Ueber ein Integral von Gauss, welches die Verknotungen zweier geschlossenen Curven im Raume zählt.

Von Professor **J. Thomae** in Freiburg i. Br.

In Gauss's Nachlass, im fünften Bande seiner Werke befindet sich auf Seite 605 die Bemerkung:

„Eine Hauptaufgabe aus dem Grenzgebiet der geometria situs und der geometria magnitudinis wird die sein, die Verschlingungen zweier geschlossenen oder unendlichen Linien zu zählen".

„Es seien die Coordinaten eines unbestimmten Punktes der einen Linie $x\,y\,z$, der zweiten $x'y'z'$ und

$$V = \int\int \frac{\triangle}{\left[\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}\right]^3},$$

wenn

$$\triangle = \begin{vmatrix} x'-x, & y'-y, & z'-z \\ d\,x, & d\,y, & d\,z \\ d\,x', & d\,y', & d\,z' \end{vmatrix}$$

ist, dann ist dieses Integral durch beide Linien ausgedehnt, gleich $4\,m\,\pi$ und m die Anzahl der Umschlingungen."

Von diesem Satze ist in einer Abhandlung von Herrn Böddicker ein Beweis gegeben, und mitgetheilt, dass von Herrn Schering 1867 ein anderer Beweis bei Gelegenheit potentialtheoretischer Entwickelungen gegeben sei.

Dieses Integral kann von einem Gesichtspunkte betrachtet werden, von welchem aus man seine Richtigkeit leicht übersieht. Dies will ich hier zeigen, und führe dazu einige Abkürzungen ein.

Es sei

$$dX=(z-z')\,dy-(y-y')\,dz,\quad dX'=(z'-z)\,dy'-(y'-y)\,dz',$$
$$dY=(x-x')\,dz-(z-z')\,dx,\quad dY'=(x'-x)\,dz'-(z'-z)\,dx',$$
$$dZ=(y-y')\,dx-(x-x')\,dy,\quad dZ'=(y'-y)\,dx'-(x'-x)\,dy';$$

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z-z')^2},$$

$$dr=\frac{\partial r}{\partial x}dx+\frac{\partial r}{\partial y}dy+\frac{\partial r}{\partial z}dz$$
$$=-\frac{\partial r}{\partial x'}dx-\frac{\partial r}{\partial y'}dy-\frac{\partial r}{\partial z'}dz;$$

ferner

$$d'=\frac{\partial}{\partial x'}\,.\,dx'+\frac{\partial}{\partial y'}\,.\,dy'+\frac{\partial}{\partial z'}\,.\,dz',$$

woraus z. B. die Gleichung resultirt

$$d'r=\frac{\partial r}{\partial x'}dx'+\frac{\partial r}{\partial y'}dy'+\frac{\partial r}{\partial z'}dz'$$
$$=-\frac{\partial r}{\partial x}dx'-\frac{\partial r}{\partial y}dy'-\frac{\partial r}{\partial z}dz'.$$

In dieser Bezeichnung ist das zu behandelnde Integral

$$V=\int\int\frac{dX'dx+dY'dy+dZ'dz}{r^3}$$
$$=\int\int\frac{dXdx'+dYdy'+dZdz'}{r^3}.$$

Die Curve, welcher der Punct xyz angehört, werde mit s, die, welcher der Punct $x'y'z'$ angehört, mit s' bezeichnet. Nehmen wir nun das Intregral nicht über die ganze geschlossene Curve s, sondern von einem festen

Puncte $x_0 y_0 z_0$ auf ihr bis zu einem unbestimmten $x\,y\,z$, so sind in dem Integrale

$$\int_{x_0 y_0 z_0}^{x\,y\,z} \frac{\partial V}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial V}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial V}{\partial z}\,d\,z$$

die Differentialcoefficienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ Functionen, die als Functionen von $x\,y\,z$ für die Puncte der Curve s' unendlich werden, sonst aber überall endlich und einändrig sind. Da aber die Curve s' geschlossen (eventuell im Unendlichen geschlossen) ist, so ist

$$\begin{aligned} d\,V &= \frac{\partial V}{\partial x}\,d\,x + \frac{\partial V}{\partial y}\,d\,y + \frac{\partial V}{\partial z}\,d\,z \\ &= d\,x \int \frac{d\,X'}{r^3} + d\,y \int \frac{d\,Y'}{r^3} + d\,z \int \frac{d\,Z'}{r^3} \end{aligned}$$

ein vollständiges Differential. Man hat nämlich

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\int \frac{d\,X'}{r^3}$$

$$\int \frac{d\,z'}{r^3} - 3\,\frac{(z'-z)d\,y' - (y'-y)d\,z'}{r^4}\;\frac{\partial r}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{d\,Y'}{r^3}$$

$$\int -\frac{d z'}{r^3} - 3\,\frac{(x'-x)d\,z' - (z'-z)d\,x'}{r^4}\;\frac{\partial r}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) =$$

$$\int \frac{2\,d\,z'}{r^3} + 3\frac{dz'}{r^4}\left[(y'-y)\frac{\partial r}{\partial y} + (x'-x)\frac{\partial r}{\partial x} + (z'-z)\frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

$$+ 3\,\frac{z'-z}{r^4}\,d'\,r = \int \frac{-d z'}{r^3} + 3\frac{z'-z}{r^4}d'r = \int d'\,\frac{z-z'}{r^3} = 0.$$

Null ist aber dies Integral, weil s' geschlossen ist. Demnach ist mit Rücksicht auf die Symmetrie

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

und also dV ein vollständiges Differential.

Nach einem allgemeinen Satze der Integralrechnung, der streng bewiesen werden kann, erhält unter diesen Umständen das Integral

$$V=\int_{x_0 y_0 z_0}^{x\,y\,z} dx\int\frac{dX'}{r^3}+dy\int\frac{dY'}{r^3}+dz\int\frac{dZ'}{r^3}$$

auf jedem Integrationswege s zwischen $x_0 y_0 z_0$ und $x\,y\,z$ einen und denselben Werth, wenn nicht die Wege von einander durch eine Linie getrennt sind, in der die Differentialcoefficienten unter dem Integralzeichen unendlich werden, und zwar auf eine solche Weise getrennt sind, dass sie nicht durch stetige Deformation in einander übergeführt werden können, ohne dass bei der Deformation die Unstetigkeitscurve, also hier s' überschritten würde. Oder, mit Gauss zu reden, das Integral über eine Curve s ist Null, wenn sie, der Integrationsweg, die Curve s' nicht umschlingt. Umschlingt aber die Curve s die Curve s' in derselben Richtung m mal, so ist das Integral, ganz ähnlich wie im Cauchy'schen Satze, gleich dem m-fachen des Integralwerthes, welchen man erhält, wenn man über eine beliebig gezogene Schlinge, z. B. über einen Kreis, der um s' herumführt, integrirt.

Ist nun wieder die Curve s geschlossen, so kann man nach demselben Princip wegen der völligen Symmetrie des Integrales in Bezug auf $x\,y\,z$ und $x'\,y'\,z'$ die Curve s' ebenfalls durch jede andere ersetzen, welche die Curve

s mit ihr gleich oft umwindet. Daraus folgt, dass das Integral V von der Gestalt der geschlossenen Curven s und s' insofern ganz unabhängig ist, als nur die Anzahl der Umschlingungen der einen um die andere den Werth von V bestimmt, und um diesen zu bestimmen, kommt es nur darauf an, den Werth auszumitteln, wenn s eine specielle Curve, etwa ein Kreis, s' eine andere specielle Curve, etwa eine durch das Centrum des Kreises gehende, auf der Ebene des Kreises senkrechte Gerade einmal umschlingt.

