

DAS DIRAC – FELD IM ELEKTROMAGNETISCHEN POTENTIAL EINES GELADENEN STRINGS

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik
der Johann Wolfgang Goethe – Universität
in Frankfurt am Main

von

Luis Anaguano

aus Ecuador

Frankfurt am Main 2005
DF1

Vom Fachbereich Physik der Johann Wolfgang Goethe – Universität
als Dissertation angenommen.

Dekan : Prof. Dr. Wolf Aßmus

Gutachter : Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Walter Greiner

Prof. Dr. Stefan Schramm

Datum der Disputation: **1.11.2005**

INHALTSVERZEICHNIS

1. DIRAC – FELD IM ELEKTROMAGNETISCHEN POTENTIAL	3
1.1. Einleitung.....	3
2. DAS ELEKTROSTATISCHE POTENTIAL EINES GLEICHFORMIG GELADENEN, GERADEN SEILS (STRINGS)	9
2.1. Poissonsche Gleichung in Zylinderkoordinaten.....	9
2.2. Das elektrische Potential des Seils (Strings).....	10
2.2.1. Das elektrische Potential im Außenraum des Strings.....	14
2.2.2. Das elektrische Potential im Innenraum des Strings.....	16
3. DIE DIRAC – GLEICHUNG IN ZYLINDRISCHEN KOORDINATEN	24
3.1. Die Dirac Matrizen in Zylinderkoordinaten.....	25
3.2. Der Übertragungskoeffizient.....	26
3.3. Die Dirac – Gleichung in Zylinderkoordinaten.....	28
3.4. Die Viererstromdichte.....	34
3.5. Der Energie – Impuls – Tensor des Dirac – Feldes.....	35
3.6. Der Energieeigenwert.....	39
3.7. Die Greensfunktion der Dirac – Gleichung.....	40
4. DIE RADIALE DIRAC – GLEICHUNG	43
4.1. Die radiale Dirac – Gleichung.....	44
4.2. Der effektive Impuls und die Schrödinger – artige Form der Dirac - Gleichung	49
4.3. Die Singularitäten des effektiven Impulses.....	50
4.4. Die Kurve der Eigenenergie.....	53
4.5. Der Fall eines dünnen und langen Strings.....	57
5. DIE GEBUNDENE ZUSTÄNDE	58
5.1. Asymptotische Lösung der Dirac – Gleichung (unterkritischer Fall).....	58
5.2. Lösung der Dirac – Gleichung mit isolierten Umkehrpunkten des effektiven Impulses.....	59
5.3. Die Eigenenergie und Wellenfunktionen der Gebundenen Zustände.....	63
5.4. Die Normierung der Wellenfunktionen der gebundene Zustände.....	66
5.5. Die Berechnung der Eigenenergie.....	71
6. DIE RESONANZEN	78
6.1. Asymptotische Lösung der Dirac – Gleichung (überkritischer Fall).....	78

6.2. Die Phasenverschiebung.....	80
6.3. Die Resonanzen.....	82
6.4. Die Lebensdauer der Resonanzen.....	90
7. DAS KONTINUUM	93
7.1. Die Wellenfunktionen.....	93
8. DIE ABSCHIRMUNG DES POTENTIALS	95
8.1. Die Ladungsdichte des Vakuums.....	96
8.2. Die radiale Ausdehnung des Vakuumladungsverteilung.....	97
8.2.1. Der Fall $V_o \ll -m_o$	97
8.2.2. Der Fall $-m_o < V_o < 0$ und $L \gg L_F$	98
8.3. Lösung der Poissonschen - Gleichung.....	99
8.4. Die obere Grenze des Impulses.....	106
8.5. Die Abschirmung des Potentials im Fall eines dünnen und langen Strings mit konstanter Ladung pro Länge.....	108
9. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	117
ANHANG	128
A Tabellen.....	128
B Die Klein – Gordon Gleichung.....	135
LITERATURVERZEICHNIS	142

Kapitel 1

DIRAC – FELD IM ELEKTROMAGNETISCHEN POTENTIAL

1.1. Einleitung

Wir betrachten ein Dirac – Feld im elektromagnetischen Potential eines geladenen Strings und berechnen die gebundenen Zustände im unterkritischen Fall und die Resonanzen im überkritischen Fall für ein statisches äußeres elektromagnetisches Feld $A_\mu = (A_o, 0)$. Die Näherung des äußeren Feldes besagt, dass $A_\mu = (A_o, 0)$ als klassisch vorgegeben und durch die Elektronen nicht beeinflussbar angenommen wird.

Um den wesentlichen Effekt zu erfassen, betrachten wir einen elektrostatischen Potentialtopf endlicher Ausdehnung $A_o(\vec{x})$. Wenn das Potential positiv ist, dann können Elektronen im Topf gebunden werden. Das heißt, dass ein oder mehrere elektronische Niveaus E_1, E_2, \dots in die Energielücke zwischen $E = +m_o c^2$ und $E = -m_o c^2$ abgesenkt werden. Die dazugehörigen Wellenfunktionen sind in diesem Bereich des Potentialtopfes räumlich lokalisiert

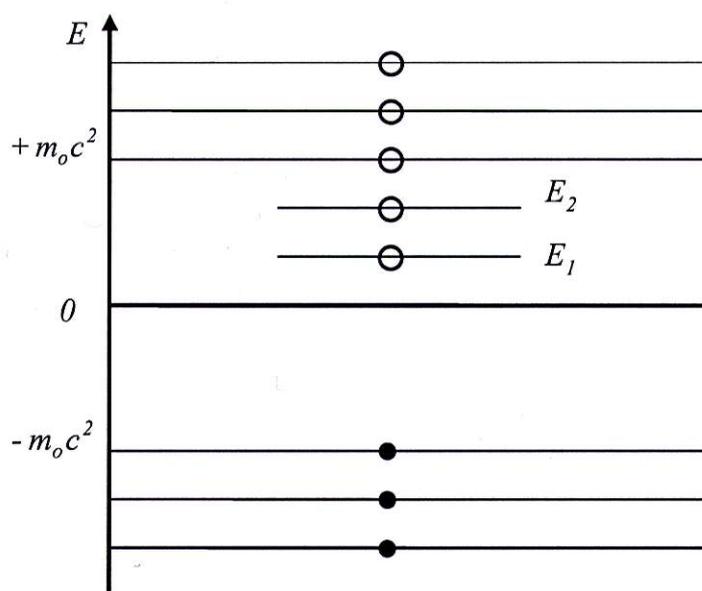


Abb.1.1. Spektrum der Dirac – Gleichung in Anwesenheit eines schwachen äußeren Potentials

Die Struktur des Vakuums bleibt unverändert, da es weiterhin energetisch am günstigsten ist, wenn die abgesenkten Zustände unbesetzt bleiben (**Abb.1.1**).

Dies scheint sich zu ändern, wenn das Potential so stark ist, dass E_1 negativ wird, das heißt, wenn die Bindungsenergie $E_B = m_0 c^2 - E_1$ den Wert $m_0 c^2$ überschreitet.

Durch Hinzufügen eines Elektrons kann mehr Energie freigesetzt werden, als in dessen Ruhemasse steckt. Wegen der Masse – Energie – Äquivalenz wird das System leichter, als es ohne Elektron wäre. Da aber die Ladungserhaltung streng erfüllt werden muss, kann kein Elektron für sich allein gebildet werden, sondern immer nur Elektron – Positron – Paare. Die Energieschwelle dafür ist $2 m_0 c^2$, also bleibt auch ein System mit freien Energieniveaus im Bereich $- m_0 c^2 < E_1 < 0$ stabil (vgl. **Abb.1.2**)

Das ändern sich jedoch, sobald ein Zustand unter die Schwelle $E = - m_0 c^2$ absinkt. Dann kann ein Elektron – Positron – Paar erzeugt werden (**Abb.1.3**), ohne dass zusätzliche Energie (etwa durch ein einfallendes Photon) aufgewandt werden muss. Es bleibt sogar noch ein Überschuss, der als kinetische Energie zur Verfügung steht, nämlich $E_{kin} = E_B - 2 m_0 c^2 = | E_1 | - m_0 c^2$.

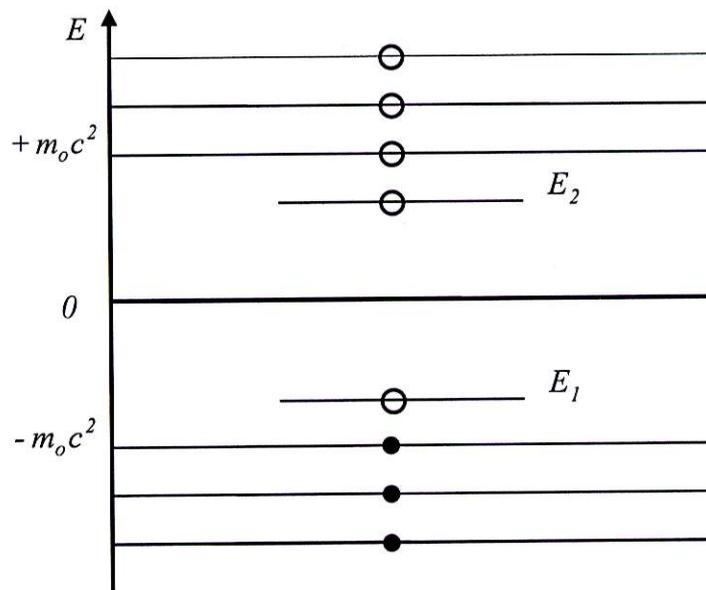


Abb.1.2. Das Vakuum der Dirac – Theorie in einem starken äußeren Potential, Unterkritisch: das Vakuum ist neutral.

Physikalisch wird daher bei Überschreitung einer kritischen Potentialstärke folgendes geschehen: Es wird spontan ein e^+e^- - Paar erzeugt. Das Elektron wird angezogen und bleibt im Potentialtopf sitzen, wohingegen das Positron abgestoßen wird und daher mit der kinetische Energie E_{kin} entweicht.

Man kann diesen Prozeß auch so interpretieren: Bei der Erhöhung der Potentialstärke taucht der Zustand E_1 in das untere Kontinuum ein und verschmilzt mit diesem. War er vorher unbesetzt, dann enthält der Dirac – See nunmehr ein zusätzliches Loch, was physikalisch einem Positron entspricht. Wenn man lange genug wartet, wird sich daher ein neuer stabiler Grundzustand ausbilden: Der vorher (im unterkritischen Fall) leere Potentialtopf ist nunmehr mit einem Elektron gefüllt oder, anders ausgedrückt, das vorher neutrale Vakuum ist in ein geladenes Vakuum zerfallen. Natürlich wird die Ladungserhaltung dadurch nicht verletzt. Vielmehr wird eine positive Ladungseinheit durch das Positron ins Unendliche fortgetragen, oder, genauer gesagt, sie verschwindet aus jedem beliebig großen aber endliche Volumenbereich, den man um den Potentialtopf herumlegen kann.

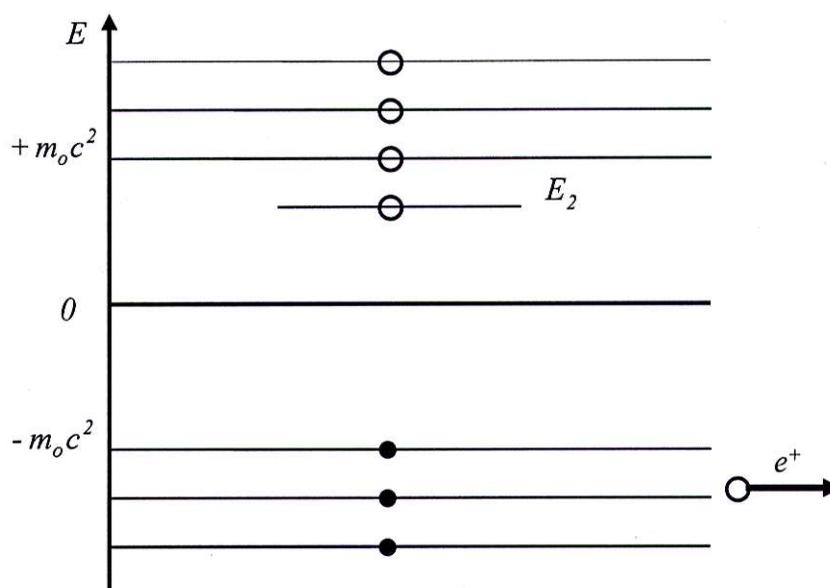


Abb.1.3. Überkritisch: Es wird spontan ein Positron emittiert und das Vakuum wird geladen

Die Ladung Q_{vac} , die das überkritische Vakuum annimmt, hängt von der Stärke des Potentials ab, nämlich davon, wie viele der Niveaus E_1, E_2, \dots die Schwelle $-m_0c^2$ unterschritten haben und damit eingetaucht sind.

Bevor wir eine quantitative Beschreibung geben, ist es nützlich, sich qualitativ die Struktur der quantenmechanischen Wellenfunktionen in den verschiedenen Fällen zu überlegen. Wir suchen Eigenlösungen Ψ der stationären Dirac – Gleichung mit einem skalaren elektromagnetischen Potential $A_0(x)$, so dass:

$$(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m_0 c^2 + eA_0(x)) \Psi(x) = E\Psi(x)$$

Entscheidend ist hier, dass Energie E und Potential $V(x) = eA_0(x)$ in der Kombination $E - V(x)$ auftreten. Das bedeutet, dass die Grenzen der Energielücke, die in feldfreien Fall

zwischen $+m_0 c^2$ und $-m_0 c^2$ liegt, lokal durch das Potential verschoben werden. Innerhalb der Energielücke liegt der klassisch verbotene Bereich, in dem nur exponentiell abklingende Wellenfunktionen möglich sind. Außerhalb der Lücke, d.h. für $|E - V| > m_0 c^2$ gibt es oszillierende Lösungen. Da $V(x)$ asymptotisch verschwinden soll, erhält man für $E > m_0 c^2$ und für $E < -m_0 c^2$ oszillierende Kontinuumswellenfunktionen, die sich bis ins Unendliche erstrecken. Diese werden normalerweise durch das Potential nur etwas deformiert.

Zwei typische Wellenfunktionen des oberen (a) und unteren (b) Kontinuums sind in **Abb.1.4** skizziert (Die Darstellung ist nur schematisch, denn eigentlich handelt es sich ja um vierkomponentige Spinorfunktionen). Das attraktive Potential $V(x)$ macht es möglich, dass im Bereich $-m_0 c^2 < E < +m_0 c^2$ bei diskreten Energien räumlich lokalisierte gebundene Wellenfunktionen liegen können (Fall (c) in **Abb.1.4**). Falls der Potentialtopf jedoch tief genug ist, kann einer (oder mehrere) der gebundenen Zustände bis unter die Energie $-m_0 c^2$ absinken. Die Wellenfunktion ändert dann zwangsläufig ihren Charakter, da sie nun nicht mehr exponentiell abfallen kann, sondern sich bis ins Unendliche erstreckt. Ihre Gestalt ist als Fall (d) in der **Abb.1.4** dargestellt.

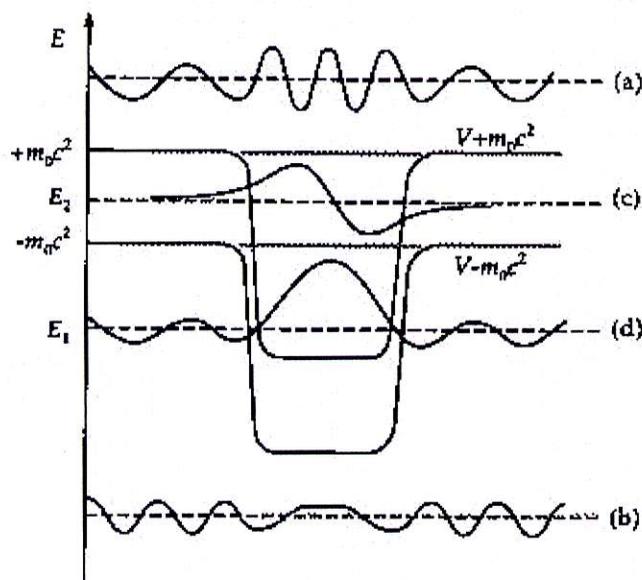


Abb.1.4. Schematische Darstellung der Dirac – Wellenfunktionen eines tiefen Potentialtopfes: gebundener Elektronenzustand.

Man kann nun drei Bereiche unterscheiden: Im inneren des Potentialtopfes erinnert die Wellenfunktion an einen gewöhnlichen gebundenen Zustand, außen oszilliert sie wie eine Kontinuumswelle. Beide Bereiche sind nun durch eine Zone verbunden, in welcher die Energie in der verbotenen Energielücke liegt.

Im Gegensatz zum üblichen kugelsymmetrischen Problem atomarer Zustände befassen wir uns in dieser Arbeit mit den Lösungen der Dirac – Gleichung für ein zylindersymmetrisches Potential.

Das Problem hat Ähnlichkeiten mit dem der überkritischen Punktladung [Gär₁₁] .

Unter Berücksichtigung der endlichen Kernaushdehnung erreichen alle Niveaus bei einer zugehörigen kritischen Ladung Z_{kr} den Rand des unteren Kontinuums $E = -m_0 c^2$. Mit wachsendem Z sinken die Energie immer weiter ab. Für den niedrigsten Zustand ($1s, \kappa = -1$) wird die Energien negativ wenn $Z > 150$. Schließlich erreicht das $1s$ - Niveau bei einer kritischen Ladung $Z_{kr}^{1s/2} \approx 173$ den Wert $E = -m_0 c^2$. Dasselbe geschieht für den $2p_{1/2}$ - Zustand mit $\kappa = +1$ bei $Z_{kr}^{1p/2} \approx 185$, während höhere Zustände erst bei weit größerer Kernladung das untere Kontinuum erreichen.

Der physikalisch interessante Effekt tritt jedoch auf, wenn die kritische Kernladung Z_{kr} überschritten wird. Dann taucht der gebundene Zustand in das untere Kontinuum der Dirac – Gleichung ein es können spontan zwei(wegen der Spin – Entartung, $m = \pm \frac{1}{2}$) Positronen emittiert werden. Mathematisch äußert sich das darin, dass das Kontinuum eine *Resonanz* aufweist. Der vormals gebundene Zustand existiert nun nicht mehr als diskrete Eigenlösung der Dirac – Gleichung, vielmehr ist er dem Kontinuum beigemischt. Diese Beigemischung konzentriert sich in einem engen Bereich mit der Breite Γ um eine mittlere Resonanzenergie E_R .

Geht man von einem endlichen Kern (Radius R) mit hoher Ladung ($Z > \frac{1}{\alpha} = 137$) aus, so ergibt sich Ähnliches, wenn wir den Radius eines Kernes mit höherer Ladung $Z > \frac{1}{\alpha} = 137$ verkleinern, erreichen die gebundenen Zustände die Kontinuums Grenzen bei $E_n = -m_0$, und werden überkritisch. Der Wert des Radius unterhalb dessen die gebundenen Zustände überkritisch werden, wird ausgedrückt durch

$$R_n \approx \frac{1}{2m_0 Z \alpha} \exp \left\{ -2 \left(\frac{n\pi}{\nu} \right) + \gamma \right\} , \quad n = 1, 2, \dots$$

wie von P. Gärtner et al [Gär₁₁] gezeigt wurde.

Dabei ist $\gamma \approx 0.5772$ und $\nu = 2\sqrt{(Z\alpha)^2 - \kappa^2}$.

Wenn wir den Radius des Kernes verkleinern, werden also zunächst eine unendliche Anzahl von $s_{1/2}$ Zuständen überkritisch.

Allerdings führt die Ladung des Vakuums zu einer Abschirmung, die die Zentralladung abschwächt.

Das Abschirmungspotential weit von der elektronischen Wolke wird ausgedrückt durch

$$V(r) = - \frac{(Z - Q_{vac}) \alpha}{r} = - \frac{Z_{eff} \alpha}{r} .$$

Wie in [Gär₁₁] gezeigt wurde ergibt sich im Grenzfall des Kernradius $R \rightarrow 0$, dass sich die Ladung unabhängig vom ursprünglichen Wert von Z bis auf

$$Z_{eff} = Z - Q_{vac} \approx \frac{1}{\alpha} = 137 \text{ abschirmt.}$$

Die Elektronen der entstehenden reellen Vakuumpolarisation werden eine Ladungswolke in der Nähe einer geraden Seile (String) der Länge L bilden, die dessen elektrostatisches Potential abschirmt. Ziel unserer Untersuchungen wird es sein, das System String plus Vakuumladung selbstkonsistent zu beschreiben, das heißt, die Abschirmung des Potentials im Rahmen einer Hartree - Näherung etc. zu beschreiben. Am Schluss soll der Limes $L \rightarrow \infty$ gebildet werden, wobei eine totale Abschirmung des Potentials erwartet wird.

Kapitel 2

DAS ELEKTROSTATISCHE POTENTIAL EINES GLEICHFORMIG GELADENEN, GERADEN SEILS (STRINGS)

Wir berechnen das elektrostatische Potential Φ eines geladenen Zylinders. Der Zylinder hat eine endliche Länge L und Radius r_0 , und seine beiden Deckflächen liegen bei $z = L$ bzw. $z = 0$ (Abb.2.2). Der Zylinder hat eine kontinuierliche homogene Ladungsdichte ρ_0 .

Wir betrachten das Problem in einem zylindrischen Koordinatensystem. In diesem Koordinatensystem und mit zylindrischer Symmetrie lösen wir die Poissonsche Gleichung mittels Greenscher Funktionen in Zylinderkoordinaten.

2.1. Poissonsche Gleichung in Zylinderkoordinaten.

In krummlinigen Koordinaten nimmt die Poissonsche Gleichung die Form an:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) = -4\pi\rho \quad (2.1)$$

In zylindrische Koordinaten (t, r, φ, z) ist die Minkowskimetrik:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2 \quad (2.2)$$

Die Metrik - Koeffizienten sind

$$g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (2.3)$$

Der metrische Determinante ist:

$$g = -r^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-g} = r \quad (2.4)$$

Falls Φ unabhängig von der Zeit ist; lautet die Poisson - Gleichung:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r g^{rr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r g^{\varphi\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r g^{zz} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right\} = -4\pi\rho \quad (2.5)$$

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad (2.6)$$

Daraus folgt schließlich die Poissonsche Gleichung in Zylinderkoordinaten zu der bekannten Form:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 4\pi\rho \quad (2.7)$$

2.2. Das elektrische Potential des Seils (Strings)

Wir betrachten einen Zylinder mit homogener kontinuierlicher Ladungsdichte. Die Ladungsdichte ist dann konstant und gegeben durch $\rho(r) = \rho_0 \theta(r_0 - r)$ (**Abb.2.1**).

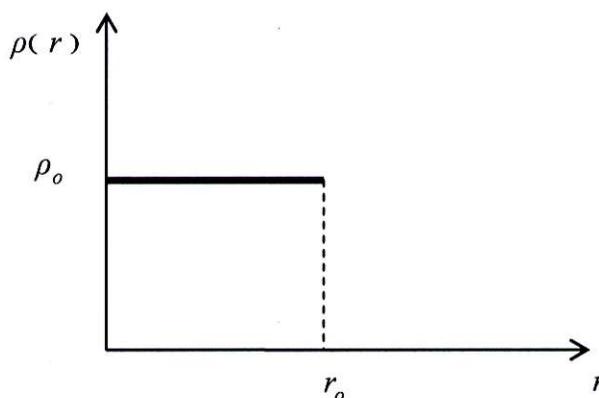


Abb.2.1. Radiale Ladungsverteilung eines Zylinders mit Radius r_0

Das Potential $\Phi(\vec{x})$ ergibt sich als das Integral über die gesamte Ladungsverteilung:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{x}_1) \rho(\vec{x}_1) d^3 x_1 \quad (2.8)$$

und befriedigt die Poissonsche Gleichung: $\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x})$. Das Volumen des Strings ist mit Ω bezeichnet.

Die Entwicklung der Coulomb - Greensfunktion $G(\vec{x}, \vec{x}_1) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|}$ lautet [Jac ¹³⁹/₂₃]

$$G(\vec{x}, \vec{x}_1) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z_1)] \left\{ \frac{1}{2} I_0(kr_<) K_0(kr_>) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\varphi-\varphi_1)] I_m(kr_<) K_m(kr_>) \right\} \quad (2.9)$$

Für konstante Ladungsdichte $\rho(r) = \rho_o \theta(r_o - r)$ lautet das Potential gemäß Gleichung (2.8)

$$\Phi(\vec{x}) = \rho_o \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{x}_1) r_1 dr_1 d\varphi_1 dz_1 \quad (2.10)$$

Wir berechnen die folgenden Integrale:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cos[m(\varphi - \varphi_1)] \quad (2.11)$$

$$I_2 = \int_0^L dz_1 \cos[k(z - z_1)] \quad (2.12)$$

Das erste Integral (2.11) lautet:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cos[m(\varphi - \varphi_1)] = \frac{1}{m} [\sin[m(2\pi - \varphi)] + \sin[m(\varphi)]] \quad (2.13)$$

Wir verwenden: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Es ergibt sich für $m = 0$:

$$I_1 = (2\pi - \varphi) \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin[m(2\pi - \varphi)]}{m(2\pi - \varphi)} + (\varphi) \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin[m(\varphi)]}{m(\varphi)} = 2\pi \quad (2.14)$$

† für $m = 1, 2, \dots, I_1 = 0$.

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cos[m(\varphi - \varphi_1)] = 2\pi \delta_{om} \quad (2.15)$$

Das zweite Integral (2.12) lautet:

$$I_2 = \int_0^L dz_1 \cos[k(z - z_1)] = \frac{1}{k} \{ \sin[k(L - z)] + \sin[kz] \} \quad (2.16)$$

Abb.2.2 zeigt die Geometrie des Zylinders.

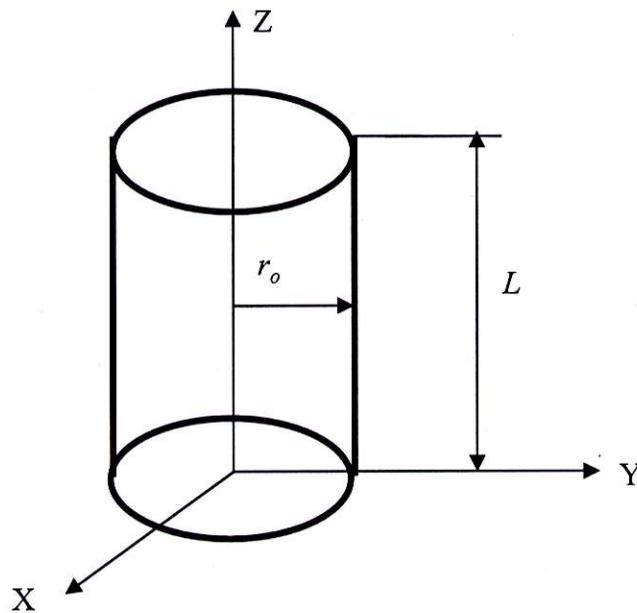


Abb.2.2. Der Zylinder hat eine endliche Länge L und Radius r_o , und seine beiden Deckflächen liegen bei $z = L$ bzw. $z = 0$

Die Gleichungen (2.9), (2.15) und (2.16) setzen wir in (2.10) ein, und erhalten für das Potential:

$$\Phi(x) = 4\rho_o \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L - z)] + \sin[kz]}{k} \right\} \int_0^{r_o} dr_1 r_1 \{ I_o(kr_<) K_o(kr_>) \} \quad (2.17)$$

Jetzt bezeichnen wir mit $r_<$ den kleineren und mit $r_>$ den größeren der beide Werte von r und r_1 . Im Innenraum des Zylinders ergeben sich die folgenden Fälle:

$$\begin{aligned} r_< &= r_1 \quad \text{und} \quad r_> = r \\ r_< &= r \quad \text{und} \quad r_> = r_1 \end{aligned}$$

Deshalb müssen wir das Potential (2.17) in zwei Teile trennen.

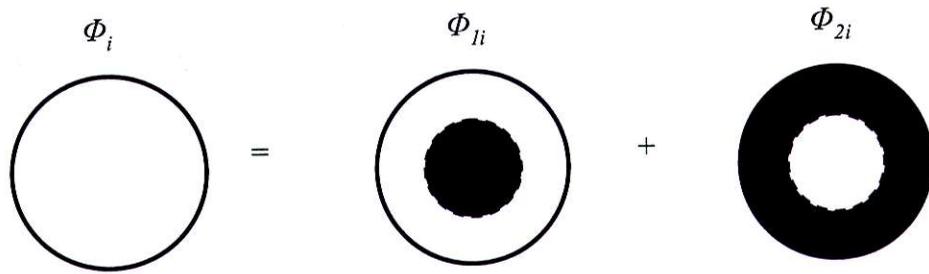


Abb.2.3. Potential im Innenraum des Zylinders

$$\Phi_{1i}(x) = 4\rho_o \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[k(z)]}{k} \right\} K_o(kr) \int_0^r dr_1 r_1 I_o(kr_1) \quad (2.18)$$

$$\Phi_{2i}(x) = 4\rho_o \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[k(z)]}{k} \right\} I_o(kr) \int_r^{r_o} dr_1 r_1 K_o(kr_1)$$

Das gesamte Potential ist im Innenraum des Zylinders die Summe der beiden Teile

$$\Phi_i(x) = \Phi_{1i}(x) + \Phi_{2i}(x) \quad (2.19)$$

Im Außenraum des Zylinders haben wir nur den Fall:

$$r_< = r_1 \quad \text{und} \quad r_> = r$$

$$\Phi_a(x) = 4\rho_o \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[k(z)]}{k} \right\} K_o(kr) \int_0^{r_o} dr_1 r_1 I_o(kr_1) \quad (2.20)$$

Wir benutzen die folgenden Ausdrücke für Integrale von Zylindrischen Funktionen [Gra⁶³⁴]

$$\int_z z^{\nu+1} C_\nu(z) dz = z^{\nu+1} C_{\nu+1}(z) \quad \text{oder} \quad \int_z z^{-\nu+1} C_\nu(z) dz = -z^{\nu+1} C_{\nu-1}(z) \quad (2.21)$$

und zusammen mit der Beziehung [Wat⁷⁹₃₇],

$$K_{-v}(z) = K_v(z)$$

ergeben sich die folgenden Integrale

$$\int_0^{r_0} dr_1 r_1 I_0(kr_1) = \frac{r_0 I_1(kr_0)}{k} \quad (2.22a)$$

$$\int_0^r dr_1 r_1 I_0(kr_1) = \frac{r I_1(kr)}{k} \quad (2.22b)$$

$$\int_r^{r_0} dr_1 r_1 K_0(kr_1) = \frac{r K_1(kr) - r_0 K_1(kr_0)}{k} \quad (2.23)$$

Die Gleichungen (2.22) und (2.23) setzen wir in (2.18) und (2.20) ein, und erhalten:

$$\Phi_{1i}(x) = 4\rho_0 \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[kz]}{k} \right\} \left\{ \frac{r K_0(kr) I_1(kr)}{k} \right\} \quad (2.24)$$

$$\Phi_{2i}(x) = 4\rho_0 \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[kz]}{k} \right\} I_0(kr) \left\{ \frac{r K_1(kr) - r_0 K_1(kr_0)}{k} \right\}$$

$$\Phi_a(x) = 4\rho_0 \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[kz]}{k} \right\} \left\{ \frac{r_0 K_0(kr) I_1(kr_0)}{k} \right\} \quad (2.25)$$

2.2.1. Das elektrische Potential im Außenraum des Strings

Zur Berechnung des dritte Integrals

$$\Phi_a(x) = 4\rho_0 \int_0^\infty dk \left\{ \frac{\sin[k(L-z)] + \sin[kz]}{k} \right\} \left\{ \frac{r_0 K_0(kr) I_1(kr_0)}{k} \right\}$$

entwickeln wir $I_1(kr_0)$ in eine Reihe

$$I_1(kr_o) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{kr_o}{2}\right)^{2j+1}}{j!(j+1)!} \quad (2.26)$$

und setzen (2.26) in (2.25) ein, so dass sich

$$\Phi_a(x) = \rho_o \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_o^{2j+2}}{2^{2j+1} j!(j+1)!} \int_0^{\infty} dk \{ \sin[k(L-z)] + \sin[kz] \} k^{2j+1} K_o(kr) \quad (2.27)$$

ergibt. Wir benutzen das folgende Integral [Gra₁₃⁷⁴⁷]

$$\int_0^{\infty} x^\lambda K_\mu(ax) \sin(bx) dx = \frac{2^\lambda b \Gamma\left(\frac{2+\mu+\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\lambda-\mu}{2}\right)}{a^{2+\lambda}} {}_2F_1\left(\frac{2+\mu+\lambda}{2}, \frac{2+\lambda-\mu}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{b}{a}\right)^2\right) \quad (2.28)$$

$Re(-\lambda \pm \mu) < 2 \quad \text{und} \quad Re a > 0, \quad b > 0$

und erhalten damit für (2.27):

$$\Phi_a(x) = r_o \rho_o \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_o}{r}\right)^{1+2j} \Gamma^2\left(\frac{1+2j}{2}\right)}{j!(j+1)!} \left\{ (L-z) {}_2F_1\left(\frac{1+2j}{2}, \frac{1+2j}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L-z}{r}\right)^2\right) + \right. \quad (2.29)$$

$$\left. + z {}_2F_1\left(\frac{1+2j}{2}, \frac{1+2j}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{z}{r}\right)^2\right) \right\}$$

$$\Phi_a(x) = \pi \rho_o \left(\frac{r_o^2}{r}\right) \left\{ (L-z) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L-z}{r}\right)^2\right) + z {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{z}{r}\right)^2\right) \right\} +$$

$$+ r_o \rho_o \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_o}{r}\right)^{1+2j} \Gamma^2\left(\frac{1+2j}{2}\right)}{j!(j+1)!} \left\{ (L-z) {}_2F_1\left(\frac{1+2j}{2}, \frac{1+2j}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L-z}{r}\right)^2\right) + \right.$$

$$\left. + z {}_2F_1\left(\frac{1+2j}{2}, \frac{1+2j}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{z}{r}\right)^2\right) \right\} \quad (2.30)$$

Mit der Formel [Gra₁₃¹⁰⁴²]:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -[y]^2\right) = \frac{\text{Arsh}(y)}{y} \quad (2.31a)$$

$$\text{Arsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad (2.31b)$$

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \Phi_a(x) = & \pi\rho_0 r_0^2 \ln\left(\frac{L-z}{r} + \frac{1}{r}\sqrt{(L-z)^2 + r^2}\right) + \pi\rho_0 r_0^2 \ln\left(\frac{z}{r} + \frac{1}{r}\sqrt{z^2 + r^2}\right) + \\ & + r_0 \rho_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1+2j} \Gamma^2\left(\frac{1+2j}{2}\right)}{j!(j+1)!} \left\{ (L-z) {}_2F_1\left\{\frac{1+2j}{2}, \frac{1+2j}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L-z}{r}\right)^2\right\} \right. \\ & \left. + z {}_2F_1\left\{\frac{1+2j}{2}, \frac{1+2j}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{z}{r}\right)^2\right\} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Ladungsdichte ist gegeben durch

$$\rho_0 = \frac{Ze}{V} = \frac{Ze}{\pi r_0^2 L} \quad (2.33)$$

Wobei Ze die Ladung des Zylinders ist.

Auf einer Ebene $z = \frac{L}{2}$ und mit der hypergeometrischen Funktion für $j = 1$

$${}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right) = \frac{8}{\left(\frac{L^2 + 4r^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.34)$$

folgt schließlich für die Potentialverteilung Außenraum des Zylinders:

$$\Phi_a\left(r \geq r_0, z = \frac{L}{2}\right) = \frac{2Ze}{L} \left\{ \ln\left(\frac{L}{2r} + \frac{1}{2r}\sqrt{L^2 + 4r^2}\right) + \frac{r_0^2 L}{2} (L^2 + 4r^2)^{-\frac{3}{2}} + \dots \right\} \quad (2.35)$$

2.2.2. Das elektrische Potential im Innenraum des Strings

An der Mantelfläche müssen die beiden Lösungen und Ihre Ableitungen aneinander angeschlossen werden

Auf einer Ebene $z = \frac{L}{2}$ und auf der Mantelfläche $r = r_0$ gilt

$$\Phi_i(r=r_o) = \Phi_a(r=r_o) = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} \left\{ \frac{r_o K_o(kr_o) I_1(kr_o)}{k} \right\} \quad (2.36)$$

Wir berechnen die Ableitung von $\Phi_a(r)$

$$\partial_r \Phi_a = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} \left\{ \frac{r_o [\partial_r K_o(kr)] I_1(kr_o)}{k} \right\}, \quad (2.37)$$

$$\partial_r K_o(kr) = -k K_1(kr), \quad (2.38)$$

wird (2.38) in (2.37) eingesetzt, ergibt sich

$$\partial_r \Phi_a = -8\rho_o r_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} K_1(kr) I_1(kr_o) \quad (2.39)$$

und für die Ableitung auf der Mantelfläche

$$\partial_r \Phi_a(r=r_o) = -8\rho_o r_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} K_1(kr_o) I_1(kr_o) \quad (2.40)$$

Wir berechnen die nun Ableitung von $\Phi_i(r)$

$$\partial_r \Phi_i = \partial_r \Phi_{li} + \partial_r \Phi_{2i} \quad (2.41)$$

wobei

$$\Phi_{li}(r) = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} \left\{ \frac{r K_o(kr) I_1(kr)}{k} \right\} \quad (2.42)$$

$$\Phi_{2i}(r) = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} I_o(kr) \left\{ \frac{r K_1(kr) - r_o K_1(kr_o)}{k} \right\}.$$

Die Ableitung von Φ_{li} ist

$$\partial_r \Phi_{li} = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} \partial_r \left\{ \frac{r K_o(kr) I_1(kr)}{k} \right\} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \partial_r [r K_o(kr) I_1(kr)] &= K_o(kr) I_1(kr) + r [\partial_r K_o(kr)] I_1(kr) + r K_o(kr) [\partial_r I_1(kr)] \\ \partial_r K_o(kr) &= -k K_1(kr) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\partial_r I_1(kr) = k I_o(kr) - \frac{1}{r} I_1(kr) \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \partial_r [r K_o(kr) I_1(kr)] &= K_o(kr) I_1(kr) - rk K_1(kr) I_1(kr) + rk K_o(kr) I_o(kr) - K_o(kr) I_1(kr) \\ &= -rk K_1(kr) I_1(kr) + rk K_o(kr) I_o(kr) \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\Rightarrow \partial_r \Phi_{1i} = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} r [-K_1(kr) I_1(kr) + K_o(kr) I_o(kr)] \quad (2.47)$$

Für die Ableitung von Φ_{2i} liefert eine analoge Rechnung mit Hilfe von

$$\partial_r I_o(kr) = k I_1(kr) \quad (2.48)$$

$$\partial_r K_1(kr) = - \left[k K_o(kr) + \frac{1}{r} K_1(kr) \right] \quad (2.49)$$

das Ergebnis

$$\partial_r \Phi_{2i} = 8\rho_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} [I_1(kr) \{r K_1(kr) - r_o K_1(kr_o)\} - r K_o(kr) I_o(kr)] \quad (2.50)$$

Wir setzen (2.47) und (2.50) in (2.41) ein, ergibt

$$\partial_r \Phi_i = -8\rho_o r_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} I_1(kr) K_1(kr_o) \quad (2.51)$$

Auf der Mantelfläche lautet die Ableitung von Φ_i :

$$\partial_r \Phi_i (r=r_o) = -8\rho_o r_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} I_1(kr_o) K_1(kr_o) \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_r \Phi_i(r=r_o) = \partial_r \Phi_a(r=r_o) \quad (2.53)$$

Im Innenraum des Zylinders berechnen wir das Potential durch Integration von $\partial_r \Phi_i$ mit Hilfe der Gleichung (2.51)

$$\partial_r \Phi_i = -8\rho_o r_o \int_0^\infty dk \frac{\sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right]}{k} I_1(kr) K_1(kr_o)$$

Wir entwickeln $I_1(kr)$ in eine Reihe

$$I_1(kr) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{kr}{2}\right)^{2j+1}}{j!(j+1)!} \quad (2.54)$$

$$\partial_r \Phi_i = -\rho_o r_o \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{2j+1}}{2^{2j-2} j!(j+1)!} \int_0^\infty dk \left(k^{2j} K_1(kr_o) \sin\left[k\left(\frac{L}{2}\right)\right] \right) \quad (2.55)$$

und erhalten mit der Formel (2.28)

$$\partial_r \Phi_i = -2\rho_o \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)L\left(\frac{r}{r_o}\right)^{2j+1}}{j!(j+1)!} {}_2F_1\left\{j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_o}\right)^2\right\} \quad (2.56)$$

Wir integrieren (2.56) nach r

$$\Phi_i = -\rho_o r_o \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)L\left(\frac{r}{r_o}\right)^{2j+2}}{j!(j+1)!(j+1)} {}_2F_1\left\{j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_o}\right)^2\right\} + C \quad (2.57)$$

Die Konstante C wird durch die folgende Bedingung bestimmt

$$\Phi_i(r_o) = \Phi_a(r_o), \quad (2.58)$$

was

$$C = \rho_o r_o \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)L}{j!(j+1)!} \left\{ \frac{\Gamma\left(j+\frac{3}{2}\right)}{(j+1)} {}_2F_1\left(j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_o}\right)^2\right) + \Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right) {}_2F_1\left(j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_o}\right)^2\right) \right\} \quad (2.59)$$

ergibt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Phi_i = \frac{2Ze}{L} \frac{1}{2\pi r_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})L}{j!(j+1)!} [\Gamma(j+\frac{1}{2}) {}_2F_1(j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(\frac{L}{2r_0})^2) + \\ + \frac{\Gamma(j+\frac{3}{2})}{(j+1)} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2j+2} \right) {}_2F_1(j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(\frac{L}{2r_0})^2)] \end{aligned} \quad (2.60)$$

Zusammenfassung

Auf einer Ebene in $z = \frac{L}{2}$ ist die Potentialverteilung im Außen - und Innenraum des Zylinders

$$V(r) = -e\Phi(r) \quad (2.61)$$

$$V\left(r, \frac{L}{2}\right) = V_o v\left(r, \frac{L}{2}\right) \quad (2.62)$$

mit $V_o = -2e\rho_L$, wobei $\rho_L = \frac{Ze}{L}$ die Ladung pro Länge des Zylinders ausdrückt.

