) *Fournier,* Hydrographie, A Paris 1643. S. 675 ff.

72) *Varenius,* Geographia generalis, Amstelodami 1650. S. 717 ff.

73) *Deschales,* Mundus Mathematicus, Tomus III., Lugduni 1690. S. 315 ff.

74) *Riccioli,* Geographiae et Hydrographiae reformatae nuper recognitae et auctae libri duodecim, Venetiis 1672. S. 466.

75) Ibid. S. 467.

76) *Bouguer,* S. 120.

77) *Leibnitz,* Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum quae centrum habent, indeque ducta trigonometria canonica ad quantamcunque in numeris exactitudinem a tabularum necessitate liberata: cum usu spirali ad lineam rhomborum nauticam, aptatumque illi planisphaerium, Acta Erud. Lips. 1691, S. 181 ff.

78) *Studnička, A. Cauchy* als formaler Begründer der Determinantentheorie, Prag 1876. S. 12.

79) *J. Bernoulli,* Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromia nautarum, et areis triangulorum sphaericorum: una cum additamento quodam ad problema funicularium, aliisque, Acta Erudit. Lips. 1791, S. 283 ff.

80) Ibid. S. 287.

81) *Jacobi Bernoulli,* Basileensis, Opera, Tomus II., Genevae 1744. S. 855 ff.

82) Id., Circinus proportionum nauticus, Acta Erud. Lips. 1699, S. 91 ff.

83) *Kästner,* S. 434.

84) *Jean Bernoulli,* Essai d'une nouvelle théorie de la manoeuvre des vaisseaux, Bâle 1714.

85) Des vollständigen mathematischen Lexikons zweiter Theil, Leipzig 1742. 2. Abschnitt, S. 90.

86) *Euler,* Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux, St. Pétersbourg 1773. II. cap. 5; cap. 8. III. cap. 4; cap. 5.

87) *Wolf,* Elementa matheseos universae, Tom. IV., Halae 1738. cap. 11; cap. 13.

88) Ibid. S. 87 ff.

89) Math. Lexikon, 2. Theil, 2. Abschnitt, S. 439.

90) *Halley,* An Easie Demonstration of the Analogy of the Logarithmick Tangents to the Meridian Line or sum of the Secants: with various Methods for computing the same to the utmost Exactness, Philos. Transactions, Vol. XIX. S. 202.

91) *Jac. Gregorius,* Exercitationes geometricae, Oxoniae 1694. S. 429 ff.

92) *Wallis,* De Algebra Tractatus historicus et practicus, Oxoniae 1694, S. 429 ff.

93) Id., De Secantium collectione, veraque Meridianorum divisione in Charta Nautica, Philos. Transactions, Vol. XV. S. 140.

94) *Wallis,* Algebra, S. 433.

95) Ibid. S. 435 ff.

96) *Halley,* S. 204.

97) *Chasles,* S. 137.

98) *Jacobi Bernoulli* Opera, Tomus II., S. 859.

99) *Moore,* A Mathematical Compendium, or, Usefnl Practices in Arithmetik, Geometry etc., London 1664. (D).

100) Ibid. S. 99.

101) *Cotes,* Logometria, Philos. Transactions, Vol. XXIX. S. 23.

102) *Perks,* An easy Mechanical Way, to divide the Nautical Meridian Line in *Mercator*'s Projection; with an Account of the same Meridian Line to the Curva Catenaria, ibid. Vol. XXIX. S. 331 ff.

103) Ibid. S. 339.

104) *Kästner,* Gesch. d. Math., 4. Band, Göttingen 1800. S. 3.

105) *Walz,* Disquisitio de curva loxodromica in superficie solidi cujuscunque, rotatione curvae circa axem suam geniti, praesertim vero sphaeroidis elliptici, quale veram globi terraeque figuram refert, describenda, Nova Acta Erud. Lips. 1741. S. 270 ff.

106) Ibid. S. 272.

107) Oeuvres de *Mr. de Maupertuis,* Nouvelle Edition corrigée et augmentée, Tome IV., A Lyon 1756. S. 276 ff.

108) Ibid. S. 182.

109) *Maclaurin,* A Treatise of Fluxions, Vol. II., Edinburgh 1742. S. 719.

110) Ibid. S. 721.

111) *Murdoch,* Nouvelles tables loxodromiques, ou, application de la théorie de la véritable figure de la terre à la construction de cartes marines, trad. de *Mr. de Brémord,* A Paris 1742.

112) *Kästner,* S. 391 ff.

113) *Mollweide,* S. 490.