Der Kreis s liege in der xy-Ebene, die Gerade s' sei die z-Achse. Auf dem Kreise sei $x = \varrho \cos \varphi$, $y = \varrho \sin \varphi$, $z = o$ auf den Geraden $x' = y' = o$. Dann haben wir

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} d z' \int \frac{y\, dx - x\, dy}{[\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}]^3}$$

$$= -\varrho^2 \int_{-\infty}^{\infty} d z' \int_{o}^{2\pi} \frac{d\varphi}{[\sqrt{\varrho^2 + z'^2}]^3} = -2\pi \varrho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d z'}{[\sqrt{\varrho^2 + z'^2}]^3}$$

$$= -2\pi \left\{ \lim_{z' = \infty} \frac{z'}{\sqrt{\varrho^2 + z'^2}} - \lim_{z' = -\infty} \frac{z'}{\sqrt{\varrho^2 + z'^2}} \right\} = -4\pi.$$

Wenn aber s m-mal um s' geschlungen ist (und also auch s' m-mal um s), so haben wir mit Gauss, abgesehen vom Vorzeichen

$$V = \pm 4 m \pi.$$

Das Vorzeichen hängt, wenn s und s' gegeben sind, noch davon ab, in welcher Richtung über diese Linien integrirt wird, oder in welcher Richtung die Umschlingungen positiv gezählt werden, und ist daher noch willkürlich. Es ist aber über das Zeichen völlig verfügt, wenn für irgend eine Umschlingung festgesetzt ist, in welchem Sinne sie positiv genommen werden soll.

Freiburg, 1876.

J. Thomae.

Ueber Kartographie.

Ein Vortrag
gehalten am 26. April 1876
von Prof. **J. Thomae.**
Mit einer Tafel.

Meine Herren!

Wenn ein Mathematiker es unternimmt, einmal der Erwartung zu entsprechen, die man von ihm hegt, wenn er Mitglied dieser hochansehnlichen Gesellschaft geworden ist, dass er dem Zwecke derselben gemäss durch einen Vortrag einen wissenschaftlichen Gegenstand Nichtfachleuten näher zu bringen suchen, so geräth derselbe, sofern er reiner Mathematiker ist, in einige Verlegenheit wegen der Wahl eines verständlichen Thema's. Zwar haben einige besonders begabte Männer, wie Dirichlet, es verstanden, in Vorträgen über die abstraktesten Gegenstände, auch Laien zu fesseln. Allein dazu gehört eben ein besonderes Talent, und im Allgemeinen dürfte es schwer sein, ein allen verständliches Beispiel von der rein mathematischen Forschungsweise Nichtmathematikern vorzuführen. Hingegen bietet die angewandte Mathematik des Stoffes genug, der eine populäre Darstellung zulässt, ja Stoff, von dem man sagen kann, dass es nicht unverdienstlich sein würde, ihn so zu bearbeiten, dass er jedem Gebildeten zugänglich wird und ihm so auch eine Perspective auf das eigentliche Treiben der Mathematiker eröffnet. Einen solchen Stoff habe ich für meine Besprechung gewählt. Dabei ist nur ein Missliches, weswegen ich um Nachsicht bitten muss: Ein Missliches, welches eben wieder zeigt, dass es für einen reinen Mathematiker schwer ist, ein passendes Thema zu finden.

Die Kartographie, über welche ich sprechen will, ist ein Wissenszweig, der mit den höchsten Gebieten der Mathematik in engem Zusammenhange steht und daher die reinen Mathematiker nahe genug interessirt. Allein gerade die Theile der Kartographie, welche den Analysten fesseln, würden schwerlich Reiz für Sie haben, und wiederum die allgemeinen Sachen darin werden nicht so von dem reinen Mathematiker als vielmehr von dem Astronomen oder Geodäten behandelt. Zu diesen Leuten gehöre ich nun nicht. Wenn ich also hier einen Vortrag über Kartographie halte, so ist das Missliche dabei, dass ich mich in einem Gebiete bewege, in dem ich oft genug selbst Laie bin, jedenfalls habe ich dieselbe niemals praktisch gehandhabt. Ich laufe dabei Gefahr, unter Ihnen, meine Herren, namentlich unter denen, welche Soldaten sind oder gewesen sind, solche zu finden, die, während sie hier Belehrung erwarten, selbst zu belehren wohl im Stande wären, die also getäuscht werden. Ich bitte Sie desshalb, mich zu entschuldigen, wenn ich als reiner Mathematiker einem Stoffe, den ich in meinem Berufe nur beiläufig streife aber nicht selbst bearbeite, nicht diejenigen interessanten Seiten abzugewinnen und ihnen vorzuführen vermag, wie es wohl ein Astronom oder Geograph könnte, und wie es die Materie wohl werth wäre.

Dass die Erde eine Kugel sei, haben schon einige von den Alten behauptet. Pythagoras soll diese Lehre von den Aegyptern nach Griechenland gebracht haben, und Eudoxus und Aristoteles haben sie zuerst mit Gründen zu unterstützen gesucht. Aber erst nachdem im Jahre 1519 die Erde von den Portugiesen vollständig umschifft worden war, hat die Meinung allgemein Eingang gefunden, dass die Oberfläche der Erde eine geschlossene krumme Fläche sei. Von allen geschlossenen krummen Flächen ist die Kugelfläche die einfachste, und es wäre daher in geographischer Beziehung recht wünschenswerth, dass die Erde eine Kugel wäre. Dass dies aber nicht so ist, können wir alle Tage wahrnehmen. Unsere Wohnungen, unsere Berge und Thäler fügen sich entschieden nicht der Kugelgestalt. Da hat man nun freilich gesagt, diese Berge seien nur wie Sandstaubkörner auf einer Kegelkugel, sie könnten an der Kugelgestalt im Ganzen und Grossen nichts ändern. Nun, je nach dem subjectiven Ermessen, was man vernachlässigen will oder nicht, kann man annehmen, dass die Erde eine Kugel sei oder nicht. Es ist nämlich aus den Gradmessungen ganz unzweifelhaft hervorgegangen, dass der Durchmesser von Pol zu Pol etwa $^1/_{300}$ kürzer ist, als ein in der Aequatorebene genommener. Diese Zahl wird die Abplattung genannt. Würde man nun, um ein Modell der Erde zu erhalten, eine kugelartige Oberfläche construiren, deren Aequator überall im Durchmesser einen Meter hätte, während der Durchmesser, der auf dem Aequator senkrecht steht, 997 Millimeter mässe, so würde wohl schwerlich Jemand ohne Anwendung des Sphärometers darauf kommen, dass die Oberfläche keine Kugel sei, würde aber ein Astronom in unsern Gegenden annehmen, dass die Verticallinie durch den Mittelpunkt der Erde gehe.

wie es der Fall sein müsste, wenn die Erde eine (homogene) Kugel wäre, so würde er einen so groben Fehler machen, dass seine Rechnungen in der Astronomie gänzlich unbrauchbar wären, die Astronomie sieht sich sogar genöthigt, viel unbedeutendere Abweichungen des Lothes, die durch grössere Gebirgsmassen, oder wie bei Evreux bei Paris durch an der Oberfläche der Erde nicht auffallende geologische Verhältnisse bewirkt werden, in ihre Rechnungen einzuführen. Aber auch für den Geographen, wenn er nicht blos die Verhältnisse, sondern die absoluten Längen in Betracht zieht, ist eine Verkürzung der Erdaxe gegen den Aequatordurchmesser um 6 Meilen keine so kleine Zahl, dass er sie bei seinen Untersuchungen immer als unerheblich ignoriren dürfte. Desshalb hat man für die Kugel ein sogenanntes abgeplattetes Rotationsellipsoid oder Sphäroid substituirt, d. h. eine Oberfläche, die durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Achse entstanden ist.