Die dimensionslose Funktion v lautet:

$$v_a\left(r \geq r_0, z = \frac{L}{2}\right) = \ln\left(\frac{L}{2r} + \frac{1}{2r}\sqrt{L^2 + 4r^2}\right) + \frac{r_0^2 L}{2} (L^2 + 4r^2)^{-\frac{3}{2}} + \dots \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} v_i\left(0 \leq r \leq r_0, z = \frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2\pi r_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})L}{j!(j+1)!} [\Gamma(j+\frac{1}{2}) {}_2F_1(j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(\frac{L}{2r_0})^2) + \\ + \frac{\Gamma(j+\frac{3}{2})}{(j+1)} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2j+2} \right) {}_2F_1(j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(\frac{L}{2r_0})^2)] \end{aligned} \quad (2.64)$$

Wenn $r \gg L$ [Gra 51] ist, erhalten wir als Grenzfall das Coulomb – Potential

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \text{Arsh}x = x - \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 - \dots \quad [x^2 < 1] \quad (2.65)$$

$$V_a\left(\frac{L}{r} \ll 1, z = \frac{L}{2}\right) \approx -\frac{Ze^2}{r} \quad (2.66)$$

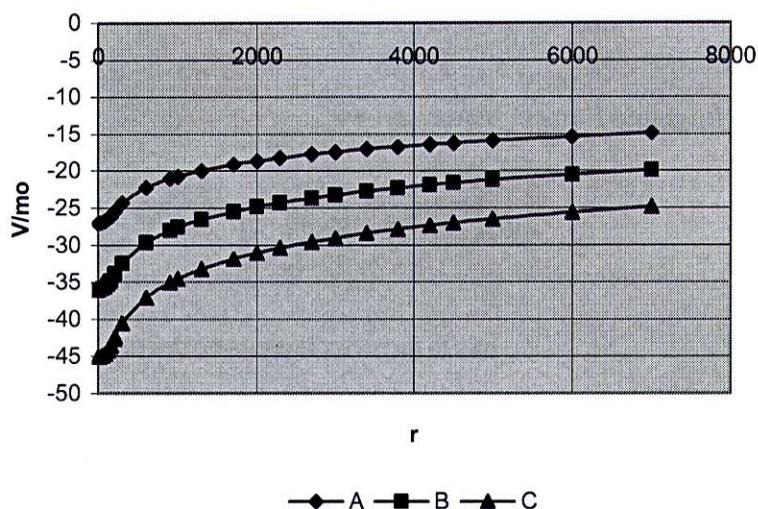
Für $r=0$ ergibt sich

$$V_i\left(r=0, z=\frac{L}{2}\right) = \frac{V_0}{2\pi r_0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+\frac{1}{2})L}{j!(j+1)!} \left[\Gamma(j+\frac{1}{2}) {}_2F_1\left(j+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_0}\right)^2\right) + \frac{\Gamma(j+\frac{3}{2})}{(j+1)} {}_2F_1\left(j+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_0}\right)^2\right) \right] \quad (2.67)$$

und die Ableitung bei $r=0$ lautet

$$\partial_r V_i(r) = -\text{Konst.} (r^{2j+1}) \quad \Rightarrow \quad \partial_r V_i(r=0) = 0 \quad (2.68)$$

DAS ELEKTROSTATISCHE POTENTIAL



$$[A]: \frac{V_0}{m_0} = -3, [B]: \frac{V_0}{m_0} = -4, [C]: \frac{V_0}{m_0} = -5, r_0 = 200 \text{ fm}, L = 10^6 \text{ fm}$$

Abb.2.4. Das elektrostatische Potential des Zylinders für verschiedenen Wert der Potentialstärke $\frac{V_0}{m_0}$.

Die Potentialverteilung erfüllt die folgenden Bedingungen:

- Sie ist überall stetig und monoton,
- Sie geht asymptotisch (für $r \rightarrow \infty$) gegen Null wie das Coulomb – Potential einer Ladung Ze ,
- Sie bleibt bei $r=0$ endlich,

- Sie hat bei $r = 0$ die Ableitung Null,
- Das Potential erhöht sich mit zunehmender Länge des Zylinders (**Abb. 2.5**),
- Wenn der Radius des Zylinders verkleinert wird, wächst das Potential in einem engen Raum im Zentrum des Zylinders logarithmisch an.

Für $r \ll L$ [Gra 51] und $j = 0$ hat das Potential die folgende Gestalt

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \text{Arsh}x = \ln 2x + \frac{1}{2} \frac{1}{2x^2} - \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{4x^4} \dots \quad [x^2 > 1] \quad (2.69)$$

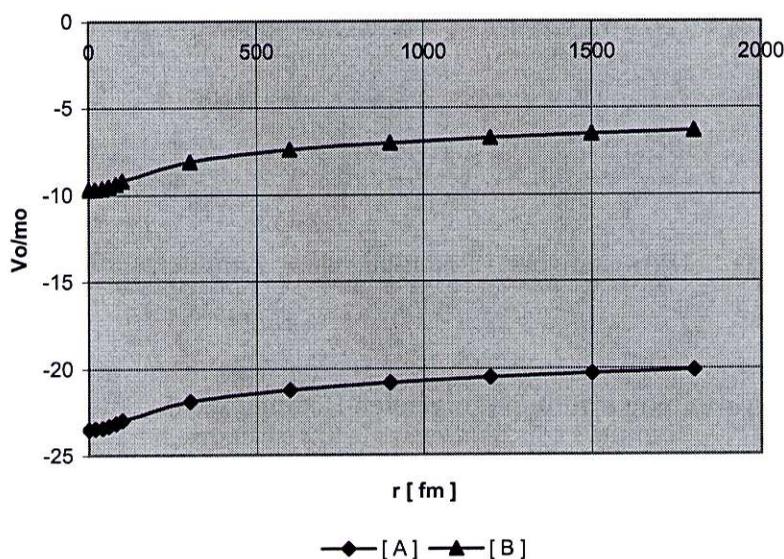
$$V_a(r \geq r_0, z = \frac{L}{2}) = V_0 \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (2.70)$$

$$V_i(0 \leq r \leq r_0, z = \frac{L}{2}) = V_0 \left\{ \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \right\} \quad (2.71)$$

wobei wir die folgende Formel benutzen

$${}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right) = \frac{2r}{\sqrt{L^2 + 4r^2}} \quad (2.72)$$

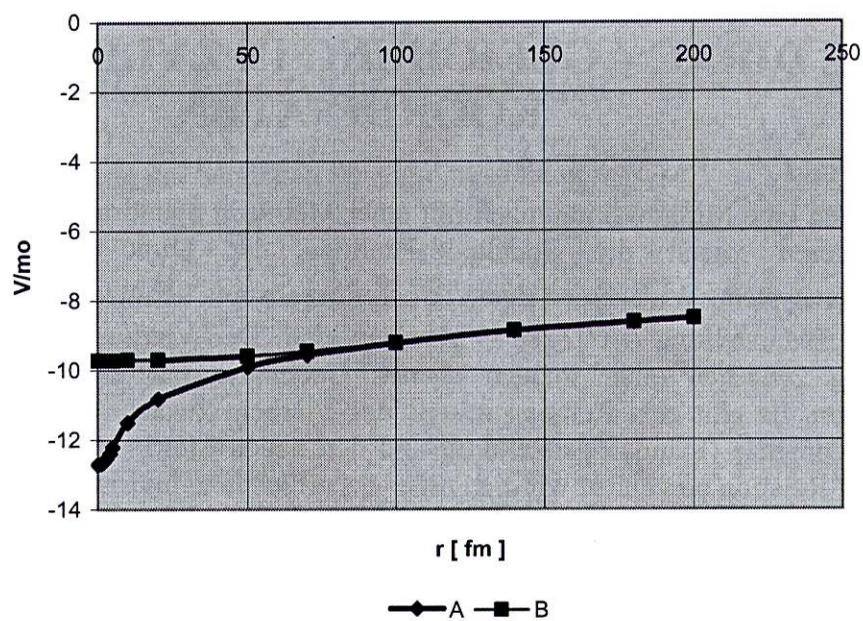
DAS ELEKTROSTATISCHE POTENTIAL



[A] : $\frac{V_0}{m_0} = -1$, $L = 10^{12}$ fm , [B] : $\frac{V_0}{m_0} = -1$, $L = 10^6$ fm

Abb.2.5. Das elektrostatische Potential für verschiedenen Wert der Länge

DAS ELEKTROSTATISCHE POTENTIAL



$$[A]: \frac{V_0}{m_0} = -1, \quad r_0 = 5 \text{ fm}, \quad L = 10^6 \text{ fm}, \quad [B]: \frac{V_0}{m_0} = -1, \quad r_0 = 100 \text{ fm}, \quad L = 10^6 \text{ fm}$$

Abb.2.6. Das elektrostatische Potential für verschiedenen Wert des Radius

Kapitel 3

DIE DIRAC – GLEICHUNG IN ZYLINDRISCHEN KOORDINATEN

Wir wenden eine Minkowskiraumzeit mit einer Metrik in zylindrischen Koordinaten an, und transformieren zuerst die Standarddarstellung der Dirac – Matrizen in dieses Koordinatensystem. Wir werden den Vierbeinformalismus benutzen, wobei $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ die Standarddarstellung der Dirac – Matrizen sind. Der Vierbeinformalismus erlaubt eine Beziehung zwischen einer lokalen ebenen Geometrie mit einer Krümmungsgeometrie herzustellen. Es gibt eine Relation mittels des Vierbein zwischen den Dirac – Matrizen in ebener Geometrie (Standarddarstellung) und den neuen Matrizen in Krümmungsgeometrie. Mit dieser Relation berechnen wir die Dirac – Matrizen in zylindrischer Geometrie.

Weil das Christoffel - Symbol nicht null ist, betrachten wir die Lagrange – Dichte für ein Spin $\frac{1}{2}$ - Feld in Krümmungsraumzeit. Die Variation der Wirkung nach dem $\bar{\Psi}$ Feld liefert die Dirac – Gleichung für ein Ψ Feld

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m_0 - e A_\mu \gamma^\mu) \Psi = 0.$$

Dann berechnen wir die Übertragungskoeffizienten (Γ_μ), die eine Beziehung mit dem Vierbeinfeld erlauben.

Die stationären Zustände finden wir mit dem Ansatz: $\Psi(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}) \exp\{-iEt\}$. Dabei wurde ein elektrostatisches Potential $A_0(\vec{x})$ angenommen, das nicht von der Zeit abhängt. Es ergibt sich die stationäre Dirac - Gleichung: $\hat{H}_{[r\phi z]} \Psi = E\Psi$, wobei $\hat{H}_{[r\phi z]}$ der Hamilton – Operator in zylindrischen Koordinaten, Ψ der Spinor und E die Energieeigenwerte sind.

Aus den Lösungen lässt sich die Viererstromdichte $j^\mu(x) = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ berechnen.

Weiterhin haben wir den Energie – Impuls Tensor ($T^{\mu\nu}$) des Dirac – Feldes berechnet. Die Variation der Wirkung nach dem Vierbeinfeld liefert den Energie – Impuls Tensor und die Formel der Eigenwertenergie lautet:

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = E = \int_{\Omega} T^{00} d^3x$$

Wir leiten auch eine Differentialgleichung für die Greensfunktion $G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega)$ ab.

$$[\hat{H}(r) - \omega] G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) = \frac{1}{r} \gamma^0 \delta(r - r_1)$$

3.1. Die Dirac - Matrizen in Zylinderkoordinaten

Die Dirac - Matrizen in der benutzten Standarddarstellung [Gre¹⁵¹] lauten:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \gamma^a = \begin{vmatrix} 0 & \hat{\sigma}^a \\ -\hat{\sigma}^a & 0 \end{vmatrix} \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

mit dem Pauli Matrizen $\hat{\sigma}^a$.

Wir benutzen den Vierbeinformalismus [Cha³⁴]. Es werden vier kontravariante Tetraden - Vektoren $V_{(a)}^\mu$ eingeführt, die die Orthonormalitätsbedingung

$$V_{(a)}^\mu V_{(b)\mu} = \eta_{(a)(b)} \quad (3.2)$$

erfüllen. Hier ist $(a) = 0, 1, 2, 3$, der Vierbein - Index und $\mu = t, r, \varphi, z$ der Tensor - Index, $\eta_{(a)(b)}$ die flache Minkowski - Metrik:

$$\eta_{(a)(b)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

Mit der Metrik (2.2) lautet das Vierbein:

$$V_{(b)\mu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

und Gleichung (3.2) folgt

$$V_{(a)}^\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

So findet man die wichtige Beziehung

$$V_{(a)\mu} V_{(a)}^\nu = V_{(a)\mu} \eta^{(a)(b)} V_{(b)\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.6)$$

Die Dirac – Matrizen sind in der gekrümmten Raumzeit, mit (3.5) [Dav₆⁸⁵] :

$$\gamma^\mu = V_{(a)}^\mu \gamma^a \quad (3.7)$$

$$\gamma^t = \gamma^0 \quad \gamma^r = \gamma^1 \quad \gamma^\varphi = \frac{1}{r} \gamma^2 \quad \gamma^z = \gamma^3 \quad (3.8)$$

Diese Matrizen befriedigen die Clifford - Algebra

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2 g^{\mu\nu} I \quad (3.9)$$

3.2. Der Übertragungskoeffizient

Der Übertragungskoeffizient ist [Dav₆⁸⁵] :

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2} \Sigma^{(a)(b)} V_{(a)}^\nu(x) [\nabla_\mu V_{(b)\nu}(x)] \quad (3.10)$$

mit

$$\Sigma^{(a)(b)} = \frac{1}{4} [\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}] \quad (3.11)$$

Die kovariante Ableitung berechnet sich nach der Formel:

$$\nabla_\mu V_{(b)\nu}(x) = V_{(b)\nu\mu}(x) = \partial_\mu V_{(b)\nu}(x) - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma V_{(b)\sigma}(x) \quad , \quad (3.12)$$

wobei $\Gamma_{\nu\mu}^\sigma$ das Christoffel – Symbol ist:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} \left(\partial_{\mu} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha} g_{\nu\mu} \right) \quad (3.13)$$

Mit (2.3) in (3.13) erkennt man, dass die folgenden Christoffel – Symbole nicht null sind:

$$\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{r} \quad , \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \quad (3.14)$$

Die vier kontravarianten Tetraden – Vektoren sind ((3.4) und (3.5)):

$$\begin{aligned} V_{0v} &= [1, 0, 0, 0] & V_{1v} &= [0, -1, 0, 0] & V_{2v} &= [0, 0, -r, 0] & V_{3v} &= [0, 0, 0, -1] \\ V_0^v &= [1, 0, 0, 0] & V_1^v &= [0, 1, 0, 0] & V_2^v &= [0, 0, \frac{1}{r}, 0] & V_3^v &= [0, 0, 0, 1] \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wir setzen (3.12) in (3.10) ein entwickeln in Komponenten:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu} &= -\frac{1}{2} \left(\Sigma^{10} V_1^r \Gamma_{r\mu}^t + \Sigma^{20} V_2^{\varphi} \Gamma_{\varphi\mu}^t + \Sigma^{30} V_3^z \Gamma_{z\mu}^t \right) V_{0t} - \frac{1}{2} \left(\Sigma^{01} V_0^t \Gamma_{t\mu}^r + \Sigma^{21} V_2^{\varphi} \Gamma_{\varphi\mu}^r + \Sigma^{31} V_3^z \Gamma_{z\mu}^r \right) V_{1r} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\Sigma^{02} V_0^t \Gamma_{t\mu}^{\varphi} + \Sigma^{12} V_1^r \Gamma_{r\mu}^{\varphi} + \Sigma^{32} V_3^z \Gamma_{z\mu}^{\varphi} \right) V_{2\varphi} - \frac{1}{2} \left(\Sigma^{03} V_0^t \Gamma_{t\mu}^z + \Sigma^{13} V_1^r \Gamma_{r\mu}^z + \Sigma^{23} V_2^{\varphi} \Gamma_{\varphi\mu}^z \right) V_{3z} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit (3.14) und (3.15) in (3.16) haben wir endlich:

$$\Gamma_t = 0 \quad \Gamma_r = 0 \quad \Gamma_z = 0 \quad (3.17)$$

$$\Gamma_{\varphi} = -\frac{1}{2} \Sigma^{21} V_2^{\varphi} \Gamma_{\varphi\varphi}^r V_{1r} - \frac{1}{2} \Sigma^{12} V_1^r \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} V_{2\varphi} \quad (3.18)$$

$$= -\frac{1}{2} \Sigma^{21} + \frac{1}{2} \Sigma^{12} \quad (3.19)$$

$$= \Sigma^{12} \quad (3.20)$$

mit der Beziehung:

$$\Sigma^{21} = -\Sigma^{12} \quad (3.21)$$

Dann sind die kovarianten Ableitungen:

$$\nabla_t = \partial_t \quad \nabla_r = \partial_r \quad \nabla_{\varphi} = \partial_{\varphi} + \Sigma^{12} \quad \nabla_z = \partial_z \quad (3.22)$$

3.3. Die Dirac – Gleichung in Zylinderkoordinaten

Die Lagrange – Dichte für ein Spin $\frac{1}{2}$ - Feld in Krümmungsraum lautet [Dav₆⁸⁵] :

$$L = \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] - m_o \bar{\Psi} \Psi \right\} - e \sqrt{-g} \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \quad (3.23)$$

wobei die kovariante Ableitung ist: $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ und $\sqrt{-g} = \det(V_\mu^{(a)})$.

Die Wirkung ist:

$$S = \int L d^4 x \quad (3.24)$$

Die Variation von S nach $\bar{\Psi}$ liefert die Dirac – Gleichung für das Ψ Feld.

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} \delta \bar{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial (\nabla_\mu \bar{\Psi})} \delta (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \right\} d^4 x = 0 \quad (3.25)$$

Wir verwenden die Vertauschbarkeit von Variation und kovarianter Ableitung.

$$\delta (\nabla_\mu \bar{\Psi}) = \nabla_\mu [\bar{\Psi} + \delta \bar{\Psi}] - \nabla_\mu \bar{\Psi} = \nabla_\mu (\delta \bar{\Psi}) \quad (3.26)$$

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} \delta \bar{\Psi} + \frac{\partial L}{\partial (\nabla_\mu \bar{\Psi})} \nabla_\mu \delta \bar{\Psi} \right\} d^4 x \quad (3.27)$$

Von Gleichung (3.23) folgt dann

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} = \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m_o \Psi - e A_\mu \gamma^\mu \Psi \right] \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial (\nabla_\mu \bar{\Psi})} = -\frac{i}{2} \sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi \quad (3.29)$$

Werden (3.28) und (3.29) in (3.27) eingesetzt, ergibt

$$\delta S = \int \left\{ \sqrt{-g} \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m_o \Psi - e A_\mu \gamma^\mu \Psi \right] \delta \bar{\Psi} - \frac{i}{2} \sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi \nabla_\mu (\delta \bar{\Psi}) \right\} d^4 x \quad (3.30)$$

Der zweite Term in Gleichung (3.30) wird partiell integriert. Hierbei beachten wir, dass die Variation von $\bar{\Psi}$ an den Integrationsgrenzen verschwindet.

$$\int \sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi \nabla_\mu (\delta \bar{\Psi}) d^4x = \sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi \delta \bar{\Psi} \Big|_{(1)}^{(2)} - \int \nabla_\mu [\sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi] \delta \bar{\Psi} d^4x \quad (3.31)$$

$$\delta \bar{\Psi} \Big|_{(1)}^{(2)} = 0 \quad (3.32)$$

Zur Berechnung der kovarianten Ableitung

$$\nabla_\mu [\sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi] = [\nabla_\mu \sqrt{-g}] \gamma^\mu \Psi + \sqrt{-g} [\nabla_\mu \gamma^\mu] \Psi + \sqrt{-g} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi \quad (3.33)$$

benutzen wir die Beziehungen [DeW₇⁷⁰¹] :

$$\nabla_\nu [V^{(a)\mu}] = 0 \quad (3.34)$$

$$[\nabla_\nu \sqrt{-g}] = \nabla_\nu [\det V_\mu^{(a)}] = 0 \quad (3.35)$$

$$[\nabla_\nu \gamma^\mu] = \nabla_\nu [V_{(a)}^\mu \gamma^a] = [\nabla_\nu V_{(a)}^\mu] \gamma^a = 0 \quad (3.36)$$

Einsetzen von (3.35) und (3.36) in (3.33) liefert:

$$\nabla_\mu [\sqrt{-g} \gamma^\mu \Psi] = \sqrt{-g} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi \quad (3.37)$$

So ergibt auch Einsetzen (3.37) in (3.31), und danach in (3.30) endlich:

$$\delta S = \int \{ \sqrt{-g} [i \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m_o \Psi - e A_\mu \gamma^\mu \Psi] \} \delta \bar{\Psi} d^4x = 0 \quad (3.38)$$

Die Dirac – Gleichung lautet daher

$$\{ i \gamma^\mu \nabla_\mu - m_o - e A_\mu \gamma^\mu \} \Psi = 0 \quad (3.39)$$

Die Variation von S nach Ψ liefert die entsprechende Dirac – Gleichung für das adjungierte $\bar{\Psi}$ Feld

$$i (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu + m_o \bar{\Psi} + e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu = 0 \quad (3.40)$$

Das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes lautet im vorliegenden Fall:

$$A_\mu = (A_t, 0) \quad (3.41)$$

In Zylinderkoordinaten lautet die Gleichung (3.39):

$$i \gamma^t \nabla_t \Psi + i \gamma^r \nabla_r \Psi + i \gamma^\varphi \nabla_\varphi \Psi + i \gamma^z \nabla_z \Psi - m_o \Psi - e A_t \gamma^t \Psi = 0 \quad (3.42)$$

Mit den Ausdrücken für die Dirac - Matrizen (3.8) ergibt das

$$i \gamma^0 \nabla_t \Psi + i \gamma^1 \nabla_r \Psi + \frac{i \gamma^2}{r} \nabla_\varphi \Psi + i \gamma^3 \nabla_z \Psi - m_o \Psi - e A_0 \gamma^0 \Psi = 0 \quad (3.43)$$

Wird Gleichung (3.22) in (3.43) eingesetzt, folgt

$$i \gamma^0 \partial_t \Psi + i \gamma^1 \partial_r \Psi + \frac{i \gamma^2}{r} (\partial_\varphi + \Sigma^{12}) \Psi + i \gamma^3 \partial_z \Psi - m_o \Psi - e A_0 \gamma^0 \Psi = 0 \quad (3.44)$$

Wir multiplizieren Gleichung (3.44) von links mit γ^0 und benutzen die Relationen [Gre₁₆⁵⁰] :

$$\gamma^0 = \hat{\beta} \quad , \quad (\gamma^0)^2 = 1 \quad (\gamma^i)^2 = -1 \quad \text{und} \quad \hat{\alpha}_i = \gamma^0 \gamma^i \quad (3.45)$$

$$i \partial_t \Psi + i \hat{\alpha}_1 \partial_r \Psi + \frac{i \hat{\alpha}_2}{r} (\partial_\varphi + \Sigma^{12}) \Psi + i \hat{\alpha}_3 \partial_z \Psi - \hat{\beta} m_o \Psi - e A_0 \Psi = 0 \quad (3.46)$$

Die stationären Zustände finden wir mit dem Ansatz: $\Psi(\vec{x}, t) = \Psi(\vec{x}) \exp \{ -iEt \}$,
weil $A_0 = A_0(\vec{x})$

$$\{ -i \hat{\alpha}_1 \partial_r - \frac{i \hat{\alpha}_2}{r} (\partial_\varphi + \Sigma^{12}) - i \hat{\alpha}_3 \partial_z + \hat{\beta} m_o + e A_0 \} \Psi(\vec{x}) = E \Psi(\vec{x}) \quad (3.47)$$

Wir definieren die Impulsoperatoren:

$$\hat{p}_r = -i \partial_r \quad \hat{p}_\varphi = -i \partial_\varphi \quad \hat{p}_z = -i \partial_z \quad (3.48)$$

$$\hat{H}_{[r\varphi z]} \Psi(\vec{x}) = E \Psi(\vec{x}) \quad (3.49)$$

Der Hamilton - Operator der Dirac - Teilchens im elektromagnetischen Feld ist:

$$\hat{H}_{[r\varphi z]} = \hat{\alpha}_1 \hat{p}_r + \frac{1}{r} \hat{\alpha}_2 \hat{p}_\varphi + \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z - \frac{i}{r} \hat{\alpha}_2 \Sigma^{12} + \hat{\beta} m_o + e A_0 \quad (3.50)$$

Wir berechnen jetzt den Ausdruck $\hat{\alpha}_2 \Sigma^{12}$. Mit Gleichungen (3.9), (3.11) und (3.45) haben wir:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_2 \Sigma^{12} &= \gamma^0 \gamma^2 \frac{1}{4} (\gamma^1 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^1) = \frac{1}{4} (\gamma^0 \gamma^2 \gamma^1 \gamma^2 - \gamma^0 (\gamma^2)^2 \gamma^1) \\ \hat{\alpha}_2 \Sigma^{12} &= \frac{1}{4} (-\gamma^0 (\gamma^2)^2 \gamma^1 - \gamma^0 (\gamma^2)^2 \gamma^1) = \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^1 = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Das Endergebnis für die Dirac – Gleichung ist:

$$\left(\hat{\alpha}_1 \left[\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right] + \frac{1}{r} \hat{\alpha}_2 \hat{p}_\varphi + \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z + \hat{\beta} m_o \right) \Psi(\vec{x}) = (E - V) \Psi(\vec{x}) \quad (3.52)$$

Wobei $V = eA_o < 0$ ist.

Hier betrachten wir kurz die Methode von Shishin und Villalba für die Koordinatenseparation der Dirac – Gleichung [Shi₃₁] .

$$\left\{ -i \left[(\gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + (\gamma^2 \cos \varphi - \gamma^1 \sin \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] + m_o - \gamma^o (E - V) \right\} \Psi(\vec{x}) = 0 \quad (3.53a)$$

$$\gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi = \gamma^1 (\cos \varphi + \gamma^1 \gamma^2 \sin \varphi) = \gamma^1 \exp\{ -\gamma^1 \gamma^2 \}$$

$$\left\{ -i \left[\gamma^1 \exp(-\gamma^1 \gamma^2 \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \exp(-\gamma^1 \gamma^2 \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] + m_o - \gamma^o (E - V) \right\} \Psi(\vec{x}) = 0 \quad (3.53b)$$

Sie führen eine Transformation ein, die die recht komplizierten 4×4 - Matrizen vor den Operatoren ∂_r und ∂_φ auf eine einfachere Form zu bringen.

$$U \gamma^o (H - E) U^{-1} U \Psi(\vec{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad U \gamma^o (H - E) U^{-1} \tilde{\Psi}(\vec{x}) = 0 \quad (3.54)$$

$$\therefore \tilde{\Psi}(\vec{x}) = U \Psi(\vec{x}) \quad (3.55)$$

mit der Transformationsmatrix

$$U = \sqrt{r} \exp\left\{ -\gamma^1 \gamma^2 \frac{\varphi}{2} \right\} \quad , \quad U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp\left\{ \gamma^1 \gamma^2 \frac{\varphi}{2} \right\} \quad (3.56)$$

Explizit ausgeschrieben lautet die Dirac - Gleichung

$$\left\{ -i \left[\gamma^1 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} \right] + m_o - \gamma^o (E - V) \right\} \tilde{\Psi}(\vec{x}) = 0 \quad (3.57)$$

Sie erreichen die Koordinatenseparation durch Einführung einer Separationskonstante, und zerlegen die ursprüngliche Differentialgleichung in zwei Gleichungen, von denen die eine nur von z und die andere nur von r und φ abhängt. Mit Hilfe eines neuen Spinors Φ soll (3.57) also geschrieben werden als

$$\{ K_{r\varphi} + K_z \} \Phi(\vec{x}) = 0 \quad (3.58)$$

$$[K_{r\varphi} , K_z] = 0 \quad (3.59)$$

woraus dann

$$K_{r\varphi} \Phi(\bar{x}) = + \varepsilon \Phi(\bar{x}) \quad (3.60)$$

$$K_z \Phi(\bar{x}) = - \varepsilon \Phi(\bar{x}) \quad (3.61)$$

folgen würde. (3.61) ist keine Differentialgleichung mehr, sondern nur eine algebraische Gleichung, da der Operatoren ∂_z ja durch die Quantenzahl k ersetzt wird. Bei diesem Vorgehen müssen außerdem noch mögliche Widersprüche zwischen (3.60) und (3.61) vermieden werden. Dies geschieht am besten durch Unterteilung von $\Phi(\bar{x})$ in zwei Zweierspinoren. Lassen sich dann $K_{r\varphi}$ und K_z so wählen, dass (3.61) eine algebraische Verknüpfung zwischen oberem und unterem Zweierspinoren darstellt und (3.60) diese nicht mehr mischt, ist die Koordinatenseparation geglückt.

Durch den folgenden Ansatz wird (3.57) auf die Form (3.58) gebracht

$$K_{r\varphi} = \left\{ -i \left[\gamma^l \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \gamma^0 (E - U) \right\} \Gamma \quad (3.62)$$

$$K_z = \left\{ -i \gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} + m_o \right\} \Gamma \quad (3.63)$$

$$\Phi(\bar{x}) = \Gamma^{-1} \Psi(\bar{x}) \quad (3.64)$$

Γ wird aus der Forderung (3.59) bestimmt und ergibt

$$\Gamma = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \quad (3.65)$$

Die oben definierten Operatoren $K_{r\varphi}$ und K_z lauten damit

$$K_{r\varphi} = -i \left[\gamma^0 \gamma^2 \frac{\partial}{\partial r} - \gamma^0 \gamma^1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] - \gamma^1 \gamma^2 (E - V) \quad (3.66)$$

$$K_z = \gamma^5 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 m_o \quad (3.67)$$

Mit dieser Form von $K_{r\varphi}$ und K_z kann aber noch nicht zu Gleichungen der Art (3.60) und (3.61) übergegangen werden, denn $K_{r\varphi}$ enthält Terme, die obere und untere Zweierspinoren vermischen. Der zweite Term in (3.67) ist diagonal bezüglich der Zweierspinoren, was ebenso unerwünscht ist. Sie beseitigen diese Hindernisse mit einer weiteren Transformationsmatrix

$$\{ U_1 K_{r\varphi} U_1^{-1} + U_1 K_z U_1^{-1} \} U_1 \Phi(\vec{x}) = 0 \quad (3.68)$$

$$\{ K_{r\varphi}^I + K_z^I \} \tilde{\Phi}(\vec{x}) = 0 \quad (3.69)$$

wobei U_1 gegeben ist durch

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i\gamma^0 \gamma^3) \quad , \quad U_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + i\gamma^0 \gamma^3) \quad (3.70)$$

Dies bringt die Operatoren in (3.69) auf die Gestalt

$$K_{r\varphi}^I = -\gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial r} + \gamma^1 \gamma^3 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \gamma^1 \gamma^2 (E - V) \quad (3.71)$$

$$K_z^I = \gamma^5 \frac{\partial}{\partial z} + \gamma^0 \gamma^5 m_0 \quad (3.72)$$

Da auch $[K_{r\varphi}^I, K_z^I] = 0$ gilt, kann die oben beschriebene Separation durchgeführt werden. Man teilt (3.69) auf in

$$K_{r\varphi}^I \tilde{\Phi}(\vec{x}) = +i\varepsilon \tilde{\Phi}(\vec{x}) \quad (3.73)$$

$$K_z^I \tilde{\Phi}(\vec{x}) = -i\varepsilon \tilde{\Phi}(\vec{x}) \quad (3.74)$$

$\tilde{\Phi}(\vec{x})$ wird nun durch

$$\tilde{\Phi}(\vec{x}) = \exp\{-ikz\} \begin{vmatrix} u(r, \varphi) \\ v(r, \varphi) \end{vmatrix} \quad (3.75)$$

in Zweierspinoren unterteilt. Die Gleichungen (3.74) und (3.75) liefern die gewünschte Verknüpfung zwischen $u(r, \varphi)$ und $v(r, \varphi)$.

$$(ik + m_0) v = -i\varepsilon u \quad (3.76)$$

$$(ik - m_0) u = -i\varepsilon v$$

Dieses Gleichungssystem wird gelöst durch

$$v = \frac{\varepsilon}{-k + im_0} u \quad (3.77)$$

Vorausgesetzt es gilt: $\varepsilon = sM_e = s\sqrt{k^2 + m_0^2}$. Der Betrag der Separationskonstante ist die transversale Masse, wobei s die Werte ± 1 annimmt.

Aus (3.73) zusammen mit (3.75) entnimmt man die Bestimmungsgleichung für den Zweierspinor u .

$$\left\{ i\sigma^1 \frac{\partial}{\partial r} + i\sigma^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + i\sigma^3 (E - V) \right\} u = isM_e u \quad (3.78)$$

3.4. Die Viererstromdichte

Wir multiplizieren Gleichung (3.39) von links mit $\bar{\Psi}$ und Gleichung (3.40) von rechts mit Ψ .

$$i \bar{\Psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \Psi) - m_o \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi = 0 \quad (3.79)$$

$$i (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + m_o \bar{\Psi} \Psi + e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi = 0 \quad (3.80)$$

Die Addition von (3.79) mit (3.80) liefert dann:

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \Psi) + (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi = 0 \quad (3.81)$$

$$\nabla_\mu [\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi] = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla_\mu j^\mu (x) = 0 \quad (3.82)$$

mit:

$$j^\mu (x) = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (3.83)$$

Wir können Ausdruck (3.83) auch auf folgende Weise ableiten. Der Wechselwirkungsteil der Wirkung ist

$$S_W = \int_{\Omega} L_W (\bar{\Psi}, \Psi, A_\mu) d^4x \quad (3.84)$$

Eine kleinere Variation im Maxwell - Feld

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \varepsilon \delta A_\mu \quad (3.85)$$

bewirkt eine kleine Änderung im Wechselwirkungsteil der Wirkung

$$\delta S_W(\varepsilon) = \left. \frac{dS_W(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \frac{\partial L_W}{\partial A_\mu} \delta A_\mu d^4x = -e \int_{\Omega} j^\mu \delta A_\mu \sqrt{-g} d^4x \quad (3.86)$$

$$\Rightarrow j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (3.87)$$

Aus den Gleichungen (3.8) und (3.45), folgt die Stromdichte (es wird benutzt $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0$):

$$j^t = \Psi^+ \Psi \quad j^r = \Psi^+ \hat{\alpha}_1 \Psi \quad j^\theta = \frac{1}{r} \Psi^+ \hat{\alpha}_2 \Psi \quad j^z = \Psi^+ \hat{\alpha}_3 \Psi \quad (3.88)$$

3.5. Der Energie – Impuls – Tensor des Dirac – Feldes

Die Energie – Impuls – Verteilung eines Wellenfeldes wird durch den Energie – Impuls – Tensor wiedergeben. Er ist gegeben durch:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\sqrt{-g} \delta V_{(a)\mu}} V_{(a)\nu} \quad (3.89)$$

mit dem Wirkungsfunktional

$$S = \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} i \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \right] - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} d^4x \quad (3.90)$$

Man wendet die folgenden Relationen an [DeW₇³²] :

$$\delta \sqrt{-g} = \sqrt{-g} V^{(a)\mu} \delta V_{(a)\mu} \quad (3.91)$$

$$\delta \gamma^\mu = -V^{(a)\mu} \gamma^\nu \delta V_{(a)\nu} \quad (3.92)$$

$$\nabla_\mu \Psi = \Psi_{;\mu} = \partial_\mu \Psi + \frac{1}{2} \Sigma_{(a)(b)} A_\mu^{(a)(b)} \Psi \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^{(a)(b)} = & \frac{1}{2} V^{(a)\nu} (\delta V_{\nu\mu}^{(b)} - \delta V_{\mu\nu}^{(b)}) - \frac{1}{2} V^{(b)\nu} (\delta V_{\nu\mu}^{(a)} - \delta V_{\mu\nu}^{(a)}) + \\ & + \frac{1}{2} V^{(a)\nu} V^{(b)\sigma} (\delta V_{(c)\nu\sigma} - \delta V_{(c)\sigma\nu}) V_\mu^{(c)} \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \delta(\sqrt{-g}) \left\{ \frac{1}{2} i \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \right] - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} d^4x + \\ & + \int \sqrt{-g} \delta \left\{ \frac{1}{2} i \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \right] - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} d^4x \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \delta(\sqrt{-g}) \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} d^4x + \\ & + \int \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\Psi} \delta(\gamma^\mu) \nabla_\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi) - \delta(\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \delta(\gamma^\mu) \Psi] - e \bar{\Psi} A_\mu (\delta\gamma^\mu) \Psi \right\} d^4x \end{aligned} \quad (3.96)$$

Aus Gleichung (3.81) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \Psi) &= - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \\ \delta [\bar{\Psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \Psi)] &= -\delta [(\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] \\ \delta [\bar{\Psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \Psi)] &= \bar{\Psi} (\delta\gamma^\mu) (\nabla_\mu \Psi) + \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi) \\ \delta [(\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] &= \delta(\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi + (\nabla_\mu \bar{\Psi}) (\delta\gamma^\mu) \Psi \\ \Rightarrow \delta(\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi &= -(\nabla_\mu \bar{\Psi}) (\delta\gamma^\mu) \Psi - \bar{\Psi} (\delta\gamma^\mu) (\nabla_\mu \Psi) - \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi) \end{aligned} \quad (3.97)$$

(3.97) wird in (3.96) eingesetzt:

$$\delta S = \int \delta(\sqrt{-g}) \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} d^4x + \quad (3.98)$$

$$+ \int \sqrt{-g} \left\{ i [\bar{\Psi} \delta(\gamma^\mu) \nabla_\mu \Psi + \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi)] - e \bar{\Psi} A_\mu (\delta\gamma^\mu) \Psi \right\} d^4x$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int \sqrt{-g} V^{(a)\mu} \delta V_{(a)\mu} \left\{ \frac{1}{2} i [\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi] - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} d^4x + \\ & + \int \sqrt{-g} \left\{ -i \bar{\Psi} V^{(a)\sigma} \gamma^\mu \nabla_\sigma \Psi \delta V_{(a)\mu} \right\} d^4x + \int \sqrt{-g} \left\{ i [\bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi)] \right\} d^4x + \\ & + e \int \sqrt{-g} \bar{\Psi} A_\mu (V^{(a)\mu} \gamma^\nu) \Psi \delta V_{(a)\nu} d^4x \end{aligned} \quad (3.99)$$

Wir rechnen aus:

$$A = \int \sqrt{-g} [i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi)] d^4x \quad (3.100)$$

Mit Gleichung (3.26) erhält man:

$$A = \int \sqrt{-g} [i \bar{\Psi} \gamma^\mu \delta(\nabla_\mu \Psi)] d^4x = \int \sqrt{-g} [i \bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu (\delta\Psi)] d^4x \quad (3.101)$$

Mit Gleichung (3.93) folgen wir

$$\nabla_{\mu}(\delta\Psi) = \delta(\nabla_{\mu}\Psi) = \frac{1}{2}\Sigma_{(a)(b)}[\delta A_{\mu}^{(a)(b)}]\Psi \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}(\delta\Psi) = & \frac{1}{4}\Sigma_{(a)(b)}\{V^{(a)\nu}(\delta V_{\nu\mu}^{(b)} - \delta V_{\mu\nu}^{(b)}) - V^{(b)\nu}(\delta V_{\nu\mu}^{(a)} - \delta V_{\mu\nu}^{(a)}) + \\ & + V^{(a)\nu}V^{(b)\sigma}(\delta V_{(c)\nu\sigma} - \delta V_{(c)\sigma\nu})V_{\mu}^{(c)}\}\Psi \end{aligned} \quad (3.103)$$

aber

$$\delta(\nabla_{\mu}V_{\nu}^{(b)}) = \nabla_{\mu}\{V_{\nu}^{(b)} + \delta V_{\nu}^{(b)}\} - \nabla_{\mu}V_{\nu}^{(b)} = \nabla_{\mu}(\delta V_{\nu}^{(b)}) \quad (3.104)$$

Gleichung (3.104) wird jetzt in (3.103) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}(\delta\Psi) = & \frac{1}{4}\Sigma_{(a)(b)}\{V^{(a)\nu}(\nabla_{\mu}\delta V_{\nu}^{(b)} - \nabla_{\nu}\delta V_{\mu}^{(b)}) - V^{(b)\nu}(\nabla_{\mu}\delta V_{\nu}^{(a)} - \nabla_{\nu}\delta V_{\mu}^{(a)}) + \\ & + V^{(a)\nu}V^{(b)\sigma}(\nabla_{\sigma}\delta V_{(c)\nu} - \nabla_{\nu}\delta V_{(c)\sigma})V_{\mu}^{(c)}\}\Psi \end{aligned} \quad (3.105)$$

Mit (3.35) werden die Terme in Gleichung (3.79) partiell integriert, zum Beispiel:

$$\int \sqrt{-g} \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(a)\nu} \nabla_{\mu} \delta V_{\nu}^{(b)} \Psi d^4x = - \int \sqrt{-g} \nabla_{\mu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(a)\nu} \Psi) \delta V_{\nu}^{(b)} d^4x \quad (3.106)$$

Gleichung (3.106) wird in (3.101) eingesetzt:

$$\begin{aligned} A = & - \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\mu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(a)\nu} \Psi) \delta V_{\nu}^{(b)} d^4x & + \\ & + \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\nu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(a)\nu} \Psi) \delta V_{\mu}^{(b)} d^4x & + \\ & + \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\mu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(b)\nu} \Psi) \delta V_{\nu}^{(a)} d^4x & - \\ & - \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\nu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(b)\nu} \Psi) \delta V_{\mu}^{(a)} d^4x & - \\ & - \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(a)\nu} V^{(b)\sigma} V_{\mu}^{(c)} \Psi) \delta V_{(c)\nu} d^4x & + \\ & + \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\nu} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(a)(b)} V^{(a)\nu} V^{(b)\sigma} V_{\mu}^{(c)} \Psi) \delta V_{(c)\sigma} d^4x & \end{aligned} \quad (3.107)$$

Nach Herunterziehen des Index der Tetraden – Variation lässt sich zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 \Lambda = & \frac{i}{4} \int \sqrt{-g} \nabla_{\sigma} \{ -\bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Sigma_{(q)(b)} V^{(q)\mu} \Psi \eta^{(a)(b)} + \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(q)(b)} V^{(q)\sigma} \Psi \eta^{(a)(b)} \quad + \\
 & + \bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Sigma_{(q)(b)} V^{(b)\mu} \Psi \eta^{(a)(q)} - \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(q)(b)} V^{(b)\sigma} \Psi \eta^{(a)(q)} \quad - \\
 & - \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(p)(b)} V^{(p)\mu} V^{(b)\sigma} V_{\mu}^{(a)} \Psi + \bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(p)(b)} V^{(p)\sigma} V^{(b)\mu} V_{\mu}^{(a)} \Psi \} \delta V_{(a)\mu} d^4x
 \end{aligned} \tag{3.108}$$

Gleichung (3.108) wird in (3.99) eingesetzt, und man benutzt Gleichungen (3.6) und (3.7):

