Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck.

Von Prof. Dr. Fritz Kötter
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Müller-Breslau.)

Coulomb's Betrachtungen über die Bestimmungen des Seitendrucks der Erde, welche noch heute den theoretischen Untersuchungen auf dem einschlägigen Gebiete als Ausgangspunkt dienen, beruhen im Wesentlichen auf zwei Grundlagen, von denen die eine — physikalischer Natur — Coulomb's Anschauung über das Wesen der Druckkräfte im Innern sandförmiger Massen zum Ausdruck bringt, während die andere — geometrischer Natur — eine vereinfachende Annahme ist, vermittels deren die erstere scheinbar erst brauchbar wird für eine durchzuführende Bestimmung des Seitendrucks der Erde.

Dass aber thatsächlich die Annahme ebener Gleitflächen für die Bestimmung des Seitendrucks der Erde insofern nicht unbedingt erforderlich ist, als sich auch für beliebig vorausgesetzte krumme Gleitflächen die Druckvertheilung genau bestimmen lässt, habe ich an anderer Stelle hervorgehoben. Die Schwerfälligkeit der damals gegebenen Ableitung war für mich Veranlassung zu wiederholter Beschäftigung mit dem fraglichen Gegenstande, welche mich auf eine Entwickelung führte, die vor der älteren, wie mir scheint, den Vorzug grösserer Einfachheit und Übersichtlichkeit besitzt, und deshalb im Folgenden mitgetheilt werden soll.

Es sollen im Folgenden mit γ und ρ das specifische Gewicht und der Böschungs- oder Reibungswinkel des Sandes bezeichnet werden; zur Bestimmung eines Punktes in der zur Längsrichtung senkrechten Ebene E soll uns ein Coordinatensystem dienen, dessen Anfangspunkt O im Innern des Erdreichs liegt, dessen x-Axe wagerecht auf die Mauer zu gerichtet ist und dessen y-Axe lothrecht nach unten geht. Ein vom Punkte P mit den Coordinaten x, y ausgehendes Linienelement dy in Richtung der y-Axe möge nun von der Seite der kleineren x einen auf die Längeneinheit berechneten Druck erfahren, dessen Componenten in Richtung der x- und y-Axe σ_x bez. τ heissen mögen; dann erfährt das von P ausgehende wagerechte Linienelement dx von Seite der kleineren y in Richtung der x-Axe ebenfalls die Druckcomponente τ, während die nach unten gerichtete Componente σ_y heissen soll. Es gelten zunächst die beiden Gleichungen:

$$\text{Ia.} \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\text{Ib.} \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma,$$

und zwar unabhängig von der besonderen physikalischen Beschaffenheit des Sandes.

Ein beliebiges von P ausgehendes Linienelement ds, welches mit der Richtung der x-Axe den Winkel ϕ, mit der Richtung der y-Axe den Winkel $\frac{\pi}{2} - \phi$ einschliesst, möge von der unteren Seite her einen Druck erfahren, dessen auf die Längeneinheit berechnete Grösse gleich p sein soll, während seine Richtung mit dem nach oben gerichteten Theil der Normale von ds den Winkel u, mit ds selbst den Winkel $\frac{\pi}{2} + u$ einschliessen soll. Betrachtet man nun ein Elementar-Dreieck, welches entsteht, indem man durch den Anfangspunkt P von ds eine Parallele zur x-Axe, durch den Endpunkt aber eine Parallele zur y-Axe sich gezogen denkt, so erhält man, da die vom Eigengewicht des Sandes herrührenden Glieder unendlich klein von zweiter Ordnung sind, die beiden Gleichungen

$$p \cos(u + 1R - \phi)\, ds = \sigma_x dy - \tau dx\,,$$
$$p \sin(u + 1R - \phi)\, ds = \sigma_y dx - \tau dy\,,$$

oder

$$\text{IIa.} \qquad p \sin(\phi - u) = \sigma_x \sin\phi - \tau \cos\phi\,,$$

$$\text{IIb.} \qquad p \cos(\phi - u) = \sigma_y \cos\phi - \tau \sin\phi\,,$$

aus denen unmittelbar folgt

$$\text{IIIa.} \quad p = \sigma_x \sin\phi \sin(\phi - u) - \tau \sin(2\phi - u) + \sigma_y \cos\phi \cos(\phi - u)\,,$$

$$\text{IIIb.} \quad O = \sigma_x \sin\phi \cos(\phi - u) - \tau \cos(2\phi - u) - \sigma_y \cos\phi \sin(\phi - u)\,.$$