Kann man denn nun aber überhaupt die Erde als einen Rotationskörper ansehen, oder mit andern Worten, sind denn die Durchmesser auf dem Aequator einander gleich. Darüber gibt die Gradmessung ebenfalls Aufschluss, und zwar verneint sie die Gleichheit nicht in ganz minimalem Masse, sondern sie constatirt so bemerkbare Differenzen der verschiedenen Durchmesser, dass im Jahr 1859 Herr v. Schubert, ein russischer General, den Vorschlag gemacht hat, die Erde als ein dreiaxiges Ellipsoid anzusehen, welche Annahme Herrn Weierstrass in Berlin veranlasste, die kürzeste Linie, die sogenannte geodätische Linie, auf dieser Oberfläche mathematisch zu untersuchen. Die mathematische Behandlung der geodätischen Linie, welche bei allen Messungen auf der Erde dieselbe Rolle spielt, wie die Gerade in der Ebene, oder

der grösste Kreis auf der Kugel, bietet Schwierigkeiten, welche erst die allerneuste Zeit zu überwinden gelehrt hat.

Indessen hat Herr v. Schubert seine Idee bald selbst wieder fallen gelassen, und man ist jetzt allgemein zur Annahme des Rotationsellipsoides zurückgekehrt, nachdem man sich überzeugt hatte, dass man mit der Annahme des dreiaxigen Ellipsoides der Sache nicht so merklich näher kommt, dass dadurch andere, von der geringern Einfacheit des 3axigen Ellipsoides abhängende Unzuträglichkeiten compensirt würden. Die Natur hat wohl, als sie die Erde formte, die sphäroidische Gestalt im Auge gehabt, wie aber die Hausfrau, wenn sie einen thüringer Kloss zur Kugel gestalten will, nicht pedantisch jede Protuberanz entfernt, so hat auch die Natur kleinere Abweichungen sorglos uncorrigirt gelassen. Aber jenes ideale Ziel der Natur ist unverkennbar. Herr Listing in Göttingen hat daher den Vorschlag gemacht, nun zwar die Erdoberfläche, das Geoid, nicht als Rotationsellipsoid anzusehen, wohl aber in das Geoid hinein ein Rotationsellipsoid zu legen, welches durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt, möglichst wenig von dem Geoid abweicht, hier unter dasselbe hinabsinkt, dort wieder aus demselben heraussteigt. Ebenso wird umgekehrt sich das Geoid, die wahre Erdoberfläche, abwechselnd über jenes typische Ellipsoid erheben und hie und da in dasselbe untertauchen. Auf jenes typische Ellipsoid würden alle Erhebungen und Senkungen der Erde zu beziehen sein. Einstweilen bedient man sich jedoch noch der Methode, die Erhebungen auf die nächstliegenden Meere zu beziehen. Denkt man sich z. B. am Feldberg ein Loch von sehr grosser Tiefe, welches mit der Nordsee durch Röhren communicirte, so würde das Wasser darin einen ganz bestimmten Stand haben. Diesen Stand nennt man den

Meeresspiegel. Und wenn der Feldberg 1494 Meter sich über den Stand dieses Wassers erhebt, so sagt man, der Feldberg habe eine Höhe von 1494 Meter über dem Meeresspiegel.

Wollte man nun die Erde in kleinerem Massstabe darstellen, so dass Jemand, der diese Darstellung betrachtet, grössere Stücke auf einmal übersehen könnte, und wollte man die gegenseitige Lage der Berge, Flüsse, Städte etc. vollkommen getreu zur Anschauung bringen, d. h. so, dass man jede über die Oberfläche oder direct gemessene Länge immer nur mit derselben Zahl zu multipliciren brauchte, um die wirkliche Entfernung zu erhalten, wollte man, um es in einem Worte zusammen zu fassen, eine wahre Darstellung haben, so wäre dazu nothwendig, dass man die Gestalt der Erde genau kenne. Dann könnte man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach allen Orten der Erde ziehen, und von einem andern Punkte zu diesen Strahlen parallele construiren, und auf diesen den Originalstrahlen proportionale Stücke abschneiden. Die Geometrie lehrt, dass in dem so entstehenden Gebilde nicht blos die Constructionsstrahlen, sondern die Verbindungslinien aller entsprechenden Punkte, directe sowohl als über die Oberfläche gezogene einander proportional sind.

Eine solche genaue Kenntniss der Erdoberfläche zu erlangen, wird zwar durch wiederholte Gradmessungen erstrebt, würde aber natürlich nur dann zu erreichen sein, wenn die Triangulation über die ganze Erde ausgebreitet würde, was nicht nur mit Schwierigkeiten in uncultivirten Ländern, wie Afrika, zu kämpfen hat, sondern auch mit noch grössern in inselarmen Meeren. Ferner ist die Gestalt keineswegs von der Zeit unabhängig, sondern es werden Hebungen und Senkungen grosser Gebiete beobachtet, und es kann leicht geschehen, dass ein Ingenieur späterer Zeiten einen seiner Vorgänger für einen Pfuscher erklärt, weil er das Planum einer Bahnlinie nicht recht bestimmt habe, während derselbe doch seine Schuldigkeit vollständig gethan und nur Mutter Erde ihren Rücken seitdem ein wenig anders gekrümmt hat. Auf eine absolut wahre Darstellung wird man wohl verzichten müssen, und vorläufig dürfen wir einen Globus, der die Abplattung mit 3—4 Tausendstel berücksichtigt, für den vollkommensten halten.

Unter geographischer Breite oder Polhöhe eines Ortes versteht man den Winkel, den die Gesichtslinie nach dem Pol, also ungefähr eine von dem Orte nach dem Polarstern gehende Gerade mit dem Horizont macht. Der Winkel, welchen diese Gesichtslinie mit der Verticale macht, also die Zenithdistanz des Poles ist das Complement der geographischen Breite zu einem Rechten. Würde man nun auf dem Globoid, um einen Namen für unser abgeplattetes Erdmodell zu haben, in irgend einem Punkte eine Normale, d. i. Lothlinie, auf der Oberfläche errichten und das Complement des Winkels, den diese Linie mit dem kleinsten Durchmesser, der Achse des Globoids, dem Abbilde der Weltaxe macht, die geographische Breite des Ortes auf dem Globoid nennen, würde man ferner durch die Axe gelegten Ebenen Meridianebenen, und den Winkel, den die Meridianebenen zweier Orte miteinander machen, die Längendifferenz dieser Orte nennen, so würde durch Breite und Länge auf der Erde, letztere von einem willkürlich gewählten Orte, etwa Ferro an, gezählt, ein Ort von derselben Länge und Breite auf dem Globoid bestimmt sein, so dass jedem Punkte der Erde ein bestimmter Punkt, der Bildpunkt auf dem Globoid entspricht. Eine solche Darstellung auf dem Rotationsellipsoid würde nun zwar nicht absolut wahr, doch von einer solchen Genauigkeit, d. h. Aehnlichkeit des Originales und Bildes sein, dass sie allen Anforderungen, die die Praxis an eine solche Abbildung stellt, vollkommen erfüllen würde. Namentlich würde genau wie auf der Erde die Entfernung der Breitengrade von einander in der Richtung vom Aequator nach den Polen hin zunehmen, was eben eine Folge der Abplattung ist, und zwar würden sie in demselben Verhältnisse als dort zunehmen.