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta S}{\sqrt{-g} \delta V_{(a)\mu}} V_{(a)}^{\nu} = & V_{(a)}^{\nu} V^{(a)\mu} \left\{ \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \Psi - (\nabla_{\mu} \bar{\Psi}) \gamma^{\mu} \Psi) - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_{\mu} \gamma^{\mu} \Psi \right\} \quad - \\
 & - i \bar{\Psi} V_{(a)}^{\nu} V^{(a)\sigma} \gamma^{\mu} \nabla_{\sigma} \Psi - \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Sigma_{(q)(b)} V_{(a)}^{\nu} V^{(q)\mu} \Psi \eta^{(a)(b)}] \quad + \\
 & + \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(q)(b)} V_{(a)}^{\nu} V^{(q)\sigma} \Psi \eta^{(a)(b)}] + \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Sigma_{(q)(b)} V_{(a)}^{\nu} V^{(b)\mu} \Psi \eta^{(a)(q)}] \quad - \\
 & - \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(q)(b)} V_{(a)}^{\nu} V^{(b)\sigma} \Psi \eta^{(a)(q)}] - \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(p)(b)} V_{(a)}^{\nu} V^{(p)\mu} V^{(b)\sigma} V_{\mu}^{(a)} \Psi] \quad + \\
 & + \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma_{(p)(b)} V_{(a)}^{\nu} V^{(p)\sigma} V^{(b)\mu} V_{\mu}^{(a)} \Psi] + e \bar{\Psi} g^{\sigma\nu} A_{\sigma} \gamma^{\mu} \Psi
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta S}{\sqrt{-g} \delta V_{(a)\mu}} V_{(a)}^{\nu} = & g^{\mu\nu} \left\{ \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \nabla_{\mu} \Psi - (\nabla_{\mu} \bar{\Psi}) \gamma^{\mu} \Psi) - m_0 \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_{\mu} \gamma^{\mu} \Psi \right\} \quad - \\
 & - i \bar{\Psi} g^{\nu\sigma} \gamma^{\mu} \nabla_{\sigma} \Psi - \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Sigma^{\mu\nu} \Psi] + \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma^{\sigma\nu} \Psi] \quad + \\
 & + \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\sigma} \Sigma^{\nu\mu} \Psi] - \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\mu} \Sigma^{\nu\sigma} \Psi] - \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\nu} \Sigma^{\mu\sigma} \Psi] \quad + \\
 & + \frac{i}{4} \nabla_{\sigma} [\bar{\Psi} \gamma^{\nu} \Sigma^{\sigma\mu} \Psi] + e \bar{\Psi} A^{\mu} \gamma^{\nu} \Psi
 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Der erste Term von (3.110) ist null, weil Ψ die Dirac - Gleichung erfüllt. Mit Gleichung (3.81): $\bar{\Psi} \gamma^\mu (\nabla_\mu \Psi) = - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi$ gilt

$$\left\{ \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi) - m_o \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} A_\mu \gamma^\mu \Psi \right\} = \bar{\Psi} [i \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m_o \Psi - e A_\mu \gamma^\mu \Psi] = 0$$

Es verbleibt

$$\frac{\delta S}{\sqrt{-g} \delta V_{(a)\mu}} V_{(a)}^\nu = -i \bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla^\nu \Psi - \frac{i}{2} \nabla_\sigma \{ \bar{\Psi} [\gamma^\sigma \Sigma^{\mu\nu} - \gamma^\mu \Sigma^{\sigma\nu} + \gamma^\nu \Sigma^{\mu\sigma}] \Psi \} + e \bar{\Psi} A^\mu \gamma^\nu \Psi \quad (3.111)$$

Wir wenden die Relation $\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -\Sigma^{\nu\mu}$ an, und haben endlich den Ausdruck:

$$T^{\mu\nu} = -i \bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla^\nu \Psi - \frac{i}{8} \nabla_\sigma \{ \bar{\Psi} (\gamma^\sigma [\gamma^\mu, \gamma^\nu] - \gamma^\mu [\gamma^\sigma, \gamma^\nu] + \gamma^\nu [\gamma^\mu, \gamma^\sigma]) \Psi \} + e \bar{\Psi} A^\mu \gamma^\nu \Psi \quad (3.112)$$

Die Komponente T^{oo} (Energiedichte) ist:

$$\begin{aligned} T^{oo} &= -i \bar{\Psi} \gamma^o g^{oo} \nabla_o \Psi - \frac{i}{8} \nabla_\sigma \{ \bar{\Psi} (-\gamma^o [\gamma^\sigma, \gamma^o] + \gamma^o [\gamma^\sigma, \gamma^\sigma]) \Psi \} + e A^o \Psi^+ \Psi \\ &= -i \bar{\Psi} \gamma^o g^{oo} \nabla_o \Psi + \frac{i}{4} \nabla_\sigma \{ \bar{\Psi} (\gamma^\sigma [\gamma^\sigma, \gamma^o]) \Psi \} + e A^o \Psi^+ \Psi \end{aligned}$$

Aus Gleichung (3.9) folgt für räumliche Indizes $\alpha = r, \varphi, z$:

$$\begin{aligned} \{ \gamma^\alpha, \gamma^o \} &= 2 g^{\alpha o} I = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^\alpha \gamma^o = -\gamma^o \gamma^\alpha \\ T^{oo} &= -i \bar{\Psi} \gamma^o \nabla_o \Psi - \frac{i}{2} \nabla_\alpha (\bar{\Psi} \gamma^\alpha \Psi) + e A^o \Psi^+ \Psi \end{aligned} \quad (3.113)$$

Wegen der Kontinuitätsgleichung (3.82) lässt sich dies auch schreiben als:

$$T^{oo} = -i \bar{\Psi} \gamma^o \nabla_o \Psi + \frac{i}{2} \nabla_o (\bar{\Psi} \gamma^o \Psi) + e A^o \Psi^+ \Psi \quad (3.114)$$

3.6. Die Energieeigenwert

Aus der stationären Dirac - Gleichung (3.52) folgt

$$\int_\Omega d^3x \Psi^+(\vec{x}) \left[\hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) + \frac{1}{r} \hat{\alpha}_2 \hat{p}_\varphi + \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z + \hat{\beta} m_o + V \right] \Psi(\vec{x}) = E \int_\Omega d^3x \Psi^+(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) \quad (3.115)$$

Die positiv definite Dichte lautet:

$$\rho(\vec{x}) = \Psi^+ \Psi = \Psi_1^* \Psi_1 + \Psi_2^* \Psi_2 + \Psi_3^* \Psi_3 + \Psi_4^* \Psi_4 \quad (3.116)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Erhaltungsgröße:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu [\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi] &= \partial_i (\Psi^+ \Psi) + \partial_i (\Psi^+ \hat{\alpha}_i \Psi) = 0; \quad i = r, \varphi, z \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \Psi^+ \Psi d^3x &= - \int_\Omega \text{div} \vec{j} d^3x = 0 \Rightarrow \int_\Omega \Psi^+ \Psi d^3x = I \end{aligned} \quad (3.117)$$

wobei die Wellenfunktionen auf Eins normiert wurden.

Gleichung (3.117) wird in (3.115) eingesetzt:

$$E = \langle \Psi | \hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle = \int_\Omega d^3x \Psi^+(\vec{x}) \left[\hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) + \frac{1}{r} \hat{\alpha}_2 \hat{p}_\varphi + \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z + \hat{\beta} m_o + V \right] \Psi(\vec{x}) \quad (3.118)$$

Wir können auch die Energie bestimmen als das Integral:

$$\langle \Psi | \hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle = E = \int_\Omega T^{oo} d^3x \quad (3.119)$$

$$E = -i \int_\Omega \bar{\Psi} \gamma^o \nabla_o \Psi d^3x + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega (\Psi^+ \Psi) d^3x + \int_\Omega d^3x (eA^o \Psi^+ \Psi) \quad (3.120)$$

Mit Gleichungen (3.117) wird daraus:

$$E = -i \int_\Omega \bar{\Psi} \gamma^o \nabla_o \Psi d^3x + \int_\Omega d^3x (eA^o \Psi^+ \Psi) = \int_\Omega \Psi^+ (\hat{H}_\psi + \hat{H}_w) \Psi d^3x \quad (3.121)$$

$$\Rightarrow E = \int_\Omega d^3x \Psi^+ \hat{H} \Psi \quad (3.122)$$

wobei $\hat{H} = \hat{H}_\psi + \hat{H}_w$ ist.

3.7. Die Greensfunktion der Dirac - Gleichung

Die Greensfunktion in der gemischten Ort – Energie Darstellung lässt sich nach Eigenfunktion des Hamilton – Operators entwickeln in der Form

$$G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \sum_{(n)} \frac{\Psi_{\mu}(\bar{x}, n) \bar{\Psi}_{\nu}(\bar{x}_1, n)}{E_n - \omega} \quad (3.123)$$

Dies lässt sich leicht nachprüfen

$$\hat{H} \Psi(\bar{x}, n) = E_n \Psi(\bar{x}, n) \quad (3.124)$$

$$\hat{H}_x G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \sum_{(n)} \frac{\hat{H}_x \Psi_{\mu}(\bar{x}, n) \bar{\Psi}_{\nu}(\bar{x}_1, n)}{E_n - \omega} = \sum_{(n)} \frac{E_n \Psi_{\mu}(\bar{x}, n) \bar{\Psi}_{\nu}(\bar{x}_1, n)}{E_n - \omega} \quad (3.125)$$

$$E_n = (E_n - \omega) + \omega \quad (3.126)$$

Wird (3.126) in (3.125) eingesetzt, ergibt

$$\hat{H}_x G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \sum_{(n)} \Psi_{\mu}(\bar{x}, n) \bar{\Psi}_{\nu}(\bar{x}_1, n) + \sum_{(n)} \frac{\omega}{E_n - \omega} \Psi_{\mu}(\bar{x}, n) \bar{\Psi}_{\nu}(\bar{x}_1, n) \quad (3.127)$$

Mit der Vollständigkeitsrelation $\sum_{(n)} \Psi_{\mu}(\bar{x}, n) \bar{\Psi}_{\nu}(\bar{x}_1, n) = \gamma^0 \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_1)$, folgt

$$\hat{H}_x G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \gamma^0 \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_1) + \omega G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) \quad (3.128)$$

$$\therefore (\hat{H}_x - \omega) G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \gamma^0 \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_1) \quad (3.129)$$

Wird (3.50) in (3.129) eingesetzt, so erhält man

$$\left(\hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) + \frac{1}{r} \hat{\alpha}_2 \hat{p}_{\varphi} + \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z + \hat{\beta} m_o + V - \omega \right) G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \gamma^0 \delta^3(\bar{x} - \bar{x}_1) \quad (3.130)$$

Die Darstellung der Delta – Funktion in Zylinder – Koordinaten [Jac⁴⁰⁻¹³⁷₂₃] lautet

$$\delta^3(\bar{x} - \bar{x}_1) = \frac{1}{r} \delta(r - r_1) \delta(\varphi - \varphi_1) \delta(z - z_1) \quad (3.131)$$

Die Delta – Funktionen in φ und z lassen sich folgendermaßen darstellen [Jac¹⁴⁶₂₃]:

$$\delta(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{im(\varphi - \varphi_1)} \quad (3.132)$$

$$\delta(z - z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z_1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z_1)] \quad (3.133)$$

Die Greensche Funktion entwickeln wir in ähnlicher Weise

$$G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \frac{1}{[2\pi]^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi_1)} e^{ik(z-z_1)} G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) \quad (3.134)$$

Wir berechnen jetzt die folgenden Größen:

$$\hat{p}_r G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \frac{1}{[2\pi]^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi_1)} e^{ik(z-z_1)} \{ \hat{p}_r G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) \} \quad (3.135)$$

$$\hat{p}_\varphi G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \frac{1}{[2\pi]^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi_1)} e^{ik(z-z_1)} \{ m G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) \} \quad (3.136)$$

$$\hat{p}_z G_{\mu\nu}(\bar{x}, \bar{x}_1; \omega) = \frac{1}{[2\pi]^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi_1)} e^{ik(z-z_1)} \{ k G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) \} \quad (3.137)$$

$$\delta^3(\bar{x} - \bar{x}_1) = \frac{1}{r} \delta(r - r_1) \frac{1}{[2\pi]^2} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{im(\varphi-\varphi_1)} e^{ik(z-z_1)} \quad (3.138)$$

Die Substitution von (3.135) – (3.138) in (3.130) führt dann auf eine Gleichung für die radiale Greensche Funktion $G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega)$

$$\left(\hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) + \frac{m}{r} \hat{\alpha}_2 + k \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta} m_o + V - \omega \right) G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) = \frac{\gamma^o}{r} \delta(r - r_1) \quad (3.139)$$

$$\Rightarrow [\hat{H}(r) - \omega] G_{\mu\nu}(r, r_1; \omega) = \frac{1}{r} \gamma^o \delta(r - r_1) \quad (3.140)$$

Der radiale Hamilton – Operator der Dirac – Teilchens im elektromagnetischen Feld ist dann

$$\hat{H}(r) = \hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) + \frac{m}{r} \hat{\alpha}_2 + k \hat{\alpha}_3 + \hat{\beta} m_o + V(r) \quad (3.141)$$

Kapitel 4

DIE RADIALE DIRAC - GLEICHUNG

Mit den Dirac – Matrizen in Standarddarstellung, stellten wir die Dirac – Gleichung (3.52) auf. Es handelt sich um ein System von vier gekoppelten partiellen Differentialgleichungen. Im Folgenden wird neben der Zylinder – Symmetrie der Einfachheit halber zusätzlich Translationssymmetrie in der z - Richtung angenommen, das heißt, das Potential $V(\vec{x}) = V(r)$ hängt nur von der Radialkoordinate r ab. Dann lässt sich die Dirac – Gleichung auf ein eindimensionales Problem reduzieren.

Augrund der Zylindersymmetrie und der Zeitunabhängigkeit des Stringpotentials sind die Gesamtenergie sowie die z - Komponenten vom Impuls und Gesamtdrehimpuls gute Quantenzahlen der Elektronenwellenfunktion.

$$\hat{J}_z \Psi = m \Psi \quad , \quad m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$$

Es entsteht ein gekoppeltes System von vier Differentialgleichungen für die radialen Komponenten der Spinoren. Die Radialgleichungen stellen zwei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung für die Spinoren χ_1 und χ_4 (χ_2 und χ_3) dar.

$$-i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_1 = \alpha(r) \chi_4$$

$$-i \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \chi_4 = \xi(r) \chi_1$$

Durch Differentiation lässt sich aus diesem Gleichungssystem eine Komponente eliminieren, was auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Spinoren führt.

Durch die Transformation $\chi_1 = \sqrt{\frac{|\alpha|}{r}} F$ ($\chi_4 = \sqrt{\frac{|\xi|}{r}} f$) lässt sich die erste Ableitung der Spinoren eliminieren und wir erhalten eine Schrödinger – artige Gleichung.

$$y'' + p_i^2 y = 0 \quad , \quad y = f, F \quad \text{und} \quad i = \uparrow, \downarrow$$

wobei $p_i^2 = p_i^2(r, E)$ der effektive Impuls ist.

4.1. Die radiale Dirac - Gleichung

Wir betrachten Gleichung (3.52) mit den Matrizen [Gre¹¹⁸]

$$\hat{\alpha}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \hat{\alpha}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \hat{\alpha}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (4.1)$$

Mit dem Ansatz:

$$\Psi = e^{ikz} \begin{vmatrix} \chi_1(r) \Pi_1(\varphi) \\ \chi_2(r) \Pi_2(\varphi) \\ \chi_3(r) \Pi_3(\varphi) \\ \chi_4(r) \Pi_4(\varphi) \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

ergeben sich die Terme:

$$\hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) \Psi = e^{ikz} \begin{vmatrix} -i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_4 \Pi_4 \\ -i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_3 \Pi_3 \\ -i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_2 \Pi_2 \\ -i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_1 \Pi_1 \end{vmatrix} \quad (4.3)$$

$$\hat{\alpha}_2 \hat{p}_\varphi \Psi = e^{ikz} \begin{vmatrix} -\chi_4 (\partial_\varphi \Pi_4) \\ \chi_3 (\partial_\varphi \Pi_3) \\ -\chi_2 (\partial_\varphi \Pi_2) \\ \chi_1 (\partial_\varphi \Pi_1) \end{vmatrix} \quad \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z \Psi = e^{ikz} \begin{vmatrix} k \chi_3 \Pi_3 \\ -k \chi_4 \Pi_4 \\ k \chi_1 \Pi_1 \\ -k \chi_2 \Pi_2 \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$m_o \hat{\beta} \Psi = e^{ikz} \begin{vmatrix} m_o \chi_1 \Pi_1 \\ m_o \chi_2 \Pi_2 \\ -m_o \chi_3 \Pi_3 \\ -m_o \chi_4 \Pi_4 \end{vmatrix} \quad (E - eA_o) \Psi = e^{ikz} \begin{vmatrix} (E - eA_o) \chi_1 \Pi_1 \\ (E - eA_o) \chi_2 \Pi_2 \\ (E - eA_o) \chi_3 \Pi_3 \\ (E - eA_o) \chi_4 \Pi_4 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Die Gleichungen (4.3), (4.4) und (4.5) werden in die Dirac – Gleichung

$$\left(\hat{a}_1 \left[\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right] + \frac{1}{r} \hat{a}_2 \hat{p}_\varphi + \hat{a}_3 \hat{p}_z + \hat{\beta} m_0 \right) \Psi(\vec{x}) = (E - V) \Psi(\vec{x}) \quad (4.6a)$$

eingeführt:

$$\left\{ -i \hat{a}_1 \partial_r + \frac{\hat{a}_2}{r} \left(-i \partial_\varphi - \frac{i}{2} \gamma^l \gamma^2 \right) - i \hat{a}_3 \partial_z + \hat{\beta} m_0 \right\} \Psi(\vec{x}) = (E - V) \Psi(\vec{x}) \quad (4.6b)$$

$$-i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_4 \Pi_4 - \frac{1}{r} \chi_4 (\partial_\varphi \Pi_4) + k \chi_3 \Pi_3 + m_0 \chi_1 \Pi_1 = (E - e A_0) \chi_1 \Pi_1$$

$$-i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_3 \Pi_3 + \frac{1}{r} \chi_3 (\partial_\varphi \Pi_3) - k \chi_4 \Pi_4 + m_0 \chi_2 \Pi_2 = (E - e A_0) \chi_2 \Pi_2$$

$$-i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_2 \Pi_2 - \frac{1}{r} \chi_2 (\partial_\varphi \Pi_2) + k \chi_1 \Pi_1 - m_0 \chi_3 \Pi_3 = (E - e A_0) \chi_3 \Pi_3$$

$$-i \left(\partial_r + \frac{1}{2r} \right) \chi_1 \Pi_1 + \frac{1}{r} \chi_1 (\partial_\varphi \Pi_1) - k \chi_2 \Pi_2 - m_0 \chi_4 \Pi_4 = (E - e A_0) \chi_4 \Pi_4$$

(4.7)

Das Problem ist rotationssymmetrisch um die z - Achse, so dass die Drehimpulskomponente \hat{J}_z eine gute Quantenzahl sein muss. Wir definieren den Bahndrehimpulsoperator auf folgende Weise (4.6b):

$$\hat{L}_z = -i \partial_\varphi - \frac{i}{2} \gamma^l \gamma^2, \quad (4.8)$$

berechnen den zweiten Term:

$$-\frac{i}{2} \gamma^l \gamma^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \hat{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_z \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \hat{\Sigma}_z \quad (4.9)$$

und fordern die Eigenwertgleichung

$$\hat{J}_z \Psi = \left(\hat{L}_z + \frac{1}{2} \hat{\Sigma}_z \right) \Psi = m \Psi \quad (4.10)$$

mit $m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$

Wir substituieren Gleichungen (4.8) und (4.9) in (4.10) und haben die Lösungen:

$$\begin{vmatrix} -i\partial_\varphi \Pi_1 \\ -i\partial_\varphi \Pi_2 \\ -i\partial_\varphi \Pi_3 \\ -i\partial_\varphi \Pi_4 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \end{vmatrix} \quad (4.11)$$

$$-i\partial_\varphi \Pi_\nu = m \Pi_\nu \Rightarrow \Pi_\nu = e^{i m \varphi} \quad ; \quad \nu = 1, 2, 3, 4 \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow \Psi(r, \varphi, z) = e^{i m \varphi} e^{i k z} \begin{vmatrix} \chi_1(r) \\ \chi_2(r) \\ \chi_3(r) \\ \chi_4(r) \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

Wird (4.13) in (4.7) eingesetzt, ergibt

$$k\chi_3 - i\left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]\chi_4 = (E - eA_0 - m_0) \chi_1 \quad (4.14a)$$

$$-k\chi_2 - i\left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]\chi_1 = (E - eA_0 + m_0) \chi_4$$

$$-k\chi_4 - i\left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r}\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]\chi_3 = (E - eA_0 - m_0) \chi_2 \quad (4.14b)$$

$$k\chi_1 - i\left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]\chi_2 = (E - eA_0 + m_0) \chi_3$$

Mit dem Ansatz

$$k\chi_4 = (s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0) \chi_2 \quad , \quad k\chi_1 = (s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0) \chi_3 \quad (4.15)$$

entkoppeln wir die Gleichungen (4.14a) und (4.14b). s nimmt die Werte ± 1 an.

a) Gleichung (4.15) wird in (4.14a) eingesetzt:

$$-i\left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right]\frac{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0}{k}\chi_2 = (E - eA_0 - m_0)\frac{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0}{k}\chi_3 - k\chi_3$$

$$\begin{aligned}
m_0 + \frac{k^2}{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} &= \frac{m_0 s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0^2 + k^2}{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} \\
&= \frac{s\sqrt{k^2 + m_0^2} (s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0)}{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} = s\sqrt{k^2 + m_0^2}
\end{aligned}$$

Wir haben die Beziehung $s^2 = I$ benutzt.

$$\Rightarrow -i \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \chi_2 = (E - eA_0 - s\sqrt{k^2 + m_0^2}) \chi_3 \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
-i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0}{k} \chi_3 &= (E_n - eA_0 + m_0) \frac{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0}{k} \chi_2 + k\chi_2 \\
\Rightarrow -i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_3 &= (E - eA_0 + s\sqrt{k^2 + m_0^2}) \chi_2 \quad (4.17)
\end{aligned}$$

b) Gleichung (4.15) wird in (1.14b) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
-i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{k}{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} \chi_1 &= (E - eA_0 + s\sqrt{k^2 + m_0^2}) \frac{k}{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} \chi_4 \\
\Rightarrow -i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_1 &= (E - eA_0 + s\sqrt{k^2 + m_0^2}) \chi_4 \quad (4.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-i \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \frac{k}{s\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} \chi_4 &= (E - eA_0 - s\sqrt{k^2 + m_0^2}) \frac{k}{\sqrt{k^2 + m_0^2} + m_0} \chi_1 \\
\Rightarrow -i \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \chi_4 &= (E - eA_0 - s\sqrt{k^2 + m_0^2}) \chi_1 \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Also lässt sich (4.14a) und (4.14b) auf ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen reduzieren:

$$\begin{aligned}
-i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_1 &= (E - eA_0 + sM_e) \chi_4 \\
-i \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \chi_4 &= (E - eA_0 - sM_e) \chi_1
\end{aligned} \quad (4.20a)$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
 -i \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \chi_2 &= (E - eA_0 - sM_e) \chi_3 \\
 -i \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_3 &= (E - eA_0 + sM_e) \chi_2 \quad ,
 \end{aligned}
 \tag{4.20b}$$

wobei die transversale Masse $M_e = \sqrt{k^2 + m_0^2}$ eingeführt wurde.

Diese Radialgleichungen haben die gleiche Struktur wie die Radialgleichungen der Dirac – Gleichung im Kugelsymmetrie - Fall. Die Rolle der Quantenzahl κ und der Elektronenmasse m_0 werden hier von m und M_e übernommen.

Wenn wir durch $(m, s) \leftrightarrow (-m, -s)$ und $\chi_1 \leftrightarrow \chi_2$, $\chi_4 \leftrightarrow \chi_3$ substituieren, geht (4.20a) in (4.20b) und umgekehrt über.

Weiterhin kann man aus (4.20a) eine zweifache Entartung des Energieeigenwertes E ablesen. Durch die Ersetzung(Spin up und Spin down Zustände)

$$m, s, \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_4 \end{bmatrix} \leftrightarrow -m, -s, \begin{bmatrix} \chi_4 \\ \chi_1 \end{bmatrix}
 \tag{4.21}$$

gehen die Radialgleichungen ineinander über, d.h. bei gegebenem M_e liefern (m, s) und $(-m, -s)$ denselben Energieeigenwert

Zur Bestimmung des Energiespektrums genügt es daher Gleichung (4.20) zu lösen. Zu diesem Zweck gehen wir zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung über. Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned}
 \zeta(r) &= E - eA_0(r) - sM_e \quad \text{und} \quad \alpha(r) = E - eA_0(r) + sM_e \\
 \Rightarrow \zeta(r) &= \alpha(r) - 2sM_e \quad \text{und} \quad \alpha(r) = \zeta(r) + 2sM_e
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Dann ergibt sich:

$$\chi_4 = -\frac{i}{\alpha} \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_1
 \tag{4.23}$$

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \left[\frac{d}{adr} - \frac{1}{ar} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_1 + \zeta \chi_1 = 0
 \tag{4.24}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d}{adr} \chi_1 \right) - \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{ar} \chi_1 \right) + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \frac{d}{adr} \chi_1 - \frac{1}{ar^2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(m - \frac{1}{2} \right) \chi_1 + \zeta \chi_1 = 0
 \tag{4.25}$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{d\chi_1}{dr} \right) = -\frac{\alpha'}{\alpha^2} \frac{d\chi_1}{dr} + \frac{1}{\alpha} \frac{d^2\chi_1}{dr^2} \quad (4.26)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\alpha r} \chi_1 \right) = -\left(\frac{\alpha'}{\alpha^2 r} + \frac{1}{\alpha r^2} \right) \chi_1 + \frac{1}{\alpha r} \frac{d\chi_1}{dr} \quad (4.27)$$

Einsetzen von (4.26) und (4.27) in die Gleichung (4.25); liefert:

$$\chi_4 = -\frac{i}{\alpha} \left[\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right] \chi_1$$

$$\left. \frac{d^2\chi_1}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{d\chi_1}{dr} + \left\{ \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{1}{r} \left(m - \frac{1}{2} \right) \right) + \alpha(r) (\alpha(r) - 2sM_e) \right\} \chi_1 = 0 \right\} \chi_1 = 0 \quad (4.28a)$$

$$\chi_1 = -\frac{i}{\xi} \left[\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right] \chi_4$$

$$\left. \frac{d^2\chi_4}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\xi'}{\xi} \right) \frac{d\chi_4}{dr} + \left\{ -\frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\xi'}{\xi} + \frac{1}{r} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right) + \xi(r) (\xi(r) + 2sM_e) \right\} \chi_4 = 0 \right\} \chi_4 = 0 \quad (4.28b)$$

Wegen (4.15) können wir ersetzen durch $\chi_4 \rightarrow \chi_2$ und $\chi_1 \rightarrow \chi_3$, und erhalten die identischen Differentialgleichungen für χ_2 und χ_3 .

4.2. Der effektive Impuls und die Schrödinger – artige Form der Dirac – Gleichung

Mit dem Ansatz:

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{|\alpha(r)|}{r}} F(r) \quad (4.29)$$

werden erste und zweite Ableitung von χ_1 :

$$\chi_1' = \frac{1}{2\alpha^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}} (\alpha' r - \alpha) F + \sqrt{\frac{\alpha}{r}} F' \quad (4.30)$$

$$\chi_1'' = -\frac{(\alpha' r - \alpha) F}{2} \left\{ \frac{\alpha'}{2\alpha^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2\alpha^{\frac{1}{2}} r^{\frac{5}{2}}} \right\} + \frac{\alpha'' F}{2\alpha^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}} + \frac{(\alpha' r - \alpha) F'}{\alpha^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}} + F'' \sqrt{\frac{\alpha}{r}} \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{r}{\alpha}} \left(\frac{d^2\chi_1}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \frac{d\chi_1}{dr} \right) = F'' + \left(-\frac{3}{4} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2r} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha''}{\alpha} \right) + \frac{1}{4r^2} \right) F \quad (4.32)$$

Einsetzen von (4.32) in (4.28a) liefert die Schrödinger – artige Differentialgleichung

$$F''(r) + p_{\uparrow}^2(r, E) F(r) = 0 \quad , \quad (4.33)$$

wobei $p_{\uparrow}^2(r, E)$ der effektive Impuls ist:

$$p_{\uparrow}^2(r, E) = \alpha(\alpha - 2sM_e) - \frac{3}{4} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha''}{\alpha} \right) + \frac{m}{r} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} \right) - \frac{m(m-1)}{r^2} \quad (4.34)$$

Die Funktion $p_{\uparrow}^2(r, E)$ entscheidet darüber, ob die Wellenfunktion oszillatorisches Verhalten zeigt ($p_{\uparrow}^2 > 0$) oder exponentiell abfällt ($p_{\uparrow}^2 < 0$). Sie bestimmt also den klassisch erlaubten und den klassisch verbotenen Bereich.

Analog kann man transformieren

$$\chi_4 = \sqrt{\frac{|\xi(r)|}{r}} f(r) \quad (4.35)$$

und erhält die Differentialgleichung

$$f''(r) + p_{\downarrow}^2(r, E) f(r) = 0 \quad (4.36)$$

mit

$$p_{\downarrow}^2(r, E) = \xi(\xi + 2sM_e) - \frac{3}{4} \left(\frac{\xi'}{\xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\xi''}{\xi} \right) - \frac{m}{r} \left(\frac{\xi'}{\xi} \right) - \frac{m(m+1)}{r^2} \quad (4.37)$$

wobei α und ξ durch die Gleichung (4.22) gegeben sind.

Wir setzen (4.29) und (4.35) in (4.20a) ein, und erhalten

$$F = -i \frac{1}{\sqrt{\alpha\xi}} \left\{ \frac{f}{2} \left(\frac{\xi'}{\xi} + \frac{2m}{r} \right) + f' \right\} \quad (4.38a)$$

$$f = -i \frac{1}{\sqrt{\alpha\xi}} \left\{ \frac{F}{2} \left(\frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2m}{r} \right) + F' \right\} \quad (4.38b)$$

4.3. Die Singularitäten des effektiven Impulses

Die Nullstelle der Funktion von $\alpha(r, s = +1)$ für das Potential eines dünnen Zylinders (2.63) lautet

$$\alpha(r_{\uparrow}, s = +1) = E - V_o \ln \left\{ \frac{L}{2r_{\uparrow}} + \frac{1}{2r_{\uparrow}} \sqrt{L^2 + 4r_{\uparrow}^2} \right\} + M_e = 0 \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow r_{\uparrow} = \frac{L}{2sh \left\{ \frac{E + M_e}{V_o} \right\}} \quad (4.40)$$

Für gebundene Zustände mit der Energie $-M_e < E < M_e$ gibt es wegen $V_o < 0$ keine zulässige (das heißt positive) Nullstelle. Der effektive Impuls p_{\uparrow}^2 besitzt daher keinen singulären Punkt.

Für $E = -M_e$ liegt der singuläre Punkt im Unendlichen $\alpha(r = \infty) \rightarrow 0$.

Für $E < -M_e$ beschreibt (4.40) endliche positive Abstände, das heißt der effektive Impuls besitzt einen singulären Punkt an der Stellen: $r = r_{\uparrow}$. Außerdem tendiert der effektive Impuls nach $p_{\uparrow}^2(r_{\uparrow}, E_n) \rightarrow -\infty$.

Die Nullstelle von $\zeta(r_{\downarrow}, s = +1) = 0$ ist

$$\zeta(r_{\downarrow}, s = +1) = E - V_o \ln \left\{ \frac{L}{2r_{\downarrow}} + \frac{1}{2r_{\downarrow}} \sqrt{L^2 + 4r_{\downarrow}^2} \right\} - M_e = 0 \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow r_{\downarrow} = \frac{L}{2sh \left\{ \frac{E - M_e}{V_o} \right\}} \quad (4.42)$$

Wenn die Energie in den Intervallen $-M_e < E < M_e$ und $E \leq -M_e$ liegt, besitzt der effektive Impuls einen singulären Punkt an der Stelle $r = r_{\downarrow}$. Der effektive Impuls tendiert nach: $p_{\downarrow}^2(r_{\downarrow}, E) \rightarrow -\infty$.

Wir wenden die Transformationen (4.29) bzw (4.35) auf dem Intervall außerhalb der Nullstelle von $\alpha(r)$ bzw $\zeta(r)$ an

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{|\alpha(r)|}{r}} F(r) \quad r \in [0, r_{\uparrow} - \varepsilon] \cup [r_{\uparrow} + \varepsilon, \infty[\quad (4.43)$$

$$\chi_4 = \sqrt{\frac{|\zeta(r)|}{r}} f(r) \quad r \in [0, r_{\downarrow} - \varepsilon] \cup [r_{\downarrow} + \varepsilon, \infty[\quad (4.44)$$

wobei $\varepsilon < l$ ist.

Wir können sehen, dass der singuläre Punkt im effektiven Potential nicht physikalisch ist. Dazu gehen wir auf die ursprünglichen Differentialgleichungen zurück. Von (4.20) haben wir an der Stelle $r = r_{\uparrow}$

$$\chi'_I(r_{\uparrow}) - \frac{1}{r_{\uparrow}} \left(m - \frac{1}{2} \right) \chi_I(r_{\uparrow}) = i\alpha(r_{\uparrow}) \chi_4(r_{\uparrow}) = 0 \quad (4.45)$$

$$\Rightarrow \chi'_I(r_{\uparrow}) = \frac{1}{r_{\uparrow}} \left(m - \frac{1}{2} \right) \chi_I(r_{\uparrow}) \quad (4.46)$$

$$\tilde{\chi}_I = i \chi_I$$

$$\chi'_4(r_{\uparrow}) = \zeta(r_{\uparrow}) \tilde{\chi}_I(r_{\uparrow}) - \frac{1}{r_{\uparrow}} \left(m + \frac{1}{2} \right) \chi_4(r_{\uparrow}) \quad (4.47)$$

und an der Stelle $r = r_{\downarrow}$

$$\chi'_4(r_{\downarrow}) + \frac{1}{r_{\downarrow}} \left(m + \frac{1}{2} \right) \chi_4(r_{\downarrow}) = i\zeta(r_{\downarrow}) \chi_I(r_{\downarrow}) = 0 \quad (4.48)$$

$$\Rightarrow \chi'_4(r_{\downarrow}) = -\frac{1}{r_{\downarrow}} \left(m + \frac{1}{2} \right) \chi_4(r_{\downarrow}) \quad (4.49)$$

$$\tilde{\chi}'_I(r_{\downarrow}) = -\alpha(r_{\downarrow}) \chi_4(r_{\downarrow}) + \frac{1}{r_{\downarrow}} \left(m - \frac{1}{2} \right) \tilde{\chi}_I(r_{\downarrow}) \quad (4.50)$$

Dann sind die Spinoren an den Stellen $r = r_{\uparrow}$ bzw $r = r_{\downarrow}$ wohl definiert.

Außerdem haben wir mit $s^2 = 1$

$$p_i^2(r \rightarrow \infty) = E^2 - M_e^2, \quad i = \uparrow, \downarrow \quad (4.51)$$

$$E \in] -M_e, M_e [\Rightarrow p_i^2(r \rightarrow \infty) < 0 \quad (4.52)$$

$$E = -M_e \Rightarrow p_i^2(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (4.53)$$

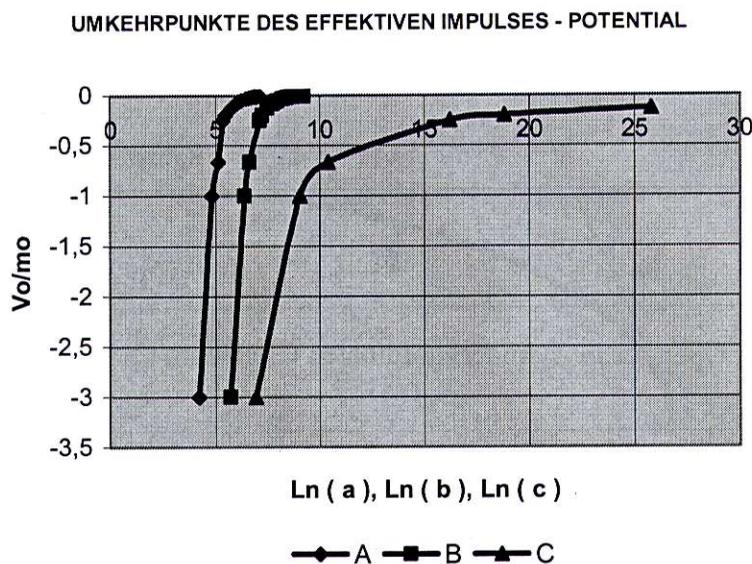
$$E < -M_e \quad \text{und} \quad E > M_e \Rightarrow p_i^2(r \rightarrow \infty) > 0 \quad (4.54)$$

In den Fällen $m = \pm \frac{1}{2}$

$$p_{\uparrow}^2 \left(m = +\frac{1}{2}, r \rightarrow 0 \right) \rightarrow +\infty \quad (4.55)$$

$$p_{\downarrow}^2 \left(m = -\frac{1}{2}, r \rightarrow 0 \right) \rightarrow +\infty \quad (4.56)$$

besitzt der effektive Impuls nur einen Umkehrpunkt, wenn die Energie im Bereich $-M_e < E < M_e$ liegt. Wenn die Energie im Bereich $E < -M_e$ liegt, besitzt der effektive Impuls zwei Umkehrpunkte.



[A] : $p^2(a) = 0$, [B] : $p^2(b) = 0$, [C] : $p^2(c) = 0$; $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $n = 0$, $\frac{k}{m_0} = 0$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$

Abb.4.1. Umkehrpunkte des effektiven Impulses gegen die Potentialtiefe für die Energie des tiefsten gebundenen Zustands (Tabelle A3). Bei Erhöhung der Potentialstärke V_0 werden die Umkehrpunkte a, b, c nach dem Zentrum des Zylinders verschoben.

In den anderen Fällen

$$p_i^2(m, r \rightarrow 0) \rightarrow -\infty \tag{4.57}$$

besitzt der effektive Impuls zwei Umkehrpunkte, wenn die Energie im Bereich $-M_e < E < M_e$ liegt. Der klassisch erlaubte Bereich $a \leq r \leq b$ wird von zwei Umkehrpunkten begrenzt. Wenn die Energie im Bereich $E < -M_e$ liegt, besitzt das effektive Potential drei Umkehrpunkte: Zwei erlaubte Gebiete getrennt von einer Barriere.

Der innere Umkehrpunkt a wird durch die Drehimpuls – Barriere bestimmt und fehlt für die Zustände mit $m = \pm \frac{1}{2}$. Der dritte Umkehrpunkt c tritt für überkritische Zustände auf und beschreibt den äußeren Rand des Tunnelbereiches durch die Schwelle der Dirac Gleichung.

4.4. Die Kurve der Eigenenergie

Wir betrachten diskrete gebundene Zustände der Dirac - Gleichung mit einem attraktiven Potential, wo $v \geq 0$ eine Funktion von r ist.

$$V(r) = \lambda v(r) \quad (4.58)$$

mit einem reellen Parameter λ .

Die Funktion v erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. v ist beschränkt

$$\begin{aligned} \text{Max } v < A = \text{Konst.} \\ 0 \leq r < \infty \end{aligned} \quad (4.59)$$

2. $v \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$

Der Hamilton Operator in Zylinderkoordinaten Gleichung (3.50) ist:

$$\hat{H}_{[r\varphi z]} = \left[\hat{\alpha}_1 \left(\hat{p}_r - \frac{i}{2r} \right) + \frac{1}{r} \hat{\alpha}_2 \hat{p}_\varphi + \hat{\alpha}_3 \hat{p}_z + \hat{\beta} m_0 + V(\lambda) \right]$$

Die Energieeigenwerte (3.119) sind:

$$E_n(\lambda) = \langle \Psi(\lambda) | \hat{H}_{[r\varphi z]}(\lambda) | \Psi(\lambda) \rangle \quad (4.60)$$

Wir berechnen die Ableitung der Energie E_n nach λ

$$\partial_\lambda E_n = \langle \partial_\lambda \Psi | \hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \partial_\lambda \hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{H}_{[r\varphi z]} | \partial_\lambda \Psi \rangle \quad (4.61)$$

und benutzen die folgenden Beziehungen

$$\hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle = E_n | \Psi \rangle$$

$$\langle \Psi | \hat{H}_{[r\varphi z]} = \langle \Psi | E_n$$

$$\hat{H}_{[r\varphi z]}^\dagger = \hat{H}_{[r\varphi z]} \Rightarrow E_n \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \partial_\lambda E_n = E_n \partial_\lambda \langle \Psi | \Psi \rangle + \langle \Psi | \partial_\lambda \hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle \quad (4.62)$$

Aus der Normierungsbedingung folgen wir

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \Rightarrow \partial_\lambda \langle \Psi | \Psi \rangle = 0 \quad (4.63)$$

Wir ersetzen (3.50) und (4.63) in (4.62) und erhalten das Hellmann – Feynman – Theorem

$$\partial_\lambda E_n = \langle \Psi | \partial_\lambda \hat{H}_{[r\varphi z]} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial_\lambda V | \Psi \rangle \quad (4.64)$$

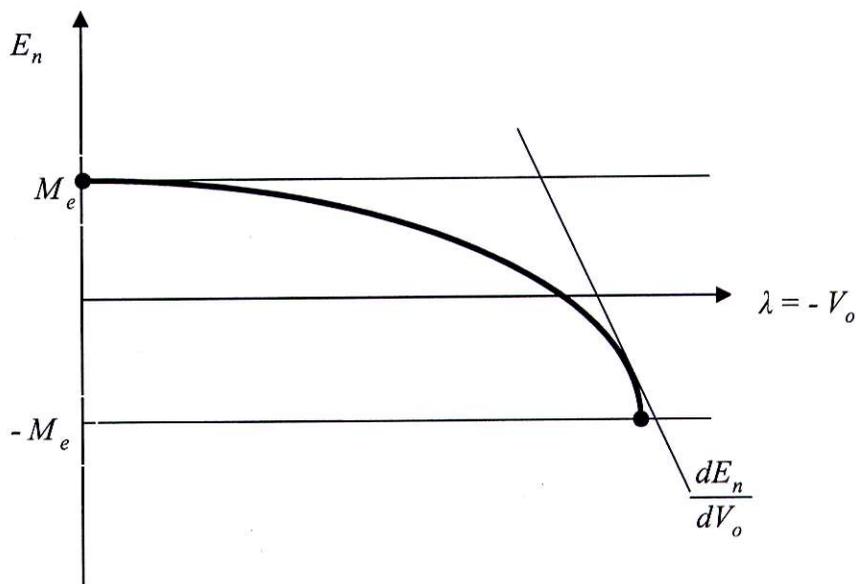


Abb.4.2. Die Kurve $E_n = E_n(\lambda = -V_0)$

a. Betrachten wir die Abhängigkeit von der Potentialtiefe, $\lambda = -V_0$

$$\partial_{V_0} E_n = - \int_{\Omega} d^3x \{ v(r) \Psi^+(\vec{x}) \Psi(\vec{x}) \} \quad (4.65)$$

Mittels der Stromdichte (3.83) erhalten wir

$$j^\mu(x) = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = (\Psi^+ \Psi; \Psi^+ \hat{\alpha}_i \Psi) = (j^0, j^i)$$

$$\partial_{V_0} E_n = - \int_{\Omega} d^3x (v j^0) \quad (4.66)$$

Mit den Eigenschaften des Potentials haben wir endlich:

$$-A < \partial_{V_0} E_n < 0 \quad (4.67)$$

Nach Gleichung (2.71) hat A den folgenden Wert

$$A = v(r=0) = \ln \frac{L}{r_0} + \frac{1}{2} \quad (4.68)$$

Die Kurve Eigenenergie gegen elektrisches Potential ist stetig und monoton. Der Eigenwert E_n erreicht bei einem kritischen Wert des Parameters $\lambda = -V_o$ die Kontinuumsgrenzen bei $E_n = -M_e$.

b. Nun betrachten wir die Zylinderlänge L als Parameter

Erst fixieren wir die Ladung pro Länge des Zylinders

$$\rho_L = \frac{Ze}{L} = \text{Konst.} \quad (4.69)$$

Wir berechnen die Ableitung der Energie E_n nach der Länge L mit der Hilfe von (4.64)

$$\partial_L E_n = \langle \Psi | \partial_L \hat{H}_{[r_{\text{poz}}]} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \partial_L V | \Psi \rangle \quad (4.70)$$

und betrachten den Fall eines dünnen Strings, so dass die Umkehrpunkte $a > r_o$, $b < L$ außerhalb des Strings liegen. Von (2.70) erhalten wir für $r \ll L$

$$\begin{aligned} V &= V_o \ln\left(\frac{L}{r}\right) \\ \Rightarrow \frac{dV}{dL} &= \frac{V_o}{L} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Wir setzen (4.71) in (4.70) ein

$$\frac{dE_n}{dL} = \frac{V_o}{L} \langle \Psi | \Psi \rangle \quad (4.72)$$

Mit (4.63) erhalten wir

$$\frac{dE_n}{dL} = \frac{V_o}{L} \quad (4.73)$$

Wir integrieren (4.73) und erhalten

$$\int_{E_l}^E dE_n = V_o \int_{L_l}^L \frac{dL}{L} \quad (4.74)$$

$$E(k=0) = V_o \ln\left(\frac{L}{L_l}\right) + E_l \quad (4.75)$$

In der Fermi – Energie $E_l = -m_o$ erhalten wir:

$$E(k=0) = V_o \ln\left(\frac{L}{L_F}\right) - m_o \quad (4.76)$$

Wir bezeichnen mit $L_l = L_F$ die Länge des Strings, bei welcher der gebundene Zustand die Fermi – Kante erreicht.