114) *Simpson,* The Doctrine and Application of Fluxions, containing a Number of New Improvements in the Theory, Part II, London 1750. S. 540.

115) *Schubert,* De cursu navis in sphaeroide elliptico, Nova Acta scient. acad. imper. Petropol., Tomus VIII., S. 140.

116) *Kästner,* S. 321 ff.

117) Ibid. S. 329.

118) Ibid. S. 343.

119) Ibid. S. 382.

120) Ibid. S. 418.

121) Ibid. S. 427.

122) *Kaschub*, Cursus Mathematicus, oder deutlicher Begriff der mathematischen Wissenschaften, Jena 1718. S. 483 ff.

123) Ibid. S. 505 ff.

124) Ibid. S. 511.

125) *Bouguer*, S. 112.

126) Ibid. S. 130.

127) Ibid. S. 326 ff.

128) Ibid. S. 434 ff.

129) *J. H. van Swinden*'s Elemente der Geometrie, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt von *C. F. A. Jacobi*, Jena 1834. S. 282.

130) *Robertson*, The Elements of Navigation, containing the Theory and Practice with all the necessary tables, Vol. I., London 1754. S. 235.

131) Ibid. Vol. II., S. 365.

132) Ibid. S. 419 ff.

133) *Th. Mayer*, Anweisung zur Verzeichnung der Land-, See- und Himmelskarten, Erlangen 1794. S. 320 ff.

134) *v. Littrow*, Chorographie, oder Anleitung, alle Arten von Land-, See- und Himmelskarten zu verfertigen, Wien 1833. S. 151 ff.

135) *Brandes*, Höhere Geometrie, 2. Theil, Breslau 1820. S. 240.

136) *Gudermann*, Grundriss der analytischen Sphärik, Köln 1830. S. 47.

137) Id., Die loxodromische Linie und ihr merkwürdiger Zusammenhang mit der sphärischen Kettenlinie, Journal f. d. reine u. angew. Mathem., 11. Band, S. 394 ff.

138) *Verdam*, Dissertatio astronomica de linea loxodromica Gouda 1846.

139) *Grunert*, Loxodromische Trigonometrie. Ein Beitrag zur Nautik, Leipzig 1849. S. V.

140) Ibid. S. 18.

141) Ibid. S. 37.

142) Id., Der Flächeninhalt loxodromischer Dreiecke auf der Oberfläche eines durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entstandenen Sphäroides, Archiv d. Math. u. Phys. 27. Theil, S. 158.

143) *Plagemann*, Theorie der loxodromischen Linien auf dem Ellipsoid und auf der Kugel, ibid. 32. Theil, S. 1 ff.

144) Ibid. S. 17.

145) Ibid. S. 59.

146) *Baehr*, Notice sur quelques formules qui peuvent être utiles dans la théorie des surfaces courbes, ibid. 32. Theil, S. 224.

147) *Grunert*, Ueber die Schifffahrt auf dem grössten Kreise. Ein Beitrag zur Nautik, ibid. 32. Theil, S. 306 ff.

148) Ibid. S. 317.

149) *v. Friesach*, Beschreibung einer Tabelle zur Erleichterung der Schifffahrt auf dem grössten Kreise, Wiener Denkschriften LIII, 2. Abtheil. S. 258 ff.

150) Id., Ueber das Verhältniss des loxodromischen Weges zum sphärischen, Graz 1876.

151) Ibid. S. 12.

152) *Poppe*, Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und in der Architektur, Nürnberg 1802. S. 111.

153) *Chasles*, S. 27.

154) *Kästner*, Gesch. d. Math., 2. Band, Göttingen 1797. S. 94.

155) *Guidi Ubaldi de Marchionibus Montis*, De cochlea libri quatuor, Venetiis 1615.

156) *Kästner*, Gesch. d. Math., 2. Band, S. 88.

157) *Kästner*, S. 335 ff.

158) *Dienger*, Bestimmung der Länge der auf einen Kegel gewickelten Schraubenlinie, Archiv d. Math. u. Phys., 16. Theil, S. 454 ff.

159) *Enneper*, Ueber Loxodromen der Kegelflächen, Göttinger Nachrichten 1869. N. 459.

160) *Joachimsthal*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872. S. 82 ff.

161) *Biehringer*, Ueber Curven auf Rotationsflächen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18. Jahrg., S. 552.

162) Ibid. S. 585 ff.

163) Ibid. 21. Jahrg., S. 151 ff.

164) *van Bebber*, die moderne Witterungskunde, Prag 1878. S. 13.

Namen-Index.