Eine solche Aehnlichkeit des Bildes und Originals ist auf dem wirklichen Globus auf der Kugel nicht zu erreichen. Es ist auf keine Weise möglich, die Punkte der Oberfläche eines Ellipsoides den Punkten einer Kugel oder einer Ebene, oder die Punkte einer Kugel den Punkten einer Ebene so zuzuordnen, dass das Bild dem Original ähnlich ist, oder dass das Bild ein wahres ist.

Aehnlichkeit kann auch nicht einmal dann erreicht werden, wenn, was vollständig ausreicht, von den direkten Distanzen ganz abgesehen wird und die Entfernungen nur über die Oberfläche gemessen werden. Dass von den direkten Distanzen abgesehen werden muss, ist unmittelbar klar, denn man kann z. B. von einem Planiglobus nicht erwarten, dass er sowohl die Entfernung unserer Antipoden gleich 2700 Meilen über die Oberfläche gemessen, als auch die direkte gleich 1720 Meilen, in welchem Massstabe es auch immer sei, angeben solle.

Also ich wiederhole es noch einmal, es ist auf keine Weise möglich, die ganze Erde oder auch nur ein Stück derselben auf eine Kugel oder auf eine Ebene ähnlich abzubilden, wenn auch von der Körperähnlichkeit ganz abstrahirt und nur Flächenähnlichkeit gefordert wird.

Diese Unmöglichkeit ist die Ursache, dass überhaupt eine Disciplin der Kartographie existirt. Wenn nämlich Aehnlichkeit erreicht werden könnte, so würde wohl unter allen Umständen die ähnliche Karte die beste sein, und demnach eine Wissenschaft, die sich damit beschäftigte, die beste Abbildung der Erdoberfläche zu finden, bald an ihren natürlichen Grenzen angekommen sein.

Die Kartographie ist die Wissenschaft, die sich damit beschäftigt, unter gegebenen Voraussetzungen die bestmögliche Darstellung der Erde, des Mondes oder des Himmels, oder eines Theiles derselben zu finden und Mittel, und zwar möglichst einfache Mittel anzugeben, wie eine solche Karte fertig zu stellen sei.

Was nun zuerst die Abbildung der Erde auf einer Kugel betrifft, so sind die Anforderungen, die man in der Praxis an eine solche stellt, nicht der Art, dass es der Mühe lohnen würde zu untersuchen, wie die Abbildung am besten geschähe, man wählt hierzu vielmehr meist nicht die beste, sondern nur die einfachste. Man nimmt einen Kugel-Durchmesser als Weltaxe an, und eine darauf senkrechte Ebene durch den Mittelpunkt als Aequatorebene. Die Parallelkreise sowohl als die Meridiane sind in gleichen Distanzen von einander gezogen. Erstere dem Aequator parallel, letztere durch die Weltaxe. Die Parallelkreise enthalten die Punkte gleicher geographischer Breite, die Meridiane die Punkte gleicher Länge. Durch Länge und Breite sind aber die Lagen correspondirender Punkte auf der Erde und dem Globus völlig bestimmt und die Herstellung ist leicht.

Dass aber diese Abbildung eine falsche ist, sieht man sofort, weil die Breiten auf dem kugelförmigen Globus einander in gleichen Abständen folgen, während dies beim Original, wie schon öfter erwähnt, nicht Statt hat.

Wenn also Jemand den Schluss macht: Weil auf dem Globus der Ort A vom Orte B ebensoweit entfernt ist, als C von D, so müssen auch auf der Erde die A und B entsprechenden Orte ebensoweit von einander entfernt sein, als die C und D entsprechenden, so macht derselbe im Allgemeinen einen Fehlschluss. Der Fehler beträgt jedoch, wie ich beiläufig bemerke, im schlimmsten Falle weniger als $1/150$ der gemessenen Länge. Nun wird aber Niemand versucht sein, auf Grund eines solchen Globus ein Ländergebiet genau ausmessen oder denselben auf der Fahrt nach Ostindien als Seekarte zu benutzen. Bei Schätzungen der Entfernungen auf einem Globus genügt eine solche Genauigkeit vollkommen, weil man nicht Messungen darauf vornehmen, sondern nur Gestalt und gegenseitige Lage der Länder im Allgemeinen zur Anschauung bringen will. Wäre nicht der Globus immer so klein, dass die durch unvermeidliche Zeichenfehler entstehenden erheblichen Abweichungen vom Originale denselben zu Messungen untauglich machten, so würde man immerhin genaue Messungen auf dem Globus vornehmen können. Nur dürfte man sich dann des sphärischen Lineals nicht allein bedienen, sondern müsste noch eine mathematische von Länge und Breite des Anfangspunktes und Endpunktes abhängende Correktionsformel daneben benutzen, was freilich unbequem wäre.

Wenn ich nun im Folgenden die Erde als eine Kugel ansehe, so geschieht es nicht, weil die Geographen bei Zeichnung von Gradnetzen die sphäroidische Gestalt ignorirten, sondern weil der augenblickliche Zweck nur der ist, Ihnen die Methoden der Kartenzeichnung im Allgemeinen zu charakterisiren, wobei von den feineren Details abgesehen werden muss. Diese Methoden sind für die Kugel natürlich in den meisten Fällen einfacher als für das Sphäroid, und es ist daher leichter, Ihnen einen Begriff von diesen Methoden zu machen. Diejenigen, welchen die Sache schon bekannt ist, werden vielleicht nicht zufrieden damit sein, aber ich fürchte andererseits, dass die anzustellenden Betrachtungen vielen andern von Ihnen zu mathematisch werden würden, wenn eine grössere Genauigkeit unser Augenmerk wäre.

Die Aufgabe also, die sich die Kartographie stellt, ist die: Von der ganzen Erde oder einem Theile der Erde eine gewissen Zwecken entsprechende Abbildung zu erhalten.

Durch den Zweck sowohl als auch den Umfang der Karte wird die Methode der Abbildung bedingt sein.

Unter den Zwecken oder vielmehr Gründen, die eine Methode veranlassen, befindet sich meist der mit, dass die Sache dem Zeichner nicht zu schwierig gemacht werde.

Dieser letztere Gesichtspunkt ist sogar bei vielen Projectionen der allein massgebende gewesen, und es sind desshalb jene Projectionen oft mit erheblichen Mängeln behaftet, welche den so angefertigten Karten nur beschränkten Werth zu gestehen, so dass sie meist nur da brauchbar sind, wo man entweder mit ganz rohen Vorstellungen zufrieden sein kann, oder wo das abgebildete Flächenstück sehr klein ist. Durch die Kleinheit des abgebildeten Stückes werden viele Mängel, wie wir bald sehen werden, sehr abgeschwächt. Ehe ich solche Abbildungen bespreche, will ich voraufschicken, welches Princip bei den besten Karten seit Gauss zu Grunde gelegt ist.

Aehnlichkeit der Bilder im Grossen kann nicht erreicht werden. Wohl aber kann man die Forderung stellen, dass die Aehnlichkeit überall um so grösser sei, ein je kleineres Stück der Karte man betrachtet. Eine solche Abbildung nennt man eine conforme oder in den kleinsten Theilen ähnliche, weil das Bild um so ähnlicher (wahrer) wird, je kleiner der abgebildete Theil ist, aber immer für jeden Theil einer noch so umfassenden Karte, wovon nur in einzelnen Punkten, gewöhnlich in den Polen, eine Ausnahme stattfinden darf.