4.5. Der Fall eines dünnen und langen Strings

Verkleinert man den Radius r_o des Zylinders, so tendiert die Eigenenergie asymptotisch nach einem bestimmten endlichen Wert der Energie. Den Wert von r_o unterhalb dessen die Energie konstant wird, bezeichnen wir als kritischen Radius r_{ok} . Unterhalb von r_{ok} spielt der Radius keine Rolle mehr für die Energie. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses werden im Raum fixiert (**Abb.5.7**). Man beachte, dass dieses Verhalten ganz anders ist als beim sphärisch symmetrischen Fall: Für Atome mit $Z > 137$ hängen die Energieeigenwerte und Wellenfunktionen sehr empfindlich vom Kernradius ab, man beobachtet den Kollaps der Wellenfunktionen. Im zylindersymmetrischen Fall tritt dieses Phänomen nicht auf. Grund dafür ist die schwächere Singularität des Potentials: $\ln r$ statt $\frac{1}{r}$.

Dann vergrößern wir die Länge des Zylinders. Wieder wird die Eigenenergie nach unten verschoben. Wir finden auch, dass sie die Umkehrpunkte des effektiven Impulses mit der Erhöhung der Länge nicht verändern, und außerhalb des Zylinders bleiben.

1. Die Ladungsdichte wird mit einem Wert $|\frac{V_o}{m_o}| \ll 1$ fixiert.
2. Wir verkleinern den Radius des Zylinders $r_o \rightarrow 0$,
3. und vergrößern dann die Länge des Zylinders $L \rightarrow \infty$.

Mit (4.75) und (2.70) finden wir

$$E - V = V_o \ln\left(\frac{r}{L_l}\right) + E_l \quad (4.77)$$

also

$$\alpha(k=0) = V_o \ln\left(\frac{r}{L_l}\right) + E_l + s m_o, \quad \xi(k=0) = V_o \ln\left(\frac{r}{L_l}\right) + E_l - s m_o \quad (4.78)$$

Das hat zur Folge, dass die Umkehrpunkte a, b für $r \ll L$ nicht von der Länge abhängen, sie werden also im Raum fixiert, siehe **Abb.5.14**.

Kapitel 5

DIE GEBUNDENEN ZUSTÄNDE

Wir wollen nun die gebundenen Eigenzustände von Elektronen für das in Kapitel 2 beschriebene elektrostatische Potential bestimmen

Aus physikalischen Gründen müssen die Spinoren in den Stellen $r = 0$ und $r \rightarrow \infty$ endlich sein. Daher stellt die Differentialgleichung (4.34) oder (4.36) eine Randwertaufgabe dar, die bekanntlich im allgemeinen, d.h. bei beliebigen Werte der Energie $E = E_n$ nicht lösbar ist.

Nur für bestimmte diskrete Eigenwerte $E = E_n$, die gerade den physikalischen Bindungsenergien entsprechen, können die Gleichung (4.34) oder (4.36) integriert und gleichzeitig beide Randbedingungen erfüllt werden.

$$y(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad y(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad y = f, F$$

Wir lösen die Schrödinger – artige Gleichung durch die Methode der uniformen Approximation, die auch als Miller – Good [Mil₂₇] Methode bekannt ist.

Die asymptotische Gestalt der uniformen Approximation stimmt mit der WKB – Methode überein.

5.1. Asymptotische Lösung der Dirac – Gleichung(unterkritischer Fall)

Wir wollen die Bewegung eines Teilchens im Feld $V = V_0 v(r)$ behandeln, das im Unendlichen schnell genug verschwindet. Wir schreiben die asymptotische Gestalt der Wellenfunktion der Lösung der Schrödinger – artigen Gleichung für eine beliebige gegebene Energie im Intervall $-M_e < E < M_e$ in der Form

$$y(r) = \alpha(E) \exp(-\sqrt{-p_\infty^2} r) + \beta(E) \exp(\sqrt{-p_\infty^2} r) \quad (5.1)$$

und werden E als komplexe Veränderliche auffassen. (5.1) ist eine Lösung der Schrödinger – artigen Gleichung

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + p_\infty^2 y(r) = 0 \quad \text{mit} \quad y = f, F \quad (5.2)$$

$$p_\infty^2(r \rightarrow \infty) = E^2 - M_e^2 = (E + M_e)(E - M_e) < 0 \quad (5.3)$$

Für $-M_e < E < M_e$ ist

$$\sqrt{-p_\infty^2} > 0 \quad (5.4)$$

Auf der reellen Achse ($-M_e < E < M_e$) sind die Exponentialfaktoren im ersten und zweiten Glied in (5.1) reell. Ein Faktor nimmt ab, der andere nimmt zu für $r \rightarrow \infty$. Aus der Bedingungen, dass y reell ist, folgt, dass die Funktionen $\alpha(E)$ und $\beta(E)$ für $-M_e < E < M_e$ reell sind. Hieraus folgt weiterhin, dass diese Funktionen konjugiert komplexe Werte in zwei beliebigen Punkten haben, die symmetrisch zur reellen Achse liegen:

$$\alpha(E^*) = \alpha^*(E) \quad \beta(E^*) = \beta^*(E) \quad (5.5)$$

Gebundenen Zustände eines Teilchens im Feld $V = V_0 v(r)$ entsprechen Wellenfunktionen, die für $r \rightarrow \infty$ verschwinden. Dazu darf der zweite Summand in (5.1) nicht vorhanden sein, also entsprechen die diskreten Energieniveaus Nullstellen in der Funktion $\beta(E)$. Da die Schrödinger – artige Gleichung nur reelle Eigenwerte hat, sind alle Nullstellen von $\beta(E)$ auf dem physikalischen Blatt reell (und liegen in $-M_e < E < M_e$).

5.2. Lösung der Dirac – Gleichung mit isolierten Umkehrpunkten des effektiven Impuls

Wir wenden die Methode der uniformen Approximation an, und betrachten die Schrödinger – artige Gleichung.

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + p^2(r, E) y(r) = 0 \quad (5.6)$$

Wir betrachten nun eine Referenzgleichung für welche die Lösung bekannt ist.

$$\frac{d^2 \Phi(z)}{dz^2} + P^2(z) \Phi(z) = 0 \quad (5.7)$$

Die Nullstellen von $p^2(r, E)$ bestimmt die Natur der Lösung $y(r)$ und die Nullstellen von $P^2(z)$ bestimmt die Natur der Lösung $\Phi(z)$.

Die Lösungen $y(r)$ und $\Phi(z)$ sind nur dann ähnlich über einen bestimmten Intervall von r und z , wenn sie die gleiche Anzahl und Art von Nullstellen haben. Zum Beispiel: wenn $y(r)$ eine einfache Nullstellen hat, dann muss auch $\Phi(z)$ eine einfache Nullstellen haben.

Nun setzen wir die unbekannte Funktion auf folgende Weise in Beziehung zur Referenzlösung

$$y(r) = A(r) \Phi(z(r)) \quad (5.8)$$

Mit Funktionen $A(r)$ und $Z(r)$ die bestimmt werden müssen.

Die zweite Ableitung ist mit (5.7)

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{d^2 A}{dr^2} \Phi + \frac{d\Phi}{dz} \left\{ 2 \frac{dA}{dr} \frac{dz}{dr} + A \frac{d^2 z}{dr^2} \right\} - AP^2 \Phi \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \quad (5.9)$$

werden (5.8) und (5.9) in (5.6) eingesetzt, ergibt

$$A\Phi \left\{ p^2 - P^2 \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 \right\} + \frac{d\Phi}{dz} \frac{1}{A} \frac{d}{dr} \left(A^2 \frac{dz}{dr} \right) + \frac{d^2 A}{dr^2} \Phi = 0 \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{dr} \right)^2 = \frac{p^2(r)}{P^2(z)} \quad \text{und} \quad \frac{d}{dr} \left(A(r)^2 \frac{dz}{dr} \right) = 0 \quad (5.11)$$

Wir integrieren die zweite Gleichung(5.11)

$$A(r) = \left(\frac{dz}{dr} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{P^2(z(r))}{p^2(r)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (5.12)$$

Mit dieser Auswahl von $z(r)$ und $A(r)$ sehen wir, dass die Funktion $y(r)$ die folgende Gleichung befriedigt

$$\frac{d^2 y(r)}{dr^2} + \left\{ p^2(r, E) + \frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dr^2} \right\} y(r) = 0 \quad (5.13)$$

Dies ist eine gute Näherung für die ursprüngliche Differentialgleichung (5.6) wie wohl die folgende Ungleichheit erfüllt ist

$$\frac{d^2 A}{dr^2} \ll p^2(r, E) A \quad (5.14)$$

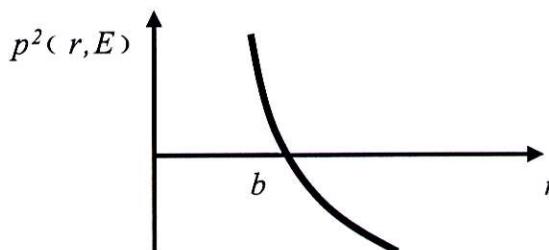


Abb.5.1. Isolierte Nullstellen des effektiven Impulses $p^2(r, E)$

Wenn $p^2(r, E)$ eine einfache oder mehreren entfernte Nullstellen hat, können wir diese wie isolierte stationäre Phasenpunkt behandeln.

- a. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $p^2(b, E) = 0$ und $p^2(r, E) < 0$ für $r > b$, also $(p^2(b, E))' < 0$ (Abb.5.1).

Wir wählen als Referenz die lineare Funktion $P^2(z) = -z$ aus und finden wegen (5.11)

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{p^2(r)}{-z} \tag{5.15}$$

Wir wählen die Integrationskonstante so dass $z(r=b) = 0$. Das stellt sicher, dass $z(r)$ wohl definierbar für alle r ist. Also

$$\frac{2}{3}(-z(r))^{3/2} = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)}, \quad r \leq b \tag{5.16}$$

$$\frac{2}{3}(z(r))^{3/2} = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)}, \quad r \geq b \tag{5.17}$$

Mit $P^2(z) = -z$ ist die Referenzgleichung eine Airy - Gleichung

$$\frac{d^2\Phi(z)}{dz^2} - z\Phi(z) = 0 \tag{5.18}$$

und hat die allgemeine Lösung

$$\Phi(z) = \alpha Ai(z) + \beta Bi(z) \tag{5.19}$$

(5.12) und (5.19) in (5.8)

$$y(r) = \left(\frac{-z(r)}{p^2(r)}\right)^{1/4} \{ \alpha Ai(z(r)) + \beta Bi(z(r)) \}, \quad \forall r \tag{5.20}$$

Die asymptotischen Darstellungen von Airy - Funktionen sind

$$\begin{aligned} Ai(z) &\approx \frac{1}{2} \pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) & z \rightarrow \infty \\ Ai(-z) &\approx \pi^{-1/2} z^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) & z \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$Bi(z) \approx \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right) \quad z \rightarrow \infty$$

$$Bi(-z) \approx \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) \quad z \rightarrow \infty$$

Mit (5.21) in (5.20) erhalten wir die asymptotische Gestalt der Wellenfunktion

$$y(r \ll b) = \frac{c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \left\{ \alpha \sin\left(\zeta(r) + \frac{\pi}{4}\right) + \beta \cos\left(\zeta(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (5.22)$$

$$\zeta(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t)} \quad (5.23)$$

$$y(r \gg b) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \left\{ \frac{\alpha}{2} \exp(-\zeta(r)) + \beta \exp(\zeta(r)) \right\} \quad (5.24)$$

$$\zeta(r) = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p^2(t)} \quad (5.25)$$

wobei $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ist.

b. Für einen Umkehrpunkt $r = a$ mit $(p^2(a, E))' > 0$ wählen wir als Referenzfunktion $P^2(z) = +z$. Dann werden Gleichung (5.11), (5.16) und (5.17)

$$\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{p^2(r)}{z}$$

$$\frac{2}{3} (z(r))^{\frac{3}{2}} = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \geq a \quad (5.26)$$

$$\frac{2}{3} (-z(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{a(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq a \quad (5.27)$$

und die Näherungslösung lautet

$$y(r) = \left(\frac{z(r)}{p^2(r)}\right)^{\frac{1}{4}} \{ \gamma Ai(-z(r)) + \delta Bi(-z(r)) \} \quad ; \quad \forall r \quad (5.28)$$

Die asymptotische Darstellung der Wellenfunktion ist

$$y(r \ll a) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \left\{ \frac{\gamma}{2} \exp(-\zeta(r)) + \delta \exp(\zeta(r)) \right\} \quad (5.29)$$

$$\zeta(r) = \int_r^{a(E)} dt \sqrt{-p^2(t)} \quad (5.30)$$

$$y(r \gg a) = \frac{c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \left\{ \gamma \sin\left(\zeta(r) + \frac{\pi}{4}\right) + \delta \cos\left(\zeta(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (5.31)$$

$$\zeta(r) = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(t)} \quad (5.32)$$

5.3. Die Eigenenergie und Wellenfunktionen der Gebundenen Zustände

Wir betrachten einen effektiven Impuls mit zwei isolierten Nullstellen

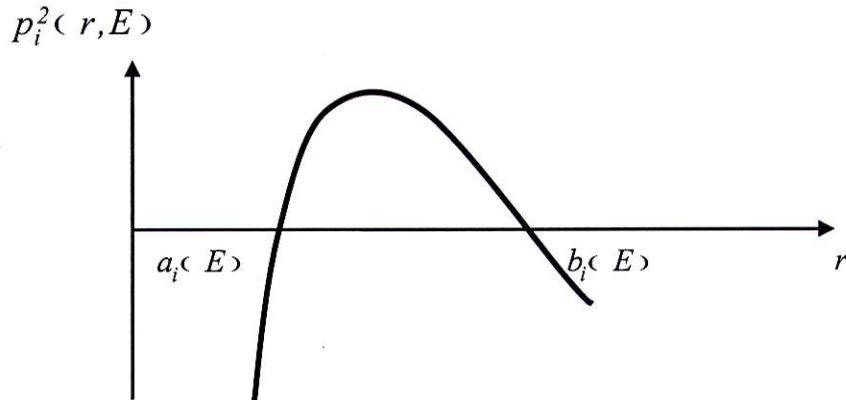


Abb.5.2. Nullstellen des effektiven Impulses $p_i^2(r, E) \quad i = \uparrow, \downarrow$

In der Umgebungen der Punkten $a_i(E)$ und $b_i(E)$ gilt entsprechend die Lösung (5.28) und (5.20).

$$y_a(r) = \left\{ \frac{z_a(r)}{p^2(r)} \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \alpha_a Ai(-z_a(r)) + \beta_a Bi(-z_a(r)) \right\}$$

$$y_b(r) = \left\{ \frac{-z_b(r)}{p^2(r)} \right\}^{\frac{1}{4}} \left\{ \alpha_b Ai(z_b(r)) + \beta_b Bi(z_b(r)) \right\}$$

Die Wellenfunktion für gebundene Zustände muss die folgenden Randbedingungen erfüllen.

$$y_a(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad y_b(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (5.33)$$

$$\therefore \beta_a = \beta_b = 0 \quad (5.34)$$

Wir setzen (5.34) in (5.28) ein

$$y_a(r) = \left\{ \frac{z_a(r)}{p^2(r)} \right\}^{\frac{1}{4}} \alpha_a Ai(-z_a(r)) \quad r \ll b \quad (5.35)$$

$$\frac{2}{3} (z_a(r))^{\frac{3}{2}} = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \geq a \quad (5.36)$$

$$\frac{2}{3} (-z_a(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{a(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq a \quad , \quad (5.37)$$

so auch (5.34) in (5.20)

$$y_b(r) = \left\{ \frac{-z_b(r)}{p^2(r)} \right\}^{\frac{1}{4}} \alpha_b Ai(z_b(r)) \quad r \gg a \quad (5.38)$$

$$\frac{2}{3} (-z_b(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq b \quad (5.39)$$

$$\frac{2}{3} (z_b(r))^{\frac{3}{2}} = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad , \quad r \geq b \quad (5.40)$$

Im Bereich $a \leq r \leq b$ sind die Lösungen durch die asymptotische Darstellung der Airy - Funktionen gegeben

$$y_a(r \ll b) = \frac{\alpha_a c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\zeta_a(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.41)$$

$$\zeta_a(r) = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(t)}$$

$$y_b(r \gg a) = \frac{\alpha_b c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.42)$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t)}$$

Für einen beliebigen Wert von $r \in [a, b]$ fordern wir, dass beide Lösungen den gleichen Wert haben

$$y_a(r) = y_b(r) \quad (5.43)$$

$$\alpha_b \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) = \alpha_a \sin\left(\zeta_a(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.44)$$

Außerdem haben wir die Beziehung,

$$\zeta_{ab} = \int_{a(E)}^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t)} = \zeta_a(r) + \zeta_b(r) \quad (5.45)$$

und wir erhalten mit Hilfe von trigonometrischen Formeln,

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A \quad \text{und} \quad \sin(-A) = -\sin A \quad (5.46)$$

$$\alpha_b \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) = -\alpha_a \left\{ \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

Damit diese Gleichung erfüllt wird, muss gelten

$$\sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad (5.47)$$

$$\Rightarrow \alpha_b \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) = -\alpha_a \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.48)$$

Gleichung (5.47) führt auf folgende Bestimmungsgleichung für die Eigenenergie

$$\int_{a(E)}^{b(E)} dt \sqrt{p^2(E, t)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.49)$$

Dies ist die Bohr -Sommerfeld – Quantisierung.

(5.48) führt auf

$$\alpha_b = -\alpha_a \cos[\pi(n+1)] = [-1]^n \alpha_a \quad (5.50)$$

Hier ist zu beachten, dass $y_b(r)$ die asymptotisch (für $r \rightarrow \infty$) gegen Null gehende Lösung der Dirac – Gleichung ist

$$y_b(r \rightarrow \infty) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_b(r)) \quad (5.51)$$

$$\zeta_b(r) = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p^2(E, t)} \quad (5.52)$$

Der Wertebereich der Eigenenergie ist: $-M_e < E < M_e$. Hier liegen die gebundenen Zustände.

5.4. Die Normierung der Wellenfunktionen der gebundene Zustände

Zur näherungsweisen Normierung der Wellenfunktionen braucht man über $|\chi|^2$ nur im Intervall $a \leq r \leq b$ ($a > 0$ und $\xi > 0$) zu integrieren, weil die Wellenfunktionen $\chi(r)$ außerhalb dieses Intervalls exponentiell abklingt.

Wir haben vier Operatoren, die untereinander alle vertauschen

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (5.53a)$$

$$\hat{p}_z\Psi = k\Psi \quad (5.53b)$$

$$\hat{J}_z\Psi = m\Psi \quad (5.53c)$$

$$\hat{S}\Psi = s\Psi, \quad s = \pm 1 \quad (5.53d)$$

Dabei ist \hat{S} gegeben durch

$$\hat{S} = \frac{1}{|\vec{p}|} \Sigma_i p_i \quad (5.54)$$

Wir benutzen ihre Eigenwerte, um die Zustände zu bezeichnen.

Sei β hier die Abkürzung für die Quantenzahlen $[n , k , m , s]$, dann folgt für gebundene Zustände

$$\Psi(t, \vec{r}) = \exp[-i(E_n t)] \Psi_{nkms}(\vec{r}) \quad (5.55)$$

$$\int_{\Omega} d^3r \Psi_{\beta}^+(\vec{r}) \Psi_{\beta_1}(\vec{r}) = [2\pi]^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r dr \frac{\exp[-i(k-k_1)z]}{2\pi} \frac{\exp[-i(m-m_1)\varphi]}{2\pi} \chi_{\beta}^+(r) \chi_{\beta_1}(r) \quad (5.56)$$

wobei wegen

$$\delta(x-y) = \int \frac{dq}{2\pi} \exp[-iq(x-y)] \quad (5.57)$$

$$\int_{\Omega} d^3r \Psi_{\beta}^+(\vec{r}) \Psi_{\beta_1}(\vec{r}) = [2\pi]^2 \delta(k-k_1) \delta_{mm_1} \delta_{ss_1} \int_0^{\infty} r dr [\chi_{\beta}^+(r) \chi_{\beta_1}(r)] \quad (5.58)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} d^3r \Psi_{\beta}^+(\vec{r}) \Psi_{\beta_1}(\vec{r}) = [2\pi]^2 \delta(k-k_1) \delta_{mm_1} \delta_{ss_1} \delta_{nn_1} \quad (5.59)$$

$$\int_0^{\infty} r dr [\chi_{\beta}^+(r) \chi_{\beta_1}(r)] = \delta_{nn_1} \quad (5.60)$$

Die Lösung der Dirac – Gleichung lautet dann($a \leq r \leq b$)

$$\Psi_{\beta}(\vec{r}) = \exp[ikz] \exp[im\varphi] \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{\alpha(r,k)}{r}} F_{\beta}(r) \\ \frac{k}{s\sqrt{m_o^2+k^2}+m_o} \sqrt{\frac{\xi(r,k)}{r}} f_{\beta}(r) \\ \frac{k}{s\sqrt{m_o^2+k^2}+m_o} \sqrt{\frac{\alpha(r,k)}{r}} F_{\beta}(r) \\ \sqrt{\frac{\xi(r,k)}{r}} f_{\beta}(r) \end{vmatrix} \quad (5.61)$$

Wir berechnen $\chi_{\alpha}^+(r) \chi_{\alpha}(r)$ mit Hilfe von (5.61).

$$\chi_{\beta}^+(r) \chi_{\beta}(r) = \sigma(k) \frac{[\alpha(r) F_{\beta}^+(r) F_{\beta}(r) + \xi(r) f_{\beta}^+(r) f_{\beta}(r)]}{r} \quad (5.62)$$

$$\sigma = \left\{ 1 + \left\{ \frac{k}{sM_e + m_o} \right\}^2 \right\} \quad (5.63)$$

Wir nehmen die folgende Gestalt der Wellenfunktion an

$$y_b = \frac{\alpha_b}{\sqrt{\pi} [p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.64)$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t)} \quad (5.65)$$

mit einer Normierungskonstanten α_b .

Wir berechnen die erste Ableitung von (5.64)

$$y_b' = \frac{\alpha_b}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos\left(\zeta_b + \frac{\pi}{4}\right) \zeta_b' (p^2)^{\frac{1}{4}} - \sin\left(\zeta_b + \frac{\pi}{4}\right) \frac{1}{4} (p^2)^{-\frac{3}{4}} (p^2)'}{(p^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.66)$$

Von (5.65)

$$\sqrt{p^2(b)} = 0 \Rightarrow \zeta_b'(r) = -\sqrt{p^2(r)} \quad (5.67)$$

Wir ersetzen (5.67) in (5.66)

$$y_b' = -\frac{\alpha_b}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\zeta_b + \frac{\pi}{4}\right) (p^2)^{\frac{1}{4}} - y_b \frac{(p^2)'}{4p^2} \quad (5.68)$$

und erhalten mit (4.38)

$$F = -i \frac{1}{\sqrt{\alpha \xi}} \left\{ \delta_1 f - \frac{\alpha_{b\downarrow}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\zeta_{b_1} + \frac{\pi}{4}\right) (p_1^2)^{\frac{1}{4}} \right\} \quad (5.69)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\xi'}{\xi} + \frac{2m}{r} - 0.5 (p_1^2)' p_1^{-2} \right\} \quad (5.70)$$

$$f = -i \frac{1}{\sqrt{\alpha \xi}} \left\{ \delta_2 F - \frac{\alpha_{b\uparrow}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\zeta_{b_1} + \frac{\pi}{4}\right) (p_1^2)^{\frac{1}{4}} \right\} \quad (5.71)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{2m}{r} - 0.5 (p_1^2)' p_1^{-2} \right\} \quad (5.72)$$

Wir berechnen F^+F und f^+f

$$F^+F = \frac{1}{\alpha\xi} \left\{ \delta_1^2 f^2 + \frac{\alpha_{b\downarrow}^2}{\pi} \cos^2 \left(\zeta_{b\downarrow} + \frac{\pi}{4} \right) (p_{\downarrow}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2\delta_1 f \alpha_{b\downarrow}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\zeta_{b\downarrow} + \frac{\pi}{4} \right) (p_{\downarrow}^2)^{\frac{1}{4}} \right\} \quad (5.73)$$

$$f^+f = \frac{1}{\alpha\xi} \left\{ \delta_2^2 F^2 + \frac{\alpha_{b\uparrow}^2}{\pi} \cos^2 \left(\zeta_{b\uparrow} + \frac{\pi}{4} \right) (p_{\uparrow}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{2\delta_2 F \alpha_{b\uparrow}}{\sqrt{\pi}} \cos \left(\zeta_{b\uparrow} + \frac{\pi}{4} \right) (p_{\uparrow}^2)^{\frac{1}{4}} \right\} \quad (5.74)$$

Wir setzen (5.62) in (5.60) ein und $\int_0^\infty \dots \approx \int_a^b \dots$

$$\sigma(k) \int_a^b dr [\alpha(r) F^+(r) F(r) + \xi(r) f^+(r) f(r)] = I \quad (5.75)$$

Mit (5.73) und (5.74) in (5.75) erhalten wir:

$$\sigma \frac{\alpha_{b\downarrow}^2}{\pi} \int_{a\downarrow}^{b\downarrow} dr \left\{ (p_{\downarrow}^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \xi + \frac{\delta_1^2}{\xi} \right\} \sin^2 \left(\zeta_{b\downarrow} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos^2 \left(\zeta_{b\downarrow} + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sqrt{p_{\downarrow}^2}}{\xi} - \frac{2\delta_1}{\xi} \cos \left(\zeta_{b\downarrow} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\zeta_{b\downarrow} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} = I \quad (5.76)$$

$$\sigma \frac{\alpha_{b\uparrow}^2}{\pi} \int_{a\uparrow}^{b\uparrow} dr \left\{ (p_{\uparrow}^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \alpha + \frac{\delta_2^2}{\alpha} \right\} \sin^2 \left(\zeta_{b\uparrow} + \frac{\pi}{4} \right) + \cos^2 \left(\zeta_{b\uparrow} + \frac{\pi}{4} \right) \frac{\sqrt{p_{\uparrow}^2}}{\alpha} - \frac{2\delta_2}{\alpha} \cos \left(\zeta_{b\uparrow} + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\zeta_{b\uparrow} + \frac{\pi}{4} \right) \right\} = I \quad (5.77)$$

Da das Argument des Kosinus und Sinus eine schnell veränderliche Funktion ist, ersetzen wir die oszillierenden Funktionen durch ihre Mittelwerte:

$$[\cos^2 \theta]_{MW} = [\sin^2 \theta]_{MW} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad [\sin \theta \cos \theta]_{MW} = 0$$

$$\sigma \frac{\alpha_{b\downarrow}^2}{2\pi} \int_{a\downarrow}^{b\downarrow} dr \left\{ (p_{\downarrow}^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \xi + \frac{\delta_1^2}{\xi} \right\} + \frac{\sqrt{p_{\downarrow}^2}}{\xi} \right\} = I \quad (5.78)$$

$$\sigma \frac{\alpha_{b\uparrow}^2}{2\pi} \int_{a\uparrow}^{b\uparrow} dr \left\{ (p_{\uparrow}^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \alpha + \frac{\delta_2^2}{\alpha} \right\} + \frac{\sqrt{p_{\uparrow}^2}}{\alpha} \right\} = I \quad (5.79)$$

$$\alpha_{b\downarrow} = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma I_1}} \quad \text{mit} \quad I_1 = \int_{a\downarrow}^{b\downarrow} dr \left\{ (p_{\uparrow}^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \zeta + \frac{\delta_1^2}{\zeta} \right\} + \frac{\sqrt{p_{\uparrow}^2}}{\zeta} \right\} \quad (5.80)$$

$$\alpha_{b\uparrow} = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma I_2}} \quad \text{mit} \quad I_2 = \int_{a\uparrow}^{b\uparrow} dr \left\{ (p_{\uparrow}^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \alpha + \frac{\delta_2^2}{\alpha} \right\} + \frac{\sqrt{p_{\uparrow}^2}}{\alpha} \right\} \quad (5.81)$$

Wir haben eine andere Möglichkeit zur Normierung der Wellenfunktionen. Wir nehmen an, dass die Spinoren mit einer einzigen Integrationskonstante multipliziert werden.

$$\Psi(t, \vec{r}) = \alpha_b \exp[-i(E_n t)] \Psi_{nkms}(\vec{r})$$

Die Wellenfunktionen nehmen wir in der Gestalt (5.64) und ersetzen in (5.75)

$$\sigma(k) \frac{\alpha_b^2}{\pi} \int_a^b dr \left[\alpha(p_{\uparrow}^2(r))^{-\frac{1}{2}} \sin^2\left(\zeta_{b_1}(r) + \frac{\pi}{4}\right) + \zeta(p_{\downarrow}^2(r))^{-\frac{1}{2}} \sin^2\left(\zeta_{b_1}(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right] = 1 \quad (5.82)$$

Dazu bezeichnen wir mit a den größeren der beide Werte a_{\uparrow} und a_{\downarrow} und mit b den kleineren der beide Werte b_{\uparrow} und b_{\downarrow} , so dass $p_i^2 > 0$ zwischen $a \leq r \leq b$ ist.

$$\begin{aligned} [\sin^2 \theta]_{MW} &= \frac{1}{2} \\ \sigma(k) \frac{\alpha_b^2}{2\pi} \int_a^b dr \left[\alpha(r) (p_{\uparrow}^2(r))^{-\frac{1}{2}} + \zeta(r) (p_{\downarrow}^2(r))^{-\frac{1}{2}} \right] &= 1 \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\Rightarrow \alpha_b = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma I_3}} \quad (5.84)$$

Wobei I_3 ist

$$I_3 = \int_a^b dr \left[\alpha(r) (p_{\uparrow}^2(r))^{-\frac{1}{2}} + \zeta(r) (p_{\downarrow}^2(r))^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (5.85)$$

Schließlich wird die normierte quasiklassische Wellenfunktion ausgedrückt durch

$$y_{bi} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sigma I_j} [p_i^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\zeta_{b_i}(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.86)$$

wobei $i = \uparrow, \downarrow$ und $j = 1, 2, 3$ ist.

5.5. Die Berechnung der Eigenenergie

Die Daten der Tabellen berechnen wir mit der BOHR – SOMMERFELDSchen-Quantisierungsvorschrift (5.49).

$$\int_a^b dt \sqrt{p^2(E, t)} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

1. Die Anfangsdaten sind: die Hauptquantenzahl $n = 0, 1, 2, \dots$, die magnetische Quantenzahl $m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$, der Spin des Elektrons $s = \pm 1$, die Ruhemasse des Elektrons $m_0 = 2.6 \cdot 10^{-3} \text{ fm}^{-1}$ (mit $\hbar c = 197.32 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$), der Impuls p_z (fm^{-1}), die Länge des Strings L (fm), der Radius des Strings r_0 (fm), die Stärke des Potentials V_0 (fm^{-1}) < 0
2. Dann geben wir ein Wert der Energie $\frac{E}{M_e} \in] \frac{V(r_0)}{M_e}, 1 [$
3. Wir berechnen die Wurzeln des effektiven Impulses p^2 . $p^2(E, r) = 0$

$$p^2 = \sigma(\sigma \mp 2sM_e) - \frac{3}{4} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} \right) \pm \frac{m}{r} \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right) - \frac{m(m \mp 1)}{r^2} \quad \text{mit } \sigma = \alpha(+), \xi(-)$$

4. Wenn p keine Wurzeln a, b besitzt, dann wählen wir einen anderen Wert der Energie (Schritt 2)
5. Wenn p Wurzeln a, b besitzt, dann berechnen wir γ .

$$\gamma = \int_a^b dt \sqrt{p^2(E, t)} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

6. Wenn der Betrag von γ einen vorgegebenen kleinen Parameter ε überschreitet, dann wählen wir anderen Wert der Energie (Schritt 2)
7. Wenn $|\gamma| < \varepsilon$ ist, dann haben wir die Eigenenergie gefunden.

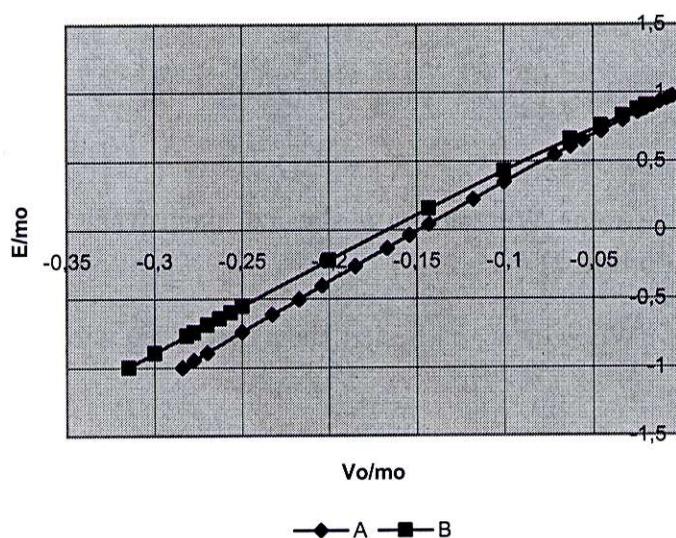
Die Taylormethode:

Die Anfangsdaten sind gleich wie für die BOHR – SOMMERFELDSchen-Quantisierungsvorschrift. Für kleinen radialen Abstand nehmen wir an, dass das elektrostatische Potential konstant ist. Der Spinor in diesem Bereich wird durch Besselfunktion ausgedrückt

$$\chi_l = \alpha J_{m-\frac{1}{2}}(\beta r) \quad \text{mit} \quad \beta^2 = (E - V)^2 - M_e^2 \quad (5.87)$$

1. Dann geben wir einen Wert der Energie $\frac{E}{M_e} \in] \frac{V(r_0)}{M_e}, 1 [$ vor
2. Wir berechnen den Wert und die Ableitung von χ_l in $r = 10^{-20} \text{ fm}$
3. Zu der Taylormethode integrieren wir (4.28) in MAPLE. Erhöht sich der Wert des Spinors an einer Stelle weit vom Zentrum des Zylinders, dann ist die Energie kein Eigenwert. Wir wählen einen neuen Wert der Energie(Schritt 1) aus.
4. Nimmt der Wert des Spinors an einer Stelle weit von Zentrum des Zylinders ab, dann ist die Energie ein Eigenwert.

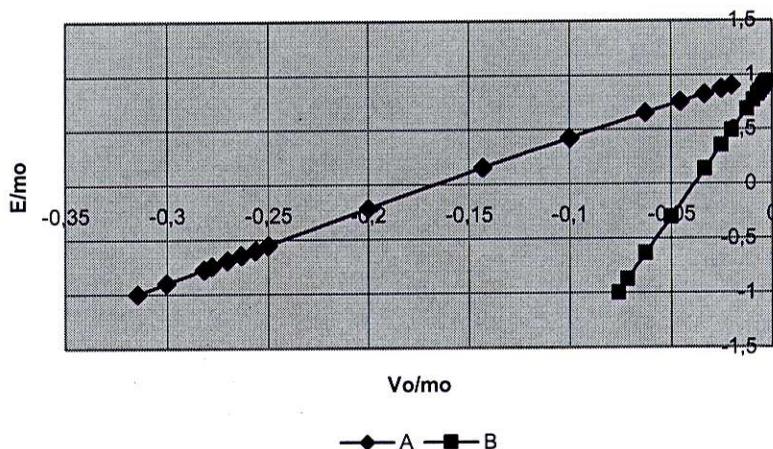
POTENTIAL - ENERGIE



[A] : Taylor Methode , [B] : Bohr - Sommerfeld Methode ; $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $n = 0$, $\frac{k}{m_0} = 0$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$

Abb.5.4. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Potentialtiefe (**Tabelle A3** und **Tabelle A7**). Die Eigenenergie sinkt monoton mit wachsender Potentialstärke. Die zwei Näherungen (Bohr -Sommerfeld – Quantisierung und die numerische Taylor – Methode) liefern verschiedene Resultate. Der Unterschied wächst mit der Erhöhung der Potentialstärke.

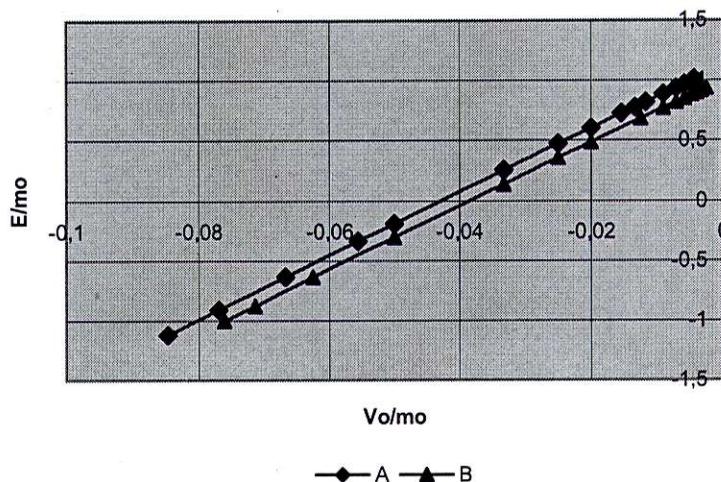
ENERGIE - POTENTIAL



[A] : $L = 10^6 \text{ fm}$, [B] : $L = 10^{15} \text{ fm}$; $\frac{k}{m_0} = 0$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $n = 0$, $r_0 = 200 \text{ fm}$

Abb.5.5. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Potentialtiefe (Tabelle A1 und Tabelle A3). Bei Vergrößerung der Länge L erhöht sich die elektrische Gesamtladung, das Potential wächst an, und die gebundenen Zustände werden nach unten verschoben.

POTENTIAL - ENERGIE

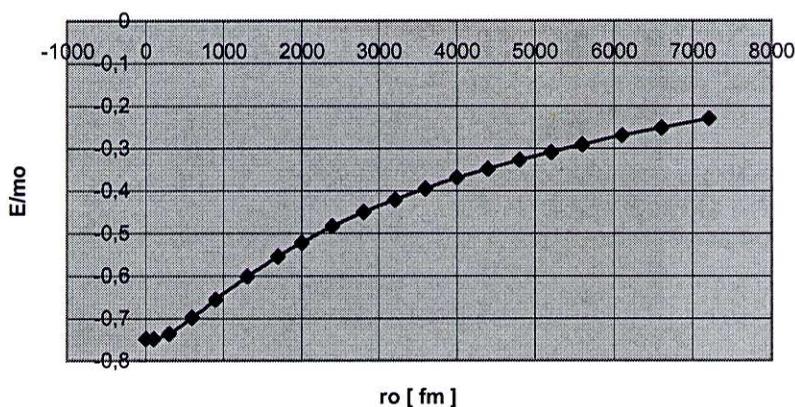


[A] : $\frac{k}{m_0} = \frac{1}{2}$, [B] : $\frac{k}{m_0} = 0$; $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $n = 0$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^{15} \text{ fm}$

Abb.5.6. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Potentialtiefe für verschiedene Werte von $p_z = k$ (Tabelle A1 und Tabelle A2). Um die Fermi - Kante bei Erhöhung des Impulses $p_z = k$ zu erreichen, muss auch die Potentialstärke (Ladung Z)

$V_0 = -\frac{2Ze^2}{L}$ des Strings zunehmen.