Insofern nun die drei Grössen σ_x, τ, σ_y bestimmte Functionen von x und y sind, werden durch die beiden Gleichungen für jedes Linienelement der Druck p und die Druckneigung u als Functionen der drei Grössen x, y und ϕ bestimmt. Die Ableitungen von u nach den drei Grössen x, y, ϕ erhalten wir, indem wir auf Gleichung IIIb die bekannten Gesetze des partiellen Differenzirens anwenden, wobei wir noch sofort bemerken, dass die partielle Ableitung von IIIb nach u offenbar gleich $+p$ ist. Demnach gelten für die Ableitungen von u die drei Gleichungen

$$\text{IVa.}\quad O = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\sin\phi\cos(\phi-u) - \frac{\partial \tau}{\partial x}\cos(2\phi-u) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\cos\phi\sin(\phi-u) + p\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\text{IVb.}\quad O = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\sin\phi\cos(\phi-u) - \frac{\partial \tau}{\partial y}\cos(2\phi-u) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\cos\phi\sin(\phi-u) + p\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\text{IVc.}\quad O = \sigma_x\cos(2\phi-u) + 2\tau\sin(2\phi-u) - \sigma_y\cos(2\phi-u) + p\frac{\partial u}{\partial \phi}.$$

Die vorstehend mit römischen Ziffern bezeichneten Formeln gelten für alle Linienelemente; wollen wir zu den Elementen der Gleitfläche übergehen, so müssen wir dem Neigungswinkel u seinen grössten Werth ρ beilegen und gleichzeitig die drei Ableitungen von u nach x, y und ϕ gleich Null setzen. Diese speciellen Formeln wollen wir durch arabische Ziffern kennzeichnen. Wir erhalten zunächst aus IVa—IVc die Formeln

$$1.\quad O = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\sin\phi\cos(\phi-\rho) - \frac{\partial \tau}{\partial x}\cos(2\phi-\rho) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\cos\phi\sin(\phi-\rho),$$

$$2.\quad O = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\sin\phi\cos(\phi-\rho) - \frac{\partial \tau}{\partial y}\cos(2\phi-\rho) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\cos\phi\sin(\phi-\rho),$$

$$3.\quad O = \sigma_x\cos(2\phi-\rho) + 2\tau\sin(2\phi-\rho) - \sigma_y\cos(2\phi-\rho).$$

Die Formel IIIa für p lässt zunächst noch eine leicht vorzunehmende Umformung zu, welche liefert

$$\text{Va.}\quad p = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\cos u - \frac{1}{2}\left\{\sigma_x\cos(2\phi-u) + 2\tau\sin(2\phi-u) - \sigma_y\cos(2\phi-u)\right\}.$$

Setzen wir hierin $u=\rho$, so erhalten wir mit Rücksicht auf Gleichung 3

$$4.\quad p = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\cos\rho.$$

Endlich erhalten wir aus IIIb zunächst

$$\text{Vb.}\quad O = \frac{1}{2}\left\{(\sigma_x\sin(2\phi-u) - 2\tau\cos(2\phi-u) - \sigma_y\cos(2\phi-u)\right\} + \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y)\sin u$$

oder, wenn wir unter Benutzung von 4 auch hier zur Gleitfläche übergehen,

$$5.\quad p\operatorname{tang}\rho = -\frac{1}{2}\left\{(\sigma_x\sin(2\phi-\rho) - 2\tau\cos(2\phi-\rho) - \sigma_y\cos(2\phi-\rho)\right\}.$$

Die unter 1—5 aufgeführten Gleichungen dürfen, da sie nicht mehr für jedes Linienelement gelten, auch nicht mehr partiell nach

x, y und ϕ differenzirt werden, wohl aber dürfen sie, da sie für alle Linienelemente der Gleitfläche gelten, nach der Bogenlänge s der letzteren differenzirt werden und zwar nach der Formel

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial \phi}\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\phi + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\phi + \frac{\partial U}{\partial \phi}\frac{d\phi}{ds}.$$

So erhalten wir aus 4 die Formel

$$(6.)\quad \frac{dp}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\cos\phi\cos\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\sin\phi\cos\rho$$

und aus 3

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\cos\phi\cos(2\phi-\rho) + 2\frac{\partial\tau}{\partial x}\cos\phi\sin(2\phi-\rho) \\ &+ \left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y} - \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\sin\phi\sin(2\phi-\rho) + 2\frac{\partial\tau}{\partial y}\sin\phi\cos(2\phi-\rho) \\ &- 2\left\{\sigma_x\sin(2\phi-\rho) - 2\tau\cos(2\phi-\rho) - \sigma_y\cos(2\phi-\rho)\right\}\frac{d\phi}{ds}, \end{aligned}$$

was mit Rücksicht auf 5 die Formel

$$\begin{aligned} (7.)\quad & 4p\,\mathrm{tang}\,\rho\frac{d\phi}{ds} = \\ & -\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)\cos\phi\cos(2\phi-\rho) - 2\frac{\partial\tau}{\partial x}\cos\phi\sin(2\phi-\rho) \\ & -\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial y} - \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)\sin\phi\cos(2\phi-\rho) - 2\frac{\partial\tau}{\partial y}\sin\phi\sin(2\phi-\rho) \end{aligned}$$

ergiebt.