Diese conforme Abbildung hat den Vorzug, dass sie die Winkel exact wiedergiebt. Wenn man also irgendwo ein rechtwinkliges Dreieck auf der Erde zeichnet, so wird dasselbe im Bilde ebenfalls durch ein rechtwinkliges Dreieck wiedergegeben. Unter einem Dreieck verstehe ich hier nicht ein geradliniges, sondern krummliniges, weil auf der Erde keine geraden Linien vorhanden sind. Die krummen Linien schneiden sich aber auf der Abbildung unter denselben Winkeln als im Original. Sie sehen hier bei dieser (stereographischen) Projection (Tafel II, Fig. 4), dass die Linien, welche ein Parallelogramm auf der Erde abbilden, welches von zwei Meridianen und zwei Parallelkreisen gebildet wird, also rechtwinklig ist, im Bilde ebenfalls eine rechtwinklige Figur bilden, die um so weniger vom Original abweicht, je weniger Breiten- und Längengrade sie umfasst. Wir sprechen nachher mehr von dieser Projection, für jetzt bemerke ich nur im Allgemeinen, dass eine allgemeine Folge der exacten Wiedergabe der Winkel ist, dass, wenn man ein nur kleines Stück betrachtet, man wirklich ein nahezu richtiges, d. h. ähnliches Bild vom Original erhält, ein in allen Fällen um so richtigeres, je kleiner das betrachtete Stück ist in jedem beliebigen Theile der Karte.

Der Forderung, die Winkel im Bilde exact wiederzugeben, entsprechen die Projectionsmethoden, welche nur die Leichtigkeit der Ausführung der Zeichnung im Auge haben, gewöhnlich nicht, wenn auch einige conforme Abbildungen sehr leicht zu zeichnen sind, also eine grössere oder kleinere Verzerrung der Figuren selbst im Kleinen, im Grossen ist sie überhaupt nicht zu vermeiden, findet bei nicht conformen Abbildungen jedesmal statt. Gleichwohl finden einige nicht conforme Abbildungen sowohl im Grossen, als auch im Kleinen Anwendung.

Wenn nämlich Jemand einen Situationsplan, ein Croquis oder dergl. entwirft, so zeichnet er ein so kleines Stück der Erdoberfläche, dass er es ohne erheblichen Fehler nicht als ein Kugelstück, sondern selbst als ein Ebenenstück ansehen kann. Man projicirt wenigstens alle Puncte, hoch oder tief, auf eine Horizontalebene durch Parallelprojection, und gibt die Erhöhungen, Berge, Thäler durch besondere Hilfsmittel, z. B. durch Niveaulinien oder Bergschattenstriche an. So wie eine solche Karte würde die Erde aussehen, wenn man von einem sehr entfernten Puncte auf die Erde herabsehen würde. Da, wie gesagt, die Oberfläche einer Kugel mit einem Durchmesser von 1720 Meilen, wie ihn die Erde hat, in kleineren Theilen von einer Ebene recht wenig abweicht, so dass ein Punct der Erde, der eine Meile von einem Orte liegt, durch welchen eine Horizontalebene gelegt ist, nur $^1/_{1600}$ Meile oder 15 Fuss unter jener Ebene liegt, so erfüllen jene Karten recht gut ihren Zweck, weil die Verzerrung am Rande, wo sie am grössten ist, immer noch klein genug erscheint, dass sie da, wo es sich nicht um genaue Messungen handelt, sich nicht fühlbar macht. Es ist klar, dass während die Kreise um die Mitte der Karte herum ihre wahre Länge beibehalten, die Radien dieser Kreise auf der Karte verkürzt erscheinen.

Die Parallelprojection hat man aber auch im Grossen angewandt in einem Falle, in welchem sie sich von selbst darbietet. Nämlich bei Mondkarten. Man bildet den

Mond so ab, wie er uns erscheint, oder man photographirt ihn. Wenn man die ganze sichtbare Halbkugel des Mondes so darstellt, so muss am Rande die Abbildung gegen das Original sehr verzerrt erscheinen. Entschuldigt wird diese Abbildung eben dadurch, dass wir die Mondoberfläche immer in dieser Verzerrung sehen.

Hier ist ein Netz (Taf. II, Fig. 3), welches die Längen und Breiten in Parallelprojection für den Fall wiedergibt, in welchem ein Pol zum Mittelpunct der Karte genommen ist. In diesem Falle ist die Construction des Netzes am leichtesten, denn die Meridiane sind gerade Linien, die Parallelkreise concentrische Kreise, deren Abstände nach dem Aequator hin immer mehr abnehmen. Man braucht zur Zeichnung nur die einfachsten geometrischen Instrumente, Zirkel und Lineal. Setzt man den Radius des Aequators gleich 1, so ist der Radius, der zu der Polhöhe (oder geogr. Breite) p gehört, gleich $\cos p$. Der Abstand des 89. Parallelkreises von der Mitte beträgt 0,017452, der Abstand des 1. vom Aequator (oder dem Rande der Karte) beträgt 0,00015, also das Verhältniss der beiden Abstände ist ungefähr 1 : 116, woraus die Grösse der Verzerrung am Rande erkannt wird.

Wollte man einen von den Polen verschiedenen Punct zum Mittelpunct der Karte nehmen, so würde das Netz aus Ellipsen bestehen.

Bei der Parallelprojection ist das Sehcentrum eigentlich unendlich weit entfernt zu denken, damit die Projectionsstrahlen parallel werden. Nimmt man aber die Entfernung so gross als die des Mondes von der Erde, so erhält man nur irrelevante Modificationen. Bildet man ein kleines Stück der Erde ab, und setzt das Auge in den Mittelpunct der Erde, so ist der Unterschied von der Parallelprojection um so geringer, je kleiner das Stück ist. Letztere Projection heisst Centralprojection. Wollte man eine ganze Halbkugel damit abbilden, so würden die Meridiane und der Aequator als gerade Linien zu zeichnen sein, weil sie in Ebenen durch den Mittelpunkt liegen. Hingegen werden aus den Parallelkreisen Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln, wenn der Mittelpunct der Karte kein Pol ist. Liegt der Mittelpunct auf dem Aequator, so sind die Meridiane einander parallel, folgen aber einander in grösser werdenden Abständen. Die Parallelkreise werden ausser dem Aequator (dem 0ten) im Bilde sämmtlich Parabeln. Zur Abbildung grösserer Länderstücke sind solche Projectionen unbrauchbar, wenigstens bieten sie nicht den mindesten Vorzug dar. Verlegt man das Sehcentrum in einen Punct der Kugelfläche selbst, welcher der Mitte der Karte gegenüber liegt, so erhält man die vortreffliche stereographische Projection, von der wir nachher reden, weil sie eine conforme ist.