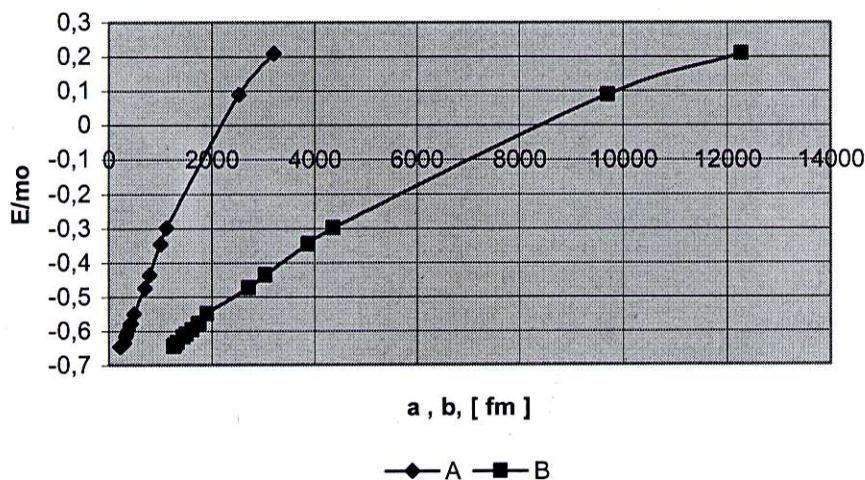
RADIUS - ENERGIE



$$\frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{k}{m_0} = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad n = 0, \quad L = 10^6 \text{ fm}$$

Abb.5.7. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen den Radius des Zylinders (Tabelle A6). Verkleinert man den Radius r_o des Zylinders, so tendiert die Eigenenergie asymptotisch nach einem bestimmten endlichen Wert der Energie.

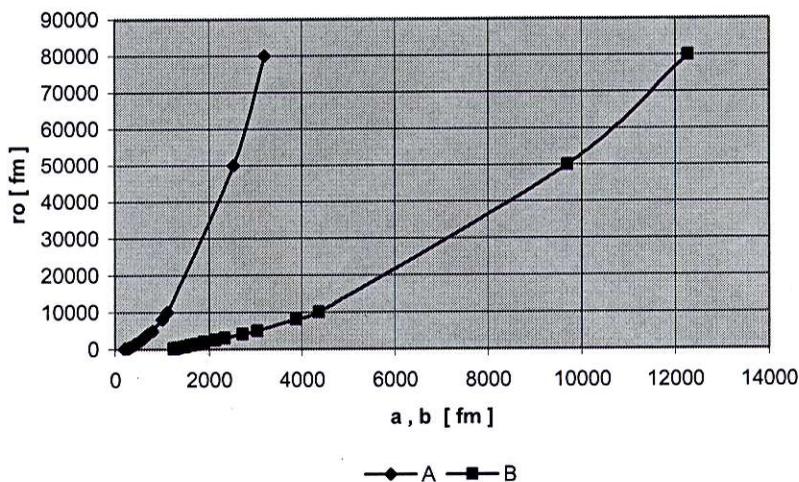
UMKEHRPUNKTE DES EFFEKTIVEN IMPULSES - ENERGIE



$$[A]: p^2(a) = 0, \quad [B]: p^2(b) = 0; \quad \frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{3.8}, \quad \frac{k}{m_0} = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad n = 0, \quad L = 10^6 \text{ fm}$$

Abb.5.8. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Umkehrpunkte des effektiven Impulses für verschiedenen Wert des Radius, (Tabelle A4). Den Wert von r_o unterhalb dessen die Energie konstant wird, bezeichnen wir als kritischen Radius r_{ok} . Unterhalb von r_{ok} spielt der Radius keine Rolle mehr für die Energie. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses werden im Raum fixiert.

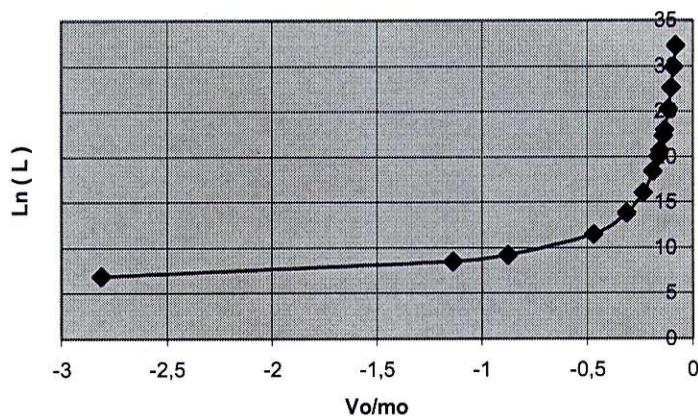
UMKEHRPUNKTE DES EFFEKTIVEN IMPULSES - RADIUS



$$[A]: p^2(a) = 0, [B]: p^2(b) = 0; \frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{3.8}, \frac{k}{m_0} = 0, m = \frac{1}{2}, s = +1, n = 0, L = 10^6 \text{ fm}$$

Abb.5.9. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses gegen den Radius für verschiedene Energien des tiefsten gebundenen Zustands (**Tabelle A4**). Wenn der Radius des Zylinders verkleinert wird, werden die Umkehrpunkte nach dem Zentrum des Zylinders verschoben. Unterhalb eines bestimmten Werts $r \leq r_{ok}$ erreichen Sie aber einen festen Grenzwert.

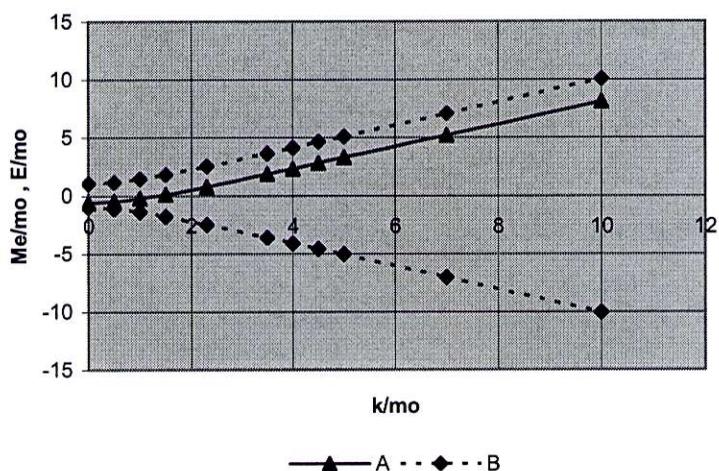
KRITISCHES POTENTIAL -LÄNGE



$$\frac{E}{m_0} = -1, \frac{k}{m_0} = 0, m = \frac{1}{2}, s = +1, n = 0, r_0 = 200 \text{ fm}$$

Abb.5.10. Die Variation des kritischen Potentials mit der Länge des Zylinders (**Tabelle A5**). Für einen längeren Zylinder genügen kleinere $V_0 = -\frac{2Ze^2}{L}$, um die Fermi – Kante erreichen. Die notwendige Ladungsdichte pro Länge $\rho_L = \frac{Ze}{L}$ nimmt also ab.

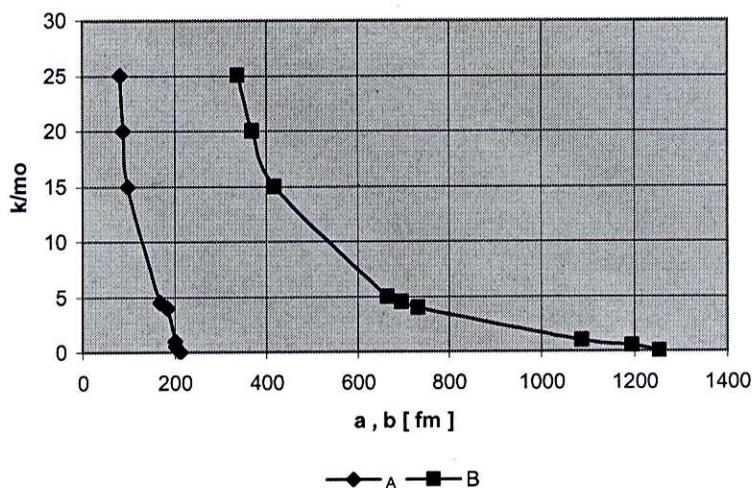
ENERGIE - IMPULS



[A] : $\frac{V_0}{m_0} = -0.263$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $n = 0$, [B] : $\frac{M_e}{m_0} = \pm \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}}$

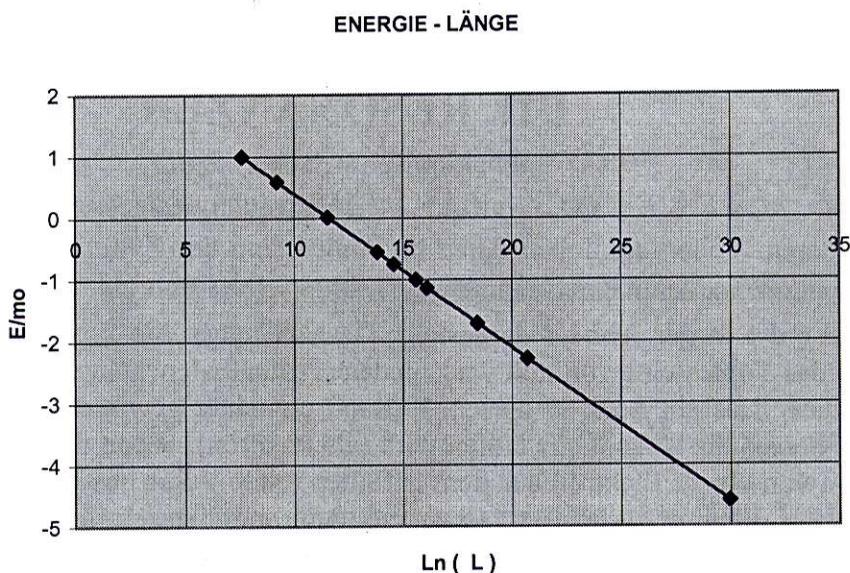
Abb.5.11. Die Variation der Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die z – Komponente des Impulses (Tabelle A10). Wenn der longitudinale Impuls $p_z = k$ zunimmt, wird das Elektron effektiv massiver. Die Eigenenergie wird nach oben verschoben, und verläuft parallel zur Fermi – Kante des oberen Kontinuums (Die Kurve [B]).

UMKEHRPUNKTE DES EFFEKTIVEN IMPULSES - IMPULS



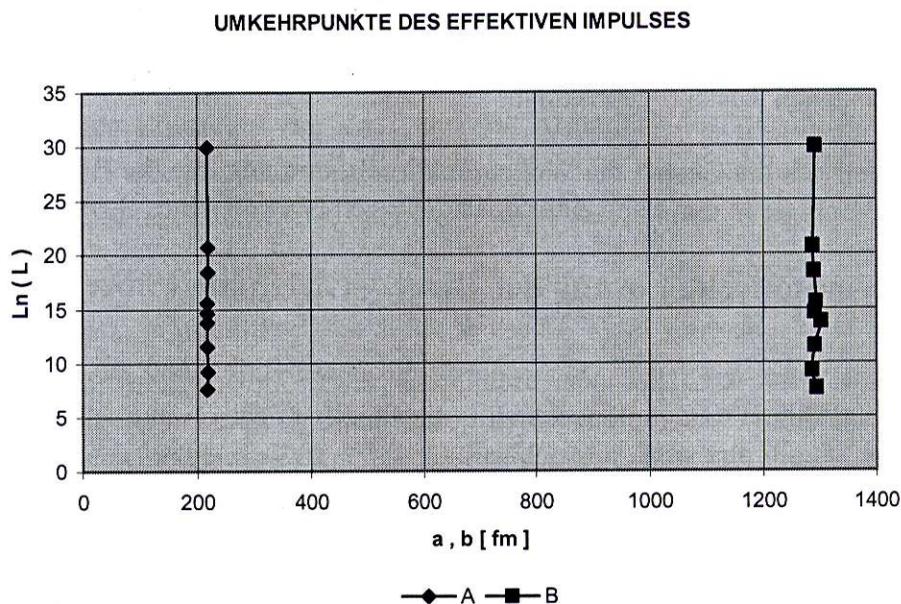
[A] : $p^2(a) = 0$, [B] : $p^2(b) = 0$; $\frac{V_0}{m_0} = -0.263$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $n = 0$

Abb.5.12. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses gegen die z – Komponente des Impulses (Tabelle A10). Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses a und b bewegen sich mit der Erhöhung des longitudinalen Impulses $p_z = k$ nach innen.



$$\frac{V_0}{m_0} = -0.25, \quad \frac{k}{m_0} = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad n = 0, \quad r_0 = 200 \text{ fm}$$

Abb.5.13. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Länge des Zylinders (Tabelle A11). Die Eigenenergie wird mit der Vergrößerung der Länge L nach unten verschoben, weil das elektrostatische Potential auf der Mantelfläche mit der Länge zunimmt.



$$\Gamma_A]: p^2(a) = 0, \quad \Gamma_B]: p^2(b) = 0; \quad \frac{V_0}{m_0} = -0.25, \quad \frac{k}{m_0} = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad n = 0, \quad r_0 = 200 \text{ fm}$$

Abb.5.14. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses gegen die Länge des Zylinders (Tabelle A11). Die Umkehrpunkte haben feste Positionen im Raum, weil der effektive Impuls nicht von der Länge des Zylinders abhängt.

Kapitel 6

DIE RESONANZEN

Im Bereich $M_e + V < E < -M_e$ mit $|V| > 2M_e$ sind quasigebundene Elektronenzustände möglich; deren Wellenfunktionen fallen im Außenraum des Zylinders nicht exponentiell ab, sondern schließen an eine Kontinuumschwelle mit derselben Energie $E < -M_e$ an. Ihre Gestalt ist als Fall (d) in der **Abb1.4** dargestellt. Deshalb haben die Wellenfunktionen auch weit außerhalb des Topfes eine von null verschiedene Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Physikalisch bedeutet dies, dass ein Loch in diesem Zustand mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus dem Topf heraus ins Unendliche laufen wird (als Positron). Wenn der Zustand leer war, wird er langsam von einem Elektron aus dem gefüllten Dirac – See besetzt werden. Somit ist hier eine spontane Elektron – Positron – Paarerzeugung möglich; ein leerer gebundener Zustand füllt sich spontan mit einem Elektron aus dem negativen Kontinuum, wobei ein Positron ins Unendliche davonläuft. Dann ist der Potentialtopf überkritisch bezüglich spontaner Elektron – Positron Paarerzeugung.

Während also gebundene Zustände im Bereich $-M_e < E < M_e$ ohne weiteres leer sein können, ohne dass das System dadurch instabil würde, ist es nicht möglich, gebundene, ins negative Energiekontinuum eingetauchte Zustände auf Dauer leer zu halten; sie werden spontan gefüllt, daher hat das Loch in diesem Zustand eine endliche Zerfallsbreite. Wir werden sehen, dass in der Tat im Bereich $M_e + V < E < -M_e$ und $|V| > 2M_e$ keine scharfen gebundenen Energieniveaus existieren (wie für $-M_e < E < M_e$), sondern die Wellenfunktionen eine Resonanzstruktur haben, die um die erwartete Bindungsenergie für den gebundenen Zustand gepeakt ist.

Wir wollen nun die Gestalt der Wellenfunktion bestimmen, die die Bewegung eines Teilchens mit einer Energie in der Nähe eines quasidiskreten Niveaus eines Systems beschreibt.

6.1. Asymptotische Lösung der Dirac – Gleichung (überkritischer Fall)

Wir gehen von $E \in]-M_e, M_e [$ durch die obere Halbebene zur reellen Achse über und erhalten den asymptotischen Ausdruck für die Wellenfunktion für $E < -M_e$ und $E > +M_e$. Auch ist jetzt $p_\infty^2 > 0$

$$y(r) = \alpha(E) \exp(i \sqrt{p_\infty^2} r) + \beta(E) \exp(-i \sqrt{p_\infty^2} r) \quad (6.1)$$

Wären wir durch die untere Halbebene gegangen, hätten wir

$$y(r) = \alpha^*(E) \exp(-i \sqrt{p_\infty^2} r) + \beta^*(E) \exp(i \sqrt{p_\infty^2} r) \quad (6.2)$$

erhalten.

Da y eine eindeutige Funktion von E sein muss, bedeutet das

$$\alpha(E) = \beta^*(E) \quad \text{für } E < -M_e \quad \text{und} \quad E > M_e \quad (6.3)$$

Diese Beziehung folgt auch unmittelbar aus der Tatsache, dass y für $E < -M_e$ und $E > M_e$ reell ist.

Da die Wurzel $\sqrt{p_\infty^2}$ mit (5.3) nicht eindeutig ist, sind die Koeffizienten $\alpha(E)$ und $\beta(E)$ nicht eindeutig. Wir betrachten die Funktion

$$\omega = \sqrt{p_\infty^2} = \sqrt{(E + M_e)(E - M_e)} \quad (6.4)$$

Für sie sind $E = M_e$ und $E = -M_e$ die Verzweigungspunkte. Der Umlauf auf einem geschlossenen Weg um einen dieser Punkte verändert das Vorzeichen des Ausdruckes (6.4), aber das gleichzeitige Umlaufen beider Punkte M_e und $-M_e$ lässt die Funktion ungeändert. Setzen wir nämlich

$$E - M_e = \rho_1 e^{i\varphi_1} \quad E + M_e = \rho_2 e^{i\varphi_2} \quad (6.5)$$

so ist

$$\omega = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \quad (6.6)$$

Umlaufen wir dann beide Punkte auf einem geschlossenen Weg C entgegen dem Uhrzeigersinn, so kommt 2π zu den Argumenten φ_1 und φ_2 hinzu, die Summe $\varphi_1 + \varphi_2$ erhält einen Zuwachs von 4π , und das Argument des Ausdruckes (6.6) wächst um 2π , d.h., die Funktion ändert ihren Wert nicht. Um die Funktion (6.4) eindeutig zu machen, genügt es, einen Schnitt vom Punkt $E = -M_e$ zum Punkt $E = M_e$ zu legen. Dieser Schnitt macht es sozusagen unmöglich, $E = -M_e$ und $E = M_e$ einzeln zu umlaufen. Die Funktion (6.4) besitzt in allem Punkten außer $E = -M_e$ und $E = M_e$ zwei Werte, und um diese zu erhalten, müssen wir zwei Exemplare der auf die oben erwähnte Weise aufgeschnittenen Ebene nehmen. Auf jedem von ihnen ist (6.4) eine eindeutige Funktion, und ihre Werte auf verschiedenen Exemplaren unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen voneinander. Legen wir ein Exemplar auf das andere und verbinden sinngemäß die Ränder der Schnitte über Kreuz, so erhalten wir eine zweiblättrige Riemannsche Fläche mit den Verzweigungspunkten erster Ordnung $E = -M_e$ und $E = M_e$, auf der die Funktion (6.4) eindeutig und regulär ist (mit Ausnahme der Verzweigungspunkte).

Dieser Schnitt lässt $\sqrt{p_\infty^2}$ eindeutig werden, und damit wird auch die Eindeutigkeit der Definition der Funktionen $\alpha(E)$ und $\beta(E)$ gesichert.

Die Bedingung zur Bestimmung der komplexen Energieeigenwerte verlangt, dass es im asymptotischen Ausdruck (6.1) keine einlaufende Kugelwelle gibt. Das bedeutet, dass für $E = E_R^n - i\frac{\Gamma}{2}$ der Koeffizient $\beta(E)$ verschwinden muss:

$$\beta\left(E_R^n - i\frac{\Gamma}{2}\right) = 0 \quad (6.7)$$

Die quasidiskreten Energieniveaus sind also wie die echten Energieniveaus die Nullstellen der Funktion $\beta(E)$. Im Unterschied zu den Nullstellen für die eigentlichen gebundenen Energieniveaus liegen sie nicht auf dem physikalischen Blatt.

6.2. Die Phasenverschiebung

Wir wollen jetzt die reellen Energieeigenwerte $E < -M_e$ in der Nähe eines quasidiskreten Niveaus betrachten (dabei sehen wir Γ natürlich als klein an, anderenfalls wäre es überhaupt nicht möglich, dass diese Werte in der Nähe des quasidiskreten Niveaus liegen). Wir entwickeln die Funktion $\beta(E)$ nach Potenzen der Differenz $E - \left(E_R^n - i\frac{\Gamma}{2}\right)$ und beschränken uns auf das Glied erster Ordnung.

Von (6.3) erhalten wir

$$\beta(E) = \left(E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma\right)b \quad (6.8)$$

$$\alpha(E) = \left(E - E_R^n - \frac{i}{2}\Gamma\right)b^* \quad (6.9)$$

mit einer Konstanten b . Das setzen wir in (6.1) ein und erhalten folgenden Ausdruck für die Wellenfunktion eines Zustandes in der Nähe eines quasistationären Zustandes.

$$y(r) = \left(E - E_R^n - \frac{i}{2}\Gamma\right)b^* \exp(i\sqrt{p_\infty^2} r) + \left(E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma\right)b \exp(-i\sqrt{p_\infty^2} r) \quad (6.10)$$

$$= D \cos(\sqrt{p_\infty^2} r) + iE \sin(\sqrt{p_\infty^2} r) \quad (6.11)$$

mit

$$D = \alpha + \beta = \left(E - E_R^n - \frac{i}{2}\Gamma\right)b^* + \left(E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma\right)b \quad (6.12)$$

$$E = \alpha - \beta = \left(E - E_R^n - \frac{i}{2}\Gamma\right)b^* - \left(E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma\right)b \quad (6.13)$$

Wir schreiben (6.11) in der Gestalt

$$y(r) = C \sin(\sqrt{p_\infty^2} r + \delta) \quad (6.14)$$

Wobei die Phasenverschiebung δ durch

$$\tan \delta = \frac{\alpha + \beta}{i(\alpha - \beta)} = z \quad (6.15)$$

gegeben ist. Wir wenden auch die folgende Formel [Gra₁₃⁴⁷] an:

$$2i \arctan(z) = \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \quad (6.16)$$

$$\exp(2i\delta) = \exp(2i \arctan(z)) = \exp\left\{\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right\} = \frac{1+iz}{1-iz} \quad (6.17)$$

$$\exp(2i\delta) = \frac{1 + \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}\right)} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (6.18)$$

Wir setzen (6.8) und (6.9) in (6.18) ein, und erhalten den folgenden Ausdruck

$$\exp(2i\delta) = \frac{E - E_R^n - \frac{i}{2}\Gamma}{E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma} \exp(2i\delta_o) \quad (6.19)$$

$$\exp(2i\delta_o) = -\frac{b^*}{b} \quad (6.20)$$

$$\exp(2i\delta) = \left\{1 - i\Gamma \left(E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma\right)^{-1}\right\} \exp(2i\delta_o) \quad (6.21)$$

Für $|E - E_R^n| \gg \Gamma$ ist die Phase δ gleich δ_o , so dass δ_o der Wert der Phase weit weg von der Resonanz ist.

$$\exp(2i\delta) = \exp(2i\delta_o) \Rightarrow \delta = \delta_o \quad (6.22)$$

Im Resonanzbereich ist δ stark energieabhängig.

$$\frac{E - E_R^n - \frac{i}{2}\Gamma}{E - E_R^n + \frac{i}{2}\Gamma} = \frac{1 - \frac{i\Gamma}{2(E - E_R^n)}}{1 + \frac{i\Gamma}{2(E - E_R^n)}} = e^{-2i \arctan \frac{\Gamma}{2(E - E_R^n)}} \quad (6.23)$$

$$e^{2i\delta} = e^{2i\delta_0} e^{-2i \arctan \frac{\Gamma}{2(E - E_R^n)}} \quad (6.24)$$

$$\therefore \delta(E) = \delta_0 - \arctan \frac{\Gamma}{2(E - E_R^n)} \quad (6.25)$$

Wir sehen, dass sich die Phase beim Durchgang durch den ganzen Resonanzbereich ($E \ll E_R^n$ bis $E \gg E_R^n$) um π ändert.

6.3. Die Resonanzen

Wenn die Energie $E < -M_e$ ist, gibt es drei Umkehrpunkte. Wir betrachten einen effektiven Impuls der folgenden Gestalt (**Abb.6.1**).

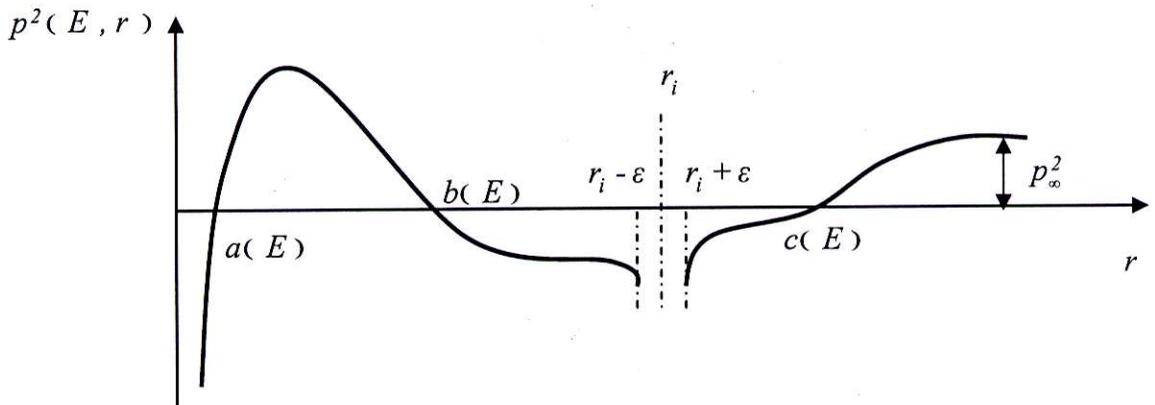


Abb.6.1. Nullstellen des effektiven Impulses $p^2(r, E)$ für $E < -M_e$

In der Nähe von $a(E)$ und mit der Bedingung: $y_a(r \rightarrow 0) \rightarrow 0$ haben wir von (5.28)

$$y_a(r) = \left(\frac{z_a(r)}{p^2(r)} \right)^{\frac{1}{4}} \{ \alpha_a Ai(-z_a(r)) + \beta_a Bi(-z_a(r)) \} \quad (6.26)$$

$$\therefore \beta_a = 0 \quad (6.27)$$

(6.27) setzen wir in (6.26) ein und bekommen

$$y_a(r) = \left(\frac{z_a(r)}{p^2(r)} \right)^{\frac{1}{4}} \alpha_a Ai(-z_a(r)) \quad (6.28)$$

$$\frac{2}{3} (z_a(r))^{\frac{3}{2}} = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \geq a \quad (6.29)$$

$$\frac{2}{3} (-z_a(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{a(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq a \quad (6.30)$$

Die asymptotische Darstellung ist

$$y_a(r \ll a) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \frac{\alpha_a}{2} \exp(-\zeta_a(r)) \quad (6.31)$$

$$\zeta_a(r) = \int_r^{a(E)} dt \sqrt{-p^2(E, t)} \quad (6.32)$$

$$y_a(r \gg a) = \frac{c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \alpha_a \sin\left(\zeta_a(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.33)$$

$$\zeta_a(r) = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(E, t)} \quad (6.34)$$

In der Nähe $b(E)$ gilt mit (5.20):

$$y_b(r) = \left(\frac{-z_b(r)}{p^2(r)} \right)^{\frac{1}{4}} \{ \alpha_b Ai(z_b(r)) + \beta_b Bi(z_b(r)) \} \quad (6.35)$$

$$\frac{2}{3} (-z_b(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq b \quad (6.36)$$

$$\frac{2}{3} (z_b(r))^{\frac{3}{2}} = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad , \quad r \geq b \quad (6.37)$$

Die Asymptotische Darstellung ist

$$y_b(r \ll b) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \alpha_b \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) + \beta_b \cos\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (6.38)$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad (6.39)$$

$$y_b(r \gg b) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_b(r)) + \beta_b \exp(\zeta_b(r)) \right\} \quad (6.40)$$

$$\zeta_b(r) = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad (6.41)$$

In der Nähe von $c(E)$ mit (5.28) wird daraus:

$$y_c(r) = \left(\frac{z_c(r)}{p^2(r)} \right)^{1/4} \left\{ \alpha_c Ai(-z_c(r)) + \beta_c Bi(-z_c(r)) \right\} \quad (6.42)$$

$$\frac{2}{3}(z_c(r))^{3/2} = \int_{c(E)}^r dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \geq c \quad (6.43)$$

$$\frac{2}{3}(-z_c(r))^{3/2} = \int_r^{c(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq c \quad (6.44)$$

Die Asymptotische Darstellung ist

$$y_c(r \ll c) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \frac{\alpha_c}{2} \exp(-\zeta_c(r)) + \beta_c \exp(\zeta_c(r)) \right\} \quad (6.45)$$

$$\zeta_c(r) = \int_r^{c(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad (6.46)$$

$$y_c(r \gg c) = \frac{c}{[p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \alpha_c \sin\left(\zeta_c(r) + \frac{\pi}{4}\right) + \beta_c \cos\left(\zeta_c(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (6.47)$$

$$\zeta_c(r) = \int_{c(E)}^r dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad (6.48)$$

Im Bereich $r \in [a(E), b(E)]$ haben wir

$$\zeta_{ab} = \int_{a(E)}^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)} = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(t, E)} + \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad (6.49)$$

$$\zeta_{ab} = \zeta_a + \zeta_b \quad \Rightarrow \quad \zeta_b = \zeta_{ab} - \zeta_a \quad (6.50)$$

Wir setzen (6.50) in (6.38) ein und erhalten

$$y_b = \frac{c}{[p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \alpha_b \sin\left(\zeta_{ab} - \zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) + \beta_b \cos\left(\zeta_{ab} - \zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (6.51)$$

$$\left(\zeta_{ab} - \zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.52)$$

(6.52) in (6.51)

$$y_b = \frac{c}{[p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \alpha_b \sin\left(\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \beta_b \cos\left(\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right)\right) \right\} \quad (6.53)$$

$$y_b = \frac{c}{[p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \sin\left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) \left[-\alpha_b \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) + \beta_b \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + \cos\left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) \left[\alpha_b \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) + \beta_b \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \right\} \quad (6.54)$$

In einem beliebigen Punkt zwischen $r \in [a, b]$ müssen beide Lösungen (6.33) und (6.54) den gleichen Wert haben

$$y_a(r) = y_b(r) \quad (6.55)$$

$$\alpha_a \sin\left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) = \left\{ \sin\left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) \left[-\alpha_b \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) + \beta_b \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + \cos\left(\zeta_a + \frac{\pi}{4}\right) \left[\alpha_b \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) + \beta_b \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \right\} \quad (6.56)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\alpha_a = -\alpha_b \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) + \beta_b \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.57)$$

$$0 = \alpha_b \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) + \beta_b \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.58)$$

Die Lösungen von (6.57) und (6.58) lauten

$$\alpha_b = -\alpha_a \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.59)$$

$$\beta_b = \alpha_a \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \quad (6.60)$$

Im Bereich $r \in [b(E), c(E)]$

$$\zeta_{bc} = \int_{b(E)}^{c(E)} dt \sqrt{-p^2(E, t)} = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p^2(E, t)} + \int_r^{c(E)} dt \sqrt{-p^2(t, E)} \quad (6.61)$$

$$\zeta_{bc} = \zeta_b + \zeta_c \quad \Rightarrow \quad \zeta_c = \zeta_{bc} - \zeta_b \quad (6.62)$$

$$y_c = \frac{c}{[-p^2(r)]^{1/4}} \left\{ \frac{\alpha_c}{2} \exp(\zeta_b - \zeta_{bc}) + \beta_c \exp(\zeta_{bc} - \zeta_b) \right\} \quad (6.63)$$

In einem beliebigen Punkt zwischen $r \in [b, c]$ müssen beide Lösungen (6.40) und (6.63) den gleichen Wert haben

$$y_b(r) = y_c(r) \quad (6.64)$$

$$\frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_b) + \beta_b \exp(\zeta_b) = \frac{\alpha_c}{2} \exp(\zeta_b - \zeta_{bc}) + \beta_c \exp(\zeta_{bc} - \zeta_b) \quad (6.65)$$

$$\exp(-\zeta_b) \left[\frac{\alpha_b}{2} - \beta_c \exp(\zeta_{bc}) \right] + \exp(\zeta_b) \left[\beta_b - \frac{\alpha_c}{2} \exp(-\zeta_{bc}) \right] = 0 \quad (6.66)$$

Die Lösungen von (6.65) und (6.66) sind

$$\beta_c = \frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_{bc}) \quad (6.67)$$

$$\alpha_c = 2\beta_b \exp(\zeta_{bc}) \quad (6.68)$$

(6.59) und (6.60) setzen wir jeweils in (6.67) und (6.68) ein, und wir erhalten

$$\beta_c = -\frac{\alpha_a}{2} \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \exp(-\zeta_{bc}) \quad (6.69)$$

$$\alpha_c = 2\alpha_a \sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \exp(\zeta_{bc}) \quad (6.70)$$

Wir haben ein kontinuierliches Spektrum für alle Werte von $E < -M_e$, die Umkehrpunkte besitzen. Die Umkehrpunkte müssen so weit voneinander entfernt sein, dass das Anschlussverfahren gültig ist.

Wenn ζ_{bc} groß ist, und für meisten Werte von $E : |\alpha_c| \gg |\beta_c|$, oszilliert die Lösung im Bereich $r \in [c(E), \infty[$ mit großer Amplitude.

$$y_c(r \gg c) = \frac{c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \left\{ \alpha_c \sin\left(\zeta_c(r) + \frac{\pi}{4}\right) + \beta_c \cos\left(\zeta_c(r) + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (6.71)$$

Wenn aber $\sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist, erhalten wir

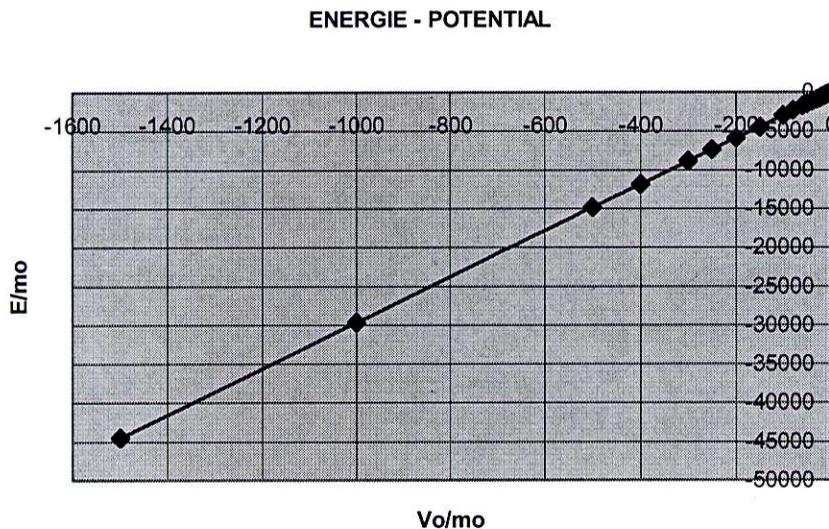
$$\zeta_{ab} = \int_{a(E)}^{b(E)} dt \sqrt{p^2(E, t)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.72)$$

$$\Rightarrow \alpha_c = 0 \quad \text{und} \quad |\beta_c| \ll |\alpha_a| \quad (6.73)$$

Von Gleichung (6.72) bestimmen wir die Energie der Resonanzen $E = E_n^R$.

Im diesem Fall oszilliert die Lösung im Bereich $r \in [c(E_n^R), \infty[$ mit kleiner Amplitude.

$$y_c(r \gg c) = \frac{c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \beta_c \cos\left(\zeta_c(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.74)$$



$$\frac{k}{m_0} = 0, m = \frac{1}{2}, s = +1, n = 0, r_0 = 200 \text{ fm}, L = 10^{15} \text{ fm}$$

Abb.6.2. Die Energie des tiefsten quasi gebundenen Zustands gegen die Potentialtiefe (Tabelle A1). Wenn die Potentialstärke einen kritischen Wert überschreitet, sinkt der $1s$ - Zustand als Resonanz in die Dirac - See.

Wenn $\alpha_c = 0$ gilt, fällt die Lösung im Bereich $r \in [b(E_n^R), c(E_n^R)]$ exponentiell ab. Also oszilliert die Lösung im Bereich $r \in [a(E_n^R), b(E_n^R)]$, während sie für $r < a(E_n^R)$ und $r > b(E_n^R)$ exponentiell abfällt. Der exponentielle Abfall endet an der Stelle $c(E_n^R)$ und es gibt eine exponentiell kleine oszillierende Komponente für $r > c(E_n^R)$ (Abb.6.3).

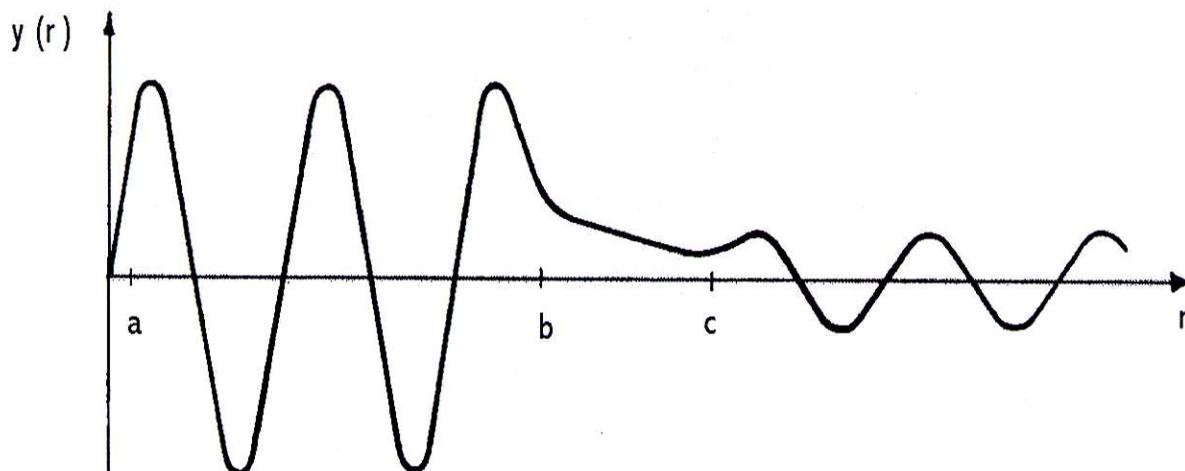


Abb.6.3. Die Wellenfunktion $y = F, f$ in der Nähe einer Resonanzen

Für andere Werte von $E \neq E_n^R$ haben wir: $\sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$. Auf Grund $\exp(\zeta_{bc}) \gg 1$ gilt $|\alpha_c| \gg |\alpha_a|$. Wie zuvor oszilliert die Lösung in $r \in [a(E), b(E)]$, $r > c(E)$. Die Amplitude im Gebiet $r \in [b(E), c(E)]$ ist aber jetzt exponentiell größer als im Gebiet $r \in [a(E), b(E)]$ (Abb.6.4).

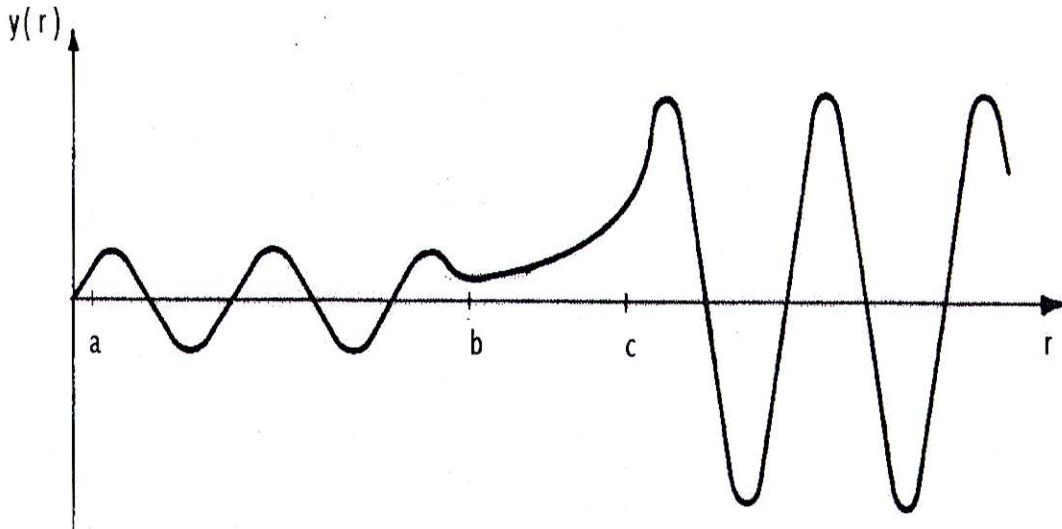


Abb.6.4. Die Wellenfunktion $y = F, f$ für den Fall $E \neq E_n^R$

Die Werte von $E = E_n^R$ in welchen $\alpha_c = 0$ nennt man die Resonanzen.

In der Nähe einer Resonanz ist die Gestalt der Eigenfunktionen sehr empfindlich gegen kleine Änderung in E . Für die meisten Werte von E ist die relative Amplitude der Schwingung im Gebiet $r \in [a(E), b(E)]$ klein, aber für einen engen Bereich um die Resonanzwerte herum hat die Schwingung im Gebiet $r \in [c(E_n^R), \infty[$ eine kleine Amplitude. Um die Breite des Resonanzbereichs zu berechnen, entwickeln wir um die Werte E_n^R herum in

welchen $\zeta_{ab}(E_n^R) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$.

Sei

$$E = E_n^R + \delta \tag{6.75}$$

$$\alpha_c(E_n^R + \delta) \approx \alpha_c(E_n^R) + \frac{\delta}{1!} \alpha_c'(E_n^R) + \dots \tag{6.76}$$

$$\alpha_c(E_n^R) = 0 \Rightarrow \alpha_c(E_n^R + \delta) \approx \delta \alpha_c'(E_n^R) + \dots \tag{6.77}$$

Die Ableitung berechnen wir aus (6.70)

$$\alpha_c' = 2\alpha_a \exp(\zeta_{bc}) \cos\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) \zeta_{ab}' \quad (6.78)$$

$$\zeta_{ab}' = \frac{1}{2} \int_{a(E_n^R)}^{b(E_n^R)} \frac{(p^2)'(E, t) dt}{\sqrt{p^2(E, t)}} \quad (6.79)$$

$$\cos\left(\zeta_{ab}(E_n^R) + \frac{\pi}{2}\right) = -(-1)^n \quad (6.80)$$

$$\therefore \alpha_c'(E_n^R) = -2(-1)^n \alpha_a \exp(\zeta_{bc}(E_n^R)) \zeta_{ab}'(E_n^R) \quad (6.81)$$

$$\alpha_c(E_n^R + \delta) \approx -2[-1]^n \alpha_a \delta \exp(\zeta_{bc}(E_n^R)) \zeta_{ab}'(E_n^R) + \dots \quad (6.82)$$

Weil $\exp(\zeta_{bc}(E_n^R))$ groß ist, können näherungsweise wir ungefähr die Größe von α_c vernachlässigen, weil $\delta \approx \exp(-\zeta_{bc}(E_n^R))$ ist.