Aus 6 und 7 ergiebt sich dann weiter

$$\begin{aligned} (8.)\quad & \frac{dp}{ds} - 2p\,\mathrm{tang}\,\rho\frac{d\phi}{ds} = \\ & \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\cos^2\phi\cos(\phi-\rho) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\cos\phi\sin\phi\sin(\phi-\rho) + \frac{\partial\tau}{\partial x}\cos\phi\sin(2\phi-\rho) \\ & \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\sin\phi\cos\phi\cos(\phi-\rho) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\sin^2\phi\sin(\phi-\rho) + \frac{\partial\tau}{\partial y}\sin\phi\sin(2\phi-\rho). \end{aligned}$$

Indem wir hierin für $\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\cos\phi\sin(\phi-\rho)$ und für $\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\sin\phi\cos(\phi-\rho)$ die beiden Werthe setzen, welche sich aus 1 und 2 ergeben, nämlich:

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\cos\phi\sin(\phi-\rho) = \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\sin\phi\cos(\phi-\rho) - \frac{\partial\tau}{\partial x}\cos(2\phi-\rho)$$

und

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}\sin\phi\cos(\phi-\rho) = \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\cos\phi\sin(\phi-\rho) + \frac{\partial\tau}{\partial y}\cos(2\phi-\rho),$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{dp}{ds} - 2p \operatorname{tang} \rho \frac{d\phi}{ds} =$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cos(\phi - \rho)(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{\partial \tau}{\partial x}\left(\sin(2\phi - \rho)\cos\phi - \cos(2\phi - \rho)\sin\phi\right)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \sin(\phi - \rho)(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \frac{\partial \tau}{\partial x}\left(\cos(2\phi - \rho)\cos\phi + \sin\phi\sin(2\phi - \rho)\right),$$

oder wenn wir die Glieder mit Hülfe bekannter trigonometrischer Beziehungen vereinfachen,

$$\frac{dp}{ds} - 2p \operatorname{tang} \rho \frac{d\phi}{ds} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\right)\cos(\phi - \rho) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)\sin(\phi - \rho).$$

Benutzen wir nun noch die Gleichungen Ia und Ib, so erhalten wir schliesslich folgende Differentialgleichung zur Bestimmung des Drucks an der Gleitfläche:

$$(9.) \qquad \frac{dp}{ds} - 2p \operatorname{tang} \rho \frac{d\phi}{ds} = \gamma \sin(\phi - \rho),$$

deren Lösung sich unmittelbar hinschreiben lässt.

$$(10.) \qquad p = \gamma e^{+2\phi \operatorname{tang} \rho} \int e^{-2\phi \operatorname{tang} \rho} \sin(\phi - \rho)\, ds.$$

Die erforderliche Quadratur gestaltet sich besonders einfach, wenn die Bogenlänge, wie z. B. bei der Cykloide und ähnlichen Curven, durch ein einzelnes Glied von der Form

$$A \sin(\mathfrak{A}\phi + \alpha)$$

oder ein lineares Aggregat von solchen Gliedern darstellt. Jedem solchen Gliede entspricht dann ein Bestandtheil von der Form

$$a_1 \sin(\phi - \rho)\cos(\mathfrak{A}\phi + \alpha) + a_2 \cos(\phi - \rho)\cos(\mathfrak{A}\phi + \alpha)$$
$$+ b_1 \sin(\phi - \rho)\sin(\mathfrak{A}\phi + \alpha) + b_2 \cos(\phi - \rho)\sin(\mathfrak{A}\phi + \alpha),$$

dessen Coefficienten sich leicht bestimmen lassen. Zu diesen Gliedern kommt noch das mit einem willkürlichen Factor behaftete Glied

$$Ae^{2\phi \operatorname{tang} \rho}.$$

Ist aber erst der Druck an der Gleitfläche bekannt, so lässt sich der Druck der Erde gegen die Stützmauer nach Grösse, Richtung und Angriffspunkt bestimmen.