Die Methode, die Puncte der Erdoberfläche von einem bestimmten Puncte perspectivisch abzubilden, hat man mit Erfolg mit dem Princip der Abwickelung verbunden. Um nur die einfachsten Fälle zu erwähnen, lege man einen Cylinder um die Kugel, der sie im Aequator berührt. Nun projicirt man die einzelnen Puncte der Kugeloberfläche von ihrem Mittelpuncte aus auf diesen Cylinder, und bildet sie dort ab. Die Meridiane werden dann offenbar gerade Linien, die Parallelkreise Kreise, die aber in immer weiteren Abständen nach dem Pole zu einander folgen, und daher für höhere Breiten ein immer verzerrteres Bild liefern. Diesen Cylinder schneidet man längs eines Meridianes auf, und breitet ihn in eine Ebene aus, wickelt ihn ab, wie man sich ausdrückt. Die Parallelkreise wickeln sich dann auf gerade Linien ab, so dass ein geradliniges Netz mit rechtwinkligen Maschen vorliegt. Das ganze Bild bedeckt ein Ebenenstück von der Breite des Aequators und unendlicher Länge. Bezeichnet man Länge und Breite im Bilde mit p', l', so ist l' = l, p' = tgp, wenn l, p Länge und Breite des Originales sind und l l' p p' in Theilen des Halbmessers ausgedrückt sind. Unser verehrtes verstorbenes Mitglied Johannes Müller sagte mir, dass er für die kleinen rechteckigen Karten in seinem Lehrbuche der Physik und in Vorlesungen wegen der Leichtigkeit der Construktion und Uebersichtlichkeit diese Projection angewandt habe. Freilich kann sich dieses Netz nicht messen mit einem andern, mit dem es leicht verwechselt werden kann, mit dem Merkatornetze, welches eines der vorzüglichsten überhaupt ist. Letzteres lässt sich mit so einfachen geometrischen Principien nicht construiren, und erfordert einen einigermassen mathematisch gebildeten Zeichner, wenn schon es geradlinig ist. Indessen kann man einem Netzzeichner Tabellen in die Hand geben, mit denen er auch Merkatorkarten leicht zeichnen kann. Auf diese Karte als auf eine conforme kommen wir nachher zurück.

Will man nur eine schmale Zone zwischen zwei Parallelkreisen darstellen, z. B. um Isothermen einzuzeichnen, so genügt meist ein ähnliches Princip. Man legt nämlich durch die beiden begrenzenden Kreise einen geraden Kegel, projicirt vom Centrum die Puncte der Kugel auf den Kegel und wickelt denselben nachher in die Ebene ab. Die begrenzenden Parallelkreise sowie alle Parallelkreise werden durch Stücke paralleler Kreise, die Meridiane durch convergente gerade Linien dargestellt. Die Maschen des Netzes sind rechtwinklige, am Rande der Karte ist die Abbildung richtig, in der Mitte der Karte aber liegen die Puncte gegenüber denen der Kugel um so dichter bei einander, je breiter die Zone ist. Ich will auf diese Projection nicht weiter eingehen, sondern eben nur bemerken, dass sie zu einzelnen meist physikalischen Zwecken recht gut brauchbar sein kann.

Hier ist (Taf. II, Fig. 2) eine von Herrn Jäger in Wien zuerst gezeichnete, von Herrn Petermann etwas modificirte Karte, welche zoologische Zwecke im Auge hat. Es kam dabei darauf an, den Nordpol auf der Karte zu haben, der bei Merkator fehlt, und dann alles Land möglichst günstig dargestellt zu erhalten, während es auf die Verzerrung der Meere nicht ankommt. Ich habe diese Karte nur zeichnen lassen, um Ihnen zu zeigen, welche sonderbaren Gestalten zum Vorschein kommen können, wenn besondere Zwecke verfolgt werden. Bei manchen Karten aber sieht man den Nutzen der sonderbaren Gestalt kaum ein, und die Karten machen dann den Eindruck einer Spielerei. Man hat die Erde in Rhomben, in Ellipsen etc. eingezeichnet. Bei conformen Karten können allerdings solche sonderbare Gestaltungen eine Folge guter Principien sein, und wir kommen bald auf eine solche zu sprechen.

Wir gehen jetzt zu den conformen Karten über.

Unter den Karten, die man perspectivisch zeichnen kann, findet sich, wie schon bemerkt, eine conforme vor, wenigstens ist sie es, wenn die Erde als Kugel angesehen wird. Dies ist die sogenannte stereographische Projection. Sie vereinigt beide Vorzüge in sich, leicht construirbar zu sein und die Winkel bis auf die in einem einzigen Puncte überall getreu wiederzugeben, welche Eigenschaft die Conformität ausmacht. Man erhält sie dadurch, dass man an einem Punct der Kugel eine Tangentialebene legt, und von dem andern Endpuncte des Kugeldurchmessers, der durch den Berührungspunct geht, die Puncte der Kugel auf die Ebene projicirt. Der Berührungspunct der Tangentialebene heisst Mittelpunct der Karte. In der beschriebenen Lage der Ebene übersieht man am besten die geometrischen Eigenschaften dieser Projection, man sieht aber sofort, dass man nur den Massstab der Abbildung verändert, wenn man die Ebene parallel mit sich verschiebt.

Entfernt man dieselbe vom Sehcentrum, so wird der Massstab vergrössert, im andern Falle verkleinert. Am meisten empfiehlt es sich, die Bildebene durch den Mittelpunct der Kugel zu legen, und die beiden dadurch bestimmten Halbkugeln gesondert von den beiden Polen dieser Ebene auf sie zu projiciren, was auch meist gegeschieht. So entstehen die beiden Hälften eines Planiglobus. Nach einer von Herrn Eisenlohr in Heidelberg gegebenen Schätzungsmethode der Güte einer Karte ist die bestmögliche Abbildung einer Halbkugel die stereographische. Am einfachsten sind solche stereographische Karten, bei denen der Mittelpunct entweder ein Pol, oder ein Punct des Aequators der Erde ist.

Nimmt man einen Pol zum Mittelpuncte, so werden alle Parallelkreise im Bilde concentrische Kreise, und die Meridiane gerade Linien. Nimmt man einen Punct des Aequators zum Mittelpunct der Karte, so werden alle Parallelkreise und alle Meridiane Kreise im Bilde, bis auf zwei, den Aequator und den durch den Kartenmittelpunct gehenden Meridian, welche gerade Linien werden. Die Meridiane sind Kreise, welche sich alle in 2 Puncten, den Bildpuncten der Pole schneiden.

Diese Abbildung hat überhaupt das Eigenthümliche, dass jedem Kreise auf der Kugel ein Kreis in der Ebene entspricht und umgekehrt. Nur entsprechen allen Kreisen, welche auf der Kugel durch das Sehcentrum gehen, gerade Linien im Bilde. Würde dem Mittelpuncte eines jeden Kreises auf der Kugel der Mittelpunct des Bildkreises entsprechen, so müsste die Abbildung eine ähnliche sein, also wäre die Karte vollkommen. Dies ist jedoch nicht der Fall, und findet nur bei Kreisen statt, deren Mittelpunct zugleich Mittelpunct der Karte ist. Sonst aber rückt der Bildpunct des Mittelpunctes eines Kugelkreises dem Mittelpunct des Bildkreises um so näher, je kleiner der Kreis ist, und zwar nicht blos im Verhältniss der Abnahme der Durchmesser, sondern viel rascher. Daraus entspringt der zweite Vortheil dieser Projection, die Conformität, während der erste der war, dass man zur Zeichnung des Netzes nur Zirkel und Lineal braucht, und dass vermöge der Perspectivität eine einfache Beziehung des Bildes zum Original, der Ebene zur Kugel besteht.

Bei jeder conformen Abbildung ist der Massstab der Vergrösserung zwar in der Nähe verschiedener Puncte verschieden, aber für kleinste Linien, die von einem und demselben Puncte ausgehen, nach allen Richtungen derselbe, während bei den nicht conformen, wie die früher besprochenen sind, der Massstab nicht blos von Ort zu Ort verschieden ist, sondern im Allgemeinen auch von Richtung zu Richtung an demselben Orte wechselt.