Die Breite des Resonanzbereichs ist dann

$$\delta \approx \exp(-\zeta_{bc}(E_n^R)) \quad \text{mit} \quad \zeta_{bc} = \int_{b(E_n^R)}^{c(E_n^R)} dt \sqrt{-p^2(E_n^R, t)} \quad (6.83)$$

und fällt exponentiell mit ζ_{bc} ab. δ bestimmt die Lebensdauer eines Zustandes

$$\tau \approx \frac{1}{\delta} = \exp(\zeta_{bc}(E_n^R)) \quad (6.84)$$

6.4. Die Lebensdauer der Resonanzen

Wir berechnen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, der Elektronen im Bereich $a \leq r \leq b$. Von (5.78) und (5.79) erhalten wir

$$P_{(ab)_i} = \sigma \frac{\alpha_{b_i}^2}{2\pi} \int_{a_i}^{b_i} dr \left\{ (p_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \xi + \frac{\delta_i^2}{\xi} \right\} + \frac{\sqrt{(p_i^2)}}{\xi} \right\} \quad (6.85)$$

$$P_{c, ab, \uparrow} = \sigma \frac{\alpha_{b_1}^2}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} dr \left\{ (p_1^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \alpha + \frac{\delta_2^2}{\alpha} \right\} + \frac{\sqrt{(p_1^2)}}{\alpha} \right\} \quad (6.86)$$

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchen in einem Intervall der Breite $l = b - a$ außerhalb der Barriere $r > c$ anzutreffen ist mit (5.75)

$$P_{r, r+l} = \sigma(k) \int_r^{r+l} dr \left[\alpha(r) F^+(r) F(r) + \zeta(r) f^+(r) f(r) \right] \quad (6.87)$$

Außerdem haben wir die folgenden Beziehungen

$$\alpha_{\infty}(r \rightarrow \infty) = E + sM_e \quad \zeta_{\infty}(r \rightarrow \infty) = E - sM_e \quad (6.88)$$

$$\Rightarrow \alpha'_{\infty} = \zeta'_{\infty} = 0 \quad (6.89)$$

$$p_{\infty}^2 = E^2 - M_e^2 \quad (6.90)$$

Die Wellenfunktion hat die Gestalt(6.47):

$$y_{c_i}(r \gg c_i) = \frac{l}{\sqrt{\pi} [p_i^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \beta_{c_i} \cos\left(\zeta_r(r+l) - \zeta_{c_i}(r+l) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (6.91)$$

wobei $i = \uparrow, \downarrow$ ist.

Wir nehmen an, dass die Wellenfunktion im Intervall $[r, r+l]$ hinreichend schnell oszilliert, so dass man $\cos^2 x \rightarrow \frac{1}{2}$ nähern kann.

$$P_{r, r+l} = \frac{\sigma(k)El}{\pi \sqrt{p_{\infty}^2}} \beta_{c_i}^2 \quad (6.92)$$

Von (6.67) erhalten wir

$$\beta_{c_i} = \frac{\alpha_{b_1}}{2} \exp(-\zeta_{b, c_i}) \quad (6.93)$$

$$P_{r, r+l} = \frac{\sigma El}{\pi \sqrt{p_{\infty}^2}} \frac{\alpha_{b_1}^2}{4} \exp(-2\zeta_{b, c_i}) \quad (6.94)$$

Weit außerhalb der Barriere hält sich das Teilchen für eine Zeit $\frac{l}{v}$ in jedem Gebiet der Länge l auf. Die Geschwindigkeit ist

$$v = \frac{p_\infty}{E} = \sqrt{1 - \left(\frac{M_e}{E}\right)^2} \quad (6.95)$$

Wir berechnen das Verhältnis

$$\frac{\text{Innenzeit}}{\text{Außenzeit}} = \frac{\tau}{l} v = \frac{P_{aib_i}}{P_{r,r+l}} \quad (6.96)$$

$$\tau = 2 \exp(2\zeta_{b,c_i}) \int_{a_i}^{b_i} dr \left\{ (p_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \xi + \frac{\delta_i^2}{\xi} \right\} + \frac{\sqrt{p_i^2}}{\xi} \right\} \quad (6.97)$$

oder

$$\tau = 2 \exp(2\zeta_{b,c_i}) \int_{a_i}^{b_i} dr \left\{ (p_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \alpha + \frac{\delta_2^2}{\alpha} \right\} + \frac{\sqrt{p_i^2}}{\alpha} \right\} \quad (6.98)$$

Wir erhielten mit der anderen Möglichkeit von (5.83)

$$P_{ab} = \sigma(k) \frac{\alpha_b^2}{2\pi} \int_a^b dr \left[\alpha(r) (p_i^2(r))^{-\frac{1}{2}} + \xi(r) (p_i^2(r))^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (6.99)$$

$$P_{r,r+l} = \frac{\sigma El}{\pi \sqrt{p_\infty^2}} \frac{\alpha_b^2}{4} \exp(-2\zeta_{bc}) \quad (6.100)$$

Mit der (6.96) erhalten wir

$$\tau = 2 \exp(2\zeta_{bc}) \int_a^b dr \left\{ \frac{\alpha(r)}{\sqrt{p_i^2(r)}} + \frac{\xi(r)}{\sqrt{p_i^2(r)}} \right\} \quad (6.101)$$

Wobei $\zeta_{bc}(r)$

$$\zeta_{bc} = \int_b^c dt \sqrt{-p_i^2(E, t)} \quad (6.102)$$

Kapitel 7

DAS KONTINUUM

Wir erhalten für $E < -M_e$ und $E > M_e$ oszillierende Kontinuumswellenfunktionen, die sich bis ins Unendliche erstrecken. Diese werden normalerweise durch das Potential nur etwas deformiert.

$$p_i^2(r \rightarrow \infty) = E^2 - M_e^2 > 0$$

7.1. Die Wellenfunktionen

Im diesem Fall der effektive Impuls hat nur einen Umkehrpunkt. Für $r > a$, $p_i^2 > 0$ und die Lösung ist oszillatorisch.

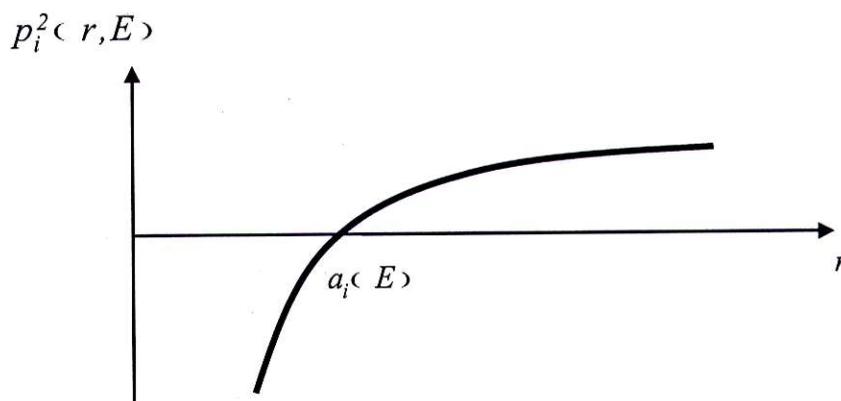


Abb.7.1. Nullstellen von $p_i^2(r, E)$ $i = \uparrow, \downarrow$

In der Umgebung von $r = a$, haben wir von (5.28) bis (5.32)

$$y_{a_i}(r) = \{ z_{a_i}(r) \}^{\frac{1}{2}} \{ p_i^2(r) \}^{-\frac{1}{4}} \{ \alpha_{a_i} Ai(-z_{a_i}(r)) + \beta_{a_i} Bi(-z_{a_i}(r)) \} \quad (7.1)$$

Die muss die folgenden Randbedingungen erfüllen.

$$y_{a_i}(r \rightarrow 0) \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

$$\therefore \beta_{a_i} = 0 \quad (7.3)$$

$$y_{a_i}(r) = \{ z_{a_i}(r) \}^{\frac{1}{4}} \{ p_i^2(r) \}^{-\frac{1}{4}} \alpha_{a_i} Ai(-z_{a_i}(r)) \quad (7.4)$$

$$\frac{2}{3} (z_{a_i}(r))^{\frac{3}{2}} = \int_{a_i(E)}^r dt \sqrt{p_i^2(t, E)} \quad , \quad r \geq a_i \quad (7.5)$$

$$\frac{2}{3} (-z_{a_i}(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{a_i(E)} dt \sqrt{-p_i^2(t, E)} \quad , \quad r \leq a_i \quad (7.6)$$

Die asymptotische Wellenfunktion lautet

$$y_a(r \ll a) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \frac{\alpha_a}{2} \exp(-\zeta_a(r)) \quad (7.7)$$

$$\zeta_a(r) = \int_r^{a(E)} dt \sqrt{-p^2(E, t)}$$

$$y_a(r \gg a) = \frac{c}{[p^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \alpha_a \sin\left(\zeta_a(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (7.8)$$

$$\zeta_a(r) = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p^2(E, t)} \quad .$$

Kapitel 8

DIE ABSCHIRMUNG DES POTENTIALS

Die Elektronen der entstehenden reellen Vakuumpolarisation werden eine Ladungswolke in der Nähe des Strings bilden, die dessen elektrostatisches Potential abschirmt. Die Ladungsdichte des Vakuums wird ausgedrückt durch

$$\rho_V(r) = q_e \sum_{E_\beta < -m_0} \Psi_\beta^+(r) \Psi_\beta^-(r)$$

Dabei erstreckt sich die Summation (Integration) über alle Kombinationen der Quantenzahlen $\beta = [n, m, k, s]$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \quad -k_{max} \leq k \leq k_{max} \quad s = \pm 1$$

die zu quasigebundenen Zuständen in unterem Kontinuum führen.

Die Ladungsdichte werden wir näherungsweise durch die WKB – Wellenfunktionen ausdrücken, Siehe (8.61)

Wir nehmen an, dass das elektrische Potential des geladenen Vakuums zylindrische Symmetrie zeigen muss. In diesem Koordinatensystem und mit zylindrischer Symmetrie haben wir die Poissonsche Gleichung mittels Greenscher Funktionen in Zylinderkoordinaten gelöst. Das Potential der elektronischen Wolke wird ausgedrückt durch, Siehe (8.46)

$$\frac{\Phi_V}{4\pi q_e C_0} = -\ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{m,n} \Lambda(m,n) + \sum_{E_n < -m_0} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots}^{+\Lambda(m,n)} \int_0^b dk \int_{r \in [a, b]} dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_\alpha^+(r_l, k) \chi_\alpha^-(r_l, k) \}$$

Wobei $p_z = \Lambda(m, n)$ die obere Grenze des Longitudinal - Impulses der Resonanzen mit den Quantenzahlen $| n, m, p_z, s \rangle$ ist.

Wir betrachten den Fall eines langen und dünnen Strings.

1. Wir fixieren die Ladung pro Länge $\rho_L = \frac{Ze}{L} = \text{Konst.}$
2. Wir verkleinern den Radius des Strings $r_0 \rightarrow 0$.
3. Dann erhöhen wir die Länge des Strings.

Im diesem Fall bleiben die Umkehrpunkte des effektiven Impulses außerhalb des Strings, und das gesamte Potential für $r \geq b$ wird ausgedrückt durch

$$\Phi = \{ 2\rho_L - Q_\psi \} \ln\left(\frac{L}{r}\right)$$

Wobei Q_ψ die Abschirmladung pro Länge ist

$$Q_\psi = 4\pi q_e C_o \sum_{m,n} A(m,n)$$

mit $q_e = -2e (\uparrow, \downarrow)$.

8.1. Die Ladungsdichte des Vakuums

Wir berechnen die Ladungsdichte eines einzelnen Resonanzzustands mit Hilfe von (5.62).

$$r\rho_V = q_e \sigma \{ \alpha(r) F_\beta^+(r) F_\beta(r) + \zeta(r) f_\beta^+(r) f_\beta(r) \} \quad (8.1)$$

Von (6.68) haben wir die Resonanzbedingung $\alpha_c = 0 \Rightarrow \beta_b = 0$, und nehmen dann die Wellenfunktionen in der Gestalt (6.35)

$$y_b(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma I}} \left(\frac{-z_b(r)}{p^2(r)} \right)^{\frac{1}{4}} Ai(z_b(r)) \quad (8.2)$$

$$\frac{2}{3} (-z_b(r))^{\frac{3}{2}} = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(t, E)} \quad , \quad r \leq b \quad (8.3)$$

$$I = \int_{a_\uparrow}^{b_\uparrow} dr \frac{\alpha}{\sqrt{p_\uparrow^2}} + \int_{a_\downarrow}^{b_\downarrow} dr \frac{\zeta}{\sqrt{p_\downarrow^2}} \quad (8.4)$$

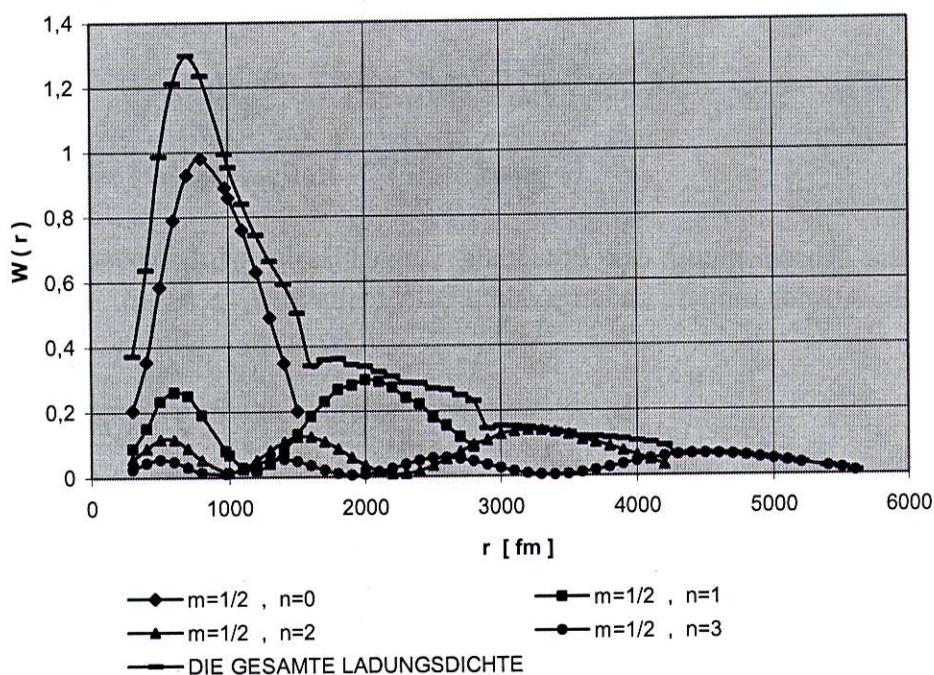
Wir setzen (8.2) in (8.1) ein, und erhalten den folgenden Ausdruck für die Vakuumladungsdichte.

$$r\rho_V = 4\pi q_e \sum_{m,n} W_{mn}(\bar{k} = 0) \quad (8.5)$$

$$W_{mn}(r, \bar{k}) = \frac{A(m, n) \alpha(r, \bar{k})}{I(\bar{k})} \left(-\frac{z_{b\uparrow}}{p_\uparrow^2} \right)^{\frac{1}{2}} Ai^2(z_{b\uparrow}) + \frac{A(m, n) \zeta(r, \bar{k})}{I(\bar{k})} \left(-\frac{z_{b\downarrow}}{p_\downarrow^2} \right)^{\frac{1}{2}} Ai^2(z_{b\downarrow})$$

Offensichtlich ist die Ladungsdichte positiv $r\rho_V > 0$. Außerdem stimmt die Schwingung der Ladungsdichte mit der Anzahl der Knoten der Wellenfunktion überein.

DIE LADUNGSDICHTE



$$\frac{V_0}{m_0} = -0.4, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad r_0 \ll 1, \quad L = 10^6 \text{ fm}$$

Abb.8.1. Die Ladungsdichte des Vakuums. Die Schwingung der Ladungsdichte stimmt mit der Anzahl der Knoten der Wellenfunktion überein.

8.2. Die radiale Ausdehnung des Vakuumladungsverteilung

8.2. 1. Der Fall $V_0 \ll -m_0$

Wenn wir $V_0 = -\frac{2Ze^2}{L}$ erhöhen, werde die Umkehrpunkte des effektiven Impulses zum Zentrum des Zylinders verschoben. Im Innenraum des Zylinders ist das elektrostatische Potential tiefer als die Energie der tiefsten Resonanzen, so dass wir E und M_e gegen V , $r \in [0, r_0]$ vernachlässigen können. Außerdem nehmen wir an $r_0 \geq a$.

Im diesem Fall wird der effektive Impuls ausgedrückt durch

$$p^2 \approx V_0^2 \left\{ \ln\left(\frac{L}{r_0}\right) \right\}^2 - \frac{m(m+1)}{r^2} \tag{8.6}$$

$$p^2(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{m(m+1)}}{(-V_0) \ln\left(\frac{L}{r_0}\right)} \tag{8.7}$$

In der Fermi - Energie $E_F = - M_e$

$$p^2(b_F) \approx (E_F - V)^2 - M_e^2 = 0 \quad (8.8)$$

$$E_F = - M_e \Rightarrow V = -2M_e \quad (8.9)$$

$$b_F = L \exp\left(\frac{2M_e}{V_o}\right) \quad (8.10)$$

Wenn die Abschirmung des Potentials vernachlässigt wird, können wir die gesamte räumliche Ausdehnung der Ladungsvakuumdichte durch $d_V = b_F - a$ ausdrücken.

$$\therefore d_V\left(\frac{L}{r_o} \gg 1\right) = L \exp\left(\frac{2M_e}{V_o}\right) - \frac{\sqrt{m(m \mp 1)}}{(-V_o) \ln\left(\frac{L}{r_o}\right)} \quad (8.11)$$

8.2. 2. Der Fall $-m_o < V_o < 0$ und $L \gg L_F$

Wir betrachten den Fall von einem lange und dünnen String und fixieren die Ladung pro Länge des Strings. Erst verkleinern wir den Radius des Zylinders und vergrößern danach seine Länge. **Abb.5.7.** zeigt die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen den Radius des Strings. Man sieht, dass die Energie gegen einen endlichen konstanten Wert geht, wenn der Radius r_o einen Wert r_{ok} unterschreitet. Der innere Umkehrpunkt a wird dann auch außerhalb des Zylinders liegen.

Dann vergrößern wir die Länge des Strings. **Abb.5.13.** zeigt die Energie der tiefsten Resonanzen gegen die Länge des Strings. Die Energie wird logarithmisch nach unten im Dirac -See verschoben, wenn die Länge zunimmt. Wir setzen die Gleichungen (4.76) in (8.57) ein, und folgt die Energie dem Gesetz:

$$E(k) = V_o \ln\left(\frac{L}{L_F}\right) - 2m_o + \sqrt{m_o^2 + k^2} \Rightarrow B = -V_o \ln(L_F) - 2m_o + \sqrt{m_o^2 + k^2}$$

Die Umkehrpunkte sind bestimmt durch die Bedingung $p^2(a) = p^2(b_F) = 0$.

$$p^2(a) = 0 \Rightarrow a \approx \sqrt{\frac{m(m \mp 1)}{B^2 - M_e^2}} \quad (8.12a)$$

In der Fermi -Energie $E_F = - M_e$

$$p^2(b_F) = 0 \Rightarrow b_F \approx L \exp\left(\frac{2M_e}{V_o}\right) \quad (8.12b)$$

Wenn die Abschirmung des Potentials vernachlässigt wird, kann die gesamte räumliche Ausdehnung der Ladungsvakuumdichte durch $d_V = b_F - a$ ausgedrückt werden.

$$d_V = L \exp\left(\frac{2M_e}{V_o}\right) - \sqrt{\frac{m(m+1)}{B^2 - M_e^2}} \quad (8.13)$$

8.3. Lösung der Poissonschen - Gleichung

Wir lösen die Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad (8.14)$$

Hier ist ρ die kontinuierliche Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \rho_o \theta(r_o - r) + \rho_\psi(\vec{x}) \quad (8.15)$$

wobei $\rho_\psi = q_e \sum_{E_a < -m_o} \Psi_\alpha^+(\vec{x}) \Psi_\alpha(\vec{x})$ die Ladungsdichte des Vakuums ist.

Das Potential $\Phi(\vec{x})$ ergibt sich mit Hilfe der Greensfunktion $G(\vec{x}, \vec{x}_l)$ als das Integral (2.8) über die gesamte Ladungsverteilung

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\Omega} G(\vec{x}, \vec{x}_l) \rho(\vec{x}_l) d^3 x_l$$

Dann hat die Lösung von (8.16) die Gestalt

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\Omega} d^3 x_l \frac{\rho_o \theta(r_o - r) + q_e \sum_{E_a < -m_o} \Psi_\alpha^+(\vec{x}_l) \Psi_\alpha(\vec{x}_l)}{|\vec{x} - \vec{x}_l|} \quad (8.16)$$

Daraus erhalten wir

$$\Phi - q_e \int_{\Omega} d^3 x_l G(\vec{x}, \vec{x}_l) \left(\sum_{E_a < -m_o} \Psi_\alpha^+(\vec{x}_l) \Psi_\alpha(\vec{x}_l) \right) = \rho_o \int_{\Omega} d^3 x_l G(\vec{x}, \vec{x}_l) \theta(r_o - r) \quad (8.17)$$

Die Entwicklung von $G(\vec{x}, \vec{x}_l) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_l|}$ lautet gemäß (2.9):

$$G(\bar{x}, \bar{x}_1) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z_1)] \left\{ \frac{1}{2} I_0(kr_<) K_0(kr_>) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\varphi-\varphi_1)] I_m(kr_<) K_m(kr_>) \right\}$$

Mit (2.9) berechnen wir den Term

$$\int_{\Omega} d^3x_1 G(\bar{x}, \bar{x}_1) \Psi_{\alpha}^{+}(\bar{x}_1) \Psi_{\alpha}(\bar{x}_1) = \int_{\Omega} r_1 dr_1 d\varphi_1 dz_1 \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} dk \cos[k(z-z_1)] \left\{ \frac{1}{2} I_0(kr_<) K_0(kr_>) + \sum_{m=1}^{\infty} \cos[m(\varphi-\varphi_1)] I_m(kr_<) K_m(kr_>) \right\} \chi_{\alpha}^{+}(r_1) \chi_{\alpha}(r_1)$$

(8.18)

Wobei wir den folgenden Ausdruck für die Wellenfunktion angewandt haben

$$\Psi_{\alpha}(\vec{r}) = \exp[ikz] \exp[im\varphi] \chi_{\alpha}(r)$$

Hierbei nehmen wir an, dass die Elektronendichte nicht von z abhängt sondern im Bereich $0 < z < L$ konstant ist und außerhalb verschwindet. Korrekter, aber schwieriger, wäre die Lösung der zweidimensionalen Dirac – Gleichung in den Koordinaten r und z

Auf der Ebene $z = \frac{L}{2}$ haben wir mit den Gleichungen (2.15) und (2.16)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \cos[m(\varphi-\varphi_1)] = 2\pi \delta_{0m}$$

$$\int_0^L dz_1 \cos[k(z-z_1)] = \frac{1}{k} \{ \sin[k(L-z)] + \sin[kz] \}$$

$$\int_{\Omega} d^3x_1 G(\bar{x}, \bar{x}_1) \Psi_{\alpha}^{+}(\bar{x}_1) \Psi_{\alpha}(\bar{x}_1) = 8 \int_0^{\infty} dk \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k} \int dr_1 \{ r_1 \chi_{\alpha}^{+}(r_1) \chi_{\alpha}(r_1) \} I_0(kr_<) K_0(kr_>)$$

(8.19)

Wir ersetzen (8.19) in (8.17), und erhalten

$$\Phi = 8q_e \int_0^\infty dk \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k} \int dr_1 r_1 \sum_{E_n < -m_0} \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) I_o(kr_<) K_o(kr_>) = \rho_o \int_\Omega d^3x_l G(\bar{x}, \bar{x}_l) \theta(r_o - r) \quad (8.20)$$

Jetzt berechnen wir das Integral

$$\Phi_\psi = 8q_e \int_0^\infty dk \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k} \int dr_1 \{ r_1 \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \} I_o(kr_<) K_o(kr_>) \quad (8.21)$$

Wir verwenden die Vertauschbarkeit der Integrationen

$$\Phi_\psi = 8q_e \int dr_1 \{ r_1 \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \} \int_0^\infty dk \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{k} I_o(kr_<) K_o(kr_>) \quad (8.22)$$

Und benutzen die Reihenentwicklung [Gra⁹⁶¹₁₃]

$$I_o(z) = \sum_{j=0}^\infty \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2j}}{(j!)^2} \quad (8.23)$$

Wir setzen (8.26) in (8.25) ein, und integrieren mit der Hilfe von (2.28).

$$\int_0^\infty x^\lambda K_\mu(ax) \sin(bx) dx = \frac{2^\lambda b \Gamma\left(\frac{2+\mu+\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\lambda-\mu}{2}\right)}{a^{2+\lambda}} {}_2F_1\left(\frac{2+\mu+\lambda}{2}, \frac{2+\lambda-\mu}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)$$

$$\operatorname{Re}(-\lambda \pm \mu) < 2 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}a > 0, \quad b > 0$$

$$\Phi_\psi = 2q_e L \sum_{j=0}^\infty \frac{\Gamma^2\left(j + \frac{1}{2}\right)}{(j!)^2} \int dr_1 \frac{r_<^{2j}}{r_>^{2j+1}} {}_2F_1\left(j + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r_>}\right)^2\right) \{ r_1 \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \} \quad (8.24)$$

Für die elektronische Wolke des Vakuums haben wir die folgenden Fälle:

$$\begin{aligned} r_< &= r_l \quad \text{und} \quad r_> = r, \\ r_< &= r \quad \text{und} \quad r_> = r_l, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Phi_{\psi} = \Phi_{\psi}^1(r_{<} = r_1, r_{>} = r) + \Phi_{\psi}^2(r_{<} = r, r_{>} = r_1) \quad (8.25)$$

wobei Φ_{ψ}^1 und Φ_{ψ}^2 durch

$$\Phi_{\psi}^1 = 2q_e L \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(j + \frac{1}{2})}{(j!)^2} \frac{{}_2F_1(j + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(\frac{L}{2r})^2)}{r^{2j+1}} \int_0^r dr_1 r_1^{2j+1} \chi_{\alpha}^+(r_1) \chi_{\alpha}(r_1) \quad (8.26)$$

$$\Phi_{\psi}^2 = 2q_e L \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(j + \frac{1}{2})}{(j!)^2} r^{2j} \int_r^{\infty} dr_1 r_1^{-2j} {}_2F_1(j + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -(\frac{L}{2r_1})^2) \chi_{\alpha}^+(r_1) \chi_{\alpha}(r_1) \quad (8.27)$$

gegeben wird.

Wir betrachten zunächst den Fall eines Zylinders dessen Länge größer als sein Radius ist, und benutzen die folgenden Formeln für die niedrigsten Werte der Summationsvariablen j .

$$i_0 = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right) = \frac{2r}{L} \ln \left\{ \frac{L}{2r} + \sqrt{1 + \left(\frac{L}{2r}\right)^2} \right\} \quad (8.28)$$

$$i_1 = {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; -\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right) = 8 \frac{1}{\left(\frac{4r^2 + L^2}{r^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (8.29)$$

$$i_2 = {}_2F_1\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; -\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right) = 32 \frac{1}{\left(\frac{4r^2 + L^2}{r^2}\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{160}{3} \frac{L^2}{\left(\frac{4r^2 + L^2}{r^2}\right)^{\frac{7}{2}}} r^2 \quad (8.30)$$

$$i_3 = {}_2F_1\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}; \frac{9}{2}; -\left(\frac{L}{2r}\right)^2\right) = 128 \frac{1}{\left(\frac{4r^2 + L^2}{r^2}\right)^{\frac{7}{2}}} - \frac{1792}{3} \frac{L^2}{\left(\frac{4r^2 + L^2}{r^2}\right)^{\frac{9}{2}}} r^2 + \frac{2688}{5} \frac{L^4}{\left(\frac{4r^2 + L^2}{r^2}\right)^{\frac{11}{2}}} r^4 \quad (8.31)$$

Im Grenzenfall $L \gg r$ finden wir

$$i_0 \approx C_0 \frac{r}{L} \ln\left(\frac{r}{L}\right) \quad , \quad C_0 = -2 \quad (8.32)$$

$$i_1 \approx C_1 \frac{r^3}{L^3} \quad , \quad C_1 = 8 \quad (8.33)$$

$$i_2 \approx C_2 \frac{r^5}{L^5} \quad , \quad C_2 = -\frac{64}{3} \quad (8.34)$$

$$i_3 \approx C_3 \frac{r^7}{L^7} \quad , \quad C_3 = \frac{1024}{15} \quad (8.35)$$

.....
.....

$$i_n \approx C_n \frac{r^{2n+1}}{L^{2n+1}} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.36)$$

Wir setzen (8.32) und (8.36) in (8.26) und (8.27) ein, und erhalten:

$$\Phi_\psi^1 = 2\pi q_e C_o \ln\left(\frac{r}{L}\right) \int_0^r dr_1 r_1 \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) + 2q_e \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(j + \frac{1}{2}\right) C_j}{(j!)^2 L^{2j}} \int_0^r dr_1 r_1^{2j+1} \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \quad (8.37)$$

$$\Phi_\psi^2 = 2\pi q_e C_o \int_r^\infty dr_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{L}\right) \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) + 2q_e \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2\left(j + \frac{1}{2}\right) C_j r^{2j}}{(j!)^2 L^{2j}} \int_r^\infty dr_1 r_1 \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \quad (8.38)$$

Wenn die Länge L groß gegen die radiale Ausdehnung der Ladungsverteilung ist, dann dominiert der erste Term der Reihe und es ergibt sich

$$\Phi_\psi^1 = 2\pi q_e C_o \ln\left(\frac{r}{L}\right) \int_{-A}^{+A} dk \int_0^r dr_1 r_1 \sum_{E_\alpha, m} \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \quad (8.39)$$

$$\Phi_\psi^2 = 2\pi q_e C_o \int_{-A}^{+A} dk \int_r^\infty dr_1 r_1 \ln\left(\frac{r_1}{L}\right) \sum_{E_\alpha, m} \chi_\alpha^+(r_1) \chi_\alpha(r_1) \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_\psi}{2\pi q_e C_o} = & - \ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{E_\alpha < -m_0} \sum_{m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots} \int_{-A(m,n)}^{+A(m,n)} dk \int_0^r dr_1 \{ r_1 \chi_\alpha^+(r_1, k) \chi_\alpha(r_1, k) \} + \\ & + \sum_{E_\alpha < -m_0} \sum_{m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots} \int_{-A(m,n)}^{+A(m,n)} dk \int_r^\infty dr_1 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \{ r_1 \chi_\alpha^+(r_1, k) \chi_\alpha(r_1, k) \} \quad , \end{aligned} \quad (8.41)$$

wobei wir die folgende Beziehung benutzt haben

$$\int_0^r \dots = \int_0^\infty \dots - \int_r^\infty \dots$$

Für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gilt die Normierungsbedingung

$$\int_0^\infty dr_l \{ r_l \chi_\alpha^+(r_l, k) \chi_\alpha(r_l, k) \} = 1$$

$$\frac{\Phi_\psi}{4\pi q_e C_o} = - \ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{m, n} \Lambda(m, n) + \sum_{E_n < -m_o} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots}^{+\Lambda(m, n) \infty} \int_0^\infty dk \int_r^\infty dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_\alpha^+(r_l, k) \chi_\alpha(r_l, k) \} \quad (8.42)$$

Hier haben wir mit $\Lambda(m, n)$ eine Funktion der Quantenzahlen m und n bezeichnet. Außerdem ist der effektive Impuls eine gerade Funktion des Longitudinalimpulses $p_z = k$.

$$p_i^2(k) = p_i^2(-k) \quad , \quad i = \uparrow, \downarrow \quad (8.43)$$

$$\sigma(k) = \sigma(-k) \quad (8.44)$$

$$\therefore \{ r_l \chi_\alpha^+(r_l, k) \chi_\alpha(r_l, k) \} = \{ r_l \chi_\alpha^+(r_l, -k) \chi_\alpha(r_l, -k) \} \quad (8.45)$$

Weil die elektronische Wolke des Vakuums zwischen den Umkehrpunkten a und b konzentriert ist, ersetzen wir den unteren – und oberen Limes des Integrals in (8.42)

$$\frac{\Phi_\psi}{4\pi q_e C_o} = - \ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{m, n} \Lambda(m, n) + \sum_{E_n < -m_o} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots}^{+\Lambda(m, n)} \int_0^b dk \int_{r \in [a, b]} dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_\alpha^+(r_l, k) \chi_\alpha(r_l, k) \} \theta(b-r) \quad (8.46)$$

Um das Integral abzuschätzen, benutzen wir den Mittelwertsatz [Smi²¹⁵₃₃]: Ändert die Funktion $\varphi(x)$ im Intervall $]a, b[$ das Vorzeichen nicht, so wird

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx \quad (8.47)$$

wobei ξ ein gewisser, dem Intervall $] a, b [$ angehörender Wert ist.

Wir betrachten das Integral

$$\gamma(r) = \int_{r \in] a, b [}^b dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_a^+(r_l, k) \chi_a(r_l, k) \} \quad (8.48)$$

Mit dem Mittelwertsatz gilt an der Stellen $r = a$ mit $\xi \in] a, b [$:

$$\gamma(a) = \ln\left(\frac{\xi}{a}\right) \int_{r=a}^b dr_l \{ r_l \chi_a^+(r_l, k) \chi_a(r_l, k) \} = \ln\left(\frac{\xi}{a}\right) > 0 \quad (8.49)$$

So finden wir, dass γ zwischen $0 \leq \gamma \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ liegt.

Von Gleichung (8.46) sehen wir, dass das Potential der elektronischen Wolke zwei Teile enthält.

$$V_\psi = V_2 + V_3 \quad (8.50)$$

Das Potential V_2 wirkt abstoßend auf ein Elektron.

$$V_2 = 16 \pi e^2 \ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{m,n} A(m,n) \quad \text{für } r \in] a, L [\quad (8.51)$$

Das Potential V_3 ist ein anziehendes Potential.

$$V_3 = -16 \pi e^2 \sum_{E_a < -m_e} \sum_{m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots}^{+A(m,n)} \int_0^b dk \int_{r \in] a, b [}^b dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_a^+(r_l, k) \chi_a(r_l, k) \} \quad (8.52)$$

Weil das Elektron am Rand der Kreise mit dem Radius r liegt (Siehe **Abb.8.2**), erfährt es immer eine Kraft in der Richtung zum Zentrum des Strings. Die Kraft zwischen Teilchen mit gleichnamiger Ladung ist abstoßend.

$$\therefore V_3 \leq 0 \quad \text{oder} \quad \gamma \geq 0 \quad \text{für } r \in] a, b [\quad (8.53)$$

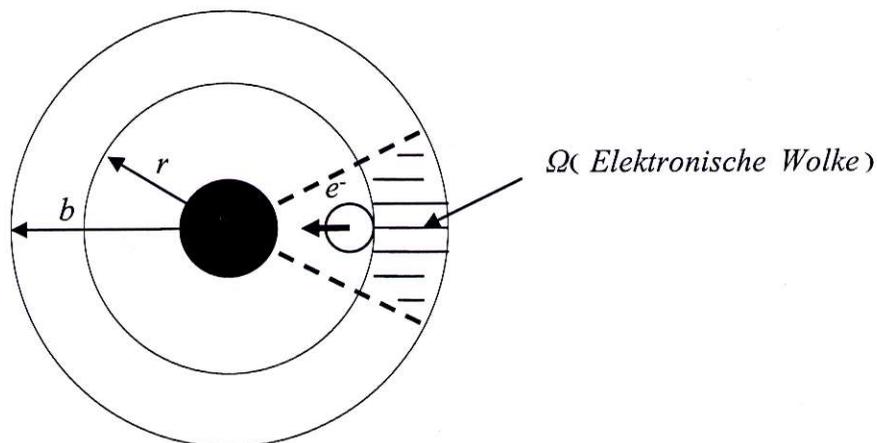
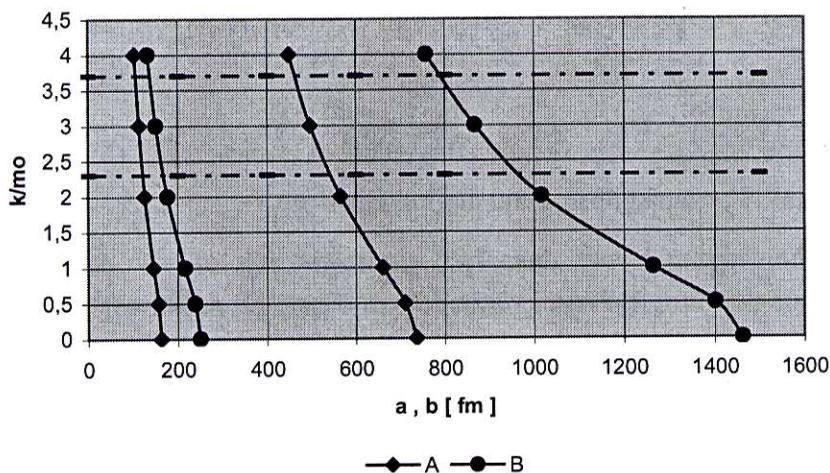


Abb.8.2. Das Potential V_3 . Wenn das Elektron zwischen $a \leq r \leq b$ liegt, erfährt eine zusätzliche Kraft in Richtung zum Zentrum des Strings.

8.4. Die obere Grenze des Impulses

UMKEHRPUNKTE DES EFFEKTIVEN IMPULSES



[A] : $p^2(a) = p^2(b) = 0$, $\frac{V_0}{m_0} = -0.736$, $n = 0$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $\frac{\Lambda}{m_0} = 2.3$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$

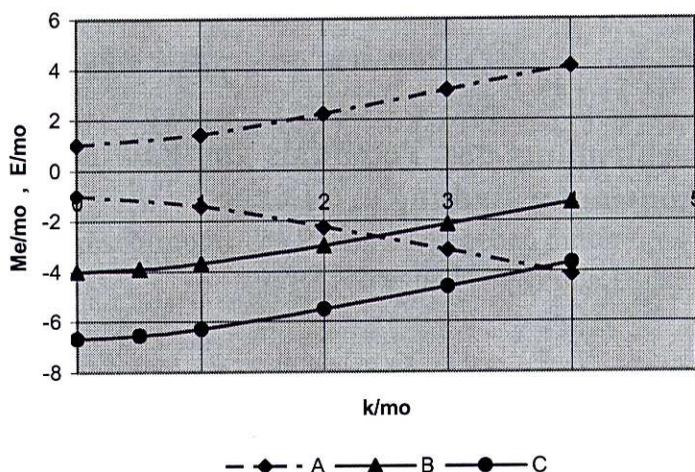
[B] : $p^2(a) = p^2(b) = 0$, $\frac{V_0}{m_0} = -0.2$, $n = 0$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $\frac{\Lambda}{m_0} = 3.7$, $r_0 = 10^{-5} \text{ fm}$, $L = 10^{20} \text{ fm}$

Abb.8.3. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses für die tiefste Resonanz gegen die z -Komponente des Impulses (Tabelle A9). Die Umkehrpunkte werden nach innen verschoben, wenn wir die z -Komponenten des Impulses vergrößern.

Wir berechnen jetzt die Ableitung der transversalen Masse

$$\frac{dM_e}{dk} = \frac{k}{\sqrt{m_o^2 + k^2}} \tag{8.54}$$

IMPULS - EFFEKTIVE MASSE (ENERGIE)



[A]: $\frac{M_e}{m_o}$, [B]: $\frac{V_o}{m_o} = -0.736$, $r_o = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$, [C]: $\frac{V_o}{m_o} = -0.2$, $r_o = 10^{-5} \text{ fm}$, $L = 10^{20} \text{ fm}$; $n=0$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$

Abb.8.4. Die Energie der Resonanzen als Funktion des Impulses $p_z = k$. Die Energie der Resonanzen wird mit der Erhöhung des Impulses nach oben verschoben, weil die transversale Masse M_e zunimmt. Die Energie verläuft parallel zur Fermi – Kante des oberen Kontinuums. Die Grenze des Impulses $k = A(m, n)$ ist definiert als Schnittpunkt der Kurve der Energie und der Fermi – Kante des unteren Kontinuums.

Weil die Kurve der Energie gegen den Impuls parallel zur oberen Fermi – Kante ist, haben wir dann (Siehe **Abb.8.4**)

$$\frac{dE}{dk} = \frac{dM_e}{dk} \tag{8.55}$$

Wir integrieren (8.55), und erhalten

$$\int_{E(k=0)}^E dE = \int_0^k dk \frac{k}{\sqrt{m_o^2 + k^2}} \tag{8.56}$$

$$E(k) = E(k=0) - m_o + \sqrt{m_o^2 + k^2} \tag{8.57}$$

Die obere Grenze des Impulses $A(m, n)$ wird von der folgenden Bedingung bestimmt

$$E(A) = -M_e(A) \tag{8.58}$$

$$\frac{A(m, n)}{m_0} = \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{E(k=0)}{m_0} \right)^2 - 1} \quad , \quad (8.59a)$$

und für den Fall $E(k=0) \ll -m_0$ erhalten wir

$$A(m, n) \approx -\frac{1}{2} E(k=0) \quad (8.59b)$$

8.5. Die Abschirmung des Potentials im Fall eines dünnen und langen Strings mit konstanter Ladung pro Länge

Erst fixieren wir die Ladung pro Länge des Strings

$$\rho_L = \frac{Ze}{L} = \text{Konst.} \quad (8.60)$$

Wir betrachten einen Zylinder mit einem Radius kleiner als der früher definierte Radius $r_{ok} : r_0 \ll r_{ok}$ (Siehe Seite 57). Im diesem Fall liegen beide Umkehrpunkte außerhalb des Zylinders. Dann vergrößern wir die Länge des Zylinders. Dabei bleiben die Umkehrpunkte des effektiven Impulses praktisch im Raum fixiert (**Abb.5.14**). Dann hängt der effektive Impuls nicht von der Länge des Zylinders ab.

Die Vakuum – Ladungsdichte wird mit Hilfe von (8.5) ausgedrückt:

$$r\rho_V = 2q_e \sum_{E_n < -m_0} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots} \int_0^{+A(m, n)} dk \frac{1}{I_3} \left\{ \frac{\alpha(r)}{\sqrt{p_1^2(r)}} + \frac{\xi(r)}{\sqrt{p_1^2(r)}} \right\} \quad , \quad (8.61)$$

wobei wir

$$[\cos^2 \theta]_{MW} = [\sin^2 \theta]_{MW} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_b = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma I_3}}$$

$$I_3 = \int_a^b dr \left\{ \frac{\alpha(r)}{\sqrt{p_1^2(r)}} + \frac{\xi(r)}{\sqrt{p_1^2(r)}} \right\}$$

benutzt haben.