Man verlangt aber nun auch von einer guten conformen Abbildung, dass der Massstab, der nothwendig ein veränderlicher ist, an den verschiedenen Stellen ein nicht zu sehr verschiedener sei. Betrachtet man die stereographische Karte von diesem Gesichtspuncte aus, so erfüllt sie diese Forderung ganz schlecht, wenn man die ganze Erde auf einmal abbilden will. Sie sehen, (Taf. II, Fig. 4) wie verzerrt Amerika auf dieser stereographischen Zeichnung dargestellt ist, wenngleich kleinere Partien auch dort richtig dargestellt sein müssten, wenn die Zeichnung fehlerfrei wäre.

Vorzüglich aber ist die stereographische Projection, wenn man, wie schon einmal bemerkt, nur eine Halbkugel auf einen Kreis, die andere auf einen andern Kreis abbildet, und wenn man die beiden Karten neben einander stellt.

Das Gesetz der Vergrösserung drückt sich am einfachsten in dem Fall aus, in welchem ein Pol Mittelpunct der Karte ist. Dann ist die Linear-Vergrösserung $\sec^2(45^0 - \frac{1}{2}\,p)$, wenn unter p die Polhöhe eines Ortes verstanden wird, und wenn die Vergrösserung in der Mitte der Karte gleich 1 gesetzt ist. Also ist sie, wie die Formel zeigt, am Rande, wo $p = o$ ist, gleich 2. Das ist für eine Karte, die die ganze Halbkugel umfasst, ein recht günstiges Resultat, und, wie schon bemerkt, das günstigste, welches erreicht werden kann. Um es mit der Parallelprojection zu vergleichen, erinnere ich Sie daran, dass Grad 89 von 90 mehr als 100 mal so weit entfernt war als 0^0 von 1^0. Hier ist der Unterschied kleiner als 2, und zwar ist hier die Mitte kleiner, der Rand grösser.

Uebrigens braucht man den Massstab nicht aus der Formel $\sec^2(45^0 - \frac{1}{2}\,p)$ zu entnehmen, wenn man auf der Karte Messungen kleinerer Distanzen vornehmen will, (denn nur solche sind direct, d. h. ohne Rechnung brauchbar), sondern man kann dann das Gradnetz gebrauchen, wenn es einigermassen dicht gezogen ist. Man braucht nur zu bemerken, dass die Entfernung der Parallelkreise von Grad zu Grad 15 Meilen beträgt. Nahe — denn ich bemerke nochmals, dass diese Karte einige kleine Correkturen nöthig macht, wenn man nicht die kugelförmige, sondern die abgeplattete Erde darstellen will.

Es ist als ein Mangel an der stereographischen Projection gerügt worden, dass sie eine Zweitheilung der

Erde nothwendig mache. Dadurch dass die ganze Kugel auf 2 Hälften abgebildet werden muss, wenn die Darstellung gut sein soll, werde der Zusammenhang zerrissen und man bekomme an der Trennungsstelle keine gute Vorstellung. Gewisse Mängel sind freilich unvermeidlich. Herr August in Berlin hat die Erde in eine epicycloidische Figur (Tafel II, Fig. 1) mit 2 Rückkehrpuncten, die den Polen entsprechen, so eingezeichnet, dass sie in allen Puncten conform ist. Denkt man sich über eine die Erde vorstellende Kugel eine Gummihaut gezogen, schneidet sie längs eines Meridians von Pol zu Pol auf und spannt dieselbe in diesen epicycloidischen Rahmen, dann würde, wenn die Elasticität der Haut so wäre, dass die Theilchen sich proportional der Entfernung anzögen (was wirklich jedoch nicht stattfindet), die Haut so zusammen fahren, dass die Orte auf ihr die hier gezeichnete Lage erhalten würden.

Ihre Construktion ist zwar weniger complicirt, als die einer ähnlichen Karte von Herrn Eisenlohr, die wohl noch besser als die vorliegende ist, aber doch immer noch so schwierig, dass sie ohne Hilfsmittel mathematischer Rechnung nicht construirt werden kann. Die Linearvergrösserung ist da, wo sie am schlechtesten ist, etwa das 8fache gegen die der Mitte, was für eine Abbildung der ganzen Erde ein gutes Resultat ist. Dass diese Karte allgemeine Anwendung finden werde, scheint mir jedoch zweifelhaft, da sie doch immerhin etwas gezwungenes hat. Indessen ist es ein Vortheil, dass die Meridiane ohne Ecken durch die Pole verfolgt werden können und dass eben die Einheit gewahrt ist. Das Original zu dieser Karte ist von Herrn Richard Kiepert in Berlin gezeichnet und hat auch noch die Billigung des verstorbenen Obersten von Sydow erhalten.

Es gibt unendlich viele conforme Abbildungen, und man kann namentlich, wenn man blos einzelne Erdtheile oder Länder, wie Deutschland, oder auch eine Zone abbilden will, eine Vollkommenheit erreichen, die der Wahrheit, d. h. der wirklichen Aehnlichkeit, sehr nahe kommt. Zur Anfertigung solcher Abbildungen hat schon Gauss Regeln angegeben, wir können uns jedoch hier nicht damit befassen, schon deswegen, weil wir uns da mitten in die höheren Theile der Mathematik hineinbegeben müssten. Denn das ganze Problem der conformen Abbildung hängt von einer partiellen Differentialgleichung ab.

Eine der wichtigsten, namentlich für Seefahrer unentbehrliche Karte ist die sogenannte Merkator'sche. Merkator heisst eigentlich Cremer und lebte 1512—1595. Seine Karte verdankt ihren Ursprung dem Bestreben, den Lauf eines im gleichmässigen Curs steuernden Schiffes auf der Karte möglichst leicht, also durch eine gerade Linie richtig einzeichnen zu können. Ein Schiff sucht seinen Curs, so lange es geht, gegen die Magnetnadel immer in derselben Richtung zu erhalten. Also, was dasselbe ist, es strebt danach, alle Meridiane unter demselben Winkel zn schneiden, wenn es dabei auch einen kleinen Umweg macht. Die Linie, welche das Schiff hierbei beschreibt, Loxodrome genannt, ist nämlich nicht die kürzeste zwischen 2 Puncten der Erde. Diese Loxodrome soll auf einer Karte durch eine die Meridiane der Zeichnung ebenfalls unter demselben Winkel schneidende Gerade abgebildet werden. Dieser Winkel heisst die Schiefe. Ist die Schiefe Null, so erhält man die Meridiane selber, ist sie 90°, so erhält man die Parallelkreise. Beide müssen also, da sie selber Loxodromen sind, als gerade Linien dargestellt werden, und es ist somit von vornherein klar, dass das Netz ein geradliniges ist, mit rechtwinkligen Maschen.