Weil die Ladung des Vakuums zwischen die Umkehrpunkten $a \leq r \leq b$ lokalisiert ist, ersetzen wir die obere und untere Grenze durch a und b . Mit der Gleichung (8.46) wird das Abschirmungspotential ausgedrückt als

$$\frac{\Phi_{\psi}}{4\pi q_e C_o} = - \ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{m,n} \Lambda(m,n) + \sum_{E_a < -m_o} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots}^{\Lambda(m,n)} \int_0^b dk \int_{r \in [a, b]} dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_{\alpha}^+(r_l) \chi_{\alpha}(r_l) \} \quad (8.62)$$

Wir berechnen das Integral mit (8.61):

$$A = \int_r^b dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \{ r_l \chi_{\alpha}^+(r_l) \chi_{\alpha}(r_l) \} = \frac{1}{I_3} \int_{r \in [a, b]} dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \left\{ \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \right\} \quad (8.63)$$

Im diesem Fall wird die Abschirmung des Potentials gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{\psi}}{4\pi q_e C_o} = & -\ln\left(\frac{L}{r}\right) \sum_{m,n} \Lambda(m,n) + \\ & + \sum_{E_a < -m_o} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots}^{\Lambda(m,n)} \int_0^b dk \left(\frac{1}{I_3}\right) \int_{r \in [a, b]} dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \left\{ \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \right\} \end{aligned} \quad (8.64)$$

Das gesamte Potential ist für $a \leq r \leq b$

$$\begin{aligned} \Phi = & \{ 2\rho_L - Q_{\psi} \} \ln\left(\frac{L}{r}\right) + \\ & + 4\pi q_e C_o \sum_{E_a < -m_o} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots}^{\Lambda(m,n)} \int_0^b dk \left(\frac{1}{I_3}\right) \int_{r \in [a, b]} dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \left\{ \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \right\} \end{aligned} \quad (8.65)$$

Wobei Q_{ψ} die Vakuumladung pro Länge der elektronischen Wolke ist.

$$Q_{\psi} = 4\pi q_e C_o \sum_{m,n} \Lambda(m,n) \quad (8.66)$$

Wir benutzen wieder den Mittelwertsatz: $\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx$

$$f = \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \quad (8.67)$$

$$\gamma(r) = \int_{r \in [a, b]}^b dr_l \ln\left(\frac{r_l}{r}\right) \left\{ \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \right\} \quad (8.68)$$

$$= \ln\left(\frac{\zeta(r)}{r}\right) \int_{r \in [a, b]}^b dr_l \left\{ \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \right\} \quad (8.69)$$

Weil $\gamma \geq 0$ für $r \in [a, b]$ ist, müssen wir $\zeta(r) > r$ für jedes Intervall $]r, b[$ auswählen.

Wir setzen (8.69) in (8.65) ein, und erhalten wir für $a \leq r \leq b$

$$\Phi = \{ 2\rho_L - Q_{\psi} \} \ln\left(\frac{L}{r}\right) + 4\pi q_e C_o \sum_{m, n}^{\Lambda(m, n)} \int_0 dk \left\{ \Pi_{mn} \ln\left(\frac{\zeta_{mn}(r)}{r}\right) \right\}, \quad (8.70)$$

wobei Π_{mn} durch

$$\Pi_{mn} = \frac{\int_{r \in [a, b]}^b dr_l \left\{ \frac{\alpha(r_l)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r_l)}} + \frac{\xi(r_l)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r_l)}} \right\}}{\int_a^b dr \left\{ \frac{\alpha(r)}{\sqrt{p_{\uparrow}^2(r)}} + \frac{\xi(r)}{\sqrt{p_{\downarrow}^2(r)}} \right\}} \quad (8.71)$$

gegeben ist. Weil $\int_a^b \dots \geq \int_{r \geq a}^b \dots$ ist, liegt Π_{mn} in Intervall $0 \leq \Pi_{mn} \leq 1$.

Für $r \geq b$ wird Φ durch

$$\Phi = \{ 2\rho_L - Q_{\psi} \} \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (8.72)$$

gegeben. Wir können das gesamte Potential (2.70) und (8.46) in drei Teile zerlegen (Im Fall eines dünnen und langen Strings $a > r_{ok}$)

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (8.73)$$

wobei $q_e = -2e (\uparrow, \downarrow)$ und V_i durch

$$V_1 = V_0 \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad \text{mit} \quad V_0 = -\frac{2Ze^2}{L} = -2e\rho_L \quad (8.74)$$

$$V_2 = \left\{ 16e^2\pi \sum_{m,n} A(m,n) \right\} \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (8.75)$$

$$V_3 = -16e^2\pi \sum_{E_a < -m_0} \sum_{m=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots} \int_0^{+A(m,n)} dk \int_{r \in [a, b]} dr_1 \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) \{ r_1 \chi_a^+(r_1, k) \chi_a(r_1, k) \} \quad (8.76)$$

gegeben sind.

Wir untersuchen nun die Wirkung des Potentials auf ein Elektron

Wenn das Elektron weit von dem String entfernt ist ($r > b$), erfährt es die Wirkung einer Anziehungskraft und einer Abstoßungskraft gemäß V_1 und V_2 . Das Potential V_3 wirkt in diesem Bereich nicht, $V_3 = 0$.

Das gesamte Potential für $r \geq b$ wird ausgedrückt:

$$V = \left\{ V_0 + 16e^2\pi \sum_{m,n} A(n,m) \right\} \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (8.77)$$

Wenn wir die Länge des Strings vergrößern, müssen wir auch die Ladung des Strings erhöhen. Dann können wir die Ladung pro Länge des String $\rho_L = e\left(\frac{Z}{L}\right)$ konstant halten. $A(m,n)$ ist die obere Grenze des Impulses für die Resonanzen im Dirac – See mit den Quantenzahlen m und n . Weil das äußere Potential V_1 mit der Erhöhung der Länge zunimmt, erhöht sich auch die Anzahl der Resonanzen.

Wenn das Elektron zwischen $a \leq r \leq b$ liegt, erfährt es auch die Wirkung von einem zusätzlichen anziehenden Potential V_3 das zwischen $r = b$ und $r = a$ monoton anwächst auf einen Wert V_{3max} besitzt.

$$V_3 = -16\pi e^2 \sum_{m,n} \int_0^{A(m,n)} dk \left\{ H_{mn} \ln\left(\frac{\zeta_{mn}(r)}{r}\right) \right\} \quad (8.78)$$

$$V_{3max} = V_3(a) = -16\pi e^2 \sum_{m,n} \int_0^{A(m,n)} dk \left\{ \ln\left(\frac{\zeta_{mn}(a_{mn})}{a_{mn}}\right) \right\} \quad (8.79)$$

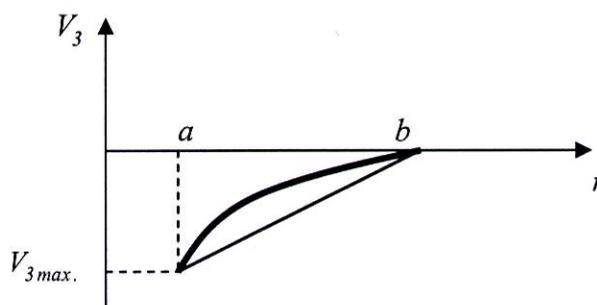


Abb.8.5. Das Potential V_3 wird von der linearen Funktion (8.80) begrenzt, und wächst zwischen $a \leq r \leq b$ monoton an. V_3 besitzt einen maximalen Wert an der Stelle $r = a$, und erreicht den Wert Null an der Stelle $r = b$.

Die exakte Lösung von V_3 liegt oberhalb der geraden Linie,

$$V_3 = \frac{V_{3max.}}{a-b} (r - b) , \tag{8.80}$$

und muss eine monotone Funktion sein.

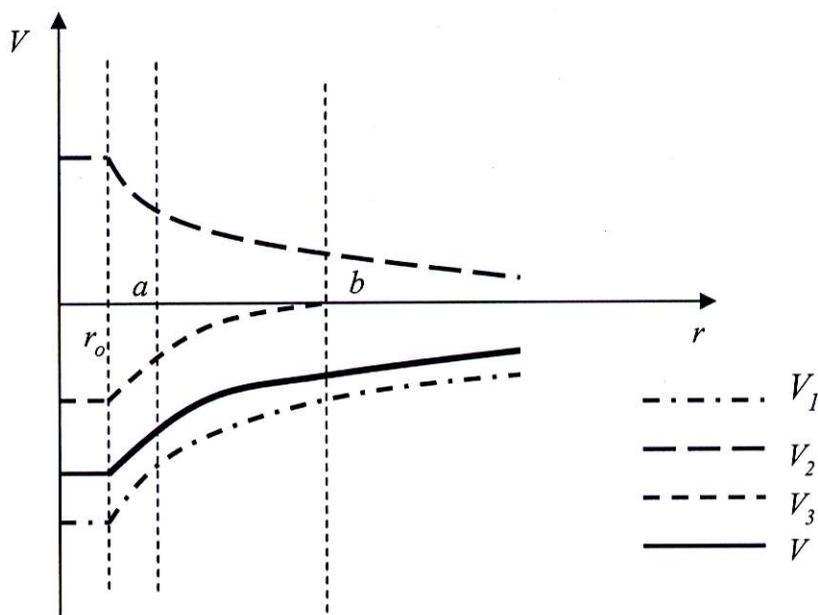


Abb.8.6. Das gesamte Potential $V(L \approx L_F)$. Weil nur wenige Resonanzzustände existieren, erhält man eine partielle Abschirmung des äußeren Potentials.

Wir summieren $V_\psi = V_2 + V_3$, und erhalten damit das Potential der elektronischen Wolke

$$V_{\psi} = 16\pi e^2 \sum_{m,n} \int_0^{A(m,n)} dk \ln \left\{ \frac{L}{\zeta^{\Pi_{mn}}(r) r^{1-\Pi_{mn}}} \right\} \quad (8.81)$$

Siehe (8.71)

$$\Pi_{mn}(a) = 1 \quad \text{und} \quad \Pi_{mn}(r \geq b) = 0 \quad (8.82)$$

Weil das Potential der Wolken des Vakuums V_{ψ} positiv ist, wird $V_2 > |V_3|$ im Bereich $r \in [a, b]$.

Von Gleichung (8.41) erhalten wir mit (8.47) für $r \rightarrow 0$

$$\frac{\Phi_{\psi}}{4\pi q_e C_o} = - \ln \left(\frac{L}{r} \right) \sum_{m,n} A(m,n) + \sum_{m,n} \int_0^{+A(m,n)} dk \int_{r \rightarrow 0}^{\infty} dr_l \ln \left(\frac{r_l}{r} \right) \{ r_l \chi_{\alpha}^+(r_l, k) \chi_{\alpha}(r_l, k) \} \quad (8.83)$$

$$\frac{\Phi_{\psi}}{4\pi q_e C_o} \approx - \ln \left(\frac{L}{\zeta} \right) \sum_{m,n} A(m,n) \quad (8.84)$$

Wobei $\zeta \in]0, L[$ ist.

Das Potential der elektronischen Wolke ist konstant im Bereich $r \in [0, r_o]$.

Wir betrachten die folgenden Fälle:

1. Der Fall $E(k=0) = -m_o - \delta$ mit $0 < \frac{\delta}{m_o} \ll 1$

Von (8.59a) wird die obere Grenze des Impulses ausgedrückt

$$\frac{A(m,n)}{m_o} \approx \sqrt{\frac{\delta}{m_o}} \quad (8.85)$$

An der Fermi - Kante erhalten wir mit (4.76) und $L = L_F + \Delta$, $\Delta \ll L_F$

$$E(k=0) = V_o \ln \left(1 + \frac{\Delta}{L_F} \right) - m_o \quad (8.86)$$

Dann wird δ ausgedrückt

$$\delta = -V_o \ln \left(1 + \frac{\Delta}{L_F} \right) \quad (8.87)$$

Wir summieren (8.74) und (8.75), und erhalten den Ausdruck

$$\frac{V_{l+2}(r)}{m_o} = \left\{ \frac{V_o}{m_o} + 16\alpha\pi \sqrt{-\frac{V_o}{m_o}} \sum_{m,n} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\Delta_{mn}}{L_{Fmn}}\right)} \right\} \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (8.88)$$

Dabei ist $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante.

Im Fall $\Delta_{mn} \ll L_{Fmn}$ ist das Potential negativ, weil nur wenige Resonanzzustände existieren.

Das Potential wird voll abgeschirmt, wenn $V_o = -\frac{2Ze^2}{L}$ den folgenden Wert annimmt

$$\frac{V_o}{m_o} = - \left\{ 16\alpha\pi \sum_{m,n} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\Delta_{mn}}{L_{Fmn}}\right)} \right\}^2 \quad (8.89)$$

2. Der Fall $L \gg L_F$

Mittels (8.59b) wird die obere Grenze des Impulses ausgedrückt

$$A(m, n) \approx -\frac{1}{2} V_o \ln\left(\frac{L}{L_F}\right) \quad (8.90)$$

Das Potential ist dann durch

$$V_{l+2}(r) \approx \left\{ 1 - 8\alpha\pi \sum_{m,n} \ln\left(\frac{L}{L_{Fmn}}\right) \right\} V_o \ln\left(\frac{L}{r}\right) \quad (8.91)$$

gegeben.

Im Fall $L \gg L_{Fmn}$ überwiegt der Abschirmterm und das Potential wird positiv. Dies geschieht unabhängig von der Anzahl der Resonanzzustände.

Natürlich ist das beschriebene Ergebnis noch keine selbstkonsistente Lösung, d.h. es ist nicht wirklich ein Wechsel des Potentialvorzeichens zu erwarten. Vielmehr wird sich die Vakuumladung so einstellen, dass es genau zu einer vollständigen Abschirmung des Potentials kommt.

Jetzt betrachten wir den Effekt der verschiedenen Lebensdauer τ der Resonanzen.

Wir stellen (4.76) in (8.57) ein, damit folgt die Energie dem Gesetz:

$$E(k) = V_o \ln\left(\frac{L}{L_F}\right) - 2m_o + M_e^2 \quad (8.92)$$

Der Umkehrpunkt c wird ausgedrückt durch

$$p^2(c) = 0 \Rightarrow c = \frac{L}{2sh \left\{ \frac{E(k) + M_e}{V_o} \right\}} \quad (8.93)$$

Wenn den gebundenen Zustand die Fermi – Kante erreicht, liegt der Umkehrpunkt c bei $L = L_F$ und $k = 0$ im Unendlichen. Wenn die Länge des Strings oder der longitudinale Impuls zunehmen, wird der Umkehrpunkt c nach innen verschoben.

Das hat die Folge, dass sich auch die Lebensdauer der Resonanzen τ mit der Länge ändert. Die tiefste Resonanz zerfällt schneller als die anderen, weil der entsprechende Gamow – Faktor (6.101) kleiner ist. Das hat die Folge, dass die Positronen auf verschiedenen Zeitskalen emittiert werden.

$$\tau = 2 \exp(2\zeta_{bc}) \int_a^b dr \left\{ \frac{\alpha(r)}{\sqrt{p_i^2(r)}} + \frac{\xi(r)}{\sqrt{p_i^2(r)}} \right\}$$

Wobei $\zeta_{bc}(r)$

$$\zeta_{bc} = \int_b^c dt \sqrt{-p_i^2(E, t)}$$

Wenn die tiefste Resonanz (Loch) zerfällt, wird spontan mit einem Elektron der Dirac – See besetzt. Das Vakuum wird geladen. Es entsteht eine aus den tiefsten Resonanzen $|0, \frac{1}{2}\rangle$ gebildete Ladungswolke, die das äußere Potential abschirmt.

$$V_a \approx \left\{ V_o + 16\pi\alpha A(0, \frac{1}{2}) \right\} \ln \left(\frac{L}{r} \right) \quad (8.94)$$

Das äußere Potential wird vollständig durch die Elektronen im tiefsten radialen Quantenzustand $|0, \frac{1}{2}\rangle$ abgeschirmt, wenn die obere Grenze des longitudinalen Impulses folgenden Wert annimmt

$$A(0, \frac{1}{2}) = -\frac{V_o}{16\pi\alpha}, \quad -1 \ll \frac{V_o}{m_o} < 0 \quad (8.95)$$

Die Energie ist durch

$$\frac{E}{m_o} = 1 - 2\sqrt{1 + \left\{ \frac{A(0, \frac{1}{2})}{m_o} \right\}^2} \quad (8.96)$$

gegeben.

Die anderen Löcher sind nach oben verschoben, weil auf sie ein schwaches Potential V_a wirkt. Um die nächste Zustand in die Dirac – See zu tauchen, vergrößern wir die Länge des Strings. Wenn die Resonanz $|0, -\frac{1}{2}\rangle$ zerfällt, wird ein weiteres Elektron den Dirac – See besetzen. So haben wir einen zusätzlichen Beitrag zur Wolke des Vakuums, und das Potential wird weiter abgeschwächt.

$$V_a \approx \{ V_o + 16 \pi \alpha [A(0, \frac{1}{2}) + A(0, -\frac{1}{2})] \} \ln \left(\frac{L}{r} \right) \quad (8.97)$$

Wenn $V_o + 16 \pi \alpha [A(0, \frac{1}{2}) + A(0, -\frac{1}{2})] < 0$ ist, gibt es gebundene Zustände. Wir vergrößern die Länge des Strings weiter, dann können noch mehr Zustände in die Dirac – See tauchen. Im Limes $L \rightarrow \infty$ haben wir,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \{ V_o + 16 \pi \alpha [A(0, \frac{1}{2}) + A(0, -\frac{1}{2}) + \dots] \} \rightarrow 0 \quad (8.98)$$

und haben eine vollständige Abschirmung des äußeren Potentials. Außerdem wird erfüllt die Ungleichheit:

$$A(0, \frac{1}{2}) > A(0, -\frac{1}{2}) > \dots \geq 0 \quad (8.99)$$

Kapitel 9

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In der vorliegenden Arbeit wurde das Verhalten des Dirac – Feldes im elektromagnetischen Potential eines geladenen Strings untersucht.

1. Das elektrostatische Potential

Das elektrostatische Potential eines geladenen Zylinders der Länge L ist eine stetige und monotone Funktion im Raum. Für Abstände $r \leq L$ verläuft das Potential logarithmisch, und geht für $r \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen Null wie das Coulomb – Potential einer Ladung Ze . Das Potential hängt von den geometrischen Parametern des Zylinders (Die Länge L und der Radius r_o) und $V_o = -\frac{2Ze^2}{L}$ ab. Im Inneren des Zylinders flacht das Potential ab, und hat bei $r = 0$ eine horizontale Tangente. Bei Verkleinerung des Radius r_o , erhöht sich das Potential nur in der Umgebung des Zentrums. Die Ausdehnung des Potentials wird größer wenn wir die Länge vergrößern.

2. Das Spektrum des Hamilton – Operators im unterkritischen Fall: Gebundene Zustände

$$\text{Unterkritischer Fall: } V_{ok} < V_o < 0 \quad \text{und} \quad -M_e < E < M_e$$

Wir haben mit Hilfe des Vierbein – Formalismus die Dirac – Gleichung in Zylinderkoordinaten formuliert und die Variablenseparation durchgeführt. Es entsteht ein gekoppeltes System von Radialgleichungen erster Ordnung, das sich durch eine Transformation der Spinoren in eine Schrödinger – artige Form bringen lässt.

Der effektive Radialimpuls besitzt zwei Umkehrpunkte nur für bestimmte Werte der Energie. Wir betrachten die begrenzte eindimensionale Bewegung eines Teilchens in einem Potentialtopf. Der klassisch erlaubte Bereich $a \leq r \leq b$ ist dann von zwei Umkehrpunkte begrenzt ($p^2 > 0$). Die Eigenenergie bestimmen wir näherungsweise mit der BOHR – SOMMERFELDSchen – Quantisierungsvorschrift.

Das Spektrum des Hamilton – Operators der Dirac – Gleichung enthält im unterkritischen Fall

- Das obere Kontinuum: $E > M_e$
- Die diskreten gebundenen Zustände: $-M_e < E < M_e$

- Die Verzweigungspunkte: $E = M_e$ und $E = -M_e$
- Das untere Kontinuum: $E < -M_e$

Im Bereich $a \leq r \leq b$ sind die Eigenfunktionen der gebundenen Zustände durch die asymptotische Darstellung von Airy - Funktionen gegeben

$$y_b(r) = \frac{\alpha_b}{\sqrt{\pi} [p^2(r)]^{1/4}} \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p^2(E, t)}$$

Tatsächlich nimmt das Argument der Wellenfunktion von $\frac{\pi}{4}$ im Punkt $r = b$ auf $\left(n + \frac{3}{4}\right)\pi$ im Punkt $r = a$ zu, so dass der Sinus in diesem Intervall n - mal verschwindet. Dann ist die Zahl n gleich der Anzahl der Knoten der Wellenfunktion und daher die radiale Quantenzahl des stationären Zustandes.

Außerhalb des klassisch erlaubten Intervalls nimmt die Wellenfunktion monoton ab und hat im Endlichen keine Nullstellen.

$$y_b(r \rightarrow \infty) = \frac{c}{[-p^2(r)]^{1/4}} \frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_b(r))$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{-p^2(E, t)}$$

Abb.4.1 zeigt ein Beispiel für die Umkehrpunkte des effektiven Impulses gegen die Potentialstärke V_o . Wir fixieren die Werte des Radius r_o , die z - Komponente des Impulses $p_z = k$, und die Länge des Zylinders L :

$$r_o = 200 \text{ fm} , \frac{k}{m_o} = 0 , L = 10^6 \text{ fm} , m = \frac{1}{2} , s = +1 , n = 0$$

Wenn wir die Potentialstärke (also die Ladung des Strings) erhöhen, werden die Umkehrpunkte nach innen verschoben. Die beiden Umkehrpunkte nähern sich einander an, weshalb der Abstand zwischen beiden Umkehrpunkten mit der Erhöhung der Potentialstärke abnimmt.

Abb.5.4. zeigt den l_s – Eigenwert als Funktion der Potentialstärke für die Parameter:

$$m = \frac{1}{2}, s = +1, n = 0, \frac{k}{m_0} = 0, r_0 = 200 \text{ fm}, L = 10^6 \text{ fm}$$

Das kritische Potential hat ungefähr den Wert:

$$\frac{V_{ok}}{m_0} = -0.314 \quad \text{oder} \quad \frac{V_k(r=0)}{m_0} = 2.838$$

Die Eigenenergie sinkt monoton mit wachsender Potentialstärke.

Abb.5.5 zeigt die gleiche Abbildung für eine Zylinderlänge von $L = 10^{15} \text{ fm}$. Das kritische Potential hat den Wert:

$$\frac{V_{ok}}{m_0} = -0.076 \quad \text{oder} \quad \frac{V_k(r=0)}{m_0} = -2.26$$

Bei Vergrößerung der Länge L erhöht sich die elektrische Gesamtladung, das Potential wächst an, und die gebundenen Zustände werden nach unten verschoben.

Die transversale Masse $M_e = \sqrt{m_0^2 + k^2}$ nimmt mit dem longitudinalen Impuls p_z zu, und das Teilchen wird effektiv massiver. Die Fermi – Kante ist in **Abb.5.11.** gezeigt. Es zeigt sich, dass die Schwelle zwischen oberem - und unterem Kontinuum mit dem Impuls zunimmt.

Abb.5.6 zeigt die Eigenenergie als Funktion des Potentials für zwei verschiedene Werte des Impulses $p_z = k$. Wir fixieren die Werte des Radius r_0 und der Länge des Zylinders L :

$$m = \frac{1}{2}, s = +1, \frac{k}{m_0} = 0, n = 0, r_0 = 200 \text{ fm}, L = 10^{15} \text{ fm}$$

Um die Fermi – Kante bei Erhöhung des Impulses p_z zu erreichen, muss auch die Ladung des Strings zunehmen. Deshalb erhöht sich auch V_k , zum Beispiel

$$\left. \frac{V_k(r=0)}{m_0} \right|_{\frac{k}{m_0}=0} = -2.26, \quad \left. \frac{V_k(r=0)}{m_0} \right|_{\frac{k}{m_0}=\frac{1}{2}} = -2.51$$

Abb.5.7 zeigt die Energieeigenwerte als Funktion des Radius r_0 des Zylinders. Wir fixieren die Werte von:

$$\frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{4}, \frac{k}{m_0} = 0, m = \frac{1}{2}, s = +1, n = 0, L = 10^6 \text{ fm}$$

Wenn wir den Radius des Zylinders verkleinern, werden die gebundenen Zustände nach unten verschoben. Sie nähern sich aber für $r_o \rightarrow 0$ asymptotisch einem wohldefinierten endlichen Wert

$$\frac{V_o}{m_o} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{E_n}{m_o} \rightarrow -0.748 \quad \text{für } r_o \leq 100 \text{ fm}$$

Dieses Verhalten ist qualitativ verschieden von Fall der kugelsymmetrischen Dirac - Gleichung mit starkem Feld (Atomkern mit $Z > 137$). Dort wachsen die Bindungsenergie für $r_o \rightarrow 0$ unbegrenzt an.

Abb.5.8 und **Abb.5.9** zeigen die Umkehrpunkte a und b des effektiven Impulses. Wenn der Radius des Zylinders verkleinert wird, werden die Umkehrpunkte nach dem Zentrum des Zylinders verschoben. Unterhalb eines bestimmten Werts $r < r_o$ erreichen Sie aber einen festen Grenzwert.

$$a = 210.86 \text{ fm} \quad \text{und} \quad b = 1250 \text{ fm} \quad \text{für } r_o \leq 100 \text{ fm}$$

Abb. 2.6 zeigt das Potential gegen den Radius des Strings. Wenn der Radius des Strings kleiner als der kritische Radius r_{ok} ist, ändert sich das Potential nur in der Nähe des Zentrums, während sich das Potential auf der Mantelfläche des Strings erhöht.

$$V_{r \rightarrow r_o} = V_o \ln\left(\frac{L}{r_o}\right) \rightarrow -\infty$$

Während das Potential im Innenbereich anwächst, bleiben die Umkehrpunkte im Raum fixiert.

Abb. 5.10 zeigt die Variation des kritischen Potentials gegen die Länge des Zylinders. Wir fixieren die Eigenenergie des $1s$ - Zustands ($\frac{E_{1s}}{m_o} = -1$) und den Radius des Zylinders ($r_o = 200 \text{ fm}$) und finden das kritische Potential für verschiedene Längen des Zylinders. Man benötigt in einem längeren Zylinder kleinere V_o , um die Fermi - Kante zu erreichen. Kleinere V_o bedeutet, dass nicht nur die Länge sondern auch die Ladung erhöht werden muss.

Abb. 5.11. und Abb. 5.12. zeigen die Variation der Energie des tiefsten gebundenen Zustands ($1s$) gegen die z - Komponente des Impulses für die Parameter:

$$\frac{V_o}{m_o} = -0.263, \quad r_o = 200 \text{ fm}, \quad L = 10^6 \text{ fm}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad n = 0$$

Die Energie wird nach oben verschoben, weil die effektive Masse des Elektrons mit dem Impuls anwächst.

Die Umkehrpunkte bewegen sich mit der Erhöhung der effektiven Masse nach innen. Die Ausdehnung der Wellenfunktion nimmt mit der Erhöhung des Impulses ab, weil sich die Umkehrpunkte einander nähern. Außerdem verläuft die Eigenenergie mit dem Impuls $p_z = k$ parallel zur Fermi – Kante des oberen Kontinuums.

Abb. 5.13. und Abb. 5.14. zeigen die Variation der Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Länge des Zylinders für die Parameter:

$$\frac{V_o}{m_o} = - 0.25 = \text{Konst.} , \quad \frac{k}{m_o} = 0 , \quad m = \frac{1}{2} , \quad s = +1 , \quad n = 0 , \quad r_o = 200 \text{ fm}$$

Die Eigenenergie wird nach unten mit der Erhöhung der Länge verschoben, weil das Potential auf der Mantelfläche mit der Länge zunimmt.

$$V(r_o) = V_o \ln\left(\frac{L}{r_o}\right) , \quad V_o = \text{Konstant}$$

Wenn wir die Länge vergrößern, breitet sich das Potential im größeren Gebiet aus.

Die Energie folgt der Relation (4.75):

$$E(k=0) = V_o \ln\left(\frac{L}{L_1}\right) + E_1$$

Zum Beispiel ist die gerade Linie der **Abb. 5.13** durch

$$\frac{E(k=0)}{m_o} = - 0.25 \ln(L) + 2.9$$

gegeben.

Dann hängt nicht der effektive Impuls von der Länge für $L \ll r$ ab, weil $\alpha(k=0)$ und $\xi(k=0)$ durch (4.78) gegeben sind.

$$\alpha(k=0) = V_o \ln\left(\frac{r}{L_1}\right) + E_1 + s m_o , \quad \xi(k=0) = V_o \ln\left(\frac{r}{L_1}\right) + E_1 - s m_o$$

Deshalb fixieren sich die Umkehrpunkte a, b des effektiven Impulses im Raum. Dann ist die Ausbreitung der Wellenfunktion fest im Raum, wenn wir die Länge des Zylinders vergrößern.

3. Das Spektrum des Hamilton – Operators im Überkritischen Fall: Die Resonanzen

Überkritischer Fall: $V_o < V_{ok}$ und $E_n < -M_e$

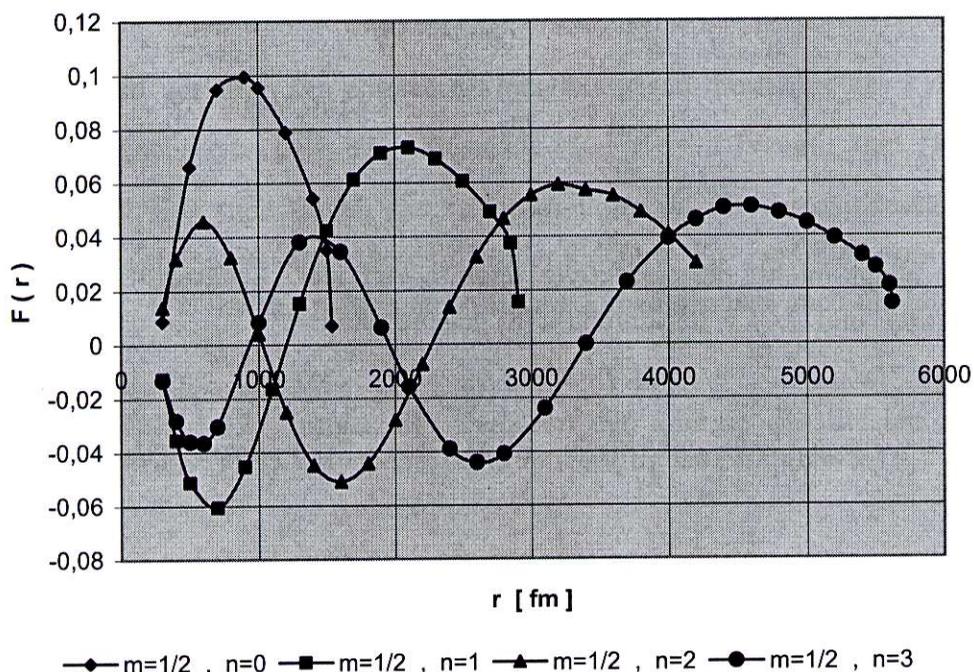
Im diesem Fall der effektive Impuls besitzt drei Umkehrpunkte für bestimmten Wert der Energie. Wir haben zwei erlaubte Gebiete getrennt von einer Barriere. Durch einen Tunneleffekt kann ein Teilchen mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit durch die Barriere hindurchgehen. Die Energie der Resonanzen wird bestimmt durch die Bedingung,

$$\sin\left(\zeta_{ab} + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \alpha_c = \beta_b = 0$$

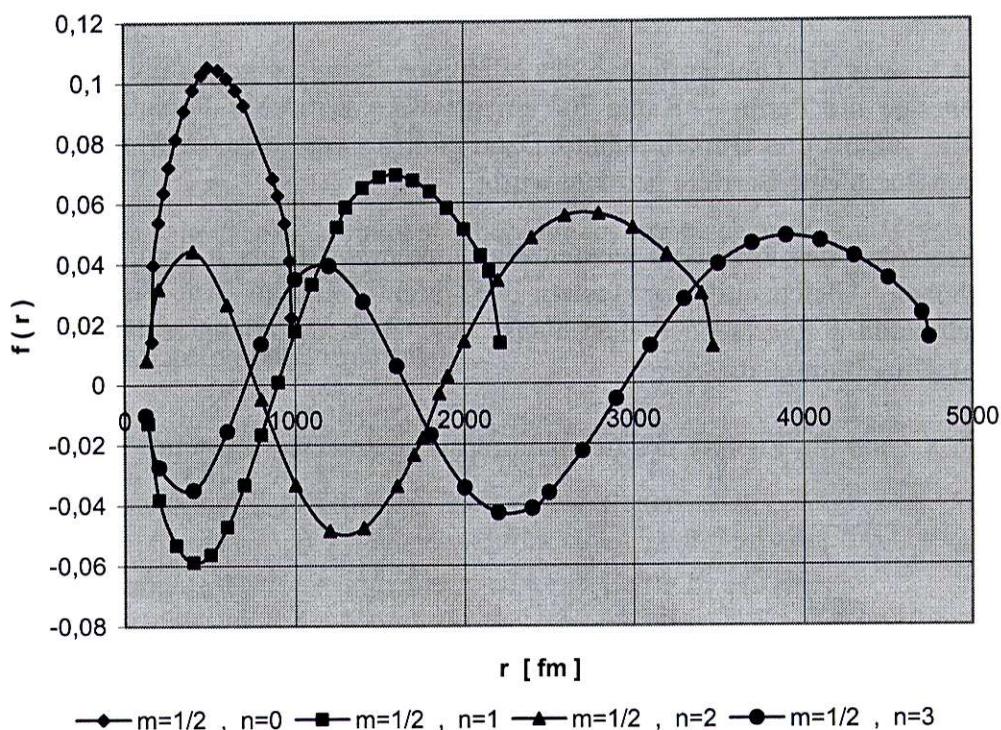
Wir benutzen die BOHR – SOMMERFELDSchen– Quantisierungsvorschrift.

In diesem Fall ($\alpha_c = 0$) nimmt die Wellenfunktion im Bereich $r \in [b, c]$ exponentiell ab, wenn r von b bis c erhöht. Für $r \in [a, b]$ oszilliert die Wellenfunktion und für $r < a$ exponentiell abfällt. Außerdem die exponentielle Abfall stoppt in der Stellung c und gibt es eine kleine exponentielle oszillierende Komponente für $r > c$. Außerdem ist in diesem Fall die Amplitude der Wellenfunktion: $|\beta_c| \ll |\alpha_a|$.

DIE WELLENFUNKTION DER RESONANZEN



DIE WELLENFUNKTION DER RESONANZEN



[A]: $n=0$, $\frac{E}{m_0} = -1.599$, [B]: $n=1$, $\frac{E}{m_0} = -1.338$, [C]: $n=2$, $\frac{E}{m_0} = -1.184$; $r_0 = 10^{-5}$ fm, $L = 10^6$ fm, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $\frac{V_0}{m_0} = -0.4$

Abb.9.1. Die Wellenfunktion der Resonanzen zwischen die Umkehrpunkte a, b des effektiven Impulses. Für $r \in [a, b]$ oszilliert die Wellenfunktion

Der Gamow – Faktor $\exp(-2\zeta_{bc})$ nimmt ab, weil auch die Fläche ζ_{bc} unter der Kurve des effektiven Impulses zwischen die Umkehrpunkte b und c mit der Erhöhung des Potentials abnimmt. Die tiefste Resonanz zerfällt schneller als die anderen.

Das Spektrum des Hamilton – Operators der Dirac – Gleichung besteht in diesem Fall aus:

- Den oberen Kontinuum: $E > M_e$
- Den diskreten gebundenen Zuständen: $-M_e < E < M_e$
- Den unteren Kontinuum: $E < -M_e$
- Den Verzweigungspunkten: $E = M_e$ und $E = -M_e$
- Den quasidiskreten Resonanzen im Dirac – See

Die Werte der Eigenenergie liegen auf dem ersten Blatt einer zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit den Verzweigungspunkten erster Ordnung $E = -M_e$ und $E = M_e$. Die Resonanzen liegen auf dem zweiten Blatt.

Abb.4.1. zeigt die Umkehrpunkte des effektiven Impulses gegen die Potentialstärke. Wenn die Energie die Fermi – Kante für ein gewisses kritisches Potential erreicht, besitzt der effektive Impuls drei Umkehrpunkte. Dann gibt es zwei klassisch erlaubte Gebiete, die durch getrennt durch eine Barriere getrennt wird.

Bei Erhöhung des Potentials werden die Umkehrpunkte nach dem Zentrum des Zylinders verschoben. Gleichzeitig verkleinern sie ihren Abstand. Am Anfang nähert sich der Umkehrpunkt c schnell dem Punkt b , danach verlangsamt sich die Änderung als Funktion der Potentialstärke.

Abb.6.2. zeigt die Energie des tiefsten (quasi) gebundenen Zustands gegen die Potentialtiefe für die Parameter:

$$\frac{k}{m_o} = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad n = 0, \quad r_o = 200 \text{ fm}, \quad L = 10^{15} \text{ fm}$$

Wenn die Potentialstärke einen kritischen Wert überschreitet, sinkt der $1s$ - Zustand als Resonanz in die Dirac – See.

Abb.8.3. zeigt die Umkehrpunkte des effektiven Impulses für die tiefste Resonanz gegen die z – Komponenten des Impulses für die Parameter:

$$\frac{V_o}{m_o} = -0.736, \quad n = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad r_o = 200 \text{ fm}, \quad L = 10^6 \text{ fm}$$

$$\frac{V_o}{m_o} = -0.2, \quad n = 0, \quad m = \frac{1}{2}, \quad s = +1, \quad r_o = 10^{-5} \text{ fm}, \quad L = 10^{20} \text{ fm}$$

Wenn wir die z – Komponenten des Impulses vergrößern, werden die Umkehrpunkte des effektiven Impulses nach innen verschoben. Zum Beispiel haben wir:

$$\frac{k}{m_o} = 0 \quad b - a = 574.5 \text{ fm}$$

$$\frac{k}{m_o} = 2.3 \quad b - a \approx 425 \text{ fm}$$

Der Abstand zwischen a und b nimmt ungefähr um 26% ab.

Abb.8.4. zeigt die obere Grenze des Impulses $k = A(m, n)$. An dieser Stelle $A(m, n)$ stimmt die Energie mit der effektiven Masse $E(A) = -M_e$ überein. Für

$k > A$ verwandelt sich die Resonanz in einem gebundenen Zustand. Zum Beispiel existiert für $\frac{V_0}{m_0} = -0.736$, $n = 0$, $m = \frac{1}{2}$, $s = +1$, $r_0 = 200 \text{ fm}$, $L = 10^6 \text{ fm}$ die $1s$ -Resonanz im Impulsintervall:

$$0 \leq \frac{k}{m_0} \leq 2.3$$

Die Energie der Resonanzen wird mit der Erhöhung des Impulses nach oben verschoben, weil die transversale Masse M_e zunimmt.

4. Die Abschirmung des Potentials

Die Resonanzzustände sein leer (nicht mit Elektronen besetzt). Wir können diese leeren Resonanzen interpretieren als ein Loch im Dirac – See. Die Resonanz ist ein instabiler Zustand. In solchen Zuständen bewegt sich das Teilchen relativ lange Zeit innerhalb des Systems. Schließlich zerfällt die Resonanz durch einen Tunnelprozess. Das ist ausgiebig für superkritische Atome in Gre_{16}^{85} diskutiert.

Die Zeitentwicklung einer Wellenfunktion für eine leere Resonanz (Loch) hat die Gestalt:
 $\omega_+ = \omega_0 - i\Gamma$

$$\Psi_{e^+} \approx \exp\{ -i\omega_+ t \} = \exp\{ -i\omega_0 t \} \exp\{ -\Gamma t \}$$

Zu dem Zerfall, wird dieser Zustand mit einem Elektron des Vakuums besetzt. Die Energie dieses Vakuumelektrons stimmt mit der Resonanzenergie überein. Die Zeitentwicklung für diesen Zustand wird durch

$$\Psi_{e^-} \approx \exp\{ -i\omega_- t \} = \exp\{ -i\omega_0 t \} \exp\{ \Gamma t \}$$

ausgedrückt, $\omega_- = \omega_0 + i\Gamma$.

Es entsteht eine Ladungswolke von Elektronen des überkritischen Vakuums in der Nähe des Strings, die das äußere Potential abschirmt.

Wenn ein starkes externes Potential vorliegt, wird eine Anzahl von gebundenen Zuständen des Dirac – Felds geladener Leptonen (wegen der kleinen Masse handelt es sich bevorzugt um Elektronen) überkritisch. Der stabile Grundzustand des Systems besteht dann aus einer räumlich lokalisierten Wolke von Elektronen die die Zentralladung umgeben.

Man kann diesen Zustand als das Ergebnis multipler Elektron – Positron – Paarerzeugung interpretieren, wobei die Elektronen in gebundene Zustände eingefangen werden und diese solange auffüllt bis das Pauli – Prinzip die weitere Paarerzeugung verbietet.

Physikalisch interessant ist die Frage, wie stark die Vakuum – Ladungswolke die überkritischen Zustände die Zentralladung abschirmen und damit das Potential abschwächen wird. In der vorliegenden Arbeit haben wir einen ersten Schritt unternommen, um diesen Effekt zu beschreiben.

Die Vakuum – Elektronen bilden ein Vielteilchensystem, das in erster Näherung(unter Vernachlässigung von Austauscheffekte und Quantenfluktuationen) in Rahmen der Hartree – Näherung beschrieben werden kann. Dabei erzeugen die Elektronen ein elektrostatisches Abschirmpotential

$$V(\vec{r}) = \sum_{E_n < -m_0} \int d^3r_l \frac{\Psi_n^+(\vec{r}_l) \Psi_n(\vec{r}_l)}{|\vec{r} - \vec{r}_l|}$$

wobei über alle überkritischen Zustände zu summieren ist.

Dieses Potential ist in die Dirac - Gleichung einzusetzen, was zu veränderten Wellenfunktionen und Eigenenergie führt. Im Hartree – Verfahren folgt dann eine Iteration der Lösung von Dirac – und Poisson – Gleichung bis Selbstkonsistenz erreicht ist.

In der vorliegenden Arbeit haben wir allerdings nur den ersten Schritt ausgeführt, also das Abschirmpotential mit den Elektronendichten des nackten Potentials berechnet. Das liefert eine obere Abschätzung des Effekts der Abschirmung.

Die Potentiale V_1 (8.74) und V_3 (8.76) sind monoton anwachsende Funktionen. Das Potential V_2 (8.75) ist eine abnehmende Funktion.

In der Nähe von $r = a$ gilt für das Potential V_3 ungefähr:

$$V_3(r \approx a) \approx -16\pi e^2 \sum_{m,n} \Lambda(m,n) \int_0^{\Lambda(m,n)} dk \left\{ \ln \left(\frac{\zeta_{mn}(r)}{a_{mn}} \right) \right\}$$

Weil die logarithmische Funktion schneller als die lineare Funktion abfällt, wird V_3 von der linearen Funktion (8.80) begrenzt.

$$V_3 = \frac{V_{3max.}}{a-b} (r - b)$$

$$\therefore V_3 \geq \frac{V_{3max.}}{a-b} (r - b) \quad \forall r \in [a, b]$$

Im Fall eines langen und dünnen Strings mit konstanter Ladung pro Länge nimmt die Anzahl der Resonanzen zu, wenn wir die Länge erhöhen. V_2 nimmt zu, weil sich auch der Faktor $\sum_{m,n} \Lambda(m,n)$ mit der Anzahl der Resonanzen erhöht. Wir bezeichnen mit L_F die Länge des Strings, bei welcher der gebundene Zustand die Fermi – Kante erreicht.

Für den Fall $L \approx L_F$ tauchen wenige gebundene Zustände in den Dirac – See. Das Potential der Vakuumwolke schirmt das Potential des Strings nicht voll ab. Ein Elektron erfährt eine anziehende Kraft.

$$\frac{V_{I+2}(r)}{m_o} = \left\{ \frac{V_o}{m_o} + 16\alpha\pi \sqrt{-\frac{V_o}{m_o}} \sum_{m,n} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\Delta_{mn}}{L_{Fmn}}\right)} \right\} \ln\left(\frac{L}{r}\right)$$

Für den Fall $L \gg L_F$ tauchen viele gebundene Zustände in den Dirac – Seen. Das Potential der Vakuumwolke schirmt das äußere Potential vollständig ab.

$$V_{I+2}(r) \approx \left\{ 1 - 8\alpha\pi \sum_{m,n} \ln\left(\frac{L}{L_{Fmn}}\right) \right\} V_o \ln\left(\frac{L}{r}\right)$$

Weil das Potential V_{I+2} das Vorzeichen mit der Erhöhung der Länge wechselt, muss das Potential den Wert $V_{I+2} = 0$ erreichen.

$$\frac{V_o}{m_o} = - \left\{ 16\alpha\pi \sum_{m,n} \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\Delta_{mn}}{L_{Fmn}}\right)} \right\}^2$$

Wir betrachten den Effekt der verschiedenen Lebensdauer τ der Resonanzen. Weil die tiefste Resonanz schneller als die anderen zerfällt, wird spontan mit einem Elektron der Dirac – See besetzt. Das Vakuum wird geladen. Es entsteht eine aus den tiefsten Resonanzen gebildete Ladungswolke, die das äußere Potential abschirmt.

Das äußere Potential wird vollständig durch die Elektronen im tiefsten radialen Quantenzustand abgeschirmt, wenn die obere Grenze des longitudinalen Impulses folgenden Wert annimmt

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{V_o}{16\pi\alpha} \quad , \quad -1 \ll \frac{V_o}{m_o} < 0$$

Die anderen Löcher sind nach oben verschoben, weil auf sie ein schwaches Potential wirkt. Um die nächste Zustand in die Dirac – See zu tauchen, vergrößern wir die Länge des Strings. Wenn die nächste Resonanz zerfällt, wird ein weiteres Elektron den Dirac – See besetzen. So haben wir einen zusätzlichen Beitrag zur Wolke des Vakuums, und das Potential wird weiter abgeschwächt.

Wir vergrößern die Länge des Strings weiter, dann können noch mehr Zustände in die Dirac – See tauchen. Im Limes $L \rightarrow \infty$ haben wir,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ V_o + 16\pi\alpha \left[A\left(0, \frac{1}{2}\right) + A\left(0, -\frac{1}{2}\right) + \dots \right] \right\} \rightarrow 0$$

und es folgt eine vollständige Abschirmung des äußeren Potentials.

Anhang A

Tabellen

V ₀ /m ₀	E/m ₀	a [fm]	b [fm]	c [fm]
-0,0025	0,0388	2470,8700	14368,2500	
-0,0033	0,9178	2145,0800	12179,5000	
-0,0040	0,9008	1953,3000	11283,2800	
-0,0048	0,8814	1795,7200	10098,5700	
-0,0056	0,8529	1612,9500	9152,5000	
-0,0071	0,8208	1468,0500	8157,0400	
-0,0091	0,7708	1207,2600	7255,8200	
-0,0125	0,6826	1103,6000	6198,6200	
-0,0200	0,4876	867,2000	4647,5000	
-0,0250	0,3588	773,9000	4399,9	
-0,0333	0,1373	667,2000	3700,5000	
-0,0500	-0,3044	539,3700	3061,5000	
-0,0825	-0,6377	479,2500	2747,1300	
-0,0714	-0,8767	446,2000	2558,0000	
-0,0760	-1,0000	431,4500	2474,5800	1,00E+15
-0,0833	-1,1980	410,1300	2370,1500	9,52E+13
-0,1000	-1,6450	371,2000	2145,2500	1,58E+12
-0,1250	-2,3210	327,5800	1904,0200	2,57E+10
-0,1429	-2,8080	303,7	1765,0300	3,23E+09
-0,2000	-4,3650	249,3700	1485,4700	4,03E+07
-0,2222	-4,9740	233,9700	1381,4700	1,70E+07
-0,2326	-5,2580	227,8300	1344,2900	1,10E+07
-0,2832	-6,0990	210,7000	1256,6300	3,84E+06
-0,6667	-17,3060	179,6800	780,7200	23881,070
-0,7892	-20,1890	159,0570	715,7000	14690,130
-1,0000	-26,7040	129,1500	608,6800	6884,410
-1,5000	-40,6320	100,8400	472,8200	2778,090
-2,0000	-55,2680	85,9900	395,5900	1694,450
-2,5000	-69,6800	78,5400	345,5800	1236,790
-3,0000	-84,1400	69,7500	331,6900	994,760
-3,2000	-89,9400	67,6100	300,3800	626,280
-3,4000	-95,7520	65,7800	269,6800	867,480
-3,6000	-101,5600	63,9500	281,0800	819,410
-3,8000	-107,3820	62,4100	272,5700	776,510
-4,0000	-113,2020	60,9400	265,3000	739,910
-4,3000	-121,9440	58,9700	255,4100	662,660
-5,0000	-142,3740	55,1400	236,8100	608,970
-5,5000	-156,9900	52,9100	229,3500	564,460
-6,0000	-230,3200	45,5400	182,6700	431,030
-10,0000	-289,2400	42,3700	169,9600	372,360
-13,0000	-377,7400	38,8600	156,2600	320,700
-16,0000	-486,3400	36,3200	148,2000	289,130
-20,0000	-584,5900	33,8000	135,8900	261,670
-25,0000	-732,5400	31,4400	126,3300	239,540
-30,0000	-880,5600	29,5800	119,1700	224,640
-40,0000	-1176,8200	26,9200	108,4600	205,300
-50,0000	-1473,2600	25,0300	100,8400	193,170
-60,0000	-1769,8200	23,5700	94,9900	184,740
-80,0000	-2363,1800	21,4400	86,4700	173,650
-100,0000	-2956,7500	19,9000	80,4000	166,550
-150,0000	-4441,3200	17,4200	70,3500	156,210
-200,0000	-5926,3200	15,8400	63,9900	150,450
-250,0000	-7411,7400	14,7100	59,4800	146,700
-300,0000	-8897,9000	13,8400	56,0200	144,030
-400,0000	-11866,8800	12,5600	50,9200	140,390
-500,0000	-14840,8200	11,8900	47,3200	138,010
-1000,0000	-29703,4600	9,2900	37,6200	132,400
-1500,0000	-44568,3600	8,1200	32,9000	130,070

Tabelle A1. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen die Potentialstärke

$$r_0 = 200 \text{ fm} , L = 10^{15} \text{ fm} , \frac{k}{m_0} = 0 , n = 0 , m = +\frac{1}{2} , s = +1$$

Vo/mo	E/mo	a [fm]	b [fm]	c [fm]
-0,0043	1,0098	1770,7000	10284,9000	
-0,0047	0,9999	1701,6000	9651,3900	
-0,0059	0,9706	1526,4400	8624,8500	
-0,0071	0,9384	1381,0300	7953,8000	
-0,0091	0,8882	1225,7000	6935,7200	
-0,0118	0,8191	1075,5600	6107,5700	
-0,0133	0,7780	1015,5000	5508,1800	
-0,0154	0,7250	939,3000	5315,4000	
-0,0200	0,6045	821,4000	4673,0500	
-0,0250	0,4732	733,3500	4152,1700	
-0,0333	0,2534	632,3700	3588,1000	
-0,0500	-0,1892	511,8000	2919,7000	
-0,0556	-0,3380	485,2300	2729,2100	
-0,0667	-0,6340	438,5000	2556,9100	
-0,0769	-0,9102	407,2100	2334,1700	
-0,0846	-1,1180	386,6900	2220,8500	
-0,1250	-2,2099	312,2200	1800,6600	1,60E+11
-0,2000	-4,2560	238,0500	1404,7200	1,50E+08
-0,2500	-5,6320	208,5800	1227,8100	1,40E+07
-0,6667	-17,2140	171,2900	753,2800	3,27E+04
-1,0000	-26,6190	126,3700	591,4100	8,43E+03
-3,0000	-84,0800	69,2000	307,1170	1,04E+03

Tabelle A2. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen die Potentialstärke

$$r_0 = 200 \text{ fm} , L = 10^{15} \text{ fm} , \frac{k}{m_0} = \frac{1}{2} , n = 0 , m = +\frac{1}{2} , s = +1$$

Vo/mo	E/mo	a [fm]	b [fm]	c [fm]
-0,0200	0,9021	866,9200	4958,9000	
-0,0250	0,8749	772,5600	4451,5100	
-0,0333	0,8283	666,3800	3824,6100	
-0,0455	0,7586	566,5600	3268,0500	
-0,0625	0,6578	478,6000	2770,3500	
-0,1000	0,4279	370,8100	2158,8000	
-0,1429	0,1556	303,2100	1783,7900	
-0,2000	-0,2190	248,9000	1478,7000	
-0,2500	-0,5550	217,3000	1301,9000	
-0,2564	-0,6001	214,3000	1271,3000	
-0,2632	-0,6460	210,8000	1253,5000	
-0,2703	-0,6930	207,2000	1237,7000	
-0,2778	-0,7460	203,8000	1214,5400	
-0,2817	-0,7730	202,2300	1198,0200	
-0,3003	-0,9000	200,0000	1165,2000	
-0,3148	-1,0000	200,0000	1130,3000	
-0,5000	-2,2960	200,0000	896,8000	74872,2000
-0,6667	-3,4900	179,5000	781,4000	23878,5900
-1,0000	-5,9800	129,0900	609,2000	6889,4500
-2,0000	-13,8210	85,9800	395,7100	1694,8300

Tabelle A3. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen die Potentialstärke

$$r_0 = 200 \text{ fm} , L = 10^6 \text{ fm} , \frac{k}{m_0} = 0 , n = 0 , m = +\frac{1}{2} , s = +1$$

ro [fm]	E/mo	a [fm]	b [fm]
0,00001	-0,64615	210,86000	1252,56800
1,00000	-0,64615	210,86000	1252,56800
50,00000	-0,64615	210,86000	1252,56800
100,00000	-0,64615	210,86000	1252,56800
130,00000	-0,64615	210,85900	1252,57000
170,00000	-0,64614	210,85800	1252,60800
200,00000	-0,64610	210,85050	1252,86300
230,00000	-0,64500	230,00000	1259,88000
260,00000	-0,64200	260,00000	1279,18000
300,00000	-0,63500	300,00000	1325,14400
500,00000	-0,61800	322,20000	1442,35000
700,00000	-0,60980	343,22000	1501,80000
1000,00000	-0,59600	379,35000	1606,58000
1300,00000	-0,58200	414,58000	1719,02000
1400,00000	-0,57800	426,60000	1752,35000
2000,00000	-0,55020	491,83000	1893,96000
2500,00000	-0,53400	553,86000	2122,72000
3000,00000	-0,53400	608,26000	2336,35000
4000,00000	-0,47400	705,29000	2711,13000
5000,00000	-0,43700	790,73000	3039,50000
8000,00000	-0,34600	1001,85000	3874,44000
10000,00000	-0,29800	1116,02000	4367,52000
50000,00000	0,08910	2528,18000	9705,21000
80000,00000	0,20940	3200,38000	12272,55000

Tabelle A4. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen den Radius

$$L = 10^6 \text{ fm} , \quad \frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{3,8} , \quad \frac{k}{m_0} = 0 , \quad n = 0 , \quad m = +\frac{1}{2} , \quad s = +1$$

L [fm]	Vo/mo	Ln(L)	a [fm]	b [fm]
1,00E+03	-2,8110	6,9078	72,1200	322,9100
5,00E+03	-1,1360	8,5172	119,0200	562,4000
1,00E+04	-0,8726	9,2100	141,7400	662,6000
1,00E+05	-0,4697	11,5100	200,0000	924,5800
1,00E+06	-0,3148	13,8100	200,0000	1130,3000
1,00E+07	-0,2354	16,1100	225,9600	1334,1300
1,00E+08	-0,1874	18,4200	259,2900	1518,0900
5,00E+08	-0,1639	20,0300	280,3200	1644,6900
1,00E+09	-0,1554	20,7200	289,4000	1685,2500
5,00E+09	-0,1387	22,3300	308,7000	1798,6300
1,00E+10	-0,1326	23,0200	316,9700	1840,6300
1,00E+11	-0,1155	25,3200	342,5500	1985,7900
1E+12	-0,1023	27,6300	366,7600	2114,3300
1,00E+13	-0,0918	29,9300	389,1200	2250,2900
1,00E+14	-0,0832	32,2300	410,9200	2361,1500
1E+15	-0,0760	34,5300	431,4500	2474,5900
1E+20	-0,0531	46,0500	522,2000	2996,6800
1E+25	-0,0408	57,5600	600,4200	3422,2040
1E+50	-0,0188	115,1200	894,9000	5074,1900
1E+75	-0,0122	172,6900	1114,1700	6335,1900

Tabelle A5. Kritisches Potential V_0 gegen die Länge

$$r_0 = 200 \text{ fm} , \quad \frac{E}{m_0} = -1 , \quad \frac{k}{m_0} = 0 , \quad n = 0 , \quad m = +\frac{1}{2} , \quad s = +1$$

ro [fm]	E/mo
1,00E-10	-0,7480
1,0000	-0,7480
100,0000	-0,7480
300,0000	-0,7360
600,0000	-0,6990
900,0000	-0,6560
1300,0000	-0,6020
1700,0000	-0,5540
2000,0000	-0,5220
2400,0000	-0,4840
2800,0000	-0,4506
3200,0000	-0,4209
3600,0000	-0,3950
4000,0000	-0,3699
4400,0000	-0,3480
4800,0000	-0,3280
5200,0000	-0,3090
5600,0000	-0,2904
6100,0000	-0,2698
6600,0000	-0,2508
7200,0000	-0,2297

Tabelle A6. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen den Radius (Taylor – Methode)

$$L = 10^6 \text{ fm} , \frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{4} , \frac{k}{m_0} = 0 , n = 0 , m = +\frac{1}{2} , s = +1$$

Vo/mo	E/mo
-0,0050	0,9740
-0,0063	0,9670
-0,0083	0,9560
-0,0125	0,9310
-0,0167	0,9060
-0,0200	0,8850
-0,0250	0,8540
-0,0333	0,8007
-0,0455	0,7210
-0,0556	0,6530
-0,0625	0,6060
-0,0714	0,5450
-0,1000	0,3470
-0,1176	0,2220
-0,1429	0,0420
-0,1538	-0,0370
-0,1667	-0,1296
-0,1852	-0,2650
-0,2041	-0,4040
-0,2174	-0,5020
-0,2326	-0,6140
-0,2500	-0,7440
-0,2703	-0,8950
-0,2778	-0,9507
-0,2843	-1,0000

Tabelle A7. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen die Potentialstärke (Taylor –Methode)

$$r_0 = 200 \text{ fm} , L = 10^6 \text{ fm} , \frac{k}{m_0} = 0 , n = 0 , m = +\frac{1}{2} , s = +1$$

$V(r=0)$	V_0/m_0	k/m_0	a [fm]	b (fm)
-6,6300	-0,7360	0,0000	161,8940	736,4600
-6,7500	-0,7490	0,5000	153,4600	712,0600
-7,0200	-0,7796	1,0000	140,1510	639,8000
-7,8400	-0,8698	2,0000	115,2300	518,0400
-9,6300	-1,0680	3,8730	88,1430	382,6000
-11,7400	-1,3020	6,0000	72,0600	301,1900
-14,7400	-1,6350	9,0000	59,2200	241,1000
-17,7800	-1,9720	12,0000	50,8200	196,4900
-20,7200	-2,2980	15,0000	46,5300	179,2900

Tabelle A8. Die Potentialstärke gegen den Impuls $p_z = k$

$r_0 = 200$ fm , $L = 10^6$ fm , $\frac{E}{m_0} = -4$, $n = 0$, $m = +\frac{1}{2}$, $s = +1$

E/m_0	k/m_0	a [fm]	b [fm]
-4,0000	0,0000	161,8940	736,4600
-3,9110	0,5000	156,7700	710,0600
-3,6740	1,0000	145,7720	660,2700
-2,9760	2,0000	126,0000	565,4600
-2,1510	3,0000	112,9270	496,8040
-1,2690	4,0000	102,9270	449,0580

Tabelle A9. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen den Impuls $p_z = k$

$r_0 = 200$ fm , $L = 10^6$ fm , $\frac{V_0}{m_0} = -0.736$, $n = 0$, $m = +\frac{1}{2}$, $s = +1$

k/m_0	E/m_0	a [fm]	b [fm]
0,0000	-0,6460	210,8000	1253,5000
0,5000	-0,5410	202,0970	1194,3120
1,0000	-0,2710	200,0000	1085,9400
1,5000	0,0920	200,0000	992,0000
2,3000	0,7620	200,0000	875,4140
3,5000	1,8560	200,0000	766,6000
4,0000	2,3260	182,8100	732,2200
4,5000	2,7990	167,9000	695,8400
5,0000	3,2760	158,0000	664,8700
7,0000	5,2100	133,8600	578,3900
10,0000	8,1470	114,8500	495,7400
15,0000	13,0840	97,5700	418,4800
20,0000	18,0420	87,5800	369,7600
25,0000	23,0100	80,6800	337,7500

Tabelle A10. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen den Impuls $p_z = k$

$r_0 = 200$ fm , $L = 10^6$ fm , $\frac{V_0}{m_0} = -0.263$, $n = 0$, $m = +\frac{1}{2}$, $s = +1$

L [fm]	E/m ₀	a [fm]	b [fm]
1,98E+03	1,0000	217,5900	1293,2300
1,00E+04	0,5940	217,8490	1285,4500
1,00E+05	0,0191	217,6880	1290,4600
1,00E+06	-0,5550	217,3000	1301,3000
2,17E+06	-0,7500	217,6800	1290,5800
5,90E+06	-1,0000	217,6200	1292,5600
1,00E+07	-1,1320	217,6400	1291,9200
1,00E+08	-1,7080	217,7200	1289,4800
1,00E+09	-2,2840	217,7900	1287,0400
1,00E+13	-4,5860	217,6600	1291,0800

Tabelle A11. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen die Länge des Strings

$$r_0 = 200 \text{ fm} , \frac{V_0}{m_0} = -0.25 , \frac{k}{m_0} = 0 , n = 0 , m = +\frac{1}{2} , s = +1$$

V ₀ /m ₀	E/m ₀	a [fm]	b [fm]
-0,0113	0,9000	20,8300	110,5000
-0,0200	0,8220	18,1800	95,1000
-0,0333	0,7020	17,4800	76,6100
-0,0500	0,5520	16,6800	65,5400
-0,0667	0,4020	15,9600	59,3300
-0,0833	0,2520	15,3100	55,3200
-0,1000	0,1020	14,7200	52,5100
-0,1250	-0,1230	13,9400	49,6000
-0,1429	-0,2840	13,9000	46,2500
-0,1667	-0,4980	12,8600	46,5000
-0,2000	-0,7980	12,1300	45,0000
-0,2222	-0,9980	11,7200	44,2400
-0,2500	-1,2480	11,2400	43,4500

V ₀ /m ₀	E/m ₀	a [fm]	b [fm]
-0,0100	0,8980	6,5300	34,9600
-0,0125	0,8710	5,8500	30,9700
-0,0167	0,8260	5,0100	27,5600
-0,0200	0,7880	4,6900	23,2400
-0,0333	0,6400	3,5200	19,1900
-0,0500	0,4480	2,8900	15,0100
-0,0667	0,2560	2,4500	13,3600
-0,0833	0,0590	2,1900	11,6700
-0,1000	-0,1380	1,9800	10,7000
-0,1250	-0,4360	1,7400	9,6100
-0,1471	-0,7040	1,6000	8,6800
-0,1667	-0,9420	1,4800	8,1300
-0,2000	-1,3490	1,3300	7,4000

Tabelle A12 Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen die Potentialstärke

$$[A]: L = 10^6 \text{ fm} , r_0 = 200 \text{ fm} , [B]: L = 10^6 \text{ fm} , r_0 = 10^{-3} \text{ fm} ; \frac{k}{m_0} = 0 , m = \pm 1 , n = 0$$

ro [fm]	E/mo	a [fm]	b [fm]
200,0000	0,5220	16,6800	65,5400
150,0000	0,5380	15,8800	51,6300
100,0000	0,5204	11,5600	47,2500
50,0000	0,4920	8,0300	33,9400
25,0000	0,4690	5,7300	23,7100
10,0000	0,4540	3,7800	17,2000
5,0000	0,4490	3,1100	15,3600
3,0000	0,4480	2,8900	15,0100
2,0000	0,4480	2,8900	15,0100

Tabelle A13. Eigenenergie des tiefsten Zustands gegen den Radius

$$L = 10^6 \text{ fm} , \frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{20} , \frac{k}{m_0} = 0 , m = \pm 1 , n = 0$$

Anhang B

DIE KLEIN – GORDON GLEICHUNG

B1. Die radiale Klein – Gordon Gleichung

Die Klein – Gordon Gleichung ist

$$[(E - V)^2 - m_{\pi}^2 c^4 + \hbar^2 c^2 \nabla^2] \Psi = 0 \quad (\text{B1})$$

In Zylinderkoordinaten wird der Operator ∇^2 ausgedrückt

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{B2})$$

Wir stellen (B2) in (B1) ein

$$-\hbar^2 c^2 \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] = [(E - V)^2 - m_{\pi}^2 c^4] \Psi \quad (\text{B3})$$

Durch die Methode der Trennung der Variablen lösen wir die partielle Differentialgleichung (B3). Voraussetzung dafür ist, dass sich das Klein – Gordon Feld als Produkt dreier Funktionen schreiben lässt.

$$\Psi = \chi(r) \Pi(\varphi) Z(z) \quad (\text{B4})$$

Setzt man dies in (B3) ein und dividiert die resultierende Gleichung durch die Produkt (B4), so erhält man:

$$-\hbar^2 c^2 \left[\frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{\chi} \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + \frac{1}{\Pi} \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \right] = [(E - V)^2 - m_{\pi}^2 c^4] \quad (\text{B5})$$

Wie üblich, führt dieser Separationsansatz auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \quad (\text{B6})$$

$$\frac{d^2 \Pi}{d\varphi^2} + m^2 \Pi = 0 \quad , \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (\text{B7})$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + \left\{ \hbar^{-2} c^{-2} [(E - V)^2 - m_{\pi}^2 c^4] - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right\} \chi = 0 \quad (\text{B8})$$

Die Lösungen der ersten beiden Gleichungen sind elementar und lauten:

$$Z(z) = \exp(\pm ikz) \quad (\text{B9})$$

$$\Pi(\varphi) = \exp(\pm im\varphi) \quad (\text{B10})$$

Die Radialgleichung lässt sich durch die Variablentransformation

$$\chi = \frac{f}{\sqrt{r}} \quad (\text{B11})$$

auf eine Schrödinger – artige Form bringen

$$\frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{df}{dr} - \frac{1}{2r^{\frac{5}{2}}} f \quad (\text{B12})$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d^2f}{dr^2} - \frac{1}{r^{\frac{3}{2}}} \frac{df}{dr} + \frac{3}{4} \frac{f}{r^{\frac{5}{2}}} \quad (\text{B13})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{4} \frac{f}{r^{\frac{5}{2}}} \quad (\text{B14})$$

Wir stellen (B14) in (B8) ein und erhalten

$$\frac{d^2f}{dr^2} + p_{\pi}^2 f = 0 \quad (\text{B15})$$

Wobei der quadrierte effektive Impuls die folgende Form hat:

$$p_{\pi}^2 = \hbar^{-2} c^{-2} [(E - V)^2 - m_{\pi}^2 c^4] - k^2 + \frac{(1 - 2m)(1 + 2m)}{4r^2} \quad (\text{B16})$$

oder

$$p_{\pi}^2 = (E - V)^2 - M_{\pi}^2 + \frac{(1 - 2m)(1 + 2m)}{4r^2} \quad (\text{B17})$$

mit der Ersetzung $\hbar = c = 1$ und der transversale Masse

$$M_{\pi} = \sqrt{m_{\pi}^2 + k^2} \quad (\text{B18})$$

B2. Die Umkehrpunkte des effektiven Impulses

Wir betrachten den Fall $m = 0$,

$$p_{\pi}^2(r \rightarrow 0) = +\infty \quad (\text{B19})$$

Dann besitzt der effektive Impuls nur einen für Energien in Bereich $-M_e < E < M_e$.

Für die anderen Fälle haben wir

$$m = \pm 1, \pm 2, \dots \Rightarrow p_{\pi}^2(r \rightarrow 0) = -\infty \quad (\text{B20})$$

Im diesem Fall besitzt der effektive Impuls zwei Umkehrpunkte für Energien in Bereich $-M_e < E < M_e$ liegt. Der klassisch erlaubte Bereich $a \leq r \leq b$ wird von zwei Umkehrpunkten begrenzt. Wenn die Energie im Bereich $E < -M_e$ liegt, besitzt das effektive Potential drei Umkehrpunkte: Zwei erlaubte Gebiete getrennt von einer Barriere.

Der innere Umkehrpunkt a wird durch die Drehimpuls – Barriere bestimmt und fehlt für die Zustände mit $m = 0$. Der dritte Umkehrpunkt c tritt für überkritische Zustände auf und beschreibt den äußeren Rand des Tunnelbereiches durch die Schwelle der Klein - Gordon Gleichung.

Wenn das Potential für $r \rightarrow \infty$ gegen Null geht gilt die Asymptotik

$$p_{\pi}^2(r \rightarrow \infty) = E^2 - M_{\pi}^2 = (E + M_{\pi})(E - M_{\pi}) \quad (\text{B21})$$

$$E \in [-M_{\pi}, M_{\pi}] \Rightarrow p_{\pi}^2(r \rightarrow \infty) < 0 \quad (\text{B22})$$

$$E = \pm M_{\pi} \Rightarrow p_{\pi}^2(r \rightarrow \infty) = 0 \quad (\text{B23})$$

$$E > M_{\pi} \text{ oder } E < -M_{\pi} \Rightarrow p_{\pi}^2(r \rightarrow \infty) > 0 \quad (\text{B24})$$

B3. Die gebundenen Zustände

Wir betrachten erst den Fall $m = 0$. Der effektive Impuls besitzt nur einen Umkehrpunkt

$$p_{\pi}^2 = (E - V)^2 - M_{\pi}^2 + \frac{l}{4r^2} \quad (\text{B25})$$

In der Umgebung von b wird die Wellenfunktion durch (5.20) ausgedrückt:

$$f_b(r \ll b) = \frac{c}{[p_{\pi}^2(r)]^{1/4}} \alpha_b \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\text{B26})$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p_\pi^2(E, t)}$$

$$f_b(r \gg b) = \frac{c}{[-p_\pi^2(r)]^{\frac{1}{4}}} \frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_b(r)) \quad (\text{B27})$$

$$\zeta_b(r) = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p_\pi^2(E, t)}$$

Wir nehmen an, dass das Potential Innenraum des Zylinders konstant ist, $V = V_0$

Im Inneren des Zylinders ist die Wellenfunktion:

$$f(r) = \alpha \sqrt{r} J_0(\sigma r) \quad (\text{B28})$$

$$\sigma = \sqrt{(E - V_0)^2 - M_\pi^2} \quad (\text{B29})$$

Die Energie lässt sich aus der Forderung der Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer ersten Ableitung bei $r = r_0$ bestimmen. Von (B26) erhalten wir

$$\frac{f'_b}{f_b} = - \left\{ \text{ctg} \left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4} \right) (p_\pi^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4p_\pi^2} \right\} \quad (\text{B30})$$

Von (B28)

$$\frac{f'}{f} = \frac{1}{2r} - \sigma \frac{J_1(\sigma r)}{J_0(\sigma r)} \quad (\text{B31})$$

Die Eigenenergie bestimmen wir aus der Bedingung: $\left. \frac{f'_b}{f_b} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{f'}{f} \right|_{r=r_0}$

$$\frac{1}{2r_0} - \sigma \frac{J_1(\sigma r_0)}{J_0(\sigma r_0)} = - \left\{ \text{ctg} \left(\zeta_b(r_0) + \frac{\pi}{4} \right) (p_\pi^2(r_0))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4p_\pi^2(r_0)} \right\} \quad (\text{B32})$$

Wir benutzen die Formel

$$J_0(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \text{und} \quad J_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$\frac{1}{2r_0} - \sigma \text{ctg}(\sigma r_0) = \text{ctg} \left(\zeta_b(r_0) + \frac{\pi}{4} \right) (p_\pi^2(r_0))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4p_\pi^2(r_0)} \quad (\text{B33})$$

Für die anderen Fälle besitzt der effektive Impuls zwei Umkehrpunkte. Im Bereich $a \leq r \leq b$ sind die Lösungen durch die asymptotische Darstellung von Airy - Funktionen gegeben (5.41)-(5.42)

$$f_a(r \ll b) = \frac{\alpha_a c}{[p_\pi^2(r)]^{1/4}} \sin\left(\zeta_a(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (B34)$$

$$\zeta_a(r) = \int_{a(E)}^r dt \sqrt{p_\pi^2(E, t)}$$

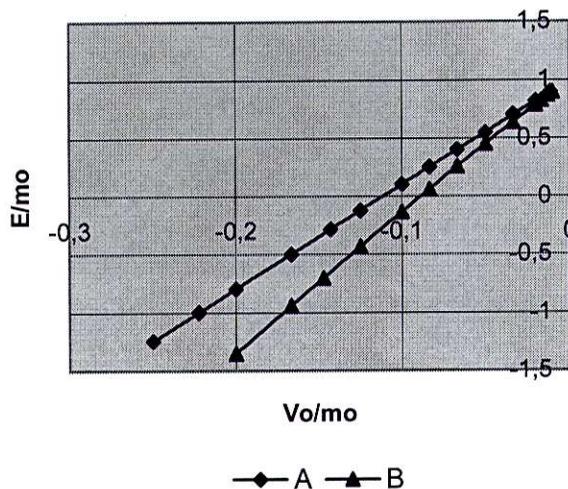
$$f_b(r \gg a) = \frac{\alpha_b c}{[p_\pi^2(r)]^{1/4}} \sin\left(\zeta_b(r) + \frac{\pi}{4}\right) \quad (B35)$$

$$\zeta_b(r) = \int_r^{b(E)} dt \sqrt{p_\pi^2(E, t)}$$

Die Eigenenergie wird mit der Bohr -Sommerfeld – Quantisierung bestimmt:

$$\int_{a(E)}^{b(E)} dt \sqrt{p_\pi^2(E, t)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \quad n = 0, 1, \dots \quad (B36)$$

POTENTIAL - ENERGIE



A: $L = 10^6$ fm , $r_0 = 200$ fm , B: $L = 10^6$ fm , $r_0 = 10^{-3}$ fm ; $\frac{k}{m_0} = 0$, $m = \pm 1$, $n = 0$

Abb.B1. Die Energie des tiefsten gebundenen Zustands gegen die Potentialtiefe (TabelleA.12). Die Energie sinkt monoton mit wachsender Potentialstärke.

Hier ist zu beachten, dass $f_b(r)$ die asymptotisch (für $r \rightarrow \infty$) gegen Null gehende Lösung der Klein - Gordon- Gleichung ist

$$f_b(r \rightarrow \infty) = \frac{c}{[-p_\pi^2(r)]^{1/4}} \frac{\alpha_b}{2} \exp(-\zeta_b(r)) \quad (B39)$$

$$\zeta_b(r) = \int_{b(E)}^r dt \sqrt{-p_\pi^2(E, t)}$$

Der Wertebereich der Eigenenergie ist: $-M_e < E < M_e$. Hier liegen gebundene Zustände.

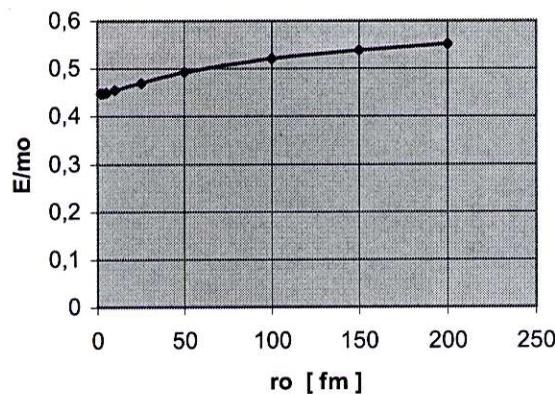
Die Viererstromdichte wird ausgedrückt [Gre₁₆⁴²] :

$$j_\mu = \frac{ie}{2m_\pi} \left\{ \Psi^* \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Psi^* \right\} - \frac{e^2}{m_\pi} A_\mu \Psi \Psi^* \quad (B40)$$

Die Ladungsdichte ist dann

$$\rho = j_0 = \frac{ie}{2m_\pi} \left\{ \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right\} - \frac{e^2}{m_\pi} A_0 \Psi \Psi^* \quad (B41)$$

RADIUS - ENERGIE



$$L = 10^6 \text{ fm} , \quad \frac{V_0}{m_0} = -\frac{1}{20} , \quad \frac{k}{m_0} = 0 , \quad m = \pm 1 , \quad n = 0$$

Abb.B3. Die Energie des gebundenen Zustands mit der magnetischen Quantenzahl $m = \pm 1$ gegen den Radius des Zylinders (**TabelleA.13**). Verkleinert man den Radius r_0 des Zylinders, so tendiert die Eigenenergie asymptotisch nach einem bestimmten Wert der Energie.

Ein stationäre Zustand der Klein – Gordon Gleichung hat die Form

$$\Psi = \exp\{ -iEt \} \chi(r) e^{\pm im\varphi} e^{\pm ikz} \quad (\text{B42})$$

Wobei $|E|$ die Energie des Teilchens bedeutet. Wir betrachten ein negativ geladenes Teilchen in einem elektrostatischen Potential des Strings (2.70) und (2.71): $V = eA_0 < 0$

$$\rho(r) = \frac{e}{m_\pi} \{ E - V(r) \} \chi(r) \chi^*(r) \quad (\text{B43})$$

Wo immer die potentielle Energie große Werte annimmt, so dass $E > V(r)$ wird, hat die Ladungsdichte umgekehrte Vorzeichen gegenüber der Teilchenladung. Die physikalische Bedeutung dieses Vorzeichenwechsels von der Ladungsdichte in starken Feldern kann man nur im Rahmen der Feldtheorie richtig verstehen, wo die Teilchenzahl variabel wird.

Zu beachten ist auch, dass für Pionen als Bosonen das Pauli – Prinzip nicht gilt und somit ein Zustand im Prinzip mit beliebig vielen Pionen besetzt werden darf. Das gilt nur insoweit die Pion – Pion – Wechselwirkung vernachlässigt wird. Die Wechselwirkung der Pionen untereinander verhindert letzten Endes die unendliche $\pi^+ - \pi^-$ - Produktion.

LITERATURVERZEICHNIS

1. **ABRAMOWITZ M. und STEGUN I. A.**, Pocketbook of Mathematical Functions, Verlag Harri Deutsch, 1984
2. **AUGUSTIN JÜRGEN**, Quantenmechanische Beschreibung von Photonenerzeugung im ultrarelativistischen Elektronen – Channeling, Frankfurt am Main 1993.
3. **BERTLMANN REINHOL**, Anomalies in Quantum Field Theory, 1996.
4. **BONGAARTS P. J. M.**, The Electron – Positron Field, Coupled to External Electromagnetic Potentials, as an Elementary C^* Algebra Theory, Annals of Physics: 56, 108 -139(1970).
5. **CHANDRASEKHAR S.**, The Mathematical Theory of Black Holes, 1983.
6. **DAVIES P. und BIRRELL N.**, Quantum Fields in Curved Space, 1994
7. **DeWITT BRYCE S.**, Dynamical Theory of Groups and Fields in Relativity, Groups and Topology
8. **FELSAGER B.**, Geometry, Particles, and Fields, 1998.
9. **FRÖMAN N., FRÖMAN O., JKW APROXIMATION**, Contributions to the Theory, 1965.
10. **GÄRTNER PETER**; Diplomarbeit, Frankfurt 1979.
11. **GÄRNER P., HEINZ U., MÜLLER B., GREINER W.**, Limiting Charge for Electrostatic Point Source, Z. Phys. A – 300, 143 – 155(1981).
12. **GESZTESY F., PITTNER L.**, Electrons in logarithmic Potentials II. Solution of the Dirac equation, J. Phys. A: Vol. 11, No.4, 1978.
13. **GRADSHTEYN I.S. und RYZHIK I. M.**, Table of Integrals, Series, and Products, ACADEMIC PRESS, New York and London, 1965.
14. **GREINER W.**, Klassische Elektrodynamik , Verlag Harri Deutsch, Band 6, 1987.
15. **GREINER W.**, Quanten - Mechanik , Verlag Harri Deutsch, Band 6, 1987.
16. **GREINER W.**, Relativistische Quantenmechanik – Wellengleichungen, Verlag Harri Deutsch, Band 6, 1987.
17. **GREINER W., MÜLLER B., RAFELSKI J.**, Quantum Electrodynamics of Strong Fields, Springer – Verlag, 1985.

18. **GREINER W., REINHARDT J.**, Quantenelektrodynamik, Verlag Harri Deutsch, 1995.
19. **GRIBOV V. N.**, Gauge Theories and Quark Confinement, PHASIS, Moscow, 2002.
20. **HERING E., MARTIN R., STOHRER M.**, Taschenbuch der Mathematik und Physik, 2001.
21. **HINDMARSH M. B. and KIBBLE T. W. B.**, Cosmic String, 1995
22. **HAWKING S. W., ELLIS G. F. R.**, The large scale structure of space – time, 1973.
23. **JACKSON D.** , Klassische Elektrodynamik, 3 überarbeitete Auflage, Walter de Gruyter, Berlin . New York, 2002.
24. **LANDAU L. D. und LIFSHITZ E.M.**, Klassische Feldtheorie, II, Verlag Harri Deutsch, 1997.
25. **LANDAU L. D. und LIFSHITZ E.M.**, Quantenmechanik, III , Akademie – Verlag Berlin, 1987.
26. **MIGDAL A. B.**, Vacuum polarization in strong fields and pion condensation, Usp. Fiz. Nauk 123, 369 – 402.
27. **MILLER S. C., GOOD R. H.** , Phys. Rev. 91, 174, 1953.
28. **MÜLLER – KIRSTEN H .J. W., WIEDEMANN A.**, SUPERSYMMETRY, 1987.
29. **REINHARDT J., MÜLLER B., GREINER W.**, Theory of positron production in heavy – ion collisions, Physical Review A24 – 1981.
30. **SCHARF G., SEIPP H .P.**, Charged vacuum, spontaneous positron production and all that, Physics Letters 108B – 3 – 1981.
31. **SHISHKIN G. V., VILLALBA V. M .,** J. Math. Phys. 30, 2132 und 2373, 1989.
32. **SKARZHINSKY V. D, HARARI D. D., JASPER U.**, Quantum electrodynamics in the gravitational field of a cosmic string, Physical Review D49 – 2 – 1994.
33. **SMIRNOW W. I.**, Lehrbuch der höheren Mathematik, Teil II, Verlag Harri Deutsch, 1995.
34. **SMIRNOW W. I.**, Lehrbuch der höheren Mathematik, Teil III/2, Verlag Harri Deutsch, 1995.
35. **VILENKIN A.**, Cosmic Strings and Domain Walls, 1984

36. **VILENKIN A.**, Gravitational field of Vacuum domain walls and strings, Physical Review D23 – 4 - 1981.
37. **WATSON G.N.**, Theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1966.
38. **WEINBERG S.**, Gravitation and Cosmology, 1972.
39. **WEINBERG S.**, The Quantum Theory of Fields I, II, 1995.
40. **WHEELER J. A.**, Geometrodynamics, 1962.
41. **WICHMANN E. H., KROLL N. M.**, Phys. Rev. 101 , 846, 1956.
42. **ZELDOVICH YA. B. and POPOV V. S.**, Electronic Structure of Superheavy Atoms, Usp. Fiz. Nauk 105, 403 – 440.

DANKSAGUNG

Ich danke besonders **Herrn Prof. Dr.Dr.h.c.mult. Walter Greiner** für die Aufnahme in das **Institut für Theoretische Physik** und die hervorragenden Arbeitsbedingungen, die Aufgabenstellung, sowie sein reges Interesse am Fortschritt meiner Arbeit.

Ganz besonders großer Dank gilt **Herrn Dr. Joachim Reinhardt**, der meine Arbeit betreute. Seine stetige wohlwollende Unterstützung, über das Fachliche hinaus, hat entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beitragen. Für alle möglichen und unmöglichen Fragen war er stets der richtige Ansprechpartner

Ich danke dem **DAAD** für seine Unterstützung während meines Aufenthalts am **Institut für Theoretische Physik**.

LEBENS LAUF

Zur Person

Name	Luis Rommel Anaguano L.
Geburtstag	06.05.1969
Anschrift	Homburgerstraße 232 - Preungesheim
Geburtsort	Quito – Ecuador

Schulen

1975 - 1981	Juan de Velasco Schule in Tena
1981 - 1987	San Jose Gymnasium in Tena, Abitur

Studium

1987 – 1994	Maschinenbau - Studium an der Escuela Superior Politecnica de Chimborazo Abschluß: Maschinenbau - Ingenieur
1994 – 1998	Physik – Studium an der Escuela Politecnica Nacional – Quito Abschluß: Diplom - Physiker
Oktober 1998 – März 1999	Elektronik – Studium an der Escuela Politecnica Nacional – Quito
1998 – 2000	Deutschkurse am Goethe - Institut von Quito
03.12.2001 bis 27.03.2002	Deutschkurse am Goethe - Institut von Mannheim

01.04.2002 bis 10. 2005

Wiss. Mitarbeiter am Institut für Theoretische
Physik. Anfertigen der Dissertation **Das Dirac
- Feld im elektromagnetischen Potential
eines geladenen Strings** unter der Leitung von
Dr. J. Reinhardt und Prof. Dr. W. Greiner.