Zu Merkator's Zeit konnte man noch nicht Differenziren und Integriren, also konnte man auch noch nichts von der Conformität wissen, und die Aufgabe überhaupt nur annäherungsweise lösen. Die Lösung, die schon die Spanier (z. B. Cortes) erstrebt hatten, gab Merkator in der Regel: „Gradus latitudinum versus utrumque polum auximus pro incremento parallelorum supra rationem quam habent ad aequinoctialem.“

Also, wir lassen die Breitengrade nach den Polen hin in dem Verhältnisse wachsen, in welchem die Parallelkreise zum Aequator stehen. Diese Karte wurde ausgeführt, indem man von Gradminute zu Gradminute die Zunahme der Parallelkreise des Bildes gegen die des Originals bestimmte. Dadurch wurde ein für die Praxis vollkommen hinreichend genaues Resultat erzielt. Nimmt man die Zunahmen unendlich klein, im Sinne der Infinitesimalrechnung, so ergibt sich, dass Länge und Breite des Bildes (l', p') und Originals (l, p), wenn der Halbmesser zur Einheit genommen wird, in der Beziehung

$$l' = l, \; p' = \lg \operatorname{tg} (45^0 + {}^1\!/_2\, p)$$

zu einander stehen. Hat man keinen Netzzeichner, der die Fähigkeit hat, mit trigonometrischen und Logarithmentafeln zu rechnen, so muss man für p' Tafeln vorher ausrechnen, wie solche schon vorhanden sind, und sie dem Zeichner in die Hand geben. Die Längen folgen in gleichen Abständen von einander. Die Linearvergrösserung ist nur von der Breite eines Ortes abhängig und ist $\sec p$, ist also 1 für $p = o$, d. h. auf dem Aequator stimmen Karte und Original überein. Für $p = 60^0$ ist $\sec p = 2$. Bis dahin ist also die Karte vorzüglich, weiter hinauf wird sie verzerrter und kann höchstens bis zum 85. Grade nördlicher und südlicher Breite ausgedehnt werden, weil nachher die Verzerrung übermässig wird, obgleich in sehr kleinen Stücken auch dort noch die Karte richtig sein muss. Da sie sich aber ins Unendliche erstreckt, so ist sie für Polarfahrer nicht brauchbar.

So viel von den conformen Abbildungen. Man hat noch eine andere Art guter Karten, die man aequivalente nennt. Diese Abbildung verzichtet auf getreue Wiedergabe der Winkel, stellt aber dafür die Flächen ihrem Inhalt nach richtig dar.

Sie wird durch die Aufgabe definirt. Die Theile einer Kugel (genauer eines Sphäroids) so auf eine Ebene abzubilden, dass alle Flächentheile, die im Original und der Abbildung einander entsprechen, ihrem Flächeninhalt nach in demselben Verhältnisse stehen. Also wenn eine Reihe von Ländern a, b, c . . Quadratmeilen enthält, und das Bild des ersten a Quadratzoll, so müssen die übrigen genau b c . . Quadratzoll enthalten, wenn auch das Bild verzerrt erscheint. Es leuchtet ein, dass wenn es gelingt, die Verzerrung auf ein geringes Mass zu reduciren, was namentlich bei Karten, die nicht mehr als etwa Europa umfassen, recht gut möglich ist, diese Karten mit manchen Vortheilen verknüpft sind. In den Karten des französischen dépôt de la guerre hat man die sogenannte Bonne'sche Projection, welche eine aequivalente ist, wirklich angewandt. Wir können, ohne viel Formeln zu benutzen, nicht näher auf sie eingehen, ich will nur bemerken, dass sie in der Nähe des Mittelpunctes der Karte ein fast exactes Bild liefert.

Obwohl die Aufgabe der aequivalenten Abbildung ebenso wie die der conformen auf eine partielle Differentialgleichung führt, so hat sie doch nicht in dem Masse wie jene das allgemeine Interesse rege zu halten gewusst. Aus zwei Gründen glaube ich. Einmal ist wohl die Gleichheit der Winkel wirklich meist noch wichtiger als die der

Flächen. Der zweite vielleicht noch mächtigere Grund ist ein mathematischer.

Die Lösung der Aufgabe der conformen Abbildung hat die Ueberwindung grösserer Schwierigkeiten nöthig gemacht, als die der aequivalenten, dadurch ist sie den Mathematikern interessanter geworden. Die conforme Abbildung hat zuerst gezeigt, dass die imaginären Zahlen in eminenter Weise in der realen, in der angewandten Mathematik eine Rolle zu spielen vermögen. Denn die complexen, oder um Ihnen verständlicher zu sein, imaginären Zahlen sind es, mit deren Hilfe das Problem, die Theile einer beliebigen Oberfläche auf die einer beliebigen andern Oberfläche conform, d. h. in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, von Lagrange und Gauss vollständig gelöst worden ist. Dies Problem ist für den Mathematiker so fesselnd, dass es, ganz abgesehen von der Beziehung zur Geographie, durch Nebenbedingungen modificirt und näher bestimmt, die bedeutendsten Kräfte für sich zu gewinnen gewusst hat. Es knüpfen sich daran, abgesehen von Lebenden, die Namen von Lagrange, Gauss und Riemann.

Gehen wir zur aequivalenten Abbildung zurück. Um zunächst die Möglichkeit aquivalenter Abbildungen zu zeigen, denken wir uns ein Quadrat durch parallele Gerade in kleine Quadrate getheilt. Ziehen wir dasselbe an zwei Seiten auseinander, als wenn es von Gummi wäre, so würde, wenn der Gummi die Eigenschaft hätte, in demselben Verhältnisse, in welchem er sich in der einen Richtung ausdehnt, sich in der andern zusammen zu ziehen, so dass der Flächeninhalt constant bliebe, — so würde dieser Flächeninhalt nicht blos im Ganzen derselbe bleiben, sondern auch früher quadratische Maschen auf der Haut würden im Bilde in Rechtecke von demselben Inhalt sich verwandeln. Daraus folgt, dass jede Figur im Original, und in dem durch Ausdehnung und Zusammenziehung entstandenen Bilde aus gleich vielen solcher Maschen besteht, und dass demnach der Flächeninhalt ungeändert geblieben ist. Da haben wir also eine aequivalente Abbildung zweier Ebenenstücke auf einander.

Nun wollen wir nur ein Beispiel einer aequivalenten Karte besprechen, die isocylindrische von Lambert, die wohl die einfachste aequivalente ist, und die Erde auf ein Rechteck abbildet.

Ein Cylinder wird um die Kugel gelegt, so dass er sie im Aequator berührt. Die Meridiane und Parallelkreise werden auf dem Cylinder dadurch abgebildet, dass man die Meridianebenen und Parallelkreisebenen einfach bis zum Schnitt mit dem Cylinder verlängert und ihre Spuren dort verzeichnet. Dann schneidet man den Cylinder auf und wickelt ihn in die Ebene ab. Die Maschen des Gradnetzes sind geradlinig rechteckige und zwar ist $l' = l$, $p' = \sin p$. Während aber die Längenabstände der einzelnen Grade einander gleich sind, nehmen die Breitenabstände nach den Polen zu rasch ab, und die Karte wird nach den Polen hin sehr verzerrt sein. Da der Flächeninhalt einer Zone gleich der Länge eines grössten Kreises (Aequators), multiplicirt mit der Höhe der Zone, ist, und die beiden Grössen unverändert auf den Cylinder übertragen und auf die Ebene abgewickelt werden, so ist der Inhalt jeder Zone auf Kugel und Karte derselbe. Da ferner die Zonen auf Kugel und Karte durch die Meridiane in *gleiche* Theile getheilt werden, so sind die Maschen des Netzes auf Kugel und Karte flächengleich, die Abbildung ist aequivalent.

Es macht keine grossen Schwierigkeiten, die Erde oder auch einen ebenen Kreis aequivalent auf ein Dreieck oder ein Viereck abzubilden.

Um noch ein paar Namen zu erklären, bemerke ich, dass eine Abbildung gnomonisch oder central genannt wird, wenn sie eine perspectivische ist, mit dem Mittelpunct der Erde als Centrum. Zenithal heisst eine Projection, wenn alle Puncte, die von einem Punct A auf der Erde gleichweit abstehen, auf der Karte auf einem Kreise liegen, dessen Centrum A entspricht (es abbildet), und wenn alle durch A gehenden grössten Kreise auf der Karte durch gerade Linien dargestellt werden.
